

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

APLIKACE MATEMATICKÉ TEORIE DISLOKACÍ NA PROBLÉM TRHLINY V BLÍZKOSTI BI-MATERIÁLOVÉHO ROZHRANÍ

AN APPLICATION OF THE MATHEMATICAL DISLOCATION THEORY TO THE PROBLEM OF THE
CRACK IN THE VICINITY OF THE BI-MATERIAL INTERFACE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. PETR PADĚLEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Petr Padělek

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Aplikace matematické teorie dislokací na problém trhliny v blízkosti bi-materiálového rozhraní

v anglickém jazyce:

An application of the mathematical dislocation theory to the problem of the crack in the vicinity of the bi-material interface

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metoda spojitě rozložených dislokací je jeden z několika analyticko-numerických nástrojů nabízející řešení některých úloh lomové mechaniky. Přednost této metody spočívá v její jednoduchosti a schopnosti přesně vyjádřit součinitel intenzity napětí trhliny příp. další členy Williamsova asymptotického rozvoje napětí před čelem trhliny. Cílem uchazeče bude aplikovat metodu spojitě rozložených dislokací na úlohu lineární lomové mechaniky trhliny konečné délky nacházející se v blízkosti bi-materiálového rozhraní.

Cíle diplomové práce:

1. Seznámit se a aplikovat metodu komplexních potenciálů v rovinné pružnosti na problém dislokace v blízkosti bi-materiálového rozhraní.
2. Seznámení se s teoretickými základy metody spojitě rozložených dislokací.
3. Pomocí metody spojitě rozložených dislokací vyjádřit součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní.

Seznam odborné literatury:

Muschelishvili, N.I. 1953. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. trans. by J.R.M. Radok, Noordhoff, Groningen.

Hills, D.A., Kelly, P.A., Dai, D.N. & Konsursky, A.M. 1996. Solution of crack problems - the distributed dislocation technique. kluwer academic publisher, Neterland.

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 19.11.2012

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Předkládaná diplomová práce se zabývá problémem stanovení součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní metodou spojitě rozložených dislokací. Práce je rozdělena do několika částí. První část je teoretická a obsahuje základní pojmy lomové mechaniky, chování trhliny na bi-materiálovém rozhraní, stanovení singulární integrální rovnice metodou spojitě rozložených dislokací s využitím Buecknerova principu a komplexních potenciálů a následné stanovení součinitele intenzity napětí. Druhá část je aplikace teorie na konkrétní konfiguraci trhliny konečné délky vůči bi-materiálovému rozhraní a ve třetí části je provedeno řešení této úlohy pro různé konfigurace bi-materiálu metodou spojitě rozložených dislokací a srovnání s výsledky získanými pomocí metody konečných prvků (MKP).

klíčová slova

Součinitel intenzity napětí, metoda spojitě rozložených dislokací, trhlina, bi-materiál

Abstract

The presented diploma thesis deals with a problem of the determination of the stress intensity factor of the finite length crack in the vicinity of the bi-material interface solved by the distributed dislocation technique. The work is divided into several parts. The first part is theoretical and includes basic concepts of the fracture mechanics, the crack behaviour at the bi-material interface, the formulation of the singular integral equation by virtue of the distributed dislocation technique, the Bueckner's principle, complex potentials and consequently the determination of the stress intensity factor. The second part is the theory application to the specific configuration of the crack of the finite length with respect to the bi-material interface and in the third part, there is carried out the solution of this problem for various configurations of the bi-material solved by the distributed dislocation technique and its comparison with the results obtained from the FE analysis.

key words

Stress intensity factor, distributed dislocation technique, crack, bi-material

PADĚLEK, P. Aplikace matematické teorie dislokací na problém trhliny v blízkosti bi-materiálového rozhraní. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 74 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Aplikace matematické teorie dislokací na problém trhliny v blízkosti bi-materiálového rozhraní* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Tomáše Profanta, PhD. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

V Brně dne 24.5.2013

.....
(podpis autora)

Poděkování

Děkuji svému školiteli doc. Ing. Tomáši Profantovi, PhD. za věnovaný čas, ochotu a rady, které mi poskytl v průběhu tvorby této diplomové práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům, kteří mě podporovali po celé délce studia

Obsah

Úvod	13
1 Problémová situace	15
1.1 Formulace problému a stanovení cílů	15
1.2 Systém podstatných veličin	16
2 Základní pojmy lomové mechaniky	19
2.1 Lomová mechanika	19
2.2 Griffithovo kritérium	20
2.3 Koncepce hnací síly trhliny	22
2.4 Stabilita šíření trhliny	23
2.5 Napětí a deformace v okolí trhliny	24
2.6 Součinitel intenzity napětí	26
3 Trhlina v okolí dvou elastických materiálů	29
4 Aplikace funkcí komplexní proměnné na teorii rovinné pružnosti	31
4.1 Vyjádření různých výrazů pomocí funkcí napjatosti	31
4.2 Tvary komplexních potencialů pro dislokaci v bimateriálu	32
5 Integrální rovnice - stanovení součinitele intenzity napětí	35
5.1 Buecknerův princip a metoda spojitě rozložených dislokací	35
5.2 Dislokace	36
5.3 Integrální rovnice	38
6 Trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní	43
6.1 Stanovení integrální rovnice	43
6.2 Řešení integrální rovnice	46
7 Řešení problému	49
7.1 Formulace problému a stanovení cílů	49
7.2 Výpočtový model - stanovení napětí $\sigma_{xx}(t)$	50
7.3 Výpočtový model - metoda spojitě rozložených dislokací	52
7.4 Výpočtový model - stanovení K_I pomocí MKP	53
8 Diskuse	59

Závěr	63
Literatura	65
Seznam symbolů a zkratk	69
A Trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní - odvození	73

Úvod

Skutečnost, že reálné konstrukce obsahují vždy ostré vady nebo trhliny, které mohou způsobit, že dojde k porušení při menším nominálním napětí, než je mez kluzu, je považována za obecně platnou. Vědní disciplína, která se zabývá popisem chování trhlín (nukleace, iniciace a šíření) v materiálech se nazývá lomová mechanika.

Lomová mechanika je jedna z nejmladších vědních disciplín mechaniky těles a materiálového inženýrství. Významněji se začala rozvíjet v období druhé světové války v důsledku značného počtu havárií lodí třídy Liberty křehkým lomem. Počátky lomové mechaniky sahají již do roku 1907, kdy se Gury V. Kolosov zabývá ve své disertační práci studiem napjatosti eliptického otvoru [1]. Za zakladatele lomové mechaniky je považován A. A. Griffith, který roku 1920 zformuloval kritérium pro posouzení stability trhliny v ideálně křehkém materiálu [2]. Ve své práci vycházel z práce Charlese Inglise, který zkoumal průchozí trhlínu v nekonečné tažené stěně. Griffithova práce neměla z důvodu uvažování materiálu neschopného plastické deformace velký význam. O rozšíření na materiály schopné plastické deformace se nezávisle na sobě postarali E. Orowan [3] a G. R. Irwin. V roce 1957 G. R. Irwin zavádí koncepci součinitele intenzity napětí [4], která je dnes nejvíce používanou koncepcí v lineárně elastické lomové mechanice (LELM). Další rozvoj lomové mechaniky vedl ke vzniku elasto-plastické lomové mechaniky (EPLM), kde významnými průkopníky jsou Wells, Cottrell a Barenblatt [5], kteří nezávisle na sobě přišli s koncepcí kritického rozevření trhliny (COD) a Rice [6], který zavedl koncepci J-integrálu.

Lomová mechanika popisuje pomocí jednoho nebo více parametrů napjatost a deformaci před čelem trhliny. Jedním z těchto parametrů je součinitel intenzity napětí K , který určuje pole napětí a posuvů v okolí vrcholu trhliny v homogenním izotropním lineárně elastickém materiálu. Určení součinitele intenzity napětí K je možné různými metodami. V současnosti jsou nejpoužívanější metody numerické využívající metodu konečných prvků (MKP). Je to např. tzv. přímá metoda, metody založené na energetických kritériích nebo metoda posunutých uzlových bodů (tyto metody lze nalézt např. v [7], [8]). Jiný přístup je využití metod analyticko-numerických, mezi které patří i metoda spojitě rozložených dislokací.

Cílem předkládané diplomové práce je stanovení součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní metodou spojitě rozložených dislokací. Stanovení součinitele intenzity napětí je ukázáno na konkrétní konfiguraci trhliny konečné délky vůči bi-materiálového rozhraní. Pro tuto úlohu je ukázáno stanovení singulární integrální rovnice a její řešení. Singulární integrální rovnici získáme využitím Buecknerova principu [9], [10], metody spojitě rozložených dislokací [10], [11] a popisu dislokace pomocí komplexních potenciálů [12], [13]. K řešení singulární integrální rovnice využijeme Čebyševovy polynomy a jejich vlastnosti [14], [15]. Výpočtová část práce obsahuje řešení

součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní metodou spojitě rozložených dislokací pro různé konfigurace bi-materiálu a pro srovnání je uvedeno i řešení stejné úlohy pomocí MKP s využitím metody posunutých uzlových bodů.

Kapitola 1

Problémová situace

Tato úvodní kapitola se zabývá vytvořením systému podstatných veličin, analýzou problémové situace a formulací problému. Jde o zvážení a rozvržení postupu řešení problému, rozhodnutí o tom, co je pro řešení problému důležité a co je možné zanedbat. Více o této problematice je možné nalézt v [16].

Dle [17] je trhlina oblast v tělese, kde došlo k porušení soudržnosti usměrněným šířením z jednoho nukleačního místa. Trhlina v tělese je nežádoucí jev, který může vést k destrukci tělesa a reálné konstrukce vždy obsahují ostré vady nebo trhliny a proto je důležité pro stanovení životnosti konstrukce s výskytem těchto vad počítat. Vědní obor, který se zabývá popisem chování trhlin v materiálech se nazývá Lomová mechanika a k tomu využívá různých analytických, numerických a kombinovaných metod.

Analýza problémové situace

Výsledkem analýzy problémové situace je vytvoření dostatečné poznatkové a zkušenostní báze pro formulaci problému [16]. Informační báze je v této práci tvořena především zdroji literatury, uvedené v přehledu použité literatury.

1.1 Formulace problému a stanovení cílů

Podle definice problému dle [16] je problém subjektem naformulované to podstatné z problémové situace, co vyžaduje řešení. Problém tedy můžeme definovat takto

Problém: Stanovení součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní.

Cíle:

1. Seznámit se a aplikovat metodu komplexních potenciálů v rovinné pružnosti na problém dislokace v blízkosti bi-materiálového rozhraní.
2. Seznámení se s teoretickými základy metody spojitě rozložených dislokací.
3. Pomocí metody spojitě rozložených dislokací vyjádřit součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní.

Na základě těchto cílů musíme stanovit dílčí problémy a to stanovení komplexních potenciálů pro dislokaci v bimateriálu (kapitola 4), stanovení součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní pomocí metody spojitě rozložených dislokací (kapitola 5 a 6) a pro ověření věrohodnosti výsledků stanovení součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní pomocí MKP (kapitola 7).

Daný problém je velice obsáhlý a proto k jeho vyřešení musíme zavést určitá omezení, která složitost problému redukují.

Omezení: Uvažujeme pouze rovinnou úlohu; platnost lineárně elastické lomové mechaniky (LELM); materiál je homogenní, izotropický, lineárně elastický; dokonalá adheze mezi materiály, zatěžovací mód I a nulové objemové síly.

1.2 Systém podstatných veličin

Systém podstatných veličin je množina všeho podstatného, co souvisí s řešením daného problému na příslušném objektu. Systém podstatných veličin lze považovat za abstraktní objekt se systémovými vlastnostmi. Vytváříme tak na objektu soustavu několika podmnožin. Více lze nalézt v [16].

Objektem (entitou) je nekonečné rovinné bi-materiálové těleso obsahující trhlínu v blízkosti bi-materiálového rozhraní (např. obrázek 6.1).

Podmnožina S_0 - veličiny popisující okolí entity

Nejsou definovány, tedy podmnožina $S_0 = \emptyset$.

Podmnožina S_1 - geometrie a topologie entity

Podstatnými veličinami této podmnožiny S_1 jsou rozměry hranice tělesa tvořící zkoumanou entitu, poloha trhliny vůči bi-materiálovému rozhraní, délka trhliny a vzdálenost trhliny od rozhraní.

Podmnožina S_2 - vazby a interakce entity s okolím

Entita může být zatěžována silově (měkké zatěžování) nebo deformačně (tvrdé zatěžování) a toto zatěžování je způsobeno prostřednictvím vazeb. Ve vazbách by mělo docházet k minimálním ztrátám energie. V práci je uveden případ trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní s tahovým zatížením působícím ve směru vodorovném s rozhraním.

Podmnožina S_3 - aktivace entity s okolím

Entita je aktivována prostřednictvím zatížení a to buď silovým (je předepsána silová soustava) nebo deformačním (jsou předepsány posuvy). Podle směru zatížení trhliny rozlišujeme tři módy zatížení, mód I - rozevírání, mód II - smyk, mód III - stříh. Obecné zatížení se dostane kombinací základních módů. V práci je uveden případ trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní, která je aktivována silovým zatížením v módu I.

Podmnožina $S4$ - ovlivňování entity s okolím

Není definováno, tedy podmnožina $S4 = \emptyset$.

Podmnožina $S5$ - oborové vlastnosti entity

Entita je tvořena dvěma izotropickými, lineárně elastickými materiály M_1 a M_2 mezi kterými je dokonalá adheze v místě spojení (rozhraní). K popisu těchto materiálů potřebujeme znát Youngův modul pružnosti v tahu E_1, E_2 případně ve smyku μ_1, μ_2 a Poissonovo číslo ν_1, ν_2 . Další podstatnou veličinou popisující vlastnosti entity je součinitel intenzity napětí K v našem případě K_I .

Podmnožina $S6$ - procesy a stavy

Procesy probíhající v entitě (objektu) posuzujeme na úrovni mechaniky kontinua. Entita obsahuje trhlinu a k popisu chování trhliny je klíčovou veličinou součinitel intenzity napětí K v našem případě K_I . Pomocí součinitele intenzity napětí jsme schopni vyjádřit i průběhy napětí a posuvů před čelem trhliny.

Podmnožina $S7$ - projevy entity

Projevem entity je šíření trhliny, které může být stabilní (trhlina se nešíří, pokud neroste zátěžná síla) nebo nestabilní (trhlina se šíří samovolně). Šíření trhliny nastává v případě, že součinitel intenzity napětí dosáhne své mezní hodnoty tzv. lomové houževnatosti. V našem případě tedy $K_I = K_c$. Pokud je $K_I < K_c$ trhlina se nešíří nebo se šíří stabilně (v případě cyklického zatěžování). V případě, že šířící se trhlina dosáhne rozhraní materiálů, tak k posouzení chování trhliny potřebujeme znát zobecněný součinitel intenzity napětí H v našem případě H_I a bohužel neexistuje univerzální kritérium, které by rozhodlo, zda se na rozhraní trhlina zastaví, zda dojde k ohybu trhliny nebo k proniknutí trhliny do druhého materiálu.

Podmnožina $S8$ - důsledky projevů

Důsledkem šíření trhliny, pokud nedojde k jejímu zastavení, je lom, tedy rozpad tělesa na dvě či více části. Lom tělesa je v drtivé většině reálných úloh nežádoucí jev a může mít katastrofální následky.

Kapitola 2

Základní pojmy lomové mechaniky

V této kapitole vysvětlíme stručně základní pojmy lomové mechaniky a její přístupy. Najdeme zde základní rozdělení lomové mechaniky, Griffithovo kritérium a s ním související hnací sílu trhliny, pojednání o stabilitě šíření trhliny, určení napětí a deformace v okolí trhliny a s ní související tzv. módy zatěžování a nakonec stanovení součinitele intenzity napětí. Všechné pojmy, vztahy a poznatky této kapitoly je možno nalézt v [8], [18], [17].

2.1 Lomová mechanika

Realné konstrukce vždy obsahují ostré vady nebo trhliny, které mohou způsobit, že dojde k porušení při menším nominálním napětí, než je mez kluzu. Vědní obor, který se zabývá popisem chování trhlín v materiálech se nazývá lomová mechanika. Lomová mechanika popisuje pomocí jednoho nebo více parametrů napjatost a deformaci před čelem trhliny a umožňuje přenos naměřených dat ze zkušebních vzorků na realné konstrukce. Dává nám odpovědi na otázky týkající se: zbytkové pevnosti, kritické velikosti trhliny, počtu cyklů do kritické velikosti trhliny, volby vhodného materiálu atd.

Rozdělení lomové mechaniky:

1. **Lineární elastická lomová mechanika (LELM):** vychází z lineárně elastické mechaniky kontinua, tedy mezi napětím a přetvořením předpokládáme lineární závislost (platnost Hookova zákona). Její platnost je tedy omezena pouze na případy, kdy velikost plastické oblasti před čelem trhlín můžeme zanedbat (např. [17] uvádí, že plastická oblast nesmí přesáhnout 2% tloušťky tělesa). LELM poskytuje dva přístupy k posouzení trhliny:
 - energetický přístup (Griffithovo kritérium, hnací síla trhliny G s kritickou hodnotou G_c houževnatost materiálu)
 - napěťový přístup (součinitel intenzity napětí K s kritickou hodnotou K_{Ic} lomová houževnatost za podmínky rovinné deformace)
2. **Elasto-plastická lomová mechanika (EPLM):** používá se tam kde již nelze použít koncept LELM. Vzhledem ke komplikovanosti probíhajících nevratných dějů se k posouzení trhliny používají hlavně koncepce založené na energetických kritériích
 - koncepce kritického rozevření trhliny (COD) s kritickou hodnotou δ_c
 - koncepce J-integrálu s kritickou hodnotou J_{Ic}

2.2 Griffithovo kritérium

A.A. Griffith, který je považován za zakladatele lomové mechaniky zformuloval v roce 1920 kritérium pro posouzení stability trhliny v ideálně křehkém materiálu (sklo) [2]. Vycházel z energetické bilance tělesa s trhlinou a podmínky nestability trhliny.

Energetická bilance, podmínka nestability trhliny:

Uvažujme nejprve zatížené těleso bez trhliny, jehož celková potenciální energie Π_0 je

$$\Pi_0 = W_0 + L, \quad (2.1)$$

kde W_0 je energie napjatosti tělesa bez trhliny a L je potenciální energie vnějších sil ($L < 0$).

Při vzniku trhliny dochází k disipaci energie Γ a celkové množství energie v soustavě E_c lze vyjádřit jako

$$E_c = \Pi + \Gamma = W + L + \Gamma, \quad (2.2)$$

kde Π je celková potenciální energie tělesa s trhlinou a W je energie napjatosti tělesa s trhlinou.

Podle 1. zákona termodynamiky (zákon zachování energie) je celkové kvantum energie v termodynamické soustavě a v jejím okolí stálé. Při přechodu z nerovnovážného do rovnovážného stavu tedy nedochází ke změně celkové energie a platí

$$\frac{dE_c}{dS} = \frac{d\Pi}{dS} + \frac{d\Gamma}{dS} = 0, \quad (2.3)$$

kde S je plocha průmětu trhliny. Z rovnice (2.3) plyne *základní rovnice podmínky nestability trhliny* ve tvaru

$$-\frac{d\Pi}{dS} = -\frac{d(W + L)}{dS} = \frac{d\Gamma}{dS}. \quad (2.4)$$

Griffithovo kritérium:

Vyjdeme z vyjádření celkové potenciální energie tělesa s trhlinou Π

$$\Pi = W + L. \quad (2.5)$$

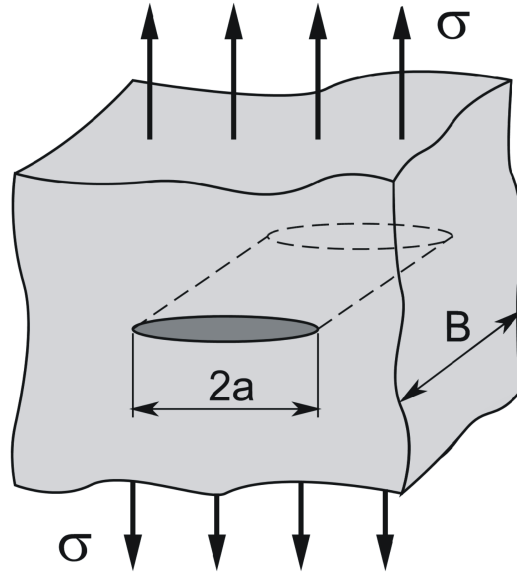
Dosadíme rovnici (2.1) a získáme

$$\Pi = \Pi_0 + W - W_0 = \Pi_0 - (W_0 - W) = \Pi_0 - W_T, \quad (2.6)$$

kde W_T je změna energie napjatosti tělesa v důsledku vzniku trhliny. Griffith využil Inglisovu napěťovou analýzu pro taženou nekonečnou stěnu s průchozí trhlinou (obr.2.1), který pro ni odvodil

$$W_T = \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E}, \quad (2.7)$$

kde a, B jsou rozměry trhliny, σ je tahové napětí a E Youngův modul pružnosti. V případě centrální trhliny je $S = 2aB$, kde B je konstanta a tak platí $dS = 2Bda$.



Obrázek 2.1: Nekonečná stěna s průchozí trhlinou

Pro ideálně křehký materiál pak Griffith uvažoval, že disipační energie Γ je spotřebována pouze na vznik nových ploch

$$\Gamma = 2\gamma S = 4\gamma aB, \quad (2.8)$$

kde γ je měrná povrchová energie materiálu.

Pokud aplikujeme rovnici (2.6) na rovnici (2.4) získáme *podmínku nestability trhliny* ve tvaru

$$-\frac{d\Pi}{dS} = \frac{dW_T}{dS} = \frac{d\Gamma}{dS}. \quad (2.9)$$

Nyní dosadíme rovnice (2.7) a (2.8) do výše uvedené rovnice (2.9) a získáme podmínku nestability trhliny ve tvaru

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E} = 2\gamma, \quad (2.10)$$

odtud pak snadno dostáváme *lomové napětí* σ_f

$$\sigma = \sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}}. \quad (2.11)$$

Z rovnice (2.11) snadno získáme *kritickou délku trhliny* a_c

$$a = a_c = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}. \quad (2.12)$$

Pro kterou platí:

- $a < a_c$ je uvolněná energie při růstu trhliny menší než energie potřebná k vytvoření nových lícních ploch a pokud nebude přiváděna další energie z vnějšku, nedojde k růstu trhliny,
- $a > a_c$ je trhlina schopna růstu na úkor uvolňované energie.

Griffithova práce platí pouze pro ideálně křehké těleso, což byl důvod, proč inženýrská komunita dlouho nevěnovala této teorii větší pozornost. Až Irwin a Orowan nezávisle na sobě modifikovali Griffithův výraz pro materiály, které jsou schopné plastické deformace. Modifikovaný výraz má tvar

$$a = a_c = \frac{2\gamma_{ef}E}{\pi\sigma^2}, \quad (2.13)$$

kde γ_{ef} je tzv. *efektivní povrchová energie* $\gamma_{ef} = \gamma + \gamma_{pl}$. Přičemž $\gamma_{pl} \gg \gamma$ a reprezentuje skutečnost, že energie spotřebovaná v plastické zóně při vytvoření přírůstku lomové plochy je u reálných materiálů o několik řádů vyšší než energie γ . Pokud budeme uvažovat další možnosti disipace energie související s plastifikací, viskoelastickými a viskoplastickými jevy, je možno Griffithovo kritérium psát v obecném tvaru

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\omega_f}{\pi a}}, \quad (2.14)$$

kde ω_f je měrná energie lomu.

2.3 Koncepce hnací síly trhliny

Na Griffithovu koncepci bezprostředně navazuje Irwin s koncepcí hnací síly trhliny. Vychází z podmínky nestability trhliny (2.9)

$$-\frac{d\Pi}{dS} = \frac{d\Gamma}{dS}.$$

Tuto rovnici přeznačíme

$$G = -\frac{d\Pi}{dS}, \quad R = \frac{d\Gamma}{dS} \quad \implies G = R, \quad (2.15)$$

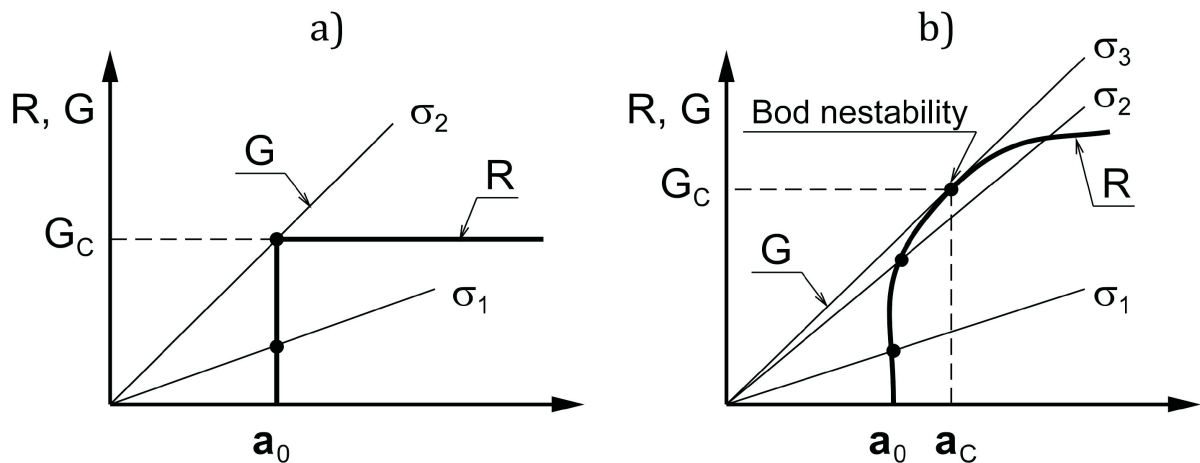
kde levá strana G je nazývána *hnací síla trhliny* nebo také *rychlost uvolňování deformační energie* [J/m^2] a pravá strana R charakterizuje *odpor tělesa proti růstu trhliny* [J/m^2], tj. energii, kterou je třeba dodat k vytvoření lomové plochy jednotkové velikosti. Potřebná energie je dodávána prací vnějších sil nebo částí energie napjatosti, uvolňované při růstu trhliny.

Ztráta stability trhliny nastane v okamžiku, kdy hnací síla trhliny G dosáhne své kritické hodnoty G_c , kterou nazýváme *houževnatost materiálu a obecnou podmínku ztráty stability trhliny* je pak možno psát ve tvaru

$$G = R = G_c. \quad (2.16)$$

Později spolupracovník Irwina Kies zjistil při zkuškách vzorků s trhlínami z akrylové pryskyřice, že kritické napětí pro danou trhlínu závisí pouze na $G_c E$ a druhá odmocnina tohoto součinu je dnes známá jako *lomová houževnatost* K_c .

Poznámka: Hnací síla trhliny se značí písmenem G na počest Griffitha a obdobně lomová houževnatost nese písmeno K na počest Kiese.



Obrázek 2.2: Průběhy R-křivek

2.4 Stabilita šíření trhliny

Veličiny G a R rozhodují o dalším chování trhliny. Je-li splněna podmínka (2.16), trhlina bude růst. O stabilitě růstu rozhoduje to, jak se bude měnit hnací síla G a odpor R v závislosti na změně velikosti trhliny. Obrázek 2.2 znázorňuje průběhy G a R pro případ nekonečné tažené stěny (obr. 2.1) pro dvě odlišná materiálová chování. Průběh hnací síly trhliny G je zde lineárně závislý na délce trhliny při konstantním zatížení.

První případ (obr.2.2(a)) představuje ideálně křehký materiál. Zde je odpor proti růstu trhliny konstantní, nezávislý na délce trhliny. Tomuto průběhu se blíží i případy, kdy v oblasti čela trhliny můžeme hovořit o rovinné deformaci. Druhý případ (obr.2.2(b)), který je typický při větší plastifikaci u čela trhliny a pro případy rovinné napjatosti. Odpor proti růstu trhliny R má vzrůstající charakter a ke stabilnímu růstu dojde až od určité prahové hodnoty hnací síly trhliny G .

Stabilita šíření:

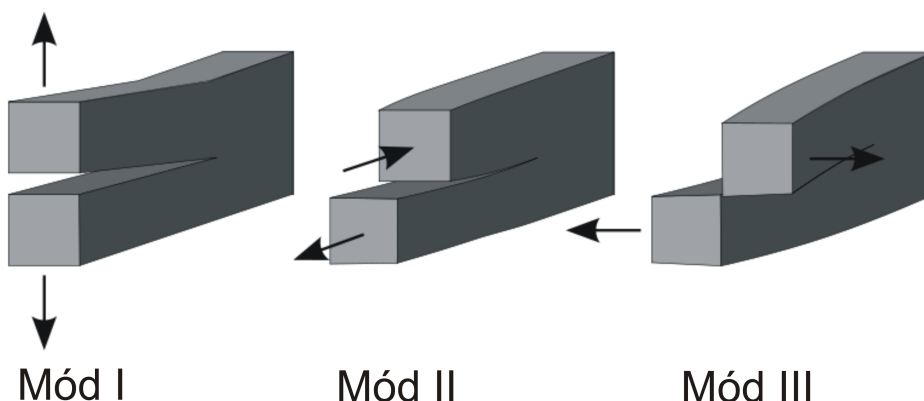
1. případ a)

- zatížení na úrovni σ_1 - nedojde k šíření trhliny
- zatížení na úrovni σ_2 - dojde k šíření trhliny (iniciace nestabilního růstu), houževnatost materiálu je zde jednoznačně definována

2. případ b)

- zatížení na úrovni σ_1 - nedojde k šíření trhliny
- zatížení na úrovni σ_2 - dojde k malému nárůstu trhliny mající ale stabilní charakter
- zatížení na úrovni σ_3 - dojde k nestabilnímu šíření trhliny, houževnatost materiálu je zde jednoznačně definována

Poznámka: Více o stabilitě šíření trhlín lze nalézt v [8], [18]



Obrázek 2.3: Módy zatěžování

2.5 Napětí a deformace v okolí trhliny

Při studiu pole napětí a deformací v oblasti trhliny se rozlišují tři základní typy deformování při porušování, tzv. *módy zatěžování*, které hrají důležitou roli při posuzování trhlín z hlediska koncepce součinitele intenzity napětí.

Módy zatěžování:

- **mód I - rozevírání** - vyvolává ho napětí působící kolmo na rovinu trhliny (obr. 2.3 mód I). Je nejčastějším a nejnebezpečnějším případem, kdy dochází k urychlování šíření trhliny
- **mód II - smyk** - vyvolává ho napětí působící v rovině rovnoběžné s rovinou trhliny a kolmé na její čelo (obr.2.3 mód II).
- **mód III - stříh** - vyvolává ho napětí působící v rovině rovnoběžné s rovinou trhliny a současně rovnoběžné s čelem trhliny (obr.2.3 mód III).

Lomová mechanika vychází z mechaniky kontinua a k popisu napjatosti v okolí vrcholu trhliny využívá klasickou teorii pružnosti. Uvažujme rovinnou úlohu pružnosti. Výpočet rozložení napětí v okolí vrcholu trhliny vychází z předpokladu, že jsou splněny *rovnice rovnováhy a kompatibility*, které jsou v případě nulových *objemových síl* ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\
 \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

kde $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ jsou složky *tenzoru napětí* a symbol Δ značí *Laplaceův operátor*. Jak je uvedeno např. v [19], tak tuto soustavu rovnic a dané okrajové podmínky je možno

převést na rovnici

$$\Delta\Delta U \equiv \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \quad (2.18)$$

kde funkce $U(x, y)$ je *biharmonická* a nazývá se *Airyho funkce napětí*. Pro složky tenzoru napětí $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$ platí (věta 1.1 v [19])

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (2.19)$$

Muschelišvili dokázal, že jakoukoli biharmonickou funkci $U(x, y)$ je možno vyjádřit pomocí dvou *holomorfních funkcí* komplexní proměnné $z = x + iy$ (viz. [19], [13]). Na jeho práce navázal Westergaard, který dokázal, že v řadě případů lze vystačit při řešení rovinné úlohy s jedinou holomorfní funkcí komplexní proměnné, která je svázána s Airyho funkcí jistým vztahem, odlišným pro každý z módů I, II, III. (Podrobnosti zde nebudeme rozvádět – jsou uvedeny např. v [18]).

Tato práce se bude zabývat pouze módem I a proto si uvedeme vztahy pro napětí a posuvy v blízkosti trhliny pouze pro mód I. Pro blízké okolí čela trhliny v izotropním lineárně elastickém materiálu, kdy $r \ll a$ (a délka trhliny) Westergaard odvodil (avšak pro rovnoosou napjatost v nekonečnu)

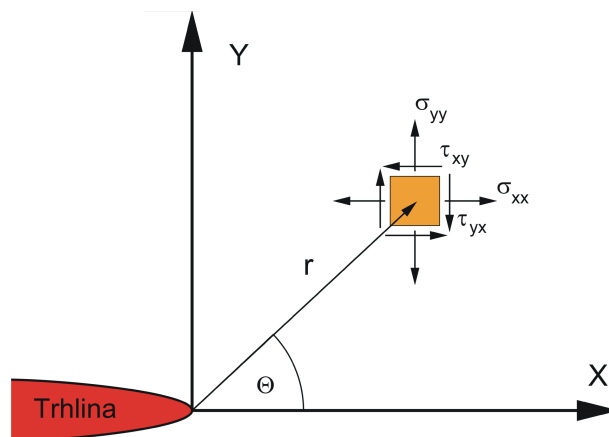
$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma_{xy} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}, \\ u_x &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2} (\kappa - \cos\theta), \\ u_y &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2} (\kappa - \cos\theta), \end{aligned} \quad (2.20)$$

kde σ označuje vnější zatížení v nekonečnu, θ je úhel natočení od kořene trhliny (obr.2.4), r je vzdálenost od kořene trhliny (obr.2.4), μ je modul pružnosti ve smyku a κ je konstanta, která nabývá hodnoty $\kappa = 3 - 4\nu$ pro rovinnou deformaci nebo $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ pro rovinnou napjatost. Konstanta ν označuje Poissonovo číslo.

Vztahy pro napětí (2.20) obsahují člen $1/\sqrt{r}$ a pro $r \rightarrow 0$ roste napětí do nekonečna, což je fyzikálně nesmysl a proto napětí nemůže v tomto případě sloužit jako stavová veličina pro popis stability trhliny.

Poznámka: Muschelišviliho řešení rovnice (2.18) pomocí holomorfních funkcí není jediný způsob, jak získat pole napětí a posuvů v blízkosti čela trhliny. Jiný velmi známý způsob je Williamsovo řešení. Williams hledal řešení rovnice (2.18) ve tvaru nekonečné řady

$$U(x, y) = \sum_k A_k r^{\lambda_k} f_k(\theta). \quad (2.21)$$



Obrázek 2.4: Napětí působící na element, poloha elementu je určena polárními souřadnicemi (r, θ)

2.6 Součinitel intenzity napětí

Napětí u kořene trhliny není vhodným parametrem pro popis chování trhliny (pro popis podmínky její stability a jejího růstu). Jinak je tomu s veličinou zvanou *součinitel intenzity napětí*. Součinitel intenzity napětí je podstatnou veličinou pro lomovou mechaniku. V lineárně pružném materiálu určuje nejen napjatost a deformaci v malém okolí vrcholu trhliny, ale i její tvar a otevření. Dále pak velikost plastické oblasti a uvolněnou energii v důsledku šíření trhliny. Jeho koncepce je využívána nejen při statické, ale i dynamické iniciaci trhliny, při jednosměrném i cyklickém zatěžování. V případě homogenního izotropního lineárně elastického materiálu ho značíme K_i , kde index i odpovídá jednomu z módů zatěžování I, II nebo III. Obecný vztah pro mód I definoval Irwin pro případ nekonečné roviny takto

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, \theta) \quad (2.22)$$

Pokud položíme v rovnici (2.22) $\theta = 0$, pak získáme

$$K_I = \sigma \sqrt{2\pi a} \quad (2.23)$$

S pomocí poslední rovnice (2.23) můžeme i vyjádřit pole napětí a posuvů (2.20) v blízkosti čela trhliny. Uvedeme pouze napětí σ_{xx}

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right). \quad (2.24)$$

Ostatní výrazy lze získat obdobně.

Součinitel intenzity napětí tedy definuje amplitudu singularity u čela trhliny. Nezávisí na r, θ ani na elastických konstantách E, ν . Vždy ale závisí na velikosti nominálního napětí σ a odmocnině z délky trhliny a .

V případě konečného tělesa nemá součinitel intenzity napětí jednotný tvar. Tato práce se jimi nezabývá a proto uvedme jen jeden obecnější případ a to pro trhlínu v oblasti membránové napjatosti při módu I

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\Phi_0 Y}, \quad (2.25)$$

kde Φ_0 je funkce zohledňující tvar eliptické trhliny a Y je korekční funkce závisající na okrajových podmínkách. Další tvary lze nalézt např. v [8]

Podmínka stability:

Obdobně jako v případě posuzování stability trhliny pomocí hnací síly G dochází ke ztrátě stability trhliny při dosažení jisté kritické hodnoty K_c , kterou nazýváme lomová houževnatost. Obecnou podmínku ztráty stability trhliny pro mód I je pak možno psát ve tvaru

$$K_I = K_c. \quad (2.26)$$

Vztah mezi K a G:

Bez odvození uved'eme vztahy mezi součinitelem intenzity napětí a hnací silou trhliny (viz např. [8])

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}, \quad G_{III} = \frac{(1 + \nu)}{E} K_{III}^2, \quad (2.27)$$

kde $E' = E$ pro rovinnou napjatost a $E' = E/(1 + \nu^2)$ pro rovinnou deformaci.

Princip superpozice:

V lineárně elastické lomové mechanice (LELM) platí *princip superpozice* a tak v případě smíšeného módu můžeme sčítat příspěvky od jednotlivých módů. Například pro složky napětí v okolí vrcholu trhliny lze psát

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta). \quad (2.28)$$

Tvary funkcí f_{ij} pro jednotlivé módy lze nalézt např. v [10].

Kapitola 3

Trhlina v okolí dvou elastických materiálů

V této kapitole posoudíme vliv rozhraní na chování trhliny šířící se v jeho blízkosti (obr.3.1). Bez znalosti tohoto chování neexistuje možnost stanovení kritérií rozhodujících za jakých podmínek se trhlina zastaví (obr.3.1(a)), pronikne-li trhlina přes rozhraní do druhého materiálu M_2 (obr.3.1(b)), nebo dojde-li k ohybu čela trhliny a k jejímu dalšímu šíření podél rozhraní druhého materiálu M_2 (obr.3.1(c)), nebo k ohybu a šíření zpět (obr.3.1(d)). Dále budeme uvažovat trhlinu kolmou na rozhraní dvou materiálů, platnost LELM, zatěžovací mód I, na rozhraní mezi materiály M_1 a M_2 uvažujeme dokonalou adhezi a materiály jsou modelovány jako homogenní, izotropní, lineárně elastické. Veškerý text, vztahy a poznatky této kapitoly lze nalézt v [11] a [20].

V případě trhliny šířící se kolmo na rozhraní dvou materiálů je rozhodujícím faktorem ovlivňujícím součinitel intenzity napětí K_I (tím i chování trhliny) poměr modulů pružnosti E_1, E_2 materiálů M_1, M_2 . Schématické průběhy součinitelů intenzity napětí K_I pro trhlinu kolmou na bi-materiálové rozhraní s vrcholem v blízkosti tohoto rozhraní je uveden na obrázku (obr.3.2) a platí:

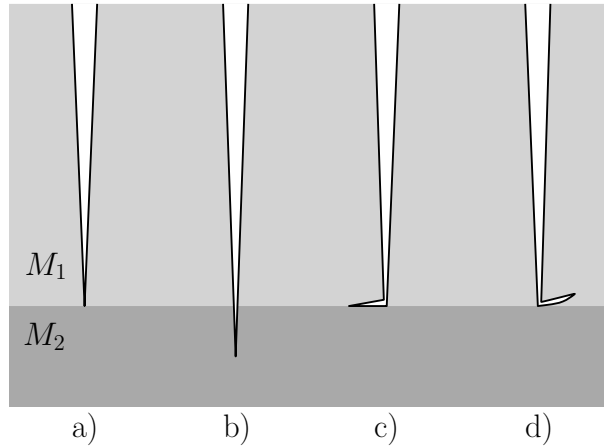
- $E_1 < E_2$ - trhlina se šíří do tužšího materiálu, $K_I \rightarrow 0$
- $E_1 > E_2$ - trhlina se šíří do poddajnějšího materiálu, $K_I \rightarrow \infty$.

Napětí v blízkosti čela trhliny je pak popsáno vztahy (2.20) a s přihlédnutím ke vztahu (2.28) jej můžeme zapsat ve tvaru

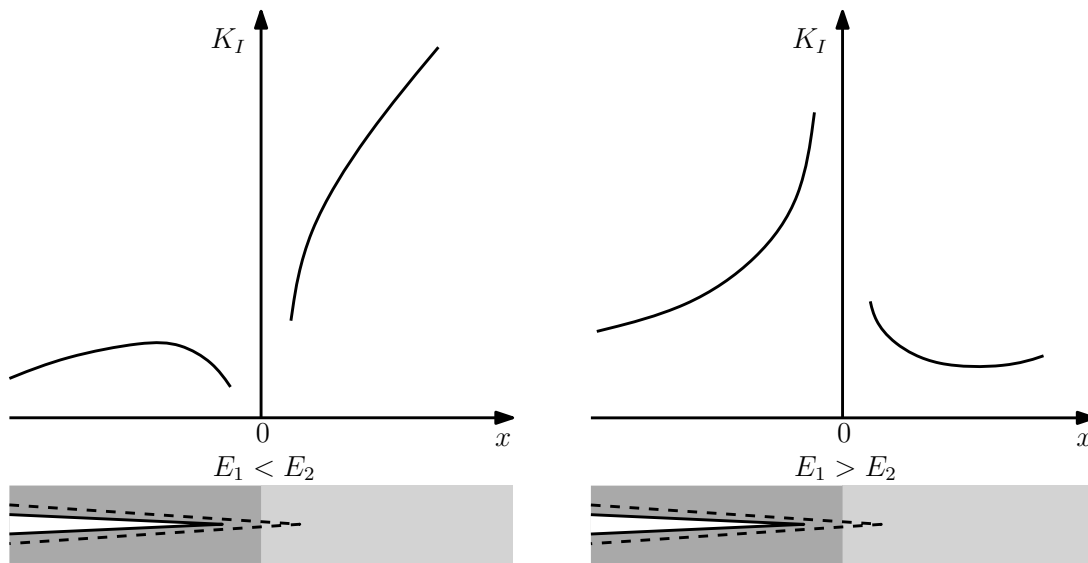
$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta). \quad (3.1)$$

Z obrázku (obr.3.2) je zřejmé, že teoretické hodnoty součinitele intenzity napětí K_I v nejtěsnější blízkosti bi-materiálového rozhraní přestávají mít fyzikální význam a je proto nutné se zabývat případem, kdy trhlina šířící se kolmo k rozhraní dosáhne právě tohoto rozhraní. V tomto případě nastává kritický okamžik jak se trhlina může dále šířit nebo zastavit (obr.3.1). V případě doteku trhliny rozhraní se mění i vztahy popisující složky napětí v okolí čela trhliny. Tedy vztah (3.1) přechází na vztah

$$\sigma_{ij} = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi r^\lambda}} f_{ij}(\theta, \lambda, \alpha, \beta), \quad (3.2)$$



Obrázek 3.1: Způsoby šíření trhliny kolmé k rozhraní dvou různých materiálů



Obrázek 3.2: Součinitel intenzity napětí K_I trhliny v blízkosti bi-materiálového rozhraní

kde H_I je tzv. *zobecněný faktor intenzity napětí*, (r, θ) jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, α, β jsou tzv. *Dundursovy parametry* [21] a f_{ij} jsou známé ohraničené funkce (viz [22]). Charakter singularity napětí v okolí vrcholu trhliny se mění z původní hodnoty $\lambda = 1/2$ na nějaké reálné číslo z intervalu $\lambda \in (0, 1)$, viz např. [23]. Zda jde o hodnotu menší nebo větší než původní $\lambda = 1/2$ závisí na tom, zda se trhlina šíří z tužšího materiálu do měkčího nebo naopak. Z tohoto důvodu součinitel intenzity napětí K_I dle původní definice (2.22) ztrácí smysl a zavádí se zobecněný faktor intenzity napětí H_I (3.2).

Existuje řada prací zabývajících se popisem zobecněného faktoru intenzity napětí, viz např. [23], [24], [25].

Z důvodu změny charakteru singularity λ v okolí čela trhliny neexistuje univerzální kritérium, které by rozhodlo o tom, zda se trhlina zastaví nebo zda dojde k jejímu proniknutí do druhého materiálu nebo zda dojde k ohybu trhliny. Více o kritériích stability trhlín je možno nalézt např. v [23].

Kapitola 4

Aplikace funkcí komplexní proměnné na teorii rovinné pružnosti

V této kapitole si nejdříve ukážeme, jak se dají vyjádřit napětí a posuvy pomocí tzv. komplexních potenciálů a poté si ukážeme konkrétní tvary komplexních potenciálů pro dislokaci v bimateriálu, které využijeme v dalších kapitolách. Veškerý text, vztahy a poznatky této kapitoly lze nalézt v [19] a [12].

4.1 Vyjádření různých výrazů pomocí funkcí napjatosti

Uvažujme rovinnou úlohu pružnosti. Jak již bylo řečeno (část 1.5), tak této úloze odpovídají rovnice rovnováhy a kompatibility (2.17), které jsou v případě nulových objemových sil ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \\ \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Řešení této soustavy rovnic (4.1) se převádí na řešení biharmonické funkce $U(x, y)$, která vyhovuje rovnici (2.18)

$$\Delta\Delta U \equiv \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0\tag{4.2}$$

a navíc pro funkci $U(x, y)$ platí

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.\tag{4.3}$$

K získání pole napětí $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy})$ a jak uvidíme později i pole posuvů (u_x, u_y) , tedy stačí znát tvar Airyho funkce napětí $U(x, y)$. Hledání tvaru této funkce bohužel není obecně úloha jednoduchá. Muschelišvili dokázal, že Airyho funkci napětí $U(x, y)$ je možné vyjádřit pomocí dvou komplexních holomorfních funkcí $\varphi(z), \chi(z)$ a tedy platí následující věta

Věta 4.1. *Nechť $U(x, y)$ je biharmonická funkce (Airyho funkce) definovaná na jednoduše souvislém tělese T . Pak existují holomorfní funkce $\varphi(z)$, $\chi(z)$ v T takové, že*

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad (4.4)$$

kde $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ a definici jednoduše souvislého tělesa T a holomorfní funkce najdeme v [19].

Předchozí věta ukazuje, jak vyjádřit Airyho funkci pomocí dvou komplexních holomorfních funkcí, ale neříká nic o jejich konkrétních tvarech. Tvary funkcí $\varphi(z)$, $\chi(z)$ se mění pro každou úlohu a jejich nalezení může být poměrně složitou úlohou. Konkrétní tvar těchto funkcí pro naši úlohu si ukážeme později.

Vyjádření různých výrazů pomocí funkcí napjatosti

Následující definice objasňuje pojem funkce napjatosti

Definice 4.1. *Funkcemi napjatosti se rozumí funkce $U(x, y)$, $\varphi(z)$, $\chi(z)$ a jejich derivace.*

Dále pro holomorfní funkce $\varphi(z)$, $\chi(z)$ (tzv. Muschelišviliho komplexní potenciály) zavedeme značení

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \psi(z) = \chi'(z), \quad \Psi = \psi'(z). \quad (4.5)$$

Nyní si ukážeme, jak se dají získat složky tenzoru napětí σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} a pole posuvů u_x , u_y přímo pomocí funkcí napjatosti (bez nutnosti užití funkce $U(x, y)$). Vyjádření napětí a posuvů vychází z věty 1.3 v [19] odkud úpravou získáme

$$u_x = \operatorname{Re} \left[\frac{\kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}}{2\mu} \right], \quad (4.6)$$

$$u_y = \operatorname{Im} \left[\frac{\kappa\varphi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}}{2\mu} \right], \quad (4.7)$$

$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re}[2\Phi(z) - \bar{z}\Phi'(z) - \Psi(z)], \quad (4.8)$$

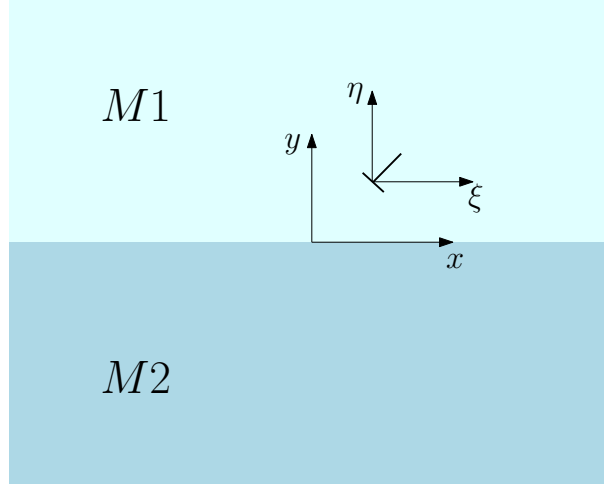
$$\sigma_{yy} = \operatorname{Re}[2\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (4.9)$$

$$\sigma_{xy} = \operatorname{Im}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (4.10)$$

kde μ je modul pružnosti ve smyku a κ je konstanta, která nabývá hodnoty $\kappa = 3 - 4\nu$ pro rovinnou deformaci nebo $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ pro rovinnou napjatost. Konstanta ν označuje Poissonovo číslo.

4.2 Tvary komplexních potencialů pro dislokaci v bi-materiálu

Trhlinu lze s výhodou modelovat pomocí *dislokací* a právě tohoto modelu (tzv. *model spojitě rozložených dislokací*) využívá i tato práce, jak uvidíme později. Abychom byli schopni s dislokací dále pracovat a vyjádřit např. pole napětí, tak musíme znát tvary příslušných komplexních potencialů, které tuto dislokaci popisují.



Obrázek 4.1: Nekonečná rovina s dislokací

Uvažujme nekonečnou rovinu tvořenou dvěma polovinami z homogenního lineárně elastického izotropního materiálu M_1 a M_2 dle obrázku 4.1 s materiálovými charakteristikami μ_1, ν_1 pro horní polovinu a μ_2, ν_2 pro dolní polovinu, kde μ je modul pružnosti ve smyku a ν představuje Poissonovo číslo. V horní polovině se nachází dislokace v ζ . Tvary komplexních potenciálů $\varphi(z, \zeta), \psi(z, \zeta)$ pak jsou

$$\varphi_1(z, \zeta) = \varphi_{1s}(z, \zeta) + \varphi_{1i}(z, \zeta) \quad (z \in M_1), \quad (4.11)$$

$$\psi_1(z, \zeta) = \psi_{1s}(z, \zeta) + \psi_{1i}(z, \zeta) \quad (z \in M_1), \quad (4.12)$$

$$\varphi_2(z, \zeta) = \varphi_{1s}(z, \zeta) + \varphi_{2i}(z, \zeta) \quad (z \in M_2), \quad (4.13)$$

$$\psi_2(z, \zeta) = \psi_{1s}(z, \zeta) + \psi_{2i}(z, \zeta) \quad (z \in M_2), \quad (4.14)$$

kde $z = x + iy$ a $\zeta = \xi + i\eta$.

Členy s indexem s se nazývají singulární a jejich tvar je

$$\varphi_{1s}(z, \zeta) = -\gamma_1 \log(z - \zeta), \quad (4.15)$$

$$\psi_{1s}(z, \zeta) = -k_1 \bar{\gamma}_1 \log(z - \zeta) + \gamma_1 \frac{\bar{\zeta}}{z - \zeta} + \gamma_1. \quad (4.16)$$

Reprezentují řešení v nekonečném tělese v případě, že oba materiály M_1, M_2 jsou identické.

Členy s indexem i se nazývají podobnostní (image) a jejich tvar je

$$\varphi_{1i}(z, \zeta) = \delta_1 (\bar{\psi}_{1s}(z, \zeta) + z \bar{\varphi}'_{1s}(z, \zeta)), \quad (4.17)$$

$$\psi_{1i}(z, \zeta) = -\delta_1 z \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\psi}_{1s}(z, \zeta) + z \bar{\varphi}'_{1s}(z, \zeta)) + \lambda_1 \bar{\varphi}_{1s}(z, \zeta), \quad (4.18)$$

$$\varphi_{2i}(z, \zeta) = \lambda_1 \varphi_{1s}(z, \zeta), \quad (4.19)$$

$$\psi_{2i}(z, \zeta) = \delta_1 \psi_{1s}(z, \zeta) + (\delta_1 - \lambda_1) z \varphi'_{1s}(z, \zeta). \quad (4.20)$$

Reprezentují modifikaci kvůli přítomnosti rozdílného materiálu ve spodní polovině nekonečného tělesa M_2 . Konstanty $k_1, \gamma_1, \lambda_1, \delta_1$ nabývají pro dislokaci (tyto vztahy komplexních potenciálů lze použít i pro osamělou sílu) těchto hodnot

$$k_1 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{i\mu_1 b}{\pi(\kappa_1 + 1)}, \quad \delta_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{1 + \beta_1}, \quad \lambda_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{1 - \beta_1}, \quad (4.21)$$

kde $\mathbf{b} = bx + iby$ je tzv. *Burgersův vektor* (část 2.3 v [19], část 2.1 v [10]), $\kappa_1 = 3 - 4\nu_1$ pro rovinnou deformaci nebo $\kappa_1 = (3 - \nu_1)/(1 + \nu_1)$ pro rovinnou napjatost a α_1, β_1 jsou tzv. *Dundursovi parametry* [21], jejichž tvar je následující

$$\alpha_1 = \frac{\mu_2(\kappa_1 + 1) - \mu_1(\kappa_2 + 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}, \quad \beta_1 = \frac{\mu_2(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_2 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}. \quad (4.22)$$

Komplexně sdružené členy získáme na základě této notace

$$\overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})},$$

tedy

$$\overline{\varphi}_{1s}(z, \zeta) = \overline{\varphi}_{1s}(\bar{z}, \bar{\zeta}) = -\bar{\gamma}_1 \log(z - \bar{\zeta}), \quad (4.23)$$

$$\overline{\psi}_{1s}(z, \zeta) = \overline{\psi}_{1s}(\bar{z}, \bar{\zeta}) = -k_1 \gamma_1 \log(z - \bar{\zeta}) + \bar{\gamma}_1 \frac{\bar{\zeta}}{z - \bar{\zeta}} + \bar{\gamma}_1. \quad (4.24)$$

Poznámka: Pokud se dislokace (případně osamělá síla) nachází ve spodní polovině tělesa M_2 , pak stačí výše uvedené vztahy přeindexovat ($1 \rightarrow 2$)

Kapitola 5

Integrální rovnice - stanovení součinitele intenzity napětí

V této kapitole se postupně dopracujeme k tvaru integrální rovnice a z jejího řešení jsme schopni stanovit součinitel intenzity napětí K_I . K získání integrální rovnice využijeme tzv. *Buecknerův princip* a modelování trhliny pomocí *metody spojitě rozložených dislokací* a faktu, že dislokaci jsme schopni dobře popsat a stanovit např. pole posunutí, které tato dislokace v materiálu vyvolá. Pro jednoduchost budeme uvažovat rovinný problém průchozí trhliny v zatíženém homogením prostředí dle obrázku 5.1(a). Veškerý text, vztahy a poznatky této kapitoly lze nalézt v [10] a [11].

5.1 Buecknerův princip a metoda spojitě rozložených dislokací

Buecknerův princip

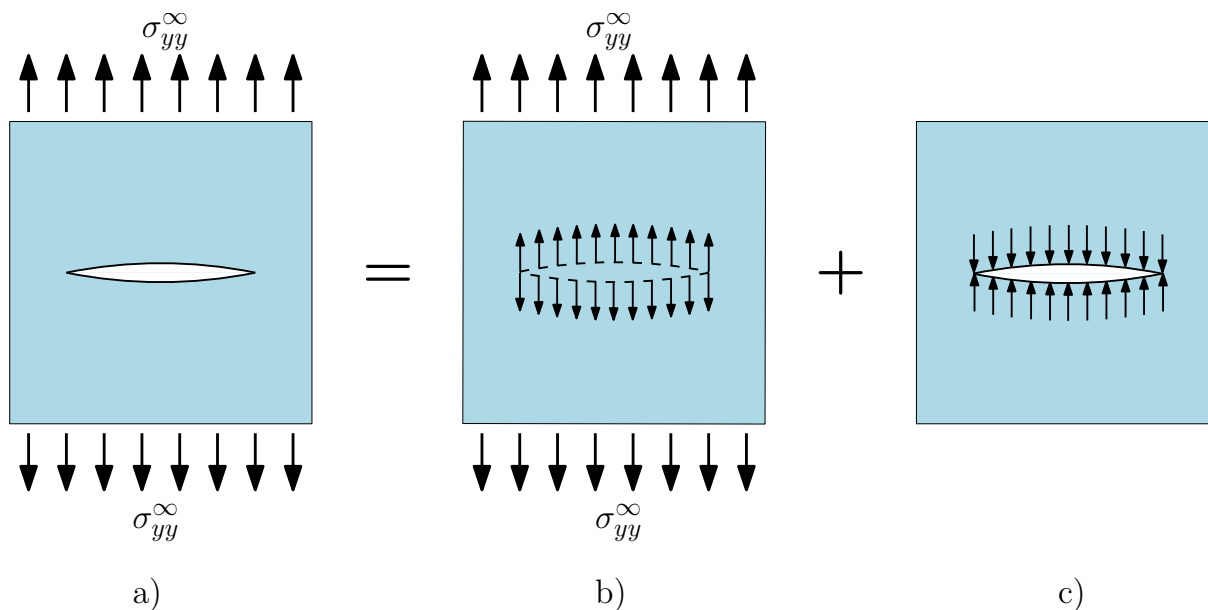
Umožňuje nám získat řešení úlohy (obr. 5.1(a)) superpozicí dvou řešení úloh (obr. 5.1(b,c))

- úloha (b) - homogenní neporušené prostředí zatížené v nekonečnu
- úloha (c) - nezatížené prostředí s trhlinou, na jejíž lících jsou předepsaná tzv. *korekční napětí*, která jsou stejně velká, ale opačně orientovaná, než napětí působící v místě trhliny v úloze (b)

Metoda spojitě rozložených dislokací

Umožňuje nám stanovit korekční napětí pomocí vkládání nadbytečného materiálu mezi líce trhliny. Vložený materiál je pouze matematickým modelem (reálná trhlina je samozřejmě prázdná), který slouží k stanovení korekčních napětí a současně simuluje rozevření trhliny.

Vkládaný materiál si můžeme představit jako kombinaci nekonečně tenkých pásů - nosičů soustředné deformace a způsob vkládání je zobrazen na obrázku 5.2. První pás začíná v jednom vrcholu trhliny a pokračuje až do nekonečna nebo ke vzdálenému okraji (5.2(a)). Vložení dostatečného množství pásů (5.2(b)) a následné odebrání pásů



Obrázek 5.1: Buecknerův princip

na vhodných místech (5.2(c)) vede k požadované konfiguraci simulující trhlinu. Každý pás vloženého materiálu vnáší do tělesa relativní posuv $\delta \mathbf{b}$ a generuje tím určité napětí. Matematické řešení pro toto napětí od jednoho pásu může být použito jako *Greenova funkce* úlohy (c) a napětí generované výsledným posuvem od všech pásů získáme jednoduše součtem nebo integrací této Greenovy funkce.

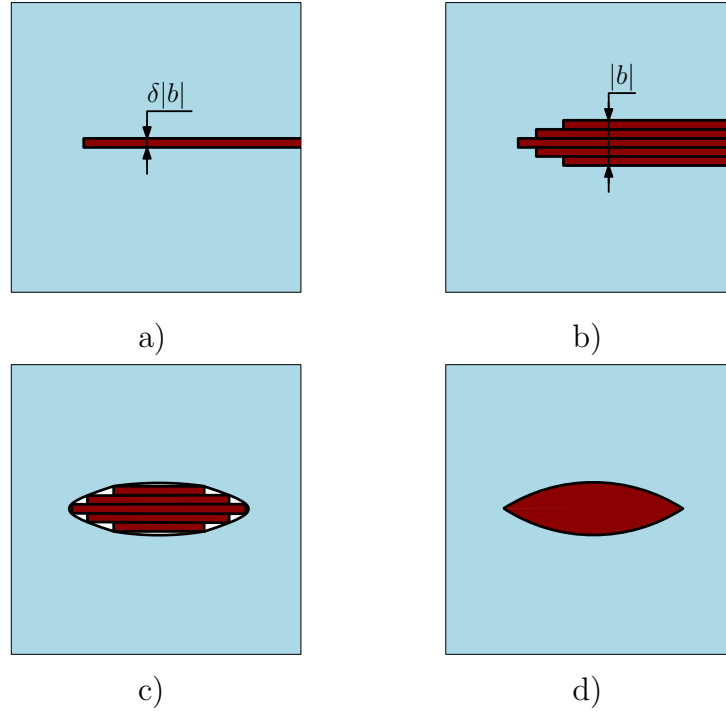
Pás vloženého materiálu je vlastně analogií dobře známé hranové dislokace a v řadě vlastností se shoduje s hranovou dislokací, která vzniká jako defekt krystalové mřížky (viz např. příloha B v [19]). Fyzikálně žádné poruchy nevznikají - jedná se jen o matematický nástroj umožňující zavést self-konzistentní stav napětí v tělese (tj. odpovídající vložené soustředěné deformaci a okrajovým podmínkám).

5.2 Dislokace

V rovině můžeme dislokaci modelovat jako polonekonečný zářez libovolné trajektorie do kterého vložíme nebo naopak z něj vyjmeme pás materiálu o konstantní šířce a opět spojíme materiál dohromady. Konstantní šířka pásu je známá jako tzv. Burgersův vektor \mathbf{b} . Důležitou vlastností hranové dislokace je, že napětí, které způsobuje její přítomnost, je nezávislé na orientaci zářezu a závisí pouze na složkách Burgersova vektoru (b_x, b_y).

Způsoby vytvoření hranové dislokace - na obrázku 5.3 jsou znázorněny dva způsoby vytvoření hranové dislokace s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = b_x$. V obou případech je indukováno stejné pole napětí a posuvů.

- případ (a) - je veden řez materiálem podél osy y , do kterého vložíme tenký pás materiálu o tloušťce b_x a následně materiál opět spojíme (obr.5.3(a))
- případ (b) - je veden řez materiálem podél osy x , materiál pod řezem posuneme ve směru osy x o b_x a následně materiál opět spojíme (obr.5.3(b))



Obrázek 5.2: Ilustrace vloženého materiálu pomocí vkládání a vyjímání tenkých pásů

Obrázek 5.3 ilustruje také znaménkovou konvenci zavedenou pro Burgersův vektor \mathbf{b} Dundurseem [21], kterou zavedl, aby nedocházelo k nejednoznačnosti. Jako levá strana se označuje strana řezu, která leží nalevo od řezu pozorovaného z jádra dislokace a značí se znaménkem (-). Pravá strana se získá analogicky a značí se znaménkem (+). Znaménko složky b_x Burgersova vektoru \mathbf{b} určuje křivka obcházející kořen dislokace z libovolného bodu levé hrany řezu do jemu odpovídajícího bodu pravé hrany řezu, tj. po ukončení oběhu křivky se dostane nespojitost posunutí ve směru osy x co do velikosti a orientace shodná se složkou b_x

$$b_x = u(+) - u(-). \quad (5.1)$$

Pole napětí způsobené dislokací

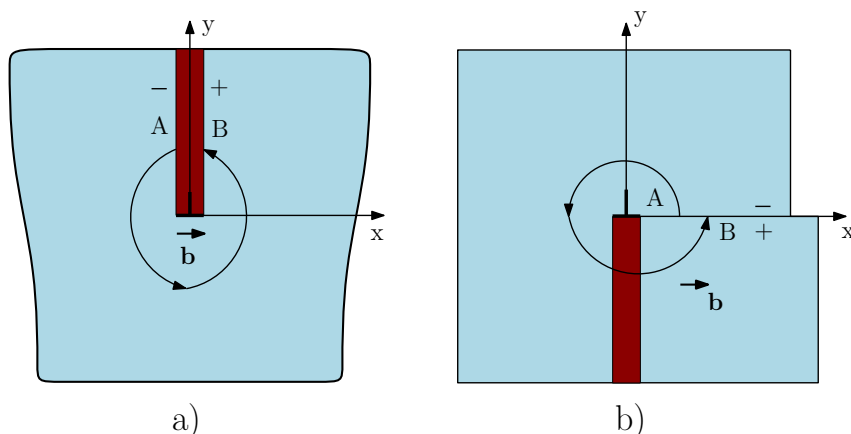
Mějme nekonečné těleso obsahující hranovou dislokaci v počátku s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$, pak napětí indukované v bodě (x, y) je dáno vztahy

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ b_x \left[-\frac{y}{r^4}(3x^2 + y^2) \right] + b_y \left[\frac{x}{r^4}(x^2 - y^2) \right] \right\}, \quad (5.2)$$

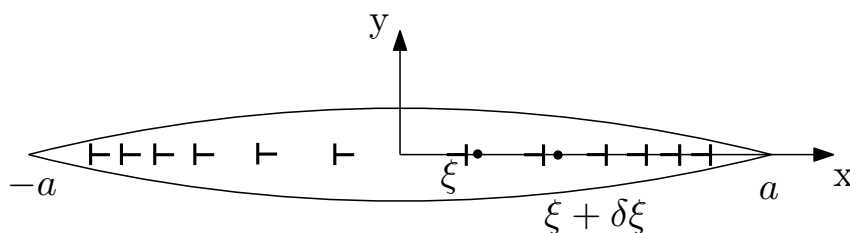
$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ b_x \left[\frac{y}{r^4}(x^2 - y^2) \right] + b_y \left[\frac{x}{r^4}(3x^2 + y^2) \right] \right\}, \quad (5.3)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ b_x \left[\frac{y}{r^4}(x^2 - y^2) \right] + b_y \left[\frac{x}{r^4}(x^2 - y^2) \right] \right\}, \quad (5.4)$$

kde μ je modul pružnosti ve smyku a κ je konstanta, která nabývá hodnoty $\kappa = 3 - 4\nu$ pro rovinnou deformaci nebo $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ pro rovinnou napjatost, konstanta ν označuje Poissonovo číslo a $r^2 = x^2 + y^2$.



Obrázek 5.3: Způsoby vytvoření hranové dislokace: (a) pomocí vložení materiálu (climb), (b) pomocí posunutí v ose x (glide)



Obrázek 5.4: Trhlina modelovaná pomocí hranových dislokací

5.3 Integrální rovnice

Nyní si odvodíme tvar integrální rovnice s využitím poznatků z předchozích sekcí. Úlohu průchozí trhliny s délkou trhliny $2a$ v zatíženém homogením prostředí (obr. 5.1) rozdělíme pomocí Buecknerova principu na dvě úlohy:

1. úloha - stanovení napětí $\tilde{\sigma}_{ij}(x, y)$ v místech trhliny v materiálu při absenci trhliny (obr. 5.1(b))
2. úloha - stanovení korekčního napětí $\bar{\sigma}_{ij}(x, y)$, které je indukované pomocí vloženého materiálu mezi líce trhliny (obr. 5.1(c))

Ze superpozice plyne, že výsledné napětí σ_{ij} dostaneme součtem těchto dvou úloh, tedy

$$\sigma_{ij}(x, y) = \tilde{\sigma}_{ij}(x, y) + \bar{\sigma}_{ij}(x, y). \quad (5.5)$$

Za podmínky, že okrajové podmínky jsou splněny.

Označme normálové napětí $N(x)$ a smykové napětí $S(x)$ působící v místě trhliny. Protože platí $\tilde{\sigma}_{yy}(x, 0) \equiv \sigma_{yy}^{\infty}(x)$ a $\tilde{\sigma}_{xy}(x, 0) \equiv 0 \quad \forall y$, tak okrajové podmínky můžeme zapsat takto

$$N(x) \equiv \sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_{yy}^{\infty}(x, 0) + \bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = 0, \quad |x| < a \quad (5.6)$$

$$S(x) \equiv \sigma_{xy}(x, 0) = \bar{\sigma}_{xy}(x, 0) = 0. \quad |x| < a \quad (5.7)$$

První úlohu tedy máme vyřešenou a zbývá úloha druhá - stanovení korekčního napětí. Jak již bylo řečeno, tak korekční napětí může být stanoveno pomocí vkládání materiálu mezi líce trhliny a tento vkládaný materiál je možné chápat jako hranové dislokace (viz části 4.1 a 4.2). Uvažujme tedy trhlínu modelovanou pomocí spojitě rozložených dislokací s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = (0, b_y)$ viz. obrázek 5.4. Infinitesimální úsek tohoto rozložení, např. mezi body $[\xi, 0]$ a $[\xi + \delta\xi, 0]$ lze charakterizovat jedinou izolovanou dislokací s nekonečně malým Burgersovým vektorem δb_y

$$\delta b_y = B_y(\xi)\delta\xi, \quad (5.8)$$

kde $B_y(\xi)$ je *hustota dislokací* v bodě ξ . Napětí, které tato dislokace generuje je dáno rovnicemi (5.2) - (5.4), kde proměnou x je třeba nahradit výrazem $x - \xi$ a položit $b_x = 0$ a $y = 0$

$$\bar{\sigma}_{yy}^{dis}(x, 0) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \frac{\delta b_y(\xi)}{x - \xi} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \frac{B_y(\xi)}{x - \xi} \delta\xi. \quad (5.9)$$

Napětí σ_{yy} generované spojitým rozdělením dislokací podél délky trhliny pak získáme integrací napětí $\bar{\sigma}_{yy}^{dis}$ přes délku trhliny

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-a}^a \frac{B_y(\xi)}{x - \xi} d\xi, \quad (5.10)$$

kde pro hustotu dislokace platí

$$B_y(\xi) = \frac{db_y(\xi)}{d\xi}. \quad (5.11)$$

Je zřejmý úzký vztah mezi rozevřením trhliny $g(x)$ a hustotou dislokace v bodě $B_y(\xi)$. Nutno podotknout, že $g(-a) = 0$ a pro vložené dislokace se záporným Burgersovým vektorem $-b_y$ můžeme rozevření trhliny pro $x > -a$ vyjádřit ve tvaru

$$g(x) = - \int_{-a}^x B_y(\xi) d\xi, \quad (5.12)$$

nebo

$$B_y(\xi) = - \frac{dg(\xi)}{d\xi}. \quad (5.13)$$

Dosadíme-li rovnici (5.10) do rovnice (5.6) dostaneme výraz

$$-\frac{\kappa + 1}{2\mu} \sigma_{yy}^\infty(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{B_y(\xi)}{x - \xi} d\xi, \quad (5.14)$$

což je tzv. *singulární integrální rovnice prvního druhu* obsahující *Cauchy jádro* $(x - \xi)^{-1}$ (objevuje se ve všech rovinných úlohách s trhlínou) a neznámou hustotu dislokace $B_y(\xi)$, přičemž integrál v této rovnici je nutné brát ve smyslu jeho hlavní hodnoty (část 2.2 v [11]). Z matematických důvodů je výhodné tuto rovnici normalizovat na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Této normalizace dosáhneme substitucí, která pro obecný případ intervalu $\langle a, b \rangle$ má tvar

$$\begin{aligned} 2\xi &= (b - a)s + (b + a), \\ 2x &= (b - a)t + (b + a). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pro náš interval trhliny $\langle -a, a \rangle$ tedy platí $a = -a, b = a$ a substituce (5.15) pak nabývá tvaru

$$\xi = as, \quad x = as. \quad (5.16)$$

Singulární integrální rovnice (5.14) přejde po substituci (5.16) na tvar

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{B_y(s)}{t-s} ds, \quad |t| < 1, \quad (5.17)$$

kde

$$F(t) = -\frac{\kappa+1}{2\mu} \sigma_{yy}^\infty(t). \quad (5.18)$$

Řešení této integrální rovnice (5.17) je možné odvodit na základě Muschelišviliho teorie [26]. Z jeho teorie vyplývá, že řešení hustoty dislokace $B_y(s)$ je třeba hledat jako součin tzv. *fundamentálního řešení* $\omega(s)$ a neznámé ohraničené funkce $\phi_y(s)$

$$B_y(s) = \omega(s)\phi_y(s), \quad \omega(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (5.19)$$

Řešení rovnice (5.17) je pak dáno výrazem

$$B_y(t) = -\frac{\omega(t)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(s)}{\omega(s)(t-s)} ds + C\omega(t), \quad (5.20)$$

kde C je libovolná konstanta, která se určí z podmínky nulového rozevření konců trhliny

$$g(-a) = g(+a) = 0. \quad (5.21)$$

Podmínka (5.21) s rovnicí (5.12) dává tzv. *podmínku konzistence*

$$\int_{-a}^a B_y(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 B_y(s) ds = 0, \quad (5.22)$$

ze které se určí neznámá konstanta C ve vztahu (5.20).

Stanovení součinitele intenzity napětí

Pomocí $B_y(\xi)$ lze stanovit nejen rozevření trhliny $g(x)$ (5.12), ale i součinitel intenzity napětí v koncových bodech trhliny. Nejprve stanovíme rozevření trhliny pomocí vztahů (2.20) takto

$$g(r) = u_y(r, +\pi) - u_y(r, -\pi) = \frac{\kappa+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}}. \quad (5.23)$$

Derivací (5.23) dle r získáme gradinet rozevření trhliny v koncových bodech trhliny, který je úměrný součiniteli intenzity napětí

$$\frac{dg(r)}{dr} = \frac{\kappa+1}{2\mu} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (5.24)$$

Pro pravou stranu kořene trhliny, r je měřeno v záporném směru x platí $dg(r)/dr = +B_y(r)$ a $r = a - x = a(1 - t)$ a součinitel intenzity napětí ve vrcholu trhliny $t = +1$ je pak vztažen k

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \frac{dg(r)}{dr} = \lim_{t \rightarrow 1} [\sqrt{a(1-t)} B_y(t)] = \sqrt{\frac{a}{2}} \phi_y(+1). \quad (5.25)$$

Obdobnou úvahou se stanoví i součinitel intenzity napětí v druhém vrcholu trhliny a společně jej můžeme zapsat ve tvaru

$$K_I(\pm 1) = \pm \sqrt{\pi a} \frac{2\mu}{\kappa + 1} \phi_y(\pm 1). \quad (5.26)$$

Poznámka: Integrální rovnice v této kapitole byla odvozena pro rovinnou úlohu s průchozí trhlinou v zatíženém homogením prostředí. V případě složitější geometrie tělesa s trhlinou nebo při existenci nehomogenit nabývá integrální rovnice složitějšího tvaru a její řešení již nelze hledat v uzavřené formě a je nutné použít vhodných numerických metod.

Kapitola 6

Trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní

V této kapitole nejdříve stanovíme na základě poznatků z předchozích kapitol singulární integrální rovnici prvního druhu pro konkrétní úlohu trhliny konečné délky v bi-materiálu a následně ukážeme řešení této rovnice pomocí převodu na soustavu N -rovníc o N -neznámých. Použité vztahy a poznatky této kapitoly lze nalézt v [10], [12], [14], [15], [19], [26] a [27].

6.1 Stanovení integrální rovnice

Uvažujme rovinnou úlohu trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní délky $2a$ dle obrázku 6.1. Pro tuto úlohu nemůžeme použít integrální rovnici 5.14. Singulární integrální rovnice prvního druhu nyní nabývá obecně tohoto tvaru

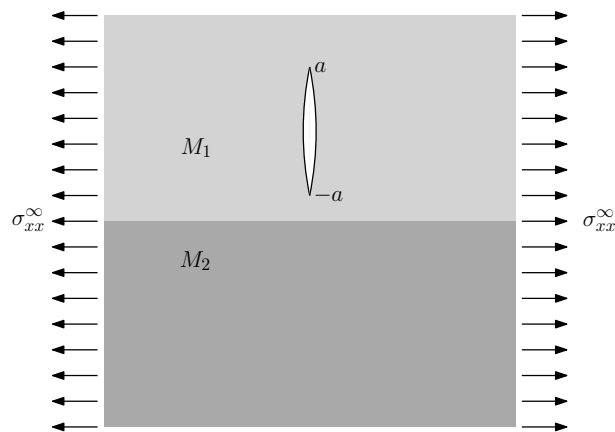
$$g(t) = \int_{-1}^1 B(s) \frac{1}{t-s} ds + \int_{-1}^1 B(s) K(s,t) ds \quad |t| < 1, \quad (6.1)$$

kde $K(s, t)$ je kvadraticky integrovatelná funkce v proměnné s , $g(t)$ je nějaká ohraničená funkce a $B(s)$ je hledaná neznámá funkce hustota dislokace. První integrál v (6.1) je singulární a je nutno ho uvažovat ve smyslu jeho hlavní hodnoty (viz. část 2.2 v [11]).

Řešení této rovnice již nelze hledat v uzavřené formě a je nutno použít numerických metod. Obecný přístup k řešení singulární integrální rovnice prvního druhu zde nebudeme rozebírat. Lze jej nalézt např. v [27]. Zde naopak bude uvedeno konkrétní stanovení a řešení singulární integrální rovnice prvního druhu pro úlohu dle obrázku 6.1. K jejímu stanovení budeme v podstatě kopírovat postup uvedený v kapitole 4. Cílem je tedy nalezení tvaru integrální rovnice a její převod na soustavu N -rovníc o N -neznámých, jak uvidíme dále.

Na základě Buecknerova principu (obr. 5.1) rozdělíme naši úlohu na dvě samostatné úlohy:

1. úloha - stanovení napětí $\tilde{\sigma}_{xx}(x, y)$ v místech trhliny v materiálu při absenci trhliny (obdoba obr. 5.1(b))
2. úloha - stanovení korekčního napětí $\bar{\sigma}_{xx}(x, y)$, které je indukované pomocí vloženého materiálu mezi líce trhliny (obdoba obr. 5.1(c))



Obrázek 6.1: Trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní

1. úloha je řešena pomocí metody konečných prvků (MKP), konkrétně v komerčním systému ANSYS. Získaná napětí v konkrétních místech trhliny jsou co do velikosti stejná, ale opačně orientovaná jak korekční napětí, která tvoří levou stranu rovnice 6.1.

2. úloha je řešena pomocí metody spojitě rozložených dislokací, která nám umožňuje na základě známého napětí $\bar{\sigma}_{xx}$ od jedné dislokace (charakterizované Burgersovým vektorem \mathbf{b}) stanovit pomocí integrace přes délku trhliny napětí $\bar{\sigma}_{xx}$ generované trhlinou. Tím dostáváme pravou stranu rovnice (6.1).

Předpokládejme, že již známe řešení první úlohy. Ke stanovení singulární integrální rovnice prvního druhu je tedy klíčové stanovení napětí $\bar{\sigma}_{xx}$ od jedné dislokace. V třetí kapitole jsme již ukázali, jak lze získat napětí a posuvy pomocí funkcí napjatosti (tzv. Muschelišviliho komplexní potenciály) a rovněž jsme již ukázali tvary těchto potenciálů pro dislokaci v bi-materiálu, čehož teď využijeme.

Napětí $\bar{\sigma}_{xx}$ od jedné dislokace tedy získáme z rovnice 4.8 takto

$$\bar{\sigma}_{xx}^{dis} = \text{Re}[2\Phi_1(z, \zeta) - \bar{z}\Phi_1'(z, \zeta) - \Psi_1(z, \zeta)]. \quad (6.2)$$

K jeho stanovení tedy potřebujeme znát derivace komplexních potenciálů $\varphi_1(z, \zeta)$, $\psi_1(z, \zeta)$ (4.11, 4.12).

Kompletní odvození zde nebude uvedeno a je možné ho nalézt v dodatku A. Ukážeme zde jen konkrétní tvary komplexních funkcí $\varphi_1(z, \zeta)$, $\psi_1(z, \zeta)$. Poukažme ještě na skutečnost, že trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní je modelována pomocí dislokací s Burgersovým vektorem $\mathbf{b} = (b_x, 0)$, což znamená, že konstanty γ_1 a $\bar{\gamma}_1$ (4.21) nabývají hodnot

$$\gamma_1 = \frac{i\mu_1 b_x}{\pi(\kappa_1 + 1)}, \quad \bar{\gamma}_1 = -\frac{i\mu_1 b_x}{\pi(\kappa_1 + 1)}, \quad (6.3)$$

tedy platí

$$\bar{\gamma}_1 = -\gamma_1. \quad (6.4)$$

Tvary komplexních potenciálů $\varphi_1(z, \zeta)$, $\psi_1(z, \zeta)$ pak nabývají těchto tvarů

$$\varphi_1(z, \zeta) = \gamma_1 \left(-\ln(z - \zeta) + \delta_1 \left[-k_1 \ln(z - \bar{\zeta}) - \frac{\zeta - z}{z - \bar{\zeta}} - 1 \right] \right), \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(z, \zeta) = \gamma_1 \left(k_1 \ln(z - \zeta) + \frac{\bar{\zeta}}{z - \zeta} + 1 + \frac{\delta_1 z (k_1 - 1)}{z - \bar{\zeta}} + \right. \\ \left. + \frac{\delta_1 z (z - \zeta)}{(z - \bar{\zeta})^2} + \lambda_1 \ln(z - \bar{\zeta}) \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

kde konstanty k_1, λ_1, δ_1 nabývají hodnot dle vztahu (4.21).

Derivací $\varphi_1(z, \zeta)$, $\psi_1(z, \zeta)$ podle proměnné z a dosazením do (6.2) získáme napětí od jedné dislokace ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}^{dis} = \operatorname{Re} \left\{ \gamma_1 \left(-\frac{k_1 + 2}{z - \zeta} - \frac{\bar{z} - \bar{\zeta}}{(z - \zeta)^2} - \frac{3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{z - \bar{\zeta}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\delta_1(3\zeta + z(k_1 - 5) + \bar{z}(-k_1 + 2))}{(z - \bar{\zeta})^2} + \frac{2\delta_1(\zeta - z)(\bar{z} - z)}{(z - \bar{\zeta})^3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dále dosadíme $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$ do rovnice (6.7), položíme $x = \xi$, dosadíme γ_1 z rovnice (6.3) a následnými úpravami získáme konečný tvar napětí od jedné dislokace

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}^{dis} = \frac{\mu_1 b_x}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(-\frac{k_1 + 1}{y - \eta} - \frac{3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{y + \eta} + \right. \\ \left. + \frac{\delta_1(3\eta + 2k_1 y - 7y)}{(y + \eta)^2} - \frac{4\delta_1 y(\eta - y)}{(y + \eta)^3} \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Nyní nahradíme v rovnici (6.8) Burgersův vektor b_x na základě rovnice (5.8) výrazem

$$\delta b_x = B_x(\eta) \delta \eta, \quad (6.9)$$

kde $B_x(\eta)$ je hustota dislokace v bodě η . Integrací přes délku trhliny dostáváme $\bar{\sigma}_{xx}$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} = \frac{-\mu_1(k_1 + 1)}{\pi(\kappa_1 + 1)} \int_{h-a}^{h+a} \frac{B_x(\eta)}{y - \eta} d\eta + \frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \int_{h-a}^{h+a} B_x(\eta) \left(-\frac{3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{y + \eta} + \right. \\ \left. + \frac{\delta_1(3\eta + 2k_1 y - 7y)}{(y + \eta)^2} - \frac{4\delta_1 y(\eta - y)}{(y + \eta)^3} \right) d\eta, \end{aligned} \quad (6.10)$$

což je singulární integrální rovnice pro trhlinu kolmou k bi-materiálovému rozhraní. Tuto rovnici ještě znormalizujeme z intervalu $\langle h - a, h + a \rangle$, kde h značí vzdálenost středu trhliny od bi-materiálového rozhraní substitucí dle vztahu (5.15) na interval $\langle -1, 1 \rangle$. V našem případě tato substituce nabývá tvaru

$$\eta = as + h \quad y = at + h. \quad (6.11)$$

Singulární integrální rovnice prvního druhu pak pomocí (6.11) a předpokladu, že známe řešení první úlohy přejde na tvar

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(t) = \frac{-\mu_1(k_1 + 1)}{\pi(\kappa_1 + 1)} \int_{-1}^1 \frac{B_x(s)}{t - s} ads + \frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \int_{-1}^1 B_x(s) a \left(-\frac{3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{a(t + s) + 2h} + \right. \\ \left. + \frac{\delta_1(3as - 2h + 2k_1 at - 7at)}{(a(t + s) + 2h)^2} - \frac{4\delta_1(at + h)(a(s - t))}{(a(t + s) + 2h)^3} \right) ds, \end{aligned} \quad (6.12)$$

kde $\sigma_{xx}(t) = -\tilde{\sigma}_{xx}(x, y)$ v místech trhliny materiálu při absenci trhliny (viz 1. úloha).

Nyní máme hledaný tvar integrální rovnice pro úlohu trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní, ale jak už bylo řečeno, tak řešení této rovnice (6.12) nelze vyjádřit v uzavřeném konečném tvaru, ale musí se hledat jen v předem zvoleném stupni přiblížení (aproximace). Rovnici (6.12) řešíme převodem na soustavu N -rovníc o N -neznámých, kde N značí stupeň aproximace. Způsob převodu je ukázán v další části.

6.2 Řešení integrální rovnice

K získání vlastního řešení integrální rovnice (6.11) využijeme nahrazení hledané hustoty dislokace vztahem (5.19), který ukázal Muschelišvili [26], tedy pro náš případ

$$B_x(s) = \omega(s)\phi_x(s), \quad \omega(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad (6.13)$$

kde $\omega(s)$ je tzv. fundamentální řešení integrální rovnice a $\phi_x(s)$ je nějaká neznámá ohraničená funkce.

Poznámka: V obecném případě tj. pro řešení rovnice (6.1) je fundamentální řešení ve tvaru

$$\omega(s) = (1-s)^{\lambda_1}(1+s)^{\lambda_2},$$

kde exponent λ_1, λ_2 je tzv. exponent singularity, který může nabývat hodnot z intervalu $(-1, 1)$. V našem případě platí $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda = -1/2$. Více o této problematice v [27].

Dále využijeme dvojí aproximace pomocí tzv. *Čebyševových polynomů 1. druhu* [15], kde využijeme jejich vlastnosti, že jsou ortogonální na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ s váhou $1/(\sqrt{1-x^2})$

$$\begin{aligned} &= 0 \quad i \\ \int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{\pi}{2} \quad i = j \neq 0, \\ &= \pi \quad i = j = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

kde T_i značí Čebyševův polynom 1. druhu stupně i .

1. aproximace - se týká funkce $\phi_x(s)$, kterou vyjádříme pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu takto

$$\phi_x(s) = \sum_{i=1}^N T_i(s)c_i, \quad (6.15)$$

kde c_i jsou neznámé konstanty, které dostaneme jako řešení soustavy N -rovníc o N -neznámých.

2. aproximace - se týká nesingulárního integrálu v rovnici (6.12), konkrétně členu, který můžeme označit jako $K(s, t)$ dle značení v rovnici (6.1).

$$\begin{aligned} K(s, t) &= a \left(-\frac{3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{a(t+s) + 2h} + \frac{\delta_1(3as - 2h + 2k_1at - 7at)}{(a(t+s) + 2h)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\delta_1(at + h)(a(s-t))}{(a(t+s) + 2h)^3} \right) = \sum_{j=1}^N T_j(s)d_j(t), \end{aligned} \quad (6.16)$$

kde $d_j(t)$ jsou konstanty určené ze vztahu

$$d_j(t) = \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} K \left(\cos \left(\frac{\pi (k - \frac{1}{2})}{N+1} \right), t \right) \cos \left(\frac{\pi j (k - \frac{1}{2})}{N+1} \right). \quad (6.17)$$

Poznámka: Standartně se aproximace pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu zapisuje

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{N-1} T_j(x)c_j,$$

kde konstanty c_i se určí následovně

$$c_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f \left(\cos \left(\frac{\pi (k - \frac{1}{2})}{N} \right) \right) \cos \left(\frac{\pi j (k - \frac{1}{2})}{N} \right).$$

Z podmínky konzistence (5.22) však plyne, že konstanta $c_0 = 0$ a tak ji do aproximace ani nezahrnujeme. Přeindexování sumace z $N - 1$ na N ve vztazích (6.15, 6.16) je již jen formalitou.

Nyní aplikujeme výše zmíněné aproximace (6.15, 6.16) na singulární integrální rovnici (6.12) a dostáváme

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(t) &= \frac{-\mu_1(k_1 + 1)}{\pi(\kappa_1 + 1)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}(t-s)} \sum_{i=1}^N T_i(s)c_i ds + \\ &+ \frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \sum_{i=1}^N T_i(s)c_i \sum_{j=1}^N T_j(s)d_j(t) ds. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Nesingulární integrál v (6.18) řešíme pomocí vlastnosti ortogonalit Čebyševových polynomů 1. druhu, tedy dle vztahu (6.14) a singulární integrál vyřešíme pomocí následujícího vztahu (viz vztahy 7.29, 7.73 v [27])

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_N(s)}{\sqrt{1-s^2}(t-s)} ds = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi} U_{N-1}(t), \quad (6.19)$$

kde $T_N(s)$ je Čebyševův polynom 1. druhu stupně N , $\Gamma(-\frac{1}{2})$, $\Gamma(\frac{3}{2})$ je tzv. *Gamma funkce* [14] a $U_{N-1}(t)$ je Čebyševův polynom 2. druhu stupně $N - 1$ v bodě t [14].

Nyní tedy máme vše potřebné k převedení singulární integrální rovnice prvního druhu pro případ trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní (6.12) na soustavu N -rovníc o N -neznámých. Pro její vyřešení si zvolíme stupeň aproximace N , materiálové charakteristiky popisující materiály $M1$ a $M2$ tedy $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$, kde μ je modul pružnosti ve smyku, ν představuje Poissonovo číslo, poloviční délku trhliny a , vzdálenost středu trhliny od bi-materiálového rozhraní h , odečteme napětí $\sigma_{xx}(t)$ v N -bodech $t_1 \dots t_N$, vypočítáme hodnoty koeficientů $d_j(t)$ v těchto bodech a rovněž vypočítáme hodnoty Čebyševových polynomů 2. druhu $U_{N-1}(t)$ v těchto bodech.

Například pro $N = 3$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(t_1) &= \frac{-\mu_1(k_1 + 1)\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi(\kappa_1 + 1)} (U_0(t_1)c_1 + U_1(t_1)c_2 + U_2(t_1)c_3) + \\
&+ \frac{\mu_1}{2(\kappa_1 + 1)} (c_1d_1(t_1) + c_2d_2(t_1) + c_3d_3(t_1)), \\
&\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\sigma_{xx}(t_3) &= \frac{-\mu_1(k_1 + 1)\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi(\kappa_1 + 1)} (U_0(t_3)c_1 + U_1(t_3)c_2 + U_2(t_3)c_3) + \\
&+ \frac{\mu_1}{2(\kappa_1 + 1)} (c_1d_1(t_3) + c_2d_2(t_3) + c_3d_3(t_3)).
\end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy N -rovníc o N -neznámých získáváme N -konstant c_i a pomocí vztahu (6.15) získáme funkci $\phi_x(s)$ a pomocí této funkce a vztahu (5.26) můžeme vyjádřit součinitel intenzity napětí $K_I(\pm 1)$ v krajních bodech trhliny ve tvaru

$$K_I(\pm 1) = \pm\sqrt{\pi a} \frac{2\mu_1}{\kappa + 1} \phi_x(\pm 1). \quad (6.20)$$

Kapitola 7

Řešení problému

V této kapitole ukážeme jednotlivé výpočtové modely, které byly použity ke stanovení součinitele intenzity napětí K_I trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní pro různé konfigurace materiálů M_1, M_2 . Nejdříve budou uvedeny modely potřebné k získání výsledků pomocí metody spojitě rozložených dislokací (část 7.2 a 7.3), která je jádrem této práce. Odvození této metody je ukázáno v předchozích kapitolách. Poté bude ukázán model ke stanovení součinitele intenzity napětí K_I pomocí metody konečných prvků (část 7.4), který použijeme k overení výsledků stanovených pomocí metody spojitě rozložených dislokací.

7.1 Formulace problému a stanovení cílů

Uvažujme rovinou úlohu zatíženou trhlinou kolmou k bi-materiálovému rozhraní dle obrázku 7.1. Trhlina je délky $2a$ a vzdálenost jejího středu od rozhraní je h . Materiály M_1, M_2 jsou homogenní lineárně elastické a jsou charakterizovány příslušnými moduly pružnosti E_1, E_2 a Poissonovými čísly ν_1, ν_2 . Uvažujeme případ rovinné deformace a úlohu provedeme pro následující 4 kombinace materiálů

1. kombinace s označením $\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{1}$, kde materiály M_1, M_2 volíme takto

$$M_1 : E_1 = 200000MPa, \quad \nu_1 = 0.3 \quad M_2 : E_2 = 50000MPa, \quad \nu_2 = 0.3,$$

2. kombinace s označením $\frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{1}$, kde materiály M_1, M_2 volíme takto

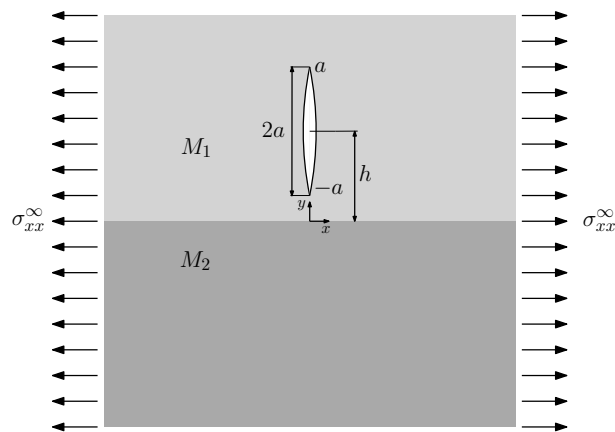
$$M_1 : E_1 = 200000MPa, \quad \nu_1 = 0.3 \quad M_2 : E_2 = 100000MPa, \quad \nu_2 = 0.3,$$

3. kombinace s označením $\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{3}$, kde materiály M_1, M_2 volíme takto

$$M_1 : E_1 = 200000MPa, \quad \nu_1 = 0.3 \quad M_2 : E_2 = 150000MPa, \quad \nu_2 = 0.3,$$

4. kombinace s označením $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{20}$, kde materiály M_1, M_2 volíme takto

$$M_1 : E_1 = 3500MPa, \quad \nu_1 = 0.35 \quad M_2 : E_2 = 70000MPa, \quad \nu_2 = 0.2.$$



Obrázek 7.1: Trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní

Cílem je stanovení součinitele intenzity napětí K_I pro úlohu danou dle obrázku 7.1 pro všechny 4 kombinace materiálů s označením $\frac{E_1}{E_2}$ pomocí metody spojitě rozložených dislokací a následně jej porovnat s hodnotami součinitele intenzity napětí K_I stanovenými pomocí metody MKP.

K vyřešení této úlohy potřebujeme znát levou stranu rovnice (6.12), tedy složky napětí $\sigma_{xx}(t)$, které řešíme na neporušeném zatíženém tělese. Tuto úlohu vyřešíme pomocí MKP a to konkrétně pomocí komerčního softwaru ANSYS.

7.2 Výpočtový model - stanovení napětí $\sigma_{xx}(t)$

Řešení rovnice (6.12) se provede jejím převedením na soustavu N -rovníc o N -neznámých (viz kapitola 5). Zvolíme si tedy stupeň aproximace N , který vede na odečet napětí $\sigma_{xx}(t)$ v N -bodech t_i , kde $i = 1 \dots N$.

Stupeň aproximace N jsme volili dvojí a to $N = 4$ a $N = 10$. Body pro odečet napětí $\sigma_{xx}(t)$ t_i volíme jako kořeny Čebyševových polynomů 2. druhu stupně N U_N tedy

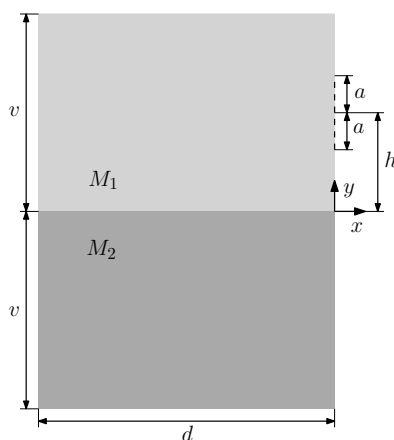
$$t_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N+1}\right), \quad i = 1 \dots N. \quad (7.1)$$

Hodnoty t_i jsou voleny takto záměrně, protože ideálně pokrývají interval délky trhliny $\langle -1, 1 \rangle$.

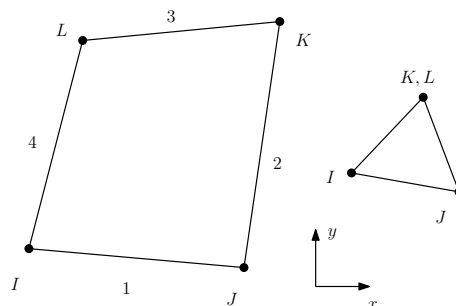
K vlastnímu výpočtu napětí $\sigma_{xx}(t)$ jsme použili následující výpočtový model v programu ANSYS. K snadnému opakování výpočtu bylo zhotoveno makro SXX01-3.mac. V tomto modelu volíme parametry materiálu M_1, M_2 , tedy moduly pružnosti E_1, E_2 a Poissonova čísla ν_1, ν_2 a jejich hodnoty volíme tak, jak bylo zobrazeno v části 6.1. Dále volíme stupeň aproximace $N = 4$ nebo $N = 10$, kterému odpovídá i stejný počet bodů t_i ze vztahu (7.1) pro odečtení napětí $\sigma_{xx}(t)$. Poslední parametr, který volíme je vzdálenost h , určující vzdálenost středu trhliny od bi-materiálového rozhraní (viz obrázek 7.1). Vzdálenost h nemůžeme volit libovolně, ale s ohledem na poloviční délku trhliny $a = 8mm$ a výšku tělesa $v = 200mm$ (viz obrázek 7.2) volíme h z intervalu $(8mm, 192mm)$. Vzdálenost h volíme postupně tak, jak uvádí tabulka 7.1

vzdálenost h [mm]							
80	50	20	10	9	8.5	8.1	8.05

Tabulka 7.1: volba vzdálenosti h



Obrázek 7.2: MKP-model-geometrie tělesa



Obrázek 7.3: Lineární čtyřuzlový prvek

Výpočet provedeme tak, že zvolíme danou kombinaci materiálů s označením $\frac{E_1}{E_2}$, stupeň aproximace N a pro každé h z tabulky 7.1 stanovíme napětí $\sigma_{xx}(t)$ ve všech příslušných bodech dle vztahu (7.1).

Model geometrie

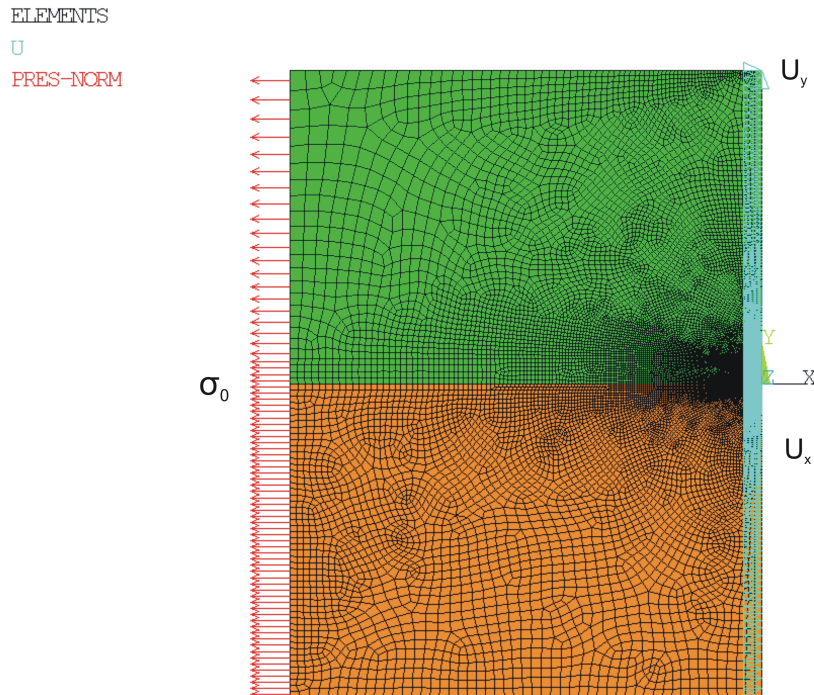
Úloha stanovení napětí $\sigma_{xx}(t)$ se provádí na neporušeném zatíženém tělese. Jedná se o úlohu rovinnou s nekonečnými délkovými rozměry. Nekonečné těleso nelze samozřejmě modelovat a rozměry MKP-modelu pro výpočet napětí $\sigma_{xx}(t)$ musíme volit jako konečné tak, aby dostatečně věrohodně nahradily nekonečné těleso. Navíc úloha je symetrická vzhledem k ose y , proto modelujeme pouze polovinu tělesa. Model geometrie tělesa je schématicky znázorněn na obrázku 7.2 a jeho rozměry jsou $v = 200\text{mm}$, $a = 8\text{mm}$, $d = 300\text{mm}$.

Konečnoprvková síť

Pro tvorbu konečnoprvkové sítě jsme použili rovinný lineární čtyřuzlový prvek s označením v programu ANSYS jako PLANE182 a jeho triangulární variantu (obrázek 7.3) s nastavením pro rovinnou deformaci. Konečnoprvková síť se mění dle vzdálenosti středu trhliny od bi-materiálového rozhraní h a příklad konečnoprvkové sítě je uveden na obrázku 7.4.

Okrajové podmínky a zatížení

Na pravé straně tělesa jsou předepsány nulové posuvy $u_x = 0$ ve směru osy x , které modelují symetrii tělesa podle osy y . V pravém horním rohu tělesa je z důvodu statické



Obrázek 7.4: Konečnoprvková síť s okr. podmínkami a zatížením

určitosti zamezeno posuvu v jednom uzlu $u_y = 0$ ve směru osy y . Okrajové podmínky jsou znázorněny na obrázku 7.4.

Silové zatížení tělesa $\sigma_0 = 100\text{MPa}$ je zobrazeno na obrázku 7.4 a je stejné jako zatížení σ_{xx}^∞ (obrázek 7.1). V ANSYSu je toto zatížení modelováno pomocí záporného tlaku (příkaz *pressure*) a je automaticky přepočítáno do jednotlivých uzlů.

7.3 Výpočtový model - metoda spojitě rozložených dislokací

Poté, co již známe hodnoty napětí $\sigma_{xx}(t)$ v příslušných bodech t_i určených dle vztahu (7.1), můžeme snadno vyřešit singulární integrální rovnici (6.12) dle postupu v kapitole 5. Tedy převedením singulární integrální rovnice (6.12) na soustavu N -rovníc o N -neznámých.

Řešení této soustavy rovnic a následné stanovení součinitele intenzity napětí K_I v krajních bodech trhliny pak provedeme pomocí komerčního programu MAPLE. Vstupní parametry jsou stejné jako v části 6.2. Nejdříve zvolíme příslušnou kombinaci materiálů $\frac{E_1}{E_2}$ uvedenou v části 6.1, tedy moduly pružnosti E_1, E_2 a Poissonova čísla ν_1, ν_2 , poté stupeň aproximace $N = 4$ nebo $N = 10$ a vzdálenost středu trhliny od bi-materiálového rozhraní h , jejíž velikost volíme podle tabulky 7.1, ale v metrech.

Postup výpočtu uvádět nebudeme (viz. kapitole 5), pouze si zde ukážeme některé grafy aproximace nesingulárního členu $K(s, t)$ (6.16) integrální rovnice pomocí Čebyševových

polynomů 1. druhu (obrázek 7.5 a 7.6). Tato aproximace není obecně nutná, ale zkracuje dobu výpočtu. V případě, že bychom chtěli uvažovat trhlinu, která se dotýká rozhraní, tak by nesingulární integrál v rovnici (6.12) již neměl analytické řešení a aproximace je pak nejspolehlivějším řešením (viz [11])

Grafy jsou stanovené pro stupeň přiblížení $N = 10$ (obrázek 7.5) a $N = 4$ (obrázek 7.6) a pro různé body stanovené dle vztahu (7.1) a to vždy symetricky vzhledem ke středu trhliny. Kombinace materiálu byla pro ukázkou volena $\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{1}$ a $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{20}$ a vzdálenost $h = 8.05\text{mm}$, tedy nejmenší vzdálenost h pro kterou jsme prováděli výpočty. Z grafů je patrné, že aproximace pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu pro stupeň aproximace $N = 10$ je zcela postačující a má problémy pouze pro bod trhliny t_i nacházející se v těsné blízkosti rozhraní. Stupeň přiblížení $N = 4$ vykazuje dle očekávání větší rozdíly mezi aproximovanou funkcí a původní, ale i zde je aproximace velmi přesná.

7.4 Výpočtový model - stanovení K_I pomocí MKP

Dosažené výsledky pomocí metody spojitě rozložených dislokací lze ověřit a porovnat s výsledky dosaženými pomocí MKP v programu ANSYS.

K vlastnímu výpočtu součinitele intenzity napětí K_I bylo v programu ANSYS stanoveno makro KXXXB.mac, které umožňuje snadné opakování výpočtu. Vstupními hodnotami jsou materiálové charakteristiky popisující danou kombinaci materiálů, viz. část 6.1, tedy moduly pružnosti E_1, E_2 a Poissonova čísla ν_1, ν_2 a vzdálenost středu trhliny od bi-materiálového rozhraní h .

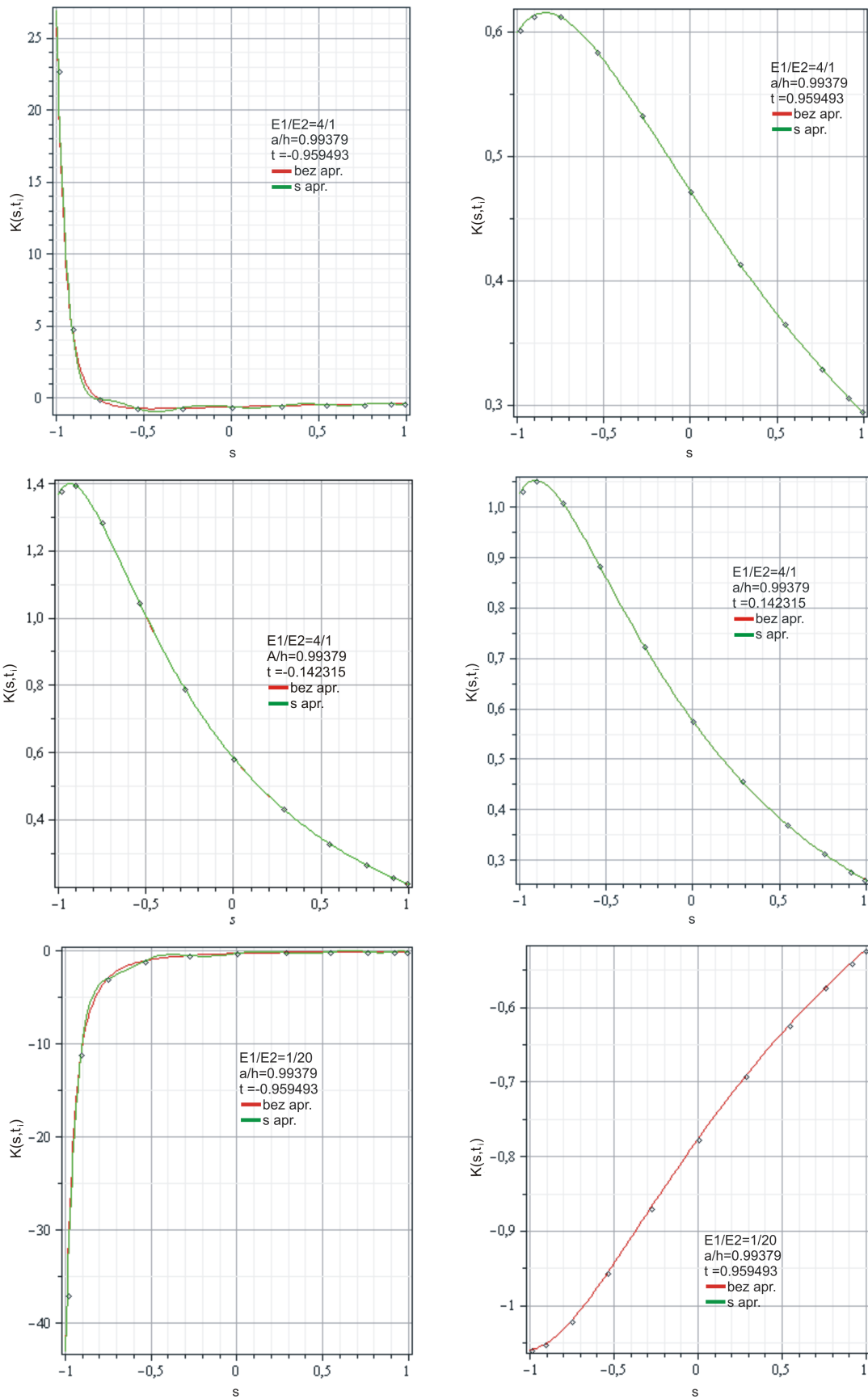
Výpočet součinitele intenzity napětí K_I provedeme pro danou kombinaci materiálů a každé h z tabulky 7.1.

Model geometrie

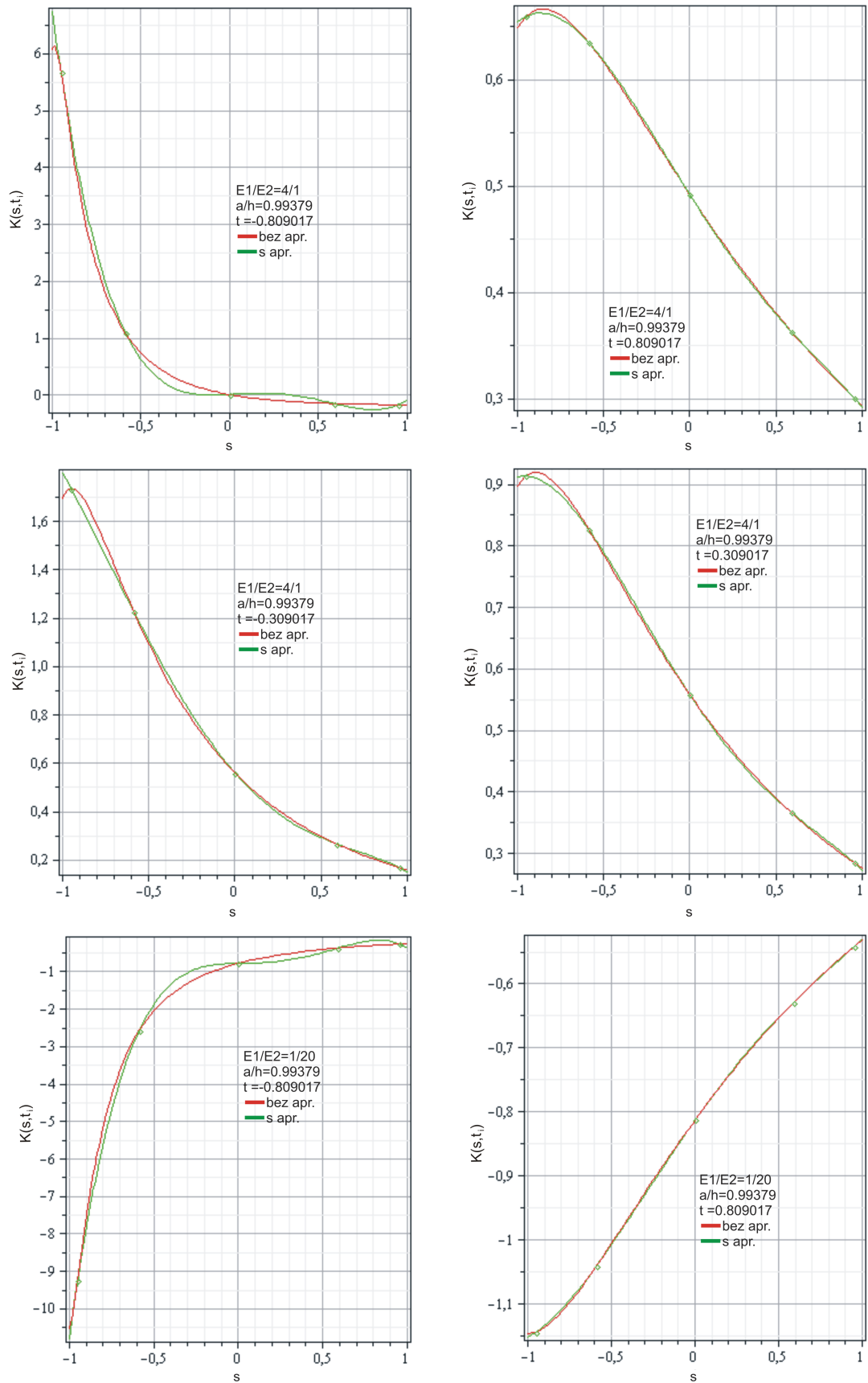
Podobně jako v úloze v části 6.2 řešíme stanovení součinitele intenzity napětí K_I jako úlohu rovinnou s končnými délkovými rozměry a symetrií dle osy y . Trhlinu nemodelujeme pomocí rozevření, ale pouze pomocí okr.podmínek (více o stanovení součinitele intenzity napětí pomocí MKP lze najít např. v [28]). Model geometrie tělesa je tedy stejný jako na obrázku 7.2, ale jeho rozměry jsou nyní stanoveny v metrech $v = 0.2\text{m}$, $a = 0.008\text{m}$, $d = 0.3\text{m}$ a to z důvodu, že chceme výsledný součinitel intenzity napětí K_I v jednotkách $\text{MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$.

Konečnoprvková síť

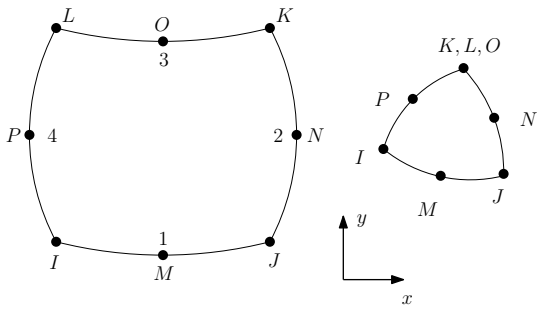
Pro tvorbu konečnoprvkové sítě jsme použili rovinný kvadratický osmiuzlový prvek s označením v programu ANSYS jako PLANE183 a jeho triangulární variantu obrázek 7.7 s nastavením pro rovinnou deformaci, viz. obrázek 7.7. K řešení singulárních problémů s exponentem singularity $\lambda = 1/2$ nabízí ANSYS příkaz KSCON, který vytvoří kolem zvoleného bodu (koncentrátoru) singulární prvky, což jsou triangulární prvky s posunutými uzly P a N do $1/4$ délky hrany OI a OJ , viz. obrázek 7.7. Konečnoprvková síť se mění dle vzdálenosti středu trhliny od bi-materiálového rozhraní h a příklad konečnoprvkové sítě je uveden na obrázku 7.9 a detail konečnoprvkové sítě okolo vrcholu trhliny je na obrázku 7.8.



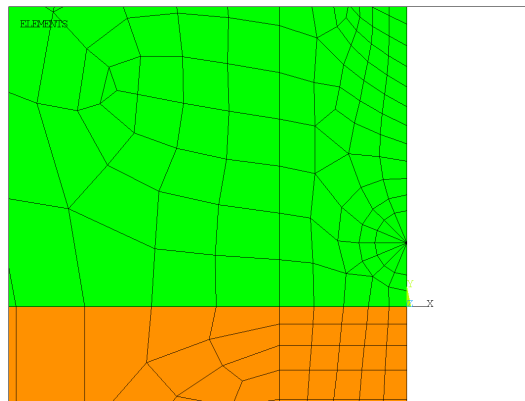
Obrázek 7.5: Aproximace nesingulárního jádra integrální rovnice pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu pro $N = 10$



Obrázek 7.6: Aproximace nesingulárního jádra integrální rovnice pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu pro $N = 4$

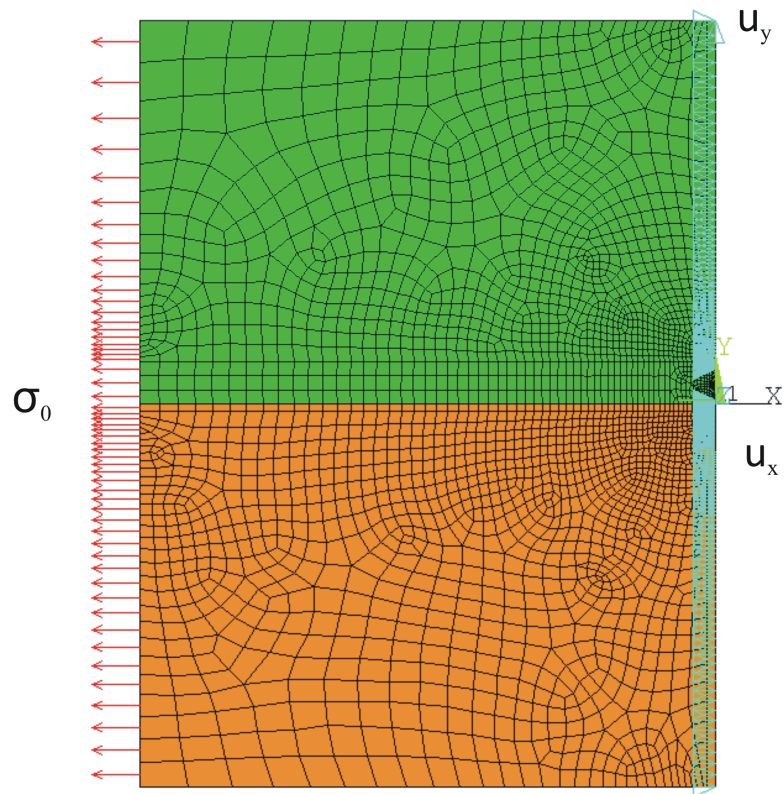


Obrázek 7.7: Kvadratický osmiuzlový prvek



Obrázek 7.8: Konečnoprvková síť okolo vrcholu trhliny

ELEMENTS
 U
 PRES-NORM



Obrázek 7.9: konečnoprvková síť s okr. podmínkami a zatížením

Okrajové podmínky a zatížení

Na pravé straně tělesa jsou předepsány nulové posuvy $u_x = 0$ ve směru osy x , které modelují symetrii tělesa podle osy y . V místě, kde se nachází trhlina není předepsaná žádná okrajová podmínka a tím je trhlina modelována. Navíc v pravém horním rohu tělesa je z důvodu statické určitosti zamezeno posuvu v jednom uzlu $u_y = 0$ ve směru osy y . Okrajové podmínky jsou znázorněny na obrázku 7.8.

Silové zatížení tělesa $\sigma_0 = 100\text{MPa}$ je zobrazeno na obrázku 7.8 a jeho velikost je stejná jako zatížení σ_{xx}^∞ (obrázek 7.1). V ANSYSU je toto zatížení modelováno pomocí záporného tlaku (příkaz *pressure*) a je automaticky přepočítáno do jednotlivých uzlů.

Kapitola 8

Diskuse

V této kapitole ilustrujeme na konkrétních případech bi-materiálu a geometrie trhliny vzhledem k bi-materiálovému rozhraní přesnost metody spojitě rozložených dislokací vzhledem k výsledkům získaných metodou MKP.

Výpočty byly provedeny pomocí výpočtových modelů uvedených v předchozí kapitole, pro zvolenou kombinaci materiálů $\frac{E_1}{E_2}$ (viz část 6.1), stupeň aproximace N a vzdálenost středu trhliny od bi-materiálového rozhraní h volenou z tabulky 7.1. Výsledné součinitele intenzity napětí K_I byly vyneseny do následujících 4 grafů společně s výsledky získaných pomocí MKP (obrázek 8.1-8.4).

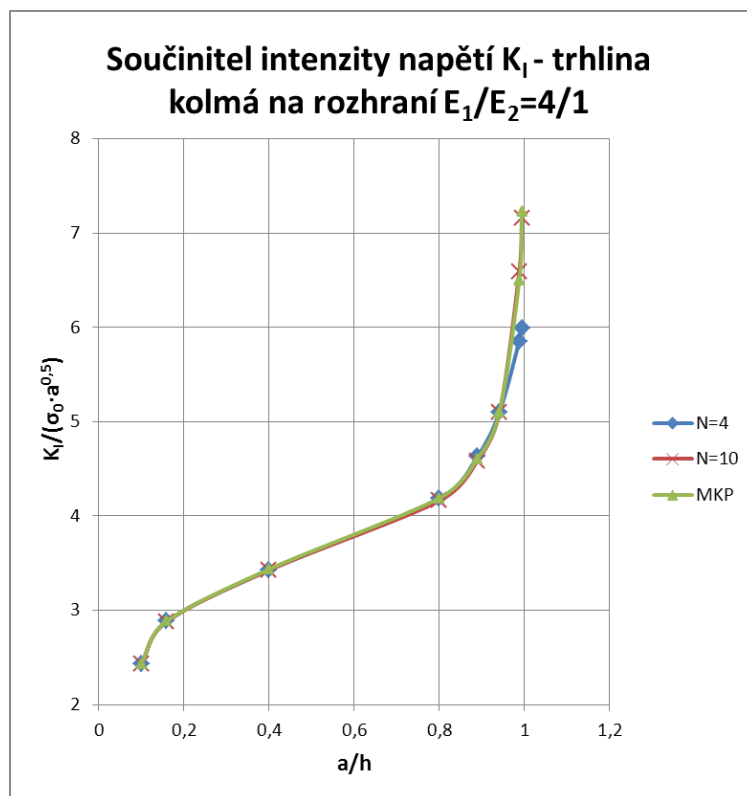
Každý graf je tedy stanoven pro jednu kombinaci materiálů $\frac{E_1}{E_2}$ a obsahuje vždy tři křivky popisující součinitel intenzity napětí K_I trhliny kolmé bi-materiálovému rozhraní (obrázek 7.1). Na ose y jsou vyneseny hodnoty normovaného součinitele intenzity napětí K_I . Na ose x jsou vyneseny hodnoty podílu a/h , tedy podíl poloviční délky trhliny a a vzdálenosti středu trhliny od bi-materiálového rozhraní h (obrázek 7.1). Křivky popisující průběh součinitele intenzity napětí K_I jsou rozdělené barevně a toto rozdělení je respektováno pro všechny 4 grafy. Modrá křivka odpovídá výsledkům získaných pomocí metody spojitě rozložených dislokací se stupněm aproximace $N = 4$. Červená křivka odpovídá výsledkům získaných stejnou metodou se stupněm aproximace $N = 10$ a zelená křivka popisuje výsledky stanovené pomocí MKP.

Srovnání výsledků

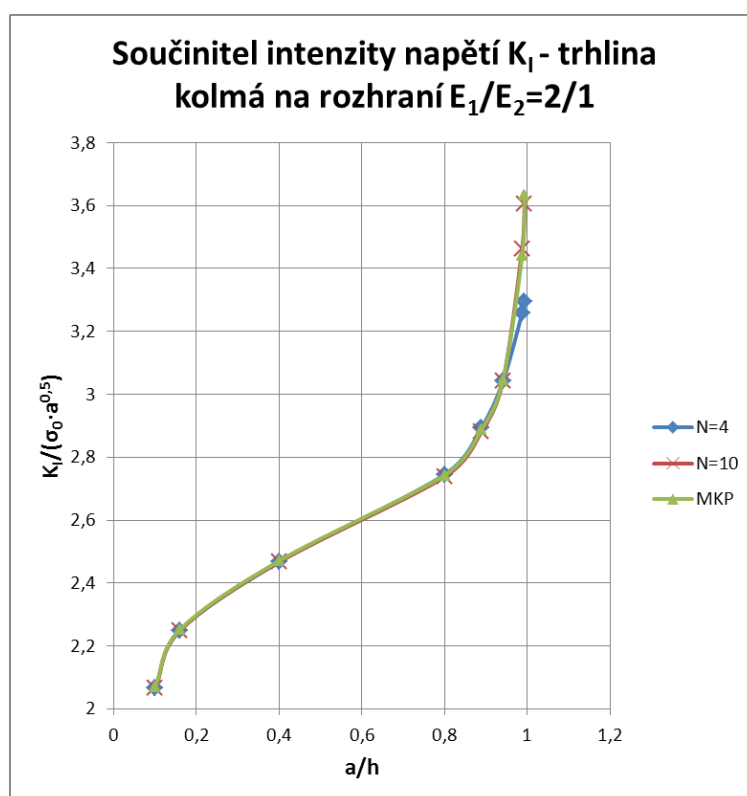
Grafy 8.1-8.3 odpovídají případu, kdy se trhlina šíří do poddajnějšího materiálu ($E_1 > E_2$) a pro tento případ má hodnota součinitele intenzity napětí K_I narůstat se snižující se vzdáleností vrcholu trhliny od rozhraní ($a/h \rightarrow 1$). Tento předpokládaný průběh je splněn u všech tří kombinací materiálů $\frac{E_1}{E_2}$ a pro obě metody výpočtu součinitel intenzity napětí K_I (spojitě rozložených dislokací, MKP). Z porovnání výsledků získaných pomocí metody spojitě rozložených dislokací pro stupněm aproximace $N = 10$ a pomocí MKP plyne, že výsledky se téměř shodují. K nepatrnému rozdílu dochází pouze v těsné blízkosti rozhraní a to ve všech třech případech. Předpokládali jsme, že metoda MKP bude mít v bodech blízkých bi-materiálového rozhraní větší problémy se stanovením součinitele napětí, tedy že rozdíl mezi jednotlivými metodami bude větší. Výsledky získané pomocí metody spojitě rozložených dislokací pro stupněm aproximace $N = 4$ vykazují větší nepřesnost v blízkosti rozhraní v porovnání s metodou MKP a tento rozdíl je způsoben nedostatečným stupněm

aproximace N nesingulárního členu $K(s, t)$ (6.16) pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu (obrázek 7.5 a 7.6).

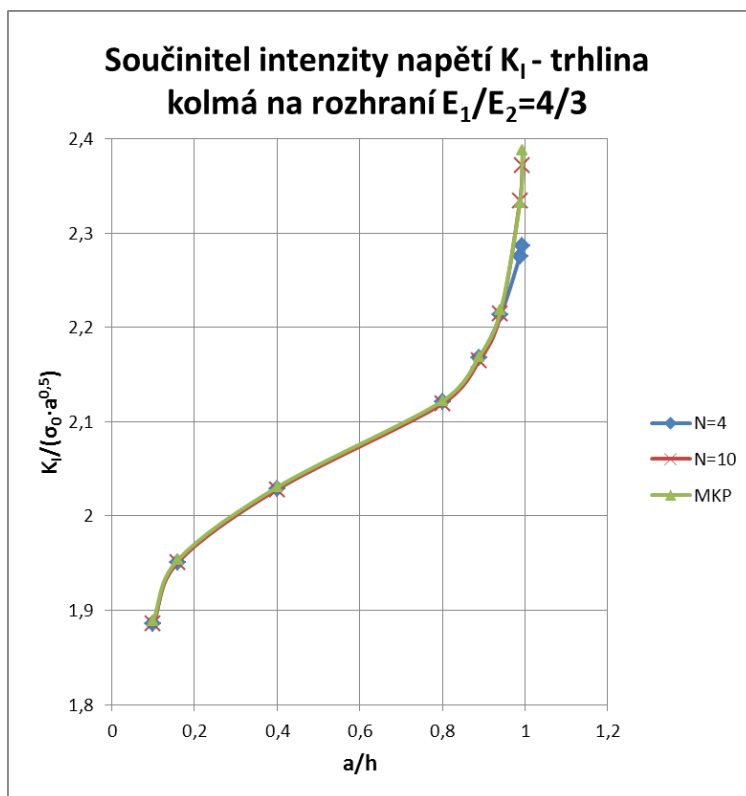
Graf 8.4 odpovídá případu, kdy se trhlina šíří do tužšího materiálu ($E_1 < E_2$) a pro tento případ má hodnota součinitele intenzity napětí K_I klesat se snižující se vzdáleností vrcholu trhliny od rozhraní ($a/h \rightarrow 1$). Tento předpokládaný průběh je splněn pro obě metody výpočtu součinitele intenzity napětí K_I . Z porovnání výsledků získaných pomocí metody spojitě rozložených dislokací a pomocí MKP plynou stejné závěry jako v předchozím odstavci. Metoda spojitě rozložených dislokací se stupněm aproximace $N = 10$ se téměř shoduje s výsledky získanými pomocí MKP a k nepatrnému rozdílu dochází pouze v těsné blízkosti rozhraní. Pro stejnou metodu se stupněm aproximace $N = 4$ dochází v blízkosti rozhraní k velké nepřesnosti. Tento rozdíl je způsoben nepřesností aproximace členu $K(s, t)$ (6.16) nesingulárního integrálu pomocí Čebyševových polynomů 1. druhu (obrázek 7.5 a 7.6) v bodech t_i (body odečtu napětí $\sigma_{xx}(t)$) velmi blízkých bi-materiálovému rozhraní.



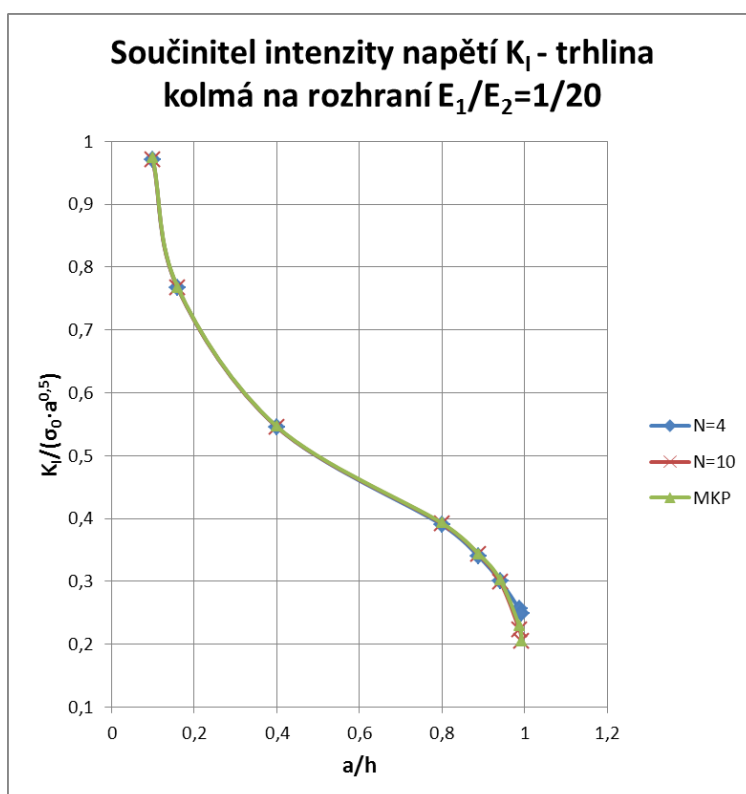
Obrázek 8.1: K_I -kombinace materiálu $\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{1}$



Obrázek 8.2: K_I -kombinace materiálu $\frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{1}$



Obrázek 8.3: K_I -kombinace materiálu $\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{3}$



Obrázek 8.4: K_I -kombinace materiálu $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{20}$

Závěr

Předkládaná diplomová práce si kladla za cíl vyjádřit součinitel intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní pomocí metody spojitě rozložených dislokací. Nezbytnou součástí práce bylo seznámit se s teoretickými základy metody spojitě rozložených dislokací a popis dislokace v bi-materiálu pomocí komplexních potenciálů.

Těchto cílů bylo dosaženo následovně:

- Na základě dostupné literatury byla nastudována a zpracována potřebná teorie. Konkrétně tedy základní pojmy lomové mechaniky, chování trhliny šířící se z jednoho materiálu do druhého, vyjádření pole napětí a posuvů pomocí komplexních potenciálů pro dislokaci v bi-materiálu, metoda spojitě rozložených dislokací a stanovení a řešení singulární integrální rovnice 1. druhu.
- Problém vyjádření součinitele intenzity napětí trhliny konečné délky v blízkosti bi-materiálového rozhraní pomocí metody spojitě rozložených dislokací jsme provedli pro 4 různé konfigurace bi-materiálu a relativní polohy trhliny kolmé k bi-materiálovému rozhraní. K ověření výsledků součinitele intenzity napětí jsme použili metodu konečných prvků (MKP) a výsledky vynesli do grafů a porovnali.
- Ze srovnání výsledků součinitele intenzity napětí získaných pomocí metody spojitě rozložených dislokací pro stupeň aproximace N a pomocí metody MKP plyne, že v případě dostatečného stupně aproximace $N = 10$ jsou rozdíly mezi jednotlivými metodami zanedbatelné.
- Z tohoto pohledu působí metoda spojitě rozložených dislokací velmi těžkopádně a zbytečně oproti metodě MKP. Její výhodou je ale snadná opakovatelnost oproti MKP, kde pro každou změnu délky trhliny či vzdálenosti trhliny od rozhraní musíme měnit konečnoprvkovou síť, ale hlavní síla a výhoda této metody nastává v okamžiku, kdy se čelo trhliny dostane na rozhraní dvou materiálů. V tomto případě se mění exponent singularity $\lambda = 1/2$ na nějaké reálné číslo z intervalu $\lambda \in (0, 1)$ a úloha stanovení součinitele intenzity napětí K_i se mění na úlohu stanovení zobecněného součinitele intenzity napětí H_i , kde i představuje jeden z módů zatěžování. Tato úloha již nelze řešit pouze pomocí MKP a musí se využít jiných přístupů k získání zobecněného součinitele intenzity napětí H_i . Jedním z těchto přístupů je metoda spojitě rozložených dislokací, kde lze s výhodou využít popisu dislokace pomocí komplexních potenciálů.

Závěrem je možné říci, že se podařilo splnit zadané cíle práce a určitě by bylo zajímavé rozšířit tuto práci o problematiku trhliny šířící se přes rozhraní dvou homogeních izot-

ropních materiálů, kde k řešení bude využita metoda spojitě rozložených dislokací a popisu dislokace pomocí komplexních potenciálů.

Literatura

- [1] KOLOSOV, G.: *Doctoral dissertation*, Dorpad, Estonia, 1909.
- [2] GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1920, A 221, s. 163-198.
- [3] OROWAN, E. Fundamentals of brittle behaviour in metals. *Fatigue and fracture of metals: A symposium*. W.M. Murray. John Wiley Sons, 1952, s. 139-167.
- [4] IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957, č. 24, s. 361-364.
- [5] BARENBLATT, G. I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1959, č. 23, s. 622-636.
- [6] RICE, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968, č. 35, s. 379-386.
- [7] NÁHLÍK, L. Únava a lomová mechanika: Lineární elastická lomová mechanika - koncepce součinitele intenzity napětí. *Student.chytrak.cz* [online]. 2007 [cit. 2013-05-20]. Dostupné z: <http://student.chytrak.cz/unava/09%20K-koncepce.pdf>
- [8] VLK, M. a Z. FLORIAN. *Mezni stavy a spolehlivost* [online]. Brno, 2007 [cit. 2013-05-20]. Dostupné z: <http://www.zam.fme.vutbr.cz/vlk/meznistavy.pdf>
- [9] BUECKNER, H. F. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. *Journal of Applied Mechanics*. 1958, č. 80, s. 1225-1230.
- [10] HILLS, D., P. A. KELLY, D. N. DAI a A. M. KORSUNSKY. *Solution of Crack Problems: The Distributed Dislokation Technique*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, 297 s. ISBN 07-923-3848-0.
- [11] PROFANT, T. *Interakce mikrotrhlin s částicemi druhé fáze*. Brno, 2003. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles. Vedoucí práce Prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.
- [12] DENDA, M. The Green's function BEM for bimaterial solids applied to edge stress concentration problems. *Electronic Journal of Boundary Elements*. 2003, roč. 1, č. 2, s. 112-131.

- [13] MUSCHELIŠVILI, N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity: Fundamental Equations Plane Theory of Elasticity Torsion and Bending*. 2nd Ed., Repr. Leyden: Noordhoff Internat. Publ., 1975, 31, 732 s. ISBN 90-016-0701-2
- [14] REKTORYS, K. *Přehled užití matematiky I*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxxii, 720 s. ISBN 978-80-7196-180-21
- [15] Cvicení z numerické matematiky: Čebyševovy aproximace. In: <http://kfe.fjfi.cvut.cz/klimo/nm/> [online]. 2008 [cit. 2013-05-21]. Dostupné z: <http://kfe.fjfi.cvut.cz/klimo/nm/17.pdf>
- [16] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí*. 1. vyd. Brno: CERM, 2007. ISBN 978-80-7204-556-32.
- [17] ONDRÁČEK, E., J. VRBKA, P. JANÍČEK a J. BURŠA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. 4. přeprac. vyd. Brno: CERM, 2006, 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [18] ANDERSON, T. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. 3rd ed. Boca Raton: Taylor, c2005, 621 s. ISBN 08-493-1656-1.
- [19] PADĚLEK, P. *Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti*. Bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2010. 37 s. Vedoucí práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [20] ŠESTÁKOVÁ, L. *Hodnocení stability obecných koncentrátorů napětí ve vrstevnatých materiálech*. Brno, 2009. Dizertační. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc.
- [21] DUNDURS, J. Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities. *Mathematical theory of dislocations*. New York: ASME, 1969, s. 70-115.
- [22] BOGY, D.B. On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface. *Journal of Applied Mechanics*. 1971, č. 38, s. 911-918.
- [23] NÁHLÍK, L. *Zobecnění lineární lomové mechaniky na případ trhliny šířící se přes rozhraní dvou materiálů*. Brno, 2008. Habilitační. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.
- [24] GRÖGER, R. Integral methods for determination of fracture characteristics of the general stress concentrators. *Sborník konference aplikovaná mechanika 2002*. TU Ostrava, 2002, s. 95-104.
- [25] Gröger, R. a L. Náhlík. Výpočty lomových parametrů obecných koncentrátorů napětí: II. Integrované formulace výpočtu lomových parametrů pro materiálově nehomogenní tělesa. *Sborník semináře Únava a lomová mechanika 2002*. Žinkovy, 2002
- [26] MUSCHELIŠVILI, N. I. *Někotorýje osnovnyje zadači matematičeskoj teorii uprugnosti*. Moskva: Izdatelstvo akademii nauk SSSR, 1966.

- [27] ERDOGAN, F., G. D. GUPTA a T. S. COOK. Numerical solution of singular integral equations. *Methods of analysis and solutions of crack problems*. G. C. Sih. Noordhoff, Leiden, 1973, s. 368-425.
- [28] Knésl, Z., P. Hutař a S. Seitl. Výpočet faktoru intenzity napětí metodou konečných prvků. *Sborník semináře Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků*. Praha, 2002.

Seznam symbolů a zkratek

G, G_i, G_I	[J/m ²]	Hnací síla trhliny
G_c	[J/m ²]	Houževnatost materiálu
$K, K_i, K_I, K_I(\pm 1)$	[MPam ^{1/2}]	Součinitel intenzity napětí (obecně, pro i-tý mód zatěžování, pro mód I, v krajních bodech trhliny)
K_c, K_{Ic}	[MPam ^{1/2}]	Lomová houževnatost, lomová houževnatost za podmínky rovinné deformace
δ_c	[m]	Kritická hodnota rozevření trhliny
J_{Ic}	[J]	Kritická hodnota J-integrálu
Π_0	[J]	Celková potenciální energie tělesa bez trhliny
W_0	[J]	Energie napjatosti tělesa bez trhliny
L	[J]	Potenciální energie vnějších sil
Γ	[J]	Disipace energie při vzniku trhliny
E_c	[J]	Celkové množství energie
Π	[J]	Celková potenciální energie tělesa s trhlinou
W	[J]	Energie napjatosti tělesa s trhlinou
S	[m ²]	Plocha průmětu trhliny
W_T	[J]	Změna energie napjatosti tělesa v důsledku vzniku trhliny
a, B	[m]	Rozměry trhliny dle obrázku 2.1
σ	[Pa]	Tahové napětí, vnější zatížení v nekonečnu
γ	[J/m ²]	Měrná povrchová energie materiálu
σ_f	[Pa]	Lomové napětí
a_c	[m]	Kritická délka trhliny
γ_{ef}	[J/m ²]	Efektivní povrchová energie
γ_{pl}	[J/m ²]	Povrchová energie spotřebovaná v plastické zóně
ω_f	[J/m ²]	Měrná energie lomu
R	[J/m ²]	Odpor tělesa proti růstu trhliny
I, II, III		Módy zatěžování
Δ		Laplaceův operátor
$\sigma_{ij}, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$	[Pa]	Složky tenzoru napětí (obecně, konkrétně)
u_x, u_y	[m]	Složky posuvů
U		Airyho funkce napětí
r	[m]	Vzdálenost od kořene trhliny
θ	[°]	Úhel natočení od kořene trhliny
μ, μ_1, μ_2	[MPa]	Modul pružnosti ve smyku
E, E_1, E_2	[MPa]	Modul pružnosti v tahu

$\kappa, \kappa_1, \kappa_2$		Konstanta určující stav rovinné deformace nebo napjatosti
ν, ν_1, ν_2		Poassonovo číslo
Φ_0		Funkce zohledňující tvar eliptické trhliny
Y		Korekční funkce závisující na okrajových podmínkách
E'	[MPa]	Modifikovaný modul pružnosti
$f_{ij}^I, f_{ij}^{II}, f_{ij}^{III}$		Funkce závisující na módu zatežování (pro K_i)
M_1, M_2		Materiál horní a dolní poloviny tělesa
H, H_I	[MPam ^{1-λ}]	Zobecněný součinitel intenzity napětí pro mód I
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$		Charakter(exponent) singularity
f_{ij}		Znamé ohraničené funkce (související s H_I)
$\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$		Dundursovy parametry
$\varphi(z), \chi(z)$		Komplexní potenciály
T		Jednoduše souvislé těleso
$\Phi(z), \psi(z), \Psi(z)$		Derivované komplexní potenciály
$\varphi_i(z, \zeta), \psi_i(z, \zeta)$		komplexní potenciály pro dislokaci v bi-materiálu
$\Phi_i(z, \zeta), \Psi_i(z, \zeta)$		Derivované komplexní potenciály pro dislokaci v bi-materiálu
$k_1, \gamma_1, \lambda_1, \delta_1$		Konstanty pro dislokaci v bi-materiálu
\mathbf{b}, b_x, b_y		Burgersův vektor
$u(+), u(-)$		Posuv pravé, resp. levé strany řezu
$\tilde{\sigma}_{ij}, \sigma_{xx}(t)$	[Pa]	Napětí v místech trhliny při absenci trhliny
$\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{xx}$	[Pa]	Korekční napětí (obecně, konkrétně)
$N(x), S(x)$	[Pa]	Normálové napětí, smykové napětí
σ_{yy}^∞	[Pa]	Vnější zatížení v nekonečnu 5.1
δb_y		Infinetisimální Burgersův vektor
B_y, B_x, B_s		Hustota dislokací
$\bar{\sigma}_{yy}^{dis}, \bar{\sigma}_{xx}^{dis}$	[Pa]	Napětí generované dislokací
$g(x), g(r)$		Rozevření trhliny
$F(t)$	[Pa]	Modifikované vnější zatížení
$\omega(s)$		Fundamentální řešení
$\phi_y(s), \phi_x(s)$		neznámá ohraničená funkce
$K(s, t)$		Kvadraticky integrovatelná funkce
$g(t)$		Nějaká ohraničená funkce (vnější zatížení)
a	[m]	Polovina délka trhliny
h	[m]	Vzdálenost středu trhliny od bi-materiálového rozhraní
N		Stupěň aproximace (přiblížení)
$T_i, T_N(t)$		Čebyševův polynom 1. řádu stupně i , resp. N
c_i		Hledané konstanty
$d_j(t)$		Znamé konstanty dle vztahu (6.17)
$U_{N-1}(t)$		Čebyševův polynom 2. řádu stupně $N - 1$
t, t_i		Body odečtu napětí
$\Gamma(-\frac{1}{2}), \Gamma(\frac{3}{2})$		Gamma funkce
v, d	[m]	Rozměry tělesa v MKP modelech

σ_0	[Pa]	Vnější zatížení tělesa dle obrázku 7.4
LELM		Lineárně elastická lomová mechanika
EPLM		Elasto-plastická lomová mechanika
COD		Kritické rozevření trhliny

Příloha A

Trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní - odvození

Trhlina kolmá k bi-materiálovému rozhraní, jejíž obecná rovnice je dána vztahem (6.1) je řešená v kapitole 5. Zde budou uvedeny detaily odvození, které se v kapitole 5 nevyskytují.

Stanovení singulární integrální rovnice prvního druhu vychází ze znalosti napětí $\bar{\sigma}_{xx}$ od jedné dislokace. Toto napětí stanovíme takto (viz kapitola 3)

$$\bar{\sigma}_{xx}^{dis} = \text{Re}[2\Phi_1(z, \zeta) - \bar{z}\Phi_1'(z, \zeta) - \Psi_1(z, \zeta)].$$

K jeho stanovení tedy potřebujeme znát tvary komplexních potenciálů $\varphi_1(z, \zeta)$, $\psi_1(z, \zeta)$, které byly již ukázány v kapitole 3 (vztahy 4.11-4.24) a jejich derivate. Navíc pro trhlinu kolmou k bi-materiálovému rozhraní platí vztah (6.3), z kterého plyne

$$\bar{\gamma}_1 = -\gamma_1.$$

Pak singulární členy $\varphi_{1s}(z, \zeta)$, $\psi_{1s}(z, \zeta)$ nabývají hodnot

$$\begin{aligned}\varphi_{1s}(z, \zeta) &= -\gamma_1 \ln(z - \zeta), \\ \psi_{1s}(z, \zeta) &= \gamma_1 \left(k_1 \ln(z - \zeta) + \left(\frac{\bar{\zeta}}{z - \zeta} + 1 \right) \right)\end{aligned}$$

a imaginární členy $\varphi_{1i}(z, \zeta)$, $\psi_{1i}(z, \zeta)$ nabývají hodnot

$$\begin{aligned}\varphi_{1i}(z, \zeta) &= \delta_1 \gamma_1 \left(-k_1 \ln(z - \bar{\zeta}) - \left(\frac{\zeta - z}{z - \bar{\zeta}} + 1 \right) \right), \\ \psi_{1i}(z, \zeta) &= \gamma_1 \left(\frac{\delta_1 z(k_1 - 1)}{(z - \bar{\zeta})} - \frac{\delta_1 z(z - \zeta)}{(z - \bar{\zeta})^2} + \lambda_1 \ln(z - \bar{\zeta}) \right).\end{aligned}$$

Součtem singulárního a imaginárního členu získáme tvary komplexních potenciálů $\varphi_1(z, \zeta)$, $\psi_1(z, \zeta)$

$$\begin{aligned}\varphi_1(z, \zeta) &= \gamma_1 \left(-\ln(z - \zeta) + \delta_1 \left[-k_1 \ln(z - \bar{\zeta}) - \frac{\zeta - z}{z - \bar{\zeta}} - 1 \right] \right), \\ \psi_1(z, \zeta) &= \gamma_1 \left(k_1 \ln(z - \zeta) + \frac{\bar{\zeta}}{z - \zeta} + 1 + \frac{\delta_1 z(k_1 - 1)}{z - \bar{\zeta}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_1 z(z - \zeta)}{(z - \bar{\zeta})^2} + \lambda_1 \ln(z - \bar{\zeta}) \right).\end{aligned}$$

Derivované komplexních potenciály pak mají tyto tvary

$$\begin{aligned}\varphi_1'(z, \zeta) &= \gamma_1 \left(-\frac{1}{z - \zeta} + \delta_1 \left[-\frac{k_1 - 1}{(z - \bar{\zeta})} + \frac{\zeta - z}{(z - \bar{\zeta})^2} \right] \right), \\ \varphi_1''(z, \zeta) &= \gamma_1 \left(\frac{1}{(z - \zeta)^2} + \delta_1 \left[\frac{k_1 - 2}{(z - \bar{\zeta})^2} - \frac{2(\zeta - z)}{(z - \bar{\zeta})^3} \right] \right), \\ \psi_1'(z, \zeta) &= \gamma_1 \left(\frac{k_1}{(z - \zeta)} - \frac{\bar{\zeta}}{(z - \zeta)^2} + \frac{\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{(z - \bar{\zeta})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_1(-\zeta - zk_1 + 3z)}{(z - \bar{\zeta})^2} + \frac{2\delta_1 z(\zeta - z)}{(z - \bar{\zeta})^3} \right).\end{aligned}$$

Nyní se využije značení dle vztahu (4.5) a dosazením do (6.2) získáme napětí od jedné dislokace

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx}^{dis} &= \operatorname{Re} \left\{ \gamma_1 \left(-\frac{k_1 + 2}{z - \zeta} - \frac{\bar{z} - \bar{\zeta}}{(z - \zeta)^2} - \frac{3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{z - \bar{\zeta}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\delta_1(3\zeta + z(k_1 - 5) + \bar{z}(-k_1 + 2))}{(z - \bar{\zeta})^2} + \frac{2\delta_1(\zeta - z)(\bar{z} - z)}{(z - \bar{\zeta})^3} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Dále dosadíme $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$ do předchozí rovnice, položíme $x = \xi$ a ze vztahu (6.3) vezmeme imaginární konstantu i . Pak pro jednotlivé členy platí

$$\begin{aligned}-\frac{i(k_1 + 2)}{z - \zeta} &= -\frac{k_1 + 2}{y - \eta}, \\ -\frac{i(\bar{z} - \bar{\zeta})}{(z - \zeta)^2} &= \frac{1}{y - \eta}, \\ -\frac{i(3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1)}{z - \bar{\zeta}} &= -\frac{3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{y + \eta}, \\ \frac{i\delta_1(3\zeta + z(k_1 - 5) + \bar{z}(-k_1 + 2))}{(z - \bar{\zeta})^2} &= \frac{\delta_1(3\eta + 2k_1y - 7y)}{(y + \eta)^2}, \\ \frac{i2\delta_1(\zeta - z)(\bar{z} - z)}{(z - \bar{\zeta})^3} &= -\frac{4\delta_1y(\eta - y)}{(y + \eta)^3}.\end{aligned}$$

Napětí od jedné dislokace $\bar{\sigma}_{xx}^{dis}$ pak s využitím vztahu (6.3) má následující tvar

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx}^{dis} &= \frac{\mu_1 b_x}{\pi(\kappa_1 + 1)} \left(-\frac{k_1 + 1}{y - \eta} - \frac{3\delta_1(k_1 - 1) + \lambda_1}{y + \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_1(3\eta + 2k_1y - 7y)}{(y + \eta)^2} - \frac{4\delta_1y(\eta - y)}{(y + \eta)^3} \right).\end{aligned}$$

Další postup ke stanovení singulární integrální rovnice je uveden v kapitole 5.