



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

# MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ SPOTŘEBY PALIVA VOZIDLA

MATHEMATICAL MODELLING OF VEHICLE FUEL CONSUMPTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

JAN DRAŽKA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2010/2011

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Jan Dražka

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Matematické modelování spotřeby paliva vozidla**

v anglickém jazyce:

### **Mathematical Modelling of Vehicle Fuel Consumption**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student provede rešerši používaného matematického popisu spotřeby paliva vozidel.

Následně vypracuje zjednodušený matematický model pohybu vozidla a matematický popis jeho dráhy. S využitím výše uvedených kroků sestaví simulační model spotřeby paliva pro režimy jízdy vozidla po zadané trajektorii.

Odborní konzultanti: Ing. Petr Porteš, Dr., Ing. Pavel Ramík, Ing. Lubomír Drápal.

Cíle bakalářské práce:

S využitím simulačních výpočtů stanovte optimální jízdní režim z hlediska spotřeby paliva.

Seznam odborné literatury:

Vlk, F: Dynamika motorových vozidel, Nakladatelství a vydavatelství Vlk, Brno 2006

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 26.10.2010

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## **ABSTRAKT:**

Práce se zabývá modelováním pohybu a spotřeby paliva automobilu s využitím reálných dat. Práce obsahuje jak přípravu vstupních dat do vhodné matematické formy, tak sestavení celkového matematického simulačního modelu. Hlavním cílem práce je porovnání vybraných jízdních režimů automobilu z hlediska spotřeby paliva a jejich optimalizace. Simulační model je naprogramován v prostředí MATLAB a v programu GAMS, ve kterém jsou využity vybrané optimalizační algoritmy.

## **ABSTRACT:**

This bachelor's thesis deals with a model building of vehicle's model based on real data and with a modelling of it's movement and it's fuel consumption. The thesis includes a preparation of input data as well as model building. The main aim of the thesis is the comparison among selected driving modes from the point of fuel consumption and it's optimization. This comparison is simulated in MATLAB environment and GAMS with the use of selected optimization algorithms.

## **KLÍČOVÁ SLOVA:**

Spotřeba paliva, automobil, modelování, optimalizace.

## **KEY WORDS:**

Fuel consumption, vehicle, model building, optimization.

DRAŽKA, Jan: *Matematické modelování spotřeby paliva vozidla: Bakalářská práce*, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2011, 60 s. Vedoucí práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.



*Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Matematické modelování spotřeby paliva vozidla vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Pavla Popely, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.*

*Jan Dražka*



*Na tomto místě bych velmi rád poděkoval všem, kteří mi pomáhali s mou bakalářskou prací. Můj dík patří především vedoucímu mé práce RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D. a také hlavnímu konzultantovi Ing. Pavlu Ramíkovi za jejich čas a laskavé i odborné vedení. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Petru Portešovi, Dr., Ing. Lubomíru Drápalovi a doc. RNDr. Liboru Čermákovi, CSc., neboť i oni mi nemalým způsobem a ochotně pomohli.*

*Janek Dražka*





# OBSAH

## ÚVOD

### 1. SESTAVENÍ MODELU AUTOMOBILU A JEHO POHYBU

#### 1.1 Úvod do problematiky, matematické nadefinování veličin

- 1.1.1 Definice hmotnostní spotřeby paliva
- 1.1.2 Definice požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva
- 1.1.3 Definice zařazeného rychlostního stupně

#### 1.2 Rozbor sil působících na automobil

- 1.2.1 Zavedení kroutícího momentu a hnací síly
- 1.2.2 Zavedení vnějších odporových sil
- 1.2.3 Zavedení vnitřních odporových sil
- 1.2.4 Zavedení součinitele rotačních částí
- 1.2.5 Výsledná síla působící na automobil

#### 1.3 Rozbor a aproximace diagramu dráhových spotřeby paliva

- 1.3.1 Otázka vhodné aproximace diagramu
- 1.3.2 Prvotní aproximace diagramu
- 1.3.3 Zlepšení aproximace diagramu

#### 1.4 Zavedení celkových spotřeb pomocí funkcionálu

- 1.4.1 Zavedení časové spotřeby paliva
- 1.4.2 Vztah mezi časovou spotřebou paliva  $S_t$  a dráhovou spotřebou  $S$
- 1.4.3 Zavedení celkové časové a dráhové spotřeby paliva

#### 1.5 Shrnutí a matematická formulace úlohy

### 2. SIMULACE V PROSTŘEDÍ MATLAB A GAMS

#### 2.1 Formulace úlohy v matematickém softwaru GAMS

- 2.1.1 Stručná formulace
- 2.1.2 Podrobná formulace
  - 2.1.2.1. Předepsání konstant a předem známých veličin
  - 2.1.2.2. Předepsání počáteční podmínky
  - 2.1.2.3. Výpočet veličin v kroku 0
  - 2.1.2.4. Výpočet veličin v kroku  $k$
  - 2.1.2.5. Předepsání omezení
  - 2.1.2.6. Definice účelové funkce
  - 2.1.2.7. Výpočet účelové funkce

## **2.2 Formulace úlohy v matematickém softwaru MATLAB**

2.2.1 Rozbor úlohy

2.2.2 Řešení úlohy

2.2.3 Zobrazení výsledku úlohy a závěr

## **3. POROVNÁNÍ VYBRANÝCH MODELOVÝCH JÍZDNÍCH REŽIMŮ**

3.1 Optimální jízdní režim po rovině

3.2 Optimální jízdní režim pro rozjíždění

3.3 Optimální jízdní režim při jízdě do kopce

## **ZÁVĚR**

## **PŘÍLOHY**

## **LITERATURA**

# ÚVOD

Důležitou součástí života obyvatel v dnešní době je doprava osobním automobilem. V současné době se snižuje pořizovací cena automobilů, ale jejich provoz a cena pohonných hmot neustále narůstá. Mnoho řidičů se snaží snížit náklady na provoz snížením spotřeby paliva automobilu. Většina řidičů jezdí denně pravidelně nějakou zaběhnutou trasu (cesta do práce, služební cesta...). Někteří z nich si kladou otázku, jak snížit výdaje za benzín tím, že vhodným jízdním režimem sníží průměrnou spotřebu paliva.

Při jízdě po dálnici někteří řidiči radí jet co nejpomaleji na co nejvyšší rychlostní stupeň a tuto rychlost si stále udržovat. Jiní radí automobil střídavě rozjíždět a střídavě vyřazovat. Při jízdě po městě, kde se automobil často rozjíždí a opětovně brzdí, se vynořuje otázka jak snížit spotřebu paliva při rozjezdu. Je vhodné plynový pedál „lechtat“ nebo naopak se rozjet prudce a co nejdříve dosáhnout rychlosti, kdy lze zařadit nejvyšší rychlostní stupeň? Při jízdě mezi obcemi v členitém terénu je vhodné automobil před kopcem dostatečně rozjet a vyjet kopec na nejvyšší rychlostní stupeň? Nebo spíše automobil nerozjíždět zbytečně moc za cenu toho, že v kopci bude třeba i nutno podřadit? A jestliže jeden jízdní režim je výhodnější než druhý, jak velkého rozdílu v průměrné spotřebě se dá dosáhnout?

Tato práce má za cíl dát odpověď na podobné otázky na základě matematického rozboru problému spotřeby paliva automobilu a jeho optimalizace. Práce je rozčleněna do tří kapitol. V první kapitole je matematicky popsán automobil, jeho pohyb po kinematické i dynamické stránce a spotřebu paliva. V jejím závěru je nastíněna obecná matematická formulace problému jako minimalizace funkcionálu. V druhé kapitole je úloha formulována o něco přesněji a je vyloženo, jakým způsobem byla matematická úloha minimalizace funkcionálu implementována od prostředí MATLAB a GAMS. V třetí kapitole práce matematicky formuluje výše zmíněné otázky a prostřednictvím simulace a optimalizace v programu GAMS se na ně snaží podloženým způsobem odpovědět.

# KAPITOLA 1

## SESTAVENÍ MODELU AUTOMOBILU A JEHO POHYBU

V této kapitole budou zavedeny a přesně nadefinovány veškeré pojmy potřebné k sestavení modelu pohybu vozidla související jak s kinematickým a s dynamickým pohledem na pohyb vozidla tak se spotřebou paliva. Bude uvedeno, z jakých dat a fyzikálních konstant bude model vycházet. V případě, že některá data nebudou k dispozici, bude uvedeno, jakým způsobem budou nahrazena či aproximována a jak budou v modelu zahrnuta.

V závěru kapitoly bude nastíněna obecná matematická formulace úlohy. V dalších dvou kapitolách bude pojednáno o implementaci modelu do prostředí MATLAB a GAMS a porovnání vybraných jízdních režimů z hlediska spotřeby paliva.

### 1.1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY, MATEMATICKÉ NADEFINOVÁNÍ VELIČIN

V této podkapitole si uvedeme základní definice a pojmy související s pohybem vozidla a spotřebou paliva.

#### 1.1.1 Definice hmotnostní spotřeby paliva

Do motoru automobilu je v průběhu jízdy přiváděno palivo. Definujme hmotnostní spotřebu paliva  $\alpha$  jako množství paliva  $dm$  dodaného do motoru za jednotku času  $dt$ . Tedy:

$$\alpha = \frac{dm}{dt} \quad (1.1)$$

Pro daný motor v naší práci uvažujme, že hmotnostní spotřeba paliva nabývá hodnot  $\alpha \in \langle \alpha_{MIN} = 0; \alpha_{MAX} \rangle$ , kde  $\alpha_{MAX}$  je maximální možná hodnota hmotnostní spotřeby paliva, která je dána konstrukcí motoru. Motor tak dává maximální možný hnací moment, který odpovídá momentové charakteristice motoru.

Mezi mírou sešlápnutí plynového pedálu řidičem a hmotnostní spotřebou paliva dodávaného do motoru je složitý vztah, neboť vstříkování paliva je řízeno řídicí jednotkou motoru, která vyhodnocuje i mnoho dalších veličin – např. teplotu chladicí kapaliny motoru, teplotu a průtok nasávaného vzduchu, teplotu oleje, složení výfukových plynů, atd. Mezi těmito informacemi hraje důležitou ale nikoli jedinou roli právě míra sešlápnutí plynového pedálu. V naší práci se nebudeme detailně zabývat vztahem mezi mírou sešlápnutí plynového pedálu a hmotnostní spotřebou paliva, neboť to by překračovalo rámec této práce, ale omezíme se na obecný předpoklad, že zde tento vztah existuje.

#### 1.1.2 Definice požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva

Dopustíme se také zjednodušení, že všechny veličiny (kromě míry sešlápnutí plynového pedálu), které mají vliv na hmotnostní spotřebu paliva (teplota motoru, stav oleje atd.), shrneme a budeme předpokládat, že hmotnostní spotřeba paliva je funkcí pouze jedné

veličiny, vyjadřující požadavek řidiče na jízdní režim a jemu odpovídající spotřebu paliva, kterou označíme jako  $\varphi$  a nazveme požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva. Tento předpoklad můžeme symbolicky vyjádřit jako:

$$\alpha = f_{\alpha}(\varphi) \quad (1.2)$$

Protože požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$  bude v naší práci hrát důležitou roli, definujme ho v následujících bodech takto:

1) Požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$  může být funkcí času  $t$  nebo funkcí dráhy  $s$ , po které se automobil pohybuje. Obě dvě vyjádření se nám budou hodit v různých případech. Symbolicky můžeme vyjádřit  $\varphi = f_{\varphi t}(t)$  nebo  $\varphi = f_{\varphi s}(s)$

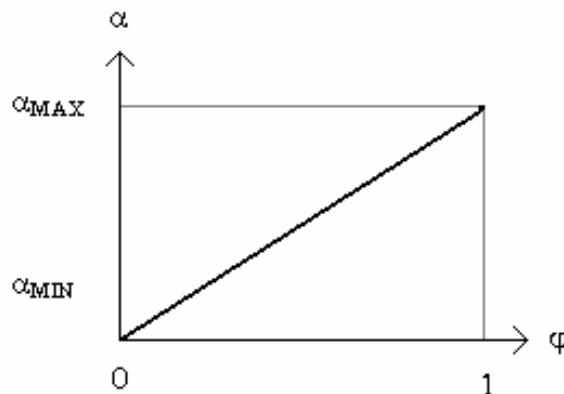
2)  $\varphi$  nabývá hodnot:  $\varphi \in \langle 0;1 \rangle$ . Tedy  $\varphi$  je normovaným přepočtem hmotnostní spotřeby paliva.

$$3) \alpha_{MIN} = 0 = f_{\alpha}(0) \quad (1.3)$$

$$4) \alpha_{MAX} = f_{\alpha}(1) \quad (1.4)$$

$$5) \alpha' = konst > 0 \text{ pro } \varphi \in \langle 0;1 \rangle ; \quad (1.5)$$

( $\alpha = f_{\alpha}(\varphi)$  je vlastně přímkou úměrou)



Obr. 1.1: Závislost  $\alpha = f_{\alpha}(\varphi)$

### 1.1.3 Definice zařazeného rychlostního stupně

Definujme zařazený rychlostní stupeň  $i$  následovně:

1) Zařazený rychlostní stupeň  $i$  může být funkcí času  $t$  nebo funkcí dráhy  $s$ , po které se automobil pohybuje. Obě dvě vyjádření budou vhodná v různých případech. Symbolicky můžeme vyjádřit:

$$i = f_{it}(t) \text{ nebo } i = f_{is}(s) \quad (1.6)$$

2)  $i$  nabývá hodnot  $i \in \{2;3;4\}$ , čemuž odpovídá zařazený rychlostní stupeň (pozn.: Do oboru hodnot jsme nezařadili jedničku, jelikož se při jízdě krom rozjezdu z klidu nepoužívá. Auto má pouze 4-stupňovou převodovku.)

Zařazený rychlostní stupeň  $i$  bude důležitým argumentem funkcí, kterými se budeme v práci zabývat.

## 1.2. ROZBOR SIL PŮSOBÍCÍCH NA AUTOMOBIL

V následující kapitole uvedeme detailní rozbor všech sil, které na automobil působí. Automobil nahradíme hmotným bodem a zavedeme dvourozměrný kartézský souřadný systém  $x,y$ , jehož počátek je pevně spojený s tímto hmotným bodem. Osa  $x$  je rovnoběžná s vektorem rychlosti automobilu (pozn. v práci nebudeme nikdy uvažovat nulovou rychlost automobilu) a taktéž s podélnou osou vozidla. Osa  $y$  je kolmá na osu  $x$ .

Síly působící na automobil jsou obecně vektory. Z povahy problému, který v naší práci řešíme, víme, že všechny vektory, kterými se budeme zabývat, nabývají pouze dvou směrů – buďto směru pohybu automobilu nebo směru opačného. Síly (popř. i jiné vektorové veličiny) proto v práci nebudeme značit jako vektory, ale jako skaláry (vyjadřující velikost vektoru). Za výslednou sílu působící na automobil budeme považovat součet (resp. rozdíl) všech sil, které působí ve směru (resp. proti směru) pohybu automobilu. Kladná hodnota této výsledné síly bude znamenat, že výsledná síla působí ve směru pohybu automobilu, a záporná hodnota bude značit, že výsledná síla působí proti pohybu automobilu.

### 1.2.1 Zavedení hnacího momentu a hnací síly

Na základě charakteristiky motoru a převodových poměrů převodovky (viz obr. 1.4) lze získat explicitní vyjádření hnacího momentu  $M$  na hnací nápravě automobilu, který je vyvozen z činnosti motoru a převeden převodovkou na hnací nápravu. Explicitní vyjádření hnacího momentu  $M$  jako funkce požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$ , zařazeného rychlostního stupně  $i$  a rychlosti automobilu  $v$  lze symbolicky zapsat:

$$M = f_M(\varphi, i, v) \quad (1.7)$$

Hnací moment  $M$  je z nápravy diskem kola a pneumatikami přenesen na vozovku jako hnací síla  $F_t$ . Velikost hnací síly  $F_t$  lze vyjádřit vztahem:

$$F_t = \frac{M}{r_d} \quad (1.8)$$

kde  $r_d$  je dynamický poloměr kola automobilu (podrobněji o dynamickém poloměru kola v [1], str. 19). Hnací síla  $F_t$  a její výpočet bude v modelu hrát významnou roli.

### 1.2.2 Zavedení vnějších odporových sil

Na jedoucí automobil působí odporová síla  $F_r$ , která je dána součtem odporu vzduchu  $F_w$ , valivého odporu  $F_v$ , průmětu  $F_g$  tíhové síly  $G$  do trajektorie automobilu při jízdě do/se svahu a dále jinými odpory, které nemají už tak veliký význam. Proto se v naší práci dopustíme zjednodušení a tyto další odpory už nebudeme uvažovat. Velikost výsledné odporové síly  $F_r$  je tedy dána vztahem:

$$F_r = F_w + F_v + F_g \quad (1.9) \text{ viz [1], str. 19 (rov. 1.13)}$$

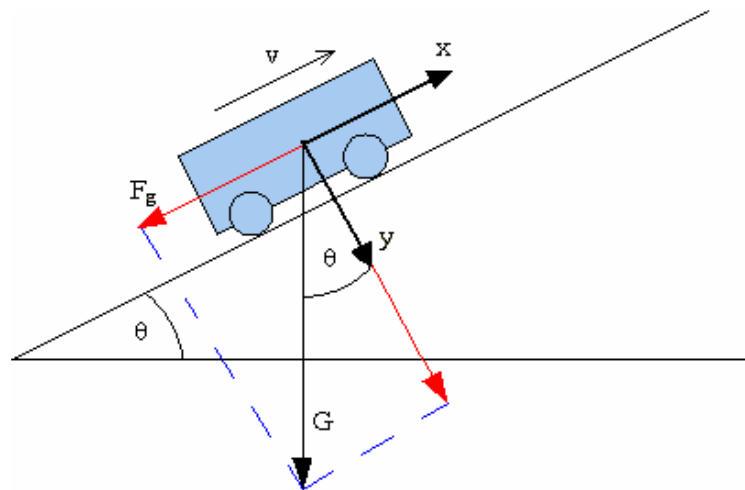
Odpor vzduchu  $F_w$  je dán empirickým vztahem:

$$F_w = C_1 \cdot v^2 \quad (1.10) \text{ viz [1], str. 26 (rov. 2.6)}$$

kde  $v$  je velikost rychlosti vozidla a  $C_1$  konstanta zjištěná měřením buďto v aerodynamickém tunelu nebo jiným vhodným způsobem. Valivý odpor  $F_v$  je dán vztahem, taktéž empirickým:

$$F_v = C_2 \quad (1.11) \text{ viz [1], str. 23 (rov. 2.5)}$$

kde  $C_2$  je konstanta určená opět měřením.



Obr. 1.2: Rozklad tíhové síly

Síla  $F_g$  je průmět tíhové síly  $G$  automobilu do trajektorie, po které se automobil pohybuje. Označme  $\theta$  úhel stoupání. Je to úhel, který svírá osa  $y$  s tíhovou silou  $G$ . Jede-li automobil do kopce, považujeme úhel stoupání  $\theta$  za kladný, jede-li s kopce, považujeme jej za záporný. Úhel stoupání  $\theta$  je funkcí dráhy  $s$ . Tuto skutečnost můžeme symbolicky vyjádřit vztahem:

$$\theta = f_\theta(s) \quad (1.12)$$



Pak lze vyjádřit průmět tíhové síly  $F_g$  jako:

$$F_g = G \cdot \sin \theta = m \cdot g \cdot \sin \theta \quad (1.13) \text{ viz [1], str. 31 (rov. 2.9)}$$

kde  $m$  je hmotnost automobilu a  $g$  je tíhové zrychlení. Obecně tak lze konstatovat, že  $F_g$  je funkcí dráhy  $s$ .

Jelikož odporová síla  $F_r$  působí proti směru pohybu automobilu a hnací síla  $F_t$  působí ve směru pohybu, můžeme označit výslednou sílu  $F$  působící na automobil jako:

$$F = F_t - F_r \quad (1.14)$$

Je-li  $F > 0$ , pak výsledná síla  $F$  působí ve směru pohybu auta, v opačném případě proti pohybu.

### 1.2.3 Zavedení vnitřních odporových sil

Při každém přenosu energie dochází ke ztrátám. Stejně tak je tomu i u automobilu, kde ke ztrátám mechanické energie dochází v motoru i v hnacím ústrojí. Je-li motor automobilu v činnosti, pak proti pohybu automobilu působí ještě pasivní odpory hnacího ústrojí a pasivní odpory motoru, které je nutno do modelu zahrnout.

#### a) pasivní odpory hnacího ústrojí:

Tyto odpory je možné v prvním přiblížení považovat za konstantní nebo závislé pouze na momentu, který je ústrojím přenášen, a za nezávislé na rychlosti vozidla. Vyjdeme z odborného doporučení konzultanta práce, že pro účely práce je možné použít předpokladu, že velikost momentu pasivních odporů v hnacím ústrojí činí při režimu brzdění motorem (zařazený rychlostní stupeň a uvolněný plynový pedál) 10% ztrátového momentu motoru.

#### b) pasivní odpory motoru:

Tyto odpory jsou obvykle vyjádřeny tzv. mechanickou účinností motoru, která je závislá především na otáčkách motoru a může mít složitější průběh. Tento průběh byl pro účely práce nahrazen lineární závislostí (přímkou). Pomocí mechanické účinnosti je možné určit ztrátový výkon a ztrátový moment motoru. Pokud jsou ve výpočtech určovány momenty a síly na hnacích kolech vozidla, je nutno ztrátový moment motoru přepočítat vynásobením převodového poměru v převodovce a diferenciací. Konzultant práce přepočítal závislost, která popisuje velikost brzděného momentu na kolech automobilu v závislosti na rychlosti  $v$  automobilu vyvozeného pasivními odpory motoru.

Pro získání celkového brzděného momentu  $M_c$  vyvozeného z pasivních odporů jednak motoru a jednak hnacího ústrojí jsme tuto závislost (přímkou) přenásobili koeficientem  $k = 1,1$ . Tak jsme dostali novou přímkou, která vyjadřuje velikost celkového brzděného

momentu jak motoru tak hnacího ústrojí při 4. zařazeném rychlostním stupni (v naší práci budeme uvažovat při brzdění motorem zařazený pouze nejvyšší rychlostní stupeň, tedy  $i = 4$ ), jejíž přibližná rovnice je tato:

$$M_c = 73 + 0,05v \quad (1.15)$$

kde  $M_c$  je celkový brzdňý moment na kolech vyvozený pasivními odpory vyjádřený v jednotkách  $[Nm]$  a  $v$  je rychlost automobilu.

#### 1.2.4 Zavedení součinitele rotačních částí

Při změně rychlosti automobilu působí proti směru zrychlení automobilu setrvačná síla, která se skládá jednak z odporu zrychlení posuvných hmot automobilu - tato odporová síla  $F$  se dle druhého Newtonova zákona vyjádří pomocí hmotnosti  $m$  automobilu a jeho zrychlení  $a$  jako:

$$F = m \cdot a \quad (1.16)$$

a jednak z odporu zrychlení rotujících částí automobilu (motor, převodovka, kola).

Pro praktické výpočty lze zavést bezrozměrný parametr součinitel rotačních částí  $\psi$ , který vyjadřuje, kolikrát se setrvačná síla zvýší oproti setrvačné síle dané jen posuvným zrychlením, uvažíme-li vliv rotačních součástí automobilu.

Součinitel rotačních částí  $\psi$  je funkcí pouze zařazeného rychlostního stupně  $i$  (resp. celkového převodu závislého na zařazeném rychlostním stupni  $i$ ). Existují vztahy pro přibližné určení tohoto parametru. Pro osobní automobily platí přibližně následující vzorec:

$$\psi = 1 + 0,04 + 0,0025 \cdot n^2 \quad (1.17) \text{ viz [2]}$$

kde  $n$  je celkový převod závislý na zařazeném rychlostním stupni  $i$ . Takto vypočtený koeficient, který přibližně nabývá hodnot  $1 < \psi < 2$  lze srovnat s tabulkou uvedenou v [1] - str. 34 (obr. 2.18)

Výslednou setrvačnou sílu pak můžeme vyjádřit pomocí součinitel rotačních částí  $\psi$ :

$$F = \psi \cdot m \cdot a \quad (1.18)$$

Výraz  $\psi \cdot m$  můžeme považovat za ekvivalentní hmotnost vozidla.

#### 1.2.5 Výsledná síla působící na automobil

Nyní si souhrnně uvedeme, na jakých veličinách je závislá výsledná síla  $F$  působící na automobil a zrychlení automobilu  $a$ , jehož směr je totožný se směrem výsledné síly  $F$ :

$$F = f_F(\varphi, i, v, s) \quad (1.19)$$

$$a = f_a(\varphi, i, v, s) \quad (1.20)$$

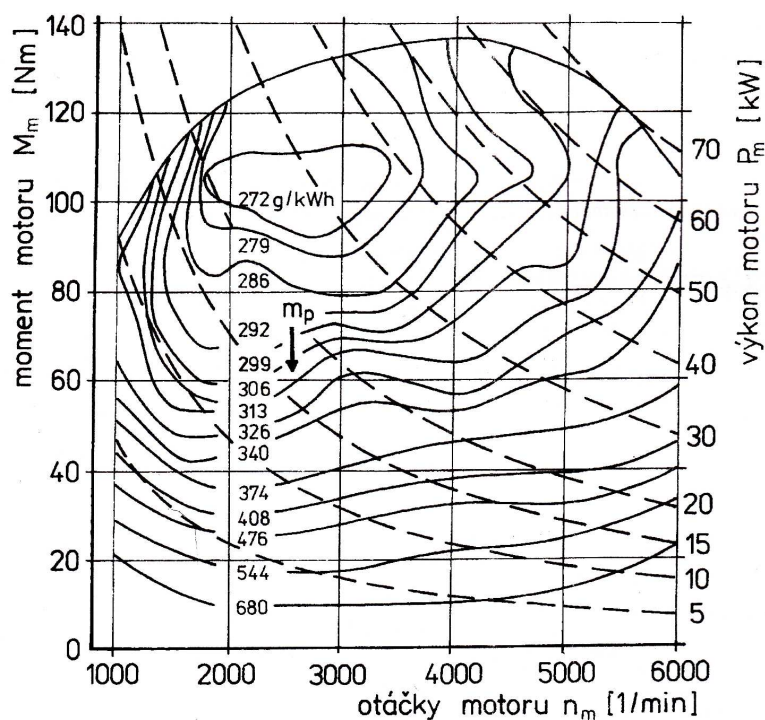
neboť, jak plyne z rovnic 1.7 až 1.18:

$$F = F_t - F_r = \frac{M(\varphi, i, v)}{r_d} - (F_w(v) + F_v + F_g(s)) \quad (1.21)$$

$$a = \frac{F(\varphi, i, v, s)}{m \cdot \psi(i)} \quad (1.22)$$

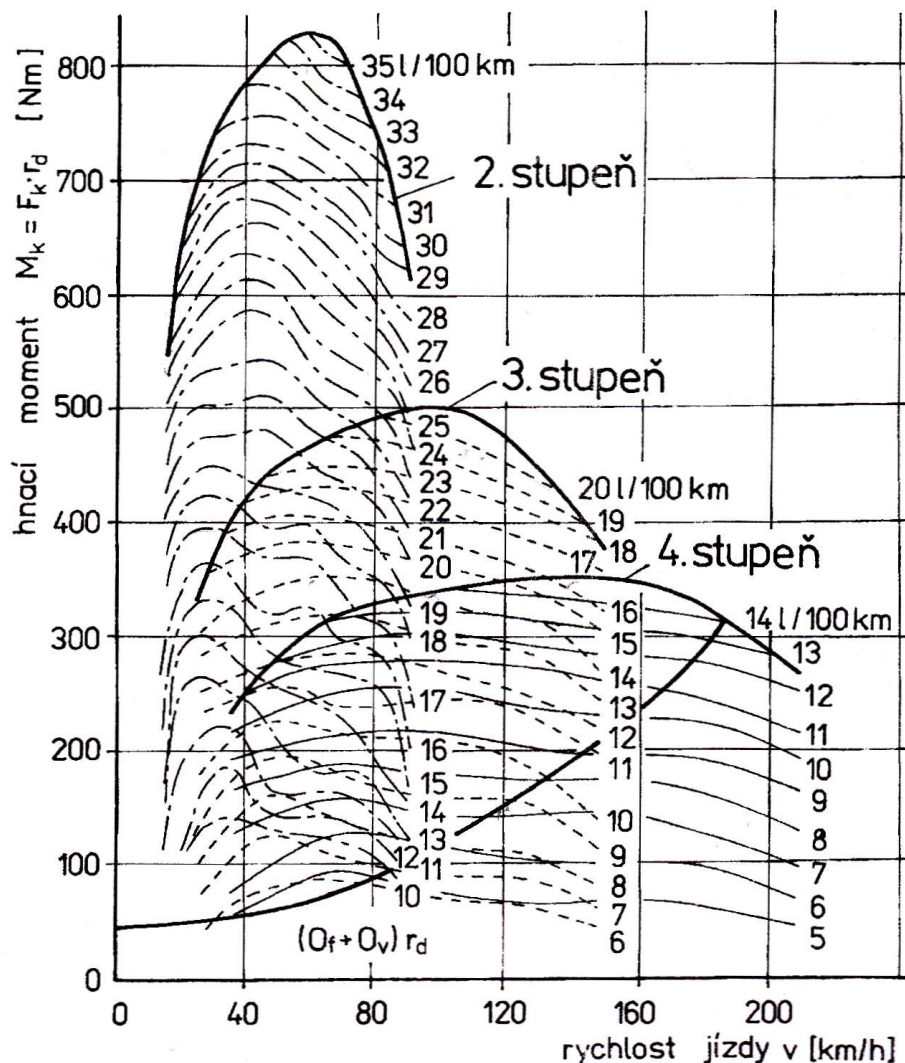
### 1.3 ROZBOR A APROXIMACE DIAGRAMU DRÁHOVÝCH SPOTŘEBY PALIVA

V technické praxi se při určování spotřeby často vychází z diagramů, nazývaných úplná rychlostní charakteristika motoru (obr. 1.3) – viz [1] - str. 96 (obr. 4.40), které popisují vazbu mezi hnacím momentem  $M$ , otáčkami motoru a tzv. měrnou spotřebou paliva vyjádřenou v jednotkách  $\left[\frac{g}{kWh}\right]$ . Tyto digramy v sobě zohledňují pasivní odpory motoru, ale nikoli vnější pasivní odpory ani pasivní odpory ústrojí. Tyto diagramy tak musí být těmito údaji doplněny. Navíc se tyto diagramy musí přepočítávat.



Obr. 1.3: Úplná rychlostní charakteristika motoru

Pro daný typ motoru existují diagramy dráhových spotřeb (obr. 1.4) - viz [1] - str. 100 (obr. 4.42), které jsou přepočtené z úplných rychlostních charakteristik motoru a doplněné patřičnými údaji. Tyto diagramy popisují velikost hnacího momentu  $M$  motoru v závislosti na rychlosti  $v$  automobilu s parametrem zařazeného rychlostního stupně  $i$  a s parametrem dráhové spotřeby paliva  $S$ .



Obr. 1.4: Diagram dráhových spotřeb

Diagram v sobě zahrnuje vnější odporové síly a pasivní odpory motoru i ústrojí. Ale je určen pouze pro ustálené jízdní režimy, tzn. režimy, kdy se otáčky motoru v závislosti na čase prakticky nemění. Tento předpoklad však v naší práci splněn není, neboť budeme ve výpočtech připouštět zrychlení vozidla a s ním i změnu otáček v čase. Ovšem tento problém dostatečně přesně řeší zavedení součinitele rotačních částí  $\psi$ , jak je uvedeno v kapitole 1.2.4. Proto budeme v naší práci vycházet z právě uvedeného diagramu.

### 1.3.1 Otázka vhodné aproximace diagramu

Popsat přesně křivky, které jsou v diagramu znázorněny, by bylo technicky zdlouhavé a navíc by vyžadovalo uplatnění statistických metod, jelikož křivky byly konstruovány z naměřených (tedy ne naprosto přesných hodnot). Pro výpočet hnacího momentu  $M$  z diagramu je ale třeba křivky nějakým vhodným způsobem popsat.

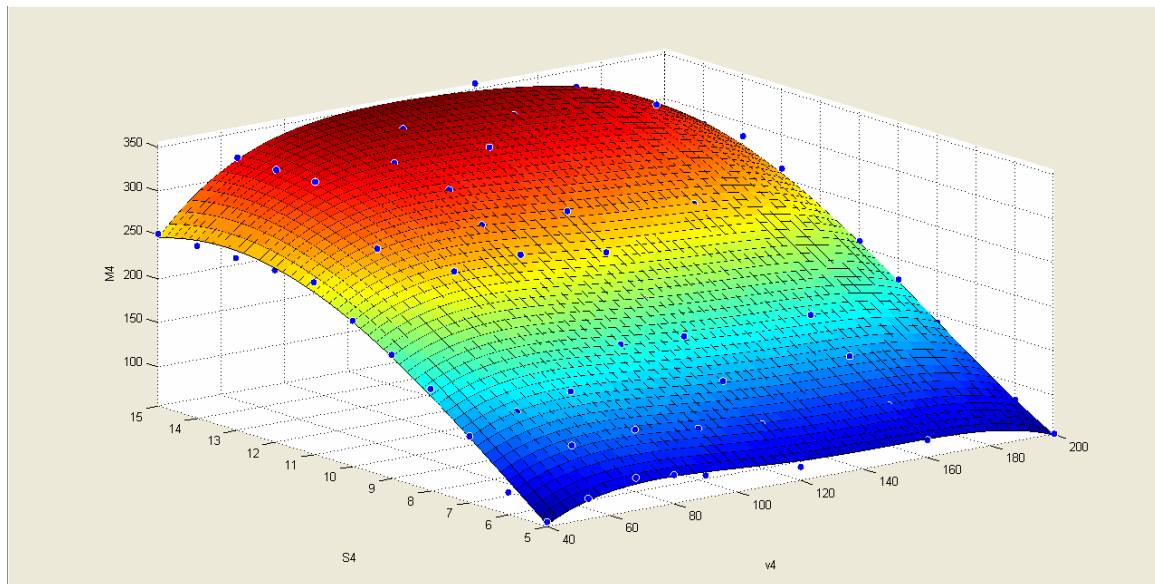
Jednou z možných cest by mohlo být proložení dostatečného množství vybraných bodů dané křivky kubickým splajnem – o této problematice se lze dočíst v [3]. Tento postup pak aplikovat pro všechny křivky. To by vedlo jistě k poměrně přesné interpolaci, kde pro každou část každé z mnoha křivek bychom získali explicitní vyjádření hnacího momentu  $M$  v závislosti na rychlosti  $v$  jako polynom. Avšak tato cesta by ve svém důsledku vedla k velkému počtu dílčích vzorců. A navíc by vzorce platily pro výpočet momentu  $M$  pouze podél křivek v diagramu. V oblasti diagramu mezi křivkami bychom nemohli moment  $M$  z těchto vzorců počítat.

### 1.3.2 Prvotní aproximace diagramu

Druhá možnost, která byla doporučena vedoucím práce, je představit si křivky jako řezy plochy v prostoru poskládané za sebou do dvojrozměrného obrázku.

Plocha  $\Gamma$  je spojitě zobrazení z neprázdné množiny  $A$ , která je podmnožinou  $R^2$  do  $R^m$ . Symbolicky psáno dle [4]:

Plocha  $\Gamma$  je spojitě zobrazení:  $\Gamma: A \rightarrow R^m$  kde  $A \subset R^2$ .



Obr. 1.5: Vizualizace originálního diagramu z obr. 1.4

V diagramu (obr. 1.4) jsou obsaženy celkem 3 plochy – pro druhý, třetí a čtvrtý rychlostní stupeň (tedy  $i \in \{2,3,4\}$ ). Na obr. 1.5 lze vidět vizualizaci jedné z těchto ploch. Abychom dobře objasnili podstatu věci, budeme se pro jednoduchost nadále zabývat pouze plochou pro 4. rychlostní stupeň ( $i = 4$ ). Pro zbývající dvě plochy budou platit analogické úvahy.

Pro 4. rychlostní stupeň lze z diagramu (obr. 1.4) rekonstruovat trojrozměrnou plochu  $\Gamma_4$ . Tedy:

$$\Gamma_4 : A_4 \rightarrow R^3$$

kde  $A_4 = \Sigma_4 \times \nu_4 \subset R^2$

a kde  $\Sigma_4 = \langle 5;15 \rangle$  a  $\nu_4 = \langle 40;210 \rangle$

(pozn. určení horních a dolních mezí intervalů vyplývá z obr. 1.4)

Plocha  $\Gamma_4$  je tvořena množinou bodů, které jsou dány svými souřadnicemi  $(S, \nu, M)$  kde  $S \in \Sigma_4, \nu \in \nu_4, M \in R^1$ . Plocha je obrázkem dána tak, že neexistují 2 body, které by měly stejné souřadnice  $(S, \nu)$  a přitom jiné souřadnice  $(M)$ . Tuto skutečnost lze vyjádřit následující implikací:

Pro všechny body  $X$  plochy  $\Gamma_4$  platí:

$$X_1(S_1, \nu_1, M_1); X_2(S_1, \nu_1, M_2) \Rightarrow X_1 = X_2$$

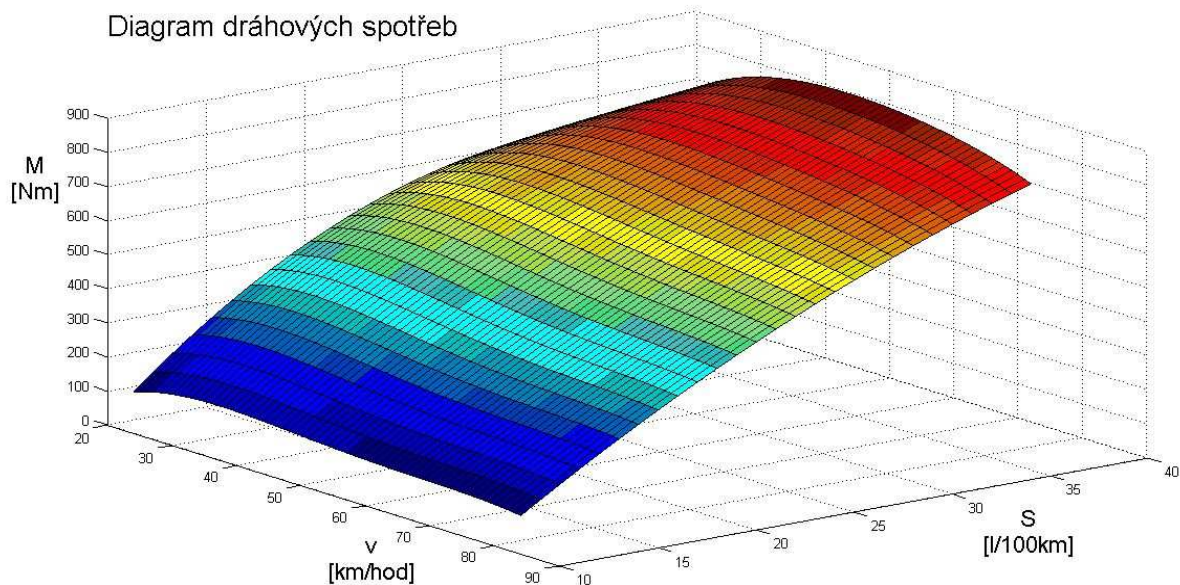
Z této skutečnosti vyplývá, že existuje zobrazení  $f_4 : A_4 \rightarrow R$  tedy  $f : \Sigma_4 \times \nu_4 \rightarrow R$

Když víme, že toto zobrazení existuje, nahradili jsme jej nejprve polynomem 2. stupně (v proměnné  $\nu \in \nu_4$ ) a 1. stupně v proměnné  $S \in \Sigma_4$  (pro jednoduchost jsme koeficienty odhadli, nepoužili jsme žádnou speciální metodu). Na základě tohoto zobrazení jsme zpětně zrekonstruovali náhradní plochu  $\Sigma_4^*$ .

Obdobně jsme postupovali i pro druhý a třetí rychlostní stupeň. Takto vzniklé náhradní plochy  $\Sigma_2^*, \Sigma_3^*, \Sigma_4^*$  jsou pro srovnání s diagramem vyneseny ve svých řezech v grafu (obr. 1.7). Tato náhrada plochy je sice velmi jednoduchá a její jednoznačnou výhodou je jediné explicitní vyjádření momentu  $M$  jako funkce  $\nu, S$  a to nejen podél všech křivek v diagramu ale i mezi nimi. Velkou nevýhodou je ovšem nepřesnost, která v simulačním programu (uvedeném v kap 2.1.2.1) způsobovala chybné výsledky, které se od očekávaných hodnot zásadně lišily. Tuto nepřesnost samozřejmě šlo pozorovat už i při srovnání grafu (obr. 1.7) s originálním diagramem (obr. 1.4).

### 1.3.3 Zlepšení aproximace diagramu

Jako jednoduchá, ale zároveň, co se přesnosti týče, vyhovující varianta, je náhrada plochy taktéž polynomem (ale vyššího stupně - 4. stupně v proměnné  $\nu \in \nu$  a 2. nebo 4. stupně v proměnné  $S \in \Sigma$ ), která je znázorněna na obr. 1.6. Polynom 2 proměnných tak vykresluje plochu, kterou si označíme  $\Sigma_4^{**}$  (viz obr. 1.6).

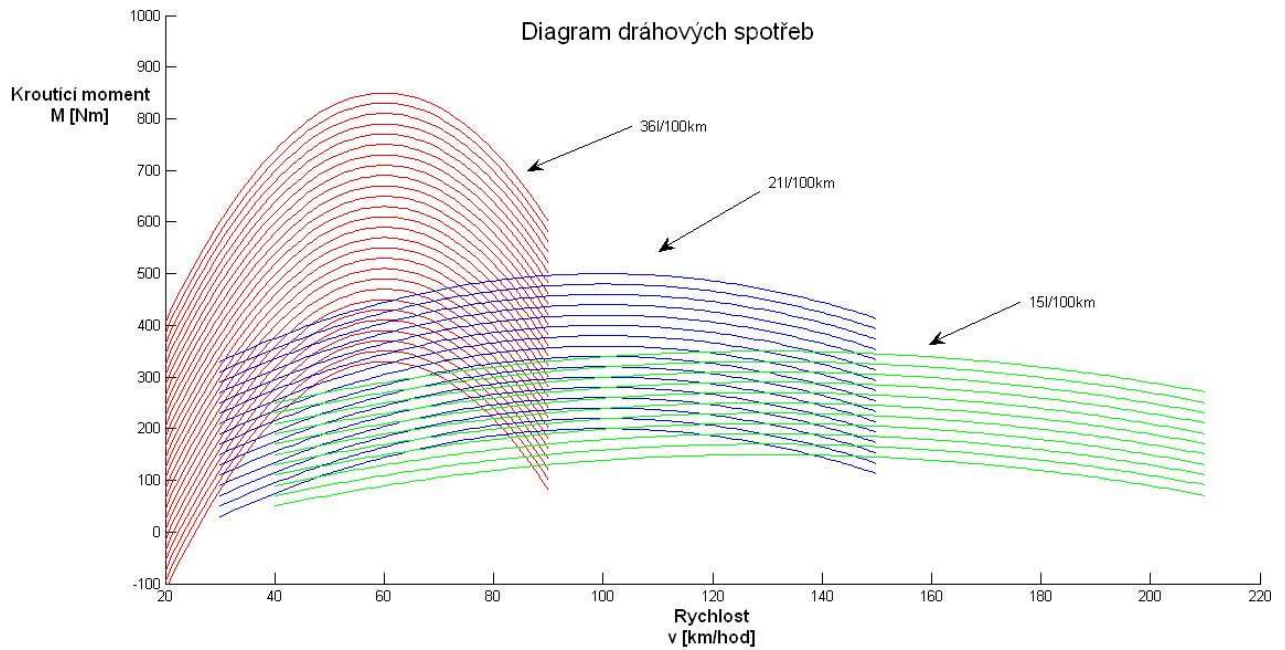


Obr. 1.6: Nahrazení plochy diagramu plochou  $\Sigma_4^{**}$

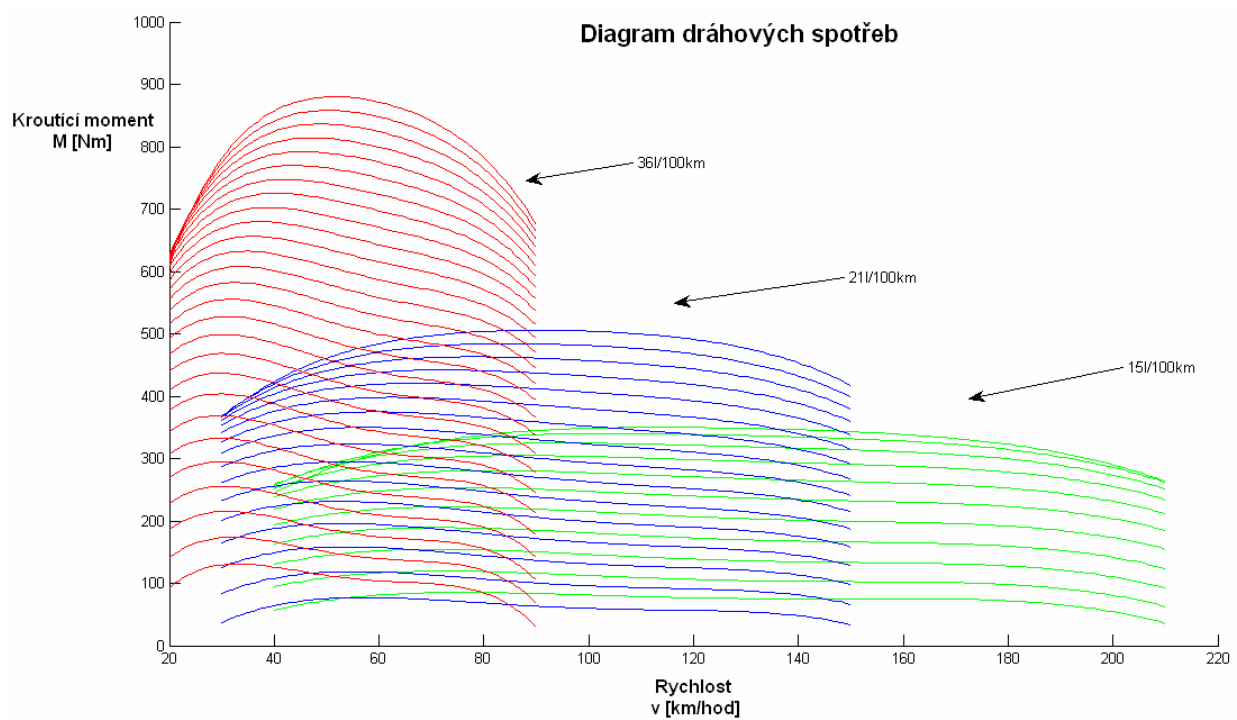
Tuto plochu jsme nahrazovali tak, že vybranými body z diagramu jsme ve smyslu metody nejmenších čtverců pomocí softwaru MATLAB prokládali jeden ze 2 právě uvedených polynomů, které jsme postupně zlepšovali tak, aby křivky byly co nejpřesněji aproximovány zejména v té oblasti diagramu, o které jsme předpokládali, že hledaný průběh požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$  v ní bude ležet nejspíše (jedná se o oblast dráhová spotřeby 5-10l/100km při rychlostech do 100km/hod pro 4. rychlostní stupeň).

Body kterými jsme křivku prokládali jsme vybírali následujícím způsobem: z každé křivky, která je znázorněna na obr. 1.4. jsme vybrali všechny ty body, které tvoří lokální maximum či minimum křivky, dále krajní body křivky a případně i jiné vnitřní body křivky, aby případné maximální vzdálenosti mezi vybranými body nebyly příliš veliké, aby všechny vybrané body tvořili aspoň přibližně rovnoměrnou síť dané křivky.

Postupného zlepšování těchto polynomů jsme docílili tak, že bodům, kterými jsme prokládali polynomy, jsem přiřadili různé váhy. Tento postup jsme aplikovali na všechny tři zařazené rychlostní stupně. Na obr. 1.8 jsou dobře vidět řezy těmito třemi plochami. Řezy jsou voleny tak, aby jednotlivé křivky na obrázku odpovídaly křivkám v diagramu (obr. 1.4) a také křivkám v obr. 1.7.



Obr. 1.7: Nahrazení diagramu jednodušším diagramem – řezy plochami  $\Sigma_2^*$ ,  $\Sigma_3^*$ ,  $\Sigma_4^*$



Obr. 1.8: Nahrazení diagramu jednoduchým ale lepším diagramem – řezy plochami  $\Sigma_2^{**}$ ,  $\Sigma_3^{**}$ ,  $\Sigma_4^{**}$

Srovnáním obrázku 1.7 a obrázku 1.8 lze na první pohled vidět zlepšení přesnosti. Detailní grafické porovnání křivek diagramu (obr. 1.4) s křivkami z řezu na obr. 1.8 (polynom 4. stupně v proměnné  $v \in \nu$  a 2. nebo 4. stupně v proměnné  $S \in \Sigma$ ) lze najít v příloze B.



## 1.4 ZAVEDENÍ CELKOVÝCH SPOTŘEB POMOCÍ FUNKCIONÁLU

Hnací moment  $M = f_M(\varphi, i, v)$  je funkcí tří veličin, jak jsme jej zavedli v kapitole 1.2.1 (rovnice 1.7). Dle diagramu (obr. 1.4), respektive dle jeho aproximace (kapitola 1.3), je ale hnací moment funkcí  $M = f_i(S, i, v)$ . Tento rozpor vyplývá pouze z toho, jak byl hnací moment definován pro potřeby naší práce v kapitole 1.2.1 na základě požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva. Vyjádření hnacího momentu sjednotíme v následující podkapitole.

### 1.4.1 Zavedení časové spotřeby paliva

V kapitole 1.1.1 byla definována hmotnostní spotřeba paliva  $\alpha$  rovnicí 1.1 jako množství paliva  $dm$  dodaného do motoru za jednotku času  $dt$ . Tedy  $\alpha = \frac{dm}{dt}$ . Uvažovali jsme, že hmotnostní spotřeba paliva  $\alpha$  je funkcí pouze požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$ . Jenže z diagramu dráhových spotřeb (obr. 1.4) vyplývá, že nejen požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$  má vliv na hmotnostní spotřebu paliva  $\alpha$ .

V tomto diagramu existují body (charakterizované rychlostí  $v$  automobilu a hnacím momentem  $M$ ), kterými prochází dvě křivky dráhové spotřeby paliva  $S$ . Jedna křivka náleží jednomu zařazenému rychlostnímu stupni a druhá křivka náleží druhému zařazenému rychlostnímu stupni, přičemž dráhová spotřeba  $S$  má pro obě křivky různou hodnotu. Proto i hmotnostní spotřebu paliva  $\alpha$  má pro různé zařazené rychlostní stupně jinou hodnotu. Z toho důvodu je třeba zavést veličinu podobnou hmotnostní spotřebě paliva, která v sobě zohlední vliv zařazeného rychlostního stupně.

Definujme nyní časovou spotřebu paliva  $S_t$  jako objemové množství paliva za jednotku času:

$$S_t = k \cdot \frac{dV}{dt} = k \cdot \frac{\rho \cdot dm}{dt} = k \cdot \rho \cdot \alpha \quad (1.23)$$

kde  $\rho$  je hustota paliva,  $k$  je nějaká konstanta úměrnosti závislá na zařazeném rychlostním stupni  $i$  a  $\alpha$  je hmotnostní spotřeba paliva závislá na míře sešlápnutí plynového pedálu  $\varphi$ .

Časová spotřeba paliva  $S_t$  je tedy funkcí jednak požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$  a jednak zařazeného rychlostního stupně  $i$ .  $S_t$  je vyjádřena v jednotkách  $\left[ \frac{ml}{s} \right]$ . Lze symbolicky psát:

$$S_t = f_{S_t}(\varphi, i) \quad (1.24)$$

### 1.4.2 Vztah mezi časovou spotřebou paliva $S_t$ a dráhovou spotřebou $S$

Podle definice požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$  v kapitole 1.1 je z diagramu patrné, že pro např.  $\varphi = 1$  (tedy hmotnostní spotřeba paliva je nejvyšší možná a tedy i dráhová spotřeba paliva  $S$  je nejvyšší možná) a pro  $i = 2$  je výstupní moment  $M$  funkcí pouze rychlosti  $v$  a je dán křivkou, která je v diagramu znázorněna úplně nahoře a hodnota dráhové spotřeby paliva bude  $S = 36l/100km$ . Pro jinou volbu, např.  $\varphi = 0,5$  a  $i = 2$  bude dráhová spotřeba paliva  $S = 18l/100km$  a výstupní moment  $M$  se bude řídit odpovídající křivkou položenou níže.

Dráhová spotřeba  $S$  je vyjádřena v jednotkách  $\left[ \frac{l}{100km} \right]$ . Vztah mezi dráhovou spotřebou  $S$  a časovou spotřebou paliva  $S_t$ , vyjádřenou v jednotkách  $\left[ \frac{ml}{s} \right]$  lze snadno odvodit či najít v literatuře ([1] - str. 97 - rov. 4.87). Vztah je dán rovnicí:

$$S = 360 \cdot \frac{S_t}{v} \quad (1.25)$$

Tedy:

$$S = f_s(\varphi, i, v) \quad (1.26)$$

Konstanta úměrnosti je přepočítána tak, aby rovnice respektovala jednotkové vyjádření obou veličin.

### 1.4.3 Zavedení celkové časové a dráhové spotřeby paliva

Po integraci okamžité časové spotřeby  $S_t$  od času  $t_1$  do času  $t_2$  tak definujeme celkovou časovou spotřebu paliva  $\Phi_t$  jako:

$$\Phi_t(\varphi, i) = \int_{t_1}^{t_2} S_t(\varphi, i) dt \quad (1.27)$$

vyjádřenou v jednotkách  $[ml]$ . Přičemž  $\varphi$  a  $i$  jsou funkcí času  $t$ . Rychlost  $v$ , ačkoliv není v integrálu explicitně vyjádřena, je nutno uvažovat, neboť úloha může být omezena například podmínkou, že automobil musí v čase  $t_2$  dosáhnout určité rychlosti. Rychlost  $v$  je v čase  $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$  závislá na hodnotě sama sebe v čase  $t_1$  (tuto hodnotu budeme značit  $v_0$ ), na průběhu  $\varphi$  a  $i$  v časovém intervalu  $\langle t_1, t \rangle$  a také ještě na hodnotách průmětu tíhové síly  $F_g$ , který je ovšem závislý na dráze  $s$ , nikoli na čase  $t$ . Vztah (1.27) lze pokládat za funkcionál s parametry  $t_1, t_2$  a  $v_0$ , který se nalezením vhodného průběhu veličin  $\varphi(t)$  a  $i(t)$  na časovém intervalu  $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$  budeme v práci snažit minimalizovat. Tento funkcionál je výhodné použít pouze v případě, kdy  $F_g$  je konstantní, jelikož pak  $F_g$  nemusíme uvažovat jako funkci dráhy  $s$ .

V práci ale budeme uvažovat i situace, kdy  $\varphi$  a  $i$  jsou funkcí dráhy  $s$ . Proto je vhodné definovat i celkovou dráhovou spotřebu paliva  $\Phi_s$  jako:

$$\Phi_s(\varphi, v, i) = \int_{s_1}^{s_2} S(\varphi, i, v) ds \quad (1.28)$$

vyjádřenou v jednotkách [l]. Analogicky  $\varphi$  a  $i$  jsou funkcí dráhy  $s$ . Rychlost  $v$  je v bodě dráhy  $s \in \langle s_1, s_2 \rangle$  závislá na hodnotě sama sebe v bodě  $s_1$  (tuto hodnotu budeme značit  $v_0$ ), na průběhu  $\varphi$  a  $i$  v dráhovém intervalu  $\langle s_1, s \rangle$  a na hodnotách průmětu tíhové síly  $F_g$  v dráhovém intervalu  $\langle s_1, s_2 \rangle$ . Podobně i tento vztah budeme pokládat za funkcionál tentokrát s parametry  $s_1, s_2$  a  $v_0$ , který se nalezením vhodného průběhu veličin  $\varphi(s)$  a  $i(s)$  na dráhovém intervalu  $s \in \langle s_1, s_2 \rangle$  budeme v práci opět snažit minimalizovat. Tento funkcionál je vhodné použít v případech, kdy  $F_g$  není konstantní (tedy kdy je funkcí dráhy  $s$ ).

## 1.5 SHRNUTÍ A MATEMATICKÁ FORMULACE ÚLOHY

Cílem naší práce je nalézt k zadané počáteční podmínce  $v_0$  a zadané trajektorii, která je dle rovnice (1.12) definována úhlem stoupání  $\theta$  na dráze  $s$  vztahem  $\theta = f_\theta(s)$ , takový průběh požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$  a zařazeného rychlostního stupně  $i$  (v závislosti na čase  $t$  nebo na dráze  $s$ ), aby vozidlo mělo při projetí zadané trajektorie co nejmenší celkovou časovou spotřebu  $\Phi_t$  respektive celkovou dráhovou spotřebu  $\Phi_s$ . Úlohu tak lze z matematického hlediska považovat za minimalizaci jednoho ze dvou uvedených funkcionálů. To je schématicky naznačeno na obrázku obr. 1.9.

Hledáme optimální průběh těchto funkcí,  
aby účelové funkce byly minimální.

$$\varphi(s) \text{ resp. } \varphi(t) \in \langle 0;1 \rangle$$

$$i(s) \text{ resp. } i(t) \in \{2;3;4\}$$

Počáteční podmínka  $v_0$   
Průběh úhlu stoupání  $\theta = f_\theta(s)$

Tyto  
funkce  
mají  
různá  
omezení.

$$M = M(\varphi, i, v_0)$$

$$F = F(\varphi, i, v_0, s)$$

$$a = a(\varphi, i, v_0, s)$$

$$v = v(\varphi, i, v_0, s)$$

$$S_t(\varphi, i, v_0) \quad [ml/s]$$

$$S(\varphi, i, v_0) \quad [l/100km]$$

$$\Phi_t = \int_1^2 S_t[\varphi(t), i(t)] dt \quad [ml]$$

$$\Phi_s = \int_1^2 S[\varphi(s), i(s), v(s)] ds \quad [l]$$

Účelové funkce, které minimalizujeme.

Obr. 1.9: Schématický náznak formulace úlohy

# KAPITOLA 2

## SIMULACE V PROSTŘEDÍ MATLAB A GAMS

V minulé kapitole byl sestaven model automobilu a jeho pohybu. V této kapitole bude pojednáno o tom, jak model přenést do prostředí MATLAB a do programu GAMS, abychom mohli počítat různé simulace. Toto simulování jízdních režimů a jejich vzájemné porovnání z hlediska spotřeby paliva bude uvedeno až v následující třetí kapitole.

### 2.1 FORMULACE ÚLOHY V MATEMATICKÉM SOFTWARE GAMS

Úlohu minimalizovat funkcionál  $\Phi_s = \int_1^2 S[\varphi(s), i(s), v(s)] ds$  (jak byla podrobně definována v minulé kapitole – vztah 1.28) lze formulovat a úspěšně vyřešit v různých matematických softwarech. Pro účely naší práce jsme se rozhodli použít GAMS (General Algebraic Modeling System).

V této kapitole naznačíme, jak by se úloha řešila, kdybychom měli k dispozici velice výkonný počítač a mohli úlohu řešit tzv. „hrubou silou“ – tzn. spočítáním všech možností, kterých je při vhodné diskretizaci problému vždy jen konečně mnoho. Z těchto konečně mnoha pomocných výsledků bychom vybrali nejmenší výsledek (globální minimum), které bychom prohlásili za výsledek naší úlohy. Volbou diskretizačního kroku lze na úkor přesnosti snižovat počet pomocných výsledků.

Moderní matematické softwarové řešiče mají v sobě zabudováno velké množství algoritmů a postupů, z nichž si na základě různých kritérií vyberou nejvhodnější algoritmus (resp. sadu algoritmů) pro řešení dané úlohy. Tyto algoritmy často radikálně snižují počet operací, které je nutno provést, abychom obdrželi výsledek, který po jistém počtu iterací spočítají s požadovanou přesností.

#### 2.1.1 Stručná formulace

Nyní si popíšeme postup, jak by se úloha řešila tzv. „hrubou silou“, neboť velmi podobně, jak je uvedeno v následující formulaci, se úloha zformuluje i pro námi vybraný matematický řešič GAMS:

- 1) nadefinujeme veličiny, nadefinujeme fyzikální konstanty, určíme diskretizační konstanty
- 2) předepíšeme počáteční podmínku  $v_0$
- 3) v kroku 0 si zvolíme  $\varphi(0)$  a  $i(0)$  a pomocí nich a počáteční podmínky spočítáme podle jistý vztahů ostatní veličiny vztahující se ke kroku 0:  $M(0)$ ,  $F(0)$ ,  $a(0)$ , a  $\Phi(0)$ . S těmito hodnotami se vozidlo dostane z bodu  $s(0)$  do bodu  $s(1)$ . Průběh veličin mezi jednotlivými body uvažujeme konstantní.

- 4) V bodu  $s(1)$  spočítáme hodnotu rychlosti  $v(1)$  a zvolíme  $\varphi(1)$  a  $i(1)$ . Pomocí těchto hodnot opět spočítáme všechny ostatní veličiny  $M(1)$ ,  $F(1)$ ,  $a(1)$ , a  $\Phi_s(1)$ . Průběh všech těchto 7 veličin považujeme mezi body 1 a 2 za konstantní. Tedy že se v bodě 1 skokově změnil a až do bodu 2 je konstantní. Výpočty opakujeme až do bodu  $n$ .
- 5) předepíšeme všechna omezení pro každou z veličin
- 6) definujeme účelovou funkci  $\Phi_s = \sum_{k=1}^n \Phi_s(k)$  (2.1)
- 7) spočítáme hodnotu účelové funkce (pomocný výsledek) a celý výpočet provádíme znovu takovým způsobem, že volíme dvojici  $\varphi(k)$  a  $i(k)$  pro  $k \in \langle 0; n \rangle$  tak, aby aspoň v jednom bodě 0 až  $n$  byla odlišná od již proběhlých výpočtů

## 2.1.2 Podrobná formulace

Nyní si podrobněji rozebereme všech 7 bodů, uvedeme, jaké veličiny používáme, jaké vzorce použijeme k výpočtu veličin, jakým způsobem organizujeme výpočet atd.

### 2.1.2.1 Předepsání konstant a předem známých veličin

Určíme počet kroků  $n$  - tzn. celkovou dráhu  $s$ , kterou má vozidlo projet, rozdělíme do  $n$  stejných částí o délce

$$ds = \frac{s}{n} \quad (2.2)$$

kteřou nazveme délka diskretizačního kroku).

#### Stanovíme konstanty charakterizující vozidlo:

- hmotnost vozidla ( $m$ )
- časová spotřeba benzínu při vyřazeném rychlostním stupni ( $\beta$ )
- dynamický poloměr kola ( $r_d$ )
- součinitel rotačních částí  $\psi$  pro různé zařazené rychlostní stupně  $i$

Při stanovování těchto konstant jsme vyšli z odborného doporučení konzultanta práce, že diagram, ze kterého vycházíme, je pravděpodobně naměřen pro osobní automobil střední třídy. Proto jsme dle doporučení konzultanta konstanty doplnili tak, aby co nejpřesněji korespondovaly s naším diagramem.

Získání diagramu dráhových spotřeb je velmi obtížné, neboť tyto diagramy jsou tajemstvím každé automobilky. Volně k dispozici jsou tak diagramy pouze neúplné a spíše jen pro vozidla, které se už delší dobu nevyrábí.

Pro přehlednost práce nyní neuvádíme číselné hodnoty veškerých konstant a parametrů, které pro náš model použijeme. To je uvedeno v příloze C v rámci ukázky zdrojového kódu GAMS.

### Stanovíme konstanty a parametry popisující diagram dráhových spotřeb:

Jedná se především o konstanty k polynomům 2 proměnných, o kterých jsme se zmínili v kapitole 1.3. a dále o parametry k parabole jízdních odporů (jízdní odpory rozebrány v kapitole 1.2), která je v diagramu znázorněna.

### Stanovíme konstanty charakterizující stoupání či klesání vozovky:

Parametr charakterizující stoupání či klesání dráhy mezi body  $k$  až  $k + 1$ , kde  $k + 1 \leq n$ , je  $\sin(\theta(k))$ . Tento parametr byl zaveden v kapitole 1.2.2.

### Zadáme fyzikální konstanty:

- gravitační zrychlení ( $g$ )

#### **2.1.2.2 Předepsání počáteční podmínky**

Předepíšeme počáteční podmínku  $v_0$

#### **2.1.2.3 Výpočet veličin v kroku 0**

Nejprve diskretizujeme nespočetnou množinu (interval) možných hodnot požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$ .

Je definováno, že:

$\varphi \in \langle 0;1 \rangle$ ,  $i \in I = \{0;2;3;4\}$  (pozn.,  $i = 0$  rozumíme, že je vyřazen rychlostní stupeň).

Interval  $\langle 0;1 \rangle$  rozdělíme do několika vzájemně disjunktních intervalů, tak aby pokryly celý interval  $\langle 0;1 \rangle$ . Z každého intervalu pak vybereme jednoho zástupce a množinou těchto zástupců (označme  $P$ ) nahradíme interval  $\langle 0;1 \rangle$ . Pak  $\varphi$  může nabývat pouze konečně mnoha hodnot. Píšeme  $\varphi \in P$ ,  $i \in I$ .

V kroku 0 zvolíme  $\varphi(0) \in P$  a  $i(0) \in I$ . Rychlost  $v(0)$  je z počáteční podmínky  $v(0) = v_0$ . Z těchto hodnot spočítáme spotřebu  $\Phi(0)$  takto:

$$\Phi(0) = 36 \cdot \varphi(0) \quad \text{pro } i(0) = 2 \quad (2.3)$$

$$\Phi(0) = 21 \cdot \varphi(0) \quad \text{pro } i(0) = 3 \quad (2.4)$$

$$\Phi(0) = 15 \cdot \varphi(0) \quad \text{pro } i(0) = 4 \quad (2.5)$$

$$\Phi(0) = \frac{\beta}{v(0)} \quad \text{pro } i(0) = 0 \quad (2.6)$$

Z hodnot  $\Phi(0)$ ,  $i(0)$  a  $v(0)$  určíme hodnotu hnacího momentu  $M(0)$  následujícím způsobem: ze zařazeného rychlostního stupně  $i(0)$  určíme, podle kterého vztahu budeme  $M(0)$  počítat.

Pro  $i(0) = 0$  klademe:

$$M(0) = 0 \quad (2.7)$$

Pro  $i(0) \neq 0$  počítáme:

$$M(0) = f(v(0), \Phi(0)) \quad (2.8)$$

kde funkce  $f(v, \Phi)$  je polynom 4. stupně v proměnné  $v$  a 2. nebo 4. stupně v proměnné  $\Phi$  aproximující křivky diagramu pro daný zařazený rychlostní stupeň  $i$  (viz kapitola 1.3).

Nyní ze znalosti  $M(0)$  a  $v(0)$  a dynamického poloměru kola  $r_d$  určíme hnací sílu  $F_t(0)$  automobilu:

$$F_t(0) = \frac{M(0)}{r_d} \quad (2.9)$$

a dále určíme odporovou sílu  $F_r(0)$ :

$$F_r(0) = F_w(0) + F_v(0) + F_g(0) = C_1 \cdot v(0)^2 + C_2 + m \cdot g \cdot \sin(\theta) \quad (2.10)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou konstanty přepočítané z diagramu a  $\sin(\theta)$  je parametr charakterizující danou část dráhy.

Celkovou sílu  $F(0)$  působící na vozidlo spočítáme (viz kapitola 1.2.) jako:

$$F(0) = F_t(0) - F_r(0) \quad (2.11)$$

Dále ze znalosti celkové síly  $F(0)$  spočítáme zrychlení automobilu  $a(0)$ , které pro účely naší práce nezavedeme v klasických jednotkách  $\left[ \frac{m}{s^2} \right]$  ale v  $\left[ \frac{km}{hod \cdot s} \right]$ :

$$a(0) = 3,6 \cdot \frac{F(0)}{m} \quad (2.12)$$

#### 2.1.2.4 Výpočet veličin v kroku $k$

Podle délky zvoleného diskretizačního kroku  $ds$  spočítáme rychlost  $v(1)$ , kterou vozidlo dosáhne v bodě  $1$ . Přitom předpokládáme, že všechny veličiny včetně rychlosti  $v$  a zrychlení  $a$  byly mezi body 0 a 1. konstantní.

Rychlost  $v(1)$  získáme jako řešení známé nelineární soustavy 2 rovnic o 2 neznámých (rychlost  $v(1)$  a čas  $t$  potřebný k projetí dráhy  $ds$ ). Tyto rovnice jsou odvozeny v [5].



$$v(1) = v(0) + a(0) \cdot t$$

$$ds = \frac{1}{2} \cdot a(0) \cdot t^2 + v(0) \cdot t \quad (2.13)$$

Řešením této soustavy dostáváme pro čas  $t$  dvě řešení ( $t_1$  a  $t_2$ ), ovšem fyzikální význam čas  $t_2$  nemá, neboť je vždy záporný, proto uvažujeme pouze nezáporné řešení  $t_1$  a k němu odpovídající rychlost  $v(1)$ , která se z času  $t_1$  spočítá tímto vztahem, ve kterém je už za  $t_1$  dosazeno:

$$v(1) = \sqrt{v(0)^2 + 2 \cdot a(0) \cdot ds} \quad (2.14)$$

Tento vztah je ovšem nutno přepočítat, aby byl jednotkově v pořádku: rychlost  $v$  vyjádřená v jednotkách  $\left[ \frac{km}{hod} \right]$  a zrychlení  $a(0)$  vyjádřeno v jednotkách  $\left[ \frac{km}{hod \cdot s} \right]$ :

$$v(1) = \sqrt{v(0)^2 + 2 \cdot 3600 \cdot a(0) \cdot ds} \quad (2.15)$$

Nyní jsme se dostali do bodu  $1$ , protože známe  $v(1)$ . Analogicky (jako u výpočtu v bodě  $0$ ) zvolíme nějaké  $\varphi(1) \in P$  a  $i(1) \in I$  a dopočítáme všechny ostatní veličiny  $M(1)$ ,  $F(1)$ ,  $a(1)$ , a  $\Phi(1)$ . Poté analogicky spočítáme rychlost v bodě  $2$ . Takto postupujeme až do bodu  $n$ .

### 2.1.2.5 Předepsání omezení

Nyní programu předepíšeme všechna omezení, která musí při výše uvedeném výpočtu dodržet.

#### 1. omezení (minimální rychlost):

$$Rychlost \ v(k) \geq 20 \quad (2.16)$$

pro  $0 \leq k \leq n$ , jinak by se vozidlo dostalo do režimu, kde není definován výpočet hnacího momentu  $M$  pro žádný zařazený rychlostní stupeň.

#### 2. omezení (minimální otáčky):

Otáčky motoru, které závisí na zařazeném rychlostním stupni  $i$  a jsou přímo úměrné rychlosti  $v$  automobilu, nesmí klesnout pod kritickou hodnotu. Tuto podmínku dostatečně dobře zformulujeme takto:

$$\frac{i(k)}{v(k)} \leq \frac{1}{10} \quad (2.17)$$

pro  $0 \leq k \leq n$ .

### 3. omezení (minimální požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva):

Hnací moment je v diagramu bohužel popsán jen pro jisté hodnoty spotřeb  $\Phi$ , čemuž odpovídá omezení i pro požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$ :

$$\varphi(k) \geq 0,3 \quad (2.18)$$

pro  $0 \leq k \leq n$ .

### 4. omezení (maximální zrychlení):

Aby nedocházelo k prokluzu kola na vozovce, nesmí být zrychlení  $a$  automobilu příliš veliké. Jestliže se vozidlo pohybuje po suché asfaltové vozovce, může zrychlení  $a$  automobilu nabývat až poloviční hodnoty gravitačního zrychlení  $g$ . Jelikož zrychlení

vyjadřujeme v jednotkách  $\left[ \frac{km}{hod \cdot s} \right]$ , podmínku předepíšeme následovně:

$$a(k) \leq 18 \quad (2.19)$$

pro  $0 \leq k \leq n$ .

### (5. omezení – maximální rychlost:)

Toto omezení vyplývá z dráhy, kterou automobil projíždí. Např. v jisté části se automobil pohybuje ve vesnici, kde je povolena maximální rychlost 50km/hod. Nebo můžeme požadovat, aby v jistém úseku (např. na dálnici) jel minimální rychlostí např. 80km/hod. Také můžeme požadovat, aby automobil vjel do cíle nějakou minimální rychlostí.

Tato omezení můžeme zformulovat takto:

$$v(k) \leq 50 \quad (2.20)$$

pro  $a \leq k \leq b$ , kde volíme parametry  $0 \leq a, b \leq n$

$$v(k) \geq 80 \quad (2.21)$$

pro  $a \leq k \leq b$ , kde volíme parametry  $0 \leq a, b \leq n$

$$v(n) = v_{\min} \quad (2.22)$$

Podobných omezení lze do programu vložit samozřejmě více, a to nejen omezení na rychlost  $v$  ale i na všechny ostatní veličiny. Je třeba pouze dbát na to, aby omezení nebyla navzájem v rozporu.

#### **2.1.2.6 Definice účelové funkce**

Definujeme účelovou funkci v souladu s definicí v kapitole 1.4 (rovnice 1.28) následujícím způsobem:

$$\Phi_s(\varphi, v, i) = \int_{s_1}^{s_2} S(\varphi, v, i) ds \quad (2.23)$$

Do programu tuto účelovou funkci kvůli diskretizaci zapíšeme formou sumy jako:

$$Z = 10^{-3} \cdot \sum_{k=0}^n S(k) \cdot ds \quad (2.24)$$

### 2.1.2.7 Výpočet účelové funkce

Místo toho, aby program zkoušel všechny možnosti (metoda „hrubé síly“), používá program sadu algoritmů pro rychlé nalezení optimálního průběhu dvojice  $\varphi(k)$  a  $i(k)$  pro  $k \in \langle 0; n \rangle$  tak, aby hodnota účelové funkce  $Z$  byla minimální. V tomto bodě lze programu zadat příkaz, z jakých sad algoritmů má vybírat a jaké metody pro nalezení výsledku přednostně použít. Výsledek (průběh všech veličin ve všech krocích) lze vypsát do textového souboru. Navíc lze nadefinovat výpočet závěrečných statistik jako například výpočet průměrné rychlosti apod.

Veškeré výpočty jsou založeny na různých optimalizačních modelech, numerických metodách a jejich programové implementaci, o nichž se lze dočíst v uživatelské příručce (manuálu) programu GAMS. [6] a o nichž se velmi stručně zmíníme v následující podkapitole.

### 2.1.3 Klasifikace úlohy z hlediska optimalizace

Úloha byla pro program GAMS v předcházející podkapitole diskretizována a formulována tak, že je z pohledu optimalizace klasifikována jako úloha nelineárního programování, kde některé proměnné jsou diskrétní (konečný obor hodnot) a některé proměnné spojité (omezené), přičemž podmínky a vazby mezi proměnnými jsou i nelineární.

V příloze práce je uvedena část zdrojového kódu, která obsahuje popis modelu automobilu a popis výpočtu jeho pohybu a spotřeby. Ze zdrojového kódu je patrné, které proměnné jsou diskrétní a které jsou spojité. Dále lze v tomto kódu najít rovnice zachycující nelineární vazby mezi jednotlivými proměnnými.

Účelová funkce má formu sumy. Účelovou funkci se v programu snažíme minimalizovat pomocí řešiče BARON, který je implementován v programu GAMS. Řešič BARON v sobě implementuje speciálně upravené algoritmy, tzv. algoritmy větví a mezí („branch-and-bound“). Výkladem těchto algoritmů se práce nezabývá (neboť autor práce ještě neabsolvoval kurz optimalizace), ale lze jej najít např. v [7]. Podrobnosti o řešiči BARON lze nalézt v [8].

## 2.2 FORMULACE ÚLOHY V MATEMATICKÉM SOFTWAREMATLAB

Pomocí programu GAMS jsme řešili úlohu minimalizace funkcionálu celkové dráhové spotřeby  $\Phi_s = \int_1^2 S[\varphi(s), i(s), v(s)] ds$ . V programu MATLAB se v této kapitole pokusíme vyřešit úlohu minimalizace druhého funkcionálu celkové časové spotřeby (rovnice 1.27)

$$\Phi_t = \int_1^2 S_t[\varphi(t), i(t)] dt.$$

Tato úloha je podstatně jednodušší, není k ní potřeba softwarového řešiče specializovaného na optimalizaci, který používáme proto, aby výpočet netrval příliš dlouho. Tuto úlohu lze rychle vyřešit i metodou tzv. „hrubé síly“, neboť je potřeba provést nevelké množství výpočtů. Úlohu bychom samozřejmě mohli úspěšně řešit i v programu GAMS, ale byl zvolen program MATLAB.

### 2.2.1 Rozbor úlohy

V této kapitole stručně rozebereme myšlenku úlohy minimalizace celkové časové spotřeby  $\Phi_t = \int_1^2 S_t[\varphi(t), i(t)] dt$ , kterou budeme řešit v MATLABu. Formulace je velmi podobná formulaci předcházející úlohy, která je popsána v kapitole 2.1.2. Především zdůrazníme rozdíl, v čem se tato úloha liší od úlohy předcházející a proč je o poznání jednodušší.

V případě, že neřešíme otázku minimální spotřeby na zadané dráze, ale řešíme úlohu minimální spotřeby při rozjezdu z nějaké rychlosti  $v_{MIN}$  na nějakou jinou rychlost  $v_{MAX}$ , lze úlohu vyřešit právě jako minimalizaci celkové časové spotřeby.

Řešme tedy následující úlohu:

Automobil se má po rovné vozovce (nulový úhel stoupání) rozjet z rychlosti  $v_{MIN}$  na rychlost  $v_{MAX}$ , přičemž může urazit libovolnou vzdálenost. Spotřeba paliva má být co nejmenší.

Definujme posloupnost:

$$v_{MIN} = v_1, v_2, \dots, v_n = v_{MAX}$$

pro kterou platí:

$$v_{MIN} < v_1 < v_2 < \dots < v_n = v_{MAX}$$

Je třeba si uvědomit, že aby se automobil rozjel na rychlost  $v_{MAX}$ , musí se nejprve rozjet na rychlost  $v_1$ , poté na rychlost  $v_2$  atd. Tato myšlenka vede k úvaze, že úlohu hledání průběhu dvojice  $\varphi(k)$  a  $i(k)$  tak, aby celková časová spotřeba  $\Phi_t$  byla minimální, lze vyřešit takovým způsobem, že postupně vyřešíme podúlohy minimalizace celkové časové spotřeby  $\Phi_t$  při rozjezdu z rychlosti  $v_{MIN}$  na rychlost  $v_1$ , poté z rychlosti  $v_1$  na rychlost  $v_2$  atd.

Výpočet této úlohy se provede rychle, neboť spočívá v provedení malého počtu operací pro  $n$  nezávislých podúloh. Podúlohy jsou nezávislé, protože výsledek výpočtu průběhu dvojice  $\varphi(k)$  a  $i(k)$  při rozjezdu obecně z rychlosti  $v_n$  na rychlost  $v_{n+1}$  nijak neovlivní výsledek výpočtu pro jiné  $n$ .

Myšlenku lze shrnout takto: Díky základní úvaze jsme rozdělili úlohu na  $n$  nezávislých podúloh. Jednotlivé podúlohy lze vyřešit velmi rychle. A složením řešení těchto jednotlivých úloh dostaneme řešení celkové.

### 2.2.2 Řešení úlohy

V této kapitole se nebudeme formulací úlohy a jejím řešením zabývat tak detailně jako při rozboru minulé úlohy v kapitolách 2.1.1 a 2.1.2. Nejprve jako v GAMSu nadefinujeme všechny konstanty a parametry, předepíšeme počáteční podmínku  $v_0 = v_{MIN}$ , požadavek ( $v_{MAX}$ ) a různá omezení (především omezení na zrychlení automobilu, aby nedocházelo k prokluzu kol a vozovky).

Obvyklým způsobem zavedeme diskretizaci nespočetné množiny (intervalu) možných hodnot požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva  $\varphi$  stejně jako v GAMSu a stanovíme obor hodnot pro zařazený rychlostní stupeň  $i$ . Označíme  $\varphi \in P$ ,  $i \in I$ .

Dále zvolíme celé číslo  $n$ , čímž nadefinujeme ekvidistantní posloupnost rychlostí:  $v_{MIN} < v_1 < v_2 < \dots < v_n = v_{MAX}$ . Výpočet je tím přesnějším, čím je  $n$  vyšší. Rychlost výpočtu je přímo úměrná číslu  $n$ .

Průběh všech veličin mezi kroky  $k$  a  $k+1$  pro  $k < n$  uvažujeme opět konstantní. Pro všechny kombinace dvojice  $\varphi(k) \in P$ ,  $i(k) \in I$  provedeme výpočet zrychlení z rychlosti  $v_k$  na rychlost  $v_{k+1}$  následujícím způsobem:

Pro zvolenou dvojici  $\varphi(k) \in P$ ,  $i(k) \in I$  a rychlost  $v_k$  stanovíme hnací moment  $M(k)$  a odporovou sílu  $F_r(k)$ . Z nich spočítáme výslednou sílu  $F(k)$  a zrychlení  $a(k)$ . Dále stanovíme okamžitou časovou spotřebu  $S_t(k)$ , která je funkcí veličin:  $\varphi(k), i(k), v_k$ .

Nyní spočítáme čas  $t(k)$ , potřebný k rozjezdu z rychlosti  $v_k$  na rychlost  $v_{k+1}$  pomocí tohoto vztahu:

$$t(k) = \frac{v_{k+1} - v_k}{a(k)} \quad (2.25)$$

Ze znalosti času  $t(k)$  a okamžité časové spotřeby  $S_t(k)$  stanovíme celkovou časovou spotřebu  $\Phi_t(k)$  jako:

$$\Phi_t(k) = S_t(k) \cdot t(k) \quad (2.26)$$

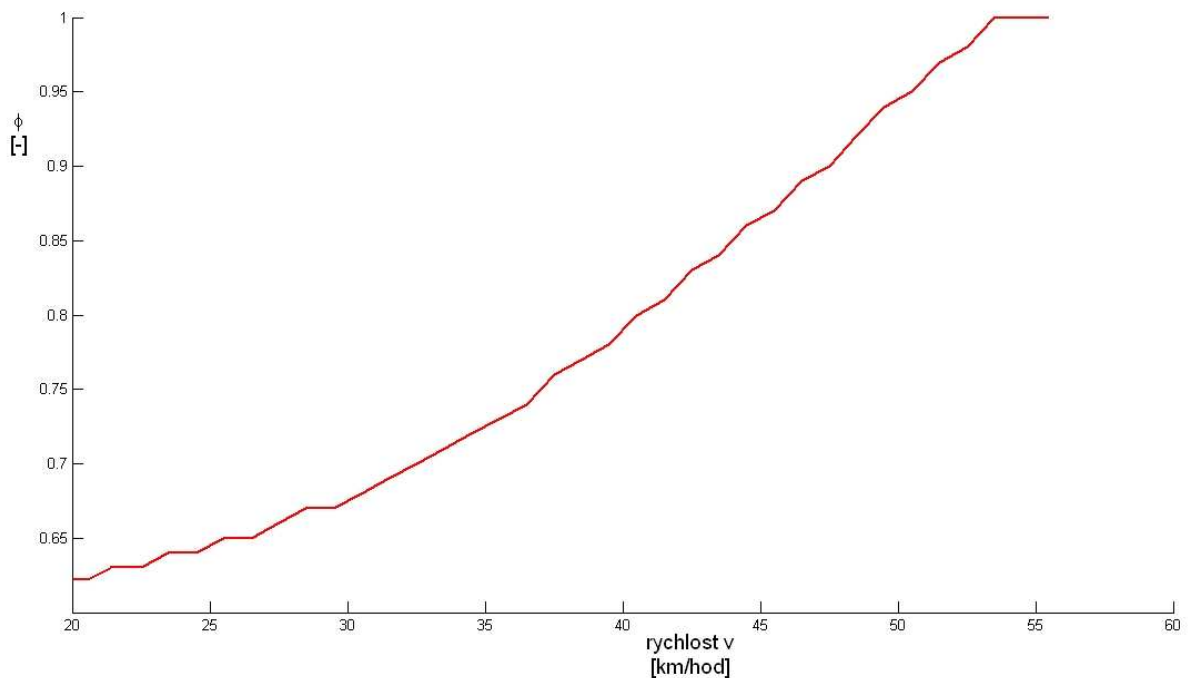
Výpočet rozjezdu z rychlosti  $v_k$  na rychlost  $v_{k+1}$  provedeme pro všechny kombinace dvojic  $\varphi(k) \in P$ ,  $i(k) \in I$ . Z těchto dvojic vybereme tu, pro niž je celková časová spotřeba  $\Phi_t(k)$  minimální.

Průběh dvojic  $\varphi(k) \in P$ ,  $i(k) \in I$  uvedeným způsobem vybereme a zaznamenáme pro  $k = 1, \dots, n-1$ .

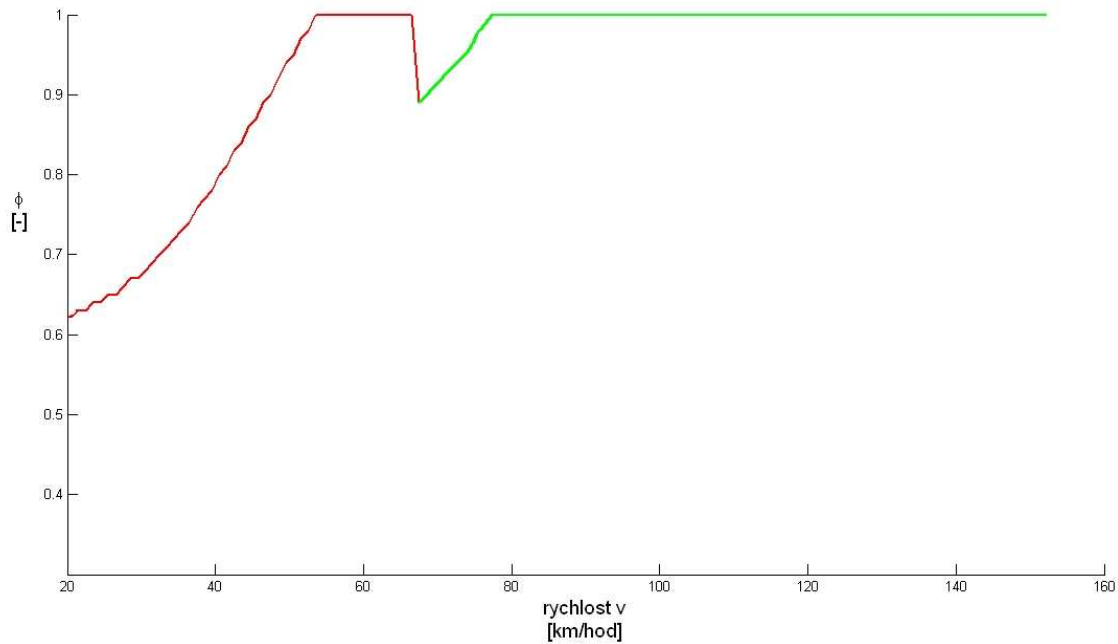
Tímto je výpočet hotov a celková časová spotřeba  $\Phi_t$  (při rozjezdu z rychlosti  $v_{MIN}$  na rychlost  $v_{MAX}$ ) je dána součtem: 
$$\Phi_t = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_t(k) \quad (2.27)$$

### 2.2.3 Zobrazení výsledku úlohy a závěr

Na obr. 2.1 je detailně znázorněn optimální průběh  $\varphi$  v závislosti na rychlosti  $v$  pro rozjezd na rychlost  $v_{MAX} = 55 \text{ km/hod}$ . Na obr. 2.2 je znázorněn průběh  $\varphi$  v závislosti na rychlosti  $v$  pro rozjezd na rychlost  $v_{MAX} = 150 \text{ km/hod}$ . Na obrázcích znamená červená barva zařazený 2. rychlostní stupeň a zelené barva značí 3. rychlostní stupeň. ( $i = 2$  resp.  $i = 3$ ).



Obr. 2.1: Rozjezd na rychlost  $v_{MAX} = 55 \text{ km/hod}$



Obr. 2.2: Rozjezd na rychlost  $v_{MAX} = 150 \text{ km / hod}$

Ukazuje se, že je vhodné se rozjíždět téměř na plný plyn, jsou-li podmínky rozjezdu definovány tak, jak je uvedeno. Ovšem je třeba si uvědomit, že takto definované podmínky rozjezdu se v praxi neuplatní, a proto není výsledek této simulace nikterak důležitý.

Závěrem lze shrnout, že v prostředí MATLAB šlo úspěšně vyřešit tuto úlohu. Avšak tato úloha nemá v praxi valný význam. Z důvodu ukázky toho, že i poměrně jednoduchým algoritmem lze řešit některé úlohy, je v této kapitole implementace modelu do MATLABu uvedena. Ostatní úlohy jsou v následující kapitole řešeny výhradně v prostředí GAMS.

# KAPITOLA 3

## POROVNÁNÍ VYBRANÝCH MODELOVÝCH JÍZDNÍCH REŽIMŮ

V této kapitole se budeme snažit porovnat různé režimy jízdy, tak jak je známe z praktického života. Cílem porovnání bude rozhodnout, který jízdní režim, resp. která jízdní strategie řidiče je z hlediska spotřeby paliva nejlepší možná (vede k nejnižší spotřebě paliva) a o kolik se spotřeba paliva bude lišit v porovnání s jiným režimem jízdy. V následujících kapitolách budeme porovnávat různé jízdní režimy.

Pozn.: V této kapitole budeme veličinu  $S$  - dráhovou spotřebu paliva – nazývat zkráceně jen spotřeba.

### 3.1 OPTIMÁLNÍ JÍZDNÍ REŽIM PO ROVINĚ

ZADANÝ PROBLÉM:

Jede-li automobil po dlouhé rovině (např. dálnice), jaký je optimální jízdní režim?

Režim I:

Udržovat konstantní rychlost? Jestliže ano, jaká je tato rychlost? Jaký je rozdíl ve spotřebě paliva, zvýší-li se tato rychlost?

Režim II:

Kombinace neustálého zrychlování (na zařazený rychlostní stupeň) a vyřazování (jízdy na volnoběh)?

FORMULACE:

Uvažujme situaci, kdy automobil jede po rovině mezi obcemi nebo po dálnici. Zvolme délku trati 4km. Na této silnici je povolena maximální rychlost  $v_{MAX} = 90\text{km/hod}$  resp.  $v_{MAX} = 130\text{km/hod}$ . Rychlost omezíme i požadavkem minimální rychlosti  $v_{MIN} = 70\text{km/hod}$ , aby se nebrzdil provoz. Úhel stoupání  $\theta$  bude podél celé trajektorie konstantní  $\theta = 0^\circ$ . Rychlost na začátku a na konci trajektorie volme  $v_0 = v_{MIN} = v_f = 70\text{km/hod}$ .

Model - režim I:

Předpokládejme, že může být zařazen pouze rychlostní stupeň  $i \in \{2,3,4\}$  a nesmí být vyřazen rychlostní stupeň ( $i \neq 0$ ).



Diskretizační krok volme  $ds = 100m$  pro rychlosti do  $100km/hod$ . Pro rychlosti vyšší volíme  $ds = 150m$ . Situace modelujeme pro rychlosti  $v_0 = v_{MIN} = v_f$  od  $70km/hod$  do  $130km/hod$ . Výsledky modelování jsou zaznamenány v tab. 3.1.

### Model - režim II:

Model režimu II volíme zhotovíme podobně jako pro režim I. Úhel stoupání  $\theta$  bude podél celé trajektorie konstantní  $\theta = 0^\circ$ . Rychlost na začátku a na konci trajektorie volme  $v_0 = v_{MIN} = v_f = 70km/hod$  a poté postupně zvyšujeme až do rychlosti  $130km/hod$ . Diskretizační krok volíme stejně jako pro režim I. Ovšem v našem modelu připustíme hodnotu zařazeného rychlostního stupně  $i \in \{0,2,3,4\}$

### VÝSLEDKY:

Hodnoty modelování spotřeby  $S$  v závislosti na průměrné rychlosti jsou pro oba jízdní režimy vyneseny v tab. 3.1 a graficky znázorněny na obr. 3.1.

**režim I - pouze nejvyšší zařazený rychlostní stupeň**

**režim II- kombinováno s volnoběhem (vyřazování)**

S[l/100km]	$v_{MIN}$ [km/hod]	$v_{AVG}$ [km/hod]
4,6	70	70,0
4,9	80	80,0
5,4	90	90,0
5,9	100	100,0
6,5	110	110,0
7,2	120	120,0
7,9	130	130,0

S[l/100km]	$v_{MIN}$ [km/hod]	$v_{AVG}$ [km/hod]
3,9	70	75,0
4,3	80	85,2
4,7	90	93,0
5,3	100	104,4
6,0	110	114,6
6,8	120	124,4
7,6	130	133,3

Tab. 3.1: Závislost spotřeby  $S$  na ustálené rychlosti  $v$

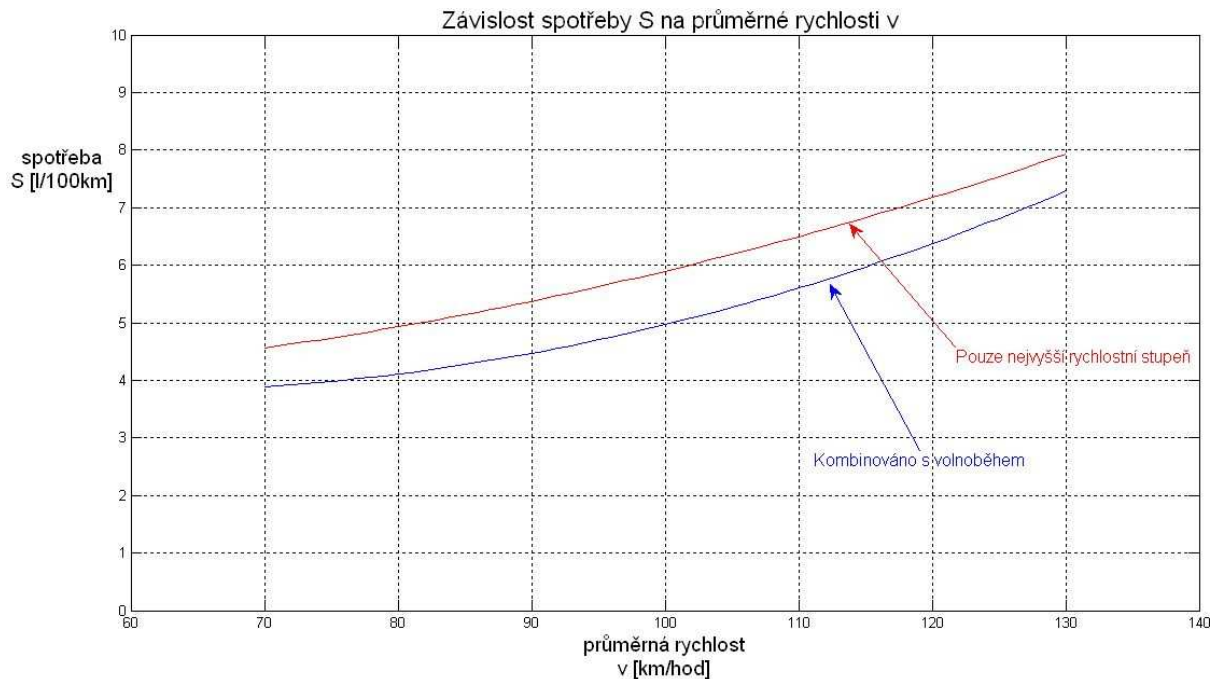
Hodnoty spotřeby pro režim I by měly odpovídat hodnotám v diagramu dráhových spotřeb (obr. 1.4). Tyto hodnoty lze odečíst z diagramu dráhových spotřeb následujícím způsobem:

Pro konkrétní rychlost  $v$  najdeme v diagramu bod ležící na parabole jízdních odporů. Tento bod je charakterizován tím, že hnací a odporové síly jsou v rovnováze, jedná se tedy o ustálený jízdní režim. Najdeme křivku spotřeby, která pro daný zařazený rychlostní stupeň tímto bodem prochází nebo je mu nejbližší. Číselné označení této křivky pak odpovídá spotřebě paliva.

Srovnáním hodnot spotřeb odečtených z tohoto diagramu a namodelovaných hodnot v tab. 3.1 pro režim I je vidět, že hodnoty si odpovídají.

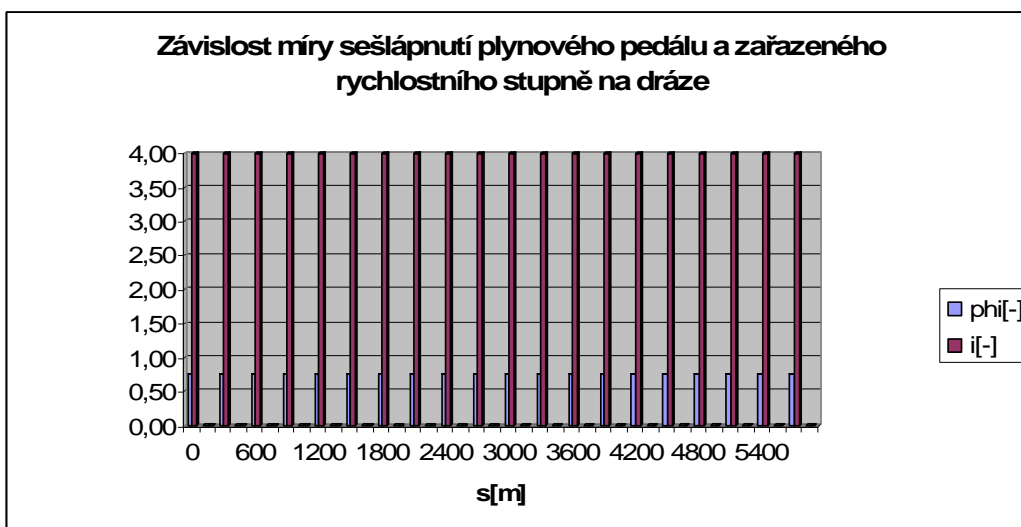
**Pozn.1:** Nutno podotknout, že ustálený jízdní režim I ani nebylo nutno modelovat, neboť hodnoty spotřeb pro ustálenou rychlost jsme výše uvedeným způsobem mohli odečíst přímo z diagramu. V naší práci má modelování režimu I spíše význam zpětné kontroly, že model byl sestaven správně.

**Pozn. 2:** Diagram dráhových spotřeb bohužel nepopisuje dobře mezní ustálené jízdní režimy. Např. pro 4. rychlostní stupeň je definován hnací moment  $M$  pouze pro spotřebu  $S = 5l/100km$ . Pro nižší spotřebu už definován bohužel není. V našem modelu vycházíme z aproximace diagramu, kde povolujeme modelovat ustálený jízdní režim až na spotřebě  $S = 4,5l/100km$ . Menší spotřebu už nechceme ve výpočtech připouštět, neboť bychom se mohli dopouštět značné nepřesnosti. Pro spotřebu  $S = 4,5l/100km$  jsme namodelovali ustálenou rychlost  $v = 67km/hod$ . Tuto rychlost nazveme optimální cestovní rychlostí a označíme ji  $v_c$ .

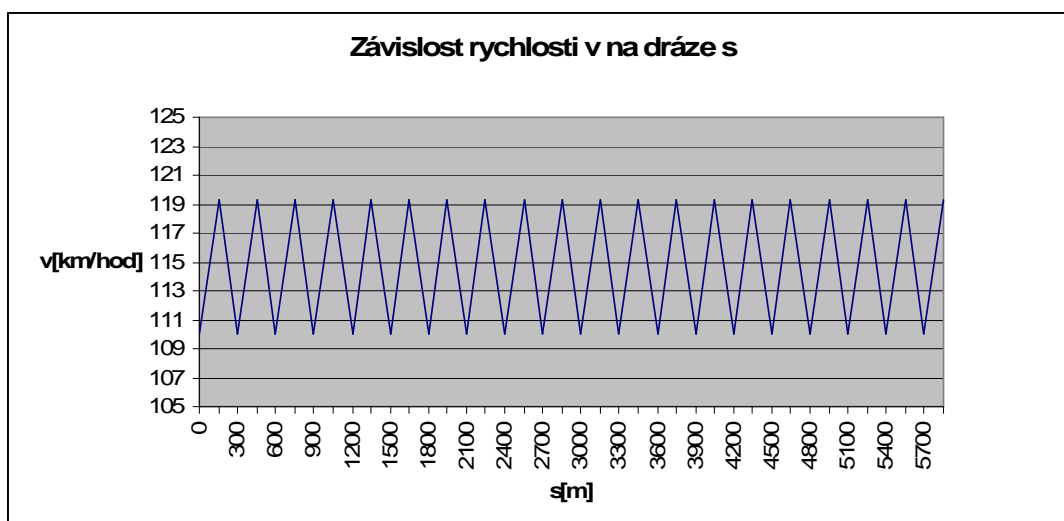


obr. 3.1: Závislost spotřeby  $S$  na ustálené rychlosti  $v$

Porovnáním režimu I a II vidíme, že při stejných dosažených průměrných rychlostech je jízdní režim II o 10-20% úspornější než jízdní režim I. Ovšem nevýhodou jízdního režimu II je průběh  $\varphi(s)$  a hlavně  $i(s)$ . Tento průběh (pro vybrané modelování průměrné rychlosti 115km/hod) je graficky znázorněn na obr. 3.2. Odpovídající průběh rychlosti je znázorněn na obr. 3.3.



Obr. 3.2: Průběh řazení a požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva pro jízdní režim II



Obr. 3.3: Průběh rychlosti pro jízdní režim II

Tento jízdní režim odpovídá tomu, že řidič, který chce na dálnici udržovat průměrnou cestovní rychlost např.  $v_{AVG} = 115 \text{ km/hod}$ , nejprve automobil svižněji rozjede s nejvyšším možným zařazeným rychlostním stupněm na rychlost 120 km/hod a poté vyřadí rychlostní stupeň. Rychlost automobilu pak nechá klesnout na 110 km/hod. Pak opět zařadí rychlostní stupeň a auto rozjede na rychlost 120 km/hod. Toto se periodicky opakuje. Časté přeřazování vede k rychlému opotřebení spojky a neplynulý požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva vede k neplynulosti provozu.

#### SHRNUTÍ:

Pro jízdní režim I byla namodelována nejnižší spotřeba  $S = 4,5 \text{ l}/100 \text{ km}$  a k ní odpovídající optimální cestovní rychlost  $v_C = 67 \text{ km/hod}$  (viz pozn.2). Se zvyšující se ustálenou rychlostí, spotřeba přibližně kvadraticky roste (viz obr. 3.1). Jízdní režim II je asi o 10-20% úspornější než režim I, zato však vede k většímu namáhání spojky a neplynulosti provozu.

### 3.2 OPTIMÁLNÍ JÍZDNÍ REŽIM PRO ROZJÍŽDĚNÍ

#### ZADANÝ PROBLÉM:

Je-li potřeba automobil rozjet po rovině z nějaké malé rychlosti  $v_0$  na vyšší rychlost  $v_f$ , např.  $v_f = v_c = 67 \text{ km/hod}$ , na nějaké vzdálenosti  $s$ , jakým způsobem rozjíždění se dosáhne nejnižší možné spotřeby?

#### Režim III:

Rozjet se co nejrychleji, abychom co nejdříve dosáhli optimální cestovní rychlosti  $v_c$ , kdy je spotřeba nejnižší? Vyplatí se mít při prudkém rozjezdu krátkou chvíli vysokou spotřebu a na zbývající dráze mít spotřebu co nejmenší možnou (odpovídající optimální cestovní rychlosti)?

#### Režim IV:

Rozjíždět se na optimální rychlost  $v_c$  velmi pomalu a plynule, plynový pedál jen „lechtat“, aby spotřeba, ačkoli nebude minimální, nikdy nebyla příliš vysoká?

#### FORMULACE:

Volme délku úseku, na kterém se má automobil rozjet,  $s = 400 \text{ m}$ . Počáteční rychlost volme  $v_0 = 30 \text{ km/hod}$  a konečnou rychlost  $v_f = v_c = 67 \text{ km/hod}$ . Modelujme nyní oba jízdní režimy:

#### Model - režim III:

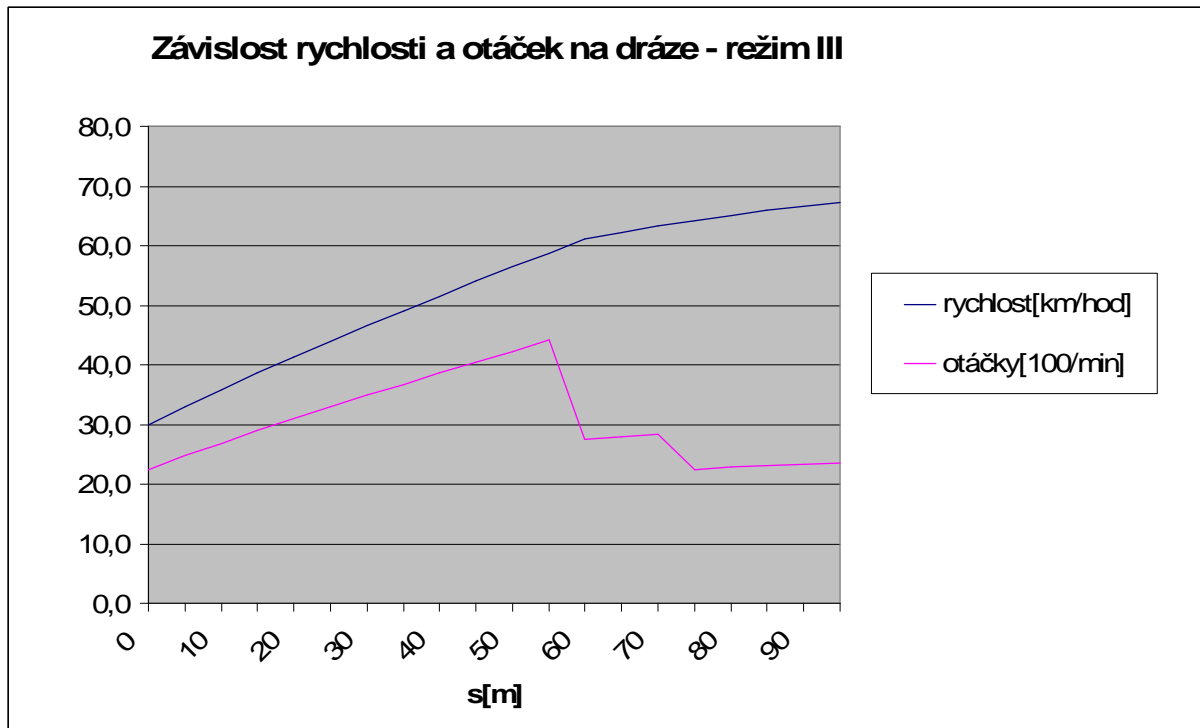
Abychom nasimulovali podmínku svižného rozjezdu, uložíme modelu podmínku minimálních otáček motoru. Volíme  $ot_{MIN} = 2250 \text{ ot/min}$ .

#### Model - režim IV:

Pro tento jízdní režim zvolíme naopak podmínku maximálních otáček motoru, abychom nasimulovali pomalý, klidný rozjezd. Volíme  $ot_{MAX} = 2500 \text{ ot/min}$ .

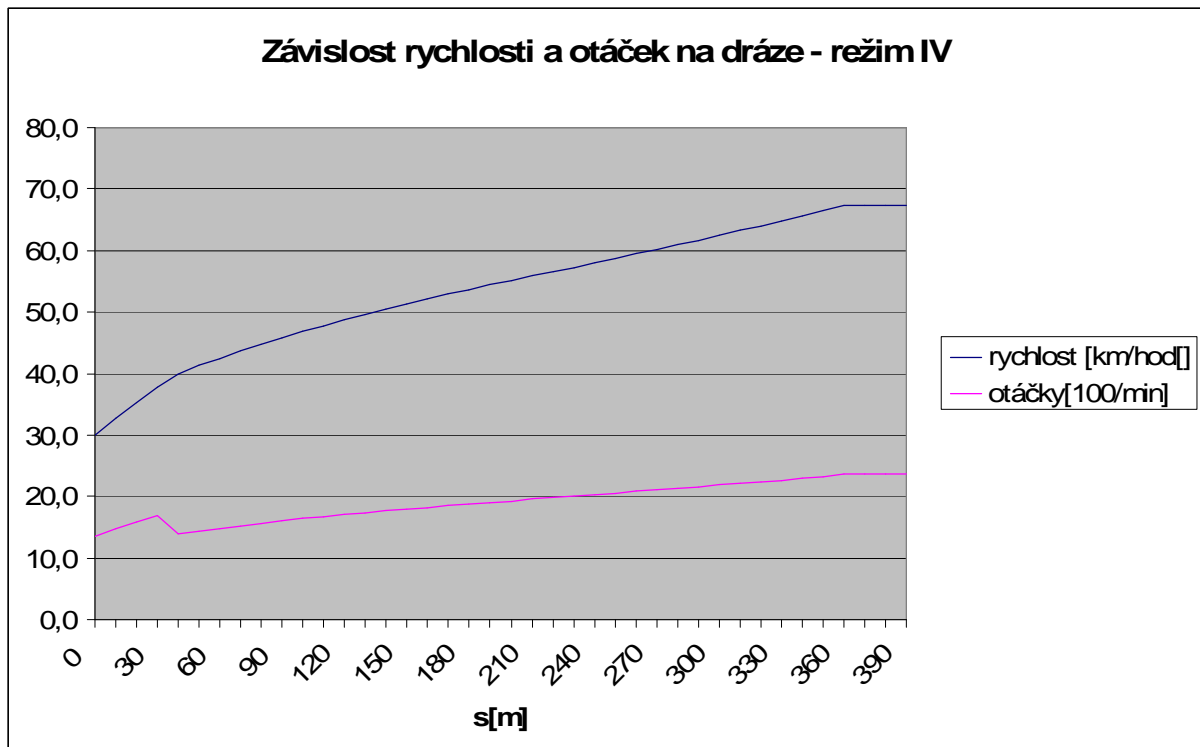
#### VÝSLEDKY

Výsledek modelování jízdního režimu III je graficky zpracován na obr. 3.4, kde vidíme průběh rychlosti  $v$  a otáček motoru  $ot$  v závislosti na dráze  $s$ . Podobně výsledek modelování jízdního režimu IV je znázorněn na obr. 3.5.



Obr. 3.4: Závislost rychlosti  $v$  a otáček motoru  $ot$  na dráze  $s$ , režim III

Skoky v průběhu otáček znamenají přecházení. V tomto jízdním režimu byl postupně zařazen druhý, třetí i čtvrtý rychlostní stupeň. Graf končí pro  $s = 100m$ , neboť dále (až do  $s = 400m$ ) je průběh rychlosti  $v$  a otáček motoru  $ot$  téměř konstantní. Celková spotřeba pro ujetí dráhy  $s = 400m$  a dosažení požadované rychlosti  $v_f = v_c = 67km/hod$  byla  $\Phi = 47,4ml$  paliva, čemuž odpovídá spotřeba  $S = 11,85l/100km$ .



Obr. 3.5: Závislost rychlosti  $v$  a otáček motoru  $ot$  na dráze  $s$ , režim IV

Skok v průběhu otáček opět znamená přeřazení. V tomto jízdním režimu byl postupně zařazen pouze třetí a čtvrtý rychlostní stupeň. Celková spotřeba pro ujetí dráhy  $s = 400m$  a dosažení požadované rychlosti  $v_f = v_c = 67km/hod$  byla  $\Phi = 29,8ml$  paliva, čemuž odpovídá spotřeba  $S = 7,45l/100km$ . Spotřeba tak klesla oproti jízdnímu režimu téměř o 40% .

Pozn. Po srovnání obou těchto režimů jsme zkusili modelovat režim, kdy jsme otáčky motoru nijak neomezovali, ve snaze zjistit, jestli neexistuje takový jízdní režim, který by byl kompromisem obou předchozích – tedy režim, kdy se nerozjíždíme ani příliš svižně ani příliš pomalu. Výsledek této simulace je totožný s jízdním režimem IV, kdy otáčky nepřekračují hranici  $ot_{MAX} = 2500ot/min$  .

## SHRNUTÍ:

Na základě srovnání jízdního režimu III a IV lze konstatovat, že režim IV je značně úspornější. Předpokládali bychom-li, že pro rozjezdy s jinými parametry ( $v_f, v_c, s$ ) dopadne srovnání obou režimů podobně jako pro parametry, které jsme vybrali v našem případě, lze obecně konstatovat, že z hlediska spotřeby paliva je lepší při rozjezdu co nejdříve přeřazovat na vyšší rychlostní stupeň, aby otáčky motoru nebyly zbytečně vysoké a na plyn šlapat spíše méně než více.

## 3.3 OPTIMÁLNÍ JÍZDNÍ REŽIM PŘI JÍZDĚ DO KOPCE

### ZADANÝ PROBLÉM:

Automobil jede ustálenou rychlostí po rovině. Před ním je kopec. Má řidič automobil před kopcem rozjet? Má pak v průběhu kopce ubírat plyn a v závěru kopce podřadit nebo vyřadit rychlostní stupeň? Vyplatí se celý kopec vyjet na nižší rychlostní stupeň? Vyjede-li řidič kopec vysokou rychlostí, vzroste spotřeba málo nebo hodně?

### FORMULACE:

Volme délku úseku  $s = 1500m$ , z čehož první třetinu tvoří rovinka, na kterém se může automobil rozjet a zbývající část tvoří 5% stoupání. Počáteční rychlost  $v_0$  a konečnou rychlost  $v_f$  volme v závislosti na jízdním režimu. Modelujme nyní všechny 4 jízdní režimy:

### Model - režim 4N-67:

Počáteční rychlost volme  $v_0 = 67km/hod$  a rychlost na vrcholu kopce volme  $v_f = 67km/hod$  . Zařazeny dovoluujeme všechny rychlostní stupně nebo vyřazený rychlostní stupeň.

#### Model - režim 4N-50:

Počáteční rychlost volme  $v_0 = 67 \text{ km/hod}$  a rychlost na vrcholu kopce volme  $v_f = 50 \text{ km/hod}$ . Zařazeny dovolujeme všechny rychlostní stupně nebo vyřazený rychlostní stupeň.

#### Model - režim 3N-40:

Počáteční rychlost volme  $v_0 = 50 \text{ km/hod}$  a rychlost na vrcholu kopce volme  $v_f = 40 \text{ km/hod}$ . Zařazen dovolujeme pouze 3. a 2. rychlostní stupeň nebo vyřazený rychlostní stupeň.

#### Model - režim 4-80:

Počáteční rychlost volme  $v_0 = 82 \text{ km/hod}$  a rychlost na vrcholu kopce volme  $v_f = 80 \text{ km/hod}$ . Zařazen dovolujeme pouze 4. rychlostní stupeň. Připouštíme minimální rychlost  $v_{MIN} = 80 \text{ km/hod}$ . Tento režim uvádíme spíše pro srovnání.

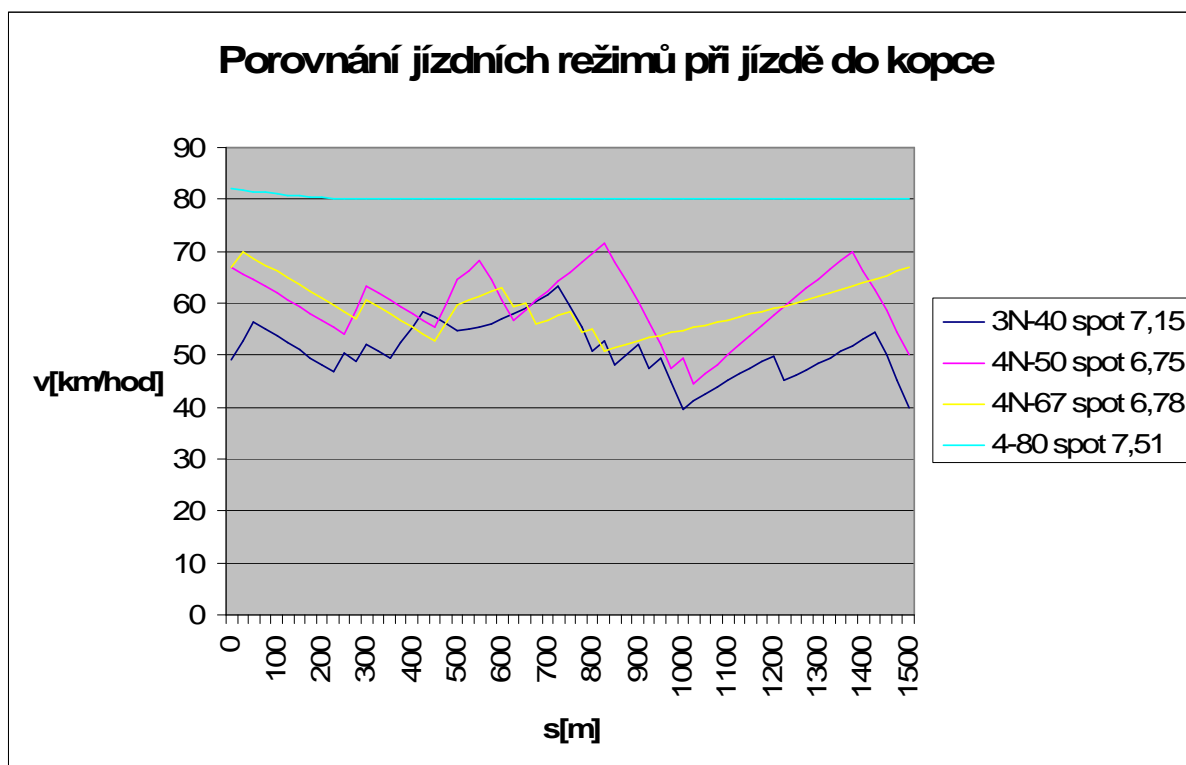
#### VÝSLEDKY:

Výsledky provedených simulací zde pro přehlednost uvádíme formou slovního komentáře. Graficky jsou na obr. 3.6 znázorněny pouze průběhy rychlostí u každého režimu v závislosti na dráze. Zuby v obrázku jsou způsobeny volbou diskretizačního kroku  $ds = 25 \text{ m}$ , čímž připouštíme, že každých 25 metrů mohl řidič střídavě zařazovat či vyřazovat rychlostní stupeň. U každého režimu je připsána i průměrná spotřeba, která byla na úseku nasimulována.

Z výsledků provedených simulací vyplynulo, že při režimu 4N-67 i 4N-50 byl v průběhu stupání zařazen buď nejvyšší možný stupeň nebo byl rychlostní stupeň vyřazen. Automobil tedy nikdy nepodřadil. Pouze na konci kopce u režimu 4N-50 automobil vyřadil.

Ze simulace režimu 3N-40, kdy nebylo dovoleno zařadit nejvyšší rychlostní stupeň vyplynulo, že spotřeba paliva je při tomto režimu nejvyšší ze všech porovnávaných režimů, ačkoli požadavek na konečnou rychlost byl nejnižší v rámci porovnávaných režimů.

Simulace režimu 4-80 přinesla srovnání, že i při zvýšené průměrné rychlosti se při zařazeném nejvyšším rychlostním stupni nezvyšuje spotřeba příliš.



Obr. 3.6: Porovnání jízdních režimů při jízdě do kopce

#### SHRNUTÍ:

Z provedených simulací vyplývá, že optimální jízdní režim pro jízdu do kopce je režim 4N-50. Tedy režim, kdy se automobil zbytečně moc před kopcem nerozjíždí, jede ale takovou rychlostí, aby nemusel v kopci podřadit a před vrcholem kopce řidič vyřadí rychlostní stupeň. Průběh rychlosti při jízdě do kopce nelze při řízení automobilu přesně odhadnout, proto je z hlediska spotřeby paliva lepší, když automobil jede do kopce spíše o něco vyšší rychlostí než je třeba, než aby jel rychlostí spíše nižší a muselo se tak podřadit.



# ZÁVĚR

V první kapitole byl vytvořen zjednodušený matematický model automobilu (modelovaný jako hmotný bod). K vytvoření hodnověrného modelu bylo zapotřebí mít kompaktní celek informací charakterizující vybraný automobil po kinematické i dynamické stránce. Toto ovšem k dispozici nebylo. Z toho důvodu bylo nutno vyjít z dostupného diagramu dráhových spotřeb obsahujícího i vnější odporové síly a doplnit k němu zbývající vnitřní síly a některé další konstanty (jako např. dynamický poloměr kola, hmotnost automobilu či časovou spotřebu paliva). Na základě elementárních poznatků z kinematiky a dynamiky (např. druhý Newtonův zákon) byl sestaven model automobilu a v závěru první kapitoly byla nastíněna matematická formulace problému.

V druhé kapitole byla pozornost věnována implementací modelu nejprve do prostředí MATLAB a poté do prostředí GAMS, neboť v MATLABU šlo simulovat pouze tu nejjednodušší úlohu. V třetí kapitole byly precizněji formulovány tři otázky (úlohy), které byly prostřednictvím GAMSu vyřešeny.

Hlavním cílem práce bylo porovnat různé jízdní režimy z hlediska spotřeby paliva a rozhodnout, který režim je úspornější a o kolik než jiný režim. Jinými slovy úkolem práce bylo odpovědět na otázky, které jsou zmíněny v úvodu práce. Tyto otázky bylo třeba nejprve matematicky zformulovat, vyřešit je pomocí simulace, a výsledek interpretovat. Toto se v práci úspěšně podařilo. Odpovědi na tyto otázky jsou uvedeny v 3. kapitole.

Práci by šlo vhodně rozšířit a pokračovat v ní dále. Simulace by bylo možno zpřesnit shromážděním uceleného souboru charakteristik pro konkrétní vozidlo, kdy by nebylo nutno doplňovat vstupní data z různých zdrojů nebo pomocí kvalifikovaných odhadů. Protože je už vytvořen simulační program, je možno dále řešit složitější úlohy. Šlo by např. o jízdu zvlněným terénem (s kopce a pak opět do kopce) nebo o dlouhou trať (řádově desítky kilometrů), kdy bychom znali její výškový profil a rychlostní omezení. S použitím optimalizace by pak bylo možno zjistit, jak i složitější trať projet s minimální spotřebou paliva.

# PŘÍLOHY

## A: SEZNAM PROMĚNNÝCH

$\alpha$  [ $g \cdot s^{-1}$ ]...hmotnostní spotřeba paliva

$\varphi$  [-]...požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva

$t$  [ $s$ ]...čas

$s$  [ $m$ ]...dráha

$i$  [-]...zařazený rychlostní stupeň

$\psi$  [-]...součinitel rotačních částí

$M$  [ $Nm$ ]...hnací moment

$v$  [ $km \cdot hod^{-1}$ ]...rychlost automobilu

$a$  [ $km \cdot hod^{-1} \cdot s^{-1}$ ]...zrychlení automobilu

$F_t$  [ $N$ ] ...hnací síla

$F_r$  [ $N$ ]...odporová síla

$F_w$  [ $N$ ]...odporu vzduchu

$F_v$  [ $N$ ]...valivý odpor

$F_g$  [ $N$ ]...průmět tíhové síly

$G$  [ $N$ ] ...tíhová síla

$\theta$  [ $^\circ$ ]...úhel stoupání

$m$  [ $kg$ ]...hmotnost

$g$  [ $m \cdot s^{-2}$ ]...tíhové zrychlení

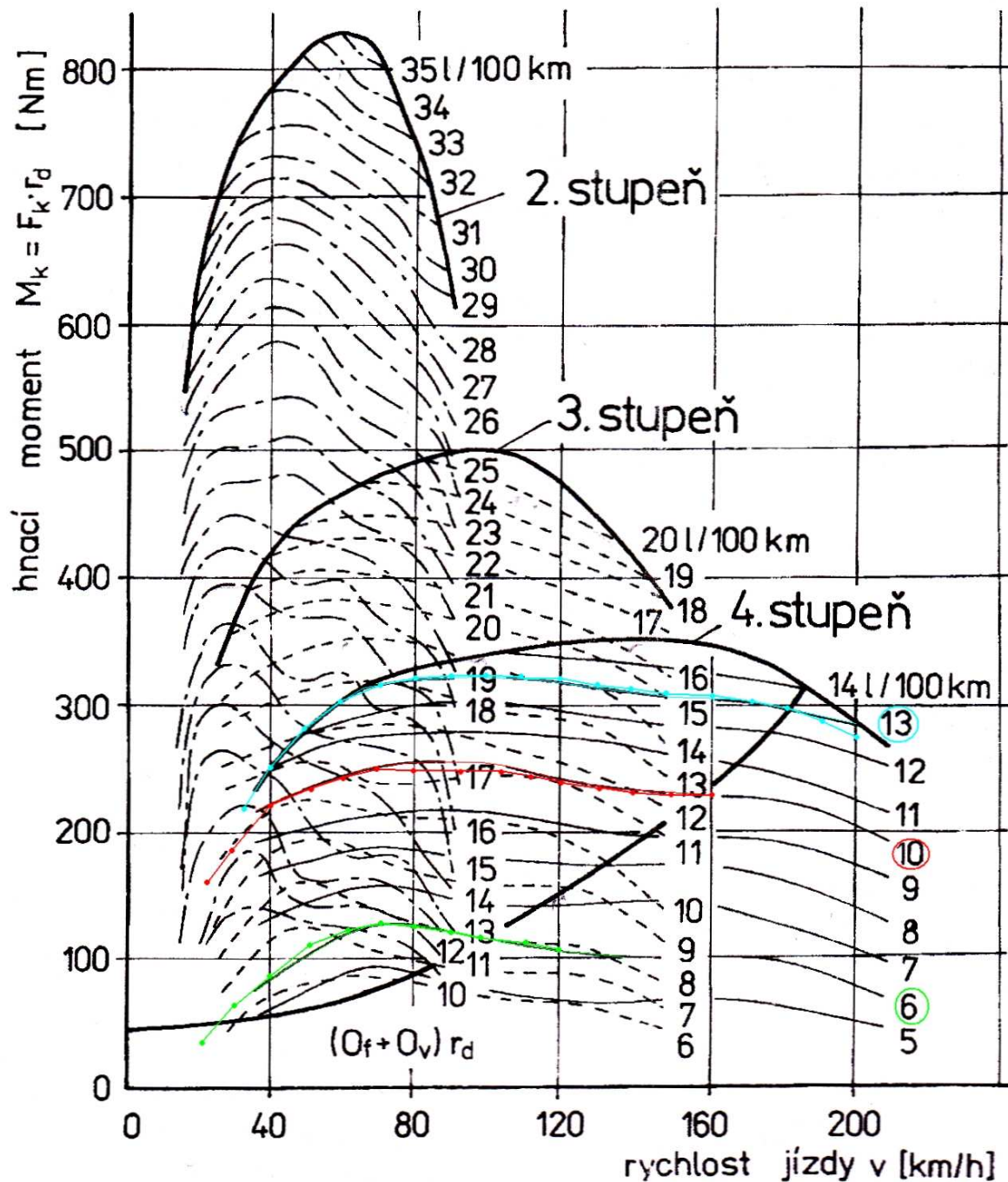
$S$  [ $l \cdot (100km)^{-1}$ ]...dráhová spotřeba paliva

$S_t$  [ $ml \cdot s^{-1}$ ]...časová spotřeba paliva

$\Phi_t$  [ $ml$ ] ...celková časová spotřeba paliva

$\Phi_s$  [ $ml$ ]...celková dráhová spotřeba paliva

## B: PŘESNOST APROXIMACE DIAGRAMU DRÁHOVÝCH SPOTŘEB



Porovnání přesnosti náhrady diagramu polynomem dvou proměnných – do diagramu byly pro porovnání přesnosti barevně vyneseny vypočítané (ze zadané rychlosti, dráhové spotřeby paliva a zařazeného rychlostního stupně) body pro 3 různé křivky. Body jsou pospojovány, aby vytvořily 3 křivky, které aproximují původní křivky.

## C – ZDROJOVÝ KÓD PROGRAMU GAMS

V této příloze je obsažen zdrojový kód GAMSu, který simuluje jízdní režim 4N-67 (viz kapitola 3.1).

### SETS

```
J / 0 * 60 /
```

```
stoupani(J) / 20 * 60 / ;
```

```
* stoupani(J) je takto zadefinováno jako podmnožina J
```

### SCALAR

```
v0 / 67 /, vf / 67 /, vmin / 20 /
```

```
*definovány konstanty omezující průběh rychlosti
```

```
kneut / 92 /, hmotnost / 955 /, rd / 0.275 /, g / 9.81 /
```

```
psi0 / 1.00 /, psi2 / 0.81 /, psi3 / 0.85 /, psi4 / 0.93/
```

```
* definovány konstanty charakterizující automobil
```

```
* knut(ekvivalent časové spotřeby rychlost automobilu) = rychlost při níž  
je při vyřazeném rychlostním stupni spotřeba 1l/100km
```

```
* psi = převrácená hodnota součinitele rotačních částí při různých  
zařazených rychlostních stupních
```

```
* rd = dynamický poloměr kola vyjádřený v m
```

```
* g = gravitační zrychlení
```

```
ds / 0.025 /
```

```
* ds = délka integračního kroku vyjádřená v km
```

```
p002 / -1045 /  
p102 / 44.19 /  
p012 / 96.49 /  
p202 / -1.074 /  
p112 / -1.452 /  
p022 / -2.047 /  
p302 / 0.01283 /  
p212 / 0.005352 /  
p122 / 0.05684 /  
p402 / -6.098e-005 /  
p312 / 5.598e-005 /  
p222 / -0.0004464 /
```

```
p003 / -622.2 /  
p103 / 16.28 /  
p013 / 87 /  
p203 / -0.2406 /  
p113 / -0.7083 /  
p023 / -2.71 /  
p303 / 0.001649 /  
p213 / 0.002621 /  
p123 / 0.03794 /  
p403 / -4.258e-006 /  
p313 / -1.101e-007 /  
p223 / -0.0001552 /
```

```

p004 /      -353.7 /
p104 /       9.568 /
p014 /       44.86 /
p204 /      -0.1051 /
p114 /      -0.6019 /
p024 /       1.206 /
p304 /    0.000569 /
p214 /    0.0006824 /
p124 /     0.05617 /
p034 /     -0.2213 /
p404 / -1.175e-006 /
p314 /  3.422e-006 /
p224 /  -0.0001435 /
p134 /  -0.0004203 /
p044 /     0.00193 /;

```

\* toto jsou koeficienty polynomu 4. stupně v proměnné rychlost a 2. stupně v proměnné dráhová spotřeba paliva spočítané MATLABEM pro 2.,3. a 4. rychlostní stupeň; tyto polynomy aproximují diagram dráhových spotřeb, jak je o tom pojednáno v kapitole 1.3.

#### PARAMETER

```

p(J);
* definice trajektorie pomocí stoupání
* p(J) = sin(alpha) [-] = stoupání v části J trajektorie

```

#### BINARY VARIABLES

```

x0(J) " zarazen neutral "
x2(J) " zarazeno: 2 "
x3(J) " zarazeno: 3 "
x4(J) " zarazeno: 4 "
* tyto veličiny nabývají diskretních hodnot 0 a 1 dle zařazeného rych.stupně

```

#### FREE VARIABLES

```

Z           " celková spotřeba v litrech "

i(J)       " zařazený kvalt "
phi(J)     " požadavek řidiče na okamžitou dodávku paliva "
psi(J)     " převrácená hodnota součinitele rotačních částí "
DrahSpot(J) " měrná spotřeba [L/100km] "
M(J)       " hnací moment "
a(J)       " zrychlení "
v(J)       " rychlost v km/hod "
ot(J)      " otáčky "
vPrum      " průměrná rychlost "
DrahSpotPrum " průměrná měrná spotřeba ";
* zde jsou definovány uvedené veličiny jako spojité proměnné; free znamená,
že jejich obor hodnot je množina reálných čísel

```

```

p(J) = 0;
p(stoupani) = 0.05;

```

```

X2.up(J) = 0;

```

```

a.lo(J) = -18;
a.up(J) = +18;

```

```

phi.lo(J) = 0.3;
phi.up(J) = 1;

```

```

v.lo(J)      = vmin;
v.lo(J)$ (ORD(J) EQ CARD(J)) = vf;
v.lo("0")   = v0;
v.up("0")   = v0;
* zde jsou uvedena omezení pro vybrané veličiny tak, aby byl nasimulován požadovaný jízdní režim

```

## EQUATIONS

```

BARON(J)
ZARAZENI(J)
VYP_PSI(J)
OTMIN(J)
VYP_MOMENTU(J)
VYP_DRAH_SPOT(J)
VYP_ZRYCHL(J)
RYCHLOST(J)
OTACKY(J)
VYP_RYCHL(J)
VYP_PRUM_RYCHL
VYP_DRAH_SPOT_PRUM
CELK_DRAH_SPOTREBA celková dráhová spotřeba;
* zde je definován výčet a názvy rovnic, které jsou v modelu použity; níže jsou rovnice rozepsány

```

```

BARON(J).. x0(J) + x2(J) + x3(J) + x4(J) =E= 1;
* může být zařazen pouze jeden rychlostní stupeň

```

```

ZARAZENI(J).. i(J) =E= ((0*x0(J)) + (2*x2(J)) + (3*x3(J)) + (4*x4(J)));
* tento rychlostní stupeň se uloží do proměnné i

```

```

VYP_PSI(J) .. psi(J) =E= (psi0*x0(J)) + (psi2*x2(J)) + (psi3*x3(J)) + (psi4*x4(J));
* do PSI je přiřazena převrácená hodnota součinitele rotačních částí dle zařazeného rychlostního stupně

```

```

OTMIN(J).. i(J)/v(J) =L= 0.1;
* podmínka minimálních otáček

```

```

VYP_MOMENTU(J).. M(J) =E= x0(J) * 0 +
                        x2(J) * ( p002 + p102*v(J) + p012*36 * phi(J) +
p202*v(J)*v(J) + p112*v(J)*36 * phi(J) + p022*36 * phi(J)*36 * phi(J) +
p302*v(J)*v(J)*v(J) + p212*v(J)*v(J)*36 * phi(J) + p122*v(J)*36 * phi(J)*36
* phi(J) + p402*v(J)*v(J)*v(J)*v(J) + p312*v(J)*v(J)*v(J)*36 * phi(J) +
p222*v(J)*v(J)*36 * phi(J)*36 * phi(J)) +
                        x3(J) * ( p003 + p103*v(J) + p013*21 * phi(J) +
p203*v(J)*v(J) + p113*v(J)*21 * phi(J) + p023*21 * phi(J)*21 * phi(J) +
p303*v(J)*v(J)*v(J) + p213*v(J)*v(J)*21 * phi(J) + p123*v(J)*21 * phi(J)*21
* phi(J) + p403*v(J)*v(J)*v(J)*v(J) + p313*v(J)*v(J)*v(J)*21 * phi(J) +
p223*v(J)*v(J)*21 * phi(J)*21 * phi(J)) +
                        x4(J) * ( p004 + p104*v(J) + p014*15*phi(J) +
p204*v(J)*v(J) + p114*v(J)*15*phi(J) + p024*15*phi(J)*15*phi(J) +
p304*v(J)*v(J)*v(J) + p214*v(J)*v(J)*15*phi(J) +
p124*v(J)*15*phi(J)*15*phi(J) + p034*15*phi(J)*15*phi(J)*15*phi(J) +
p404*v(J)*v(J)*v(J)*v(J) + p314*v(J)*v(J)*v(J)*15*phi(J) +
p224*v(J)*v(J)*15*phi(J)*15*phi(J) +
p134*v(J)*15*phi(J)*15*phi(J)*15*phi(J) +
p044*15*phi(J)*15*phi(J)*15*phi(J)*15*phi(J));
* zde je vypočítán hnací moment M jako funkce rychlosti, zařazeného rychlostního stupně a požadavku řidiče na okamžitou dodávku paliva; výpočet je proveden pomocí výše zmíněného polynomu, který je náhradou diagramu dráhových spotřeb, jak o tom pojednává kapitola 1.3

```

```

VYP_DRAH_SPOT(J).. DrahSpot(J) =E= x0(J) * ( kneut/v(J) + 0.001 * phi(J) )
+
          x2(J) * ( 36 * phi(J) )+
          x3(J) * ( 21 * phi(J) )+
          x4(J) * ( 15 * phi(J) );
* dráhová spotřeba je přepočtena v požadavku řidiče na okamžitou dodávku
paliva a ze zařazeného rychlostního stupně

VYP_ZRYCHL(J).. a(J) =E= - 3.6 * g * p(J) + 3.6 *(- 0.0101 * v(J)*v(J) +
0.386 * v(J) - 49 + M(J))/rd/hmotnost*psi(J);
* výpočet zrychlení automobilu z hnacího momentu a odporových sil; v tomto
výpočtu je uplatněn součinitel rotačních částí

RYCHLOST(J) .. v(J) =G= vmin ;
* podmínka minimální rychlosti

OTACKY(J).. ot(J) =E= x2(J)*75*v(J) + x3(J)*45*v(J) + x4(J)*35*v(J);
* výpočet otáček automobilu z rychlosti a zařazeného rychlostního stupně

VYP_RYCHL(J)$(ORD(J) LT CARD(J)).. v(J+1) =E= ( v(J) * v(J) + 2 * 3600 *
a(J) * ds )** 0.5;
* výpočet rychlosti automobilu k kroku J+1

VYP_PRUM_RYCHL.. vprum =E= SUM(J, V(J)/CARD(J) );

VYP_DRAH_SPOT_PRUM.. DrahSpotPrum =E= SUM(J, DrahSpot(J)/CARD(J) );

* zde jsou vypočítány veličiny průměrná rychlost a průměrná dráhová
spotřeba; výpočet je proveden až z nalezeného průběhu těchto veličin

CELK_DRAH_SPOTREBA .. Z =E= SUM(J, DrahSpot(J) * 10 * ds ) ;
* takto je definována účelová funkce

MODEL spotreba_paliva /ALL/ ;
* model sestaven

option MINLP = baron;p
* zde je vznesen požadavek, aby byl model řešen pomocí řešiče BARON

SOLVE spotreba_paliva USING MINLP MINIMIZING Z ;
* příkaz k řešení modelu

DISPLAY PHI.L, Z.L, A.L, v.L;

FILE OUT / "OUT.TXT" /;

PUT OUT;
PUT @3 "Vysledky" /;
PUT @3 "-----" / /;
PUT "Celková dráhová spotřeba [ml] = ", Z.L:10:5 / /;
PUT "Prum. rychlost [km/hod] = ", vprum.L:10:5 / /;
PUT "Prum. dráhová spotřeba [l/100km] = ", DrahSpotPrum.L:10:5 / /;
PUT " J", "p[%] ", " phi[-] ", " v[km/hod]", " M[Nm] ",
"a[km/hod/s]", " x0 ", " x2 ", " x3 ", " x4 ", "
i ", "DrahSpot[l/100km]", " 1/psi", " ot " /;
LOOP(J,
PUT J.TL:3, p(J):10:5, PHI.L(J):10:5, V.L(J):10:5, M.L(J):11:5,
A.L(J):10:5, x0.L(J):10:5, x2.L(J):10:5, x3.L(J):10:5, x4.L(J):10:5,
i.L(J):10:5, DrahSpot.L(J):10:5, psi.L(J):10:2, ot.L(J):8:0 /;);
* zde je definován výpis výsledků simulace do textového souboru

```

# D – VÝSTUP Z PROGRAMU GAMS

Celková dráhová spotřeba = 103.41 ml Průměrná rychlost = 59.35 km/hod Průměrná dráhová spotřeba = 6.78 l/100km												
J	s	stoupání	$\varphi$	v	M	a	x0	x2	x3	x4	i	S
[-]	[m]	[%]	[-]	v[km/hod]	[Nm]	[km/hod/s]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[l/100km]
0	0	0	0,65	67,0	242	2,22	0	0	0	1	4	9,68
1	25	0	0	69,9	0	-0,98	1	0	0	0	0	1,32
2	50	0	0	68,6	0	-0,96	1	0	0	0	0	1,34
3	75	0	0	67,4	0	-0,94	1	0	0	0	0	1,37
4	100	0	0	66,1	0	-0,93	1	0	0	0	0	1,39
5	125	0	0	64,8	0	-0,91	1	0	0	0	0	1,42
6	150	0	0	63,5	0	-0,89	1	0	0	0	0	1,45
7	175	0	0	62,3	0	-0,88	1	0	0	0	0	1,48
8	200	0	0	61,0	0	-0,86	1	0	0	0	0	1,51
9	225	0	0	59,7	0	-0,85	1	0	0	0	0	1,54
10	250	0	0	58,4	0	-0,83	1	0	0	0	0	1,58
11	275	0	0,65	57,1	238	2,27	0	0	0	1	4	9,73
12	300	0	0	60,6	0	-0,86	1	0	0	0	0	1,52
13	325	0	0	59,3	0	-0,84	1	0	0	0	0	1,55
14	350	0	0	58,0	0	-0,83	1	0	0	0	0	1,59
15	375	0	0	56,7	0	-0,82	1	0	0	0	0	1,62
16	400	0	0	55,4	0	-0,80	1	0	0	0	0	1,66
17	425	0	0	54,1	0	-0,79	1	0	0	0	0	1,70
18	450	0	0,64	52,7	229	2,19	0	0	0	1	4	9,54
19	475	0	0,64	56,3	236	2,25	0	0	0	1	4	9,66
20	500	5	0,65	59,8	243	0,54	0	0	0	1	4	9,81
21	525	5	0,66	60,6	245	0,55	0	0	0	1	4	9,86
22	550	5	0,66	61,4	247	0,57	0	0	0	1	4	9,92
23	575	5	0,67	62,3	249	0,59	0	0	0	1	4	9,98
24	600	5	0	63,1	0	-2,66	1	0	0	0	0	1,46
25	625	5	0,66	59,2	245	0,57	0	0	0	1	4	9,91
26	650	5	0	60,1	0	-2,62	1	0	0	0	0	1,53
27	675	5	0,65	56,0	239	0,52	0	0	0	1	4	9,78
28	700	5	0,65	56,8	240	0,53	0	0	0	1	4	9,80
29	725	5	0,66	57,7	241	0,54	0	0	0	1	4	9,83
30	750	5	0	58,5	0	-2,60	1	0	0	0	0	1,57
31	775	5	0,64	54,4	234	0,48	0	0	0	1	4	9,67
32	800	5	0	55,2	0	-2,57	1	0	0	0	0	1,67
33	825	5	0,63	50,8	223	0,38	0	0	0	1	4	9,44
34	850	5	0,63	51,5	223	0,36	0	0	0	1	4	9,38
35	875	5	0,62	52,1	222	0,35	0	0	0	1	4	9,34
36	900	5	0,62	52,7	222	0,34	0	0	0	1	4	9,29
37	925	5	0,62	53,3	221	0,33	0	0	0	1	4	9,26
38	950	5	0,62	53,8	221	0,32	0	0	0	1	4	9,23
39	975	5	0,61	54,3	221	0,31	0	0	0	1	4	9,21
40	1000	5	0,61	54,9	221	0,31	0	0	0	1	4	9,20
41	1025	5	0,61	55,4	221	0,31	0	0	0	1	4	9,19
42	1050	5	0,61	55,9	222	0,31	0	0	0	1	4	9,19
43	1075	5	0,61	56,4	222	0,31	0	0	0	1	4	9,20
44	1100	5	0,61	56,9	223	0,32	0	0	0	1	4	9,21
45	1125	5	0,62	57,4	224	0,32	0	0	0	1	4	9,23
46	1150	5	0,62	57,9	225	0,33	0	0	0	1	4	9,25
47	1175	5	0,62	58,4	227	0,35	0	0	0	1	4	9,29
48	1200	5	0,62	58,9	228	0,36	0	0	0	1	4	9,32
49	1225	5	0,62	59,5	230	0,37	0	0	0	1	4	9,37
50	1250	5	0,63	60,0	231	0,39	0	0	0	1	4	9,41
51	1275	5	0,63	60,6	233	0,41	0	0	0	1	4	9,47
52	1300	5	0,64	61,2	235	0,43	0	0	0	1	4	9,53
53	1325	5	0,64	61,8	238	0,45	0	0	0	1	4	9,60
54	1350	5	0,64	62,5	240	0,48	0	0	0	1	4	9,67
55	1375	5	0,65	63,2	243	0,50	0	0	0	1	4	9,74
56	1400	5	0,65	63,9	245	0,53	0	0	0	1	4	9,82
57	1425	5	0,66	64,6	248	0,55	0	0	0	1	4	9,91
58	1450	5	0,67	65,4	251	0,58	0	0	0	1	4	10,00
59	1475	5	0,67	66,2	254	0,61	0	0	0	1	4	10,09
60	1500	5	0	67,0	0	-2,70	1	0	0	0	0	1,37



# LITERATURA

[1] VLK, František: *Dynamika motorových vozidel*, 2. vydání, nakladatelství a vydavatelství Vlk, Brno 2003

[2] PORTEŠ, Petr: *Studijní opory k předmětu Vehicle Dynamics*, VUT Brno, 2010

[3] ČERMÁK, Libor – HLAVIČKA, Rudolf.: *Numerické metody*, CERM, 2. vydání, Brno 2008, str. 49

[4] učební text FSI VUT [online], aktualizováno 2008-17-01, [cit. 2011-28-04], dostupné z WWW: <[http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id\\_file=946](http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=946)>

[5] HALLIDAY, D. – RESNICK, R. – WALKER, J.: *Fyzika: mechanika*; přeložili Musilová, J. – Bochníček, Z. – Holý, V., 1. vydání, VUTIUM 2000, str. 22 (rov 2.11, rov 2.15)

[6] Richard E. Rosenthal: *GAMS: A User's Guide* [online], aktualizováno 2010, [cit. 2011-28-04], dostupné z WWW: <<http://www.gams.com/dd/docs/bigdocs/GAMSUsersGuide.pdf>>

[7] Sven O. Krumke: *Integer Programming: Polyhedra and Algorithms*, aktualizováno červen 2006 [cit. 2011-19-05], dostupné z WWW: <<http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/users/62/TOC.pdf>>

[8] Sahinidis, Nick – Tawarmalani, Mohit: *GAMS Solver manual: Baron*, aktualizováno 25.5.2010 [cit. 2011-19-05], dostupné z WWW: <<http://www.gams.com/dd/docs/solvers/baron.pdf>>