



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY  
A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ**

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

**ÚSTAV VÝKONOVÉ ELEKTROTECHNIKY A ELEKTRONIKY**

DEPARTMENT OF POWER ELECTRICAL AND ELECTRONIC ENGINEERING

**DYNAMICKÝ MODEL VYSOKONAPĚŤOVÉHO  
VAKUOVÉHO VYPÍNAČE A ASYNCHRONNÍHO  
MOTORU PRO SIMULACI SPÍNACÍCH  
PŘECHODNÝCH DĚJŮ POMOCÍ CLARKEOVÉ  
TRANSFORMACE**

DYNAMIC MODEL OF MEDIUM VOLTAGE VACUUM CIRCUIT BREAKER AND INDUCTION MOTOR  
FOR SWITCHING TRANSIENTS SIMULATION USING CLARKE TRANSFORMATION

**TEZE DIZERTAČNÍ PRÁCE**

DOCTORAL THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Ing. Jan Pígl

**ŠKOLITEL**

SUPERVISOR

doc. Ing. Radoslav Cipín, Ph.D.

**BRNO 2023**

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma “Dynamický model vysokonapětového vakuového vypínače a asynchronního motoru pro simulaci spínacích přechodných dějů pomocí Clarkeové transformace” vypracoval samostatně a použil jen prameny uvedené v seznamu literatury.

V Praze dne 24.2.2022

Podpis autora:

## **Poděkování**

Děkuji panu doc. Ing. Čestmíru Ondrůškovi, CSc. a panu doc. Ing. Radoslavu Cipínovi, Ph.D. za metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a jejich čas při zpracování mé disertační práce.

V Praze dne 24.2.2022

Podpis autora:

## **Klíčová slova**

Spínací přepětí; Vakuový vypínač; Asynchronní motor; Clarkeové transformace; Prostorové vektory; EMTP; ODE23s; Numerická inverzní laplaceova transformace; Svodič přepětí; RC člen; Model frekvenčně závislého vedení;

### **Keywords**

Switching Transients; Vacuum Circuit Breaker; Induction Motor; Clarke transformation; Space vectors; EMTP; ODE23s; Numerical Inverse Laplace Transform; Surge Arrester, RC Snubber; Frequency dependent line model;

**Abstrakt:** Odvození dynamického modelu vysokonapěťového vakuového vypínače a asynchronního motoru v prostorových vektorech v souřadnicovém systému  $\alpha\beta 0$  nám umožňuje modelovat spínací přechodné děje v různých dynamických stavech motoru. V případě Clarkeové transformace může být vybrána odpovídající metoda numerické integrace a to včetně integračních metod s proměnným časovým krokem za účelem odstranění numerické nestability vzhledem k tuhosti daného systému. Vznik nesymetrie v soustavě například v důsledku spínání způsobí, že se rozvodný systém stane nerovnovážným a transformované rovnice složek  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $0$  nebudou vzájemně nezávislé. Proto je nutné odvodit vazební matici mezi napětími a proudy vypínače v souřadnicovém systému  $\alpha\beta 0$ . Chování dynamického modelu při přechodu mezi rovnovážnými a nerovnovážnými stavy systému bylo experimentálně ověřeno na laboratorním modelu. Předmětem našeho zájmu jsou spínací přepětí, která se vyskytují při vypínání malých induktivních proudů vakuovým vypínačem. Při odvozování modelu vakuového vypínače byly zohledněny všechny jeho vlastnosti se kterými se při tomto ději setkáváme tj. odseknutý proud, virtuální odseknutý proud, dielektrická bariéra ve vypínači a její míra zotavení a schopnost vypínače zhasnout vysokofrekvenční proud. Dynamický model je dále rozšířen o ochrany proti přepětí a frekvenčně závislý model vedení. Simulační výsledky jsou porovnány se změřenými výsledky na vysokonapěťovém motoru a rovněž se simulačními výsledky matematického modelu zkušebního obvodu v souladu s IEC 62271-110 řešeného metodou uzlových napětí (metoda EMTP). Modely jsou implementovány v programovém prostředí MATLAB/Simulink.

**Abstract:** Derivation of the dynamic model of medium voltage vacuum circuit breaker and induction motor in space vectors in coordinates  $\alpha\beta 0$  allow us to model switching transients in various dynamic states of the motor. In the case of the Clarke transformation, the corresponding numerical integration technique can be selected including variable time-step integration techniques to avoid numerical instabilities due to the stiffness of the system. Assymetrical operations such as switching cause that power system becomes unbalanced and the transformed equations  $\alpha$ ,  $\beta$  and 0 are not uncoupled. Therefore it is necessary to derive a coupling matrix between circuit breaker voltages and currents in the coordinate system  $\alpha\beta 0$ . The behavior of the dynamic model was experimentally verified on a laboratory model during the transition between balanced and unbalanced states of the system. The subject of our interest are switching overvoltages that arise when turning off small inductive currents by a vacuum circuit breaker. When deriving the model of a vacuum circuit breaker, all its properties encountered during this action were taken into account, i.e. current chop, virtual current chop, dielectric barrier in the circuit breaker and its recovery rate and the ability of the vacuum circuit breaker to extinguish high frequency currents. Dynamic model is further extended by overvoltage protections and frequency-dependent line model. Simulation results are compared with the measured results on a medium voltage motor and as well as with the simulation results of the mathematical model of the test circuit according to IEC 62271-110 resolved using nodal method (EMTP algorithm). Models are implemented in the MATLAB/Simulink programming environment.

## **Bibliografické citace**

Pígl, J. Dynamický model vysokonapětového vakuového vypínače a asynchronního motoru pro simulaci spínacích přechodných dějů pomocí Clarkeové transformace. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2023. 84 s.

Vedoucí disertační práce doc. Ing. Radoslav Cipín, Ph.D.

## OBSAH

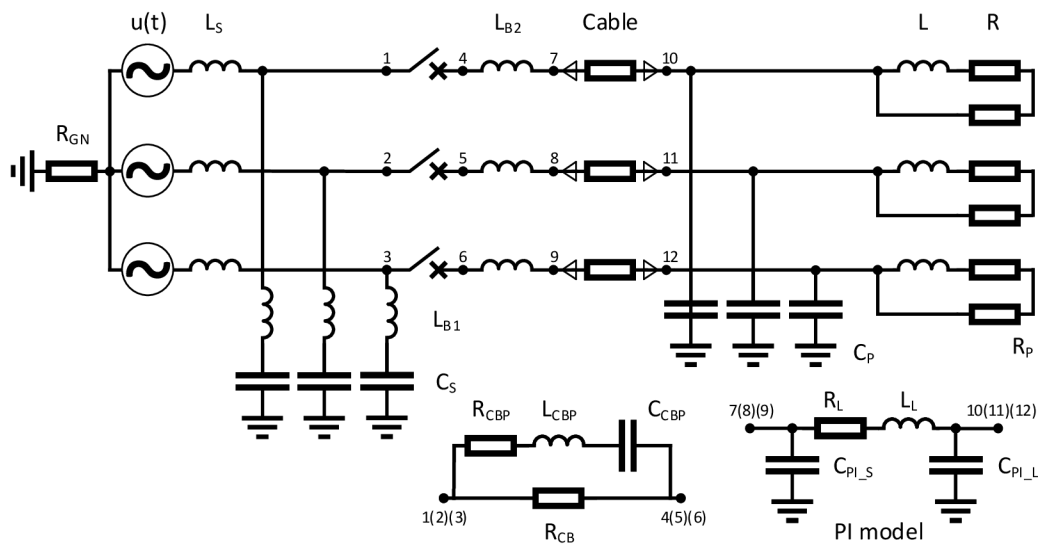
1. Úvod.....	9
2. <b>Dynamický model vysokonapětového vakuového vypínače a asynchronního motoru pro simulaci spínacích přechodných dějů pomocí Clarkeové transformace .....</b>	<b>13</b>
2.1. Dynamický model asynchronního motoru .....	13
2.2. Dynamický model vedení.....	23
2.3. Dynamický model vysokonapětového vakuového vypínače a přípojovacího vedení .....	25
2.4. Dynamický model sítě.....	27
3. Závěr.....	29
<b>Literatura.....</b>	<b>31</b>



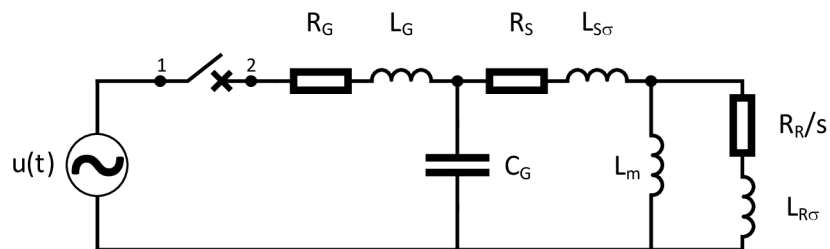
## 1. ÚVOD

Pro sestavení obvodových rovnic pro simulaci elektromagnetických přechodných dějů jako je spínání vysokonapěťového motoru vakuovým vypínačem je v současnosti používána metoda uzlových napětí. Uzlové rovnice jsou sestaveny po diskretizaci všech obvodových prvků lichoběžníkovou metodou numerické integrace (metoda EMTP). V případě simulace spínání motoru, je motor představován paralelním  $RLC$  obvodem nebo modelem Universálního stroje (Universal Machine model) v programu ATP-EMTP. Literatura zabývající se numerickými simulacemi přechodových dějů týkající se spínání motorů je obsáhlá [1-8].

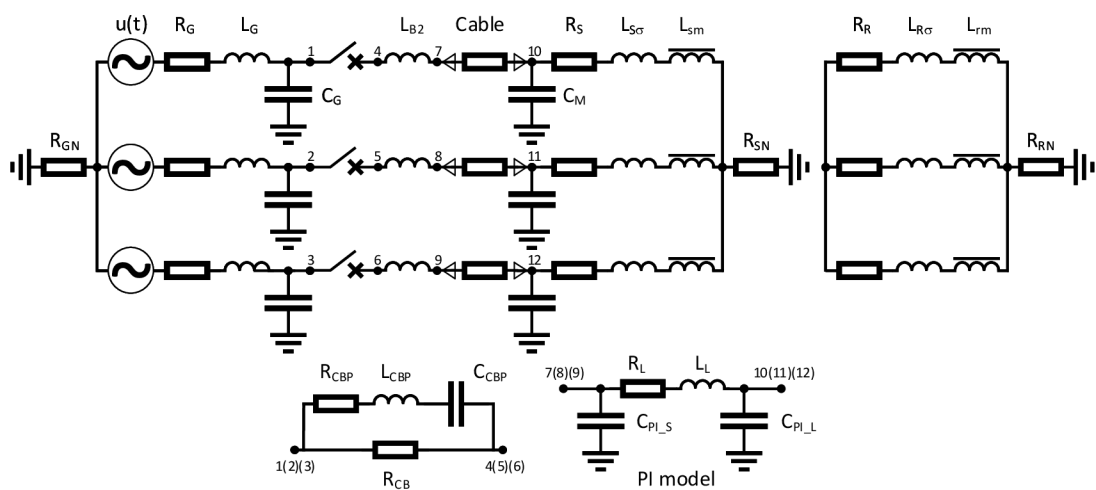
Náhradní zapojení motoru uvedené v [1-5] je ukázáno na obrázku 1. Zde je uvedeno schéma zapojení zkušebního obvodu pro laboratorní testy dle standardu IEC 62271-110 ed. 4, který definuje požadavky na vysokonapěťové vypínače používané pro spínání vysokonapěťových motorů. Na obrázku 1,  $R_{GN}$  je odpor mezi uzlem sítě a zemí,  $u(t)$  je napájecí napětí,  $L_S$  je indukčnost sítě,  $L_{B1}$  je indukčnost kondenzátorů a připojovacích vedení,  $C_S$  je kapacita sítě,  $L_{B2}$  je indukčnost připojovacích vedení,  $R_{CB}$  je odpor vypínače,  $R_{CBP}$  je parazitní odpor vypínače,  $L_{CBP}$  je parazitní indukčnost vypínače,  $C_{CBP}$  je parazitní kapacita vypínače,  $C_{PI,S}$  je kapacita kabelového vedení (strana sítě) ( $C_{PI,S} = C_L/2$ ),  $R_L$  je odpor kabelového vedení,  $L_L$  je indukčnost kabelového vedení,  $C_{PI,L}$  je kapacita kabelového vedení (strana zátěže) ( $C_{PI,L} = C_L/2$ ),  $C_L$  je kapacita kabelového vedení,  $C_P$  je náhradní paralelní kapacita motoru,  $L$  je náhradní indukčnost motoru,  $R$  je náhradní resistance motoru and  $R_P$  je náhradní paralelní resistance motoru. Změnou obvodových parametrů  $R$ ,  $L$  náhradního zapojení asynchronního motoru můžeme definovat jeho různé provozní stavy charakterizované velikostí proudu a účinníku.



Obrázek 1. Zkušební obvod pro simulaci spínacích přechodných dějů v souladu s IEC 62271-110 ed. 4. Zdroj: [9] a vlastní úprava.



Obrázek 2. Náhradní zapojení asynchronního motoru pro simulaci spínacích přechodných dějů. Zdroj: [6] a vlastní úprava.



Obrázek 3. Obvodové schéma asynchronního motoru.

Náhradní obvodové schéma motoru uvedené v [6-8] je ukázáno na obrázku 2. Zkušební obvod na obrázku 1 je odvozen z tohoto náhradního obvodového schéma motoru. Na obrázku 2,  $R_G$  je odpor sítě,  $L_G$  je indukčnost sítě,  $C_G$  je kapacita sítě,  $R_S$  je odpor statorového vinutí,  $L_{S\sigma}$  je rozptylová indukčnost statorového vinutí,  $L_{mn}$  je magnetizační indukčnost,  $R_R$  je odpor rotorového vinutí (přepočtený na stator),  $L_{R\sigma}$  je rozptylová indukčnost rotorového vinutí (přepočtená na stator),  $s$  je skluz rotoru. Změnou obvodových parametrů náhradního zapojení asynchronního motoru můžeme definovat jeho různé provozní stavy charakterizované velikostí proudu, účinníku, zotaveného napětí a frekvencí vysokofrekvenčního proudu.

Náhradní obvodové schéma motoru uvedené na obrázku 2 je odvozené z dynamického (matematického) modelu asynchronního motoru na obrázku 3, kde  $C_M$  je kapacita motoru,  $R_{SN}$  resp.  $R_{RN}$  je odpor mezi uzlem statorového resp. rotorového vinutí a zemí. Výpočetní programy založené na metodě EMTP používají model Universálního stroje nebo proudové zdroje, aby reprezentovaly asynchronní motor ukázaný na obrázku 3 [4, 10-11]. V této práci je použita Clarkeové transformace (transformace prostorového vektoru) pro modelování systému na obrázku 3 v ustáleném stavu a pro analýzu přechodných dějů [12-13]. V případě Clarkeové transformace, může být vybrána odpovídající metoda numerické integrace včetně integračních metod proměnného kroku za účelem odstranění numerických nestabilit z důvodu tuhosti soustavy diferenciálních rovnic popisující daný systém [14]. Clarkeové transformace, nebo jakákoli jiná modální transformace, rozkládá trojfázové soustavy na tři nezávislé symetrické trojfázové soustavy. Vznik nesymetrie v soustavě například v důsledku spínání způsobí, že se rozvodný systém stane nerovnovážným a transformované rovnice složek  $\alpha$ ,  $\beta$  a 0 nebudou vzájemně nezávislé [15]. Proto není možná přímá aplikace Clarkeové transformace při řešení trojfázových obvodů zahrnující spínací zařízení a je nutné odvodit vazební matici mezi napětími a proudy vypínače v souřadnicovém systému  $\alpha\beta 0$ . Hodnoty prvků ve vazební matici závisí na hodnotách odporů v jednotlivých fázích

vypínače. Nakonec jsou výsledky řešených rovnic inverzně transformovány do třífázového systému *abc*.

Hlavním cílem práce [16] je odvození dynamického modelu v prostorových vektorech pro simulaci spínání vysokonapětového motoru vakuovým vypínačem. Předmětem našeho zájmu budou spínací přepětí, které se objevují při vypínání malých induktivních proudů vakuovým vypínačem, proto při odvozování modelu vakuového vypínače budou brány v úvahu všechny jeho vlastnosti, se kterými se při vypínání setkáváme tj. odseknutý proud, virtuální odseknutý proud, dielektrická bariéra ve vypínači a rychlost jejího zotavení a schopnost vakuového vypínače zhasnout vysokofrekvenční proudy [6-8, 17]. Simulační výsledky budou porovnány se změřenými výsledky na vysokonapětovém motoru a rovněž se simulačními výsledky matematického modelu zkušebního obvodu dle IEC 62271-110 řešeného pomocí metody EMTP pro tyto tři případy: vypnutí v průběhu normálního zatížení, vypnutí v průběhu rozběhu bez opakovaných průrazů, vypnutí v průběhu rozběhu s opakovanými průrazy.

Chování dynamického modelu při přechodu ze stavu, kdy je systém symetrický do stavu, kdy se rozvodný systém stane nerovnovážným, v důsledky spínání, a zpět do symetrického stavu, kdy je obvod úspěšně vypnut experimentálně ověříme na laboratorním modelu napájeném z nízkonapětové rozvodné sítě, kde spínacím prvkem je nízkonapětový motorový spouštěč. V závěru práce dynamický model rozšíříme o ochrany proti přepětí ve formě svodiče přepětí a RC členu [18] a model frekvenčně závislého kabelu v časové oblasti pro přesnější modelování frekvenčně závislé podélné impedance vedení [19].

Disertační práce [16] je rozdělena do pěti částí. V části 2 jsou diskutovány typy modelů vysokonapětových vypínačů se zaměřením zejména na model vypínání malých proudů vakuovým vypínačem. Část 3 se zabývá popisem numerických metod používaných při řešení přechodných dějů v elektroenergetických systémech. V části 4 je odvozen dynamický model pro simulaci spínacích přepětí zahrnující odvození stavových

rovnice asynchronního motoru, vedení a elektrické sítě včetně implementace dynamického modelu v programovém prostředí Matlab/Simulink. V části 5 je diskutováno numerické řešení zkušební obvodu (náhradní obvod motoru) v souladu s IEC 62271-110 ed.4 popsaného metodou uzlových napětí. Část 6 se zabývá parametrizací stavových a uzlových rovnic na základě dat daného rozvodného systému a porovnáním simulačních výsledků se změřenými výsledky. V části 7 jsou diskutována rozšíření modelu o přepětové ochrany ve formě svodiče přepětí a RC členu a dále rozšíření modelu o model frekvenčně závislého kabelu v časové oblasti. Závěry jsou uvedeny v části osm.

V rámci této zkrácené verze disertační práce bude podrobněji dále diskutována pouze její čtvrtá část, která tvoří zároveň její část stěžejní. Číslování rovnic je identické s číslováním rovnic v disertační práci.

## **2. DYNAMICKÝ MODEL VYSOKONAPĚŤOVÉHO VAKUOVÉHO VYPÍNAČE A ASYNCHRONNÍHO MOTORU PRO SIMULACI SPÍNACÍCH PŘECHODNÝCH DĚJŮ POMOCÍ CLARKEOVÉ TRANSFORMACE**

Při odvozování dynamického modelu v prostorových vektorech vycházíme ze schématu zapojení na obrázku 3. Rovnice sestavíme metodou smyčkových proudů, které transformujeme do souřadnicového systému  $\alpha\beta 0$ . Dynamický model zahrnuje odvozené stavové rovnice elektrické sítě, kabelového vedení a asynchronního motoru [16].

### **2.1. DYNAMICKÝ MODEL ASYNCHRONNÍHO MOTORU**

Asynchronní motor je konstrukčně tvořen dvěma vícefázovými (nejčastěji třífázovými) systémy vinutí. Jeden systém je umístěn na statoru, druhý na rotoru motoru. Všechna vinutí jsou vzájemně vázaná magnetickými vazbami. Vzájemné indukčnosti systémů vinutí, umístěných na statoru a na rotoru jsou časově proměnné díky vzájemnému otáčení systému cívek na rotoru vůči systému cívek na statoru. Dále

budeme při odvozování matematického modelu asynchronního motoru vycházet z těchto předpokladů:

- 1.) motor je napájen třífázovou symetrickou sinusovou elektrickou soustavou,
- 2.) vinutí jednotlivých fází jsou sinusově rozložena po obvodu statoru (resp. rotoru),
- 3.) hodnoty odporů a indukčností jednotlivých fází statoru (resp. rotoru) jsou shodné,
- 4.) magnetizační charakteristiky jsou lineární,
- 5.) ztráty v železe jsou zanedbatelné.

Jednotlivé fáze statoru budeme označovat písmeny  $a, b, c$  a jednotlivé fáze rotoru budeme označovat písmeny  $A, B, C$ . Vlastní indukčnost libovolné fáze  $a$  se skládá z tzv. rozptylové  $L_\sigma$  a magnetizační indukčnosti  $L_m$  a vzhledem k předpokladu číslo tři dále platí, že  $L_a = L_b = L_c = L_{\sigma s} + L_{ms}$  a  $L_A = L_B = L_C = L_{\sigma r} + L_{mr}$ . Vzájemné indukčnosti mezi vinutími statoru resp. rotoru jsou funkcí úhlu, který osy těchto vinutí svírají tzn.

$$L_{ab} = L_{bc} = L_{ac} = L_{ms} \cos \alpha = -L_{ms}/2, \quad (19)$$

$$L_{AB} = L_{BC} = L_{AC} = L_{mr} \cos \alpha = -L_{mr}/2, \quad (20)$$

a vzájemné indukčnosti mezi statorovou a rotorovou fází jsou funkcí časově proměnného

úhlu  $\vartheta_{er}(\omega_{er} = \frac{d\vartheta_{er}}{dt}$ , kde  $\omega_{er}$  je elektrická úhlová rychlost rotoru) a dále platí, že

$$L_{aA} = L_{Aa} = L_{bB} = L_{Bb} = L_{cC} = L_{Cc} = L_{srm} \cos \vartheta_{er}, \quad (21)$$

$$L_{aB} = L_{Ba} = L_{bC} = L_{Cb} = L_{cA} = L_{Ac} = L_{srm} \cos \left( \vartheta_{er} + \frac{2}{3}\pi \right), \quad (22)$$

$$L_{aC} = L_{Ca} = L_{bA} = L_{Ab} = L_{cB} = L_{Bc} = L_{srm} \cos \left( \vartheta_{er} - \frac{2}{3}\pi \right). \quad (23)$$

Při splnění předpokladu, že vinutí jednotlivých fází jsou sinusově rozložena po obvodu statoru (resp. rotoru), se dá ukázat, že platí:

$$L_{srm} = \sqrt{L_{ms}L_{mr}}, \quad (24)$$

Pro jednotlivá vinutí asynchronního motoru můžeme napsat základní maticovou napěťovou rovnici [12]:

$$\mathbf{u}_M(t) = \mathbf{R}_M \mathbf{i}_M(t) + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_M(t), \quad (25)$$

kde

$$\mathbf{u}_M(t) = [u_a(t), u_b(t), u_c(t), u_A(t), u_B(t), u_C(t)]^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{i}_M(t) = [i_a(t), i_b(t), i_c(t), i_A(t), i_B(t), i_C(t)]^T, \quad (27)$$

$$\mathbf{R}_M = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_a(t) \\ \Psi_b(t) \\ \Psi_c(t) \\ \Psi_A(t) \\ \Psi_B(t) \\ \Psi_C(t) \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{abcABC}(\vartheta_{er}(t)) \cdot \mathbf{i}_M(t), \quad (29)$$

kde

$$\mathbf{L}_{abcABC}(\vartheta_{er}(t)) = \begin{bmatrix} L_a & L_{ab} & L_{ac} & L_{aA} & L_{aB} & L_{aC} \\ L_{ab} & L_b & L_{bc} & L_{bA} & L_{bB} & L_{bC} \\ L_{ac} & L_{bc} & L_c & L_{cA} & L_{cB} & L_{cC} \\ L_{aA} & L_{bA} & L_{cA} & L_A & L_{AB} & L_{AC} \\ L_{aB} & L_{bB} & L_{cB} & L_{AB} & L_B & L_{BC} \\ L_{aC} & L_{bC} & L_{cC} & L_{AC} & L_{BC} & L_C \end{bmatrix}. \quad (30)$$

kde  $\mathbf{u}_M(t)$  je vektor napětí statoru a rotoru,  $\boldsymbol{\Psi}(t)$  je vektor magnetického toku statoru a rotoru. Statorové a rotorové vinutí mají obvykle různý počet závitů ( $N_S, N_R$ ), různý krok vinutí ( $k_{VS}, k_{VR}$ ). Proto je výhodné, podobně jako u transformátoru, přepočítat rotorové veličiny na statorové pomocí převodního poměru  $k_u = \frac{k_{VS} N_S}{k_{VR} N_R}$ . Tím zajistíme, že se výsledné magnetomotorické napětí ve vzduchové mezeře motoru tímto přepočtem nezmění. Pro jednotlivé přepočtené veličiny rotorového obvodu pak platí:  $u'_A(t) = k_u u_A(t)$ ,  $L_{ms} = k_u L_{srm}$ ,  $i'_A(t) = \frac{i_A(t)}{k_u}$ ,  $R'_A = k_u^2 R_A$ ,  $L'_A = k_u^2 L_A$ ,  $L_{ms} = k_u^2 L_{mr}$ . V dalším budeme předpokládat, že jsou všechny rotorové veličiny přepočtené na stator a tam, kde jsme přepočtené veličiny označili čárkou je tak již dále nebudeme označovat.

Ze základní maticové napěťové rovnice asynchronního motoru (25) získáme pro statorová napětí  $u_a(t)$ ,  $u_b(t)$ ,  $u_c(t)$ :

$$u_a(t) = R_s i_a(t) + \frac{d\left((L_{\sigma s} i_a(t) + L_{m s} \operatorname{Re}[i_a(t) + a i_b(t) + a^2 i_c(t)] + L_{m s} \operatorname{Re}[(i_A(t) + a i_B(t) + a^2 i_C(t)) e^{j\theta_{er}}])\right)}{dt}, \quad (31)$$

$$u_b(t) = R_s i_b(t) + \frac{d\left(L_{\sigma s} i_b(t) + L_{m s} \operatorname{Re}[a^2 i_a(t) + i_b(t) + a i_c(t)] + L_{m s} \operatorname{Re}[(a^2 i_A(t) + i_B(t) + a i_C(t)) e^{j\theta_{er}}]\right)}{dt}, \quad (32)$$

$$u_c(t) = R_s i_c(t) + \frac{d\left(L_{\sigma s} i_c(t) + L_{m s} \operatorname{Re}[a i_a(t) + a^2 i_b(t) + i_c(t)] + L_{m s} \operatorname{Re}[(a i_A(t) + a^2 i_B(t) + i_C(t)) e^{j\theta_{er}}]\right)}{dt}, \quad (33)$$

kde  $\operatorname{Re}(z)$  znamená reálnou část komplexního čísla  $z$  a  $a = e^{j\frac{2}{3}\pi}$ .

Dále předpokládejme, že  $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$  (symetrický systém). Vynásobením rovnice (31)  $\frac{2}{3}$ , rovnice (32)  $\frac{2}{3}a$ , rovnice (33)  $\frac{2}{3}a^2$  a jejich sečtením získáme rovnici:

$$\frac{2}{3}(u_a(t) + a u_b(t) + a^2 u_c(t)) = R_s \left(\frac{2}{3}(i_a(t) + a i_b(t) + a^2 i_c(t))\right) + \frac{d\left(L_{\sigma s} \left(\frac{2}{3}(i_a(t) + a i_b(t) + a^2 i_c(t))\right) + \frac{3}{2} L_{m s} \left(\frac{2}{3}(i_a(t) + a i_b(t) + a^2 i_c(t))\right) + \frac{3}{2} L_{m s} \left(\frac{2}{3}(i_A(t) + a i_B(t) + a^2 i_C(t))\right) (\cos \theta_{er} + j \sin \theta_{er})\right)}{dt}, \quad (34)$$

Definujeme-li prostorový vektor statorového proudu resp. rotorového proudu resp. statorového napětí jako:

$$i_s^{-s}(t) = \frac{2}{3}(i_a(t) + a i_b(t) + a^2 i_c(t)), \quad (35)$$

resp.

$$i_r^{-r}(t) = \frac{2}{3}(i_A(t) + a i_B(t) + a^2 i_C(t)), \quad (36)$$

resp.

$$u_s^{-s}(t) = \frac{2}{3}(u_a(t) + a u_b(t) + a^2 u_c(t)). \quad (37)$$

Úpravou rovnice (34) získáme napěťovou rovnici statoru v obecném komplexním tvaru:

$$u_s^{-s}(t) = R_s i_s^{-s}(t) + \frac{d\Psi_s^{-s}(t)}{dt}, \quad (38)$$

kde



$$\Psi_s^{-s}(t) = (L_{\sigma s} + L_m)i_s^{-s}(t) + L_m i_r^{-r}(t)e^{j\theta_{er}(t)}, \quad (39)$$

kde  $L_m = \frac{3}{2}L_{ms}$ ,  $\Psi_s^{-s}(t)$  je prostorový vektor magnetického toku statoru.

Napěťovou rovnici rotoru v obecném komplexním tvaru získáme obdobným způsobem jako jsme odvodili rovnice (38), (39) a platí, že:

$$u_r^{-r}(t) = R_r i_r^{-r}(t) + \frac{d\Psi_r^{-r}(t)}{dt}, \quad (40)$$

kde

$$\Psi_r^{-r}(t) = (L_{\sigma r} + L_m)i_r^{-r}(t) + L_m i_s^{-s}(t)e^{-j\theta_{er}(t)}, \quad (41)$$

kde  $\Psi_r^{-r}(t)$  je prostorový vektor magnetického toku rotoru.

Ve výše uvedených rovnicích (38), (39), (40) a (41) jsou statorové proměnné popsány v systému os pevně svázaných se státorem  $s(\alpha\beta)$  zatímco rotorové proměnné jsou popsány v systému os pevně svázaných s rotorem. Transformací napěťových rovnic asynchronního motoru (38) a (40) do souřadného systému natočeného v okamžiku transformace vůči statoru o úhel  $\theta_b(t)$  a vůči rotoru o úhel  $\theta_b(t) - \theta_{er}(t)$  získáváme napěťové rovnice v obecném souřadném systému  $b(dq)$  rotujícím úhlovou rychlostí  $\omega_b = \frac{d\theta_b(t)}{dt}$ :

$$u_s^{-b}(t)e^{j\theta_b(t)} = R_s i_s^{-b}(t)e^{j\theta_b(t)} + \frac{d\Psi_s^{-b}(t)e^{j\theta_b(t)}}{dt}, \quad (42)$$

$$u_r^{-b}(t)e^{j(\theta_b(t)-\theta_{er}(t))} = R_r i_r^{-b}(t)e^{j(\theta_b(t)-\theta_{er}(t))} + \frac{d\Psi_r^{-b}(t)e^{j(\theta_b(t)-\theta_{er}(t))}}{dt}, \quad (43)$$

kde

$$\Psi_s^{-b}(t)e^{j\theta_b(t)} = (L_{\sigma s} + L_m)i_s^{-b}(t)e^{j\theta_b(t)} + L_m i_r^{-r}(t)e^{j(\theta_b(t)-\theta_{er}(t))}e^{j\theta_{er}(t)}, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Psi_r^{-b}(t)e^{j(\theta_b(t)-\theta_{er}(t))} &= (L_{\sigma r} + L_m)i_r^{-b}(t)e^{j(\theta_b(t)-\theta_{er}(t))} + \\ &L_m i_s^{-s}(t)e^{j\theta_b(t)}e^{-j\theta_{er}(t)}, \end{aligned} \quad (45)$$

po derivování a úpravě dostaneme výsledné napěťové rovnice asynchronního motoru v obecném rotujícím souřadném systému  $b(dq)$ :

$$u_s^{-b}(t) = R_s i_s^{-b}(t) + \frac{d\Psi_s^{-b}(t)}{dt} + j\omega_b \Psi_s^{-b}(t), \quad (46)$$

$$u_r^{-b}(t) = R_r i_r^{-b}(t) + \frac{d\Psi_r^{-b}(t)}{dt} + j(\omega_b - \omega_{er}(t))\Psi_r^{-b}(t), \quad (47)$$

kde

$$\Psi_s^{-b}(t) = (L_{\sigma s} + L_m)i_s^{-b}(t) + L_m i_r^{-b}(t), \quad (48)$$

$$\Psi_r^{-b}(t) = (L_{\sigma r} + L_m)i_r^{-b}(t) + L_m i_s^{-b}(t), \quad (49)$$

Rovnice mohou být zapsány i ve skalární formě, pokud prostorové vektory rozdělíme na jejich reálnou ( $d$ ) a imaginární část ( $q$ ):

$$u_{sd}(t) = R_s i_{sd}(t) + \frac{d\Psi_{sd}(t)}{dt} - \omega_b \Psi_{sq}(t), \quad (50)$$

$$u_{sq}(t) = R_s i_{sq}(t) + \frac{d\Psi_{sq}(t)}{dt} + \omega_b \Psi_{sd}(t), \quad (51)$$

$$u_{rd}(t) = R_r i_{rd}(t) + \frac{d\Psi_{rd}(t)}{dt} - (\omega_b - \omega_{er}(t))\Psi_{rq}(t), \quad (52)$$

$$u_{rq}(t) = R_r i_{rq}(t) + \frac{d\Psi_{rq}(t)}{dt} + (\omega_b - \omega_{er}(t))\Psi_{rd}(t), \quad (53)$$

kde

$$\Psi_{sd}(t) = (L_{\sigma s} + L_m)i_{sd}(t) + L_m i_{rd}(t), \quad (54)$$

$$\Psi_{sq}(t) = (L_{\sigma s} + L_m)i_{sq}(t) + L_m i_{rq}(t), \quad (55)$$

$$\Psi_{rd}(t) = (L_{\sigma s} + L_m)i_{rd}(t) + L_m i_{sd}(t), \quad (56)$$

$$\Psi_{rq}(t) = (L_{\sigma s} + L_m)i_{rq}(t) + L_m i_{sq}(t), \quad (57)$$

Pro napětí statoru  $u_s^{-s}$  v systému os pevně svázaných se statorem ( $\alpha\beta$ ) dále platí:

$$i_{C_{LM}}^{-s}(t) = C_{LM} \frac{du_s^{-s}(t)}{dt}, \quad (58)$$

kde  $i_C^{-s}(t) = i_L^{-s}(t) - i_s^{-s}(t)$ ,  $i_L^{-s}(t)$  je proud napájecího vedení,  $C_{LM}$  je výsledná kapacita v místě připojení motoru k napájecímu vedení. Transformací rovnice (58) do obecného souřadnicového systému  $b(dq)$  získáváme:

$$i_{C_{LM}}^{-b}(t)e^{j\theta_b} = C_{LM} \frac{d(u_s^{-b}(t)e^{j\theta_b})}{dt}, \quad (59)$$

po derivování a úpravě dostaneme výslednou rovnici proudu  $i_{C_{LM}}^{-b}(t)$  v obecném rotujícím souřadném systému  $b(dq)$  :

$$i_{C_{LM}}^{-b}(t) = C_{LM} \frac{du_s^{-b}(t)}{dt} + j\omega_b(t)C_{LM}u_s^{-b}(t). \quad (60)$$

Činný výkon, odebíraný z elektrického zdroje, lze vyjádřit pomocí prostorových vektorů obecným vztahem:

$$P(t) = A \operatorname{Re}(u_s^{-b}(t) i_s^{-b*}(t)), \quad (61)$$

po dosazení z (46) dostaneme:

$$P(t) = A \operatorname{Re} \left( R_s i_s^{-b}(t) i_s^{-b*}(t) + \frac{d\Psi_s^{-b}(t)}{dt} i_s^{-b*}(t) + j\omega_b \Psi_s^{-b}(t) i_s^{-b*}(t) \right), \quad (62)$$

Porovnáním ztrát ve vinutí statoru získáme hodnotu koeficientu  $A$ . Vzhledem k výše uvedené definici prostorového vektoru platí  $(i_{sd}(t))^2 + (i_{sq}(t))^2 = (I_{1m})^2$  a tedy  $3R_s I_1 = AR_s (I_{1m})^2 = AR_s (\sqrt{2} I_1)^2$  kde  $I_{1m}$  je amplituda a  $I_1$  efektivní hodnota napájecího fázového proudu. Z výše uvedeného tak vyplývá, že hodnota koeficient  $A$  je rovna  $\frac{3}{2}$ . Výkon přiváděný do motoru lze tedy rozdělit na tři části. První představuje již zmíněné tepelné ztráty ve vinutí statoru. Druhá část reprezentuje časovou změnu energie magnetického pole v indukčnostech. Zbytek výkonu vstupující do vzduchové mezery (označuje se  $P_\delta(t)$ ) se posléze mění v mechanický výkon na hřídeli (mechanické ztráty zanedbáváme) a rotorové ztráty. Po dosazení za  $i_s^{-b*}(t) = i_{sd}(t) - j i_{sq}(t)$  a  $\Psi_s^{-b}(t) = \Psi_{sd}(t) + j \Psi_{sq}(t)$  dostaneme:

$$P_\delta(t) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left( j\omega_b \Psi_s^{-b}(t) i_s^{-b*}(t) \right) = \frac{3}{2} \operatorname{Re} \left( j\omega_b \left( \Psi_{sd}(t) i_{sd}(t) - j \Psi_{sd}(t) i_{sq}(t) + j \Psi_{sq}(t) i_{sd}(t) + \Psi_{sq}(t) i_{sq}(t) \right) \right) = \frac{3}{2} \omega_b \left( \Psi_{sd}(t) i_{sq}(t) - \Psi_{sq}(t) i_{sd}(t) \right), \quad (63)$$

Pro moment motoru platí:

$$T(t) = \frac{P_{mech}(t)}{\omega_r(t)} = \frac{P_\delta(t)(1-s(t))}{\omega_r(t)}, \quad (64)$$

kde  $s(t) = \frac{\omega_b - \omega_r(t) p_p}{\omega_b(t)}$  je skluz rotoru,  $p_p$  je počet pólů motoru a  $\omega_r(t)$  je mechanická úhlová rychlost rotoru (rad/s). Dosazením (63) do (64) a úpravou získáme výsledný vztah pro moment:

$$T(t) = \frac{3}{2} p_p \left( \Psi_{sd}(t) i_{sq}(t) - \Psi_{sq}(t) i_{sd}(t) \right) = \frac{3}{2} p_p L_m \left( i_{rd}(t) i_{sq}(t) - i_{rq}(t) i_{sd}(t) \right), \quad (65)$$

Rovnice (46), (48), (47), (49) a (65) tvoří soustavu pěti vektorových rovnic pro devět neznámých  $u_s^{-b}(t)$ ,  $i_s^{-b}(t)$ ,  $u_r^{-b}(t)$ ,  $i_r^{-b}(t)$ ,  $\Psi_s^{-b}(t)$ ,  $\Psi_r^{-b}(t)$ ,  $T(t)$ ,  $\omega_{er}(t)$ ,  $\omega_b(t)$ . Pro její řešení je nutné zvolit čtyři neznámé jako nezávislé proměnné, vždy volíme úhlovou

rychlost otáčení  $\omega_b(t)$  a většinou dále volíme  $u_s^{-b}(t)$ ,  $u_r^{-b}(t)$ , a  $\omega_{er}(t)$ . Pro rotor nakrátko platí  $u_r^{-b}(t) = 0$ . Soustavu rovnic (46), (48), (47), (49) a (65) můžeme doplnit ještě o pohybovou rovnici pohonu:

$$T(t) = J \frac{1}{p_p} \frac{d\omega_{er}(t)}{dt} + T_L(t), \quad (66)$$

kde  $T_L(t)$  je zátěžný moment a  $J$  moment setrvačnosti. Výraz  $J \frac{1}{p_p} \frac{d\omega_{er}(t)}{dt}$  je nazýván dynamickým momentem.

Vztah (35) resp. (37) definuje Clarkeové transformaci ze systému tří os ( $a, b, c$ ) rotující nulovou úhlovou rychlostí (třífázový stacionární systém) do systému dvou os ( $\alpha, \beta$ ) natočenému vůči stacionárnímu souřadnicovému systému  $abc$  o úhel  $\theta_b(t) = 0$ . Clarkeové transformace je speciálním případem Parkovy transformace, kterou odvodíme z výše uvedeného vztahu (35) resp. (37) [20]. Pro Parkovu transformaci obecných proměnných ve fázích  $a, b, c$  ze stacionárního souřadnicového systému  $abc$  do obecného rotujícího souřadnicového systému  $b(dq0)$  platí vztah [12]:

$$\mathbf{x}_{dq0,0}(t) = \mathbf{T}_{dq0,0}(\theta_b(t)) \cdot \mathbf{x}_{abc,0}(t), \quad (67)$$

kde

$$\mathbf{T}_{dq0,0}(\theta_b(t)) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(-\theta_b(t)) & \cos(-\theta_b(t) + \frac{2\pi}{3}) & \cos(-\theta_b(t) - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(-\theta_b(t)) & \sin(-\theta_b(t) + \frac{2\pi}{3}) & \sin(-\theta_b(t) - \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

kde  $\mathbf{x}_{abc,0}(t) = [x_a(t), x_b(t), x_c(t)]^T$  je vektor obecných fázových proměnných ve stacionárním souřadnicovém systému  $abc$ ,  $\mathbf{x}_{dq,0}(t) = [x_d(t), x_q(t), x_0(t)]^T$  je vektor transformovaných proměnných v souřadnicovém systému  $dq0$ ,  $\mathbf{T}_{dq,0}(\theta_b(t))$  je transformační matice  $dq0$ . Pro inverzní Parkovu transformaci potom platí:

$$\mathbf{x}_{abc,0}(t) = \mathbf{T}_{abc,0}(\theta_b(t)) \cdot \mathbf{x}_{dq0,0}(t), \quad (69)$$

kde

$$\mathbf{T}_{abc,0}(\theta_b(t)) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta_b(t)) & \sin(-\theta_b(t)) & 1 \\ \cos(-\theta_b(t) + \frac{2\pi}{3}) & \sin(-\theta_b(t) + \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(-\theta_b(t) - \frac{2\pi}{3}) & \sin(-\theta_b(t) - \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

kde  $\mathbf{T}_{abc,0}(\theta_b(t))$  je inverzní transformační matice. Transformační vztahy pro obecné proměnné ve fázích  $a, b, c$  v souřadnicovém systému  $abc$  rotujícím ulohovou rychlostí  $\omega_{abc\_rot}(t) = \frac{d\theta_{abc\_rot}(t)}{dt}$  jsou obdobné jako pro obecné proměnné ve fázích  $a, b, c$  ve stacionárním souřadnicovém systému  $abc$ . Souřadnicový systém  $dq0$  je v okamžiku transformace natočen vůči rotujícímu souřadnicovému systému  $abc$  o úhel  $\theta_b(t) - \theta_{abc\_rot}(t)$  ve vztazích (67), (68) resp. (69), (70) se tak místo úhlu  $\theta_b(t)$  použije úhel  $\theta_b(t) - \theta_{abc\_rot}(t)$ .

Ze vztahu (67) pak pro Clarkeové transformaci do souřadnicového systému  $dq0$  natočenému vůči stacionárnímu souřadnicovému systému  $abc$  o úhel  $\theta_b(t) = 0$  vyplývá:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta 0,0}(t) = \mathbf{T}_{dq0,0}(0) \cdot \mathbf{x}_{abc,0}(t), \quad (70)$$

kde  $\mathbf{x}_{\alpha\beta 0,0}(t) = [x_\alpha(t), x_\beta(t), x_0(t)]^T$  je vektor transformovaných proměnných v souřadnicovém systému  $\alpha\beta 0$ . Pro inverzní Clarkeové transformaci ze souřadnicového systému  $\alpha\beta 0$  do stacionárního souřadnicového systému  $abc$  potom ze vztahu (69) získáme:

$$\mathbf{x}_{abc,0}(t) = \mathbf{T}_{abc,0}(0) \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta 0,0}(t), \quad (71)$$

Při transformaci do souřadnicového systému  $\alpha\beta 0$  za předpokladu, že souřadnicový systém  $abc$  je stacionární a transformované proměnné symetrické ( $x_a(t) + x_b(t) + x_c(t) = 0$ ) platí, že  $x_\alpha(t) = x_a(t)$  tj. hodnota obecné proměnné ve fázi  $a$  je rovna hodnotě složky  $\alpha$  transformované proměnné. Transformační vztahy pro obecné proměnné ve fázích  $a, b, c$  v souřadnicovém systému  $abc$  rotujícím ulohovou rychlostí  $\omega_{abc\_rot}(t) = \frac{d\theta_{abc\_rot}(t)}{dt}$  jsou obdobné jako pro obecné proměnné ve fázích  $a, b, c$  ve stacionárním souřadnicovém systému  $abc$  viz výše.

Dále budeme prostorové vektory v obecném rotujícím souřadnicovém systému  $dq0$  resp. v souřadnicovém systému  $\alpha\beta0$  označovat písmenem  $-b$  resp.  $-s$  v horním indexu.

Pro rovnice nulové složky statorového a rotorového napětí platí:

$$u_{s0}(t) = R_s i_{s0}(t) + \frac{d\psi_{s0}(t)}{dt}, \quad (72)$$

$$\frac{du_{s0}(t)}{dt} = \frac{ic_{LM0}(t)}{c_{LM}}, \quad (73)$$

$$u_{r0}(t) = R_r i_{r0}(t) + \frac{d\psi_{r0}(t)}{dt}, \quad (74)$$

kde

$$\Psi_{s0}(t) = L_{s0} i_{s0}(t), \quad (75)$$

$$\Psi_{r0}(t) = L_{r0} i_{r0}(t), \quad (76)$$

kde  $i_{s0}(t)$  je nulová složka statorového proudu,  $\Psi_{s0}(t)$  je nulová složka magnetického toku statoru,  $L_{s0}$  je homopolární statorová indukčnost,  $i_{c_{LM0}}(t) = i_{L0}(t) - i_{s0}(t)$ ,  $i_{L0}(t)$  je nulová složka proudu napájecího vedení,  $i_{r0}(t)$  je nulová složka rotorového proudu,  $\Psi_{r0}(t)$  je nulová složka magnetického toku rotoru,  $L_{r0}$  je homopolární rotorová indukčnost. Velikost  $L_{s0}$  resp.  $L_{r0}$  je rovna nebo menší než  $L_{\sigma s}$  resp.  $L_{\sigma r}$ . V dalším budeme předpokládat, že  $L_{s0} = L_{\sigma s}$  resp.  $L_{r0} = L_{\sigma r}$ . Nulová složka se nepodílí na přeměně energie.

Dynamický model asynchronního motoru, zapsaný ve formě stavové rovnice, v obecném rotujícím souřadném systému  $dq0$ , je dle schéma na obrázku 3 definován vztahem:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{M,\psi}(t) = \mathbf{A}_M(\omega_b) \mathbf{x}_{M,i}(t) + \mathbf{B}_M(t), \quad (77)$$

kde

$$\mathbf{x}_{M,\psi}(t) = [\Psi_s^{-b}(t), \Psi_{s0}(t), \Psi_r^{-b}(t), \Psi_{r0}(t)]^T, \quad (78)$$

$$\mathbf{x}_{M,i}(t) = [i_s^{-b}(t), i_{s0}(t), i_r^{-b}(t), i_{r0}(t)]^T, \quad (79)$$

$$\mathbf{A}_M(\omega_b) = \begin{bmatrix} -R_s - j\omega_b L_s & 0 & -j\omega_b L_M & 0 \\ 0 & -(R_s + 3R_{SN}) & 0 & 0 \\ -j\Delta\omega L_M & 0 & -R_r - j\Delta\omega L_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(R_r + 3R_{RN}) \end{bmatrix}, \quad (80)$$

$$\mathbf{B}_M(t) = [u_{C_M}^{-b}(t), u_{C_{M0}}(t), 0, 0]^T, \quad (81)$$

kde  $\mathbf{A}_M(\omega_b)$  je matice dynamiky systému asynchronního motoru,  $\mathbf{x}_{M,i}(t)$  a  $\mathbf{x}_{M,\psi}(t)$  jsou sloupcové vektory stavových proměnných,  $\mathbf{B}_M(t)$  je matice vstupů systému,  $\Delta\omega = \omega_b(t) - \omega_{er}(t)$ ,  $L_S = L_{\sigma S} + L_M$ ,  $L_R = L_{\sigma R} + L_M$ ,  $u_{C_M}^{-b}(t)$  je prostorový vektor napětí vedení v místě připojení motoru ( $u_{C_M}^{-b}(t) = u_S^{-b}(t)$ ),  $u_{C_{M0}}(t)$  je nulová složka napětí vedení v místě připojení motoru ( $u_{C_{M0}}(t) = u_{C_{S0}}(t)$ ). Transformací stavové rovnice dynamického modelu asynchronního motoru (77) do souřadnicového systému  $\alpha\beta 0$  (systému os pevně svázaných se státorem) získáme stavovou rovnici:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{M,\psi}(t) = \mathbf{A}_M(0) \mathbf{x}_{M,i}(t) + \mathbf{B}_M(t), \quad (82)$$

Odvozením pro moment motoru v souřadnicovém systému  $\alpha\beta 0$  získáme vztah:

$$T(t) = \frac{3}{2} p_p L_m (i_{r\alpha}(t) i_{s\beta}(t) - i_{r\beta}(t) i_{s\alpha}(t)), \quad (83)$$

přidáním stavové pohybové rovnice pohonu (66) získáme úplný dynamický model asynchronního motoru, zapsaného ve formě prostorových vektorů, v souřadnicovém systému  $\alpha\beta 0$ , který je tvořen soustavou rovnic (82), (83) a (66).

## 2.2. DYNAMICKÝ MODEL VEDENÍ

Dynamický model vedení, zapsaný v prostorových vektorech, v obecném rotujícím souřadném systému  $dq0$ , dle schéma na obrázku 3 je definován vztahem:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{PI}(t) = \mathbf{A}_{PI}(\omega_b) \mathbf{x}_{PI}(t) + \mathbf{B}_{PI}(t), \quad (84)$$

kde

$$\mathbf{x}_{PI}(t) = [i_L^{-b}(t), i_{L0}(t), u_{C_M}^{-b}(t), u_{C_{M0}}(t)]^T, \quad (85)$$

$$\mathbf{A}_{PI}(\omega_b) = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L_L} - j\omega_b & 0 & -\frac{1}{L_L} & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} & 0 & -\frac{1}{L_L} \\ \frac{1}{C_{PI,L} + C_M} & 0 & -j\omega_b & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{PI,L} + C_M} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

$$\mathbf{B}_{PI}(t) = \left[ \frac{u_{C_{PI,S}}^{-b}(t)}{L_L}, \frac{u_{C_{PI,S0}}(t)}{L_L}, -\frac{i_S^{-b}(t)}{C_{PI,L}+C_M}, -\frac{i_{S0}(t)}{C_{PI,L}+C_M} \right]^T, \quad (87)$$

kde  $\mathbf{A}_{PI}(\omega_b)$  je matice dynamiky systému vedení,  $\mathbf{x}_{PI}(t)$  je sloupcový vektor stavových proměnných,  $\mathbf{B}_{PI}(t)$  je matice vstupů vedení,  $i_{L0}(t)$  je nulová složka proudu vedení,  $u_{C_{PI,S}}^{-b}(t)$  je prostorový vektor napětí vedení v místě připojení vedení k vypínači (prostorový vektor napětí na kapacitoru  $C_{PI,S}$ ),  $u_{C_{PI,S0}}(t)$  je nulová složka napětí vedení v místě připojení vedení k vypínači (nulová složka napětí na kapacitoru  $C_{PI,S}$ ). Transformací stavové rovnice dynamického modelu vedení (84) do souřadnicového systému  $\alpha\beta 0$  získáme stavovou rovnici:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{PI}(t) = \mathbf{A}_{PI}(0) \mathbf{x}_{PI}(t) + \mathbf{B}_{PI}(t), \quad (88)$$

V této části jsme pro zjednodušení, při odvozování dynamického modelu, modelovali vedení jako jeden PI článek tj. jako obvod se soustřednými parametry. Pro zohlednění vlnových přechodných dějů je v některých případech nutné vedení modelovat jako obvod s rozprostřenými parametry. Při řešení telegrafní rovnice, popisující vlnové děje na vedení, lze postupovat tak, že vedení se nahradí kaskádou dostatečně velkého počtu PI článků se soustřednými parametry. Pro maximální délku jednoho PI článku by mělo platit [21]:

$$l \leq \frac{1}{2\pi f_{max} \sqrt{L_{PI} \frac{C_{PI}}{2}}}, \quad (89)$$

kde  $l$  je délka PI článku,  $f_{max}$  maximální frekvence přechodného děje,  $L_{PI} = L_L/l$  je indukčnost PI článku na jednotku délky,  $C_{PI}$  je kapacita PI článku na jednotku délky. V případové studii v části 5, pro  $f_{max} = f_3$  (viz část 2.1), jsme pro modelování vedení dle schéma na obrázku 3 použili pět PI článků.

Uvedený model vedení je modelem frekvenčně nezávislým tj. parametry vedení  $R_L$ ,  $L_L$ ,  $C_{PI,S}$ ,  $C_{PI,L}$  jsou vypočteny (změřeny) pro danou frekvenci. V případové studii vypočteme parametry vedení pro hlavní frekvenci vysokofrekvenčního proudu  $f_4$  (viz část 2.1 [16]) pro zohlednění skinefektu, jev blízkosti (proximity effect) nebudeme v tuto



chvíli uvažovat. Dojde-li k opětovnému průrazu ve vypínači a ke vzniku vysokofrekvenčního proudu uzavírá se tento v případě kabelového vedení přes stínění daného fázového vodiče. Výsledný odpor  $R_L$  resp. indukčnost  $L_L$  kabelového vedení tak zahrnuje odpor fázového vodiče i stínění resp. indukčnost fázového vodiče i stínění.

### 2.3. DYNAMICKÝ MODEL VYSOKONAPĚŤOVÉHO VAKUOVÉHO VYPÍNAČE A PŘIPOJOVACÍHO VEDENÍ

Dynamický model vysokonapěťového vypínače a připojovacího vedení, zapsaný v prostorových vektorech, v obecném rotujícím souřadném systému  $dq0$ , dle schéma na obrázku 3 je definován vztahem:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{BVCB}(t) = \mathbf{A}_{BVCB}(\omega_b) \mathbf{x}_{BVCB}(t) + \mathbf{B}_{BVCB}(t), \quad (90)$$

kde

$$\mathbf{x}_{BVCB}(t) = [i_B^{-b}(t), i_{B0}(t), u_{C_{PI,S}}^{-b}(t), u_{C_{PI,S}0}(t), i_P^{-b}(t), i_{P0}(t), u_{C_{CBP}}^{-b}(t), u_{C_{CBP}0}(t)]^T, \quad (91)$$

$$\mathbf{A}_{BVCB}(\omega_b) = \begin{bmatrix} -j\omega_b & 0 & -\frac{1}{L_{B2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_{B2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_{PI,S}} & 0 & -j\omega_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{PI,S}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{CBP}}{L_{CBP}} - j\omega_b & 0 & -\frac{1}{L_{CBP}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{CBP}}{L_{CBP}} & 0 & -\frac{1}{L_{CBP}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{CBP}} & 0 & -j\omega_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{CBP}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$\mathbf{B}_{BVCB} = \left[ \frac{u_G^{-b}(t) - u_{CB}^{-b}(t)}{L_{B2}}, \frac{u_{CG0}(t) - u_{CB0}(t)}{L_{B2}}, -\frac{i_L^{-b}(t)}{C_{PI,S}}, -\frac{i_{L0}(t)}{C_{PI,S}}, \frac{u_{CB}^{-b}(t)}{L_{CBP}}, \frac{u_{CB0}(t)}{L_{CBP}}, 0, 0 \right]^T, \quad (93)$$

kde  $\mathbf{A}_{BVCB}(\omega_b)$  je matice dynamiky systému vysokonapěťového vakuového vypínače a připojovacího vedení,  $\mathbf{x}_{BVCB}(t)$  je sloupcový vektor stavových proměnných,  $\mathbf{B}_{BVCB}$  je matice vstupů vedení,  $i_B^{-b}(t)$  je prostorový vektor proudu připojovacího vedení,  $i_{B0}(t)$  je nulová složka proudu připojovacího vedení,  $u_{CB}^{-b}(t)$  je prostorový vektor napětí na

vypínači,  $u_{CB0}(t)$  je nulová složka napětí na vypínači,  $u_{C_G}^{-b}(t)$  je prostorový vektor napětí na kapacitoru  $C_G$ ,  $u_{C_G0}(t)$  je nulová složka napětí na kapacitoru  $C_G$ ,  $i_p^{-b}(t)$  je prostorový vektor parazitního proudu vypínače,  $i_{p0}(t)$  je nulová složka parazitního proudu vypínače,  $u_{C_{CBP}}^{-b}(t)$  je prostorový vektor napětí na kapacitoru  $C_{CBP}$ ,  $u_{C_{CBP}0}(t)$  je nulová složka napětí na kapacitoru  $C_{CBP}$ .

Pro napětí na vypínači  $\mathbf{u}_{CB\_dq}(t) = [u_{CB\_d}(t), u_{CB\_q}(t), u_{CB\_0}(t)]^T$  jako funkci proudu vypínačem  $\mathbf{i}_{CB\_dq0}(t) = [i_{CB\_d}(t), i_{CB\_q}(t), i_{CB\_0}(t)]^T = \mathbf{i}_{B\_dq0}(t) - \mathbf{i}_{P\_dq0}(t)$  v systému souřadnic  $dq0$  můžeme odvodit vztah definující vazby mezi složkami  $d$ ,  $q$  a  $0$  v případě vzniku obvodové nesymetrie v důsledku spínání vypínače ve tvaru:

$$\mathbf{u}_{CB\_dq0}(t) = \mathbf{T}_{CB\_dq0}(\theta_b(t))\mathbf{i}_{CB\_dq0}(t), \quad (94)$$

kde  $\mathbf{T}_{CB\_dq0}(\theta_b(t))$  je vazební matice mezi napětími a proudy vypínače v souřadnicovém systému  $dq0$ .

Transformací stavové rovnice (90) do souřadnicového systému  $\alpha\beta0$  získáme stavovou rovnici:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{BVCB}(t) = \mathbf{A}_{BVCB}(0)\mathbf{x}_{BVCB}(t) + \mathbf{B}_{BVCB}(t). \quad (95)$$

Při odvozování vazební matice  $\mathbf{T}_{CB\_dq0}(0)$  mezi napětími a proudy vypínače v souřadnicovém systému  $\alpha\beta0$  vycházíme ze vztahu (70) a pro  $\mathbf{u}_{CB\_a\beta0}(t)$  jako funkci napětí na vypínači  $\mathbf{u}_{CB\_abc}(t) = [u_{CB\_a}(t), u_{CB\_b}(t), u_{CB\_c}(t)]^T$  ve stacionárním souřadnicovém systému  $abc$  platí:

$$u_{CB\_a}(t) = \frac{2}{3}u_{CB\_a}(t) - \frac{1}{3}u_{CB\_b}(t) - \frac{1}{3}u_{CB\_c}(t), \quad (96)$$

$$u_{CB\_b}(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}u_{CB\_b}(t) - \frac{\sqrt{3}}{3}u_{CB\_c}(t), \quad (97)$$

$$u_{CB\_0}(t) = \frac{1}{3}u_{CB\_a}(t) + \frac{1}{3}u_{CB\_b}(t) + \frac{1}{3}u_{CB\_c}(t), \quad (98)$$

kde  $u_{CB\_a}(t) = R_a i_{CB\_a}(t)$ ,  $u_{CB\_b}(t) = R_b i_{CB\_b}(t)$ ,  $u_{CB\_c}(t) = R_c i_{CB\_c}(t)$ ,  $R_a$  resp.  $R_b$  resp.  $R_c$  je odpor vypínače ve fázi  $a$  resp.  $b$  resp.  $c$ ,  $\mathbf{i}_{CB\_abc}(t) = [i_{CB\_a}(t), i_{CB\_b}(t), i_{CB\_c}(t)]^T$  je

vektor složek proudu vypínačem ve stacionárním souřadnicovém systému  $abc$ . Pro  $\mathbf{i}_{CB\_abc}(t)$  jako funkci  $\mathbf{i}_{CB\_\alpha\beta}(t)$  pomocí vztahu (71) platí vztah:

$$i_{CB\_a}(t) = i_{CB\_a}(t) + i_{CB\_0}(t), \quad (99)$$

$$i_{CB\_b}(t) = -\frac{1}{2}i_{CB\_a}(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}i_{CB\_b}(t) + i_{CB\_0}(t), \quad (100)$$

$$i_{CB\_c}(t) = -\frac{1}{2}i_{CB\_a}(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}i_{CB\_b}(t) + i_{CB\_0}(t), \quad (101)$$

Dosazením (99), (100), (101) do (96), (97), (98) a úpravou dostaneme výsledný vztah mezi  $\mathbf{u}_{CB\_\alpha\beta 0}(t)$  a  $\mathbf{i}_{CB\_\alpha\beta 0}(t)$  definující vazby mezi složkami  $\alpha$ ,  $\beta$  a 0:

$$\mathbf{u}_{CB\_ \alpha\beta 0}(t) = \mathbf{T}_{CB\_dq0}(0)\mathbf{i}_{CB\_ \alpha\beta 0}(t), \quad (102)$$

kde

$$\mathbf{T}_{CB\_dq0}(0) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}R_a + \frac{1}{6}R_b + \frac{1}{6}R_c & -\frac{\sqrt{3}}{6}R_b + \frac{\sqrt{3}}{6}R_c & \frac{2}{3}R_a - \frac{1}{3}R_b - \frac{1}{3}R_c \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}R_b + \frac{\sqrt{3}}{6}R_c & \frac{1}{2}R_b + \frac{1}{2}R_c & \frac{\sqrt{3}}{3}R_b - \frac{\sqrt{3}}{3}R_c \\ \frac{1}{3}R_a - \frac{1}{6}R_b - \frac{1}{6}R_c & \frac{\sqrt{3}}{6}R_b - \frac{\sqrt{3}}{6}R_c & \frac{1}{3}R_a + \frac{1}{3}R_b + \frac{1}{3}R_c \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Předmětem našeho zájmu je simulace spínacích přechodových dějů při vypínání malých induktivních proudů vakuovým vypínačem. Velikost odporu vakuového vypínače ( $cbPhResistance = R_X = R_{CB\_ON}$  (fáze  $x$  vypínače je zapnuta, proměnná  $x$  zastupuje fázi  $a$ ,  $b$ , nebo  $c$ ),  $cbPhResistance = R_X = R_{CB\_OFF}$  (fáze  $x$  vypínače je vypnuta)) v různých fázích je pak řízena algoritmem 1 uvedeným v [19], popisující chování vypínače při vypínání malých induktivních proudů včetně možnosti vypnutí odseknutím proudu v nadcházející půl periodě nebylo-li vypnutí úspěšné. Model implementovaný v algoritmu 1 je deterministickým modelem a jako hodnoty parametrů  $\overline{I_{chop}}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  budeme v algoritmu 1 volit jejich střední hodnoty [22]. Typické hodnoty parametrů  $\overline{I_{chop}}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  viz [7, 8].

## 2.4. DYNAMICKÝ MODEL SÍTĚ

Dynamický model sítě, zapsaný v prostorových vektorech, v obecném rotujícím souřadném systému  $dq0$ , dle schéma na obrázku 3 je definován vztahem:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_G(t) = \mathbf{A}_G(\omega_b) \mathbf{x}_G(t) + \mathbf{B}_G(t), \quad (104)$$

kde

$$\mathbf{x}_G(t) = [i_G^{-b}(t), i_{G0}(t), u_{C_G}^{-b}(t), u_{C_{G0}}(t)]^T, \quad (105)$$

$$\mathbf{A}_G(\omega_b) = \begin{bmatrix} -\frac{R_G}{L_G} - j\omega_b & 0 & -\frac{1}{L_G} & 0 \\ 0 & -\frac{(R_G+3R_{GN})}{L_G} & 0 & -\frac{1}{L_G} \\ \frac{1}{C_G} & 0 & -j\omega_b & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_G} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (106)$$

$$\mathbf{B}_G = \left[ \frac{u^{-b}(t)}{L_G}, \frac{u_0(t)}{L_G}, -\frac{i_B^{-b}(t)}{C_G}, -\frac{i_{B0}(t)}{C_G} \right]^T, \quad (107)$$

kde  $\mathbf{A}_G(\omega_b)$  je matice dynamiky systému elektrické sítě,  $\mathbf{x}_G(t)$  je vektor stavových proměnných,  $\mathbf{B}_G$  je matice vstupů vedení,  $i_G^{-b}(t)$  je prostorový vektor proudu elektrické sítě,  $i_{G0}(t)$  je nulová složka proudu elektrické sítě,  $u^{-b}(t)$  je prostorový vektor napájecího napětí,  $u_0(t)$  je nulová složka napájecího napětí. Transformací stavové rovnice dynamického modelu sítě (8) do souřadnicového systému  $\alpha\beta 0$  získáme stavovou rovnici:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_G(t) = \mathbf{A}_G(0) \mathbf{x}_G(t) + \mathbf{B}_G(t). \quad (108)$$

### 3. ZÁVĚR

Obvození dynamického modelu vysokonapěťového vakuového vypínače a asynchronního motoru v prostorových vektorech v souřadnicích  $\alpha\beta 0$  nám umožňuje simulovat spínací přechodné děje v různých provozních stavech asynchronního motoru (ustálený stav, přechodné děje). Dynamický model zjednodušuje reprezentaci systému a poskytuje lepší interpretaci vícefázových obvodů a je užitečným nástrojem pro modelování silnoproudých systémů, kde jsou přítomny měniče výkonové elektroniky. Vznik nesymetrie v soustavě například v důsledku spínání způsobí, že se rozvodný systém stane nerovnovázným a transformované rovnice složek  $\alpha, \beta, 0$  nebudou vzájemně nezávislé. Proto bylo nutné odvodit vazební matici mezi napětími a proudy vypínače v souřadnicovém systému  $\alpha\beta 0$ . Chování dynamického modelu při přechodu ze stavu, kdy je systém symetrický do stavu, kdy se rozvodný systém stane nerovnovázným, v důsledku spínání, a zpět do stavu, kdy je systém opět symetrický tj. obvod je úspěšně vypnut byl experimentálně ověřen na laboratorním modelu. Výhody a nevýhody odvozeného dynamického modelu byly ukázány na případové studii. Předmětem případové studie byly spínací přepětí, která se vyskytují při vypínání malých induktivních proudů vakuovým vypínačem. Dynamický model byl dále rozšířen o ochrany proti spínacím přepětím ve formě svodiče přepětí a RC členu pro oba možné způsoby připojení tj. na svorkovnici motoru, nebo na připojovací svorkovnici vedení. Ukázalo se, že svodič přepětí neposkytuje tak dobrou ochranu proti spínacím přepětím jako RC člen a v případě jeho připojení na připojovací svorkovnici vedení neposkytuje dostatečnou ochranu proti spínacím přepětím na svorkovnici asynchronního motoru. V závěru práce byl dynamický model rozšířen o model frekvenčně závislého vedení v časové oblasti pro zohlednění frekvenční závislosti podélných parametrů vedení. Pro ověření správnosti výsledků dynamického modelu, byly simulační výsledky porovnány se změřenými výsledky na vysokonapěťovém motoru a rovněž se simulačními výsledky

matematického modelu zkušebního obvodu v souladu s IEC 62271-110 řešeného metodou uzlových napětí (metoda EMTP). Srovnání potvrzuje schopnost dynamického modelu simulovat kritické stavy rozvodného systému numericky.

Další práce by se měly zaměřit na odvození modelu vakuového vypínače pro případ jeho zapínání a na zpřesnění nelineárního modelu svodiče přepětí. Simulační výsledky v části 7.1.1 a 7.1.2 [16] by dále měly být ověřeny měřeními na skutečném asynchronním motoru v provozu. V dalším kroku by měl být model implementován do komplexnějšího rozvodného systému zahrnující měniče výkonové elektroniky.

## LITERATURA

1. Novak, P.; Haim, M.; Beer, P.; Kaltenborn, U.; Melquiond, S. Switching of Small Inductive Currents Using Vacuum CircuitBreakers. In Proceedings of the 21st International Conference on Electricity Distribution, Frankfurt, Germany, 6 - 9 June 2011.
2. Penkov, D.; Vollet, C.; De Metz-Noblat, B.; Nikodem, R. Overvoltage protection study on vacuum breaker switched MV Motors. In Proceedings of the 5th Petroleum and Chemical Industry Conference Europe – Electrical and Instrumentation Applications (PCIC), Weimar, Germany, 10 - 12 June 2008. DOI: 10.1109/PCICEUROPE.2008.4563537.
3. Vollet, C.; De Metz-Noblat, B. Protecting High-Voltage Motors Against Switching Overvoltages. In Proceedings of the 4th Petroleum and Chemical Industry Conference Europe – Electrical and Instrumentation Applications (PCIC), Paris, France, 13 – 15 June 2007. DOI: 10.1109/PCICEUROPE.2007.4354001.
4. Popov, M.; Haoyan, X. Analysis of Switching Transient Overvoltages in the Power System of Floating Production Storage and Offloading Vessel. In Proceedings of the International Conference on Power Systems Transients (IPST2013), Vancouver, Canada, 18 – 20 July 2013.
5. Smeets, R.; van der Sluis, L.; Kapetanović, M.; Peelo, D. F.; Janssen, A. *Switching in Electrical Transmission and Distribution Systems*, 1st ed.; John Wiley & Sons Ltd.: Chichester, United Kingdom, 2015.
6. Kosmac, J.; Zunko, P. A Statistical Vacuum Circuit Breaker Model for Simulation of Transient Overvoltages. *IEEE Transactions on Power Delivery* **1995**, *10*, 294 - 300. DOI: 10.1109/61.368386.
7. Helmer, J.; Lindmayer, M. Mathematical Modeling of the High Frequency Behavior of Vacuum Interrupters and Comparison with Measured Transients in Power Systems. In Proceedings of the 17th International Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum, Berkley, USA, 21 – 26 July 1996. DOI: 10.1109/DEIV.1996.545375.
8. Wong, S.M.; Snider, L.A.; Lo, E.W.C. Overvoltages and reignition behavior of vacuum circuit breaker. In Proceedings of the 6th International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management ASDCOM, New Orleans, USA, 11 – 14 November 2003. DOI: 10.1049/cp:20030663.
9. IEC 62271-110 (2017) High-voltage switchgear and controlgear – Part 110: Inductive load switching.
10. Watson, N.; Arrillaga, J. *Power Systems Electromagnetic Transients Simulation*, 2nd ed.; The Institution of Engineering and Technology: London, United Kingdom, 2018.
11. Martinez-Velasco, J. A. *Transient Analysis of Power Systems*, 1st ed.; John Wiley & Sons Ltd.: Chichester, United Kingdom, 2020.

12. Boldea, I.; Nasar, S. A. *The Induction Machines Design Handbook*, 2nd ed.; CRC Press: Boca Raton, USA, 2010.
13. Aller, J.M.; Bueno, A.; Paga, T. Power System Analysis Using Space-Vector Transformation. *IEEE Transactions on Power Systems* **2002**, *17*, 957 – 965. DOI: 10.1109/TPWRS.2002.804995.
14. Engeln-Müllges, G.; Uhlig, F.; Schon, M. *Numerical Algorithms with C*, 1st ed.; Springer-Verlag: Berlin, Germany, 1996.
15. Bellan, D. Clarke Transformation Solution of Asymmetrical Transients in Three-Phase Circuits. *Energies* **2020**, *13*, 5231. DOI: 10.3390/en13195231.
16. Pígl, J. Dynamický model vysokonapětového vakuového vypínače a asynchronního motoru pro simulaci spínacích přechodných dějů pomocí Clarkeové transformace. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2023, 84 s.
17. Smeets, R. Low-current Behaviour and Current Chopping of Vacuum Arcs. Dissertation, TU Eindhoven, Eindhoven, Netherlands, 1987.
18. Caballero, P. T.; Costa, E. C. M.; Kurokawa, S. Frequency-dependent line model in the time domain for simulation of fast and impulsive transients. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* **2016**, *80*, 179 – 189. DOI: 10.1016/j.ijepes.2016.01.051.
19. Slade, P. G. *The Vacuum Interrupter: Theory, Design and Application*, 2nd ed.; CRC Press: Boca Raton, USA, 2021.
20. O'Rourke, C. J.; Qasim, M. M.; Overlin, M. R.; Kirtley, J. L. A Geometric Interpretation of Reference Frames and Transformations: dq0, Clarke, and Park. *IEEE Transactions on Energy Conversion* **2019**, *34*, 2070 – 2083. DOI: 10.1109/TEC.2019.2941175.
21. Das, J. C. *Transients in Electrical Systems*, 1st ed.; McGraw Hill: New York, USA, 2010.
22. Abdulahovic, T.; Thiringer, T.; Reza, M.; Breder, H. Vacuum Circuit Breaker Parameter Calculation and Modelling for Power System Transient Studies. *IEEE Transactions on Power Delivery* **2017**, *32*, 1165 - 1172. DOI: 10.1109/TPWRD.2014.2357993.



## Curriculum vitae

**Jméno:** Jan Pígl

**Kontakt:** [hpigl@volny.cz](mailto:hpigl@volny.cz)

### Vzdělání:

9/2003 – 6/2011 České vysoké učení technické v Praze - Fakulta elektrotechnická

9/1999 – 2/2005 Vysoká škola ekonomická v Praze - Fakulta Financí a účetnictví

### Praxe:

2/2021 – dosud Stadler Praha s.r.o.

5/2009 – 2/2021 Eaton elektrotechnika s.r.o.