



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## POPIS ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ V OKOLÍ OSTRÉHO VRUBU

A STUDY OF THE STRESS DISTRIBUTION NEAR THE SHARP NOTCH TIP

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Petr Svoboda

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

BRNO 2018



# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Bc. Petr Svoboda</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Popis rozložení napětí v okolí ostrého vrubu

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vrub je běžnou součástí technických konstrukcí a také možným zdrojem problémů jejich provozu a užití. Z hlediska rozložení napětí se vrub chová jako jeho koncentrátor způsobující nukleaci a následný růst trhlin ze svého kořene. Cílem uchazeče bude seznámit se s problematikou popisu rozložení napětí v blízkosti kořene ostrého vrubu a aplikací základních principů lomové mechaniky na vyhodnocování iniciace a budoucího růstu trhlin v jeho okolí.

### Cíle diplomové práce:

1. Aplikace teorie lomové mechaniky na některé konfigurace trhliny, vrubu.
2. Analytický popis napětí v okolí kořene vrubu.
3. Vyjádření exponentů singularity napětí vrubu pro různé materiálové kombinace a geometie vrubu

### Seznam doporučené literatury:

BROBERG, K. B.: Cracks and Fracture, Academic Press, 1999.

SUN, C. T., JIN, Z.-H.: Fracture Mechanics, Elsevier, 2012.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Předkládaná diplomová práce se zabývá problémem stanovení exponentu singularity napětí u vrubu. Tuto práci lze rozdělit do dvou částí. První se zabývá teoretickým pozadím, tj. základními vztahy mechaniky kontinua a základními pojmy lomové mechaniky. Druhá část se zabývá sestavením postupu řešení podle Williamsovy metody a vytvořením programu na spočítání exponentu singularity napětí.

## **Abstract**

The presented diploma thesis deals with the problem of determining the stress singularity exponent of the V-notch. This task can be divided into two parts. The first deals with the theoretical background, that means the basic relations of mechanics and the basic concepts of fracture mechanics. The second part deals with the elaboration of the Williams method and the creation of a program for calculating the stress singularity exponent.

## **Klíčová slova**

Lomová mechanika, V-vrub, exponent singularity napětí, Airyho funkce napětí, singulární koncentrátor napětí, Williamsovo řešení.

## **Key words**

Fracture mechanics, V-notch, stress singularity exponent, Airy stress function, singular stress concentrator, William's eigenfunction expansion method.



## **Bibliografická citace**

SVOBODA, P. *Popis rozložení napětí v okolí ostrého vrubu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 57s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D..





## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a pramenů, jež jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Brně dne 25.5.2018

.....

Petr Svoboda



## **Poděkování**

Rád bych zde poděkoval panu doc. Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za možnost vypracovat pod jeho vedením diplomovou práci. Zároveň bych mu chtěl poděkovat za ochotu a vstřícnost v průběhu jejího vypracování.

Chtěl bych také poděkovat své přítelkyni a rodině za jejich nikdy neochabující podporu.





# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod.....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>Problémová situace .....</b>	<b>18</b>
2.1	Typ problému .....	18
2.2	Formulace problému .....	18
2.3	Cíle práce.....	18
2.4	Systém podtatných veličin .....	18
2.5	Výběr metody řešení .....	20
<b>3</b>	<b>Nezbytné teoretické pozadí.....</b>	<b>21</b>
3.1	Základní vztahy mechaniky – trojrozměrný případ .....	21
3.2	Základní vztahy mechaniky – dvojrozměrný přípa.....	23
3.3	Airyho funkce napětí .....	26
<b>4</b>	<b>Základní pojmy lomové mechaniky.....</b>	<b>27</b>
4.1	Módy zatěžování .....	21
4.2	Rozdělení lomové mechaniky .....	28
4.3	Koncepce součinitele intenzity napětí .....	29
4.4	Rozložení napětí v okolí obecného singulárního koncentrátoru .....	30
4.5	Williamsovo řešení.....	32
<b>5</b>	<b>Vlastní řešení problému .....</b>	<b>33</b>
5.1	Okrajové podmínky .....	34
5.2	Program Williams .....	35
5.3	Výsledky.....	37

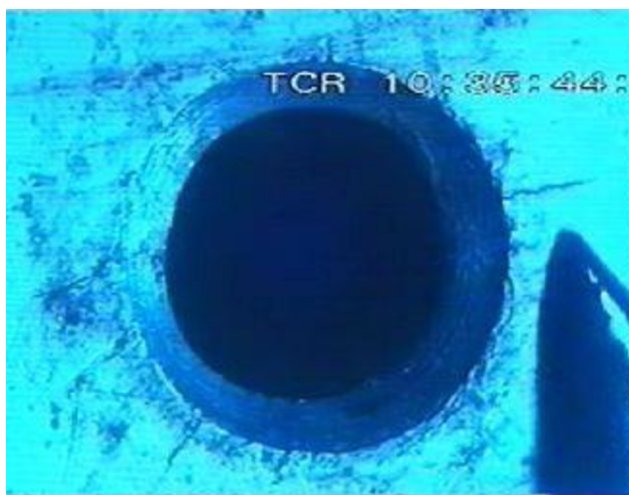
5.4	Porovnání výsledků .....	39
<b>6</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>41</b>
<b>7</b>	<b>Seznam použité literatury .....</b>	<b>42</b>
<b>8</b>	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů .....</b>	<b>43</b>
<b>9</b>	<b>Přílohy .....</b>	<b>44</b>
	<b>Příloha A –zdrojový kód programu Williams .....</b>	<b>44</b>

# 1 ÚVOD

Technické konstrukce obvykle obsahují mnoho různých koncentrátorů napětí, které vznikají v tělese v průběhu výroby či během provozu konstrukce (součásti). Nejčastějšími koncentrátory jsou ostré V-vruby.

Pokud dojde v konstrukci k lomu tak zpravidla vždy iniciací trhliny v některém z těchto koncentrátorů a jejím šíření až do okamžiku lomu. Tento jev je nežádoucí a je třeba mu předcházet anebo jej alespoň předvídat. Jen tak lze zabránit potenciálním materiálním škodám, nebo dokonce ztrátám na životech.

Jako příklad této situace uvádím nehodu letadla Boeing 737-297 známý jako Aloha Airlines Flight 243. Během letu se začala v trupu letadla šířit trhlina iniciovaná v díře od nýtu (Obr. 1) v rohu okénka. To vedlo až k odtržení části trupu (Obr. 2) a k nouzovému přistání [1].



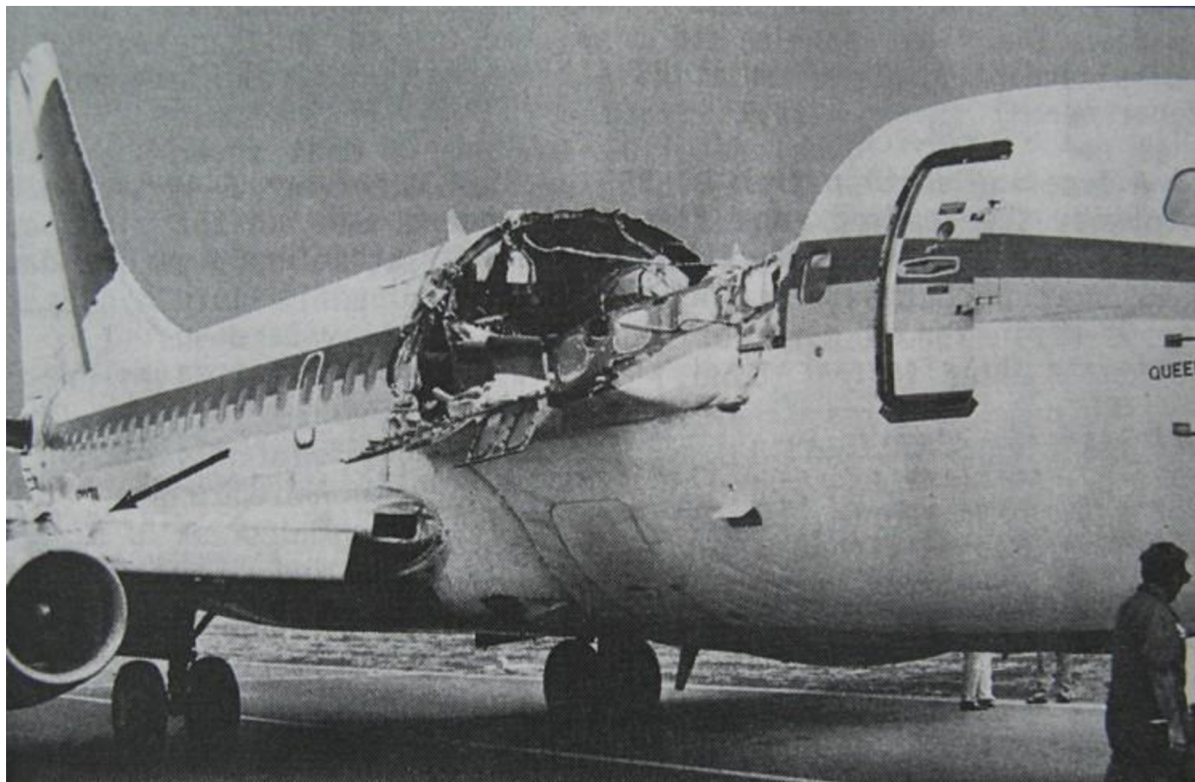
Obr. 1. Díra po nýtu s vydatelnými trhlínami

Těmito problémy se zabývá lomová mechanika, jedna z nemladších disciplín mechaniky, jejíž počátky sahají do období druhé světové války. Za jejího zakladatele je považován A. A. Griffith, který se zabýval lomovou mechanikou trhlín. Později došlo k zobecnění vztahů na singulární koncentrátory napětí, přičemž trhlina je speciální případ takového koncentrátoru. To umožnilo studovat napětí v okolí jiných koncentrátorů např. vrubů, stejně jako je tomu u trhlín, kde je pole napětí nejčastěji charakterizováno faktorem intenzity napětí (též součinitel intenzity napětí). Jedná se o tzv. koncepci součinitele napětí, nebo-li K-koncepci [2].

Singulárním koncentrátorem napětí obecně rozumíme geometrickou nebo materiálovou nespojitost, kolem níž má napětí vzhledem ke vzdálenosti od koncentrátoru singulární charakter. Míra singularity je vyjádřena podle tzv. exponentu singularity napětí  $p$ . Obecně  $p$  nabývá hodnot z intervalu  $(0, 1)$ . Trhlina je speciální případ koncentrátoru, její exponent singularity  $p = \frac{1}{2}$ , ostatní koncentrátory s  $p \neq \frac{1}{2}$  nazýváme obecné koncentrátory napětí, jedná se například právě o vrub.



Cíl mé práce bude stanovit hodnoty exponentů napětí  $p$  pro různé  $v$ -vruby, k tomu jsem si vybral analytickou metodu známou jako Willamsovo řešení, tj. najít funkci napětí ve tvaru (27) který Williams navrhl.



Obr. 2. Aloha Airlines Flight 243 po přistání.

## 2 Problémová situace

Vrub je nedílnou součástí většiny moderních inženýrských konstrukcí. Z napětového hlediska však představuje tvarovou změnu, která způsobuje koncentraci napětí. S tím je spojeno nebezpečí vzniku trhlin v kořeni vrubu, jejich šíření a následný lom celého tělesa. Z těchto důvodů je třeba takovým událostem předcházet.

### 2.1 Typ problému

Problém rozložení napětí v okolí vrubu je problémem přímým.

### 2.2 Formulace problému

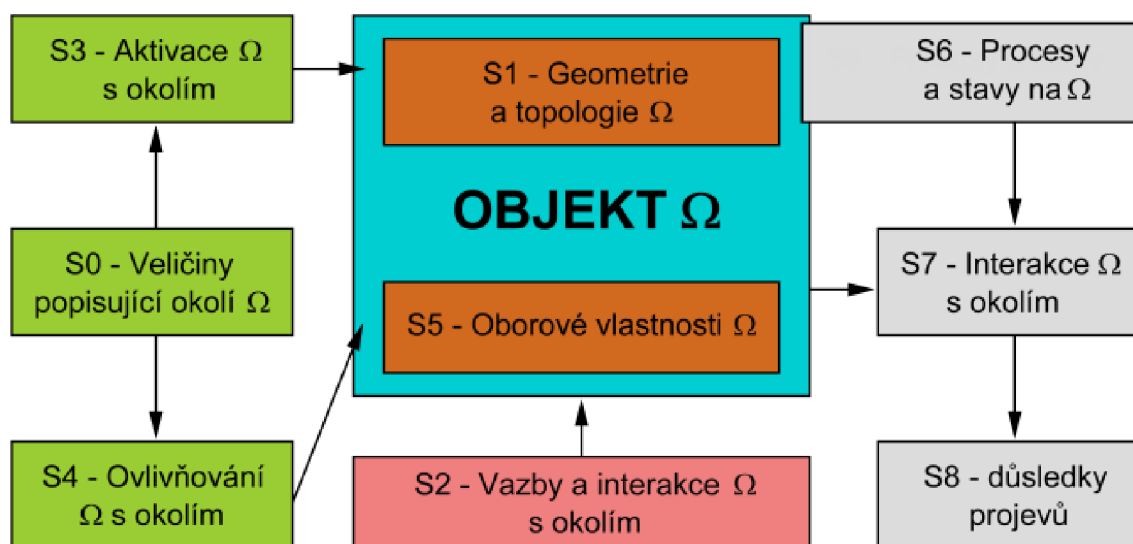
Účelem této práce je vytvořit program pro stanovení exponentu singularity napětí pro různé konfigurace V-vrubu.

### 2.3 Cíle práce

Cíle, kterých má být dosaženo:

- Aplikace teorie lomové mechaniky na některé konfigurace trhliny, vrubu.
- Analytický popis napětí v okolí kořene vrubu
- Vyjádření exponentů singularity napětí vrubu pro různé materiálové kombinace a geometrie vrubu

### 2.4 Systém podstatných veličin



Obr. 3. Podmnožiny systému podstatných veličin.

Podle [3] má každý objekt určité okolí. Dále má také určitý tvar a zaujímá určitou polohu. S okolím má určité vazby, přes které se realizují interakce, které objekt aktivují a ovlivňují. Aktivace vyvolává na objektu procesy, ty mění jeho stavy. Objekt se do svého okolí určitým způsobem projevuje, což má určité důsledky. Uvedené entity se shrnují do systému podstatných veličin  $S_0$  až  $S_8$  (obr. 3).

### **S0 – Veličiny popisující okolí entity:**

Okolí vrubu je reprezentováno lineárně pružným izotropním materiálem, který je reprezentován modulem pružnosti v tahu  $E$  a Poissonovým číslem  $\mu$ .

### **S1 – Geometrie a topologie entity:**

Konfigurace vrubu je v našem případě dána veličinami  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ . Jejich význam je patrný z obr. 9. Počátek souřadného systému je ve vrcholu vrubu, úlohu definujeme jako rovinou a používáme polární souřadný systém (obr. 6). Výchozí topologie se bude při opakování výpočtu měnit v rozmezí  $0^\circ < \alpha_1 + \alpha_2 < 180^\circ$ .

### **S2 – Vazby a interakce entity s okolím:**

Entita může být vázána k okolním objektům různými vazbami. Může se jednat o velké těleso s myšlenými hranicemi, nebo o vzorek který je k okolí vázán kinematickými vazbami

### **S3 – Aktivace entity s okolím:**

Vrub je obecně aktivován dvěma způsoby, buď je zatěžován silovou soustavou tzv. měkké zatěžování nebo je zatěžován vynucenou deformací tzv. tvrdé zatěžování. Podle směru zatěžování existují tři základní módy viz. kapitola 4.

### **S4 – Ovlivňování entity s okolím:**

Faktor intenzity napětí je nedílnou součástí lomové mechaniky pro posouzení tělesa s trhlinou. Je ovlivněn plastickou oblastí na čele trhliny, kde dochází k singularitě. Dále je faktor ovlivňován způsobem zatěžování. Podle směru zatěžování existují tři základní módy viz. kapitola 4.

### **S5 – oborové vlastnosti (struktury) entity:**

Materiál okolí vrubu je lineárně pružný izotropní. Reprezentován je modulem pružnosti v tahu  $E$  a Poissonovým číslem  $\mu$ .

### **S6 – procesy a stavy:**

Procesy ve struktuře objektu posuzujeme na úrovni mechaniky kontinua. Napětí v okolí vrubu lze vypočítat ze vztahů v kapitole 3.3.

**S7 – projevy entity:**

Projevy ve vztahu k deformaci: Rozevírání líc vrubu, vznik plastické deformace v kořeni vrubu.

Projevy ve vztahu k napětí: Vznik singulární napjatosti u kořene vrubu.

**S8 – Důsledky projevů:**

Důsledkem může být dosažení některého z mezních stavů: iniciace trhliny v kořeni vrubu, stabilní šíření trhliny, nestabilní šíření trhliny...

**2.5 Výběr metody řešení**

Na základě sestaveného systému podstatných veličin je možné zvolit více možností jak se postavit k problému zjištění exponentu singularity napětí pro různé konfigurace vrubu. Jsou známé pokročilé numerické či analyticko-numerické metody řešení. My provedeme dnes již nepoužívanou analytickou metodu známou jako Williamsovo řešení, nebo také William's eigenfunction expansion method.

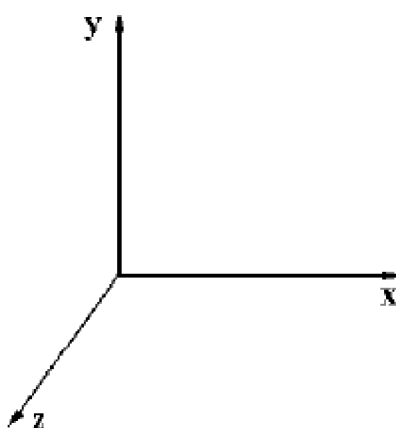
### 3 Nezbytné teoretické pozadí

Lineární elastická lomová mechanika vychází z předpokladů lineární a izotropní teorie pružnosti. Mezi napětím a deformací se předpokládá lineární závislost, tj. platnost Hookova zákona [4].

#### 3.1 Základní vztahy mechaniky – trojrozměrný případ

Základní rovnice pružnosti jsou rovnice rovnováhy (1), geometrické rovnice (2), rovnice kompatibility (3) a fyzikální rovnice (4) (konstitutivní vztahy).

Nejprve zvolme souřadný systém, pro který budou následující vztahy platit. Jedná se o tzv. Kartézský souřadný systém (obr. 4).



Obr. 4. Kartézský systém souřadnic.

Silovou rovnováhu vyjadřují Cauchyho rovnice rovnováhy, které mají v případě nulových objemových sil tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

kde  $\sigma_{ij}$  jsou složky tenzoru napětí. Význam indexů  $i, j$  je patrný z obr. 5 ( $i$  označuje osu, v jejímž směru dané napětí působí a  $j$  označuje osu, v jejímž směru leží normála roviny, ve které dané napětí působí).

Geometrické rovnice vyjadřují vztahy mezi posuvy tělesa a jeho délkovým a úhlovým přetvořením:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (2)$$

kde  $\varepsilon_{ij}$  jsou složky tenzoru přetvoření a  $u$ ,  $v$  a  $w$  jsou posuvy ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$ .

Složky tenzoru deformace musí splňovat rovnice kompatibility, vyjadřující spojitost materiálu deformovaného tělesa:

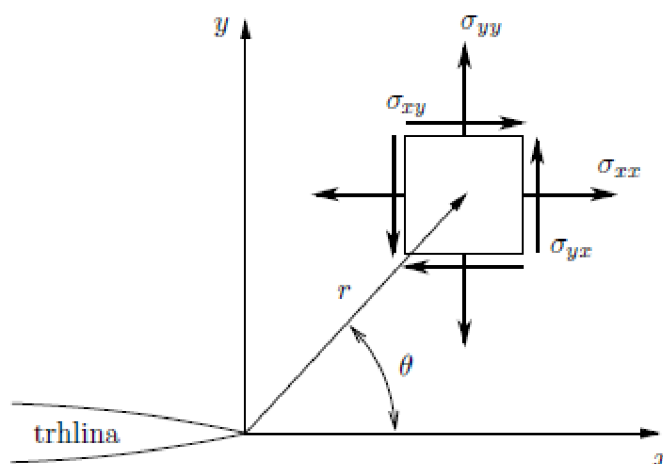
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 & \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} &= 0 & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

Rovnice vyjadřující vztahy mezi složkami tenzoru napětí a tenzoru přetvoření se nazývají konstitutivní vztahy. Pro homogenní, izotropní, lineárně pružný materiál mají tvar:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{G} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{G} \sigma_{xz}\end{aligned}\quad (4)$$

Kde  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  je modul pružnosti ve smyku a  $\mu$  je Poissonovo číslo [4].

### 3.2 Základní vztahy mechaniky – dvojrozměrný případ



Obr. 5. Lokální Kartézský souřadný systém v kořeni trhliny.

Vztah mezi napětím a deformací je dán zobecněným Hookovým zákonem [5]:

V případě rovinné napjatosti:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}] \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{-\mu}{1-\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\end{aligned}\tag{5}$$

V případě rovinné deformace:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_{xx} + \mu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_{yy} + \mu\varepsilon_{xx}] \\ \sigma_{zz} &= \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{xy}\end{aligned}\quad (6)$$

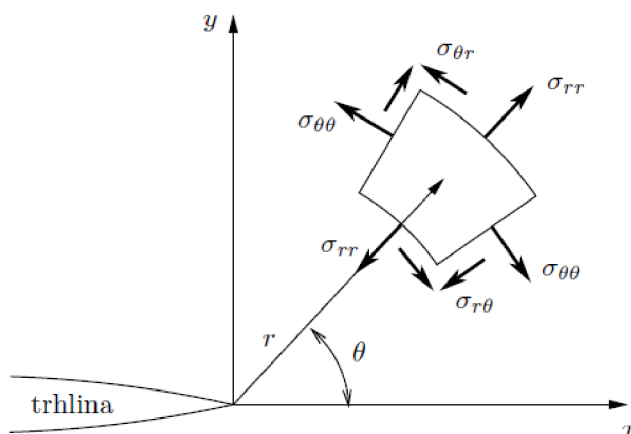
Rovnice rovnováhy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

Geometrické rovnice:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}\quad (8)$$

Vzhledem k faktu, že v práci se budu zabývat odvozením exponentu singularity napětí pomocí polárních souřadnic, je nutné předcházející vztahy uvést i v polárních souřadnicích.



Obr. 6. Lokální polární souřadný systém v kořeni trhliny.



Vztah mezi napětím a deformací je dán zobecněným Hookovým zákonem, v polárních souřadnicích je ve tvaru [5]:

V případě rovinné napjatosti:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_{rr} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\mu^2} [\varepsilon_{\theta\theta} + \mu\varepsilon_{rr}] \\ \sigma_{r\theta} &= 2G\varepsilon_{r\theta} = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{r\theta}\end{aligned}\quad (9)$$

V případě rovinné deformace:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_{rr} + \mu\varepsilon_{\theta\theta}] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \mu\varepsilon_{rr}] \\ \sigma_{r\theta} &= 2G\varepsilon_{r\theta} = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{r\theta}\end{aligned}\quad (10)$$

Rovnice rovnováhy v polárních souřadnicích:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= 0\end{aligned}\quad (11)$$

Geometrické rovnice v polárních souřadnicích:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (12)$$

### 3.3 Airyho funkce napětí

Sir George Biddell Airy (1801 - 1892) byl anglický matematik a astronom. V roce 1862 popsal rozložení napjatosti v rovinném tělese pomocí tzv. Airyho funkce napětí  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Vyjádření složek tenzoru napětí pomocí Airyho funkce  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  [2]:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

Pokud vyjádříme složky tenzoru napětí pomocí Airyho funkce  $\Phi(\mathbf{r}, \theta)$  v polárních souřadnicích, budou ve tvaru:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (14)$$

Použitím těchto vztahů (13) jsou rovnice rovnováhy (7) automaticky splněny a rovnice kompatibility budou ve tvaru:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (15)$$

Jinak symbolicky zapsáno:

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (16)$$

Kde  $\nabla^2$  je Laplaceův operátor, v kartézských souřadnicích má tvar:

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \quad (17)$$

V polárních pak nabývá tvaru:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (18)$$

$\nabla^4$  z rovnice (16) je biharmonický operátor. Jakákoliv funkce  $\Phi$  splňující rovnici (16) je biharmonická funkce.

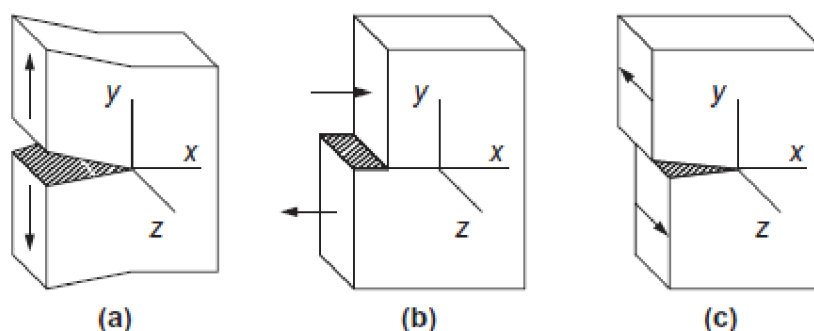
Jakmile je Airyho funkce známá napětí lze vypočítat z rovnic (13) respektive (14) pro polární souřadnice, přetvoření z rovnic (5) nebo (6), respektive (9) nebo (10) a posuvy z rovnic (8), respektive (12).

## 4 Základní pojmy lomové mechaniky

Lomová mechanika posuzuje napjatost a mezní stavy tělesa s trhlinou, nebo s obecným koncentrátorem napětí, vychází se z předpokladu, že studované těleso již obsahuje počáteční koncentrátor napětí, jeho vznikem se nezabývá.

### 4.1 Módy zatěžování

Trhlina se skládá z horní a dolní líce, spoj těchto lící se nazývá čelo trhliny. Předpokládáme, že před deformací se obě líce nachází ve stejné rovině. Jakmile je těleso s trhlinou zatížené vnějšími silami začnou se líce, vzhledem k sobě navzájem, pohybovat a trhlina se začne rozevírat. Na napjatost v okolí trhliny má způsob rozevírání vliv. G. R Irwin zavedl 3 módy zatěžování (obr. 7). Způsob zatěžování (rozevírání) má velký vliv zejména při posuzování trhlín pomocí součinitele intenzity napětí [2].



Obr. 7. Módy zatěžování trhliny: a) rozevírací, b) smykový, c) stříhový

**Mód I – rozevírací** – způsobuje rozevírání trhliny, zatížení působí kolmo na rovinu trhliny, tj. rovinu  $xz$  (obr. 7. a)

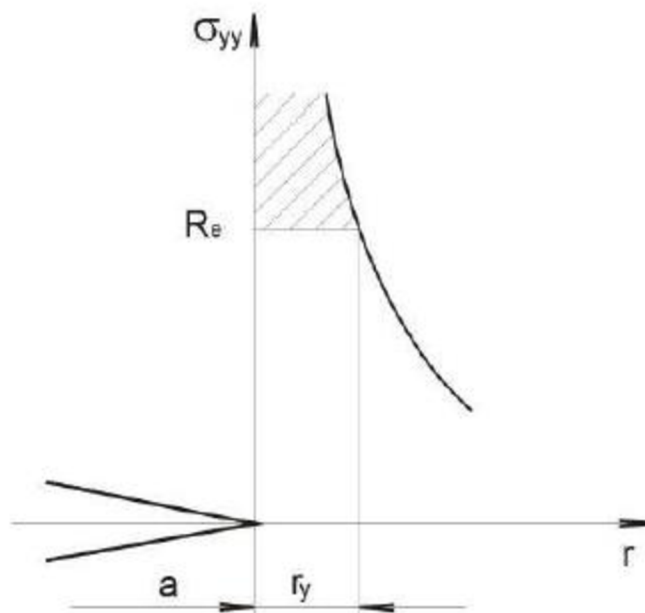
**Mód II – smykový** – zatížení působí ve směru rovnoběžném s rovinou trhliny a zároveň kolmo na čelo trhliny (obr. 7. b)

**Mód III – stříhový** – zatížení působí ve směru rovnoběžném s rovinou trhliny i s čelem trhliny (obr. 7. c)

## 4.2 Rozdělení lomové mechaniky

Lomovou mechaniku lze rozdělit podle počtu parametrů které slouží pro popis napětí a deformace u kořene trhliny na jednoparametrovou lomovou mechaniku, kde se používá pouze jeden parametr (součinitel intenzity napětí, J-integrál, hnací síla trhliny). Druhá skupina je pak dvouparametrová lomová mechanika, kde se pro lepší popis pole napětí používají dva parametry. První bývá součinitel intenzity napětí nebo J-integrál a druhým je T-napětí nebo Q-parametr.

Další možné dělení Lomové mechaniky je na lineárně elastickou lomovou mechaniku (LELM) a elasto-plastickou lomovou mechaniku (EPLM). LELM je založena na předpokladu platnosti Hookova zákona mezi složkami napětí a deformace v tělese a to i u kořene trhliny, tudíž neuvažuje žádnou plastickou zónu v kořeni trhliny. Vzhledem k tomu že se kořen trhliny uvažuje ideálně ostrý, vypočtená napětí se blíží k nekonečnu (obr. 8.).



Obr. 8. Průběh napětí u kořene trhliny při neuvažování plastické zóny.

Výsledky z LELM lze tudíž považovat za věrohodné pouze při existenci malé plastické zóny u kořene trhliny. Naopak EPLM uvažuje u kořene trhliny uvažuje plastickou zónu, popřípadě zplastizování celého průřezu. V této práci bude dále uvažovat pouze LELM.

LELM lze dále rozdělit na energetickou koncepci a napěťovou koncepci. Energetická LELM je založena na energetické bilanci tělesa s trhlinou (hnací síla trhliny, J-integrál, hustota deformační energie). Napěťová LELM je vytvořena na základě napětí a deformace u kořene trhliny (součinitel intenzity napětí, koncepce kritického rozevření COD a CTOD) [2,6].

### 4.3 Koncepce součinitele intenzity napětí

K-koncepce je nejstarší metoda pro určení singularity u kořene trhliny, založena byla Irwinem, který vycházel z práce Westergaarda.

Pro věrohodnost výsledků musí být splněny předpoklady malé plastické zóny u kořene trhliny a předpoklad lineární pružného materiálu. Za těchto předpokladů můžeme napětí a posuvy popsat [7]:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ijk}(\theta) \quad (19)$$

$$u_i = \frac{2K_k(1+\mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta, \mu) \quad (20)$$

Kde  $K_k$  je součinitel intenzity napětí (faktor intenzity napětí) s jednotkou [ $MPa\sqrt{m}$ ]  $k = I, II, III$ . Funkce  $f_{ijk}$  a  $g_i(\theta, \mu)$  jsou funkce závislé na  $\theta$  (viz. obr. 5) v případě  $g_i(\theta, \mu)$  i na  $\mu$ .

Vztah (19) má při rozepsání do jednotlivých napětí a jednotlivých módů tvar:

Mód I:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

Mód II:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (22)$$

Mód III:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (23)$$

Pro nekonečně velkou stěnu s centrálním trhlinou o délce  $2a$  zatíženou tahem, lze vyjádřit součinitel intenzity napětí  $K_I$ :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (24)$$

V případě těles konečných rozměrů:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} Y\left(\frac{a}{b}\right) \quad (25)$$

kde  $a$  je charakteristický rozměr trhliny,  $b$  je charakteristický rozměr tělesa a  $Y\left(\frac{a}{b}\right)$  je tzv. korekční funkce.

#### 4.4 Rozložení napětí v okolí obecného singulárního koncentrátoru

Jak již bylo řečeno v úvodu, trhlina je speciální případ obecného singulárního koncentrátoru napětí a vztah (19) lze zobecnit pro obecný singulární koncentrátor napětí (jako je např. vrub) na [2]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_k} f_{ijk} \quad (26)$$

kde  $n$  je počet singulárních členů,  $H_k$  se nazývá zobecněný faktor intenzity napětí. Hodnota  $p_k$  se nazývá exponent singularity napětí a je závislý na okrajových podmínkách a konfiguraci koncentrátoru, v našem případě na míře rozevření vrubu. Jak již bylo řečeno v úvodu,  $p_k$  obecně nabývá hodnot z intervalu  $(0, 1)$ . Trhlina je speciální případ koncentrátoru, její exponent singularity  $p = \frac{1}{2}$ , ostatní koncentrátorů s  $p \neq \frac{1}{2}$  nazýváme obecné koncentrátorů napětí. Za zmínku také stojí, že kvůli rozdílným hodnotám exponentů singularity mají  $K$  [ $MPa\sqrt{m}$ ] a  $H$  [ $MPa \cdot m^p$ ] jiné jednotky.

Při znalosti hodnot exponentu singularity  $p$  lze napsat rovnice pro popis napětí v okolí vrubu ve tvaru[8]:

Pro mód I:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r}} r^{-p_I} [(2-p_I-p_I^2)\cos p_I\theta - q_I(2-3p_I+p_I^2)\cos(2-p_I)\theta] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r}} r^{-p_I} [(2-3p_I+p_I^2)\cos p_I\theta + q_I(2-3p_I+p_I^2)\cos(2-p_I)\theta] \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r}} r^{-p_I} [p_I(1-p_I)\sin p_I\theta + q_I(2-3p_I+p_I^2)\sin(2-p_I)\theta]\end{aligned}\quad (27)$$

Pro mód II:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi r}} r^{-p_{II}} [-(2-p_{II}-p_{II}^2)\cos p_{II}\theta + q_{II}(2-3p_{II}+p_{II}^2)\sin(2-p_{II})\theta] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi r}} r^{-p_{II}} [-(2-3p_{II}+p_{II}^2)\cos p_{II}\theta - q_{II}(2-3p_{II}+p_{II}^2)\sin(2-p_{II})\theta] \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi r}} r^{-p_{II}} [p_{II}(1-p_{II})\cos p_{II}\theta + q_{II}(2-3p_{II}+p_{II}^2)\cos(2-p_{II})\theta]\end{aligned}\quad (28)$$

Kde pro konstanty  $q_I$  a  $q_{II}$  platí:

$$q_I = -\frac{\cos(p_I(\pi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}))}{\cos((2-p_I)(\pi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}))}\quad (29)$$

$$q_{II} = -\frac{\sin(p_{II}(\pi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}))}{\sin((2-p_{II})(\pi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}))}\quad (30)$$

Kde  $\alpha_1 + \alpha_2$  je míra rozevření vrubu obr. 9.

## 4.5 Williamsovo řešení

M.L. Williams navrhl hledat Airyho funkci napětí v okolí čela ostré trhliny zapsanou v polárních souřadnicích (viz. obr. 6) ve tvaru [2,9]:

$$\Phi(r, \theta) = r^{\lambda+1} [c_1 \sin(\lambda + 1)\theta + c_2 \cos(\lambda + 1)\theta + c_3 \sin(\lambda - 1)\theta + c_4 \cos(\lambda - 1)\theta] \quad (31)$$

případně jako součet většího počtu těchto členů (pro různá  $\lambda$ ) s tím, že v bezprostředním okolí kořene trhliny (ostrého vrubu) jsou pro šíření trhliny (iniciace trhliny) podstatné pouze ty členy, které mají exponent singularity napětí  $p$  v intervalu  $(0,1)$ .

kde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  a  $c_4$  jsou konstanty a  $\theta$  je úhel definován na obr. 6. Vztah mezi exponentem singularity napětí  $p$  a  $\lambda$  je:

$$p = 1 - \lambda \quad (32)$$

Nalezením této funkce a určením exponentů singularity napětí  $p$  se budeme zabývat v následující kapitole.



## 5 Vlastní řešení problému

Nejprve dosadíme Williamsovu funkci napětí (31) do vztahů pro složky tenzoru napětí vyjádřené pomocí Airyho funkce v polárních souřadnicích (14):

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} =$$

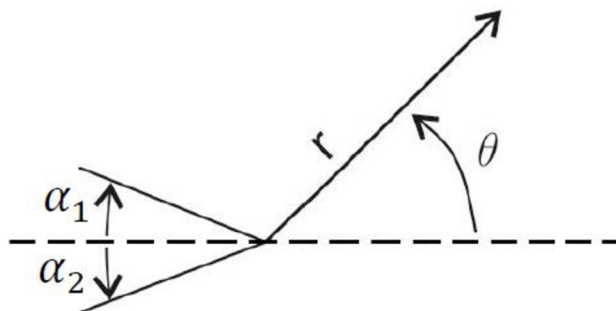
$$r^{\lambda-1} \lambda [-c_1(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta - c_2(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta - c_3(\lambda-3) \sin(\lambda-1)\theta - c_4(\lambda-3) \cos(\lambda-1)\theta] \quad (33)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} =$$

$$r^{\lambda-1} \lambda(\lambda+1) [c_1 \sin(\lambda+1)\theta + c_2 \cos(\lambda+1)\theta + c_3 \sin(\lambda-1)\theta + c_4 \cos(\lambda-1)\theta] \quad (34)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} =$$

$$r^{\lambda-1} \lambda [-c_1(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta + c_2(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta - c_3(\lambda-1) \cos(\lambda-1)\theta + c_4(\lambda-1) \sin(\lambda-1)\theta] \quad (35)$$



Obr. 9. Geometrie V-vrubu.

Obr. 9 demonstruje geometrii V-vrubu (míra rozevření je  $\alpha_1 + \alpha_2$ ) a zvolený souřadný systém  $(r, \theta)$  který je shodný s polárním souřadným systémem na obr. 6

## 5.1 Okrajové podmínky

Předpokládejme obě líce V-vrubu nezatižené, což vede na následující čtyři okrajové podmínky:

Okrajové podmínky na 1. líci:

$$\text{Pro úhel } \theta = \theta_1 = \pi - \alpha_1 \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \sigma_{r\theta} = 0$$

Okrajové podmínky na 2. líci:

$$\text{Pro úhel } \theta = \theta_2 = -\pi + \alpha_2 \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \sigma_{r\theta} = 0$$

Význam  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  je patrný z obr. 9.

Tyto okrajové podmínky dosadíme do vztahů (33) až (35):

$$1. \sigma_{\theta\theta}(\theta_1) = 0$$

$$c_1\lambda(\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\theta_1 + c_2\lambda(\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\theta_1 + c_3\lambda(\lambda + 1)\sin(\lambda - 1)\theta_1 + c_4\lambda(\lambda + 1)\cos(\lambda - 1)\theta_1 = 0 \quad (36)$$

$$2. \sigma_{r\theta}(\theta_1) = 0$$

$$-c_1\lambda(\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\theta_1 + c_2\lambda(\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\theta_1 - c_3\lambda(\lambda - 1)\cos(\lambda - 1)\theta_1 + c_4\lambda(\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\theta_1 = 0 \quad (37)$$

$$3. \sigma_{\theta\theta}(\theta_2) = 0$$

$$c_1\lambda(\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\theta_2 + c_2\lambda(\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\theta_2 + c_3\lambda(\lambda + 1)\sin(\lambda - 1)\theta_2 + c_4\lambda(\lambda + 1)\cos(\lambda - 1)\theta_2 = 0 \quad (38)$$

$$4. \sigma_{r\theta}(\theta_2) = 0$$

$$-c_1\lambda(\lambda + 1)\cos(\lambda + 1)\theta_2 + c_2\lambda(\lambda + 1)\sin(\lambda + 1)\theta_2 - c_3\lambda(\lambda - 1)\cos(\lambda - 1)\theta_2 + c_4\lambda(\lambda - 1)\sin(\lambda - 1)\theta_2 = 0 \quad (39)$$

## 5.2 Program Williams

Pokud z rovnice (37) až (39) chápeme jako soustavu lineárních rovnic s neznámými  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , můžeme je zapsat v maticové symbolice:

$$[A] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

kde matice  $[A]$  je:

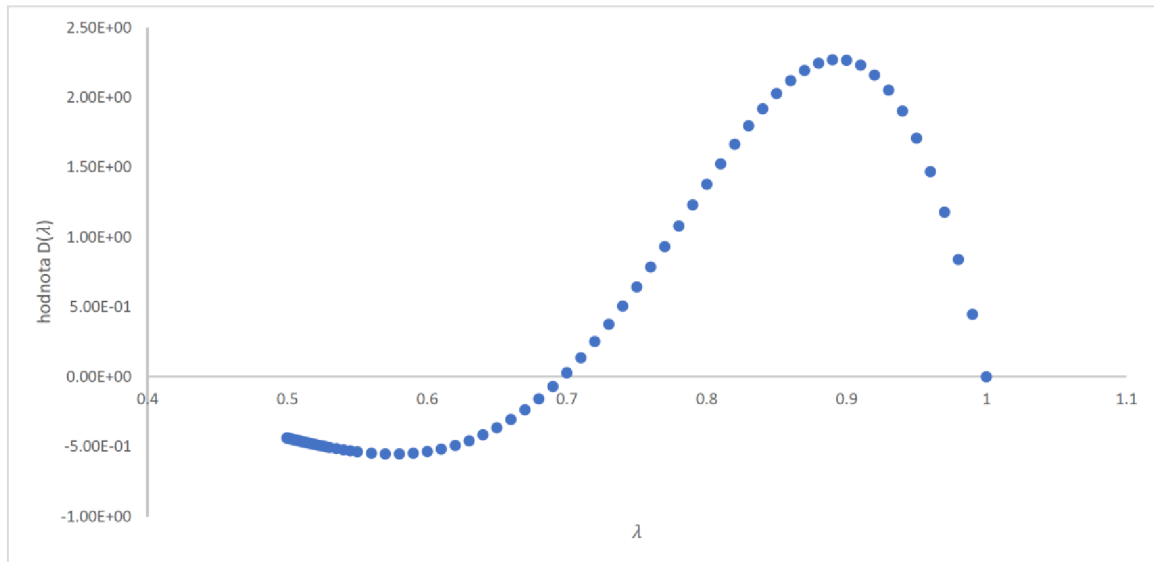
$$\begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta_1 & \lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta_1 & \lambda(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta_1 & \lambda(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta_1 \\ -\lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta_1 & \lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta_1 & -\lambda(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta_1 & \lambda(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta_1 \\ \lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta_2 & \lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta_2 & \lambda(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta_2 & \lambda(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta_2 \\ -\lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta_2 & \lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta_2 & -\lambda(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta_2 & \lambda(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta_2 \end{bmatrix}$$

Vektor pravých stran soustavy rovnic je nulový. Pokud má existovat nenulové řešení alespoň pro jeden z kořenů  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , musí být levostranná matice soustavy singulární (tzn. její determinant je roven nule).

Pro každou zadanou geometrii V-vrubu se  $(\alpha_1, \alpha_2)$  se hledá takové  $\lambda$  (v literatuře též označované jako vlastní číslo) z intervalu  $(0,1)$ , aby se determinant matice soustavy (dále značíme  $D(\lambda)$ ) přiblížil k nule. K nalezenému  $\lambda$  se hledá příslušný vektor  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$ . Pro přehlednost výsledků je vhodné vlastní vektor normalizovat a přiřadit mu jednu ze znaménkových alternativ. V našem případě jsme požadovali  $\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2} = 1$  a zároveň  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \geq 0$ .

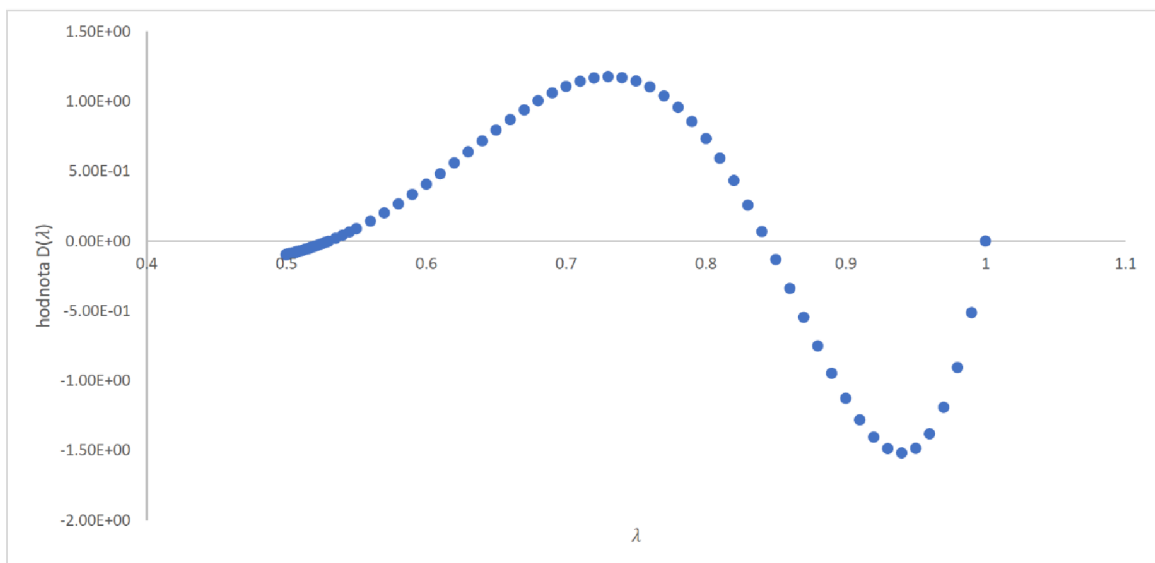
Při řešení nebyly použity profesionální podprogramy. Vznikl vlastní program s názvem Williams v jazyku C, který je odevzdán elektronicky společně s diplomovou prací (zdrojový kód je navíc v příloze A). Determinant byl řešen Gaussovou triangulací. Ukázalo se, že s ohledem na některé citlivé kombinace  $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$  bylo potřeba použít optimalizaci přesnosti pomocí prohazování řádků (v každém z eliminačních kroků byl hledán pivot s maximální absolutní hodnotou).

Pro zpřesňování hodnot  $\lambda$ , ve smyslu hledání nulové hodnoty  $D(\lambda)$ , byla použita metoda půlení intervalu. Dříve se však vytiskne průběh funkce  $D(\lambda)$  pro každou ze zadaných dvojic  $\alpha_1, \alpha_2$ , aby se metodě půlení intervalu napověděla oblast, kde funkce mění znaménko (toto je vidět ve výstupu programu, v příloze se jedná o soubor *Williams\Debug\Williams.out1*) viz. grafy 1 a 2.



**Graf 1. Průběh funkce  $D(\lambda)$  pro  $\alpha_1+\alpha_2= 140^\circ$**

Na Grafu 1 je vidět průběh funkce  $D(\lambda)$  pro  $\alpha_1+\alpha_2= 140^\circ$ . V tabulce výsledků (tab. 1) vidíme že pro úhel rozevření  $\alpha_1+\alpha_2= 140^\circ$  vychází jen jeden exponen singularity  $p_I = 0,302835$ . Po aplikaci (32) zjistíme že vlastní číslo  $\lambda$  je přibližně rovno 0,7 což je v grafu patrné



**Graf 2. Průběh funkce  $D(\lambda)$  pro  $\alpha_1+\alpha_2= 80^\circ$**

Obdobně Graf 2 pro  $\alpha_1+\alpha_2= 80^\circ$ . V tabulce výsledků (tab. 1) vidíme že pro úhel rozevření  $\alpha_1+\alpha_2= 80^\circ$  vycházejí dvě hodnoty exponentu singularity napětí  $p_I = 0,469604$  a  $p_{II} = 0,156560$ . Po aplikaci (32) zjistíme že  $\lambda_I$  a  $\lambda_{II}$  se přibližně rovnají 0,53 a 0,84 což je opět možné vidět v grafu.

V případech, kdy kořen rovnice  $D(\lambda) = 0$  je jednoduchý, má příslušný vlastní vektor jen jeden stupeň volnosti. Stačí tedy volit jedinou z neznámých  $c_1, c_2, c_3, c_4$  a ostatní ze soustavy rovnic dopočítat. V našem případě bylo nejpohodlnější zvolit  $c_4 = 1$ . Ostatní

neznámé se dopočetly klasickým Gaussovým zpětným chodem. Tento způsob fungoval, ač překvapivě, i v těch případech, kdy v přesném řešení má být výsledek  $c_4 = 0$ . Díky omezené přesnosti výpočtu vlastního čísla  $\lambda$ , žádná ze zbylých neznámých  $c_1, c_2, c_3$  nevyšla neomezeně velká (nedošlo k přeplnění) a po normalizaci vlastního vektoru se  $c_4$  přiblížilo k nule.

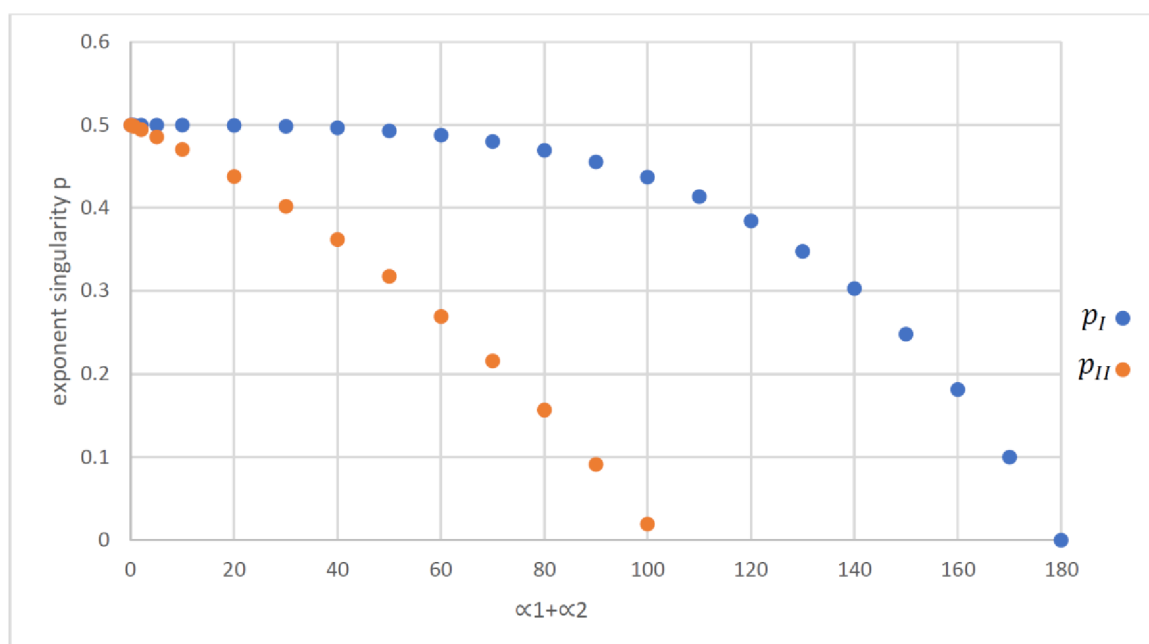
V případě dvojnásobného vlastního čísla  $\lambda$  (vychází například pro  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \lambda = p = 0,5$ ) je nalezení dvojice vlastních vektorů náročnější. Tento problém nebyl řešen. Namísto toho bylo zvoleno jen přiblížení ke zmíněnému stavu  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0,2^\circ$ .

### 5.3 Výsledky

Tab. 1. obsahuje výsledky Willimse z *Williams\Debug\Williams.out1*, konkrétně výsledné exponenty singularity napětí  $p_I$  a  $p_{II}$  pro jednotlivé hodnoty úhlů  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  a k nim příslušné vlastní vektory. Graf 3 ukazuje závislost  $p_I$  a  $p_{II}$  na  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ .

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$p_I$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$p_{II}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
0	0										
0.1	0.1	0.500000	0	0.316229	0	0.948683	0.499444	-0.70711	0	0.707108	0
0.3	0.3	0.500000	0	0.316236	0	0.948681	0.498328	-0.70710	0	0.707117	0
1	1	0.500000	0	0.316314	0	0.948654	0.494382	-0.70700	0	0.707216	0
2.5	2.5	0.499993	0	0.316765	0	0.948504	0.485721	-0.70641	0	0.707799	0
5	5	0.499947	0	0.318359	0	0.947970	0.470645	-0.70425	0	0.709950	0
10	10	0.499574	0	0.324643	0	0.945837	0.437993	-0.69491	0	0.719097	0
15	15	0.498547	0	0.334975	0	0.942227	0.401808	-0.67754	0	0.735487	0
20	20	0.496510	0	0.349307	0	0.937008	0.361818	-0.64991	0	0.760011	0
25	25	0.493067	0	0.367608	0	0.929981	0.317705	-0.60883	0	0.793299	0
30	30	0.487779	0	0.389810	0	0.920895	0.269099	-0.54991	0	0.835224	0
35	35	0.480146	0	0.415745	0	0.909481	0.215559	-0.46763	0	0.883923	0
40	40	0.469604	0	0.445077	0	0.895492	0.156560	-0.35645	0	0.934314	0
45	45	0.455516	0	0.477240	0	0.878773	0.091471	-0.21386	0	0.976865	0
50	50	0.437161	0	0.511402	0	0.859341	0.019525	-0.04532	0	0.998972	0
55	55	0.413721	0	0.546470	0	0.837479					
60	60	0.384269	0	0.581150	0	0.813796					
65	65	0.347730	0	0.614057	0	0.789262					
70	70	0.302835	0	0.643829	0	0.765170					
75	75	0.248025	0	0.669217	0	0.743067					
80	80	0.181304	0	0.689076	0	0.724689					
85	85	0.099956	0	0.702226	0	0.711954					
90	90	0	0	0.707107	0	0.707107					

Tab. 1. Výsledky z programu Williams.



Graf 3 závislosti  $p_I$  a  $p_{II}$  na  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ .

V druhém výpočtu *Williams\Debug\Williams.out2* byly hodnoty  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  zvoleny tak, že spodní líce vrubu má vždy nulový úhel  $\alpha_2$  a vrube se rozevívá pouze zvětšováním  $\alpha_1$ . Rozevření vrubu byla zvolená stejná, jako v předchozím případě.

Zvolená  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ :

$$\alpha_1 = 0.0^\circ, 0.2^\circ, 0.6^\circ, 2.0^\circ, 5.0^\circ, 10.0^\circ, 20.0^\circ, 30.0^\circ, \dots \dots 180^\circ$$

$$\alpha_2 = 0.0^\circ, 0.0^\circ, 0.0^\circ, 0.0^\circ, \dots \dots 0.0^\circ$$

Není překvapující, že v části zobrazující průběh funkcí  $D(\lambda)$  pro různé zadané dvojice  $\alpha_1, \alpha_2$  je výsledek totožný s předchozím případem. Volba jiného počátku úhlové souřadnice by neměla mít na exponent singularity vliv.

## 5.4 Porovnání výsledků

Výsledky prvního výpočtu byli porovnány s tabulkou č.1 (obr. 11) diplomové práce K. Štegnerové [8], ta je citována z práce Z. Knésla [10], ta se nám bohužel nepodařila dohledat.

$\alpha$ [°]	$p_I$	$q_I$	$p_{II}$	$q_{II}$
0	0,500	0,333	0,500	1,000
5	0,500	0,336	0,471	0,992
10	0,500	0,343	0,438	0,966
15	0,499	0,356	0,402	0,921
20	0,497	0,373	0,362	0,855
25	0,493	0,395	0,318	0,767
30	0,488	0,423	0,269	0,658
35	0,480	0,457	0,216	0,529
40	0,470	0,497	0,157	0,382
45	0,456	0,543	0,191	0,219
50	0,437	0,595	0,020	0,045
55	0,414	0,653	0,000	0,000
60	0,384	0,714		
65	0,348	0,778		
70	0,303	0,841		
75	0,248	0,901		
80	0,181	0,951		
85	0,100	0,986		
90	0,000	1,000		

Obr. 11. tabulka č.1 z práce K. Štegnerové [].

Hodnoty  $q_I$  a  $q_{II}$  pro nás nejsou zajímavé, při porovnání  $p_I$  a  $p_{II}$  je zřejmé že se s [8] při zaokrouhlení na stejný počet míst shoduje naprosto přesně, až na jednu hodnotu  $p_{II}$  pro úhel  $\alpha = 45^\circ$  (K. Štegnerová kótuje úhel rozevření vrubu  $2 \cdot \alpha$ , tudíž tento řádek odpovídá našemu řádku pro  $\alpha_1 = 45^\circ$  a  $\alpha_2 = 45^\circ$ ) která vyšla 0,191 a nám 0,091. Že se jedná o překlep je jasné ve chvíli, kdy dosadíme za  $p_{II}$  naši hodnotu 0,091 do vztahu, ze kterého byla vypočítána hodnota  $q_{II}$  (30). Výsledná hodnota  $q_{II}$  bude 0,219, což je stejná hodnota jakou má K. Štegnerová uvedenou na obr. 11.

Další rozdíl s K. Štegnarovou je že jsme z výsledků vypustili (kromě řádku  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ ) i řádek  $\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \cdot 55^\circ$  ve sloupci  $p_{II}$ . Podle našich rozborů je maximální hodnota pro druhé vlastní číslo ( $p_{II}$  respektive  $\lambda_{II}$ ) ještě věrohodná při  $\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \cdot 51,4^\circ$  (alespoň podle řešení které jsme provedli), takže zatím-co výsledky pro exponent singularity  $p_I$  působí důvěryhodně v celém intervalu  $0^\circ < \alpha_1 + \alpha_2 < 180^\circ$ , tak výsledky exponentu singularity  $p_{II}$  pro úhel  $\alpha_1 + \alpha_2 > 2 \cdot 51,4^\circ$  jsou méně přesvědčivé.



## 6 Závěr

Hlavním cílem práce bylo vyjádření exponentů singularity napětí  $\mathbf{p}$  pro různé konfigurace vrubu. Po nastudování potřebné literatury byly shrnuty základní vztahy mechaniky kontinua včetně Airyho funkce napětí. Následně byla věnována kapitola základům lomové mechaniky.

Po uvedení této nezbytné teorie byl vypracován algoritmus řešení exponentu singularity napětí podle něj byl následně vytvořen program Williams (který byl odevzdán elektronicky společně s diplomovou prací) na výpočet vlastních hodnot  $\lambda$  a tím pádem i  $\mathbf{p}$  pro různě rozevřený V-vrub, nutné vztahy byli odvozeny pro případ zakótování vrubu pomocí  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  (viz. Obr. 9) aby bylo možné vyšetřit i případy, kdy vrub nebude otevřený na obě strany symetricky podle osy  $x$ . Tato komplikace se nakonec ukázala být zbytečnou, neboť v takovém případě že je vrub otevřený nesymetricky ho pouhým natočením souřadného systému opět učiníme symetrickým.

Bylo spočítáno několik případů konfigurace vrubu (symetricky otevřené vruby vycházely stejně jako nesymetrické, samozřejmě pouze pokud byl úhel rozevření vrubu stejný) a výsledky byly porovnány s výsledky, které ve své práci uvádí K. Štegenerová [8] a navíc byly pro každou vlastní hodnotu  $\lambda$  určeny i vlastní vektory.

Závěrem lze říci že mnoho studentů přede mnou se zabývalo určením exponentu singularity napětí pro vrub, ale většinou používali pokročilé numerické či analyticko-numerické metody. Oproti tomu námi použitá Williamsova metoda pochází z roku 1957, ale i přesto jsme dospěli k dobrým výsledkům.

## 7 Seznam použité literatury

- [1] WANHILL, R.J.H. Milestone Case Histories in Aircraft Structural Integrity. *Comprehensive Structural Integrity* [online]. Elsevier, 2003, 2003, s. 61-72 [cit. 2018-03-20]. DOI: 10.1016/B0-08-043749-4/01002-8. ISBN 9780080437491.
- [2] JIN, Z.-H. *Fracture mechanics*. Waltham, MA: Academic Press, c2012. ISBN 978-0-12-385001-0.
- [3] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí : učební texty*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-7204-554-9.
- [4] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [5] Náhlík, L.: *Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů*. Disertační práce VUT v Brně, 2002.
- [6] BROBERG, K. B. *Crack and fracture*. Academic Press, 1999, London. 753 s ISBN 0-12-134130-5
- [7] Irwin, G. R.: Analysis of stresses and strains Nera the end of crack traversing a plate, *Journal of applied mechanics*, Vol. 24, p. 361-364, 1957.
- [8] ŠTEGNEROVÁ, K. *Aplikace zobecněné lineárně elastické lomové mechaniky na odhad počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 61 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Luboš Náhlík, Ph.D.
- [9] Williams, M.L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 109-114, 1957.
- [9] Williams, M.L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 109-114, 1957.
- [10] Knésl, Z.: The application of the strain energy density concept to the determinativ of a crack propagation direction initiated at a sharp notch tip. *Acta Technica ČSAV*, 38, p. 221 – 234, 1993.

## 8 Seznam použitých zkratek a symbolů

$A$	matice
$COD$	kritérium rozevření trhliny
$CTOD$	kritérium otevření ve vrcholu trhliny
$D(\lambda)$	determinant matice $A$
$EPLM$	elasto-plastická lomová mechanika
$LELM$	lineárně elastická lomová mechanika
$E, E_i$	modul pružnosti v tahu
$G, G_i$	modul pružnosti ve smyku
$H, H_i$	zobecněný součinitel intenzity napětí
$K, K_i$	součinitel intenzity napětí
$Y(a/b)$	korekční funkce
$a$	délka trhliny
$c_1, c_2, c_3, c_4$	koeficienty, vlastní vektor
$f_k(\theta), f_{ij}(\theta)$	známá funkce polohového úhlu $\theta$
$g_i(\theta)$	známá funkce polohového úhlu $\theta$
$p, p_I, p_{II}$	exponent singularity napětí
$r, \theta$	polární souřadnice
$u, u_i$	složky vektoru posunu
$x, y, z$	kartézské souřadnice
$\nabla^2$	Laplaceův operátor
$\Phi(x, y)$	Airyho funkce napětí
$\alpha_1, \alpha_2$	úhel rozevření V-vrubu
$\varepsilon_{ij}$	složky tenzoru přetvoření
$\lambda$	vlastní hodnota exponentu singularity
$\mu$	Poissonovo číslo
$\sigma, \sigma_{ij}$	normálové napětí

## 9 Přílohy

### Příloha A – Zdrojový kód programu Williams

```
// Williams.cpp : Defines the entry point for the console application.
```

```
//
```

```
#include "stdafx.h"
```

```
#include <stdio.h>
```

```
#include <stdlib.h>
```

```
#include <math.h>
```

```
FILE *in, *out;
```

```
char s[256];
```

```
void tt(char* text) {
```

```
    // =====
```

```
    printf(text);
```

```
    fprintf(out, text);
```

```
}
```

```
void te(char* text) {
```

```
    // =====
```

```
    tt(text);
```

```
    tt("\n");
```

```
    exit(0);
```

```
}
```

```
int Tisk = 0;

int TiskOld = 0;

double Mat[16]; // matice koeficientu u soustavy 4 rovnic pro ctyri nezname
c1,c2,c3,c4 resp A,B,C,D

double ABCD[4]; // vektor pro vlastni tvar

double alfa1, alfa2; // alfa1 nahoru, alfa2 dolu poloroviny opacne k poloprímce fi=0

double Pi = 3.1415926535897932;

/***/

double Alfa1[23] = { 0.0, 0.1, 0.3, 1.0, 2.5, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0, 25.0, 30.0, 35.0, 40.0,
45.0, 50.0, 55.0, 60.0, 65.0, 70.0, 75.0, 80.0, 85.0, 90.0 };

double Alfa2[23] = { 0.0, 0.1, 0.3, 1.0, 2.5, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0, 25.0, 30.0, 35.0, 40.0,
45.0, 50.0, 55.0, 60.0, 65.0, 70.0, 75.0, 80.0, 85.0, 90.0 };

/***/

/***/

double Alfa1[23] = { 0.0, 0.2, 0.6, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0, 30.0, 40.0, 50.0, 60.0, 70.0, 80.0,
90.0, 100.0, 110.0, 120.0, 130.0, 140.0, 150.0, 160.0, 170.0, 180.0 };

double Alfa2[23] = { 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 };

/***/

/***/

double Alfa1[23] = { 1.0, 1.2, 1.6, 3.0, 6.0, 11.0, 21.0, 31.0, 41.0, 51.0, 61.0, 71.0, 81.0,
91.0, 101.0, 111.0, 121.0, 131.0, 141.0, 151.0, 161.0, 171.0, 181.0 };

double Alfa2[23] = { -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0,
-1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0, -1.0 };

/***/
```

```
/**
```

```
double Alfa1[23] = { -30.0, -29.8, -29.4, -28.0, -25.0, -20.0, -10.0, 0.0, 10.0, 20.0, 30.0,
40.0, 50.0, 60.0, 70.0, 80.0, 90.0, 100.0, 110.0, 120.0, 130.0, 140.0, 150.0 };
```

```
double Alfa2[23] = { 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0,
30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0, 30.0 };
```

```
***/
```

```
double PII[23] = { 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.49, 0.49,
0.49, 0.49, 0.49, 0.49, 0.49, 0.49, 0.49 };
```

```
double PIp[23] = { 0.49999, 0.4998, 0.499, 0.497, 0.493, 0.484, 0.465, 0.45, 0.42, 0.40,
0.36, 0.35, 0.30, 0.25, 0.20, 0.16, 0.13, 0.11, 0.10, 0.08, 0.06, 0.04, 0.00 };
```

```
double PIII[23] = { 0.49999, 0.4998, 0.499, 0.497, 0.493, 0.484, 0.465, 0.45, 0.42, 0.40,
0.36, 0.35, 0.30, 0.25, 0.20, 0.16, 0.13, 0.11, 0.10, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02 };
```

```
double PIIp[23] = { 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 };
```

```
void TiskMat (void) {
    // =====
    int i;

    for (i = 0; i < 16; i++) {
        if (i % 4 == 0)
            tt("\n");
        sprintf(s, "%8.4f", Mat[i]); tt(s);
    }
    tt("\n\n");
}
```

```
void GetMat(double lambda) { // obsadi matici Mat vstupy: alfa1, alfa2, lambda (lambda hledanym vlast.cislem)
```

```
    // =====
```

```
    double SinP1, SinM1, CosP1, CosM1; // sin((lambda+1)*fi), sin((lambda-1)*fi),  
    cos((lambda+1)*fi), cos((lambda-1)*fi)
```

```
    double fi, pom;
```

```
    fi = (180.0 - alfa1) * Pi / 180.0;
```

```
    SinP1 = sin((lambda + 1.0)*fi);
```

```
    SinM1 = sin((lambda - 1.0)*fi);
```

```
    CosP1 = cos((lambda + 1.0)*fi);
```

```
    CosM1 = cos((lambda - 1.0)*fi);
```

```
    pom = lambda*(lambda + 1.0); // rovnice pro S(fi,fi) horni okrajovou podminku
```

```
    Mat[0] = pom*SinP1;
```

```
    Mat[1] = pom*CosP1;
```

```
    Mat[2] = pom*SinM1;
```

```
    Mat[3] = pom*CosM1;
```

```
    pom = lambda*(lambda + 1.0); // rovnice pro S(r,fi) horni okrajovou podminku
```

```
    Mat[4] = -pom*CosP1;
```

```
    Mat[5] = pom*SinP1;
```

```
    pom = lambda*(lambda - 1.0);
```

```
    Mat[6] = -pom*CosM1;
```

```
    Mat[7] = pom*SinM1;
```

```
    fi = (-180.0 + alfa2) * Pi / 180.0;
```

```
SinP1 = sin((lambda + 1.0)*fi);
SinM1 = sin((lambda - 1.0)*fi);
CosP1 = cos((lambda + 1.0)*fi);
CosM1 = cos((lambda - 1.0)*fi);

pom = lambda*(lambda + 1.0); // rovnice pro S(fi,fi) horni okraj podminku
Mat[8] = pom*SinP1;
Mat[9] = pom*CosP1;
Mat[10] = pom*SinM1;
Mat[11] = pom*CosM1;

pom = lambda*(lambda + 1.0); // rovnice pro S(r,fi) horni okraj podminku
Mat[12] = -pom*CosP1;
Mat[13] = pom*SinP1;
pom = lambda*(lambda - 1.0);
Mat[14] = -pom*CosM1;
Mat[15] = pom*SinM1;

if (Tisk) {
    printf(s, "\n\nMatice pro lambda=%8.5f alfa1=%5.1f alfa2=%5.1f\n",
lambda, alfa1, alfa2); tt(s);
    TiskMat();
}
}

/**
double DetMat(int n) { // dava determinant matice Mat[n*n]), matici nici
```



```
int i, j, k, l, nn;

double Det, Pivot, pom;

nn = n*n;

Det = 1.0;

for (i = 0; i < n; i++) { // pocitadlo radku pivota
    j = i*(n+1); // index pivota
    Pivot = Mat[j];
    Det *= Pivot;
    for (k = j + n; k < nn; k += n) {
        pom = Mat[k] / Pivot;
        for (l = 0; l < n-i; l++) {
            Mat[k + l] -= pom*Mat[j + l];
        }
    }
}

if (Tisk) {
    sprintf(s, "Determinant matice: D=%e\n\n", Det); tt(s);
}

return Det;
}

***/

double DetMat(int n) { // dava determinant matice Mat[n*n]), matici nici, zpresneni
prehazovanim radku

// =====

int i, j, k, l, m, nn;

double Det, Pivot, MaxPiv, pom;
```

```
nn = n*n;
Det = 1.0;
for (i = 0; i < n; i++) { // pocitadlo radku pivota
    j = i*(n + 1);      // index pivota
    MaxPiv = 0.0;
    m = j;
    for (k = j; k < nn; k += n) { // hledani max(abs(pod Pivotem))
        if (fabs(Mat[k]) > MaxPiv) {
            MaxPiv = fabs(Mat[k]);
            m = k;
        }
    }
    if (m != j) { // pripadne prohazovani radku
        Det = -Det;
        for (l = 0; l < n - i; l++) {
            pom = Mat[j + l];
            Mat[j + l] = Mat[m + l];
            Mat[m + l] = pom;
        }
    }
    Pivot = Mat[j];
    Det *= Pivot;
    for (k = j + n; k < nn; k += n) {
        pom = Mat[k] / Pivot;
        for (l = 0; l < n - i; l++) {
            Mat[k + l] -= pom*Mat[j + l];
        }
    }
}
```

```
        }
    }
}
if (Tisk) {
    sprintf(s, "Determinant matice: D=%e\n\n", Det); tt(s);
}
return Det;
}

double GetDet(double lambda) { // vytvari matici a dava jiji determinant
    // =====
    GetMat(lambda);
    return DetMat(4);
}

void ZpetnyChod(int n) {
    // =====
    int i, j, k, l;
    double pom, pom1;

    for (i = 0; i < n; i++) // specielni prava strana
        ABCD[i] = 0.0;
    ABCD[n - 1] = Mat[n*n - 1];
//    ABCD[n - 1] = 1.0;

    for (i = n - 1; i >= 0; i--) { // vlastni zpetny chod
        j = i * (n + 1);
```

```
        ABCD[i] /= Mat[j];

        l = i;
        for (k = j - n; k > 0; k -= n) {
            l--;
            ABCD[l] -= ABCD[i] * Mat[k];
        }
    }

    pom = pom1 = 0.0;           // normalizace vlastního tvaru
    for (i = 0; i < n; i++) {
        pom += ABCD[i] * ABCD[i];
        pom1 += ABCD[i];
    }

    pom = sqrt(pom);
    for (i = 0; i < n; i++) {
        ABCD[i] /= pom;
    }

    if (pom1 < 0.0)
        for (i = 0; i < n; i++)
            ABCD[i] = -ABCD[i];

    printf(s, " %9.6f %9.6f %9.6f %9.6f", ABCD[0], ABCD[1], ABCD[2],
        ABCD[3]); tt(s);
}

double puleni(double ParL, double ParP, double fun(double), int TezVlastniTvar) {
    //
    =====
```

```
// hleda koren rovnice fun(x) = 0 na intervalu ParL <= x <= ParP kdyz
fun(ParL)*fun(ParP) <= 0

// kdyz TezVlastniTvar, pokusi se o to

double ParS, HodS; //
double D, HodL, HodP;
int i;

HodL = fun(ParL);
HodP = fun(ParP);
if (fabs(HodL) < 1e-12)
    return ParL;
if (fabs(HodP) < 1e-12)
    return ParP;
if (HodL*HodP > 0.0) {
//      sprintf(s, "\n(ParL=%e ParP=%e) (HodL=%e HodP=%e)\n", ParL, ParP,
HodL, HodP); tt(s);
    return 12345.0;
}
for (i = 0; i < 40; i++) {
    ParS = (ParL + ParP) / 2;
    HodS = fun(ParS);
    if (HodL*HodS > 0.0) {
        ParL = ParS;
        HodL = HodS;
    }
    else {
        ParP = ParS;
```

```
        HodP = HodS;
    }
}
/**
TiskOld = Tisk;
Tisk = 1;
***/

ParS = (ParL + ParP) / 2;
GetMat(ParS);
D = DetMat(4);
sprintf(s, "  %9.6f", 1.0 - ParS); tt(s);
/**
tt("\nPo triangulaci:\n");
TiskMat();
Tisk = TiskOld;
***/

ZpetnyChod(4);
return ParS;
}
```

```
int main() {
    // =====
    int i;
    double LambdaI, LambdaII;
    double p, D;

    /**
```

```
if ((in = fopen("Williams.in", "rt")) == NULL) { // Otevreni vstupniho souboru
    printf("Nedari se otevrit soubor Williams.in\n");
    return 0;
}
***/

if ((out = fopen("Williams.out", "wt")) == NULL) { // Vznik vystupniho souboru
    printf("Nedari se otevrit soubor Williams.out\n");
    return 0;
}

/**/

if (fscanf(in, "%lg %lg %lg", &lambda, &alfa1, &alfa2) != 3) // Cteni lambda,
alfa1, alfa2
    te("Nezdar pri cteni lambda, alfa1, alfa2");
***/

tt("\nCast pro pripadne vykresleni zavislosti D(p) pripadne D(lambda)"

"\n=====");

for (i = 0; i < 23; i++) {
    alfa1 = Alfa1[i];
    alfa2 = Alfa2[i];
    sprintf(s, "\n alfa1=%5.1f alfa2=%5.1f\n"
        " p lambda D\n", alfa1, alfa2); tt(s);

    for (p = 0.5005; p > 0.4903; p -= 0.0005) {
```

```
D = GetDet(1.0 - p);
    sprintf(s, "%7.4f %6.4f %10.3e\n", p, 1.0 - p, D); tt(s);
}
for (p = 0.49; p > 0.4805; p -= 0.001) {
    D = GetDet(1.0 - p);
    sprintf(s, "%7.4f %6.4f %10.3e\n", p, 1.0 - p, D); tt(s);
}
for (p = 0.48; p > 0.47; p -= 0.002) {
    D = GetDet(1.0 - p);
    sprintf(s, "%7.4f %6.4f %10.3e\n", p, 1.0 - p, D); tt(s);
}
for (p = 0.47; p > 0.452; p -= 0.005) {
    D = GetDet(1.0 - p);
    sprintf(s, "%7.4f %6.4f %10.3e\n", p, 1.0 - p, D); tt(s);
}
for (p = 0.45; p > -0.02; p -= 0.01) {
    D = GetDet(1.0 - p);
    sprintf(s, "%7.4f %6.4f %10.3e\n", p, 1.0 - p, D); tt(s);
}
}
tt("\n");

tt("\nCast pro srovnani s vysledky Stegnerova, Knesl"
    "\n=====");

c3    tt("\n alfa1  alfa2    pI    c1    c2    c3    c4    pII    c1    c2
c4\n");
```



```
for (i = 0; i < 23; i++) {  
    alfa1 = Alfa1[i];  
    alfa2 = Alfa2[i];  
    sprintf(s, "%6.1f %6.1f", alfa1, alfa2); tt(s);  
  
    LambdaI = puleni(1.0 - PII[i], 1.0 - PIp[i], GetDet, 1);  
  
    if (alfa1 + alfa2 <= 102.8)  
        LambdaII = puleni(1.0 - PIII[i], 1.0 - PIIp[i], GetDet, 1);  
    tt("\n");  
}  
  
return 0;  
}
```