

ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE  
FAKULTA ŽIVOTNÍHO PROSTŘEDÍ

Katedra vodního hospodářství  
a environmentálního modelování

Využití optimalizačního algoritmu BBO  
při modelování hydrologické bilance  
modelem Bilan

The application of BBO optimization algorithm in  
hydrological balance modeling using Bilan model

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Diplomant: Bc. Petr Pavlík  
Vedoucí práce: doc. Ing. Petr Máca, PhD.

©2017 ČZU v Praze

# ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

Fakulta životního prostředí

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Bc. Petr Pavlík

Environmentální modelování

Název práce

**Využití optimalizačního algoritmu BBO při modelování hydrologické bilance modelem Bilan**

Název anglicky

**The application of BBO optimization algorithm in hydrological balance modeling using Bilan model**

---

### Cíle práce

Cílem práce je analýza možností využití globálního optimalizačního algoritmu Biogeography-based optimization (BBO) v modelování hydrologické bilance modelem Bilan.

### Metodika

Zaměřte se na:

1. Přípravu variant optimalizačního algoritmu BBO.
2. Provedte srovnávací test variant BBO na benchmarkových úlohách CEC 2013.
3. Vybranou variantu BBO použijte pro kalibraci hydrologického modelu Bilan.
4. Provedte srovnání vybrané varianty BBO s již implementovanými optimalizačními algoritmy v modelu Bilan

### **Doporučený rozsah práce**

standardní

### **Klíčová slova**

metaheuristiky, evoluční algoritmy, globální optimalizace, BILAN, BBO

---

### **Doporučené zdroje informací**

Kašpárek, L. et al. bilan: Bilan water balance model, 2014. T. G. Masaryk Water Research Institute and p.r.i., R package version 2013.12.

Máca, P. – A., V. – Horáček, S. Optimalizace parametru modelu BILAN metodou SCDE. VTEI. 2013, 55, 4, s. 1–4.

Simon D., 2008: Biogeography-based optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation 12-6:702-703

WoS a SCOPUS

---

### **Předběžný termín obhajoby**

2016/17 LS – FŽP

### **Vedoucí práce**

doc. Ing. Petr Máca, Ph.D.

### **Garantující pracoviště**

Katedra vodního hospodářství a environmentálního modelování

---

Elektronicky schváleno dne 4. 4. 2017

**doc. Ing. Martin Hanel, Ph.D.**

Vedoucí katedry

Elektronicky schváleno dne 5. 4. 2017

**prof. RNDr. Vladimír Bejček, CSc.**

Děkan

V Praze dne 06. 04. 2017

---

## **Poděkování**

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. Ing. Petru Mácovi, Ph.D. za skvělý lidský i profesní přístup, enormní trpělivost a cenné rady při zpracování této práce. Dále bych rád poděkoval Ing. Rostislavovi Lindovi za příležitostné poskytnutí výpočetního výkonu. Mé díky patří také celé mé rodině za důvěru, trpělivost a poskytnutou podporu během celého studia.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci „Využití optimalizačního algoritmu BBO při modelování hydrologické bilance modelem Bilan“ vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Petra Mácy, Ph.D. a že jsem uvedl všechny literární prameny, ze kterých jsem čerpal.

V Praze dne 18. dubna 2017

.....

## Abstrakt

Biogeography-based optimization je dnes už skupinou evolučních algoritmů inspirovaných teorií ostrovní biogeografie, což je studium migrace druhů mezi jednotlivými habitaty. V původní podobě byl algoritmus představen Danem Simonem v roce 2008. Od té doby byl vícekrát modifikován a hybridizován s dalšími optimalizačními metodami. V různých podobách dosáhl srovnatelných či lepších výsledků než nejmodernější algoritmy jak na testovacích, tak na skutečných problémech.

Cílem tohoto textu je posoudit možnosti BBO jako potenciálního nástroje pro optimalizaci hydrologického modelu BILAN. V teoretické části je úvod do problematiky globální optimalizace a rozbor optimalizační metody BBO. Následné praktické posouzení je provedeno ve dvou krocích. Prvně je pro srovnání výkonnosti a určení kandidátního řešení využita sada 10D testovacích funkcí CEC 2013. Nejúspěšnější algoritmus je poté srovnán s již implementovanými algoritmy SCDE a BS v modelu BILAN pomocí tří hydrologických indexů na deseti povodích.

Práce na testovacích úlohách CEC 2013 prokázala různou výkonnost mezi šesti testovanými algoritmy a potvrdila některé dříve publikované závěry. Nejlepší ze šestice algoritmů – BBOSCA dosáhl v případové studii výkonnostní úrovně srovnatelné s již implementovanými metodami. V práci jsou obsaženy návrhy pro další rozvoj metaheuristik BBO.

**Klíčová slova:** metaheuristiky, evoluční algoritmy, globální optimalizace, BILAN, BBO

## Abstract

Biogeography-based optimization is already a family of evolutionary algorithms inspired by the process of insular biogeography, which is the study of the migration of species between habitats. Original form was introduced by Dan Simon in 2008. Since then, the algorithm has been modified and hybridized with other optimization methods. In its various forms it has been proven capable of achieving similar or better results as state-of-the-art metaheuristic algorithms both on benchmark as well as practical problems.

The aim of this thesis is to evaluate BBO as a potential tool for optimization of BILAN hydrological model. The theoretical part contains comprehensive introduction of global optimization and BBO analysis. The evaluation then is done in two steps. First the 28 CEC 2013 10D benchmark problems will be used to compare and determine the best performing variant of BBO. The best algorithm is then set to outperform BILAN's currently implemented optimization tools BS and SCDE through a set of three efficiency criteria on ten catchments.

The work has proven performance differences between six tested algorithms and confirmed some previously published conclusions. In the case study, the best algorithm – BBOSCA showed similar results as already implemented optimization methods. Proposals about the future development of BBO metaheuristics family are included.

**Keywords:** metaheuristics, evolutionary algorithms, global optimization, BILAN, BBO

# Obsah

<b>Seznam zkratek</b>	<b>i</b>
<b>Předmluva</b>	<b>iii</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>13</b>
<b>2 Cíle práce</b>	<b>15</b>
<b>3 Teoretický základ</b>	<b>16</b>
3.1 Globální optimalizace . . . . .	16
3.1.1 Optimalizační algoritmy . . . . .	16
3.1.2 Teorémy obědu zdarma . . . . .	17
3.1.3 Neomezená a omezená optimalizace . . . . .	17
3.1.4 Problém explorace a exploatace . . . . .	18
3.1.5 Hybridizace . . . . .	18
3.1.6 Inicializace . . . . .	18
3.2 Teorie ostrovní biogeografie jako optimalizační proces . . . . .	19
3.3 Matematický model biogeografie . . . . .	19
3.4 Biogeography-based optimization . . . . .	20
3.4.1 Migrace . . . . .	21
3.4.2 Mutace . . . . .	24
3.4.3 Selektce . . . . .	26
3.4.4 Elitismus . . . . .	26
3.5 Modifikace BBO . . . . .	27
3.6 Testování výkonnosti algoritmů . . . . .	27
3.7 Konceptuální hydrologické modely . . . . .	29
3.7.1 Inverzní úloha . . . . .	30
3.8 BILAN . . . . .	31
3.8.1 Optimalizační metody BILANu . . . . .	32
3.8.2 Evaluační kritéria . . . . .	33
<b>4 Metodika</b>	<b>34</b>
4.1 BBO varianty . . . . .	34
4.2 Soubor optimalizačních úloh CEC 2013 . . . . .	34
4.2.1 Statistické zpracování . . . . .	35
4.3 BILAN případová studie . . . . .	36
4.3.1 Nastavení implementovaných optimalizačních algoritmů . . . . .	36



4.3.2	Evaluační kritéria . . . . .	36
4.4	Použité zdroje . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Výsledky</b>	<b>38</b>
5.1	Testování na sadě funkcí CEC 2013 . . . . .	38
5.2	Porovnání s již implementovanými optimalizačními algoritmy . . . . .	42
5.2.1	MAE . . . . .	42
5.2.2	MSE . . . . .	43
5.2.3	NS . . . . .	46
5.2.4	Hydrogramy vybraných povodí . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Diskuze</b>	<b>49</b>
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>51</b>
	<b>Literatura</b>	<b>52</b>
	<b>Appendix A</b>	<b>57</b>
A.1	Přehled testovacích funkcí CEC 2013 . . . . .	57
A.2	Popis testovacích funkcí CEC 2013 . . . . .	58
	<b>Appendix B</b>	<b>61</b>
B.1	Tabelované výsledky CEC 2013 . . . . .	61
B.2	Konvergenční grafy CEC 2013 . . . . .	67
	<b>Appendix C</b>	<b>80</b>
C.1	Výsledky kalibrace modelu BILAN . . . . .	80
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>83</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>84</b>

# Seznam zkratek

ACO	Ant colony optimization	14
Alf	parametr srážkoodtokové rovnice	32
BBO	optimalizační algoritmus BBO	14
BBO2	BBO s kvadratickou migrací	34
BBOSGA	BBO se sinusoidální migrací a mutačním operátorem používajícím Gaussovo rozdělení	34
BBOSIN	BBO se sinusoidální migrací	34
BBOSCA	BBO se sinusoidální migrací a mutačním operátorem používajícím Cauchyho rozdělení	34
BBOSLE	BBO se sinusoidální migrací a mutačním operátorem používajícím Lévyho rozdělení	34
BS	binární srovnávání	33
DE	diferenciální evoluce	14
Dgm	faktor tání sněhové pokrývky	32
Dgw	faktor pro výpočet objemu tekuté vody na zemském povrchu v zimním období	32
EA	evoluční algoritmus	13
ES	evoluční strategie	14
GA	genetický algoritmus	14
Grd	parametr určující základní odtok	32
HSI	habitat sustainability index	19
LNNS	logaritmický Nash-Sutcliffův koeficient	31
MaxFES	maximální počet evaluací funkce	35
Mec	parametr rozdělující perkolaci na hypodermický odtok a na dotaci podzemní vody pro podmínky tání sněhu	32
MSE	střední kvadratická chyba	31
$n_{gen}$	parametr počtu generací	34
NS	Nash-Sutcliffův koeficient	31
PBIL	population-based incremental learning	14
$P_{mut}$	maximální míra mutace	34
$r_{nech}$	parametr elitismu	34
PI	index persistence	31
PMB-BBO	partial migration based BBO	23

$R_{mod}$	modelované průtoky . . . . .	31
$R_{poz}$	pozorované průtoky . . . . .	31
SCDE	shuffled complex differential evolution . . . . .	33
SCE	shuffled complex evolution . . . . .	14
SIV	sustainability index value . . . . .	19
Soc	parametr kontroly rozložení perkolace v hypodermickém odtoku a doplnění zásob podzemní vody v letním období. . . . .	32
Spa	kapacita zásoby půdní vlhkosti . . . . .	??
SMB-BBO	single migration based . . . . .	23
SPMB-BBO	simplified partial migration based BBO . . . . .	23
SSMB-BBO	simplified single migration based BBO . . . . .	23
Wic	parametr rozdělující perkolaci na hypodermický odtok a na dotaci podzemní vody pro zimní podmínky . . . . .	32

# Předmluva

Při studiu globální optimalizace lze narazit na širokou paletu značení. Proto je pro usnadnění orientace v práci čtenáři dán k dispozici oddělený seznam zkratk. V textu je odkazováno na množství optimalizačních metod. Řada z nich je notoricky známa, má zažitý český jmenný překlad a ten je v textu použit. Ne nepodstatnou skupinu ovšem tvoří algoritmy, které na svůj český název stále čekají. Ty jsou v textu uvedeny pod původním nepřeloženým označením.

Práce je členěna v logické posloupnosti úkonů vedoucích k plnění hlavního cíle. Úvodem je naznačena aktuálnost tematiky a zdůvodněna volba řešení. Poté je v teoretické části vyloženo pozadí numerické globální optimalizace, rozebrána rodina metod BBO, popsána úloha testovacích funkcí a kalibrace konceptuálních srážko-odtokových modelů, zahrnujících model BILAN. Následující kapitoly „Metodika“, „Výsledky“ a „Diskuze“ jsou vždy členěny dle dvou dominantních partií – testovacích úloh a případové studie.

Přílohy jsou řazeny opět dle sledu vykonaných úkolů. Z důvodu jisté celistvosti textu je v přílohách zařazen i popis řešených testovacích funkcí.

# Úvod

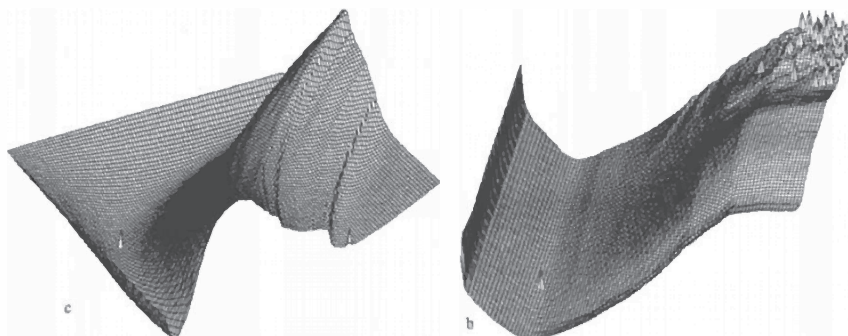
Optimalizace je úkon, proces, nebo metodologie vedoucí k nalezení takové alternativy řešení, kdy se předmět optimalizace stává tak funkční nebo účinný, jak jen to je za stanovených podmínek možné.

Příroda optimalizuje, stále.

Patrně všechny optimalizační procesy v přírodě je možno charakterizovat jako optimalizaci energetickou. Molekuly v izolovaném chemickém systému vzájemně reagují dokud není celková potenciální energie jejich elektronů minimalizována.

Člověk také optimalizuje.

Je proto příznačné, že přírodními procesy se inspiroval při konstrukci celé řady optimalizačních algoritmů (Nocedal et Wright, 2006). Jednu skupinu široce používaných optimalizačních technik představují Evoluční algoritmy (EA) (Zelinka et al., 2009). V hydrologickém modelování se EA používají při kalibraci empirických a konceptuálních srážko-odtokových modelů. Kalibrace srážko-odtokových modelů je početně komplexní problém – některé celistvé modely mohou sice mít i méně než pět parametrů, ale často jich obsahují velké množství (i desítky) a jejich hodnoty se typicky nachází v reálném prostoru (Cohen et al., 2013; Duan, 1992). Příslušné objektivní funkce jsou složeny ze vztahů, které jsou velmi často nelineární, multimodální a nekonvexní (Duan, 1992). Ukázka toho, jak takové funkční vztahy mohou vypadat, je na obr. 1.1. Aby byl model



**Obr. 1.1:** Grafy povrchů funkčních vztahů vztahu mezi dvěma parametry modelu SIXPAR (Duan et al., 1992).

v praxi použitelný, musí mít hodnoty parametrů odladěny kalibrací (Beven, 1993). Vzhledem k výše uvedeným vlastnostem, nejsou při této činnosti rychlé lokální gradientní metody příliš úspěšné. Výhodou nasazení metaheuristických technik, je možnost ladění vnitřních parametrů algoritmu v závislosti na řešeném problému (Zelinka et al., 2009). Tyto techniky jsou sice algoritmicky složitější, ale díky rostoucímu početnímu výkonu čím dál více preferované. Relativně dobrých výsledků vzhledem k výpočetnímu času bylo

dosaženo například s genetickými algoritmy (GA) (Duan et al. 1993) a Shuffled complex evolution (SCE) (Duan et al., 1994; Seibert, 2000).

V roce 2008 byl představen nový metaheuristický algoritmus – Biogeography-based optimization (Simon, 2008). Tab. 1.1 obsahuje dobové srovnání výkonnosti s dalšími sedmi algoritmy. BBO dosáhla dobrých výsledků na všech řešených problémech, na čtyřech dokonce výsledku nejlepšího. Jiný algoritmus předstihl BBO desetkrát, nejlépe si přitom vedl SGA, ovšem ve většině případů dosáhla BBO druhého nejlepšího výsledku. V následujících letech byla opakovaně vyzdvižována schopnost algoritmu BBO rychle konvergovat (Ma, 2010; Mirjalili et al., 2014).

Lze se oprávněně domnívat, že při kalibraci konceptuálního hydrologického modelu by BBO mohla dosahovat dobrých výsledků.

**Tab. 1.1:** Srovnání BBO s dalšími metaheuristikami (Simon, 2008). Hodnoty jsou normalizovány na nejlepší – 100. ACO – optimalizace mravenčí kolonií, DE – diferenciální evoluce, ES – evoluční strategie, GA – genetický algoritmus, PBIL – population based incremental learning, PSO – optimalizace rojem částic, SGA – stud genetic algorithm.

	ACO	BBO	DE	ES	GA	PBIL	PSO	SGA
Ackley	205	<b>100</b>	178	220	224	325	262	114
Fletcher-Powell	1711	109	527	544	632	1947	1451	<b>100</b>
Griewank	240	181	576	1081	404	4665	2241	<b>100</b>
Penalty #1	<b>100</b>	3660	2,67E5	5,47E7	6198	1,65E10	4,05E7	1090
Penalty #2	<b>100</b>	4651	3,42E7	4,68E8	8,79E5	2,60E10	1,13E9	4878
Quartic	1,64E4	432	4847	2,50E4	4378	1,57E5	3,51E4	<b>100</b>
Rastrigin	541	<b>100</b>	502	564	466	798	544	123
Rosenbrock	2012	<b>100</b>	418	615	443	2696	558	103
Schwefel 1.2	391	174	1344	1209	186	2091	1742	<b>100</b>
Schwefel 2.21	259	109	571	381	249	597	307	<b>100</b>
Schwefel 2.22	779	<b>100</b>	374	560	468	1297	670	142
Schwefel 2.26	<b>100</b>	119	215	174	161	231	188	104
Sphere	1721	115	278	111	751	5196	1445	<b>100</b>
Step	279	106	585	1155	530	5595	1580	<b>100</b>

## Cíle práce

V kap. 1 bylo zdůrazněno, jak je důležité mít pro kalibraci konceptuálního srážko-odtokového modelu k dispozici nejlepší dostupnou optimalizační metodu. BBO dosud k takovému účelu použita nebyla. Hlavním cílem práce je ozkoušet schopnosti vhodné varianty BBO na reálné úloze kalibrace modelu BILAN.

Systematického naplnění hlavního cíle dojde postupně těmito dílčími úkony:

1. shrnutím teorie řešené problematiky v kontextu dnešní úrovně poznání,  

---
2. naprogramováním několika variant BBO v prostředí R,
3. vyhodnocením těchto variant na sadě testovacích funkcí CEC 2013 s použitím vhodného statistického testu,
4. kandidátním řešením provedení kalibrace 10 vybraných povodích.

# Teoretický základ

## 3.1 Globální optimalizace

Optimalizační algoritmy jsou silným nástrojem při řešení mnoha inženýrských úloh. Obvykle nachází uplatnění tam, kde je získání analytického řešení příliš obtížné, nebo přímo nemožné. Jak bylo naznačeno v úvodu, většina problémů lze převést na optimalizační úlohu, kterou lze popsat jako minimalizační, nebo maximalizační proces (Zelinka, 2002). Oba typy jsou zápisy téhož, neboť

$$\min_x f(x) \iff \max_x [-f(x)]. \quad (3.1)$$

Je zvykem dodržovat zavedenou terminologii:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \Rightarrow f(x) & \text{ je zvána „nákladovou“ nebo „objektivní“} \\ \max_x f(x) \Rightarrow f(x) & \text{ je zvána „fitness“ nebo také „objektivní“} \end{aligned}$$

(Simon, 2013).

### Objektivní funkce

Na každou objektivní funkci lze nahlížet jako geometrický problém v  $N$ -rozměrném prostoru. Počet dimenzí tohoto prostoru je dán počtem argumentů v objektivní funkci. Hledaná řešení se nachází v  $N + 1$ -rozměrném prostoru (někdy označovaném jako „hyperplocha“). Objektivní funkce může být omezená, nebo neomezená, spojitá, nespojitá, diskrétní (Zelinka, 2009). Pokud se v daném hyperprostoru nachází více než jedno globální optimum, znamená to, že existuje více vzájemně rovnocenných hodnot parametrů. Tento koncept je zván ekvifinalita (Beven, 1993)

#### 3.1.1 Optimalizační algoritmy

Optimalizační techniky lze členit z několika úhlů pohledů. Lze je dělit na gradientní, bodové a populační (Luke, 1985). Mezi metody gradientní patří Newtonova metoda, nebo metoda největšího spádu. Mezi metody bodové patří simulované žíhání (SA) nebo horolezecký algoritmus (HC). Populačně definované techniky obsahují evoluční strategie (ES), genetické algoritmy (GA), diferenciální evoluci a v této práci použitou BBO. Algoritmus BBO spadá pod evoluční algoritmy, protože jeho výpočet je prováděn iterativně. Přesněji jej lze zařadit pod metaheuristiky<sup>1</sup>, protože obsahuje parametry,

<sup>1</sup>Lepší označení by v tom případě bylo „rodina algoritmů BBO“.



kteřé je možno ladit. Zde BBO patří do stejné skupiny jako GA, algoritmů populačně orientovaných.

Zelinka (2009) rozlišuje optimalizační metody ještě na deterministické a stochastické. Stochastické metody se označují jako metaheuristiky, protože poskytují obecný rámec řešení a jejich parametry se ideálně volí vzhledem k optimalizovanému problému. Tyto metody se od deterministických metod liší tím, že s jistou pravděpodobností propouštějí do další iterace horší řešení, čímž se snaží vyhnout lokálnímu minimu.

### 3.1.2 Teorémy obědu zdarma

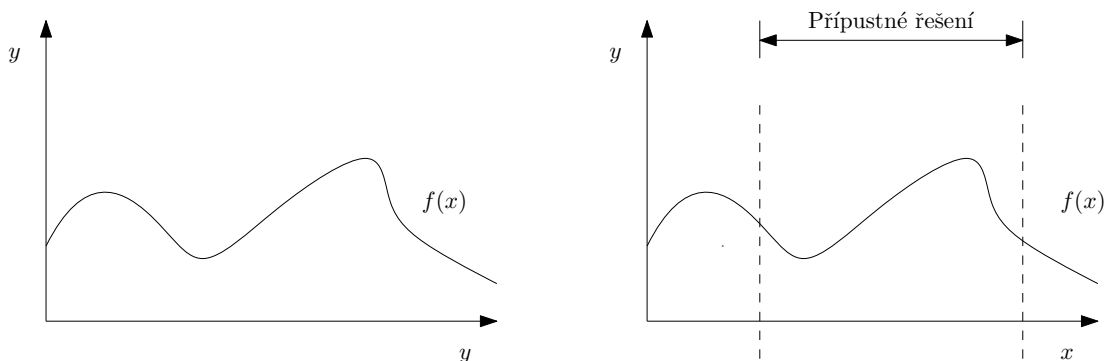
David Wolpert a William Macready řešili fundamentální otázku problematiky funkční optimalizace, a sice zda teoreticky existuje jeden obecně nejlepší optimalizační algoritmus. Přitom formulovali dva principiální teorémy obědu zdarma. První teorém je určen pro objektivní funkce invariantní v čase, druhý se vztahuje k objektivním funkcím v čase proměnlivým. Vzhledem k zaměření práce je na tomto místě uvedeno pouze znění prvního:

$$\sum_f P(d_m^y | f, m, a_1) = \sum_f P(d_m^y | f, m, a_2) \quad (3.2)$$

kde  $d_m^z$  označuje seřazenou množinu velikosti  $m$  s funkčními hodnotami objektivní funkce  $y \in Y$  vztaženými na optimalizovanou funkci  $x \in X, f : X \rightarrow Y$ .  $P(d_m^y | f, m, a_2)$  vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost zisku posloupnosti fitness hodnot  $m$ -krát spuštěným algoritmem  $a$  na funkci  $f$ .

Rovnice 3.2 vyjadřuje, že kterékoliv dva optimalizační algoritmy budou při aplikaci na množinu všech možných optimalizačních úloh<sup>2</sup> stejně výkonné (Wolpert et Macready, 1997). Jinými slovy neexistuje jediný univerzálně nejlepší algoritmus (Simon, 2013; Luke 2014). Způsob, jakým lze v průměru zlepšit kvalitu výsledků, je pouze apriorní znalost řešeného problému (Wolpert et Macready, 1997).

### 3.1.3 Neomezená a omezená optimalizace



Obr. 3.1: Neomezená a omezené optimalizace.

<sup>2</sup>Technicky se teorém vztahuje na diskretně formulované problémy, nicméně při použití výpočetní techniky k funkční diskretizaci eventuálně dojde.

Při konstrukci objektivní funkce mohou být její jednotlivé členy vázány pouze na určitý interval. Vázaná optimalizace je v hydrologické optimalizaci běžná, není například možné, aby precipitace, pozorovaný průtok nebo aktuální zásoba vody nabývaly záporných hodnot. Jak příklad naznačuje, tato omezení vyplývají z reálného prostředí (Nocedal et Wright, 2006). Konstrukce vázané optimalizace může mít značný vliv na celkový výsledek. Ke vhodnému omezení jednotlivých kritérií je možné například dosáhnout expertní znalostí. Množina všech přípustných řešení se nazývá *proveditelná oblast*. Hodnoty, které se dostanou mimo tuto oblast, lze buďto penalizovat, nebo jednoznačně zakázat (Zelinka, 2002).

### 3.1.4 Problém explorační a exploatační

Zde se nabízí paralela se středověkými mořeplavci, zámořskými objeviteli jako byl Kryštof Kolumbus nebo Fernão de Magalhães. Jejich výpravy slibovaly mecenášům pohádkové zisky, avšak nezdárka kdy vedly k fatálnímu neúspěchu. Rovnováha mezi možným ziskem a přiměřeným riskem je také běžně používaným schematem v investičním rozhodování (Nocedal et Wright, 2006). U optimalizačních algoritmů tomu není jinak. Při exploračním přístupu je možné, že dojde k nalezení globálního či obecně lepšího nového optima. Zásadní podíl hraje prvek náhody. Naopak akcent exploatační pravděpodobně povede k nalezení lepšího řešení, ovšem pouze v rámci bližšího okolí (Simon, 2013).

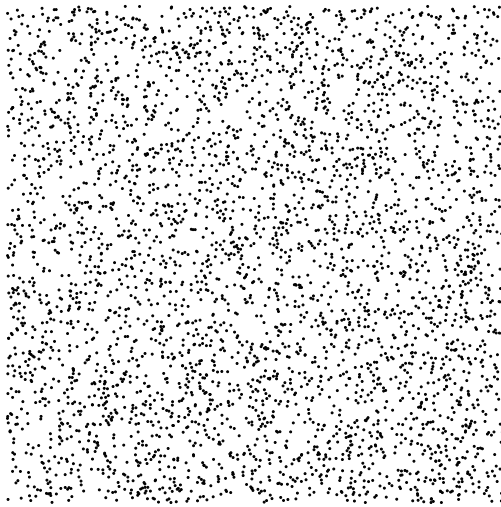
### 3.1.5 Hybridizace

V kapitole 3.1.1 je uvedeno, že evoluční algoritmy jsou metheuristické. Často jsou složeny z částí, které je možné vzájemně kombinovat a vytvářet metody více šité na míru řešenému problému. Kombinací dvou a více algoritmů, s úmyslem vytěžit z každého algoritmu lepší vlastnost, lze při apriorní znalosti o problému dosáhnout výrazného zkvalitnění dosažených výsledků. Často se přitom kombinují algoritmy globální s lokálními (El-Mihoub et al, 2006). Hybridizace byla prováděna i s BBO, např. s DE (Bhattacharya et Chattopadhyay, 2010).

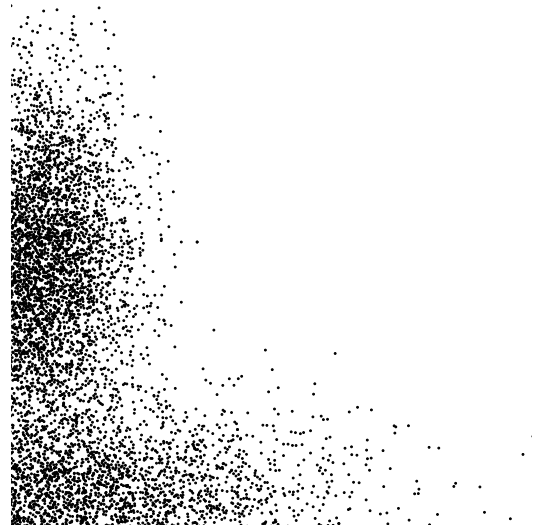
### 3.1.6 Inicializace

Při nedostatku informací se EA typicky inicializují generováním náhodné populace rovnoměrně v prostoru (obr. 3.2). Stejně jako v předchozí podsekcí 3.1.5, lze určitou vstupní znalostí docílit znatelně lepšího výsledku. Jedním ze způsobů (obr. 3.3) jak toho dosáhnout, je generovat více populací v prostoru, který již dříve poskytl zajímavé řešení, nebo přímo některá vhodná řešení přímo vložit (Simon, 2013).

Jinými variantami je v prvotní generaci vyhodnotit násobně více řešení a poté pro další výpočet ponechat pouze jejich nejlepší část (Bhattacharya, 2008), nebo náhodně generovat a v prvním kroku výpočtu provést lokální gradientní optimalizaci (Simon, 2013.)



Obr. 3.2: Náhodná inicializace v prostoru.



Obr. 3.3: Cílená inicializace v prostoru.

## 3.2 Teorie ostrovní biogeografie jako optimalizační proces

Význam ostrovů při odhalování zákonitostí evolučních procesů byl rozpoznán už Alfredem Wallacem při práci na souostroví Malay (Wallace, 1876) a Charlesem Darwinem na Galapágách (Darwin, 1909). Do 60. let 20. století byla biogeografie spíše popisnou a historickou vědní disciplínou. V následujících letech Arthur Wilson a Robert Wallace začali formulovat matematický popis biogeografie s primárním cílem modelovat distribuci druhů na sousedících ostrovech, s pomocí mechanismů extinkce a migrace. Jejich snaha kulminovala v roce 1967 dnes již klasickou publikací *Teorie ostrovní biogeografie* (MacArthur et Wilson, 1967).

Již v úvodu bylo řečeno, že příroda optimalizuje. Nabízí se tedy otázka, zda hledání rovnovážného stavu v druhovém rozložení mezi sousedícími habitaty je také optimalizační proces a zda takto formulovaný proces je možné použít v inženýrských úlohách (Simon, 2013). V průměru se zvýšení diverzity v ekosystému rovná zvýšení stability, přičemž evidence naznačuje, že diverzita není v tomto vztahu řídicí. Stabilita ekosystému závisí na schopnosti společenstev obsahovat druhy nebo funkční skupiny, které dovedou rozdílně reagovat na změny v prostředí. Taková stabilita je v přírodě obecně považována za optimální stav (McCann, 2000).

## 3.3 Matematický model biogeografie

Jak již bylo uvedeno, BBO je populačně založená, optimalizuje objektivní funkci pomocí stochasticky a iterativně zlepšovaných kandidátních řešení s ohledem na míru kvality nebo fitness funkce. Tak jako je tomu i v reálném světě, některé habitaty jsou pro organismy vhodnější než jiné. Míra vhodnosti habitatu je reprezentována tzv. *habitat suitability index* (dále v textu HSI), složeného z jednotlivých SIV, což jsou parametry

prostředí odpovídající např. topografii, srážkám, teplotě atd. (Simon, 2008). Což lze vyjádřit následující rovnicí:

$$\text{HSI} = f(\text{SIV}_1, \text{SIV}_2, \dots, \text{SIV}_D) \quad (3.3)$$

Se zvyšujícím se HSI roste počet druhů v habitatu, roste míra emigrace (více druhů opouští habitat) a klesá imigrace (méně druhů přichází).

$P_s$  = Pravděpodobnost, že habitat obsahuje právě  $S$  druhů:

$$P_s(t + \Delta t) = \overbrace{P_s(t)(1 - \lambda_s \Delta t - \mu_s \Delta t)}^{S \text{ druhů v čase } t \text{ žádný druh nemigroval}} + \quad (3.4)$$

$$\underbrace{P_{s-1}(t)\lambda_{s-1}\Delta t}_{S-1 \text{ druhů v čase } t, 1 \text{ druh imigroval}} + \underbrace{P_{s-1}(t)\mu_{s-1}\Delta t}_{S+1 \text{ druhů v čase } t, 1 \text{ druh emigroval}} \quad (3.5)$$

$$\dot{P}(S) = \begin{cases} -(\lambda_S + \mu_S)P_S + \mu_{S+1}P_{S+1} & S = 0 \\ (\lambda_S + \mu_S)P_S + \lambda_{S-1}P_{S-1} + \lambda_{S+1}P_{S+1} & 1 \leq S \leq S_{max} - 1 \\ -(\lambda_S + \mu_S)P_S + \mu_{S-1}P_{S-1} & S = S_{max} \end{cases} \quad (3.6)$$

kde  $n = S_{max}$  a  $P = [P_0, \dots, P_n]^T$ .  $n + 1$  rovnic vztahu 3.6 lze zapsat maticově jako  $\dot{P} = AP$  pak matice  $A$  je definována jako

$$A = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \mu_0) & \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \lambda_{n-2} & -(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) & \mu_n \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & -(\lambda_n + \mu_n) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Hodnota rovnovážného stavu  $S$  druhů v habitatu:

$$P(\infty) = \frac{v}{\sum v_i} \quad (3.8)$$

kde  $v$  a  $v_i$  se spočte:

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_{n+1}]^T \quad (3.9)$$

$$v_i = \begin{cases} \frac{n!}{(n-1-i)!(i-1)!} & (i = 1, 2, \dots, \text{strop}((n+1)/2)) \\ v_{n+2-i} & (i = \text{strop}((n+1)/2) + 1, 2, \dots, n+1) \end{cases} \quad (3.10)$$

a  $n$  je počet habitatů.

### 3.4 Biogeography-based optimization

Původní algoritmus sestává z po sobě jdoucích procesů migrace a mutace. Migrace je fáze exploatační, kdy se mezi populacemi favorizují řešení produkující lepší fitness, mutace je fáze explorační, zvyšující populační diverzitu.

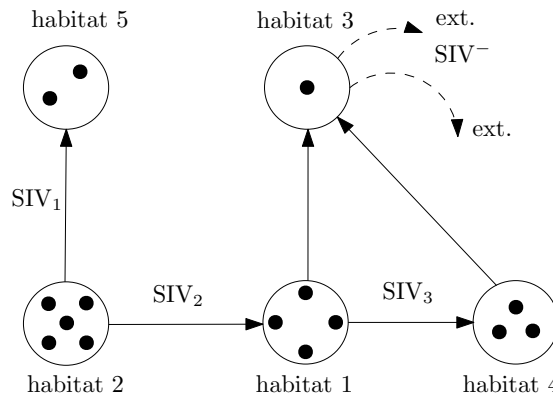
Základní algoritmus byl od roku 2008 vícekrát modifikován. Některé z rozšíření navrhl Dan Simon přímo v původní práci (Simon, 2008) a jsou uvedeny v sekci 3.5.

### Parametry BBO

- celkový počet habitatů,
- míra emigrace  $\lambda$ ,
- míra imigrace  $\mu$ ,
- maximální míra mutace  $m_{max}$ ,
- poměr elitních řešení v populaci.

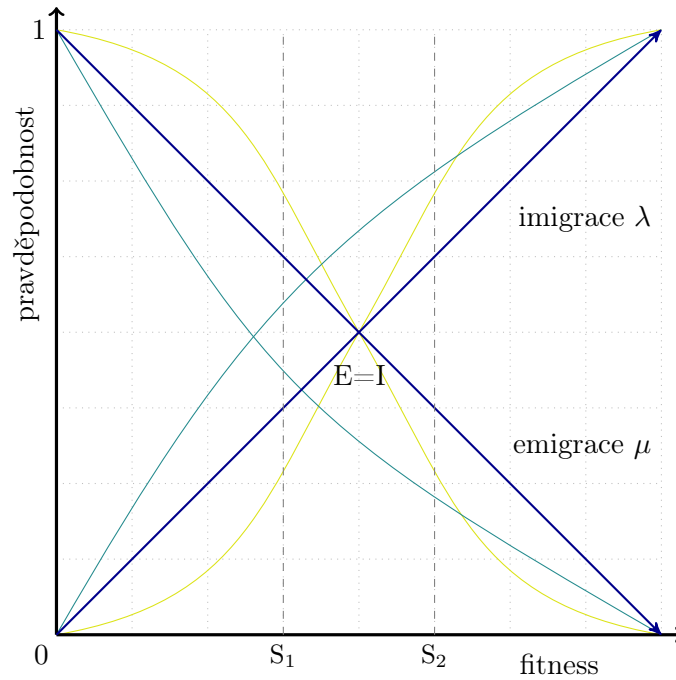
#### 3.4.1 Migrace

Migrace je proces, při kterém dochází k přenosu informace prostřednictvím imigrace  $\lambda$  a emigrace  $\mu$  každého řešení, jež jsou funkcemi počtu habitatů. Migrační strategie je podobná evoluční strategii, ve které více rodičů může přispět k vývoji jednoho potomka (Li et al., 2011). Dan Simon (2008) v původní práci představil lineární migrační vztahy (3.11). Nicméně v přírodě je migrace komplexní proces, který je linearitou příliš zjednodušen, neboť ekosystémové vztahy jsou ve své podstatě nelineární. Přírozenější cestou je použití nelineárních vztahů, jež byly představeny v pracích Ma et al., (2009) a Ma (2010). Jmenovitě model s konstantní emigrací a lineární imigrací (a *vice versa*), dále model s kvadratickou migrací (3.17) a s migrací sinusoidální (3.21). Nejslibnější výsledky přinesl poslední jmenovaný. Nově vzniklé habitaty jsou neobydlené, a tudíž s nulovou mírou emigrace, ale maximální možnou mírou imigrace. Takový postup schematizuje obr. 3.4.



**Obr. 3.4:** Schéma ekosystémové výměny parciálních vlastností (SIV) mezi jednotlivými habitaty. Habitaty s lepším HSI (1, 2 a 4) dotují parciálními  $SIV_i$  habitaty s horším HSI (3 a 5). Přičemž jejich původní  $SIV_i$  spěje k zániku.

Volba migračních křivek je tedy volbou selekčního postupu v rámci hodnocených řešení.



**Obr. 3.5:** Vztah emigrace a imigrace.  $S_1$  Ilustrace dvou kandidátních řešení stejného problému.  $S_1$  je relativně špatné řešení, zatímco  $S_2$  je řešení relativně dobré. Vztah je zde zjednodušen na lineární, ovšem může být charakterizován jakoukoliv jinou řádnou funkcí. Upraveno dle Dan Simon (2008).

### Model s lineární migrací

$$\lambda_k = I \left( 1 - \frac{k}{n} \right) \quad (3.11)$$

$$\mu_k = E \frac{k}{n} \quad (3.12)$$

### Model s konstantní imigrací a lineární emigrací

$$\lambda_k = \frac{I}{2} \quad (\text{konstanta}) \quad (3.13)$$

$$\mu_k = E \frac{k}{n} \quad (3.14)$$

### Model s lineární imigrací a konstantní emigrací

$$\lambda_k = I \left( 1 - \frac{k}{n} \right) \quad (3.15)$$

$$\mu_k = \frac{E}{2} \quad (\text{konstanta}) \quad (3.16)$$

**Model s kvadratickou migrací**

$$\lambda_k = I \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \quad (3.17)$$

$$\mu_k = E \left(\frac{k}{n}\right)^2 \quad (3.18)$$

**Model s s lichoběžníkovou migrací**

$$\lambda_k = \begin{cases} I, & k \leq i' \\ 2I\left(1 - \frac{k}{n}\right), & i' < k \leq n \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\mu_k = \begin{cases} \frac{2E}{n}k, & k \leq i' \\ E, & i' < k \leq n \end{cases} \quad (3.20)$$

**Model se sinusoidální migrací**

Míry imigrace a emigrace jsou sinusoidální funkcí počtu druhů  $k$ , což se promítá do křivek ve tvaru S. Tento model je spolu s kvadratickým ve shodě s modely migrace mezi přírodními habitaty. Sinusoidální křivky berou v úvahu vztahy predátor-kořist, populační velikost a mobilitu druhů (Li et al., 2011). Ma (2010) dospěl k závěru, že tyto křivky vykazují výrazně lepší chování.

$$\lambda_k = \frac{I}{2} \left( \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right) \quad (3.21)$$

$$\mu_k = \frac{E}{2} \left( -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right) \quad (3.22)$$

**Migrační schémata**

V současné době existují pro výpočet migračních křivek čtyři následující schémata:

1. PMB-BBO – *Partial migration based BBO*,
2. SMB-BBO – *Single migration based BBO*,
3. SPMB-BBO – *Simplified partial migration based BBO*,
4. SSMB-BBO – *Simplified single migration based BBO*.

Verze „simplified“ nemají vnořený vnitřní cyklus pro procházení populace za účelem výběru vhodného dárce migranta. V těchto řešení jsou migrována pouze řešení z prvního elitního habitatu. Při výpočtu „partial“ schémat je počítána pouze jedna migrační křivka, druhá je z ní posléze odvozená (Simon, 2013).

### 3.4.2 Mutace

Diverzita řešení je u populačně založených algoritmů klíčový faktor. Zatímco migrace zajišťuje propagaci kvalitních jedinců v rámci populace a tím jí také homogenizuje, mutace vpravuje do populace prvek náhody. Byla zavedena jako prevence před stagnací v lokální extrému (Simon, 2008). V rámci filozofie ostrovní biogeografie připodobňuje kataklyzmatickou událost, při které dojde k více či méně náhodné změně parametrů habitatu. Na druhou stranu pozitivní změnu HSI vlivem mutace lze chápat například jako

Mutace habitatu opět probíhá ve dvou fázích. První fáze je selekční a druhá exekutivní. Jedním způsobem jak, je možné realizovat selekci, je

$$m(i) = m_{max} \left( \frac{1 - P_i}{P_{max}} \right) \quad (3.23)$$

kde  $m(i)$  je míra mutace konkrétního habitatu,  $m_{max}$  je zvolená maximální míra mutace.

Tímto způsobem počítaná selekce mutace vychází z matematického modelu (sekce 3.3) pro implementaci velmi rigorózní, komplikovaná na numerický výpočet. K selekci pro mutaci je možné použít kterýkoliv selekční operátor typický pro GA, rovnice 3.24 reprezentuje selekci ruletou, kdy pravděpodobnost mutace jednotlivého řešení je funkcí jeho fitness v rámci celkové množiny řešení (Simon, 2017). Algoritmus mutace je uveden na obr. 3.6.

Je lehké nahlédnout, že migrace a mutace působí antagonisticky a nastavení procesu mutace je ladící parametr algoritmu.

$$P_s(x_i|v) = \frac{v_i f_i}{\sum_{j=1}^n v_j f_j} \quad (3.24)$$

#### Mutace s mutačními operátory

Mutační operátory jsou v EA běžné a existuje jich celá řada. Pro zlepšení explorační schopnosti navrhli nahradit (Gong et al. 2010) původní generátor náhodných čísel mutačními operátory. Takový postup je uveden na obr. 3.7.

**Mutace gaussovská** s funkcí hustoty rozdělení:

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \quad (3.25)$$

kde  $\mu$  je střední hodnota,  $\sigma^2$  je rozptyl. Generovaná čísla mají tedy rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$

**Mutace cauchyovská** s funkcí hustoty rozdělení:

$$f_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + \chi^2} \quad (3.26)$$

kde  $t$  je parametr polohy a  $\chi$  je parametr variability rozdělení. Generovaná čísla mají rozdělení  $Y \sim \delta(t)$



**Mutace Lévyho** Využívá stejně jako předchozí tzv. stabilní rozdělení, tzn. má funkční vyjádření hustoty pravděpodobnosti jež analyticky vyjádřitelné. Formulovatelné například takto:

$$L_{\alpha,\gamma} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma q^\alpha} \cos(qy) dq \quad (3.27)$$

kde  $y \in R$ ,  $\gamma$  je parametr polohy a  $0 < \alpha < 2$  kontroluje tvar distribuční křivky.

Při vázané optimalizaci mohou mutační operátory generovat řešení, která se ocitnou mimo výpočetní prostor. Existuje více možností, jak takové chování ošetřit. Jedním z možných je odrazení od výpočetní hranice, odmítnutí generovaného řešení, případně penalizace takového řešení (Simon, 2013).

$$X_i(j) = \begin{cases} 2 \times l_j - X_i(j) & \text{pokud } X_i(j) < l_j \\ 2 \times u_j - X_i(j) & \text{pokud } X_i(j) > u_j \end{cases} \quad (3.28)$$

```

1: begin
2:   for  $i = 1$  až  $NP$  do
3:     Spočti pravděpodobnost  $P_i$  Vyber SIV  $X_i(j)$  s pravděpodobností  $\propto P_i$ 
4:     if  $X_i(j)$  je vybrán then
5:       vyber náhodně SIV z  $X_i$ 
6:       nahraď vybrané SIV v  $X_i$ 
7:     end
8:   end
9: end

```

**Obr. 3.6:** Algoritmus mechanismu mutace bez mutačního operátoru.

```

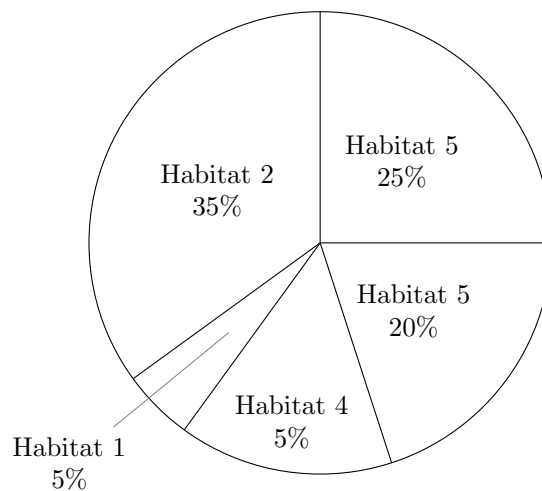
1: begin
2:   for  $j = 1$  až  $m$  do
3:     Použij  $\lambda_i$  a  $\mu_i$  k výpočtu pravděpodobnosti Vyber SIV  $X_i(j)$  s
       pravděpodobností  $\propto P_i$ 
4:     if  $X_i(j)$  je vybrán then
5:       vyber náhodně SIV z  $X_i$ 
6:       nahraď SIV v  $X_i$  pomocí mutačního operátoru
7:     end
8:   end
9: end

```

**Obr. 3.7:** Algoritmus mutace s použitím mutačního operátoru.

### 3.4.3 Selekcce

Standardní postup je v rámci EA tzv. selekcce ruletou. Jednoduchý mechanismus znázorňuje obr. 3.8. Pravděpodobnost výběru jedince je u výběru ruletou proporční jeho fitness. V tomto schématu je pravděpodobnost výběru jedince s vysokou mírou fitness velmi malá. V případě, že je z nějakého důvodu požadováno, aby byl do selekčního procesu zařazena i elitní řešení, je možné použít jako vstupní data míst hodnot fitness jejich pořadí (Simon, 2013). Nebo je možné pomyslnou ruletu roztočit pouze jednou, ale fixně rozdělit pomyslné kolo rulety na proporčně stejně veliké části a tím zajistit větší diverzitu mezi vybranými jedinci.



**Obr. 3.8:** Selekcce ruletou dle (Simon, 2013). Každému řešení je přiřazena hodnota pravděpodobnostní hodnota k dalšímu procesu dle jeho fitness. Habitat 1 má největší fitness, habitat 2 nejmenší.

### 3.4.4 Elitismus

Je implementován ve většině EA, původně byl navržen pro GA (De Jong, 1975). Vývoj populace musí být konvergentní k lepším hodnotám, nemůže nikdy vykazovat divergenci. Tento princip je nazýván elitismem<sup>3</sup>. V případě, že by tento filtr nefungoval, degradoval by postup na náhodné hledání (Zelinka, 2009). Implementací elitismu je možné nalézt více, zvláště u GA, v principu se jedná opět o selekci (Simon, 2013).

Jednoduché provedení v algoritmu BBO se skládá nejprve ze setřídění souboru řešení a následně zachování jejich poměrné části s nejlepším výsledkem. Tato část je volitelným parametrem algoritmu (Simon, 2014).

### Postup řešení BBO

1. Inicializace množiny kandidátních řešení daného problému.

<sup>3</sup>V původním znění *elitism policy*.

2. Výpočet „fitness“ tzn. HSI pro každé řešení.
3. Výpočet  $S$ ,  $\lambda$ , a  $\mu$  pro každé řešení.
4. Modifikace habitatu (migrace) na základě  $\lambda$ ,  $\mu$ .
5. Mutace na základě pravděpodobnosti.
6. Implementace elitismu.
7. Pokud je třeba další iterace  $\mapsto$  krok 2.

### 3.5 Modifikace BBO

Dají se rozdělit do dvou skupin. Jednu tvoří modifikace základních parametrů a druhou skupinu tvoří modifikace dodatečně přidaných parametrů. Mezi takové parametry patří míchaná migrace (Ma et Simon, 2010). Koncept míchání se dříve osvědčil v GA. V míchané migraci je generováno nové řešení  $z_k$  konvexní kombinací obou migrantů. Parametr míchání  $\alpha$  a jeho adaptivita jsou volitelné.

$$z_k(s) \leftarrow \alpha z_k(s) + (1 - \alpha)x_j(s) \quad (3.29)$$

Mezi teoretické koncepty patří habitatová příbuznost. Vzdálené ostrovy jsou více izolované, a tudíž těžší pro osídlení. Míra imigrace může být vztažena k vzdálenosti mezi jednotlivými řešeními. U bližších habitatů tak může být proporcčně zvýšena rychlost výměny SIV. Další teoretickou úpravou může být stanovení parametru minimální fitness, kdy ostrov je osídlen pouze v případě, že splňuje minimální podmínky na HSI (Simon D., 2013).

Konceptem již realizovaným je obohacení migrace o vztahy predátor–kořist. Individuální řešení představuje populaci predátorů/kořisti. Predátor vždy usiluje o „zabití“ kořisti s nejnižší fitness. Realizace dle (Zhu et Duan, 2014):

$$P_{pred} = P_{koř} + \rho(1 - t/t_{max}) \quad (3.30)$$

kde  $\rho$  je míra aktivity predátora a  $t$ ,  $t_{max}$  je počet generací resp. maximální počet generací lovu.

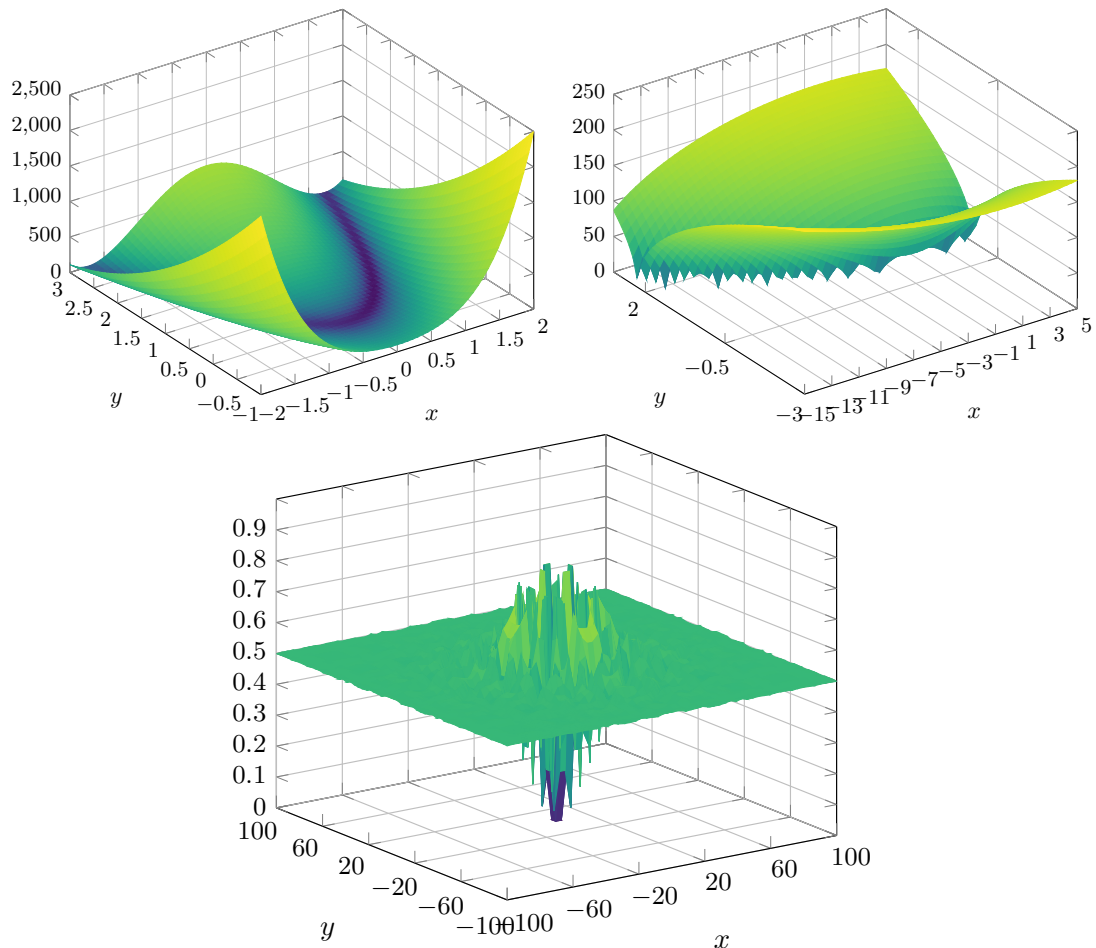
Samotnou kapitolou jsou hybridizace dalších algoritmů s BBO. Namátkou lze jmenovat hybridizaci se simplexovou optimalizací (Arora, 2012) nebo diferenciální evolucí (Bhattacharya et Chattopadhyay, 2010).

### 3.6 Testování výkonnosti algoritmů

#### Testovací funkce

K porovnání výkonnosti jednotlivých algoritmů, či jejich verzí slouží celá řada testovacích funkcí s různými vlastnostmi. Jsou to funkce unimodální, multimodální, asymetrické, atd. Často obsahují velké množství lokálních optim nebo nemají téměř žádný sklon.

Mezi klasické testovací problémy patří například funkce Rastrigin, Ackley, a Sphere (Zelinka, 2009). Pomocí těchto funkcí lze prověřit schopnosti algoritmů s ohledem na jejich kýžený efekt. Hodnoty testovacích funkcí bývají velmi citlivé na souřadnice globálního extrému. Ve vysoko-dimenzionálních prostorech způsobí malá odchylka v souřadnicích od globálního extrému citelný nárůst hodnoty funkce.



**Obr. 3.9:** Příklady 2D testovacích funkcí. Nahoře vlevo Rosenbrockova funkce s minimem v ...,vpravo Bukinova funkce č.6 s minimem ve. Dole Schaefferova funkce

### Statistické testování

Evoluční algoritmy jsou stochastické, jejich výkonnost je závislá na generovaných náhodných číslech. Pro posouzení, zda byl rozdíl ve výkonnosti různých algoritmů statisticky významný, je zapotřebí provést testu (Derrac et al., 2014).

Pro tento účel se aplikují jak testy parametrické (Czarn et al., 2004), tak v poslední době testy neparametrické (Garcia et al., 2009; Derrac et al., 2011). Testy se používají k porovnání konečných výsledků algoritmů reprezentovaných stejným kritériem: průměru, mediánu a dalších, při stejném počtu běhů na stejných funkcích (Derrac et al., 2014). Silnější parametrické testy vyžadují jisté předpoklady (normalita, homoskedasticita), které se obvykle nepodaří splnit. V těchto případech se používají robustnější testy

neparametrické.

Na poli inferenční statistiky je nutné nejprve stanovit nulovou hypotézu  $H_0$ , standardně reprezentovanou prohlášením o žádném efektu či neprůkazném rozdílu mezi subjekty. Nulová hypotéza je poté testována oproti hypotéze alternativní  $H_a$ , reprezentující naopak signifikantní rozdíl mezi subjekty. K zamítnutí  $H_0$  musí být buďto a priori stanovena hladina významnosti  $\alpha$ , nebo spočtena tzv. p-hodnota, jež představuje pravděpodobnost získání alespoň tak extrémního výsledku, jako je ten právě pozorovaný (Žvára, 2008; Crawley, 2007).

Parametrický test, vhodný pro srovnání středních hodnot výkonností dvou algoritmů je párový  $t$ -test. V případě, že je měřený ansámbl více algoritmů, používá se ANOVA s opakovanými měřeními.

Neparametrické testy pracují s pořadím. Obdobou párového  $t$ -testu je zde Wilcoxonův párový test, situace s více algoritmy vyžaduje metody mnohonásobného porovnávání s *Post-hoc* korekcemi.

Pokud by bylo použito více než jedno párové porovnání pro porovnání mezi více testovanými skupinami, trpěla by výsledná analýza znásobenou chybou prvního druhu. Správný výpočet p-hodnoty:

$$p = P(\text{zamítnuta } H_0 | H_0 \text{ platí}) \quad (3.31)$$

$$= 1 - P(\text{zamítnuta}) \quad (3.32)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{k-1} P() \quad (3.33)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{k-1} [P(\text{zamítnuta})] \quad (3.34)$$

Nedostatek tohoto testování tkví v tom, že bere v úvahu pouze konečné hodnoty, a proto se objevují i snahy (Derrac et al., 2014) prosazovat použití testů na průběh konvergence jako je například Pageův test (Page, 1963).

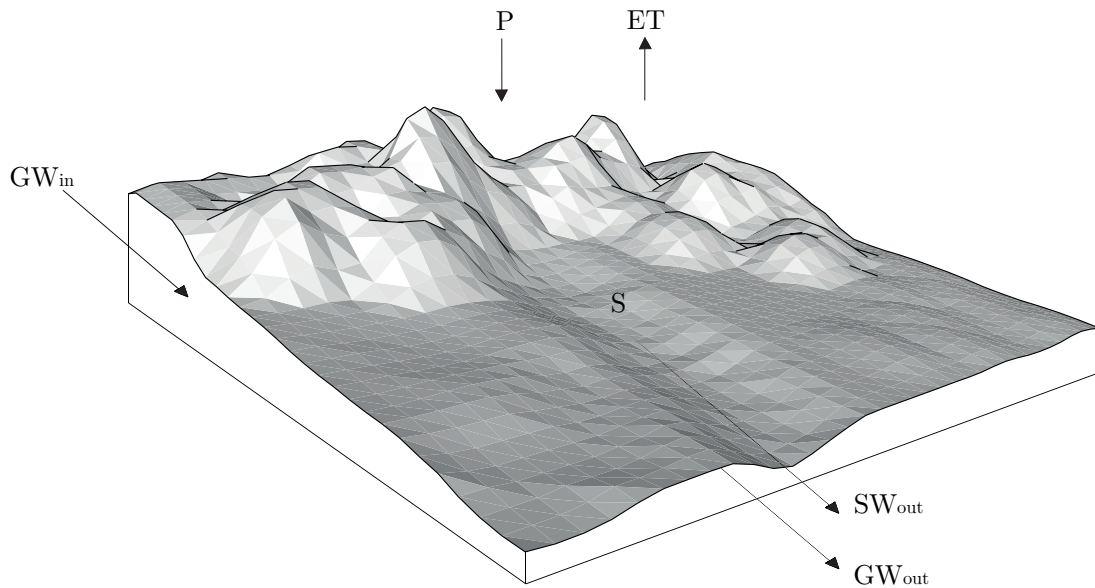
### 3.7 Konceptuální hydrologické modely

Hydrologický model je zjednodušením hydrologického systému, které dává do vzájemného funkčního vztahu vstupní a výstupní veličiny. Konceptuální modely obsahují vazby na základě zjednodušených fyzikálních zákonů. Nalézají se tak mezi modely čistě empirickými (black-box) a modely teoretickými (white-box). Často se takové modely označují jako bilanční, snaží se popsat hydrologický systém pomocí toků a změn zásob vody v povodí.

Bilanční rovnici povodí lze zapsat jako

$$(P + GW_{in}) - (ET + SW_{out} + GW_{out}) = \Delta S. \quad (3.35)$$

kde  $P$  je množství vody spadlé v srážkách za sledované období,  $SW_{out}$  je množství vody oteklé povrchovým tokem,  $GW_{out}$  množství vody oteklé podpovrchovým tokem,  $ET$  je úbytek způsobený evapotranspirací a  $GW_{in}$  je množství vody, které zvýšilo zásoby



**Obr. 3.10:** Schematické znázornění hydrologické bilance.

povrchové a podzemní vody (Dingman, 2002). Konceptuálních modelů lze rozlišit z hlediska hydrologické bilance na celistvé (BILAN) a na distribuované. Další dělení je možné na modely deterministické a stochastické nebo lineární a nelineární.

Mezi konceptuální hydrologické modely, které se ve světě často používají patří SAC-SMA, TUW, PDM.

Kalibrace parametrů konceptuálního hydrologického modelu je optimalizační úloha. Objektivní funkci odpovídá inverzní úloha v podobě vhodně zvoleného evaluačního kritéria. Jeho výběr je většinou determinován další prací s modelem.

### 3.7.1 Inverzní úloha

Kalibrace modelu je prováděna prostřednictvím optimalizace objektivní funkce. Běžně používané shrnuje tab. 3.1. Hydrologické indexy (jak se jinak také označují) jsou definovány jako matematické vztahy vyjadřující v jak dobré shodě jsou modelovaná data s měřenými daty (Beven, 2001).

Hydrologické indexy lze členit do následující skupin:

1. statistické parametry pozorovaných a modelovaných časových řad,
2. statistické parametry reziduální chyby,
3. bezrozměrné koeficienty.

Hlavními veličinami jsou minimum, maximum, medián, střední odchylka, rozptyl a autokorelační koeficient (Dawson et al., 2007.)

**Tab. 3.1:** Běžné objektivní funkce v hydrologické modelování.

Kritérium	Rovnice	Rozsah	Optimum
ME	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_{poz} - R_{mod})$	$[-\infty; +\infty]$	0
MAE	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  R_{poz} - R_{mod} $	$[0; +\infty]$	0
MAPE	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{ R_{poz} - R_{mod} }{R_{poz}}$	$[0; \infty]$	0
MRE	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{R_{poz} - R_{mod}}{R_{poz}} \right)$	$[-\infty; +\infty]$	0
MSE	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_{poz} - R_{mod})^2$	$[0; +\infty]$	0
PI	$1 - \frac{\sum_{i=1}^n (R_{poz} - R_{mod})^2}{\sum_{i=1}^n (R_{poz} - R_{poz-1})^2}$	$[-\infty; 1]$	1
NS	$1 - \frac{\sum_{i=1}^n (R_{poz} - R_{mod})^2}{\sum_{i=1}^n (R_{poz} - R_{poz})^2}$	$[-\infty; 1]$	1
LNNS	$1 - \frac{\sum_{i=1}^n (R_{poz} - R_{mod})^2}{\sum_{i=1}^n (R_{poz} - R_{poz})^2}$	$[-\infty; 1]$	1

### 3.8 BILAN

Celistvý konceptuální hydrologický model BILAN (Tallaksen et van Lanen (eds.), 2004), simulující hydrologickou bilanci v denním nebo měsíčním kroku je vyvíjen a používán ve Výzkumném ústavu hydrologickém. Model našel využití v mnoha studiích a projektech, například při modelování změn vodní bilance na povodí v důsledku klimatických změn (Hanel et al., 2012), nebo při aktualizaci bilance zásob podzemních vod v ČR (Kašpárek et al., 2014). V současné době je implementován ve třech podobách. Jednak je k dispozici C++ přepis původní verze z roku 2011 s grafickým uživatelským rozhraním, dále je k dispozici balík pro software R a také je přístupný jako webová aplikace<sup>4</sup> skrze framework Shiny<sup>5</sup>.

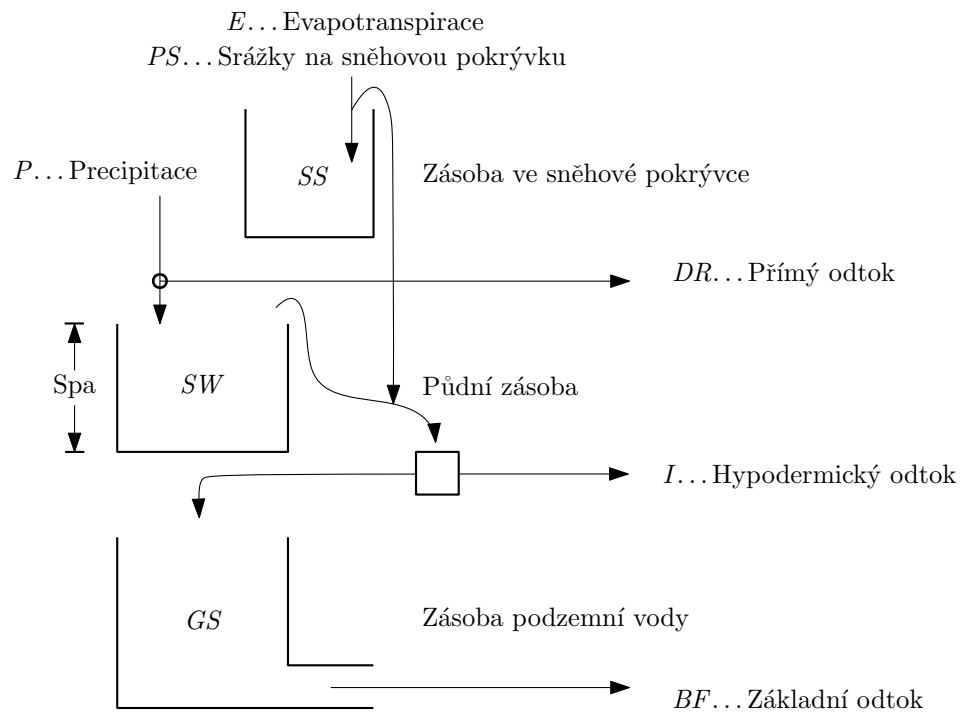
Parametry modelu reprezentují celé povodí a jsou pro toto povodí kalibrovány nezávisle na okolních. Hydrologickou bilanci popisuje systémem vztahů popisujících základní principy vodní bilance na povrchu, v zóně aerace včetně vegetační pokrývky a v saturované zóně. Nezbytná vstupní data modelu tvoří časové řady precipitace, relativní vlhkosti vzduchu a průměrné teploty vzduchu. Územní výpar, infiltrace do zóny aerace včetně průsaku, zásoba vody ve sněhu, zásoba vody v půdě a zásoba podzemní vody jsou určeny výpočtem. Odhad potenciální evapotranspirace je možno provést na základě zeměpisné šířky, nebo metodou dle Oudina (Beran et al., 2011), kde je výpočet založen na měření teploty vzduchu. Pro kalibraci modelu jsou využita odtoková data (Hanel et al., 2012).

<sup>4</sup><http://bilan.vuv.cz/shiny/bilan/>

<sup>5</sup><https://cran.r-project.org/package=shiny>

**Tab. 3.2:** Parametry modelu BILAN pro měsíční krok.

Parametr	měsíční model
Spa	kapacita zásoby půdní vlhkosti [mm]
Dgm	faktor tání sněhové pokrývky
Dgw	faktor pro výpočet objemu tekuté vody na zemském povrchu v zimním období
Alf	parametr srážko-odtokové rovnice
Soc	parametr kontroly rozložení perkolace v hypodermickém odtoku a doplnění zásob podzemní vody v letním období
Grd	parametr určující základní odtok
Mec	parametr rozdělující perkolaci na hypodermický odtok a na dotaci podzemní pro podmínky tání sněhu
Wic	parametr rozdělující perkolaci na hypodermický odtok a na dotaci podzemní vody pro zimní podmínky

**Obr. 3.11:** Schéma modelu BILAN v měsíčním kroku dle Máca (2015).

### 3.8.1 Optimalizační metody BILANu

V současné verzi software BILAN se nachází kální optimalizační metoda BS (binární srovnávání) a tři verze jedné globální optimalizační metody SCDE (Shuffled complex differential evolution).

#### Binární prohledávání

Gradientní lokální optimalizační metoda, založená na vzájemném porovnávání. Její výhodou je rychlost, s jakou nalézá řešení. Při jejím spouštění je nutné zúžit rozsah mezí pro první iteraci, tak aby se nenacházely příliš blízko okrajů.



**SCDE**

„Shuffled Complex Differential Evolution“ je globální optimalizační algoritmus, pracuje s populací modelů. Ty se snaží najít optimum v parametrickém prostoru za pomoci vzájemné interakce.

Implementovány jsou tři typy diferenciální evoluce – „best/1/bin“, „best/2/bin“, „rand/2/bin“, které se navzájem liší výpočtem „šumového“ vektoru (Zelinka, 2002).

best/1/bin

$$v = x_{best,j}^G + F \cdot (x_{r2,j}^G - x_{r3,j}^G) \quad (3.36)$$

best/2/bin

$$v = x_{best,j}^G + F \cdot (x_{r1,j}^G + x_{r2,j}^G - x_{r3,j}^G - x_{r4,j}^G) \quad (3.37)$$

rand/2/bin

$$v = x_{r5,j}^G + F \cdot (x_{r1,j}^G + x_{r2,j}^G - x_{r3,j}^G - x_{r4,j}^G) \quad (3.38)$$

**3.8.2 Evaluační kritéria**

BILAN má implementovány následující kritéria: MSE, MAE, MAPE, NS, a LNNS. Pokrývá tak škálu od logaritmických, které akcentují nízké průtoky, až po kvadratické, kladoucí důraz na povodňové události.

# Metodika

## 4.1 BBO varianty

Srovnání bylo podrobena 6 variant. Jako výchozí varianta BBO posloužila varianta algoritmu BBO z balíčku `bbo` (Nikumbh, 2014), která čerpala inspiraci stejně jako autor této práce u tvůrce originálního kódu (Simon, 2016). Jedním ze sekundárních výstupů bude i srovnání s tímto kódem. Testovány byly dvě varianty bez mutačního operátoru, tři varianty s mutačním operátorem. Pro varianty 4.-6. byl zvolen sinusoidální migrační model na základě výsledků (Ma, 2010; Li et al., 2011). Migrace byla realizována schématem PMBBO, mutace realizována ruletou.

1. BBO – srovnávací varianta z balíčku `bbo`  
param:  $P_{mut}$ ,  $r_{nech}$ ,  $n_{gen}$
2. BBO2 – BBO s kvadratickou migrací bez mutačního operátoru  
param:  $P_{mut}$ ,  $r_{nech}$ ,  $n_{gen}$
3. BBOSIN – BBO se sinusoidální migrací bez mutačního operátoru  
param:  $P_{mut}$ ,  $r_{nech}$ ,  $n_{gen}$
4. BBOSGA – BBO se sinusoidální migrací s Gaussovou mutací  
param:  $P_{mut}$ ,  $r_{nech}$ ,  $n_{gen}$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$
5. BBOSCA – BBO se sinusoidální migrací a Cauchyho mutací  
param:  $P_{mut}$ ,  $r_{nech}$ ,  $n_{gen}$ ,  $t$ ,  $\chi$
6. BBOSLE – BBO se sinusoidální migrací a Lévyho mutací  
param:  $P_{mut}$ ,  $r_{nech}$ ,  $n_{gen}$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$

## 4.2 Soubor optimalizačních úloh CEC 2013

Výkonnost jednotlivých variant BBO byla porovnána na skupině 28 minimalizačních úloh CEC 2013. Sada funkcí byla dodána pomocí balíčku `cec2013` (Zambrano-Bigiani M. et Gonzalez-Fernandez Y., 2015). Jejich přehled je uveden v příloze A.1 a rozbor v příloze A.2.

Testování proběhlo za následujících podmínek:

Objektivní funkce	28 minimalizačních úloh
Dimenze	10
Běhů	51
MaxFES	10 000 · D
Prohledávaný prostor	$[-100, 100]^D$
Inicializace	uniformní náhodná uvnitř prohledávaného prostoru
Terminační kritérium	dosažení MaxFES nebo $\epsilon < 10^{-8}$

Byly zaznamenávány hodnoty pro objektivní funkcí pro všechny jedince v každé generaci.

#### 4.2.1 Statistické zpracování

Pro statistické porovnání mezi algoritmy byl použit neparametrický Friedmanův test na mediánech nejlepších výsledků z jednotlivých běhů. Za testovanou střední hodnotu byl použit medián, protože funkční hodnoty vysoko-dimenzionálních problémů mohou, a také nabývají velmi vysokých hodnot. Citlivost aritmetického průměru na výrazné odchylky je v tomto případě nežádoucí. Friedmanův test předpokládá existenci  $k$  nezávislých měření, kde  $k \geq 2$ , která je možné seřadit.

Znění hypotéz:

$$H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \dots = \bar{X}_n \quad (4.1)$$

$$H_A: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2 \neq \dots \neq \bar{X}_n \quad (4.2)$$

Testovací statistika

$$T = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{i=1}^k \left( R_i - \frac{b(k+1)}{2} \right)^2 \quad (4.3)$$

kde  $k$  je druh algoritmu a  $b$  je blok měření (viz rovnice 4.4)

<b>blok</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>...</b>	<b>k</b>	
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$\dots$	$x_{1k}$	
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$\dots$	$x_{2k}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$b$	$x_{b1}$	$x_{b2}$	$\dots$	$x_{bk}$	(4.4)

a pořadí

$$R_k = \sum_{i=1}^b R(X_{ik}) \quad (4.5)$$

V případě průkazného rozdílu se přistupuje k *Post-hoc* párovým Wilcoxonovým testům s Wilcoxon-Nemenyi-McDonald-Thompson korekcí (Hollander et Wolfe, 1999).

### 4.3 BILAN případová studie

Vybraná úspěšná varianta na CEC 2013 byla následně porovnána s již implementovanými algoritmy v modelu BILAN na 10 náhodně vybraných povodích. K tomuto účelu posloužila jedna varianta BS a jedna varianta SCDE. K nastavení jejich parametrů byla použita empirická zkušenost (Máca, 2017, in verb.). Výpočet evapotranspirace byl proveden na základě zeměpisné šířky.

#### 4.3.1 Nastavení implementovaných optimalizačních algoritmů

##### Binární srovnávání

Maximum iterací zvoleno 500. Počáteční hodnoty byly dosazeny generováním z uniformního rozdělení v rozsahu a dimenzích parametrů modelu. Rozsah musel být pro první generaci upraven následovně:

Spa	(5; 180)
Dgw	(0; 18)
Alf	(0,0005; 0,0025)
Dgm	(0,5; 19,5)
Soc	(0,05; 0,9)
Wic	(0,05; 0,9)
Mec	(0,05; 0,9)
Grd	(0,05; 0,9)

##### Diferenciální evoluce

Byla vybrána varianta SCDE: „best\_one\_bin“ se 4 komplexy a 10 generacemi na komplex. Počet promíchávání byl nastaven na 5, počáteční zásoba na 50 a počet běhů v ansámblu na 5.

##### BBO

V reálné úloze bylo zachováno stejné nastavení jako na testovací úloze při čtvrtinovém počtu generací – 250 populací 100 generací, počet elitních habitatů roven 10 %, maximální míra mutace zvolena 0.05. Pravděpodobnostní selekci mutace podléhala všechna řešení, výběr byl proveden dle rovnice 3.24. Inicializace proběhla generováním čísel z uniformního rozdělení v celém prostoru.

#### 4.3.2 Evaluační kritéria

Výběr byl determinován již implementovanými optimalizačními kritérii v modelu BILAN. Mezi nimi byla vybrána MAE, MSE a NS. Pro každý hydrologický index bylo provedeno 30 opakování s každým algoritmem.

## 4.4 Použité zdroje

Všechny výpočty včetně vyhodnocení byly provedeny v prostředí R (R core team, 2016). Grafické výstupy byly zpracovány pomocí balíčků `ggplot2` (Wickham, 2009) a `viridis` (Garnier, 2016). Dále ke zpracování dat byly použity balíčky `reshape2` (Wickham, 2007) a `data.table` (Dowle et Srinivasan, 2017).

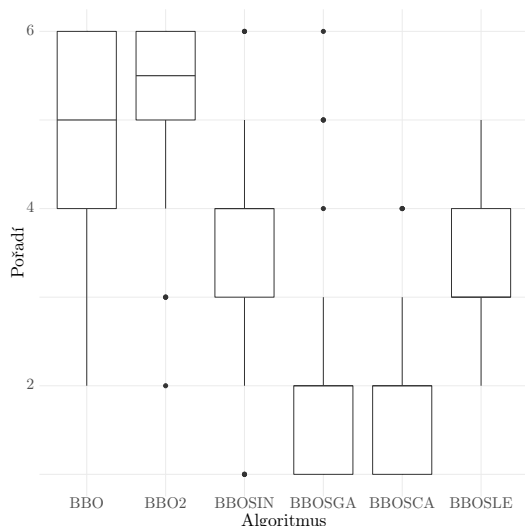
Použitá verze balíčku `bilan` byla ze dne 18. 6. 2015 (Kašpárek et al., 2015). Kalibrační kritéria pro BBO byla doplněna balíčkem `hydroGOF` (Zambrano, 2014).

# Výsledky

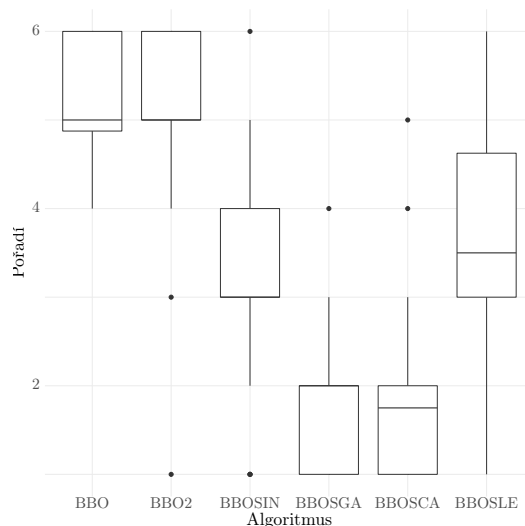
Bylo vytvořeno více než 8751 souborů obsahujících údaje o jednotlivých bězích na každé jedné testovací funkci o celkové velikosti přesahující 4,6 Gb. Dále pak 180 souborů s výsledky kalibrace pomocí BBO v souhrnné velikosti 370 Mb. V součtu výpočty spotřebovaly přes 550 hodin výpočetního času.

## 5.1 Testování na sadě funkcí CEC 2013

Všechny připravené varianty byly schopny rychle konvergovat ke globálnímu optimu u většiny 10D problémů. Výjimku tvořila funkce č. 26 (obr. B.22), kde BBOSIN evidentně uvízla v lokálním minimu už po 10 tis. evaluacích. Z hlediska středních hodnot konečných výsledků si vůbec nejlépe vedla varianta BBOSCA. Tímto způsobem na 14 funkcích předčila ostatní (obr. 5.1). Velmi dobrého skóre dosáhla v průběhu testování i BBOSGA, nejlepšího průměrného výsledku docílila v 10 případech. Při zvážení jednotlivých nejlepších hodnot došlo k dělení pořadí s celkovým počtem BBOSCA i BBOSGA 12 nejlepších (obr. 5.2). Výsledky shrnuje tab 5.2 resp. 5.3. Nejlépe jsou vidět rozdíly mezi algoritmy na obr. 5.3 a obr. 5.4, obě funkce jsou multimodální neseparabilní a asymetrické. Statistické testování bylo založeno na středních hodnotách.



**Obr. 5.1:** Popisné statistiky dle počtu nejlepších dosažených hodnot.



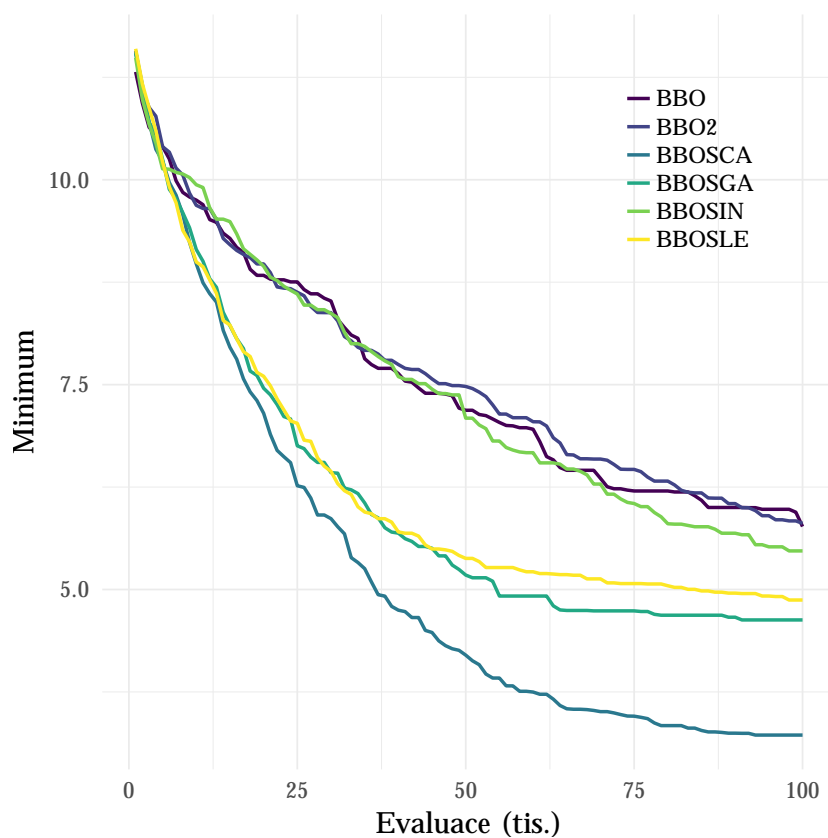
**Obr. 5.2:** Popisné statistiky dle mediánu nejlepších dosažených hodnot.

Aplikací Friedmanova testu byla prokázána oboustranná odlišnost mediánu výkonnosti mezi skupinami,  $p$ -hodnota =  $2,2364e-11$ , Testovací statistika  $T=6,9357$ . Po *Post-hoc* proceduře je upravená  $p$ -hodnota =  $2,9919e-11$ . Vzájemným porovnáním Wilcoxon-Nemenyi-McDonald-Thompson testem byl nalezen průkazný rozdíl mezi těmito třemi dvojicemi algoritmů BBO, BBO2 – BBOSCA, BBOSGA – BBOSIN, BBOSLE. Špatně si vedly BBO a BBO2, přičemž BBO2 je z této dvojice horší. Jediný pár s podobnými výsledky, který je tvořen algoritmy s a bez mutačního operátoru, je BBOSLE a BBOSIN. Zbylé dvě varianty s mutačním operátorem BBOSGA a BBOSCA dosahovaly signifikantně lepších výsledků než ostatní. Zároveň mezi těmito dvěma není rozdíl, ( $p$ -hodnota je rovna 0,9999). Všechny  $p$ -hodnoty jsou uvedeny v tab. 5.1. Přesné průběhy optimalizací obsahují konvergenční grafy v příloze B.2. Tabulky B.1, B.2, B.3, B.4, B.5 a B.6 v příloze B.1 shrnují statistiky pro jednotlivé funkce u každé varianty.

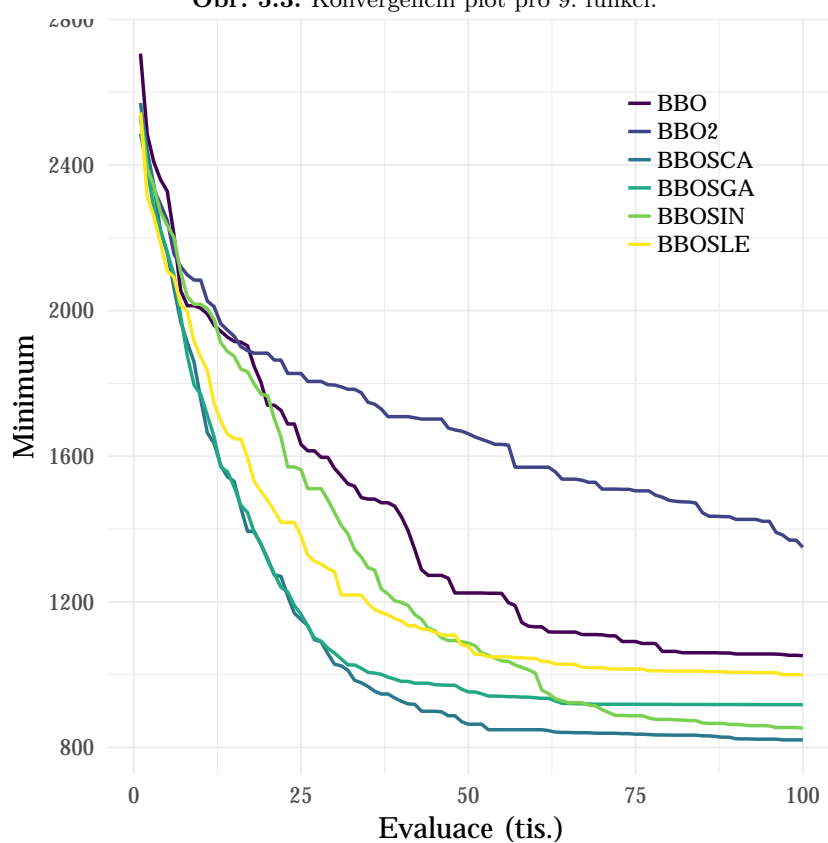
**Tab. 5.1:** Matice výsledků *Post hoc* analýzy.

	BBO	BBO2	BBOSIN	BBOSGA	BBOSCA	BBOSLE
BBO	<b>X</b>					
BBB2	0,9995	<b>X</b>				
BBOSIN	<b>0,0014</b>	<b>0,0048</b>	<b>X</b>			
BBOSGA	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0430</b>	<b>X</b>		
BBOSCA	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0286</b>	0,9999	<b>X</b>	
BBOSLE	<b>0,0487</b>	<b>0,0130</b>	0,9056	<b>0,0012</b>	<b>0,0007</b>	<b>X</b>

Pro srovnání výkonnosti na případové studii byla vybrána varianta BBOSCA. Jak je uvedeno výše, dosáhla celkově více lepších průměrovaných výsledků než BBOSGA. Dále při pohledu na tab. B.5 a B.4 je patrný výrazný rozdíl mezi výkonností na 2. a 3. testovací funkci. V těchto případech BBOSCA dosáhla násobně až řádově nižších hodnot.



Obr. 5.3: Konvergenční plot pro 9. funkci.



Obr. 5.4: Konvergenční plot pro 23. funkci.



**Tab. 5.2:** Pořadí úspěšnosti optimalizačních algoritmů na CEC 2013 dle mediánu.

$f_n$ CEC 2013	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28 $\bar{x}$	
BBO	6	5	5	6	6	5	6	4	6	6	6	6	6	6	6	5	4	5	5	6	4-5	4	5	4	4	6	5	4	
BBO2	5	4	4	4	5	6	5	1	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	5	6	5	6	6	6	3	6	6	
BBOSIN	4	6	3	5	4	3	3	2	4	4	4	4	4	3	3	4	1	4	1	3	3	1	2	3	2	5	4	3	
BBOSGA	1	2	2	2	1	2	2	3	2	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	2	1-2	2	3	2	3	4	1	1
BBOSCA	2	1	1	1	2	1	1	5	1	2	2	2	1	2	1	2	3	1	4	1	1-2	3	1	1	1	2	2	2	
BBOSLE	3	3	6	3	3	4	4	6	3	3	3	3	3	4	4	3	5	3	3	4	4-5	6	4	5	5	1	3	5	

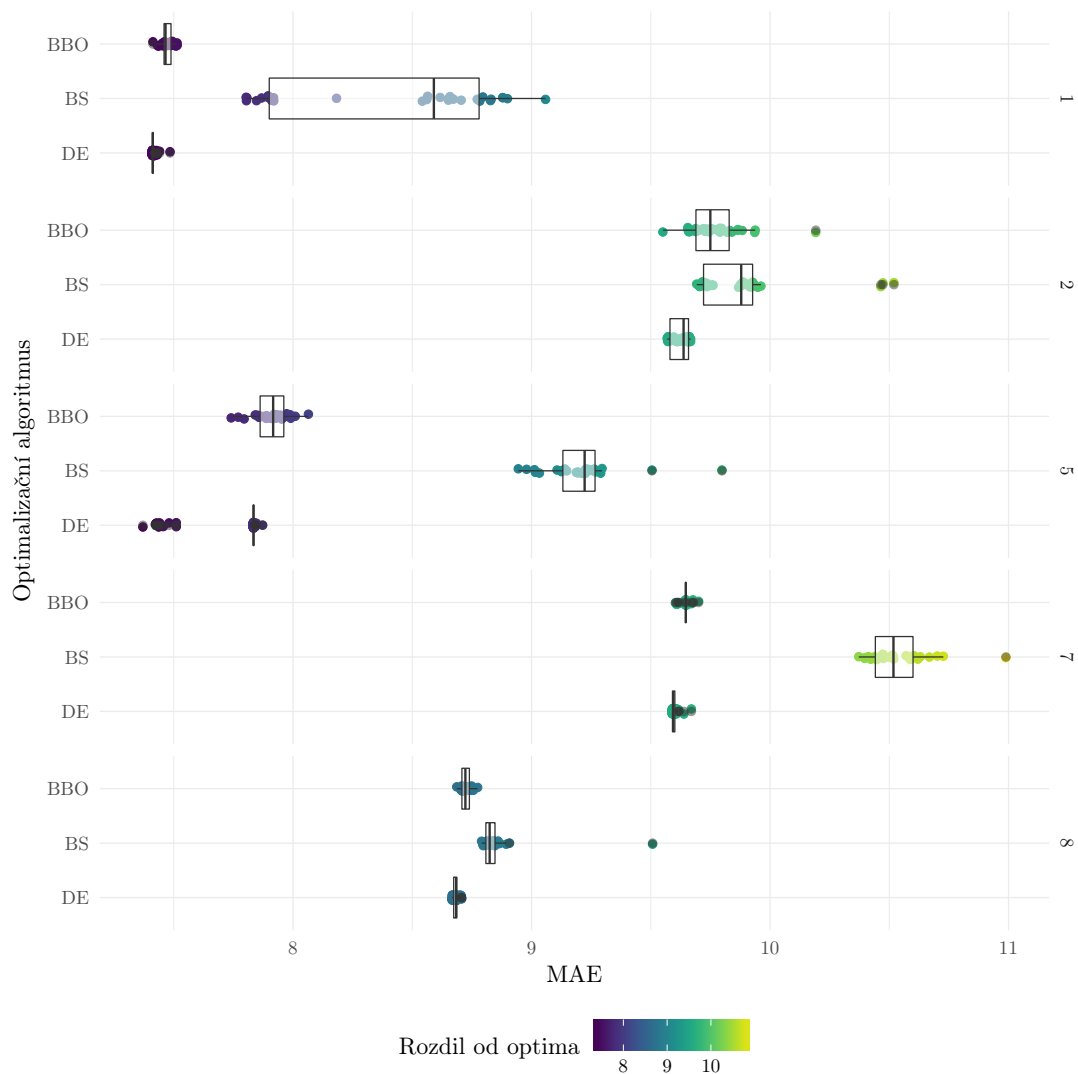
**Tab. 5.3:** Pořadí úspěšnosti optimalizačních algoritmů na CEC 2013 dle nejlepších hodnot.

$f_n$ CEC 2013	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
BBO	6	5	5	6	6	6	5	6	5	6	6	5	6	6	5	3	4	4	5	4	2	4	3	2	6	5	5	3	
BBO2	5	4	6	5	5	3	6	2	6	5	5	6	3	5	6	6	6	6	6	6	3	6	6	5	5	6	6	5	
BBOSIN	4	6	4	4	4	5	4	4	4	4	4	4	5	3	3	4	1	3	1	3	6	1	2	3	1	2	4	6	
BBOSGA	1	2	1	2	1	1	1	5	2	1	1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	5	2	5	6	3	4	1	1
BBOSCA	2	1	2	1	2	2	2	1	1	2	2	2	1	2	4	1	3	1	4	1	1	3	1	1	4	1	2	2	
BBOSLE	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	4	4	2	5	5	5	3	5	4	5	4	4	2	3	3	4	

## 5.2 Porovnání s již implementovanými optimalizačními algoritmy

Je členěno dle optimalizovaných hydrologických indexů. 10 povodí je z důvodu lepší čitelnosti graficky rozděleno na dva soubory dle úspěšnosti. Statistiky kalibrace jsou vypsány v příloze C, tab. C.1, C.2 a C.3.

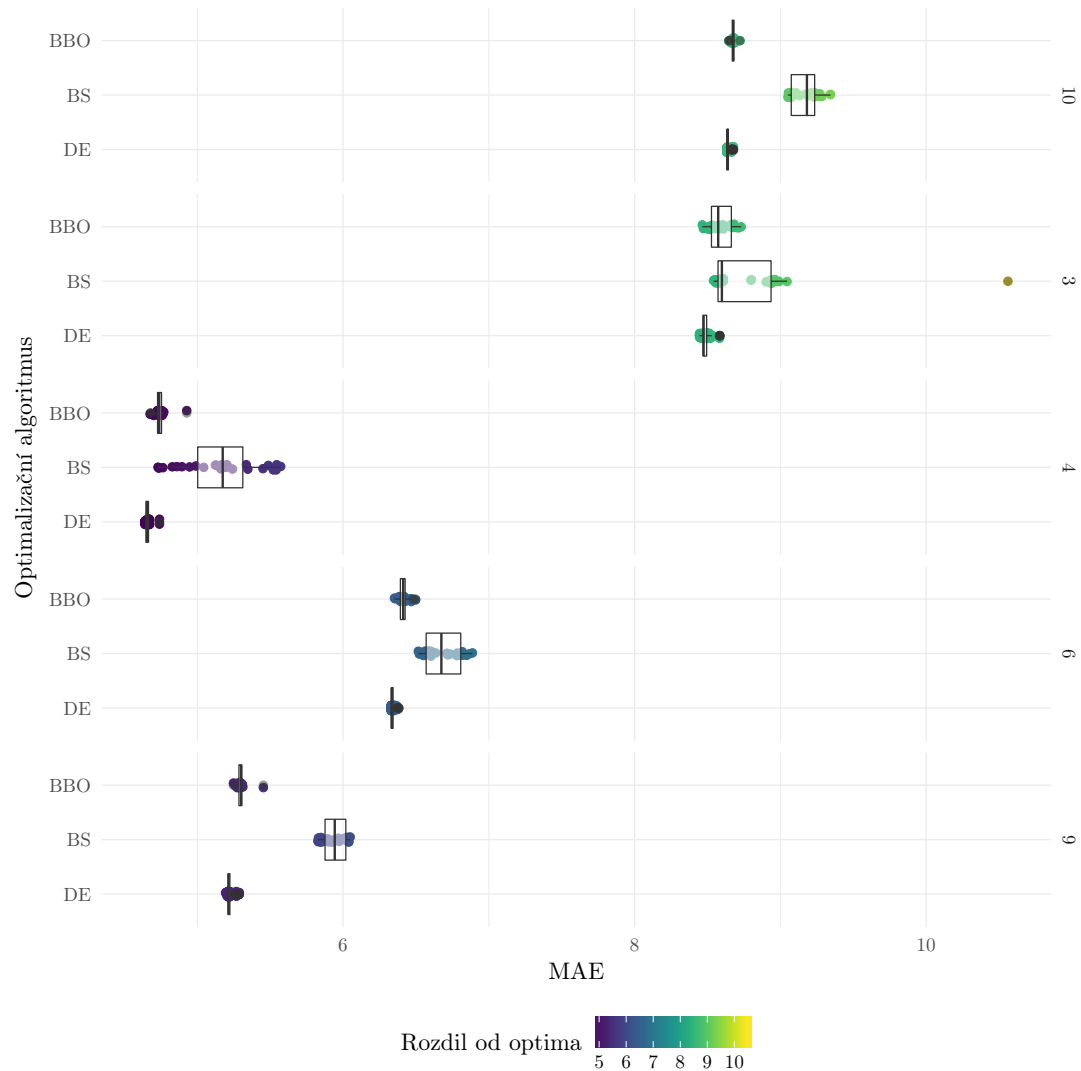
### 5.2.1 MAE



Obr. 5.5: Výsledky optimalizace hydrologického indexu MAE na povodích 1, 2, 5, 7, 8.

Výsledky viz obr. 5.5 a 5.6, hůře než SCDE si BBOSCA vedla zejména na povodí č. 5, kdy se SCDE oproti BBOSCA byla schopna dostat z lokálního minima. V průměru při optimalizaci kritéria MAE dosáhla varianta BBOSCA horších výsledků nežli SCDE na všech povodích. Pouze dvakrát dosáhla nejlepšího konečného minima. Při hodnocení

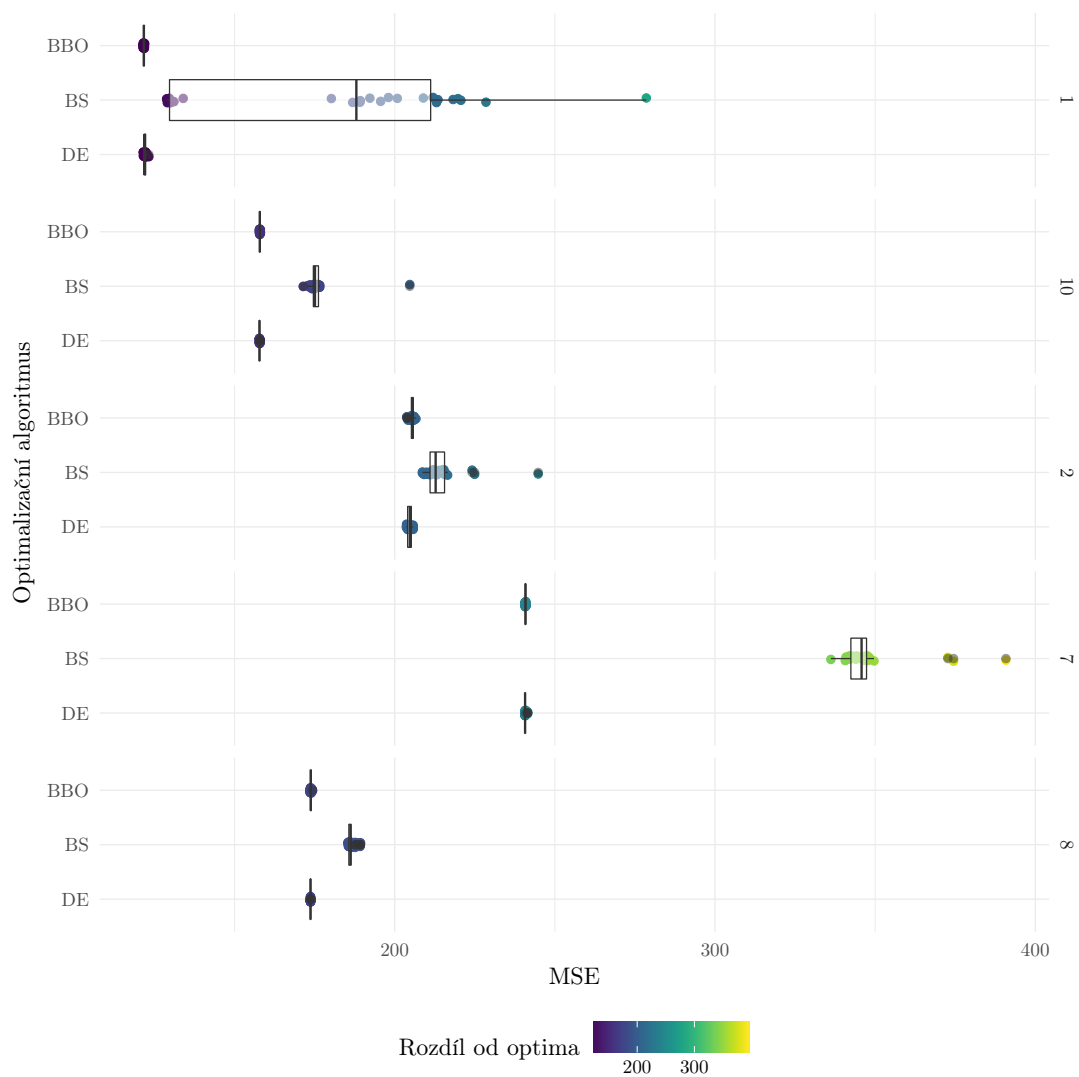
průměrných hodnot nebyla nejlepší ani jednou. Metoda BS zaostávala zejména u povodí 1, 5 a 7, ani v jednom případě neposkytla srovnatelný výkon jako druhé dvě.



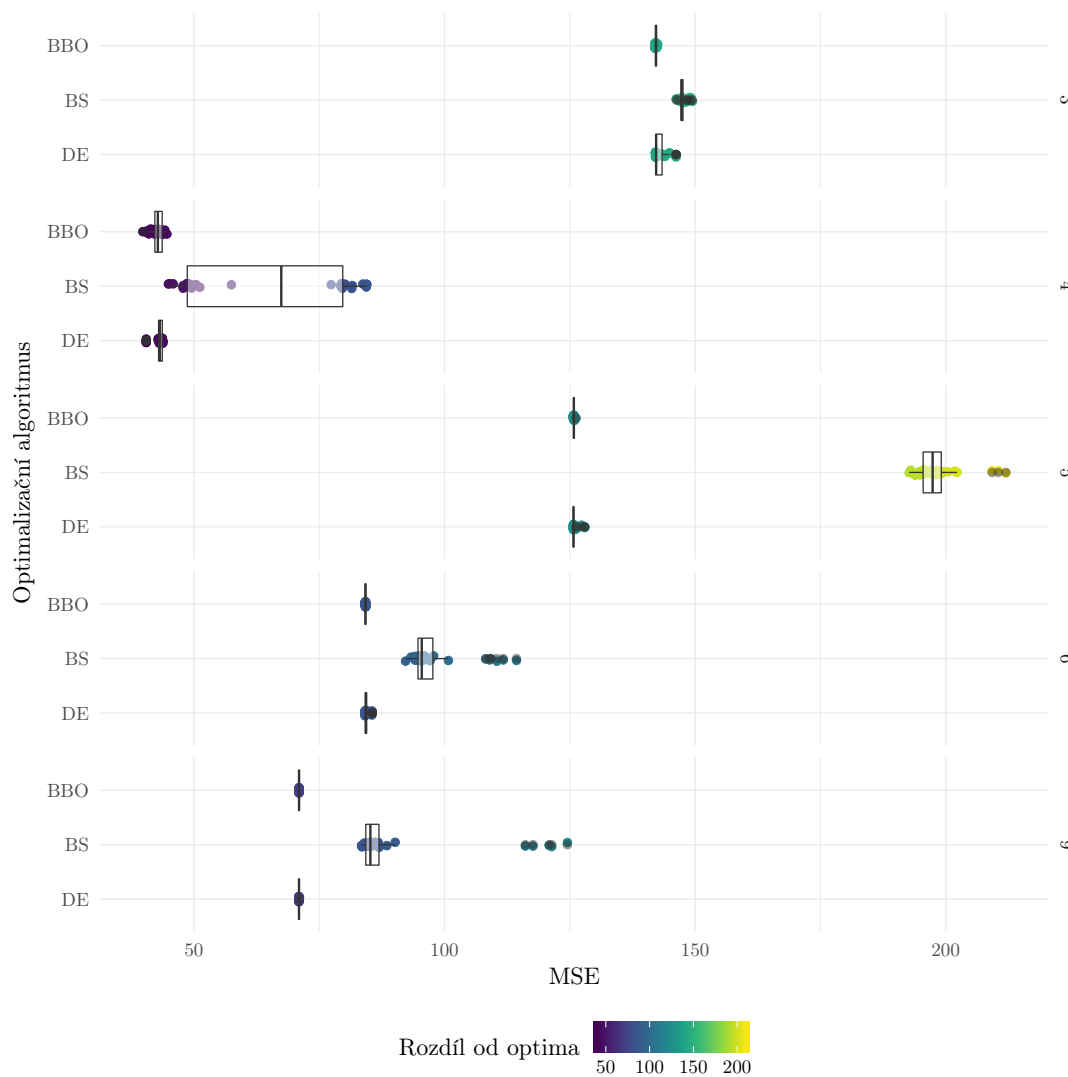
**Obr. 5.6:** Výsledky optimalizace hydrologického indexu MAE na povodích 10, 3, 4, 6, 9.

### 5.2.2 MSE

Zde BBOSCA dosáhla stejných průměrných konečných hodnot s SCDE na 3. povodí (obr. 5.8) a lepších hodnot v dalších třech případech. Na zbylých si v průměru vedla hůře než SCDE. Zajímavé je, že při součtu dosažených absolutních nejlepších hodnot dosáhla BBOSCA 7 prvenství. Obě metody opět předčili BS. Zajímavého výsledku bylo dosaženo zejména při kalibraci povodí 1 a 7 (obr. 5.8, 5.7), které obě globální metody kalibrovaly výrazně lépe než BS, jež evidentně zůstávala v lokálních minimech.



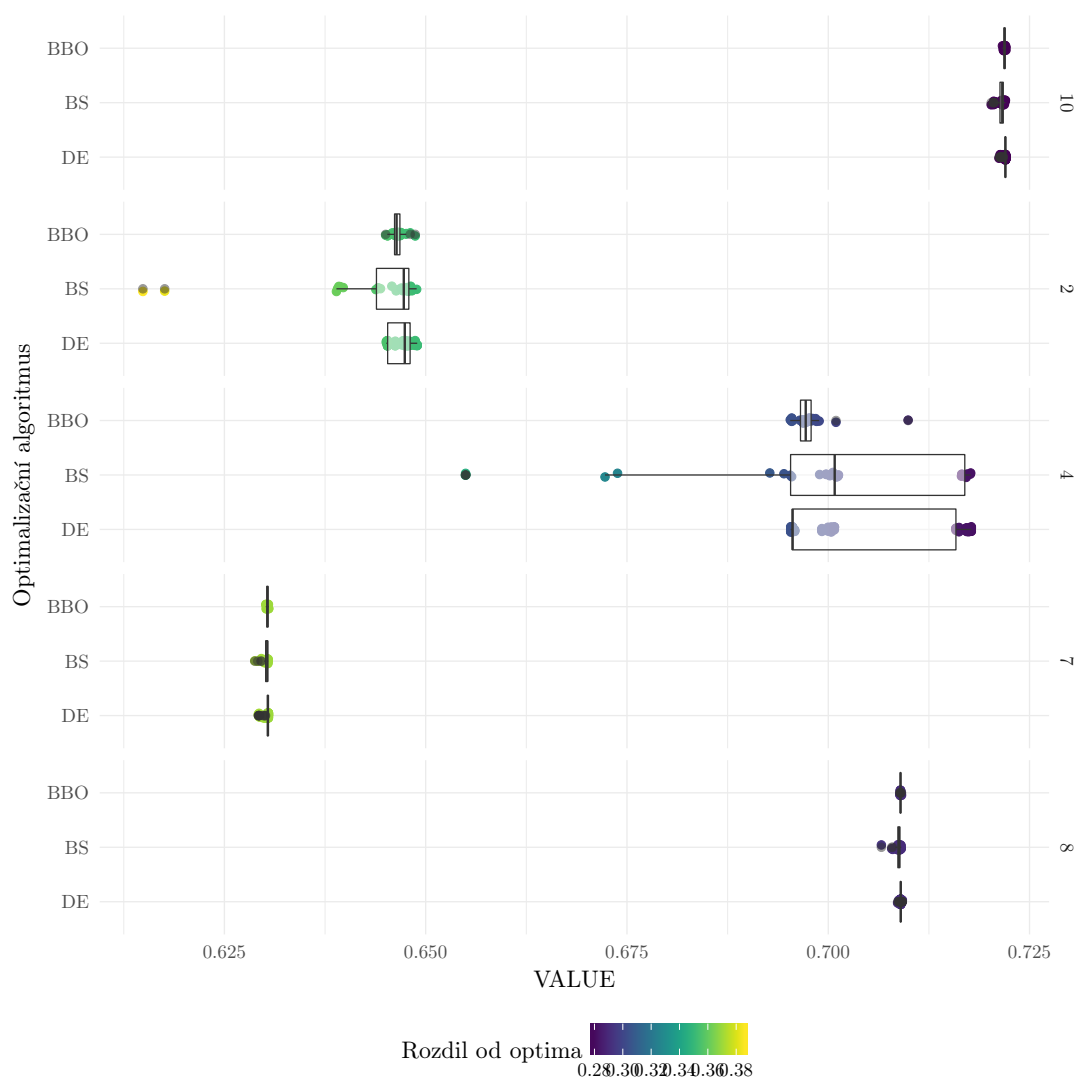
**Obr. 5.7:** Výsledky optimalizace hydrologického indexu MSE na povodích 1, 10, 2, 7, 8.



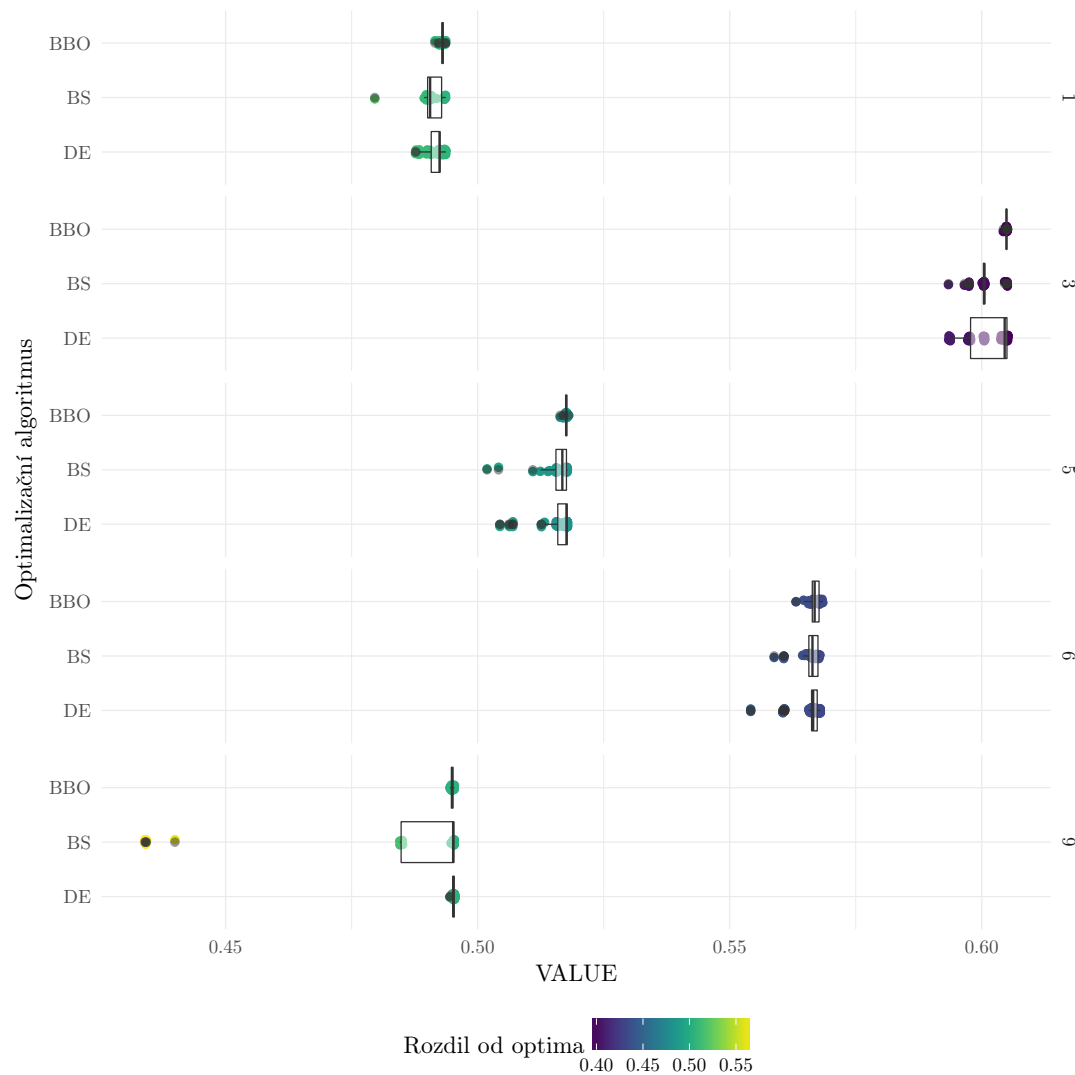
**Obr. 5.8:** Výsledky optimalizace hydrologického indexu MSE na povodích 3, 4, 5, 6, 9.

### 5.2.3 NS

Oproti předchozím dvěma indexům, dosahovaly při kalibraci modelu pomocí Nash-Sutcliffova kritéria všechny tři algoritmy v průměru nejvíce konzistentních výsledků, což je dobře viditelné zejména na obr. 5.10. Tab. C.3 prozrazuje, že u maximálních hodnot bylo dosahováno zanedbatelných rozdílů. Pouze u povodí 4 nebyl schopen algoritmus BBOSCA kalibrovat na stejné úrovni jako druhé dva. Celkem třikrát byl rozdíl mezi jednotlivými průměrnými hodnotami menší než 0,001.



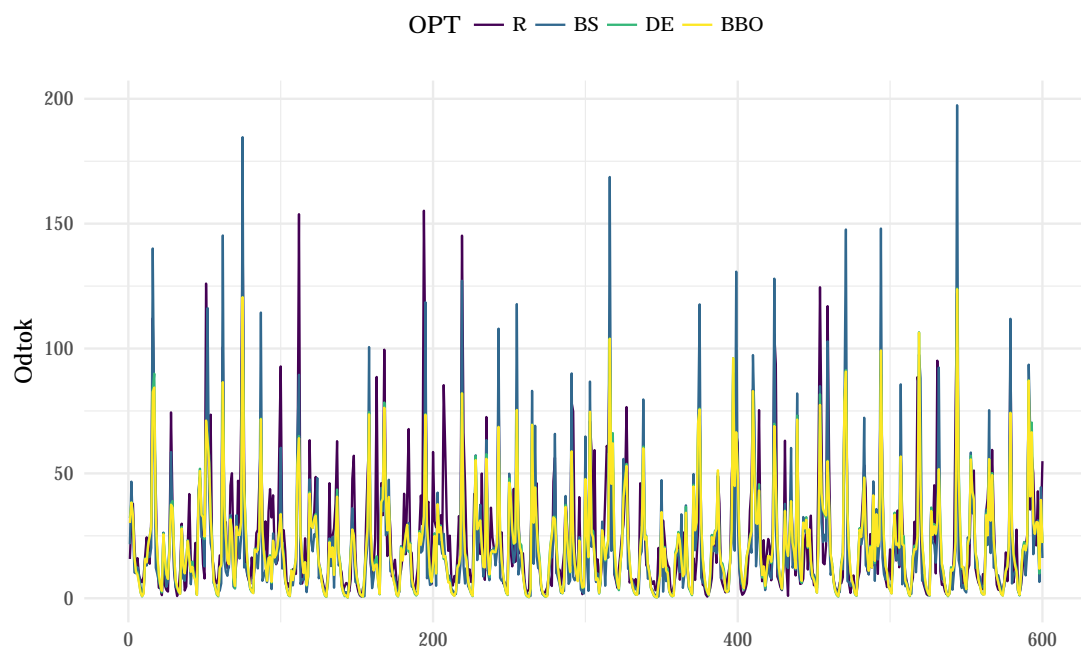
**Obr. 5.9:** Výsledky optimalizace hydrologického indexu NS na povodích 10, 2, 4, 7, 8.



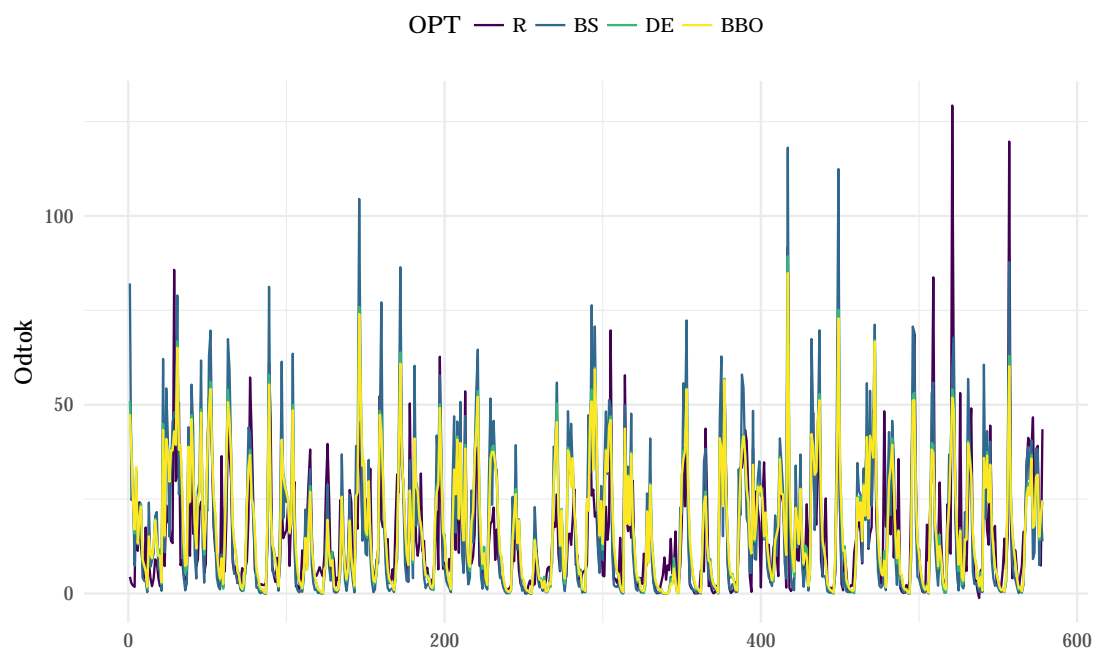
Obr. 5.10: Výsledky optimalizace hydrologického indexu NS na povodích 1, 3, 5, 6, 9.

#### 5.2.4 Hydrogramy vybraných povodí

Pro zdůraznění významu kvalitní kalibrace byla vybrána dvě povodí, u kterých byl tento proces z hlediska aplikovaných metod nejproblematičtější. Jsou to povodí 7 (obr. 5.11), kalibrováno přes index MAE a povodí 5 (obr. 5.12), kalibrováno přes index MSE. U povodí 7 nebylo chování povodí dobře simulováno zejména v první polovině obsažených měření. Odezva povodí 5 byla vystižena poměrně dobře (opticky snad i o něco lépe než předchozí) až na 3 velmi vysoké stavy v závěru měření, které výrazně zvýšily hodnotu sledovaného hydrologického indexu. U obou jmenovaných se zdá, že metoda BS modelovala odezvu často s nadsazenými průtoky.



Obr. 5.11: Kalibrace MAE na povodí 7.



Obr. 5.12: Kalibrace MSE na povodí 5.



# Diskuze

Výsledky potvrzují, že tvar migračních křivek má na kvalitu řešení významný vliv. Stejně jako v případě jiných studií (Feng et al., 2017), i zde dosáhla migrační křivka ve tvaru sinusoidy nejkvalitnějších hodnot. Poněkud překvapivým zjištěním je slabá výkonnost kvadratických křivek, které je v rozporu s výsledky (Ma et al., 2009; Ma, 2010), kde se ukazovalo, že čím bližší migrační model přírodní skutečnosti, tím lepší výsledky.

Výpočty na úlohách CEC 2013 potvrzují zjištění jiných autorů, že originální forma BBO trpí nedostatky v explorativní fázi (Gong et al., 2010; Al-Roomi et El-Hawary, 2016). Pokud je objektivní funkce vysoko-dimenzionální, generovaná řešení bez mutačního operátoru sice zajišťují vyšší diverzitu populace než při použití mutačních operátorů, ale málokterá řešení jsou natolik dobrá, aby prošla sítím elitismu. Stejně jako u GA použití mutačních operátorů je v takových případech u BBO vhodné. Tato zjištění jsou v souladu s již publikovanými výsledky (Al-Roomi, 2016). Zlepšení explorační schopnosti zejména u mutačních operátorů využívajících Gaussova a Cauchyova rozdělení bylo na testovacích úlohách znatelné. Lepších výsledků dosahovalo Cauchyovo rozdělení zřejmě proto, že Gaussovo rozdělení má těžší konce, a je tak více náchylné k uvíznutí v lokálním optimu. Mutační operátor využívající Lévyho rozdělení se zřejmě nepodařilo vhodně nastavit. Bylo by nicméně vhodné, se mu dále věnovat při meta-optimalizaci. Je schopen zároveň generovat kromě většiny řešení z bližšího i některá ze širšího okolí. (Například při parametrizaci  $\gamma = 0$  a  $\alpha = 0,5$  je generováno následujících 10 řešení: 0,329; 0,842; 0,134; 4,5435; 7,420; 0,485; 0,919; 0,894; 0,375; 3,504). Zajímavá by mohla být kombinace obojího, tedy na elitní řešení použít mutaci Gaussovu/Cauchyho a na ostatní Lévyho.

Pro srovnání, ani jedna varianta BBO nedosahovala takových výsledků na funkcích CEC 2013, jako diferenciální evoluce s různými mutačními strategiemi (Zamuda et al., 2013). Při dosud uvedeném a z pohledu dosud implementovaných řešení v modelu BILAN je zajímavá varianta kompenzace nedostatečné schopnosti explorační BBO hybridizací s lokální explorační silou DE, která je diskutována například v (Lohokare et al., 2012). Zde se tedy ukazuje možná cesta efektivního propojení obou v konceptuálním hydrologickém modelování. Mezi dalšími řešeními problému explorační lze uvést vhodnou inicializaci první generace pomocí některého z mechanismů uvedených v kapitole 3.1.6. Dalšího podstatného zlepšení by se pravděpodobně dosáhlo vhodným mechanismem odstraňování duplicitních řešení. Vlivem migračních křivek totiž populace směřuje k poměrně rychlé homogenizaci populace, přičemž udržení populační diverzity je právě z hlediska explorační funkce velmi podstatné. Zde se potvrzuje zmiňovaná paralela v přírodním ekosystému, kde stabilní habitáty jsou ty s největší diverzitou prostředí a druhů. Odstraňování duplicitních řešení ovšem může nežádoucím způsobem zvyšovat komplexitu výpočtu,

protože se v takovém případě musí znovu procházet soubor řešení, generovat nová a posléze opět řadit. Jedno z možných řešení pro implementaci může například být odstraňování duplicitních položek pouze v předem dané iteraci. Na příklad v každé desáté. Časová náročnost tohoto úkolu byla při zpracování této práce obehita použitím větší populace, než v původní publikaci (Simon, 2008) i než doporučují jiní autoři (Feng et al., 2017).

## Závěr

Hlavním cílem této práce bylo zvolit a otestovat několik variant řešení BBO pro jejich možné použití ke kalibraci hydrologického modelu BILAN. Hlavní cíl práce se podařilo naplnit.

V teoretickém úvodu byla tato metaheuristika rozebrána a zasazena do kontextu. Byly popsány základní mechanismy algoritmu a bylo poukázáno na fakt, že díky migračnímu mechanismu dovede tato skupina heuristických globálních optimalizačních algoritmů konvergovat ke globálnímu optimu jak na testovacích úlohách, tak na reálných problémech.

Na úlohách CEC 2013 studie ukázala, že algoritmus BBOSCA je nejvýkonnějším ze šestice kandidátů na implementaci do jádra modelu BILAN. Na případové studii kalibrace hydrologického modelu BILAN bylo dosaženo, za použití třech inverzních úloh, jen o málo horšího výsledku než předvedla SDCE, včetně několika prvenství. Zde dosahovala BBOSCA o něco horších výsledků než SCDE (stále výrazně lepších než BS).

Na základě uvedených výsledků diplomová práce poskytuje následující přínosy:

Za prvé došlo k prvnímu částečnému poměření vlivu různých migračních modelů na dosud netestovaných 10D kontinuálních problémech a bylo prokázáno, že mutační operátory přispívají k rychlejší konvergenci.

A za třetí, jelikož se v době zhotovení tohoto textu v prostředí R nachází pouze varianta BBO bez mutačních operátorů, která dospívala k prokazatelně horším výsledkům, je možné po úpravě pracovní verze kód publikovat v podobě balíčku.

Za druhé, výsledek práce a testovací framework, který její vznik doprovázel je dále možné použít jako znalostní i materiální předlohu k meta-optimalizaci BBO parametrů a hybridizaci s dalšími optimalizačními algoritmy při práci na C++ variantě modelu BILAN.

# Literatura

- Al-Roomi A. R., El-Hawary M. E., 2016:** Metropolis biogeography-based optimization. *Information Sciences* 360 (2016): 73–95.
- Arora P., Kundra H., Panchal V., 2012:** Fusion of biogeography based optimization and artificial bee colony for identification of natural terrain features. *International journal of advanced computer science and applications* 3 (10): 107–111.
- Arsenault R., Poulin A., Cote P., Brissette F., 2014:** A comparison of stochastic optimization algorithms in hydrological model calibration. *Journal of hydrological engineering* 19 (7) 1374-1384.
- Beran A., Horáček S., Hanel M., 2011:** Zjednodušení metody výpočtu potenciální evapotranspirace v nové verzi modelu BILAN. *VTEI* 53 (2011) mimoř. č. III, s. 17–20, příl. Vodního hospodářství č. 11/2011.
- Beven J. K., 1993:** Prophecy reality and uncertainty in distributed hydrological modelling. *Advances in Water Resources* 16 (1993) 41-51.
- Beven J. K., 2001:** Rainfall-runoff modelling – The primer. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 319, 2001.
- Bhattacharya A., 2008:** Reduced computation for evolutionary optimization in noisy environment. Genetic and evolutionary computation conference. Atlanta, Georgia. str. 2117-2122.
- Bhattacharya A., Chattopadhyay P., 2010:** Hybrid differential evolution with biogeography-based optimization for solution of economic load dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*. 25 (4): 1955–1964.
- Boussaïd I., Chatterjee A., Siarry P., Ahmed-Nacer M., 2012:** Biogeography-based optimization for constrained optimization problems. *Computers & Operations Research* (2012) 39: 3293–3304.
- Cohen W. J., Ollington R. B., Ling F. L. N., 2013:** Hydrological model parameter optimization.
- Crawley M., J., 2007:** The R book. 2nd ed., John Wiley & sons. 950 str.
- Czarn A., MacNish C., Vijayan K., Turlach R., Gupta R., 2004:** Statistical exploratory analysis of genetic algorithms. *IEEE Transactions on evolutionary computation* 8 (2004): 405-421.
- Darwin F., ed., 1909:** The foundations of The origin of species. Two essays written in 1842 and 1844. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dawson C. W., Abrahart R. J., See L. M., 2007** HydroTest: A webbased toolbox of evaluation metrics for the standardised assessment of hydrological forecasts.

- Environmental Modelling and Software 22, 7 (2007): 1034–1052.
- De Jong K., 1975:** An analysis of the behaviour of a class of genetic adaptive systems (Ph.D.). University of Michigan.
- Derrac J., García S., Molina D., Herrera F., 2011:** A Practical tutorial on the use of non-parametrical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms. *Swarm evolutionary computation* 10(2011): 3-18.
- Derrac J., García S., Hui S., Suganthan P. N., Herrera F., 2014:** Analyzing performance of evolutionary algorithms: A statistical approach. *Information sciences* 289(2014:) 41-58.
- Dingman S., 2002:** Physical hydrology, 2nd ed. Prentice hall, 2002. ISBN 0-1309-9695-5.
- Dowle M., Srinivasan A., 2017:** data.table: Extension of "data.frame". R package version 1.10.4  
<https://CRAN.R-project.org/package=data.table>.
- Du D., Simon D., Ergezer M., 2009:** Biogeography-based optimization combined with evolutionary strategy and immigration refusal. *IEEE Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. San Antonio, Texas. str. 1023–1028.
- Duan Q. Y., Sorooshian S., Gupta V. K., 1992:** Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall-runoff models. *Water resources research*. 24(7): 1163-1173.
- Duan Q. Y., Gupta V. K., Sorooshian S., 1993:** Shuffled complex evolution approach for effective and efficient global minimization. *Journal of optimization theory and applications*, 76(3): 501–521.
- El-Mihoub T. A., Hopgood A. A., Nolle L., Battersby A., 2006:** Hybrid genetic algorithms: A review. *Engineering Letters*, (13): 2-11.
- Feng Q., Liu S., Zhang J., Yang G., Yong L., 2017:** Improved biogeography-based optimization with random ring topology and Powell’s method. *Applied Mathematical Modelling* 41 (2017): 630–649.
- Fister I., Mernik M., Brest J., 2011:** Hybridization of evolutionary Algorithms, *Evolutionary Algorithms*, Eisuke Kita (Ed.), ISBN: 978-953-307-171-8, InTech.
- García S., Molina D., Lozano M., Herrera F., 2009:** A study of the use of non-parametric tests for analyzing the evolutionary algorithm’s behaviour case: a case study on CEC 2005 special session on real parameter optimization. *Journal of heuristics* 15(2009): 617-644.
- Garnier S., 2016:** viridis: Default Color Maps from 'matplotlib'. R package version 0.3.4.  
<https://CRAN.R-project.org/package=viridis>.
- Gong W., Cai Z., Ling Ch. X., Li H., 2010:** A real-coded biogeography-based optimization with mutation. *Applied Mathematics and Computation* 216 (2010): 2749-2758.
- Hanel M., Vizina A., Máca P., Pavlásek J., 2012:** A multi-model assessment of

- climate change impact on hydrological regime in the Czech republic. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 60 (3): 152-161.
- Hollander M., Wolfe D. A., 1999:** Nonparametric statistical methods, 2nd edition. ISBN-13: 978-0471190455. str 295.
- Kašpárek L., Hanel M., Horáček S., Máca P., Vizina A., 2015:** bilan: Bilan water balance model, 2014. T. G. Masaryk Water Research Institute and p.r.i., R package version 2015.06.18
- Kašpárek L., Hanel M., aj., 2014:** Rebilance zásob podzemních vod – Stanovení velikosti přírodních zdrojů podzemní vody v 53 hydrogeologických rajonech – (Aktivita 6, Hydrologické modely) – Souhrnná zpráva. Praha: VÚV TGM., v.v.i., 27 s.
- Krause P., Boyle D. P., Bäse F., 2005:** Comparison of different efficiency criteria for hydrological model assessment. *Advances in geosciences* 5: 89-97. European geosciences union.
- Kundra H., Sood M., 2010:** Cross-country path finding using hybrid approach of PSO and BBO. *International Journal of Computer Applications*. 7 (6): 15–19.
- Li X., Wang, J., Zhou J., Yin M., 2011:** A perturb biogeography based optimization with mutation for global numerical optimization. *Applied Mathematics and Computation* 218 (2011): 598–609.
- Li X., Engelbrecht A., Epitropakis M. G., 2013:** Benchmark Functions for CEC'2013 *Special Session and Competition on Niching Methods for Multimodal Function Optimization*.
- Liang J. J., Qu B. Y., Suganthan P. N., Hernández-Diaz Alfredo G., 2013:** Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2013 Special Session on Real-Parameter Optimization. Technical Report 201212, Computational Intelligence Laboratory, Zhengzhou University, Zhengzhou China and Technical Report, Nanyang Technological University, Singapore, January 2013.
- Lohokare M. R., Paninghari B. K., Pattnaik S. S., Devi S., Mohapatra A., 2012:** Neighborhood search-driven accelerated Biogeography-based optimization for optimal load dispatch. *Applied soft computing* 13 (5): 2318-2342.
- Luke S., 2014:** *Essentials of Metaheuristics*, Lulu, second edition.  
<http://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/>.
- Ma H., Ni S., Sun M., 2009:** Equilibrium species counts and migration model tradeoffs for biogeography based optimization. *IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, China, str. 3306-3310.
- Ma H., 2010:** An analysis of the equilibrium of migration models for biogeography-based optimization. *Information Sciences* 180 (2010): 3444–3464.
- Ma H., Simon D., 2010:** Biogeography based optimization with blended migration for constrained optimization problems. *Genetic and evolutionary computation conference*. Portland, Oregon. str. 417-418.
- MacArthur R. H., Wilson E. O., 1967:** *The Theory of Island Biogeography*.

- Monographs on Population Biology, Princeton University Press, Princeton, USA.
- Máca P., 2015:** Hydrologické modely a automatická optimalizace parametrů. Habilitační práce, ČZU Praha, 2015, 210 stran.
- McCann K. S., 2000:** The diversity-stability debate. *Nature* 405 (2000): 228-233.
- Nash J. E., Sutcliffe J. V., 1970:** River flow forecasting through conceptual models part I -A discussion of principles, *Journal of Hydrology*, 10 (3): 282-290.
- Nikumbh S., 2014:** bbo: Biogeography-based optimization.  
<https://CRAN.R-project.org/package=bbo>.
- Nocedal J., Wright S. J., 2006:** Numerical optimization, 2nd ed. Springer-Verlag New York. ISBN 978-0-387-40065-5.
- Page E. B., 1963:** Ordered hypotheses for multiple treatments: A significance test for linear ranks. *Journal of the American statistical association*. 58 (301): 216–30.
- R Core Team, 2016:** R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.  
<http://www.R-project.org>.
- Seibert J., 2000:** Multi-criteria calibration of a conceptual runoff model using a genetic algorithm. *Hydrology and earth system science*, 4 (2): 215–224.
- Simon D., 2008:** Biogeography-based optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 12-6:702-703.
- Simon D., 2013:** Evolutionary optimization algorithms. John Wiley & Sons ISBN: 978-0-470-93741-9.
- Simon D., 2016:** Biogeography-based optimization.  
<http://academic.csuohio.edu/simond/bbo/>.
- Tallaksen L. M., van Lanen, H. A. J. (eds.), 2004:** Hydrological drought processes and estimation methods for streamflow and groundwater. *Developments in water science*, 48, Elsevier Science B.V., 579 str.
- Vizna A., Horáček S., Hanel M., 2015:** Recent developments of BILAN model. *VTEI* (2015): 4–5
- Wickham H., 2007:** Reshaping Data with the reshape Package. *Journal of Statistical Software*. 21 (12): 1-20.  
<http://www.jstatsoft.org/v21/i12/>.
- Wickham H., 2009:** ggplot2: Elegant graphics for data analysis. Springer-Verlag New York, 2009.  
<http://ggplot2.org>.
- Wolpert D. H., Macready W. G., 1997:** No Free Lunch Theorems for Optimization *Transactions on Evolutionary Computation*, 1 (1).
- Zambrano-Bigiargini M., 2014:** hydroGOF: Goodness-of-fit functions for comparison of simulated and observed hydrological time series.  
<https://CRAN.R-project.org/package=hydroGOF>.
- Zambrano-Bigiarini M., Gonzalez-Fernandez Y., 2015:** cec2013: Benchmark

functions for the Special session and competition on real-parameter single objective optimization at CEC-2013.

<https://CRAN.R-project.org/package=cec2013>.

**Zamuda A., Brest J., Mezura-Montes E., 2013:** Structured population size reduction differential evolution with multiple mutation strategies on CEC 2013 real parameter optimization. IEEE conference on evolutionary computation 1(20-23): 1925-1931.

**Zelinka I., 2002:** Umělá inteligence v problémech globální optimalizace. BEN-technická literatura, Praha, 1. vyd. ISBN 80-7300-069-5.

**Zelinka I., Oplatková Z., Šeda M., Ošmea P., Včelař F., 2009:** Evoluční výpočetní techniky – principy a aplikace. BEN-technická literatura, 2009. ISBN 978-80-7300-218-3.

**Žvára K., 2008:** Regrese. MATFYZPRESS. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-7378-041-8.



# Appendix A

## A.1 Přehled testovacích funkcí CEC 2013

**Table A.1:** Jmenný soupis testovacích funkcí CEC 2013 včetně hodnoty globálního minima.

	Nm.	Jméno	$(\epsilon = f_i^* - f_i(x^*))$
Unimodální funkce	1	Sphere function	-1400
	2	Rotated High Conditioned Elliptic Function	-1300
	3	Rotated Bent Cigar Function	-1200
	4	Rotated Discus Function	-1100
	5	Different Powers Function	-1000
Základní multimodální funkce	6	Rotated Rosenbrock's Function	-900
	7	Rotated Schaffers Function	-800
	8	Rotated Ackley's Function	-700
	9	Rotated Weierstrass Function	-600
	10	Rotated Griewank's Function	-500
	11	Rastrigin's Function	-400
	12	Rotated Rastrigin's Function	-300
	13	Non-Continuous Rotated Rastrigin's Function	-200
	14	Schwefel's Function	-100
	15	Rotated Schwefel's Function	100
	16	Rotated Katsuura Function	200
	17	Lunacek Bi-Rastrigin Function	300
	18	Rotated Lunacek Bi-Rastrigin Function	400
	19	Expanded Griewank's plus Rosenbrock's Function	500
	20	Expanded Scaffer's F6 Function	600
Složené funkce	21	Composition Function 1 ( $n = 5$ , Rotated)	700
	22	Composition Function 2 ( $n = 3$ , Unrotated)	800
	23	Composition Function 3 ( $n = 3$ , Rotated)	900
	24	Composition Function 4 ( $n = 3$ , Rotated)	1000
	25	Composition Function 5 ( $n = 3$ , Rotated)	1100
	26	Composition Function 6 ( $n = 5$ , Rotated)	1200
	27	Composition Function 7 ( $n = 5$ , Rotated)	1300
	28	Composition Function 8 ( $n = 5$ , Rotated)	1400

Prohledávaný prostor  $[-100, 100]^D$

## A.2 Popis testovacích funkcí CEC 2013

Funkce spadají do různých kategorií a reprezentují tak širokou paletu výpočetních problémů. Například dělitelné ( $x + y$ ) a nedělitelné ( $xy$ ), symetrické ( $\sin x$ ) a asymetrické ( $|x|$ ) a unimodální ( $x^2$ ) vs. multimodální ( $\cos x$ ).

### ***fn 1 - Sphere function***

Unimodální, separabilní problém.

### ***fn 2 - Rotated High conditioned elliptic function***

Unimodální, neseperabilní problém.

### ***fn 3 - Rotated Bent cigar function***

Unimodální, neseperabilní, hladká s úzkým hřebenem.

### ***fn 4 - Rotated Discuss function***

Unimodální, neseperabilní, asymetrická, hladké místní nepravidelnosti, jeden senzitivní směr.

### ***fn 5 - Different Powers function***

Unimodální, separabilní, různá senzitivita proměnných  $z_i$ .

### ***fn 6 - Rotated Rosenbrock's function***

Multimodální, neseperabilní s velmi úzkým údolím od lokálního ke globálnímu optimu.

### ***fn 7 - Rotated Schaffers function***

Multimodální, neseperabilní, asymetrická s velkým množstvím lokálních optim.

### ***fn 8 - Rotated Ackley's function***

Multimodální, neseperabilní, asymetrická.

### ***fn 9 - Rotated Weierstrass function***

Multimodální, neseperabilní, asymetrická. Kontinuální, ale diferencovatelná jen na množině.

### ***fn 10 - Rotated Griewank's function***

Multimodální, rotovaná, neseperabilní.

***fn 11 - Rastrigin's function***

Multimodální, separabilní, asymetrická s velmi velkým množstvím lokálních optim.

***fn 12 - Rotated Rastrigin's function***

Multimodální, separabilní, asymetrická s velmi velkým množstvím lokálních optim.

***fn 13 - Non-continuous rotated Rastrigin's function***

Multimodální, rotovaná, asymetrická, nekontinuální s velmi velkým množstvím lokálních optim.

***fn 14 - Schwefel's function***

Multimodální, rotovaná, neseperabilní, asymetrická, mnoho lokálních optim z nichž druhé nejlepší je velmi vzdálené od globálního.

***fn 15 - Rotated Schwefel's function***

Multimodální, rotovaná, neseperabilní, asymetrická, mnoho lokálních optim z nichž druhé nejlepší je velmi vzdálené od globálního.

***fn 16 - Rotated Katsuura function***

Multimodální, neseperabilní, asymetrická. Kontinuální, ale nikde nediferencovatelná.

***fn 17 - Lunacek Bi-Rastrigin function***

Multimodální, neseperabilní, asymetrická. Kontinuální, ale nikde nediferencovatelná.

***fn 18 - Rotated Lunacek Bi-Rastrigin function***

Multimodální, neseperabilní, asymetrická. Kontinuální, ale nikde nediferencovatelná.

***fn 19 - Rotated expanded Griewank's plus Rosenbrock's function***

Multimodální, neseperabilní.

***fn 20 -Rotated expanded Schaffer's F6 function***

Multimodální, neseperabilní, asymetrická.

***fn 21 - Composition function 1***

Multimodální, separabilní, asymetrická s různými vlastnostmi okolo lokálních optim.

***fn 22 - Composition function 2***

Multimodální, separabilní, asymetrická s různými vlastnostmi okolo lokálních optim.

***fn 23 - Composition function 3***

Multimodální, neseparabilní, asymetrická s různými vlastnostmi okolo lokálních optim.

***fn 24 - Composition function 4***

Multimodální, neseparabilní, asymetrická s různými vlastnostmi okolo lokálních optim.

***fn 25 - Composition function 5***

Multimodální, neseparabilní, asymetrická s různými vlastnostmi okolo lokálních optim.

***fn 26 - Composition function 6***

Multimodální, neseparabilní, asymetrická s různými vlastnostmi okolo lokálních optim.

***fn 27 - Composition function 7***

Multimodální, neseparabilní, asymetrická s různými vlastnostmi okolo lokálních optim.

***fn 28 - Composition function 8***

Multimodální, neseparabilní, asymetrická s různými vlastnostmi okolo lokálních optim.

# Appendix B

## B.1 Tabelované výsledky CEC 2013

**Table B.1:** Výsledky BBO z 51 běhů pro 10D (lineární migrace bez mutačního operátoru)

Funkce	Nejlepší	Nejhorší	Medián	Průměr	$\sigma$
1	16.97	57.57	39.50	38.04	12.21
2	345060.39	3837885.65	1757774.65	1933686.94	997362.51
3	28682005.41	529974740.84	200022347.46	220148342.86	113616371.66
4	3214.11	10442.49	6896.52	6950.39	2026.26
5	5.26	17.98	12.68	13.01	3.20
6	11.61	24.85	14.65	15.13	2.72
7	9.16	36.94	24.09	23.70	6.24
8	20.22	20.52	20.36	20.37	0.07
9	3.60	7.34	5.94	5.80	0.92
10	5.62	31.85	16.58	16.47	6.38
11	4.05	10.72	6.39	6.43	1.49
12	22.72	50.09	37.84	36.70	6.71
13	21.37	47.54	36.43	36.44	6.56
14	9.59	46.55	27.57	27.02	8.38
15	835.88	1592.31	1212.12	1216.20	181.59
16	0.28	1.46	1.00	0.93	0.30
17	10.52	12.31	11.28	11.28	0.43
18	20.50	51.57	38.87	37.67	8.13
19	0.39	1.09	0.67	0.67	0.15
20	2.18	3.71	3.41	3.30	0.37
21	210.75	400.27	400.21	393.90	34.59
22	8.03	212.62	17.88	49.23	51.85
23	318.47	1661.22	1048.52	1049.82	348.68
24	110.61	223.42	213.37	204.07	30.41
25	140.31	221.15	210.13	207.58	16.52
26	110.43	200.35	200.05	163.31	40.96
27	328.54	468.44	367.77	377.93	40.09
28	109.39	329.02	317.66	304.09	52.31

**Table B.2:** Výsledky BBO2 z 51 běhů pro 10D (kvadratická migrace bez mutačního operátoru).

Funkce	Nejlepší	Nejhorší	Medián	Průměr	$\sigma$
1	5.92	55.19	25.96	26.89	8.87
2	331974.76	4321083.41	1724860.50	1785462.44	868284.65
3	55980985.35	734640338.28	178753208.33	214659524.24	127009103.41
4	2974.93	11744.33	5655.94	6281.64	2002.46
5	4.28	18.86	9.89	10.08	3.12
6	8.16	19.38	14.69	14.59	2.19
7	11.96	40.77	23.14	23.21	6.80
8	20.18	20.51	20.34	20.35	0.07
9	4.24	7.50	5.81	5.83	0.79
10	3.96	19.46	13.00	13.19	4.21
11	2.03	8.07	5.60	5.55	1.35
12	26.57	44.92	36.97	35.77	5.10
13	10.50	49.00	34.49	35.62	8.24
14	5.43	43.52	17.90	18.15	6.61
15	736.11	1518.89	1191.91	1177.82	172.05
16	0.64	1.39	1.07	1.09	0.18
17	14.94	24.26	18.76	19.00	2.39
18	42.12	69.48	57.59	56.08	7.66
19	1.43	4.63	3.13	3.29	0.76
20	2.56	3.72	3.33	3.29	0.30
21	276.08	404.40	402.01	399.10	19.97
22	36.23	149.51	62.53	68.20	24.33
23	720.37	1626.48	1376.55	1335.77	206.43
24	138.15	221.89	217.74	208.88	23.33
25	135.67	219.53	214.56	206.45	23.72
26	129.28	200.21	147.31	158.08	25.92
27	400.50	483.47	432.34	432.96	19.52
28	181.81	503.29	426.97	379.00	102.24

**Table B.3:** Výsledky BBO2 z 51 běhů pro 10D (sinusoidální migrace bez mutačního operátoru).

Funkce	Nejlepší	Nejhorší	Medián	Průměr	$\sigma$
1	1.35	9.64	4.34	4.63	2.01
2	371380.14	4642827.48	1969476.75	1972891.83	937354.40
3	17340049.06	196928376.29	67385184.35	71744672.27	37429155.09
4	2110.58	13570.38	6137.00	6402.75	2359.58
5	1.03	6.21	3.16	3.24	1.00
6	10.33	13.46	11.15	11.32	0.68
7	7.57	29.74	17.63	17.82	4.91
8	20.20	20.49	20.35	20.35	0.07
9	2.82	8.03	5.47	5.33	1.16
10	1.67	16.64	5.36	6.25	3.37
11	0.27	2.81	1.34	1.46	0.62
12	13.75	42.98	28.91	28.65	6.61
13	18.74	50.18	30.49	30.98	6.57
14	1.38	12.19	4.77	5.32	2.28
15	264.55	1307.78	820.01	786.19	244.99
16	0.32	1.31	0.76	0.77	0.25
17	10.27	10.98	10.60	10.62	0.18
18	19.51	46.01	29.93	31.05	6.22
19	0.11	0.61	0.44	0.42	0.13
20	2.07	3.68	3.11	3.02	0.45
21	400.19	400.21	400.20	400.20	0.00
22	0.48	202.85	3.21	18.63	42.42
23	306.65	1479.74	854.89	867.18	282.47
24	113.08	219.96	211.36	203.02	25.79
25	110.16	217.97	206.46	196.43	29.88
26	106.67	200.18	200.05	166.41	38.43
27	319.35	429.82	335.18	341.10	23.56
28	301.75	310.11	304.70	304.90	1.73

**Table B.4:** Výsledky BBOSGA z 51 běhů pro 10D (sinusoidální migrace a mutační operátor s Gaussovým rozdělením).

Funkce	Nejlepší	Nejhorší	Medián	Průměr	$\sigma$
1	0.01	0.02	0.01	0.01	0.00
2	71198.60	5491751.80	735412.42	1015013.79	980264.26
3	16301.40	186019602.55	3876563.71	15909607.53	32865622.88
4	537.71	9557.36	3356.67	3836.30	2302.93
5	0.02	0.07	0.04	0.04	0.01
6	0.59	10.03	9.93	9.30	2.23
7	0.38	37.60	8.96	10.69	8.08
8	20.21	20.50	20.36	20.36	0.07
9	1.94	7.26	4.63	4.59	1.47
10	0.44	1.53	0.74	0.80	0.26
11	0.00	1.01	0.01	0.06	0.22
12	2.01	20.94	8.00	8.42	3.88
13	3.35	28.97	15.06	14.48	5.99
14	0.24	0.89	0.65	0.63	0.15
15	224.66	1103.17	714.18	683.26	238.99
16	0.16	0.71	0.42	0.42	0.12
17	10.36	11.56	10.73	10.77	0.25
18	16.19	26.62	22.54	22.24	2.48
19	0.12	0.93	0.56	0.53	0.18
20	1.92	3.64	2.85	2.85	0.46
21	400.19	400.19	400.19	400.19	0.00
22	0.91	104.82	14.17	21.49	28.32
23	439.40	1335.26	917.60	908.67	220.18
24	142.13	217.38	209.67	202.36	19.72
25	126.50	217.51	207.10	201.39	20.05
26	109.02	200.35	155.91	162.66	36.20
27	307.65	343.97	309.56	311.05	6.96
28	101.21	303.66	302.72	292.61	44.34



**Table B.5:** Výsledky BBOSCA z 51 běhů pro 10D (sinusoidální migrace a mutační operátor s Cauchyho rozdělením).

Funkce	Nejlepší	Nejhorší	Medián	Průměr	$\sigma$
1	0.01	0.05	0.03	0.03	0.01
2	25151.07	3233346.02	396061.88	626360.74	622708.61
3	33518.79	69855009.27	397922.30	3891456.96	11454271.68
4	405.02	7773.31	2036.31	2458.81	1828.93
5	0.04	0.12	0.07	0.07	0.02
6	1.09	10.08	9.92	9.31	2.27
7	0.40	18.55	2.39	4.50	4.59
8	20.17	20.50	20.36	20.36	0.08
9	0.63	5.66	3.22	3.35	1.18
10	0.54	1.79	0.80	0.88	0.28
11	0.02	0.07	0.03	0.04	0.01
12	3.10	18.00	8.13	7.91	3.16
13	2.26	49.75	13.37	14.00	7.96
14	0.66	2.03	1.21	1.21	0.32
15	267.11	1042.58	680.91	668.42	194.68
16	0.15	0.82	0.47	0.45	0.13
17	10.38	11.15	10.75	10.76	0.17
18	15.59	30.98	22.36	22.73	3.41
19	0.20	0.92	0.61	0.61	0.16
20	1.73	3.52	2.71	2.71	0.42
21	102.12	400.20	400.19	392.74	47.13
22	2.69	114.21	17.75	27.74	31.80
23	305.30	1088.63	820.95	778.45	214.60
24	105.93	218.04	209.36	197.39	29.16
25	130.41	216.57	205.57	202.79	14.65
26	103.29	200.07	137.76	150.29	37.47
27	309.22	413.62	312.47	318.65	22.77
28	101.57	306.09	304.23	294.16	44.73

**Table B.6:** Výsledky BBOSLE z 51 běhů pro 10D (sinusoidální migrace a mutační operátor s Lévyho rozdělením).

Funkce	Nejlepší	Nejhorší	Medián	Průměr	$\sigma$
1	0.13	0.80	0.30	0.35	0.16
2	82769.76	4459316.76	941588.69	1163645.78	1002132.26
3	13306451.60	694649007.59	235542436.49	271451634.53	174242288.87
4	936.79	8400.12	3538.23	3668.15	1873.59
5	0.18	1.24	0.46	0.53	0.26
6	10.20	24.91	13.84	14.23	2.92
7	7.02	38.85	21.81	20.99	7.13
8	20.18	20.48	20.37	20.37	0.06
9	2.81	7.93	4.87	4.92	1.14
10	1.02	16.36	3.12	4.09	3.01
11	0.13	1.45	0.33	0.39	0.27
12	5.82	23.16	13.75	14.04	4.72
13	13.74	33.14	20.01	21.22	5.07
14	2.03	12.23	7.62	7.25	2.20
15	244.36	1375.92	942.55	914.54	274.07
16	0.39	1.13	0.75	0.76	0.19
17	11.02	13.86	12.04	12.05	0.56
18	22.61	40.09	29.92	30.63	4.25
19	0.16	1.25	0.60	0.59	0.25
20	2.41	3.70	3.30	3.25	0.28
21	316.37	400.24	400.21	398.12	13.26
22	16.53	187.25	108.22	89.26	53.97
23	405.19	1391.01	1000.12	1006.59	220.50
24	128.28	220.35	213.74	201.98	27.40
25	115.48	219.09	210.92	199.55	28.07
26	107.99	200.10	122.40	136.53	31.26
27	315.97	375.15	322.87	325.31	9.92
28	119.24	444.05	321.39	326.05	48.15

## B.2 Konvergenční grafy CEC 2013

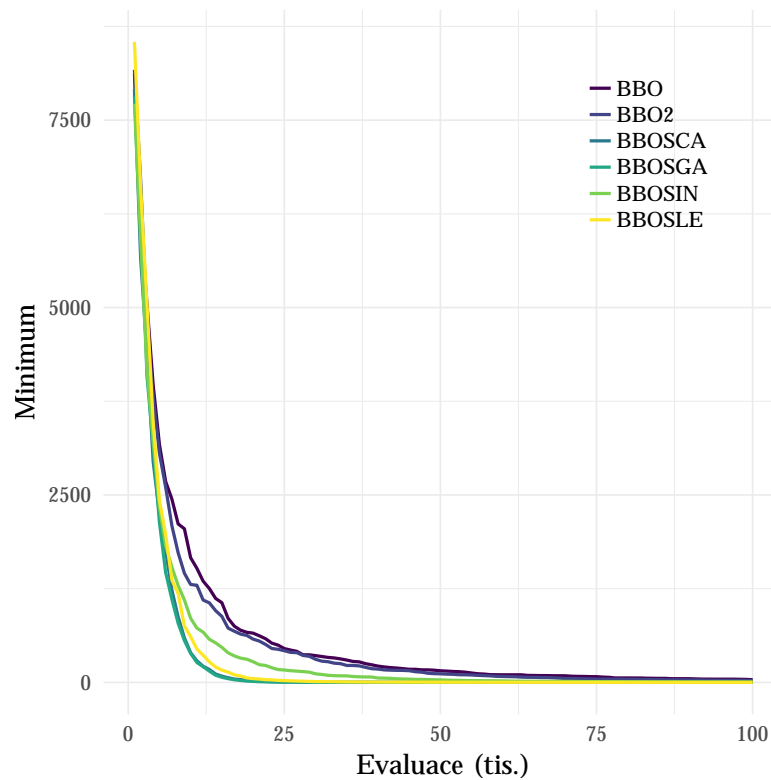


Figure B.1: Konvergenční plot pro 1. funkci.

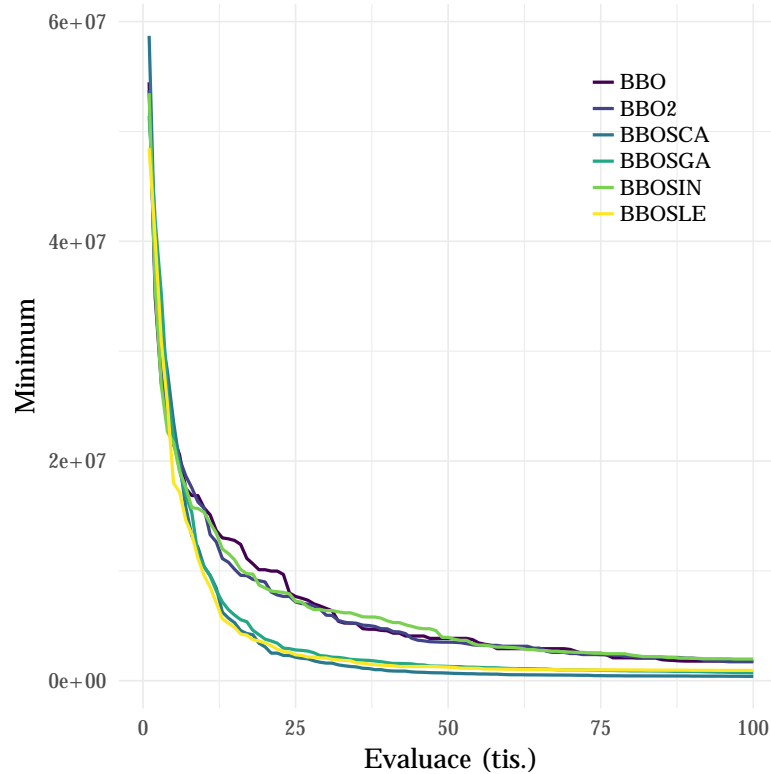


Figure B.2: Konvergenční plot pro 2. funkci.

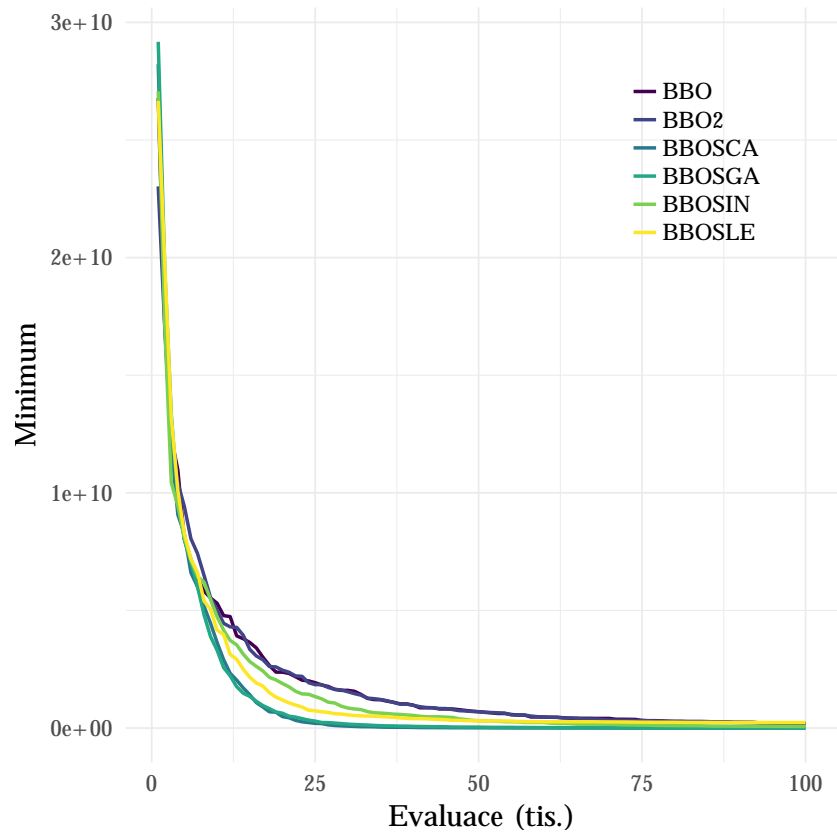


Figure B.3: Konvergenční plot pro 3. funkci.

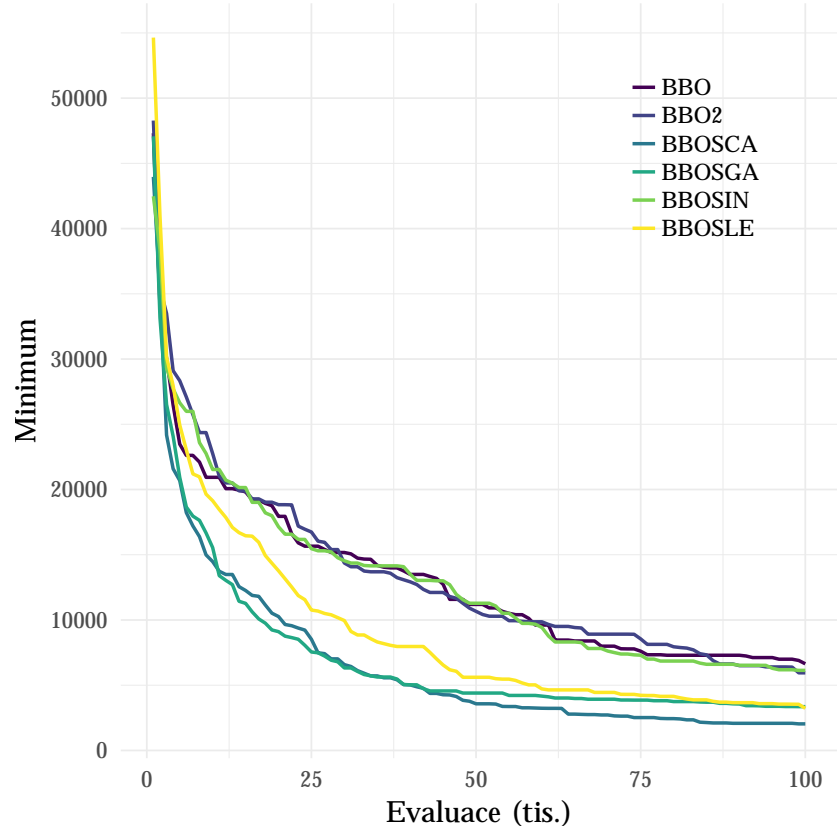


Figure B.4: Konvergenční plot pro 4. funkci.

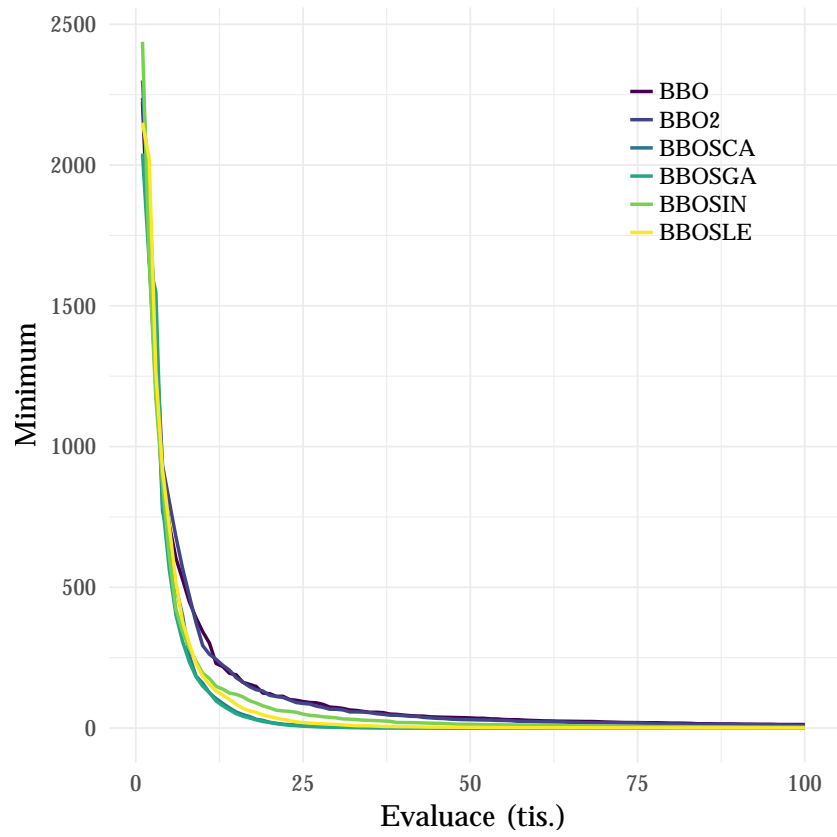


Figure B.5: Konvergenční plot pro 5. funkci.

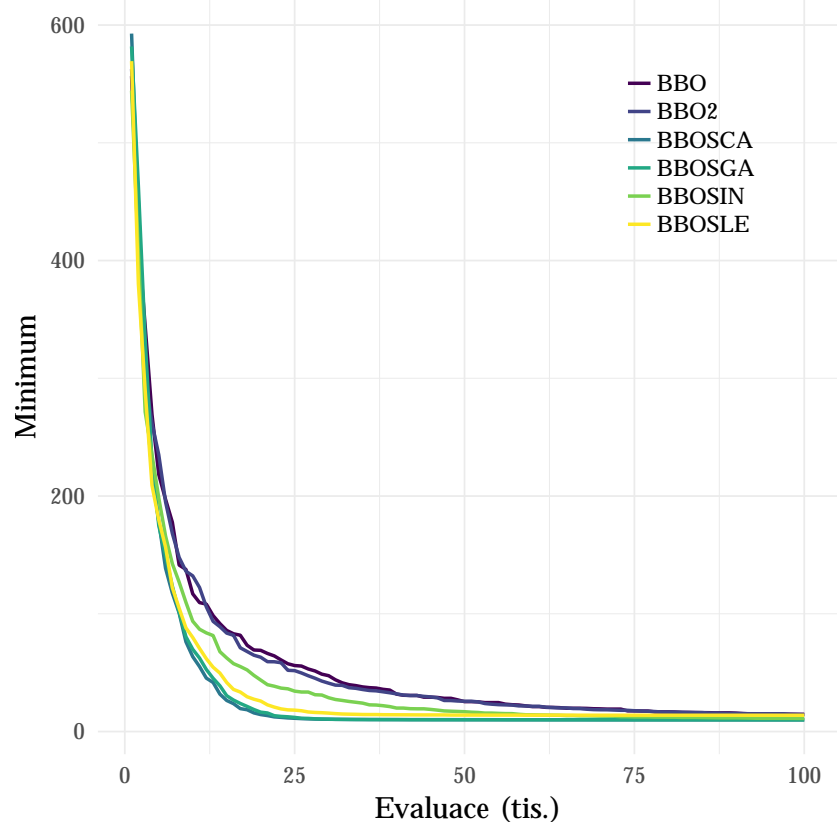


Figure B.6: Konvergenční plot pro 6. funkci.

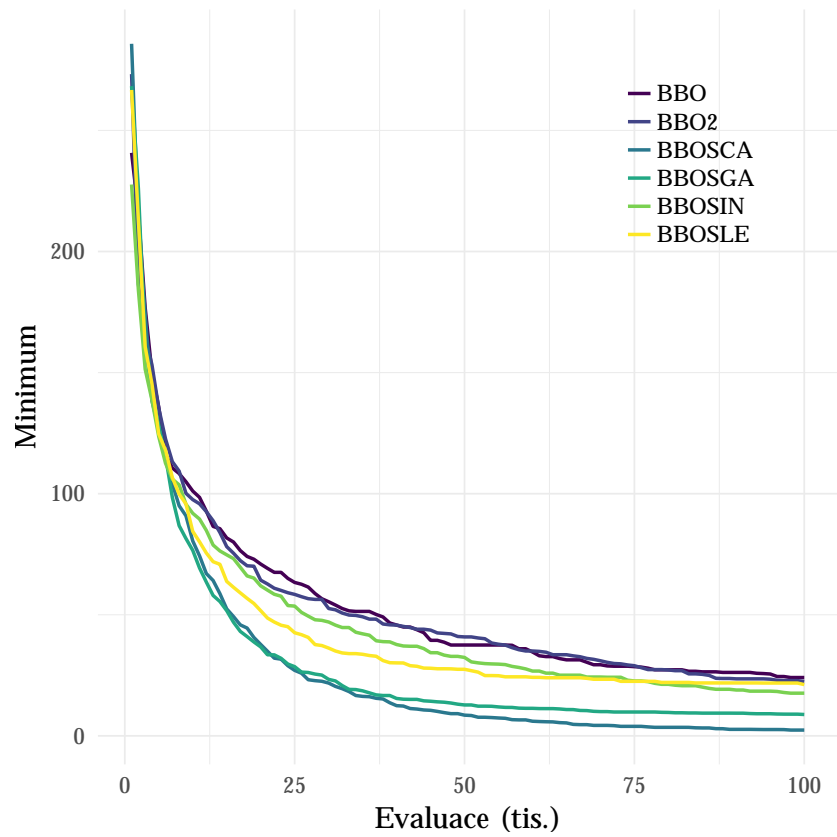


Figure B.7: Konvergenční plot pro 7. funkci.

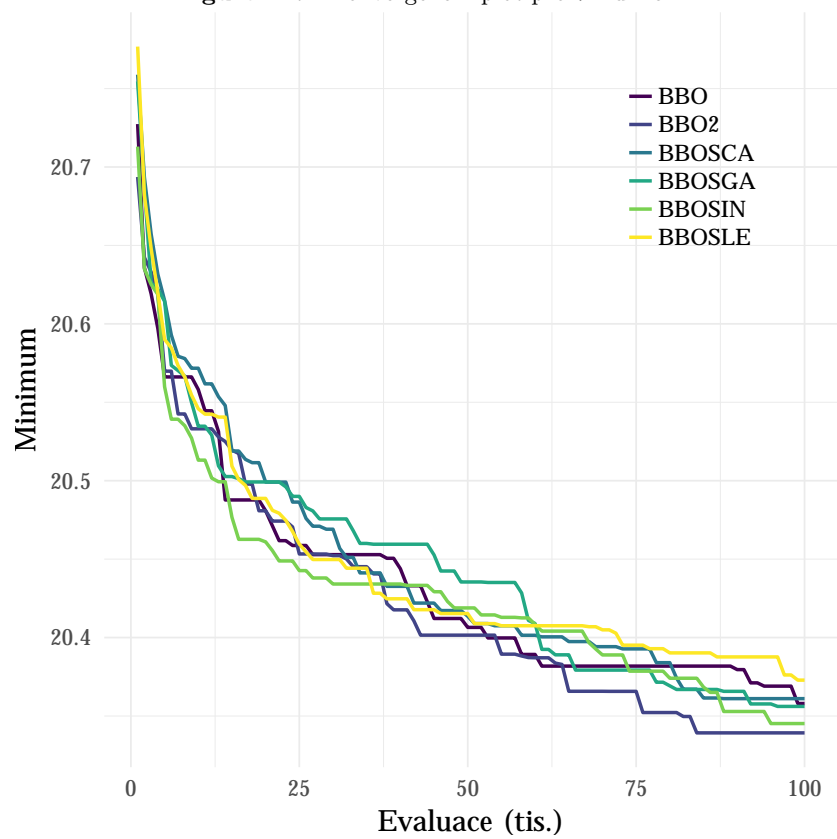


Figure B.8: Konvergenční plot pro 8. funkci.

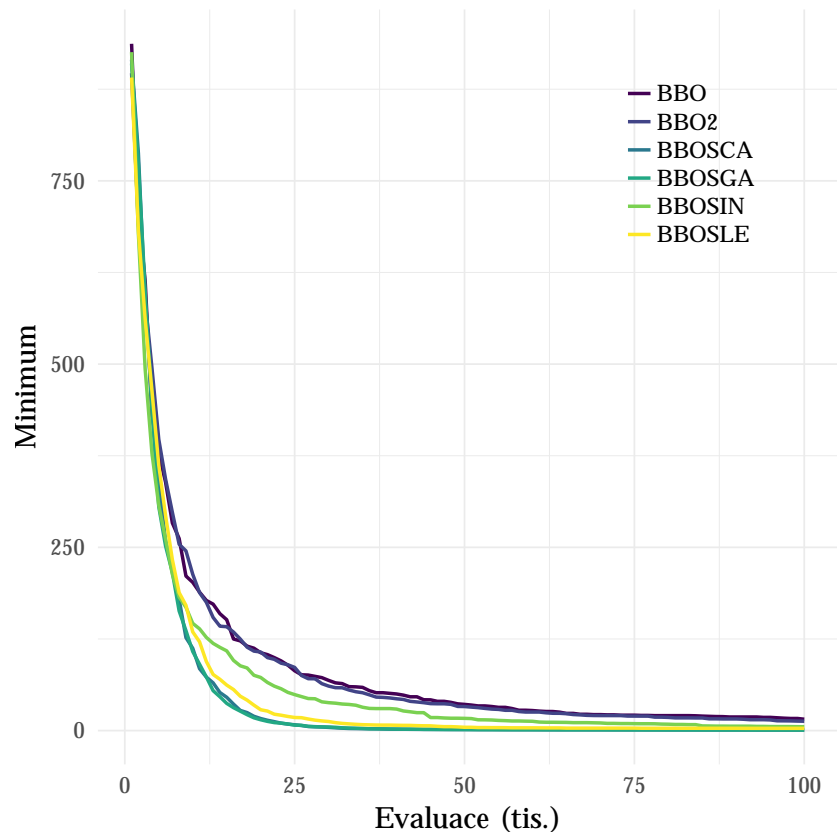


Figure B.9: Konvergenční plot pro 10. funkci.

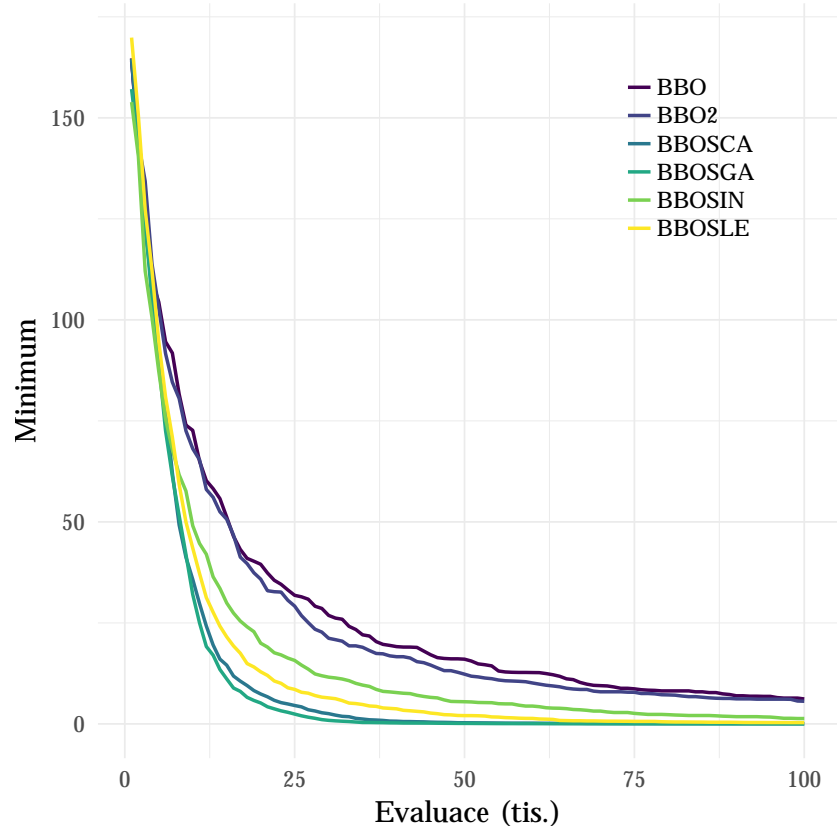


Figure B.10: Konvergenční plot pro 11. funkci.

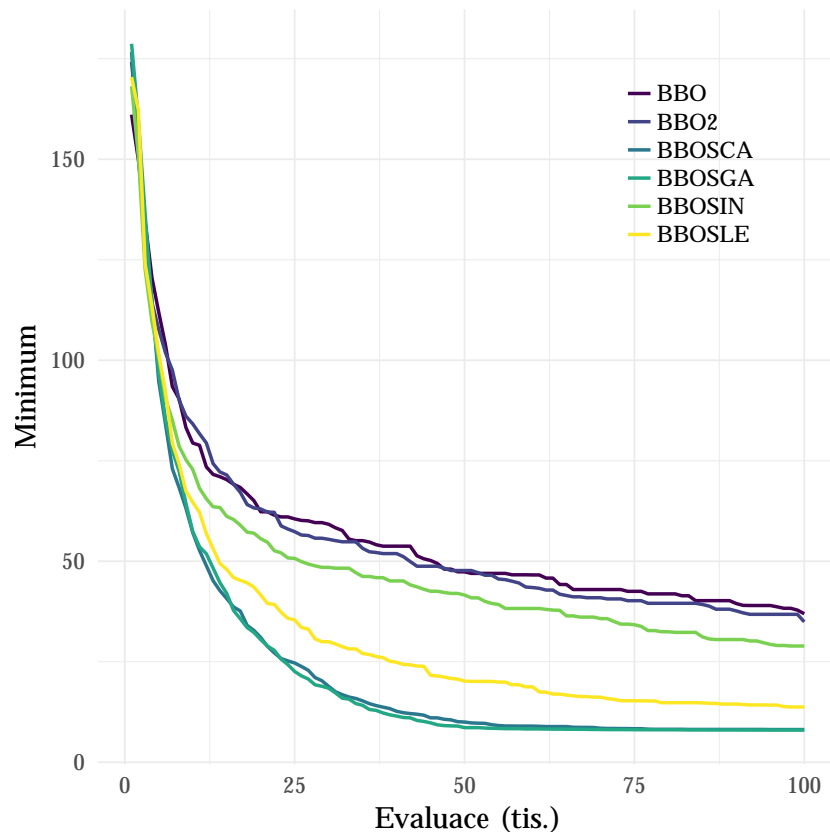


Figure B.11: Konvergenční plot pro 12. funkci.

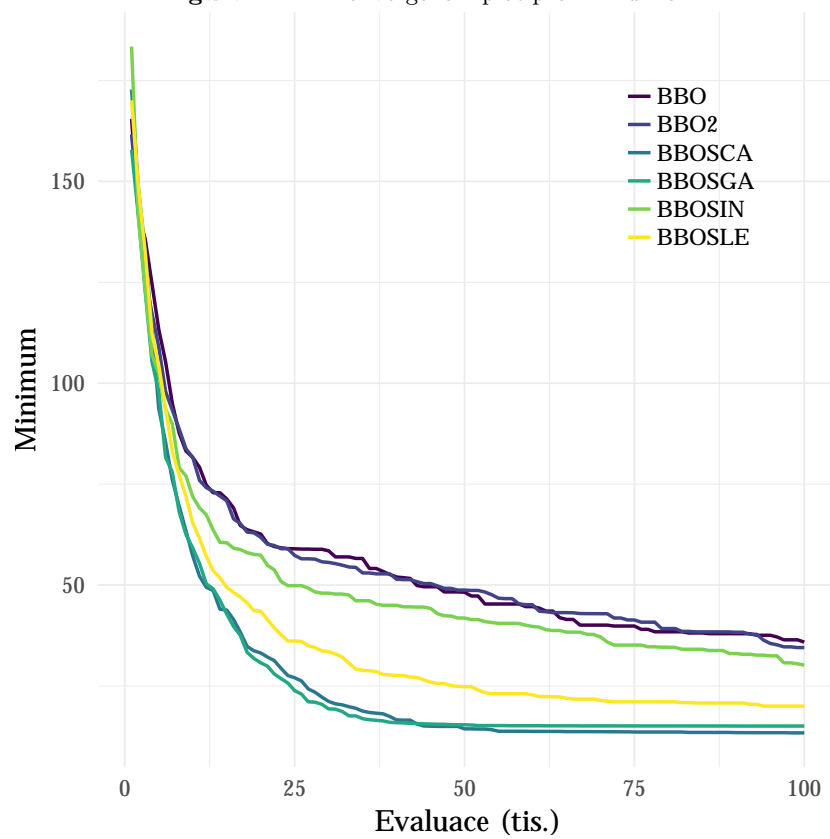


Figure B.12: Konvergenční plot pro 13. funkci.



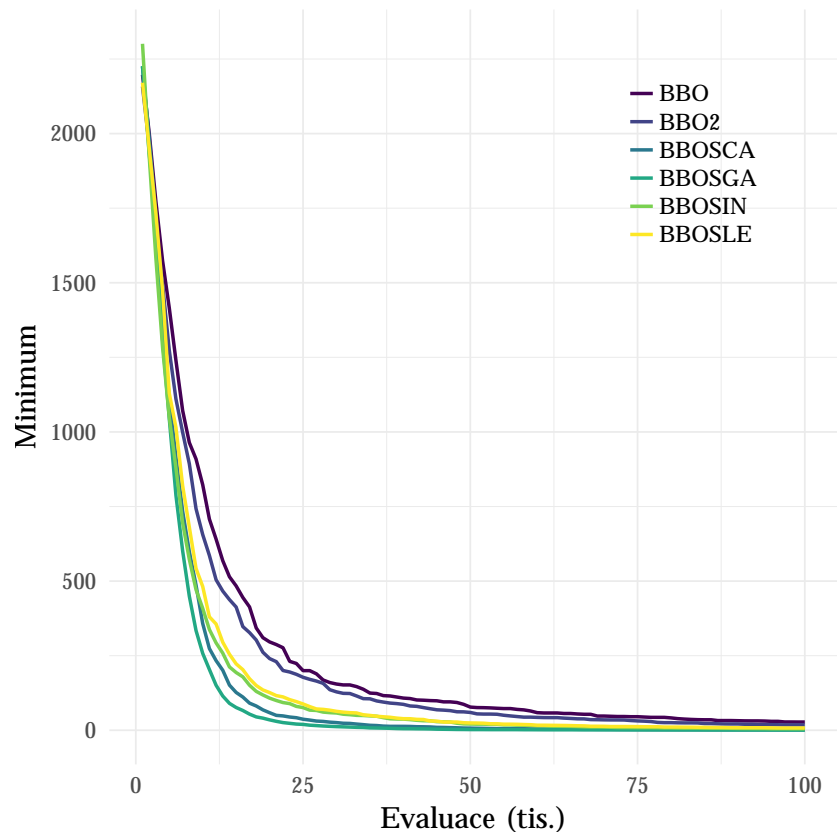


Figure B.13: Konvergenční plot pro 14. funkci.

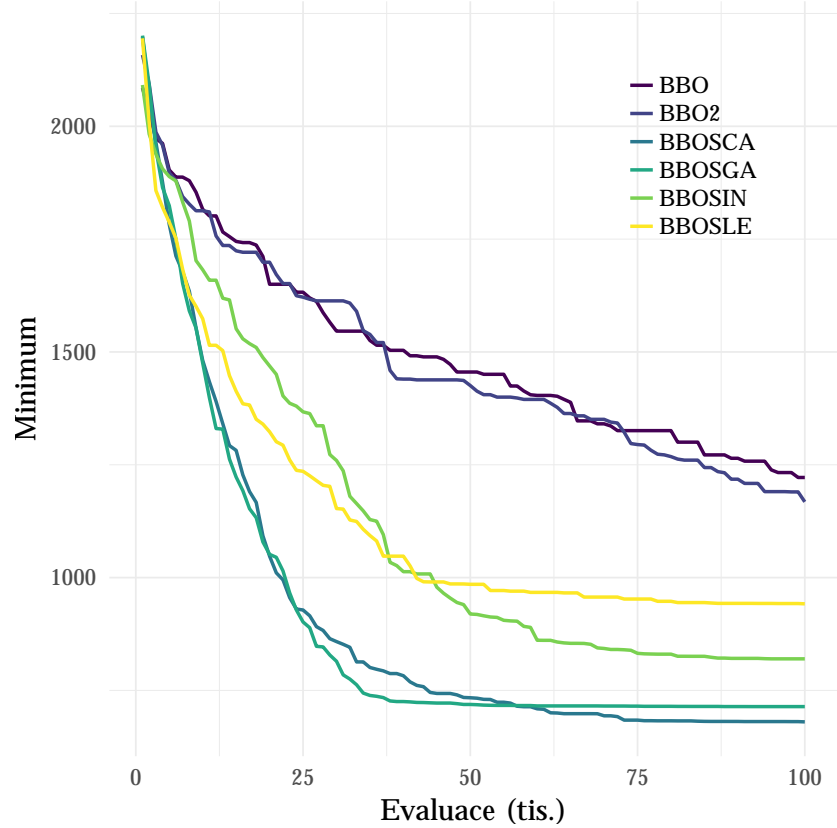


Figure B.14: Konvergenční plot pro 15. funkci.

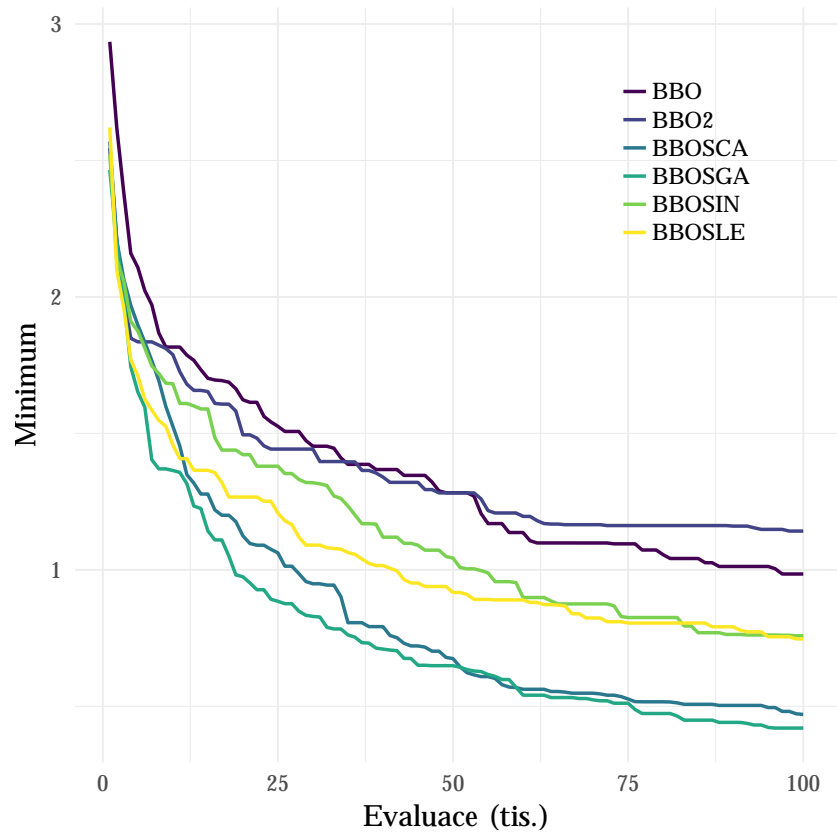


Figure B.15: Konvergenční plot pro 16. funkci.

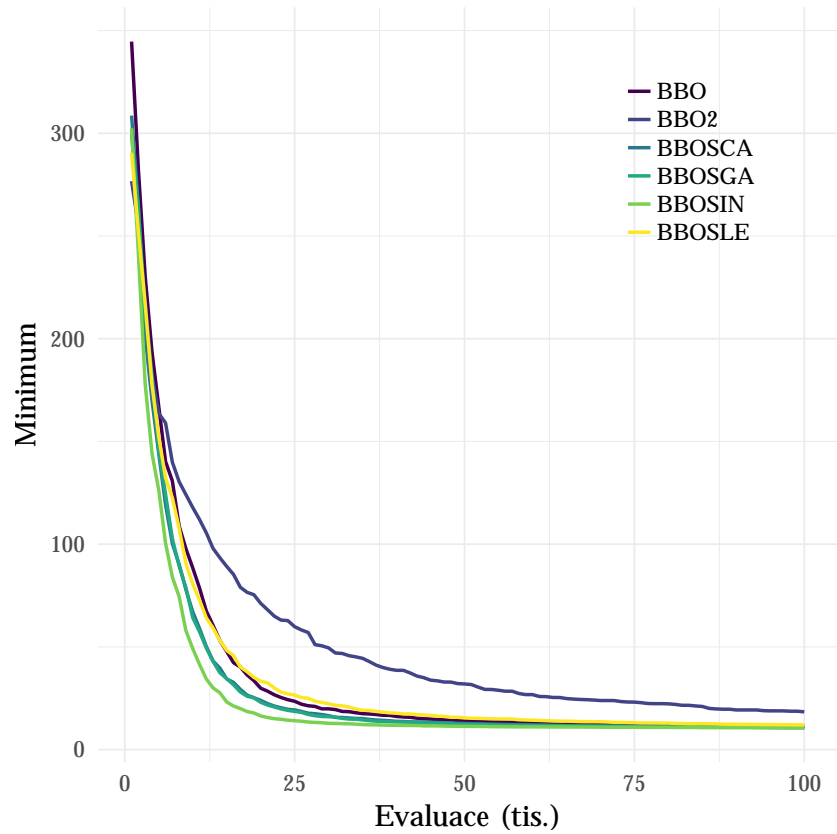


Figure B.16: Konvergenční plot pro 17. funkci.

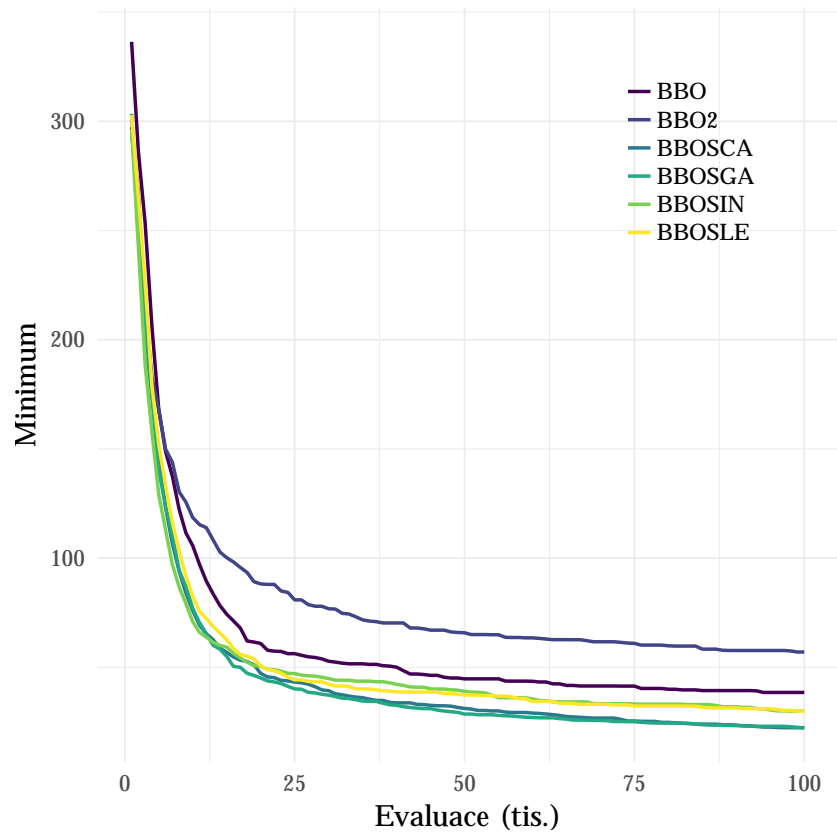


Figure B.17: Konvergenční plot pro 18. funkci.

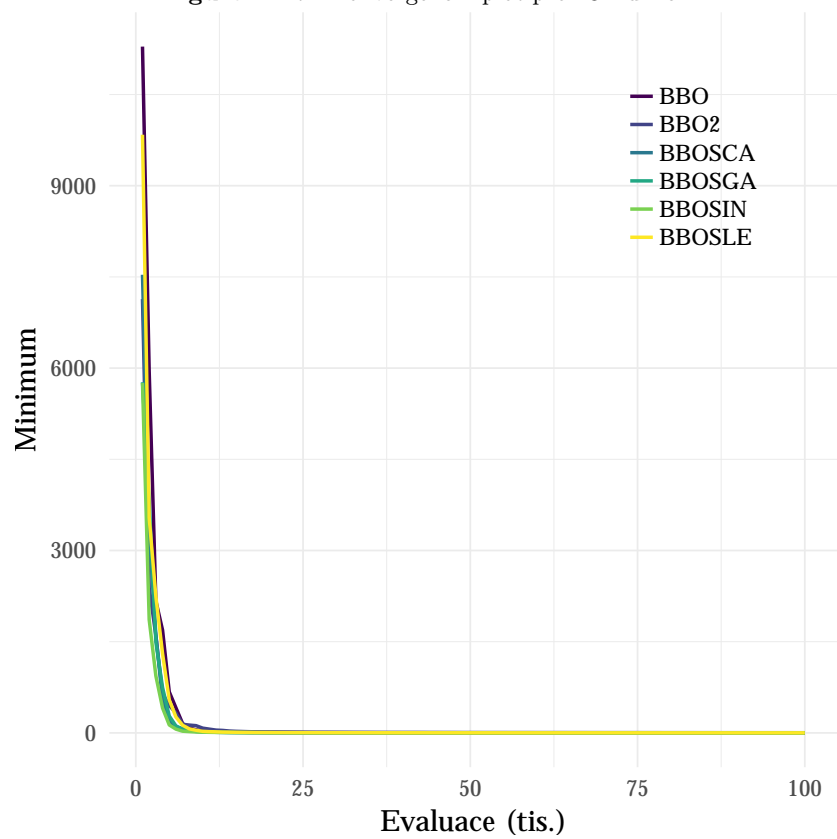


Figure B.18: Konvergenční plot pro 19. funkci.

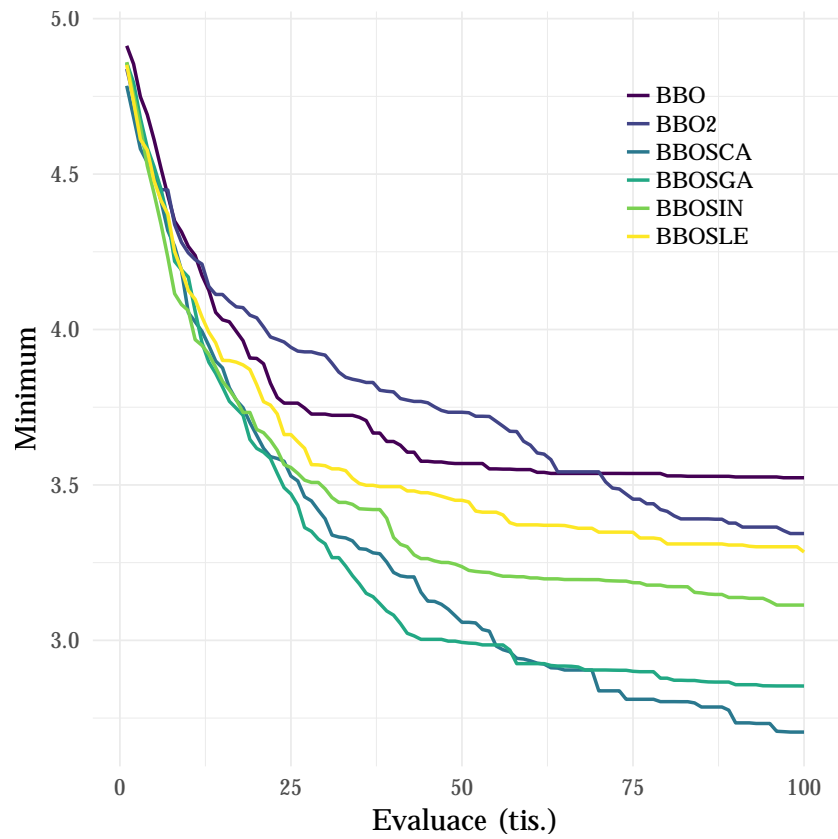


Figure B.19: Konvergenční plot pro 20. funkci.

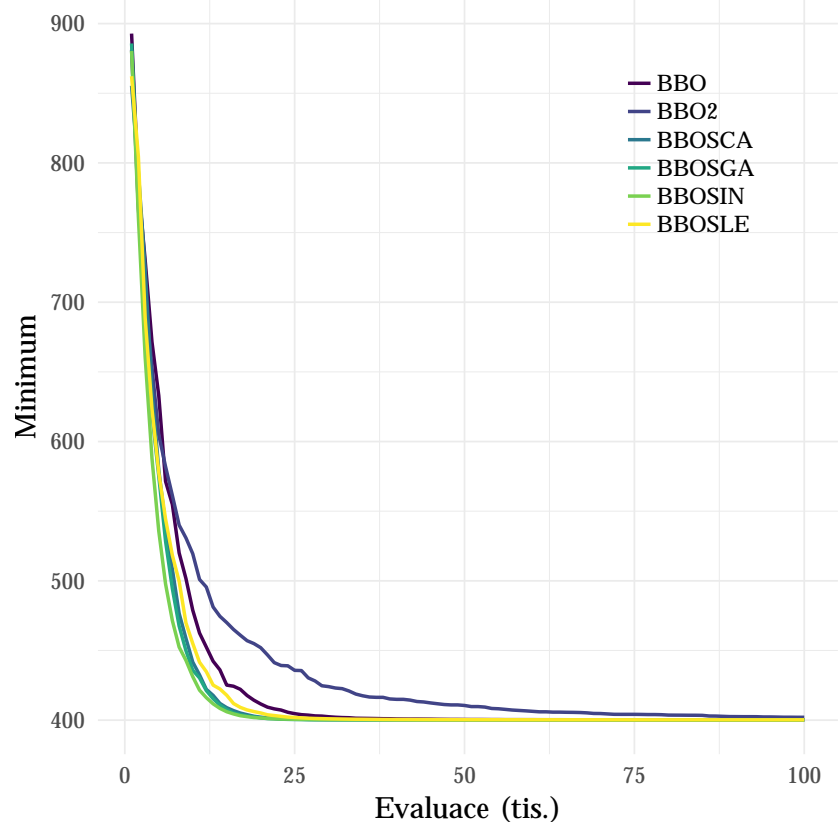


Figure B.20: Konvergenční plot pro 21. funkci.

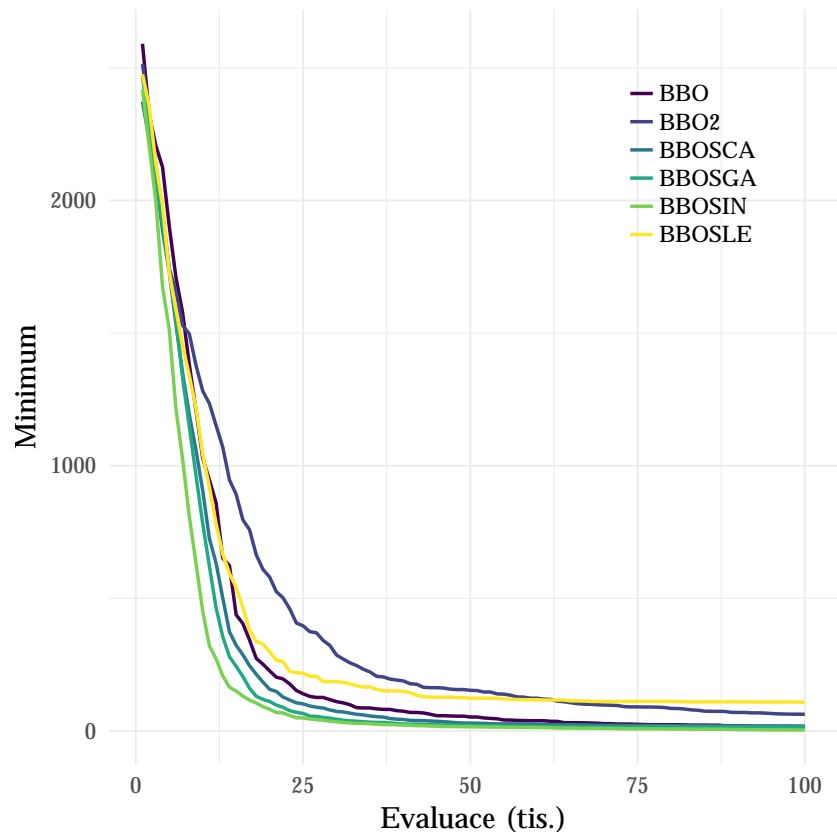


Figure B.21: Konvergenční plot pro 22. funkci.

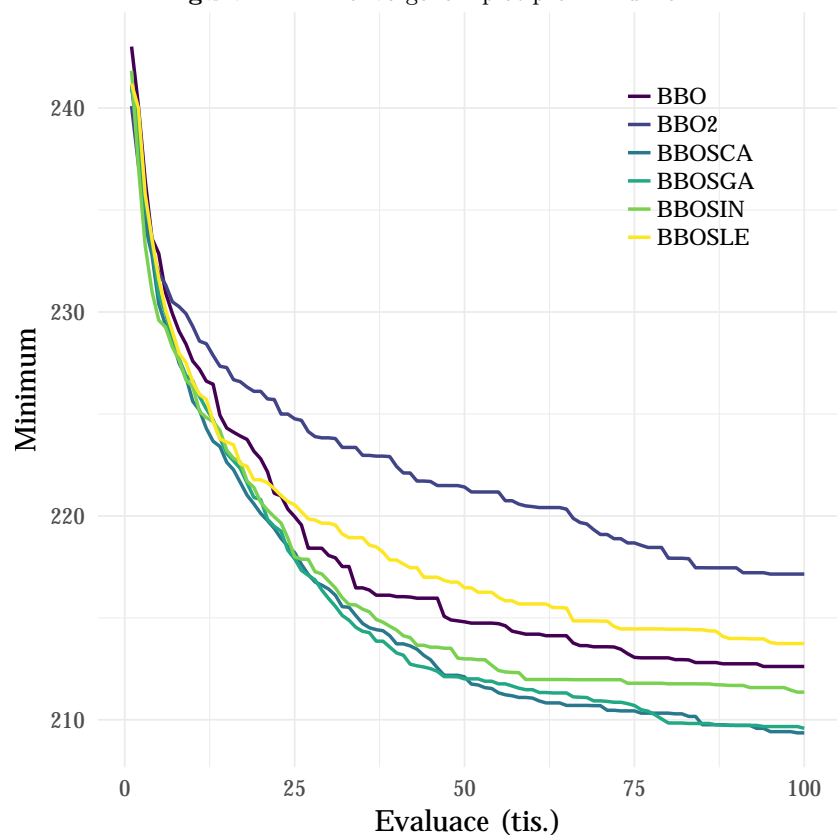


Figure B.22: Konvergenční plot pro 24. funkci.

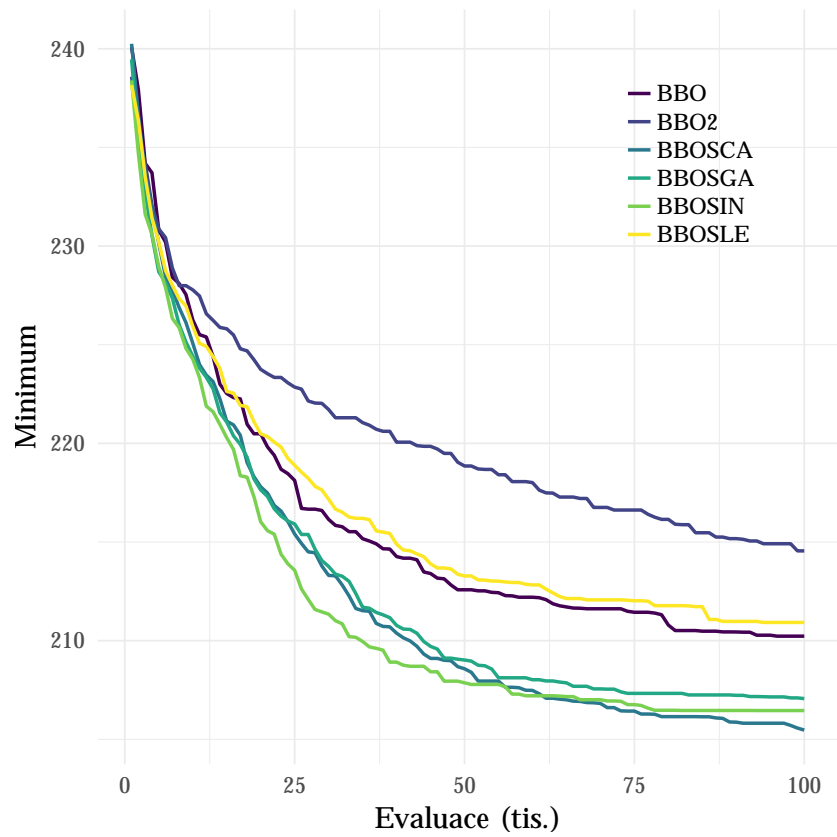


Figure B.23: Konvergenční plot pro 25. funkci.

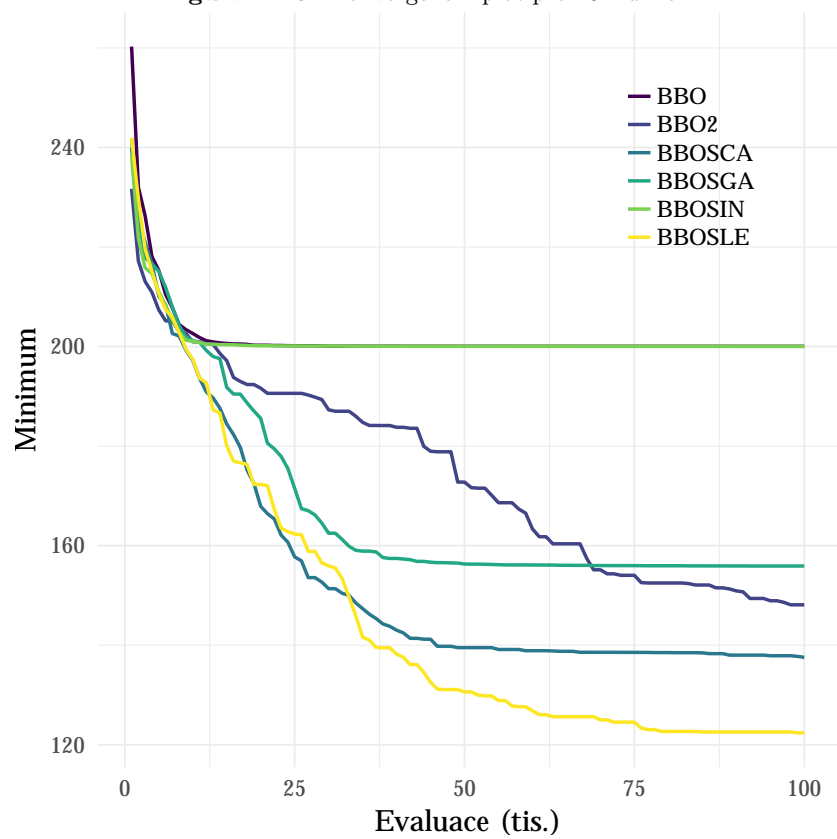


Figure B.24: Konvergenční plot pro 26. funkci.

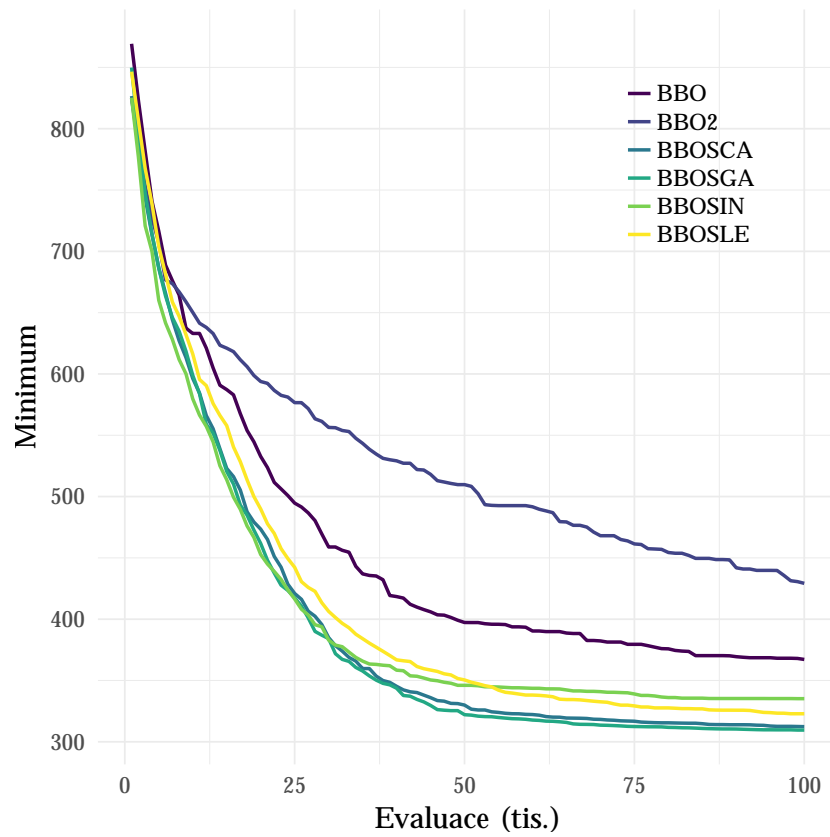


Figure B.25: Konvergenční plot pro 27. funkci.

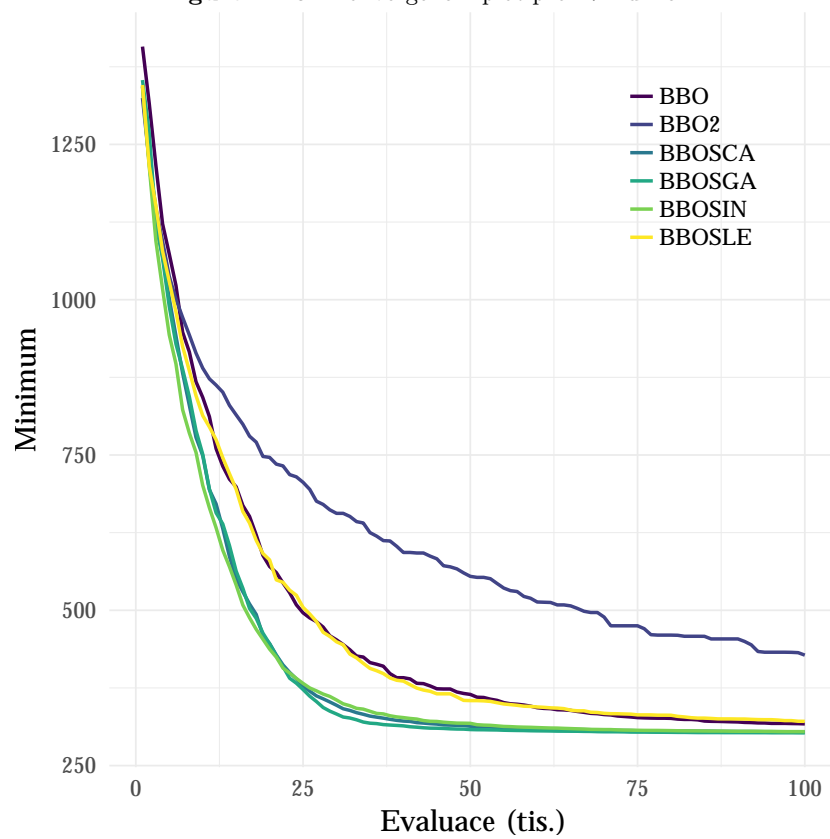


Figure B.26: Konvergenční plot pro 28. funkci.

# Appendix C

## C.1 Výsledky kalibrace modelu BILAN

**Table C.1:** Kalibrace MAE kritéria. Minimum a maximum jsou vztaženy k hodnotě optimální dosažitelné hodnotě – 0.

Povodí	Algoritmus	Minimum	Maximum	Medián	Průměr
<b>1</b>	BS	7.803	9.059	8.591	8.403
	DE	7.410	7.484	7.412	7.414
	BBO	7.413	7.514	7.465	7.471
<b>2</b>	BS	9.692	10.519	9.879	9.888
	DE	9.569	9.667	9.638	9.623
	BBO	9.551	10.192	9.750	9.771
<b>3</b>	BS	8.541	10.561	8.599	8.783
	DE	8.444	8.584	8.473	8.484
	BBO	8.464	8.731	8.573	8.587
<b>4</b>	BS	4.730	5.572	5.174	5.164
	DE	4.640	4.741	4.656	4.657
	BBO	4.676	4.928	4.739	4.742
<b>5</b>	BS	8.944	9.798	9.223	9.210
	DE	7.370	7.872	7.834	7.785
	BBO	7.741	8.064	7.917	7.912
<b>6</b>	BS	6.516	6.888	6.674	6.687
	DE	6.328	6.382	6.333	6.339
	BBO	6.352	6.498	6.412	6.414
<b>7</b>	BS	10.37	10.99	10.52	10.54
	DE	9.589	9.670	9.594	9.597
	BBO	9.604	9.700	9.647	9.647
<b>8</b>	BS	8.790	9.508	8.824	8.852
	DE	8.667	8.707	8.684	8.683
	BBO	8.687	8.774	8.723	8.725
<b>9</b>	BS	5.827	6.049	5.943	5.942
	DE	5.194	5.288	5.214	5.223
	BBO	5.248	5.453	5.300	5.298
<b>10</b>	BS	9.051	9.344	9.182	9.166
	DE	8.632	8.678	8.636	8.643
	BBO	8.646	8.723	8.676	8.675



**Table C.2:** Kalibrace MSE kritéria. Minimum a maximum jsou vztaženy k hodnotě optimální dosažitelné hodnotě – 0.

Povodí	Algoritmus	Minimum	Maximum	Medián	Průměr
<b>1</b>	BS	128.8	278.6	188.0	174.5
	DE	121.5	123.	121.8	122.0
	BBO	121.4	121.9	121.7	121.7
<b>2</b>	BS	208.6	244.8	212.8	214.5
	DE	203.6	205.8	204.7	204.7
	BBO	203.8	206.6	205.5	205.4
<b>3</b>	BS	146.2	149.4	147.3	147.5
	DE	142.1	146.2	142.2	143.0
	BBO	141.9	142.5	142.2	142.2
<b>4</b>	BS	44.91	84.51	67.43	64.93
	DE	40.48	43.81	43.20	43.03
	BBO	39.82	44.62	42.81	42.69
<b>5</b>	BS	192.7	212.0	197.4	198.3
	DE	125.7	128.0	125.7	126.0
	BBO	141.9	142.5	142.2	142.5
<b>6</b>	BS	92.23	114.36	95.46	98.38
	DE	84.12	85.57	84.36	84.46
	BBO	84.12	84.38	84.23	84.23
<b>7</b>	BS	336.2	390.8	345.8	348.0
	DE	240.7	241.5	240.7	240.8
	BBO	240.6	241.1	240.8	240.8
<b>8</b>	BS	185.4	189.3	186.2	186.5
	DE	173.7	173.8	173.7	173.7
	BBO	173.5	174.4	173.8	173.8
<b>9</b>	BS	83.45	124.51	85.21	91.02
	DE	70.92	71.06	70.96	70.96
	BBO	70.93	71.03	70.98	70.98
<b>10</b>	BS	171.4	204.	175.1	176.1
	DE	157.8	157.9	157.8	157.8
	BBO	157.7	158.1	157.9	157.9

**Table C.3:** Kalibrace pomocí NS kritéria. Minimum a maximum jsou vztaženy k hodnotě optimální dosažitelné hodnotě – 1.

Povodí	Algoritmus	Minimum	Maximum	Medián	Průměr
<b>1</b>	BS	0.4796	0.4937	0.4906	0.4908
	DE	0.4877	0.4937	0.4924	0.4919
	BBO	0.4915	0.4937	0.4930	0.4930
<b>2</b>	BS	0.6149	0.6489	0.6473	0.6438
	DE	0.6451	0.6489	0.6489	0.6469
	BBO	0.6450	0.6487	0.6464	0.6465
<b>3</b>	BS	0.5934	0.6051	0.6005	0.6006
	DE	0.5934	0.6052	0.6045	0.6022
	BBO	0.6043	0.6051	0.6049	0.6049
<b>4</b>	BS	0.6549	0.7177	0.7008	0.6994
	DE	0.6953	0.7178	0.6956	0.7022
	BBO	0.6953	0.6953	0.6972	0.6976
<b>5</b>	BS	0.5019	0.5178	0.5168	0.5154
	DE	0.5044	0.5178	0.5176	0.5163
	BBO	0.5164	0.5181	0.5176	0.5175
<b>6</b>	BS	0.5588	0.5679	0.5664	0.5658
	DE	0.5542	0.5680	0.5666	0.5661
	BBO	0.5631	0.5685	0.5669	0.5668
<b>7</b>	BS	0.6288	0.6304	0.6303	0.6302
	DE	0.6292	0.6305	0.6304	0.6303
	BBO	0.6301	0.6305	0.6304	0.6303
<b>8</b>	BS	0.7066	0.7091	0.7088	0.7087
	DE	0.7086	0.7092	0.7090	0.7090
	BBO	0.7089	0.7091	0.7090	0.7090
<b>9</b>	BS	0.4340	0.4954	0.4951	0.4825
	DE	0.4945	0.4955	0.4952	0.4952
	BBO	0.4945	0.4954	0.4949	0.4950
<b>10</b>	BS	0.7202	0.7220	0.7216	0.7214
	DE	0.7212	0.7220	0.7220	0.7219
	BBO	0.7216	0.7221	0.7219	0.7219

# Seznam tabulek

<b>Tab. 1.1:</b> Srovnání BBO s dalšími metaheuristikami. . . . .	14
<b>Tab. 3.1:</b> Běžné objektivní funkce v hydrologické modelování. . . . .	31
<b>Tab. 3.2:</b> Parametry modelu BILAN pro měsíční krok. . . . .	32
<b>Tab. 5.1:</b> Matice výsledků <i>Post-hoc</i> analýzy. . . . .	39
<b>Tab. 5.2:</b> Pořadí úspěšnosti optimalizačních algoritmů na CEC 2013 dle mediánů. . . . .	41
<b>Tab. 5.3:</b> Pořadí úspěšnosti algoritmů na CEC 2013 dle nejlepších hodnot. . . . .	41
<b>Tab. A.1:</b> Jmenný soupis testovacích funkcí CEC 2013. . . . .	57
<b>Tab. B.1:</b> Výsledky BBO z 51 běhů pro 10D. . . . .	61
<b>Tab. B.2:</b> Výsledky BBO2 z 51 běhů pro 10D. . . . .	62
<b>Tab. B.3:</b> Výsledky BBOSIN z 51 běhů pro 10D. . . . .	63
<b>Tab. B.4:</b> Výsledky BBSGA z 51 běhů pro 10D. . . . .	64
<b>Tab. B.5:</b> Výsledky BBOSCA z 51 běhů pro 10D. . . . .	65
<b>Tab. B.6:</b> Výsledky BBOSLE z 51 běhů pro 10D. . . . .	66
<b>Tab. C.1:</b> Kalibrace MAE. . . . .	80
<b>Tab. C.2:</b> Kalibrace MAE. . . . .	81
<b>Tab. C.3:</b> Kalibrace MAE. . . . .	82

# Seznam obrázků

Obr. 1.1: Grafy povrchů funkčních vztahů. . . . .	13
Obr. 3.1: Neomezená a omezená optimalizace. . . . .	17
Obr. 3.2: Náhodná inicializace v prostoru. . . . .	19
Obr. 3.3: Cílená inicializace v prostoru. . . . .	19
Obr. 3.4: Schéma ekosystémové výměny vlastností mezi habitaty . . . . .	21
Obr. 3.5: Vztah imigrace a emigrace. . . . .	22
Obr. 3.6: Algoritmus mutace bez použití operátoru. . . . .	25
Obr. 3.7: Algoritmus mutace při použití mutačního operátoru. . . . .	25
Obr. 3.8: Selektce ruletou. . . . .	26
Obr. 3.9: Příklady 2D testovacích funkcí. . . . .	28
Obr. 3.10: Schématické znázornění hydrologické bilance. . . . .	30
Obr. 3.11: Schéma modelu BILAN v měsíčním kroku. . . . .	32
Obr. 5.1: Popisné statistiky dle nejlepších hodnot. . . . .	38
Obr. 5.2: Popisné statistiky dle mediánů. . . . .	38
Obr. 5.5: Výsledky optimalizace hydrologického indexu MAE. . . . .	42
Obr. 5.6: Výsledky optimalizace hydrologického indexu MAE. . . . .	43
Obr. 5.7: Výsledky optimalizace hydrologického indexu MSE. . . . .	44
Obr. 5.8: Výsledky optimalizace hydrologického indexu MSE. . . . .	45
Obr. 5.9: Výsledky optimalizace hydrologického indexu NS. . . . .	46
Obr. 5.10: Výsledky optimalizace hydrologického indexu NS. . . . .	47
Obr. 5.3: Konvergenční graf pro 9. funkci. . . . .	40
Obr. 5.4: Konvergenční graf pro 23. funkci. . . . .	40
Obr. ??: 2D povrchy derivací funkčních vztahů modelu SIXPAR. . . . .	??
Obr. B.1: Konvergenční graf pro 1. funkci. . . . .	67
Obr. B.2: Konvergenční graf pro 2. funkci. . . . .	67
Obr. B.3: Konvergenční graf pro 3. funkci. . . . .	68
Obr. B.4: Konvergenční graf pro 4. funkci. . . . .	68
Obr. B.5: Konvergenční graf pro 5. funkci. . . . .	69
Obr. B.6: Konvergenční graf pro 6. funkci. . . . .	69
Obr. B.7: Konvergenční graf pro 7. funkci. . . . .	70
Obr. B.8: Konvergenční graf pro 8. funkci. . . . .	70
Obr. B.9: Konvergenční graf pro 10. funkci. . . . .	71
Obr. B.10: Konvergenční graf pro 11. funkci. . . . .	71
Obr. B.11: Konvergenční graf pro 12. funkci. . . . .	72
Obr. B.12: Konvergenční graf pro 13. funkci. . . . .	72
Obr. B.13: Konvergenční graf pro 14. funkci. . . . .	73

<b>Obr. B.14:</b> Konvergenční graf pro 15. funkci. . . . .	73
<b>Obr. B.15:</b> Konvergenční graf pro 16. funkci. . . . .	74
<b>Obr. B.16:</b> Konvergenční graf pro 17. funkci. . . . .	74
<b>Obr. B.17:</b> Konvergenční graf pro 18. funkci. . . . .	75
<b>Obr. B.18:</b> Konvergenční graf pro 19. funkci. . . . .	75
<b>Obr. B.19:</b> Konvergenční graf pro 20. funkci. . . . .	76
<b>Obr. B.20:</b> Konvergenční graf pro 21. funkci. . . . .	76
<b>Obr. B.21:</b> Konvergenční graf pro 22. funkci. . . . .	77
<b>Obr. B.22:</b> Konvergenční graf pro 24. funkci. . . . .	77
<b>Obr. B.23:</b> Konvergenční graf pro 25. funkci. . . . .	78
<b>Obr. B.24:</b> Konvergenční graf pro 26. funkci. . . . .	78
<b>Obr. B.25:</b> Konvergenční graf pro 27. funkci. . . . .	79
<b>Obr. B.26:</b> Konvergenční graf pro 28. funkci. . . . .	79