UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aritmetický průměr: Výhody a nevýhody oproti ostatním agregačním funkcím

Vypracovala:	Eliška Vašíčková
Vedoucí práce:	Mgr. Zbyněk Kurač
Rok obhajoby:	2021
Studijní obor:	Matematika
Obor/kombinace:	Matematika – Biologie (M-BI)
Forma Studia:	Prezenční

Bibliografické identifikační údaje

Autor:	Eliška Vašíčková
Název práce:	Aritmetický průměr: Výhody a nevýhody oproti ostatním agregačním funkcím
Typ práce:	Bakalářská
Katedra:	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce:	Mgr. Zbyněk Kurač
Rok obhajoby:	2021
Jazyk:	Čeština
Anotace:	Cílem práce je vytvořit seznam co nejvíce vlastností aritmetického průměru a porovnat je s ostatními agregačními funkcemi (monotónní funkce zachovávající koncové body). U každé vlastnosti nalézt agregační funkce, jenž danou vlastnost splňují nebo nesplňují. Na závěr sestavit reálné scénáře, kdy je volba aritmetického průměru nejlepší možná a naopak, kdy aritmetický průměr není za žádných okolností doporučen. Bonus: Objevit vlastnost, kterou má pouze aritmetický průměr a žádná jiná agregační funkce.
Klíčová slova:	agregační funkce, aritmetický průměr, geometrický průměr, t-normy, t-conormy, ryzí monotónnost, spojová ryzí monotónnost, senzitivita, idempotence, asociativita, spojitost, neutrální prvek, anihilátor, konjunktivita, disjunktivita, vnitřní funkce, distributivita, autodistributivita, symetrie, bisymetrie, aditivita,
Počet stran:	95
Počet příloh:	2

Bibliographical identifications

Author:	Eliška Vašíčková
Title:	The arithmetic mean: Advantages and disadvantages over other aggregation functions
Type of thesis:	Bachelor
Department:	Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	Mgr. Zbyněk Kurač
Year of presentation:	2021
Language:	Czech
Anotation:	The aim of the work is to create a list of properties of the arithmetic mean and compare them with other aggregation functions (monotone functions preserving finite points). For each property, find an aggregation function that satisfies or does not satisfy the property. Finally, compile real scenarios where the choice of arithmetic mean is the best possible option and vice versa, when the arithmetic mean is not recommended under any circumstances. Bonus: Discover a property that has only an arithmetic mean and no other aggregation function.
Key words:	aggregation functions, arithmetic mean, geometric mean, t-norms, t-conorms, strict monotocity, joint strict monotocity,sensitivity, idempotency, associativity, continuity, neutral element, anihilator, konjuntivity, disjunktivity, internal functions, distributivity, autodistributivity, symmetry, bisymmetry, aditivity
Number of pages:	95
Number of attachments:	2

Prohlášení

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Zbyňka Kurače a v seznamu literatury jsem uvedla všechny použité zdroje.

V Olomouci: Podpis:

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat Mgr. Zbyňkovi Kuračovi za jeho rady, ochotu a pomoc při psaní této práce a v neposlední řadě za ukázání krás algebry a motivaci se dále věnovat matematice.

Obsah

Seznam obrázků **95**

Použité značení

$\mathbb{R}$	Množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	Množina přirozených čísel
$\Rightarrow$	Implikace
$\Leftrightarrow$	Ekvivalence
$\wedge$	Konjunkce
$\vee$	Disjunkce
$\langle a, b\rangle$	Uzavřený interval od a do b
(a, b)	Otevřený interval od a do b
$\langle a, b), (a, b\rangle$	Polootevřený interval od a do b
$\mathbf{x}$	Vektor $(x_1, \ldots, x_n)$
x_i	i-tý argument vektoru $(x_1, \ldots, x_n)$
$x_{(i)}$	i-tý nejmenší argument vektoru $(x_1, \ldots, x_n)$
$[n]$	Množina $\{1, \ldots, n\}$
AM	Aritmetický průměr
GM	Geometrický průměr
$WAM_{\mathbf{v}}$	Vážený aritmetický průměr příslušný vektoru $\mathbf{v}$
$OWA_{\mathbf{v}}$	Uspořádaný vážený průměr příslušný vektoru $\mathbf{v}$
MAX, S_{max}	Maximum
MIN, T_{min}	Minimum
MED	Medián
P_k	Projekce k-té souřadnice
$P_{(k)}$	Uspořádaná projekce k-té nejmenší souřadnice
$\Pi, T_{\prod}$	Součin
T_{Luk}	Łukasiewiczova t-norma
T_D	Drastická t-norma
$S_{\sum}$	Pravděpodobnostní suma
S_{Luk}	Ohraničená suma, Łukasiewiczova t-conorma
S_D	Drastická t-conorma

Úvod

Proces, kdy z několika hodnot určíme jednu hodnotu reprezentativní nazýváme proces agregace. Numerický nástroj, který k tomu využíváme, nazýváme agregační funkce. Proces agregace je velmi starý. Už od prvopočátků měli lidé potřebu nějakým způsobem zjednodušovat získaná data a vyvozovat z nich závěry. Ať už mluvíme o průměrném počtu ulovených kusů zvěře za nějaké období nebo odhady výtěžnosti polí. Větší zájem však agregační funkce získaly až nedávno, díky jejich aplikacím v informatice či aplikované matematice. Intenzivní rozvoj těchto odvětví vyžadoval také rozvoj a ucelení agregačních funkcí. V dnešní době jsou agregační funkce využívané zejména ve statistice jako nástroje pro výpočet průměrných teplot či platů, ale také v různých dalších odvětvích jako ekonomika či sociologie.

Jak dále zjistíme, každá agregační funkce má jiné vlastnosti a je tedy klíčové zvolit správnou agregační funkci, abychom získali užitečný výsledek. Tato volba není jednoduchá, jelikož agregačních funkcí je obrovské množství. V této práci se budeme zabývat pouze těmi známějšími.

Cílem práce je porovnat vlastnosti aritmetického průměru s vlastnostmi dalších agregačních funkcí. Abychom tento cíl splnili, nejprve si definujeme agregační funkce, kterými se budeme ve zbytku práce zabývat. Také uvedeme známé funkce, které jsou však agregační pouze na některých intervalech. Ukážeme si, jak definované funkce aplikovat na konkrétní příklady a některé doplníme grafem. V navazující části si uvedeme vlastnosti, které budeme u definovaných agregačních funkcí porovnávat. Ve třetí části práce vytvoříme seznam vlastností, které každá uvažovaná agregační funkce má a naopak nemá. V závěrečné části se budeme více zabývat aritmetickým průměrem, konkrétně jeho korektním a naopak nekorektním využitím v praxi.

1 Definice agregačních funkcí

V následujících kapitolách se budeme zabývat agregačními funkcemi. To je však velmi obsáhlé téma, a tak se pro naše účely omezíme pouze na agregační funkce na řetězcích, a to konkrétně na množině reálných čísel. Jelikož mezi reálnými čísly (resp. jakoukoli neprázdnou podmnožinou reálných čísel) a intervalem $I = \langle 0, 1 \rangle$ existuje izomorfismus, budeme ve většině případů používat druhé značení. Tedy pokud nebude uvedeno jinak, intervalem I rozumíme uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$.

Tento interval však nevolíme náhodně. Vzhledem k podmínkám agregačních funkcí, které si vzápětí uvedeme (konkrétně podmínka zachování krajních bodů), je volba intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ velmi přirozená a není tedy překvapením, že právě na tomto intervalu je definováno nejvíce agregačních funkcí.

U každé nově definované agregační funkce si také uvedeme příklad. Pokud to bude možné, budeme uvažovat tytéž hodnoty u různých agregačních funkcí, aby bylo zřejmé, jak se mění výsledky v závislosti na užitých agregačních funkcích. Ve většině případů také agregační funkci zobrazíme graficky, abychom si také udělali nějakou představu o tom, jak se mění hodnoty výsledné v závislosti na hodnotách zadaných. Tyto grafy dále využijeme při rozhodování, zda konkrétní agregační funkce má či nemá určité vlastnosti.

V první části této kapitoly budeme mluvit o n-árních agregačních funkcích na intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$, poté se zaměříme na t-normy a t-conormy, které jsou pouze binární, avšak na stejném intervalu a v závěru této kapitoly se zaměříme na agregační funkce, které jsou sice n-ární, avšak na jiném intervalu, než $I = \langle 0, 1 \rangle$.

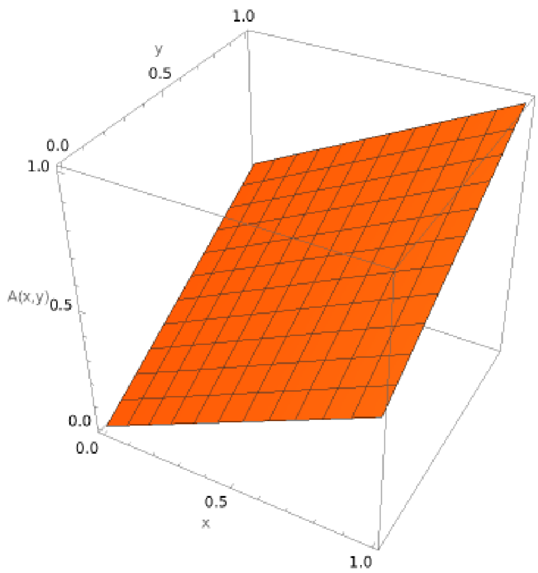
Definice 1.1. Nechť $(I, \leq, 0, 1)$ je uspořádaná množina a $n \in \mathbb{N}$. Zobrazení $A : \langle 0, 1 \rangle^n \to \langle 0, 1 \rangle$ nazveme *agregační funkce na I*, jestliže je neklesající a zachovává krajní body, tedy pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1 \rangle^n$ platí:

- $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ $(tj.\ x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n) \Rightarrow A(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{y})$,
- $A(0, \ldots, 0) = 0 \wedge A(1, \ldots, 1) = 1$.

1.1 Aritmetický průměr

Definice 1.2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Agregační funkci $AM : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ nazveme *aritmetický průměr*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí [1] :

$$AM(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$



Obrázek 1: Aritmetický průměr ($AM(x,y)$)

Příklad 1.1.

Zadání: Určete aritmetický průměr čísel: $0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95$ a 0.99.

Řešení: V tomto případě $n = 6$, tedy předpis pro výpočet aritmetického průměru vypadá následovně:

$$AM(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}.$$

Po dosazení zadaných hodnot získáme:

$$AM(0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) = \frac{0.1+0.25+0.3+0.9+0.95+0.99}{6} = \frac{3.79}{6} \doteq 0.632.$$

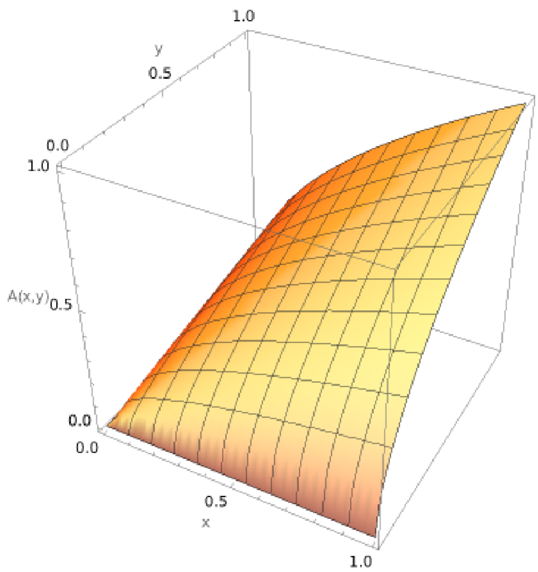
Závěr: Aritmetický průměr zadaných hodnot je (po zaokrouhlení) 0.632.

[1] Aritmetický průměr značíme AM z anglického *arithmetic mean*.

1.2 Geometrický průměr

Definice 1.3. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Agregační funkci $GM : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ nazveme *geometrický průměr*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí [2]:

$$GM(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$



Obrázek 2: Geometrický průměr ($GM(x,y)$)

Příklad 1.2.

Zadání: Určete geometrický průměr hodnot $0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95$ a 0.99.

Řešení: V tomto případě je $n = 6$, tedy předpis pro výpočet geometrického průměru vypadá následovně:

$$GM(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6)^{\frac{1}{6}}.$$

[2] Geometrický průměr značíme GM z anglického *geometric mean*.

Po dosazení zadaných hodnot získáme:

$$GM(0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) = (0.1 \cdot 0.25 \cdot 0.3 \cdot 0.9 \cdot 0.95 \cdot 0.99)^{\frac{1}{6}}$$

$$\doteq (0.00635)^{\frac{1}{6}}$$

$$\doteq 0.43.$$

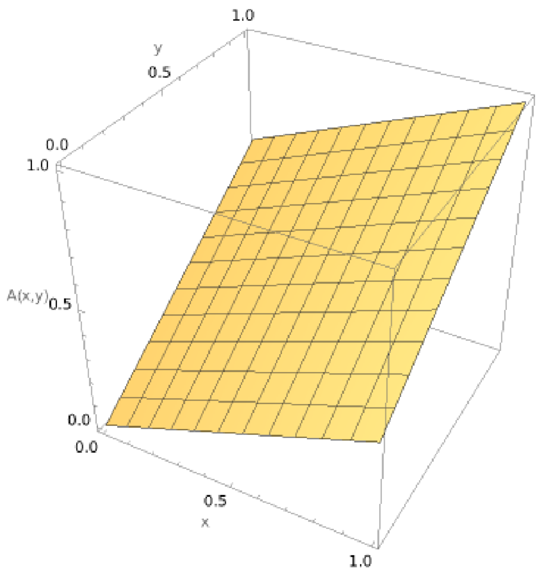
Závěr: Geometrický průměr zadaných hodnot je (po zaokrouhlení) 0.43.

1.3 Vážený aritmetický průměr

Definice 1.4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{v} \in \langle 0, 1\rangle^n$ takové, že $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. Agregační funkci $WAM_{\mathbf{v}} : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *vážený aritmetický průměr příslušný vektoru* $\mathbf{v}$, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí [3]:

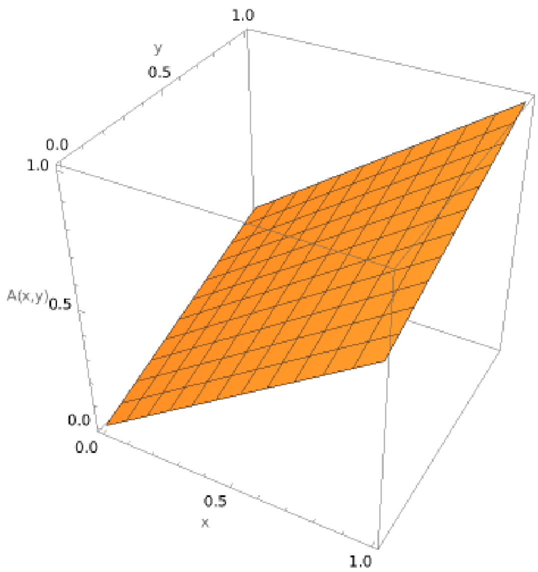
$$WAM_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i.$$

Poznámka 1.5. Na následujících obrázcích si ukážeme, jak se mění graf funkce $WAM_{\mathbf{v}}$ v závislosti na volbě vektoru $\mathbf{v}$.



Obrázek 3: Vážený aritmetický průměr příslušný vektoru $\mathbf{v} = (0.4, 0.6)$ ($\mathrm{WAM}_{\mathbf{v}}(x, y)$)

[3]Vážený aritmetický průměr značíme WAM z anglického *weighted arithmetic mean.*



Obrázek 4: Vážený aritmetický průměr příslušný vektoru $\mathbf{u} = (0.7, 0.3)$ ($\mathrm{WAM}_{\mathbf{u}}(x, y)$)

Příklad 1.3.

Zadání: Určete vážený aritmetický průměr hodnot: $0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95$ a 0.99 pro vektory $\mathbf{u} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})$ a $\mathbf{w} = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0, 0)$.

Řešení:

1. Určíme $WAM_{\mathbf{u}}$ hodnot $0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95$ a 0.99 pro vektor $\mathbf{u} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

   Předpis $WAM_{\mathbf{u}}$ pro $\mathbf{u} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ je následovný:

   $$WAM_{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6.$$

   V tomto případě jde o projekci třetího argumentu (viz Definice 1.14). Po dosazení zadaných hodnot získáme:

   $$WAM_{\mathbf{u}}(0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) = 0 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.9 + 0 \cdot 0.95 + 0 \cdot 0.99$$

   $$= 0.3.$$

2. Určíme $WAM_{\mathbf{v}}$ hodnot $0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95$ a 0.99 pro vektor $\mathbf{v} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})$.

   Předpis váženého aritmetického průměru příslušného vektoru $\mathbf{v} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})$ je následovný:

   $$WAM_{\mathbf{v}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \tfrac{1}{6} \cdot x_1 + \tfrac{1}{6} \cdot x_2 + \tfrac{1}{6} \cdot x_3 + \tfrac{1}{6} \cdot x_4 + \tfrac{1}{6} \cdot x_5 + \tfrac{1}{6} \cdot x_6.$$

Vidíme, že předpis je v tomto případě stejný jako u aritmetického průměru (viz Definice 1.2.). Po dosazení zadaných hodnot získáme:

$$\begin{aligned} WAM_{\mathbf{v}}(0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) &= \frac{0.1}{6} + \frac{0.25}{6} + \frac{0.3}{6} + \frac{0.9}{6} + \frac{0.95}{6} + \frac{0.99}{6} \\ &\doteq 0.632. \end{aligned}$$

3. Určíme $WAM_{\mathbf{w}}$ hodnot $0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95$ a 0.99 pro vektor $\mathbf{w} = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0, 0)$.

   Předpis $WAM_{\mathbf{w}}$ pro $\mathbf{w} = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0, 0)$ je následovný:

   $$WAM_{\mathbf{w}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0.1 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 + 0.4 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6.$$

   Po dosazení zadaných hodnot získáme:

   $$\begin{aligned} WAM_{\mathbf{w}}(0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) &= 0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.25 + 0.3 \cdot 0.3 + \\ &+ 0.4 \cdot 0.9 + 0 \cdot 0.95 + 0 \cdot 0.99 \\ &= 0.78. \end{aligned}$$

Závěr: $WAM_{\mathbf{u}}$ zadaných hodnot je 0.3, $WAM_{\mathbf{v}}$ zadaných hodnot je 0.632 a $WAM_{\mathbf{w}}$ zadaných hodnot je 0.78.

Poznámka 1.6. Vážený aritmetický průměr pro vektor $\mathbf{v} \in \langle 0, 1\rangle^n, \mathbf{v} = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ odpovídá aritmetickému průměru (všechny argumenty mají stejnou váhu). $WAM_{\mathbf{u}}$ pro vektor $\mathbf{u} \in \langle 0, 1\rangle^n, u_i = 1$, pro nějaké i a $u_j = 0$ pro každé j takové, že $i \neq j$ odpovídá projekci i-té souřadnice (viz dále).

1.4 Uspořádaný vážený průměr

Definice 1.7. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{v} \in \langle 0, 1\rangle^n$ takový, že $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1,$. Agregační funkci $OWA_{\mathbf{v}} : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *uspořádaný vážený průměr příslušný vektoru* $\mathbf{v}$, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí [4] :

$$OWA_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_{(i)};$$

kde $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.

[4] Uspořádaný vážený průměr značíme *OWA* z anglického *ordered weighted averaging function.*

Poznámka 1.8. $WAM_{\mathbf{v}}$ není symetrická funkce (viz dále), ale jeho symetrizací získáme $OWA_{\mathbf{v}}$.

Příklad 1.4.

Zadání: Určete uspořádaný vážený průměr hodnot: $0.3, 0.25, 0.1, 0.99, 0.95$ a 0.9 pro vektor $\mathbf{v} = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0, 0)$.

Řešení: Předpis $OWA_{\mathbf{v}}$ příslušného vektoru $\mathbf{v} = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0, 0)$ je:

$$OWA_{\mathbf{v}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0.1 \cdot x_{(1)} + 0.2 \cdot x_{(2)} + 0.3 \cdot x_{(3)} + 0.4 \cdot x_{(4)} + 0 \cdot x_{(5)} + 0 \cdot x_{(6)}.$$

Abychom ze zadaného vektoru $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0.3, 0.25, 0.1, 0.99, 0.95, 0.9)$ získali uspořádaný vektor z předpisu uspořádaného váženého průměru, uspořádáme jeho souřadnice tak, aby platilo $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$:

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}, x_{(5)}, x_{(6)}) = (0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99).$$

Po dosazení do předpisu získáme:

$$\begin{aligned} OWA_{\mathbf{v}}(0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) &= 0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.25 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.9 + 0 \cdot 0.95 + 0 \cdot 0.99 \\ &= 0.78. \end{aligned}$$

Závěr: Vážený uspořádaný průměr zadaných hodnot příslušný vektoru $\mathbf{v} = (0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99)$ je 0.78.

Poznámka 1.9. Na následujícím příkladu si ukážeme, jaký je rozdíl mezi $OWA_{\mathbf{v}}$ a $WAM_{\mathbf{v}}$ co se týče uspořádanosti hodnot do nich dosazovaných. V případě že jsou hodnoty uspořádány, výsledné hodnoty budou stejné. V případě kdy tomu tak není, se výsledky liší, v závislosti na tom, jakou váhu přiřadí jednotlivým hodnotám zadaný vektor.

Příklad 1.5.

Zadání: Určete vážený průměr hodnot: $0.3, 0.25, 0.1, 0.99, 0.95$ a 0.9 pro vektor $\mathbf{v} = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0, 0)$.

Řešení: Předpis $WAM_{\mathbf{v}}$ příslušného vektoru $\mathbf{v} = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0, 0)$ je:

$$WAM_{\mathbf{v}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0.1 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 + 0.4 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6;$$

Po dosazení do předpisu získáme:

$$WAM_{\mathbf{v}}(0.3, 0.25, 0.1, 0.99, 0.95, 0.9) = 0.1\cdot0.3+0.2\cdot0.25+0.3\cdot0.1+0.4\cdot0.99+0\cdot0.95+0\cdot0.9$$

$$= 0.506.$$

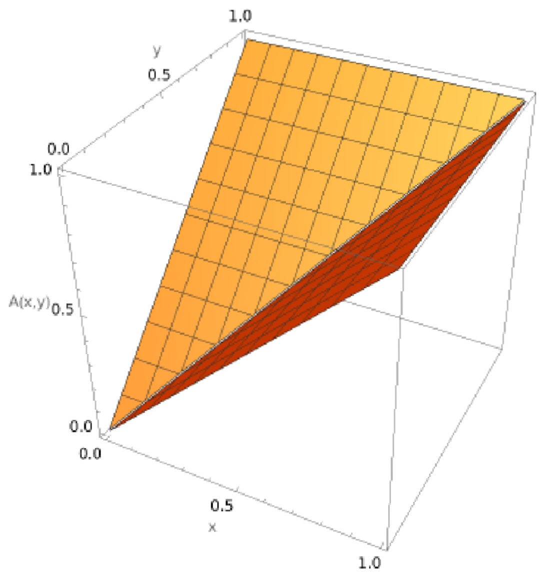
Závěr: Vážený uspořádaný průměr zadaných hodnot příslušný vektoru $\mathbf{v} = (0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99)$ je 0.506.

1.5 Maximum

Definice 1.10. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Agregační funkci $MAX : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *maximum* na I, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí:

$$MAX(\mathbf{x}) = \max(\mathbf{x});$$

tj. výslednou hodnotou je největší hodnota mezi $x_1, \ldots, x_n$.



Obrázek 5: Maximum $(MAX(x, y))$

Příklad 1.6.

Zadání: Určete maximum hodnot: $0.1; 0.25; 0.3; 0.9, 0.95$ a 0.99.

Řešení: Zadané hodnoty dosadíme do předpisu z definice 2.8. a získáme:

$$MAX(0.1; 0.25; 0.3; 0.9, 0.95; 0.99) = \max(0.1; 0.25; 0.3; 0.9; 0.95; 0.99) = 0.99.$$

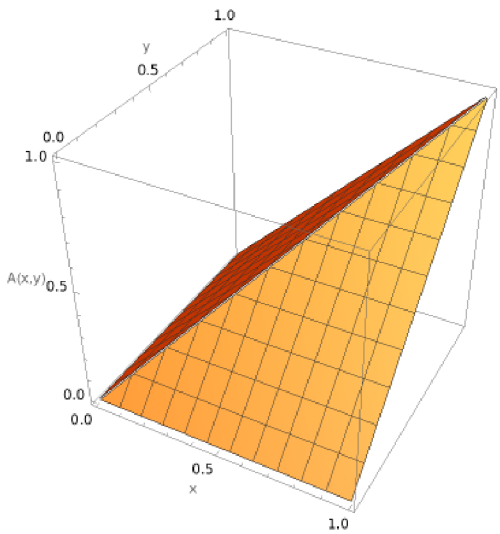
Závěr: Maximum zadaných hodnot je 0.99.

1.6 Minimum

Definice 1.11. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Agregační funkci $MIN : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ nazveme *minimum* na I, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$MIN(\mathbf{x}) = \min(\mathbf{x}).$$

tj. výsledkem je nejmenší hodnota mezi $x_1, \dots, x_n$.



Obrázek 6: Minimum ($MIN(x, y)$)

Příklad 1.7.

Zadání: Určete minimum hodnot: $0.1; 0.25; 0.3; 0.9; 0.95$ a 0.99.

Řešení: Zadané hodnoty dosadíme do předpisu z definice 2.9. a získáme:

$$MIN(0.1; 0.25; 0.3; 0.9, 0.95; 0.99) = \min(0.1; 0.25; 0.3; 0.9; 0.95; 0.99) = 0.1.$$

Závěr: Minimum zadaných hodnot je 0.1.

1.7 Medián

Definice 1.12. Agregační funkci $MED : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *medián*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí:

- $MED(x_1, \ldots, x_{2k-1}) = x_{(k)}$, pro lichý počet argumentů;
- $MED(x_1, \ldots, x_{2k}) = \frac{x_{(k)}+x_{(k+1)}}{2}$, pro sudý počet argumentů.

Poznámka 1.13. Pro lichý počet argumentů $(2k + 1)$ jde uspořádanou projekci k-tého argumentu a pro sudý počet argumentů $(2k)$ jde o aritmetický průměr k-tého a (k+1)-tého argumentu za předpokladu, že argumenty jsou seřazeny vzestupně (resp. sestupně). Vzhledem k tomu nebudeme zvlášť řešit vlastnosti mediánu. Množinu jeho vlastností tvoří průnik vlastností aritmetického průměru a uspořádané projekce (viz dále).

Příklad 1.8.

Zadání: Určete medián hodnot: $0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95$ a 0.99.

Řešení: V našem případě $n = 2k = 6$, tj. $k = 3$. Výslednou hodnotou je tedy aritmetický průměr $x_{(3)}$ a $x_{(4)}$. Jelikož zadané hodnoty jsou již uspořádané, předpis vypadá následovně:

$$MED(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{x_3+x_4}{2}.$$

Po dosazení získáme:

$$MED(0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) = \frac{0.3+0.9}{2} = 0.6.$$

Závěr: Medián zadaných hodnot je 0.6.

Příklad 1.9.

Zadání: Určete medián hodnot: $0.3, 0.25, 0.1, 0.7, 0.9, 0.99$ a 0.95.

Řešení: V našem případě $n = 2k - 1 = 7$, tj. $k = 4$. Výslednou hodnotou je uspořádaná projekce čtvrté souřadnice (viz Definice 1.15.). Předpis tedy vypadá následovně:

$$MED(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_{(4)}.$$

Jelikož zadané hodnoty nejsou uspořádané, nejprve je uspořádáme tak, aby platilo $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(7)}$:

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}, x_{(5)}, x_{(6)}, x_{(7)}) = (0.1, 0.25, 0.3, 0.7, 0.9, 0.95, 0.99).$$

Po dosazení do předpisu získáme:

$$MED(0.1, 0.25, 0.3, 0.7, 0.9, 0.95, 0.99) = 0.7.$$

Závěr: Medián zadaných hodnot je 0.7.

1.8 Projekce

Definice 1.14. Nechť $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$. Agregační funkci $P_k : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *projekce*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí:

$$P_k(\mathbf{x}) = x_k.$$

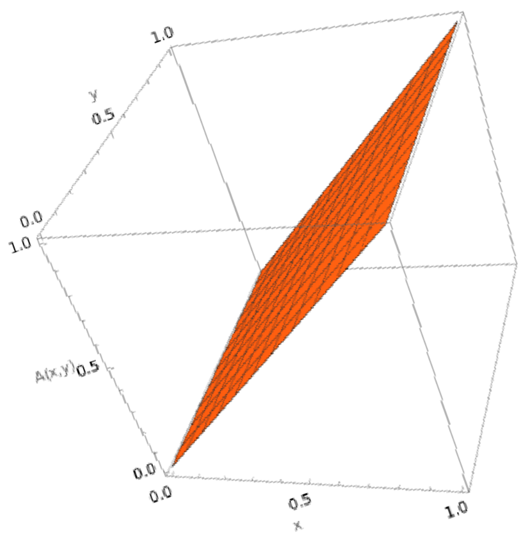
Příklad 1.10.

Zadání: Určete P_3 hodnot: $0.1, 0.9, 0.95, 0.25, 0.3$ a 0.99

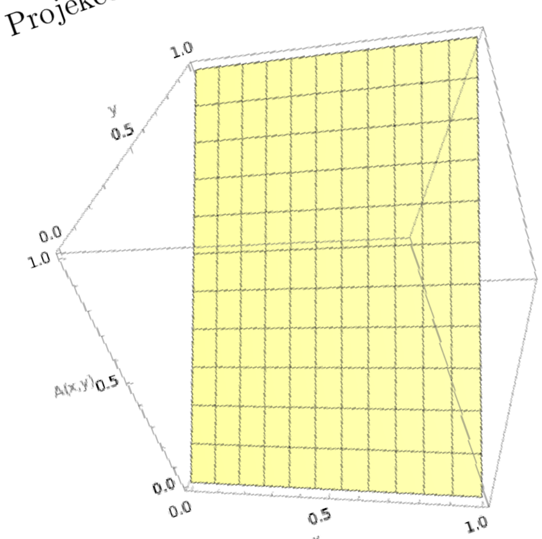
Řešení: Zadané hodnoty dosadíme do předpisu z definice 2.14. a získáme:

$$P_3(0.1, 0.9, 0.95, 0.25, 0.3, 0.99) = 0.95.$$

Závěr: Projekce P_3 zadaných hodnot je 0.95.



Obrázek 7: Projekce prvního argumentu ($P_1(x, y)$)



Obrázek 8: Projekce druhého argumentu ($P_2(x, y)$)

1.9 Uspořádaná projekce

Definice 1.15. Nechť $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$. Agregační funkci $P_{(k)} : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ nazveme *uspořádaná projekce*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$P_{(k)}(\mathbf{x}) = x_{(k)}.$$

Poznámka 1.16. Uspořádaná projekce $P_{(1)}$ odpovídá agregační funkci minimum. Uspořádaná projekce $P_{(n)}$ odpovídá agregační funkci maximum.

Příklad 1.11.

Zadání: Určete $P_{(3)}$ hodnot: $0.1, 0.9, 0.95, 0.25, 0.3$ a 0.99.

Řešení: Jelikož zadané hodnoty nejsou uspořádané, nejprve je uspořádáme tak, aby platilo $x_{(1)} \leq \cdots \leq x_{(6)}$. Uspořádaný vektor je tedy následovný:

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}, x_{(5)}, x_{(6)}) = (0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99).$$

Nyní jsme úlohu převedli na výpočet neuspořádané projekce. Po dosazení uspořádaných hodnot získáme:

$$P_3(0.1, 0.25, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) = 0.3.$$

Závěr: Uspořádaná projekce $P_{(3)}$ zadaných hodnot je 0.3.

1.10 T-normy

Definice 1.17. Funkci $T : \langle 0, 1\rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1\rangle$ nazveme *t-norma*, jestliže pro každé $v, w, x, y \in \langle 0, 1\rangle$ platí [5] :

- *komutativita*: $T(x, y) = T(y, x)$;
- *monotónnost*: $(v \leq w) \wedge (x \leq y) \Rightarrow T(v, w) \leq T(x, y)$;
- *asociativita*: $T(w, T(x, y)) = T((T(w, x), y)$;
- *neutrální prvek* $e = 1$: $T(x, 1) = x$.

Poznámka 1.18. Z požadovaných vlastností přímo plyne, že všechny t-normy jsou agregační funkce.

Definice 1.19. T-normu $T_{min} : \langle 0, 1\rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1\rangle$ nazveme *minimální (Gödelova) t-norma*, jestliže pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$T_{min}(x, y) = \min(x, y).$$

Příklad 1.12.

Zadání: Určete T_{min} hodnot 0.3 a 0.75.

Řešení: Po dosazení do předpisu z definice 1.19. získáme:

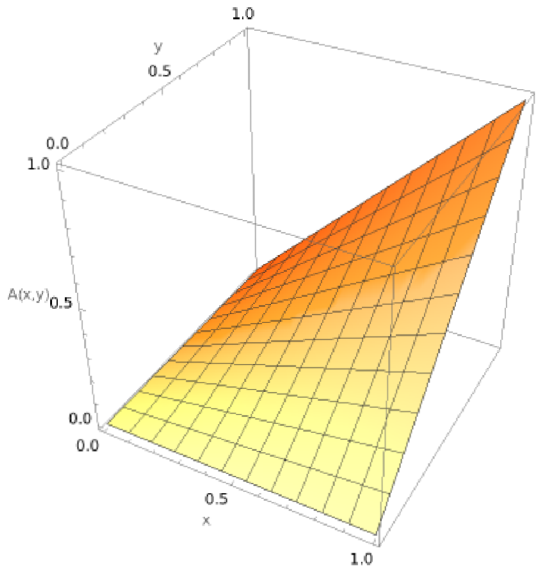
$$T_{min}(0.3, 0.75) = \min(0.3, 0.75) = 0.3.$$

Závěr: T_{min} hodnot 0.3 a 0.75 je 0.3.

[5] Označení t-norma plyne z anglického *triangular norm*.

Definice 1.20. T-normu $T_{\prod} : \langle 0,1\rangle^2 \rightarrow \langle 0,1\rangle$ nazveme *součinová t-norma*, jestliže pro každé $\mathbf{x} = (x,y) \in \langle 0,1\rangle^2$ platí:

$$T_{\prod}(x,y) = x \cdot y.$$



Obrázek 9: Součinová t-norma $(T_{\prod}(x,y))$

Příklad 1.13.

Zadání: Určete $T_{\prod}$ hodnot 0.3 a 0.75.

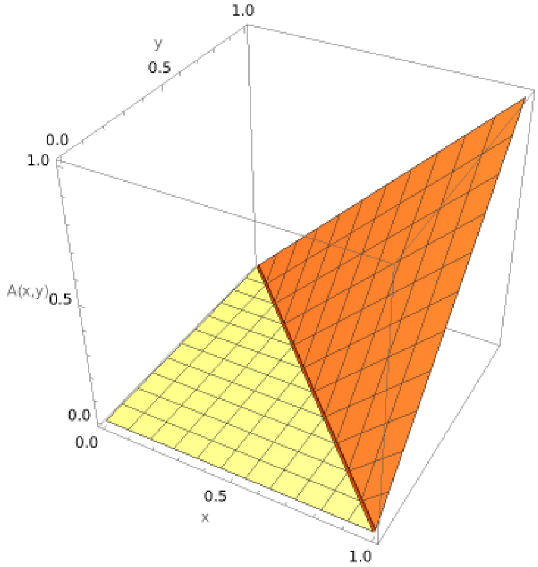
Řešení: Po dosazení do předpisu z definice 1.20. získáme:

$$T_{\prod}(0.3, 0.75) = 0.3 \cdot 0.75 = 0.225.$$

Závěr: $T_{\prod}$ hodnot 0.3 a 0.75 je 0.225.

Definice 1.21. T-normu $T_{Luk} : \langle 0,1\rangle^2 \rightarrow \langle 0,1\rangle$ nazveme *Łukasiewiczova t-norma*, jestliže pro každé $\mathbf{x} = (x,y) \in \langle 0,1\rangle^2$ platí:

$$T_{Luk}(x,y) = \max(0, x+y-1).$$



Obrázek 10: Łukasiewiczova t-norma ($T_{Luk}(x,y)$)

Příklad 1.14.

Zadání: Určete T_{Luk} hodnot 0.3 a 0.75.

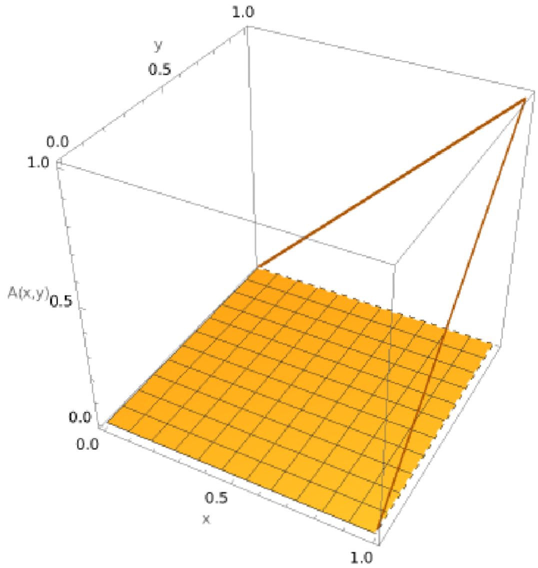
Řešení: Po dosazení do předpisu z definice 1.21. získáme:

$$T_{Luk}(0.3, 0.75) = \max(0, 0.3 + 0.75 - 1) = \max(0, 0.05) = 0.05.$$

Závěr: T_{Luk} hodnot 0.3 a 0.75 je 0.05.

Definice 1.22. T-normu $T_D : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ nazveme *drastická t-norma*, jestliže pro každé $\mathbf{x} = (x,y) \in \langle 0,1\rangle^2$ platí:

$$T_D(x,y) = \begin{cases} x & \text{pokud } y = 1 \\ y & \text{pokud } x = 1 \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$



Obrázek 11: Drastická t-norma ($T_D(x,y)$)

Příklad 1.15.

Zadání: Určete T_D hodnot 0.3 a 0.75.

Řešení: Po dosazení do předpisu z definice 1.22. získáme:

$$T_D(0.3, 0.75) = 0.$$

Závěr: T_D hodnot 0.3 a 0.75 je 0, protože ani jeden argument není roven 1.

Věta 1.1. *Pro každou T-normu T platí:*

$$\top_D(x,y) \leq T(x,y) \leq \top_{min}(x,y);$$

tj. T_D je nejmenší a T_{min} je největší t-norma na $\langle 0,1\rangle$.

Důkaz. Každá t-norma $T(x, y)$ je konjunktivní, protože:

- $x \leq y : T(x, y) \leq T(x, 1) = x = \min(x, y) = T_{min}(x, y)$.
- $y < x : T(x, y) \leq T(1, y) = y = \min(x, y) = T_{min}(x, y)$.

tedy platí:

$$T(x, y) \leq T_{min}(x, y).$$

Nejmenší agregační funkce je $A_{\perp}$(viz Definice 2.20.). Po zakomponování neutrálního prvku získáme přímo drastickou t-normu. Platí tudíž, že T_D je nejmenší t-norma:

$$T_D(x, y) \leq T(x, y).$$

□

1.11 T-conormy

Definice 1.23. Funkci $S : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *t-conorma*, jestliže pro každé $v, w, x, y \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

- *komutativita*: $S(x, y) = S(y, x)$;
- *monotónnost*: $(v \leq w) \wedge (x \leq y) \Rightarrow S(v, w) \leq S(x, y)$;
- *asociativita*: $S(w, S(x, y)) = S((S(w, x), y)$;
- *neutrální prvek* $e = 0$: $S(x, 0) = x$.

Poznámka 1.24. T-conormy jsou duální k t-normám, tedy pro každou t-normu T na I platí:

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y),$$

kde $S(x, y)$ je t-conorma na I.

Poznámka 1.25 (**Princip duality**). Pokud t-norma T má určitou vlastnost, pak tuto vlastnost má i t-conorma S k ní duální. Respektive duální vlastnost k vlastnosti původní (např. konjunktivita a disjunktivita)

Definice 1.26. T-conormu $S_{max} : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *maximální t-conorma*, jestliže pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$S_{max}(x, y) = \max(x, y).$$

Příklad 1.16.

Zadání: Určete S_{max} hodnot 0.3 a 0.75.

Řešení: Po dosazení do předpisu z definice 1.26. získáme:

$$S_{max}(0.3, 0.75) = max(0.3, 0.7) = 0.3.$$

Závěr: S_{max} hodnot 0.3 a 0.75 je 0.3.

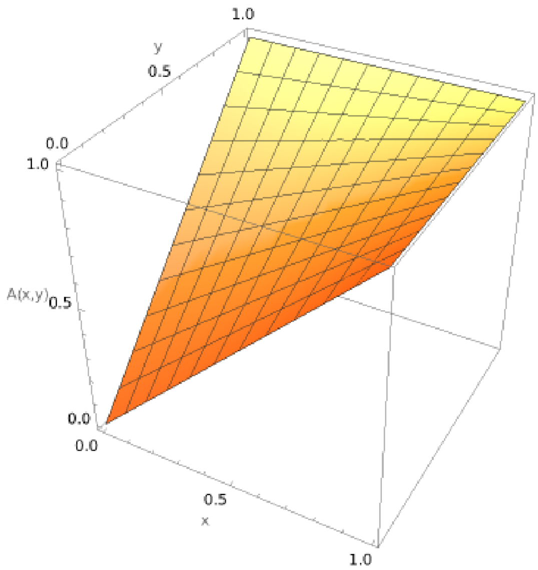
Poznámka 1.27. Maximální t-conorma je duální k minimální t-normě tj.

$$S_{max}(x, y) = 1 - T_{min}(1 - x, 1 - y) =$$

$$= 1 - \min(1 - x, 1 - y) = \max(1 - (1 - x), 1 - (1 - y)) = \max(x, y).$$

Definice 1.28. T-conormu $S_{\sum} : \langle 0, 1\rangle^2 \rightarrow \langle 0, 1\rangle$ nazveme *pravděpodobnostní suma*, jestliže pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$S_{\sum}(x, y) = x + y - xy.$$



Obrázek 12: Pravděpodobnostní suma ($S_{\sum}(x, y)$)

Příklad 1.17.

Zadání: Určete $S_{\sum}$ hodnot 0.3 a 0.75.

Řešení: Po dosazení do předpisu z definice 1.28. získáme:

$$S_{\sum}(0.3, 0.75) = 0.3 + 0.75 - 0.3 \cdot 0.75 = 0.825.$$

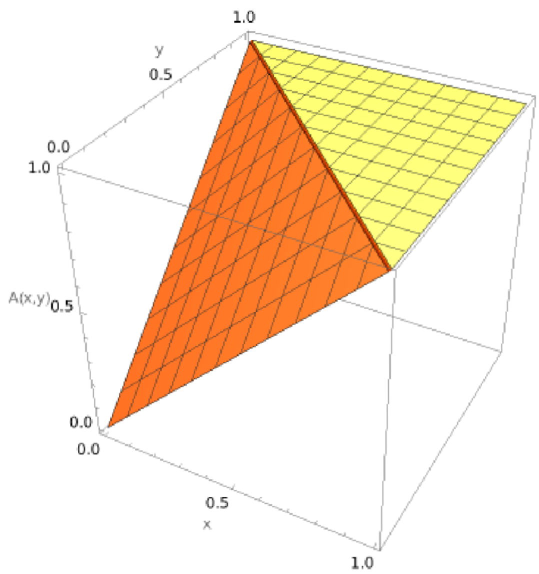
Závěr: $S_{\sum}$ hodnot 0.3 a 0.75 je 0.825.

Poznámka 1.29. Pravděpodobnostní suma je duální k součinové t-normě. Platí tedy:

$$S_{\sum}(x, y) = 1 - T_{\prod}(1 - x, 1 - y) = 1 - (1 - x, 1 - y) = x + y - xy.$$

Definice 1.30. T-conormu $S_{Luk} : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *Łukasiewiczova t-conorma (ohraničená suma)*, jestliže pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$S_{Luk}(x, y) = \min(x + y, 1).$$



Obrázek 13: Łukasiewiczova t-conorma ($T_{Luk}(x, y)$)

Příklad 1.18.

Zadání: Určete S_{Luk} hodnot 0.3 a 0.75.

Řešení: Po dosazení do předpisu z definice 1.30. získáme:

$$S_{Luk}(0.3, 0.75) = \min(0.3 + 0.7, 1) = 1.$$

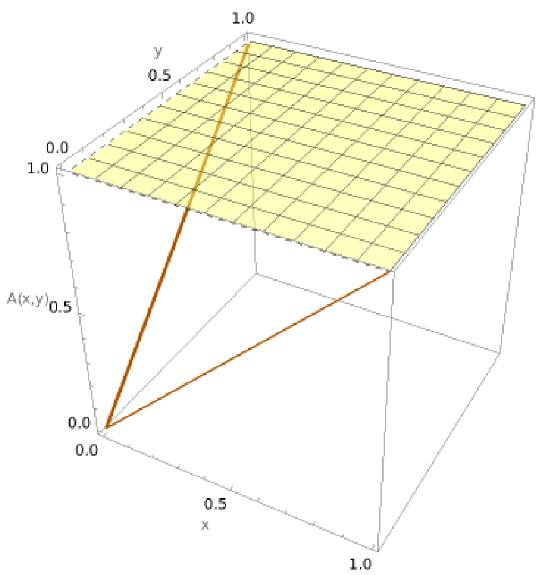
Závěr: S_{max} hodnot 0.3 a 0.75 je 1.

Poznámka 1.31. Łukasiewiczova t-conorma je duální k Łukasiewiczově T-normě. Platí tedy:

$$S_{Luk}(x, y) = 1 - T_{Luk}(1 - x, 1 - y) = 1 - \max((1 - x)(1 - y), 0) =$$
$$= 1 - \max(-x - y + 1, 0) = \min(1 - (-x - y + 1, 1 - 0) = \min(x + y, 1).$$

Definice 1.32. T-conormu $S_D : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *drastická t-conorma*, jestliže pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$S_D(x, y) = \begin{cases} y & \text{pokud } x = 0 \\ x & \text{pokud } y = 0 \\ 1 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$



Obrázek 14: Drastická t-conorma ($S_D(x, y)$)

Příklad 1.19.

Zadání: Určete S_D hodnot 0.3 a 0.75.

Řešení: Po dosazení do předpisu z definice 1.32. získáme:

$$S_D(0.3, 0.75) = 1.$$

Závěr: S_{max} hodnot 0.3 a 0.75 je 1, protože ani jeden z argumentů není roven 0.

Poznámka 1.33. Drastická s-norma je duální k drastické t-normě. Platí tedy:

$$S_D(x, y) = 1 - T_D(1 - x, 1 - y).$$

1.12 Další agregační funkce

V této části si ukážeme, že volba intervalu, na kterém má být funkce agregační je klíčová. Při špatné volbě může nastat problém jak v zachování krajních bodů intervalu (viz Součin), tak při uzavřenosti intervalu (viz Součet).

1.12.1 Součin

Definice 1.34. Agregační funkci $\prod : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *součin* na $I = \langle 0, 1\rangle$, pokud pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí [6] :

$$\prod(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Poznámka 1.35. Pro $n > 1$ je součin tak, jak je definovaný v definici 1.34. agregační funkcí **pouze** na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ (resp. uzavřených intervalech $\langle 0, \infty\rangle, \langle 1, \infty\rangle$) V případě, že je součin definován na jakémkoli jiném intervalu, podmínka zachování krajních bodů není splněna, a tak tuto funkci nemůžeme označit za agregační (viz následující příklady). Pro $n = 1$ je součin definovaný na libovolném podintervalu reálných čísel.

Pro většinu zde zmíněných agregačních funkcí platí, že pro $n = 1$ je funkce rovna identitě. Existují však také unární agregační funkce různé od identity, jako například $A(x) = x^2$ na I.

[6] Pro $n = 2$ jde o součinovou t-normu.

Příklad 1.20. Určete součin čísel: $0.1, 0.2, 0.3$ a 0.9 na intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$.

Při dosazení do předpisu z definice 1.34. získáme:

$$\prod(0.1, 0.2, 0.3, 0.9) = 0,0054.$$

Nyní ověříme platnost podmínky zachování krajních bodů (viz Definice 1.1).

$$\prod(0, \ldots, 0) = 0;$$

$$\prod(1, \ldots, 1) = 1.$$

Podmínka zachování krajních bodů je splněna jak pro počáteční, tak pro koncový bod intervalu I. Funkci $\prod$ na I tedy můžeme označit jako agregační (za předpokladu že je splněna podmínka monotónnosti).

Příklad 1.21. Určete součin čísel: $1, 2, 3, 4, 5$ na intervalu $J = \langle 1, 5 \rangle$.

Při dosazení do předpisu z definice 1.34. získáme:

$$\prod(1, 2, 3, 4, 5) = 120.$$

Nyní ověříme platnost podmínky zachování krajních bodů (viz Definice 1.1).

$$\prod(1, \ldots, 1) = 1;$$

$$\prod(5, \ldots, 5) = 5^n.$$

Pro počáteční bod je podmínka splněna, avšak při ověření podmínky pro bod koncový docházíme k tvrzení, které je platné pouze pro $n = 1$. Funkci $\prod$ na J můžeme označit jako agregační pouze pokud jde o zobrazení $\prod : \langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$. V jiném případě se nejedná o agregační funkci.

1.12.2 Součet

Definice 1.36. Funkci $A : \langle 0, \infty\rangle^n \to \langle 0, \infty\rangle$ nazveme *součet*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, \infty\rangle^n$ platí:

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Poznámka 1.37. Funkci $\sum$ nelze nazvat agregační na libovolném intervalu reálných čísel. Problém nastává jak v uzavřenosti operace sčítání na libovolných podmnožinách reálných čísel, tak v požadavku zachování krajních bodů (viz Definice 1.1). Funkci $\sum$ můžeme nazvat agregační **pouze** na uzavřených intervalech $\langle -\infty, 0\rangle, \langle 0, \infty\rangle$ a $\langle -\infty, \infty\rangle$. Touto funkcí se nadále nebudeme příliš zabývat, protože není agregační na námi zvoleném intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Následujícím příkladem si demonstrujeme, kde může nastat problém na intervalu $I = \langle 0, 1\rangle$.

Příklad 1.22. Určete součet čísel: $0.1, 0.25, 0.3, 0.3, 0.9, 0.95$ a 0.99.

Zadané hodnoty dosadíme do předpisu z definice 1.36. a získáme:

$$\sum(0.1, 0.25, 0.3, 0.3, 0.9, 0.95, 0.99) = 3,49.$$

Součet zadaných hodnot je 3.49, což není hodnota z intervalu $I = \langle 0, 1\rangle$ a tudíž se nejedná o agregační funkci na I.

2 Definice vlastností agregačních funkcí

V této kapitole si definujeme vlastnosti agregačních funkcí, které si v další části práce budeme postupně dokazovat u jednotlivých funkcí. Přestože vlastnosti funkcí budeme dokazovat pouze pro binární případy, v této části si je definujeme obecně pro n-ární funkce.

Definice 2.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Agregační funkci $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *monotónní* na I právě tehdy, když pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí:

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow A(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{y}).$$

Definice 2.2. Monotónní agregační funkci $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *ryze monotónní* na I právě tehdy, když pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^n$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí:

$$x_i \leq y_i \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow A(\mathbf{x}) < A(\mathbf{y}).$$

Definice 2.3. Monotónní agregační funkci $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *spojově ryze monotónní* na I právě tehdy, když pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^n$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí:

$$x_i < y_i \Rightarrow A(\mathbf{x}) < A(\mathbf{y}).$$

Věta 2.1. *Každá ryze monotónní agregační funkce A na I je současně spojově ryze monotónní.*

Důkaz. V případě, kdy $x_i < y_i$ získáme přímo druhou implikaci. V případě, kdy $x_i = y_i$ pro některé i (ne však všechny), tak je levá strana implikace nepravdivá, tedy je implikace pravdivá v každém případě. □

Příklad 2.1. Na následujícím příkladě si demonstrujeme, že obrácená věta obecně neplatí.

Agregační funkce MAX je spojově ryze monotónní na I, přičemž důkaz si uvedeme v další části práce. Nyní si na konkrétním příkladu ukážeme, že obecně není ryze monotónní.

Existují totiž vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^n$ takové, že platí:

$$x_i \leq y_i \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y},$$

ale již neplatí podmínka:

$$A(x_1, \dots, x_n) < A(y_1, \dots, y_n).$$

Konkrétně pro vektory $\mathbf{x} = (0.1, 0.1, 0.5, 0.7)$ a $\mathbf{y} = (0.1, 0.3, 0.5, 0.7)$ platí:

$$(0.1, 0.1, 0.5, 0.7) \leq (0.1, 0.3, 0.5, 0.7) \wedge (0.1, 0.1, 0.5, 0.7) \neq (0.1, 0.3, 0.5, 0.7),$$

ale již neplatí:

$$MAX(0.1, 0.1, 0.5, 0.7) < MAX(0.1, 0.3, 0.5, 0.7);$$

$$0.7 \not< 0.7.$$

Agregační funkce MAX tedy je spojově ryze monotónní, ale není ryze monotónní.

Poznámka 2.4. Vlastnost monotónnosti (resp. ryzí monotónnosti či spojové ryzí monotónnosti) můžeme v případě, kdy se omezujeme pouze na vlastnosti agregačních funkcí nahradit označením funkce jako neklesající (resp. rostoucí či spojově rostoucí). Opačné označení nerostoucí (resp. klesající) je automaticky vyloučeno z důvodu nutnosti splnění podmínek z Definice 1.1. (konkrétně podmínky zachování krajních bodů).

Definice 2.5. Agregační funkci $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ na intervalu I nazveme, *senzitivní na* I právě tehdy, když pro každé $i \in \mathbb{N}$, pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ a pro každé $\lambda \neq 0$ takové, že $\mathbf{x} + (0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots, 0) \in I^n$ platí [7]:

$$A(\mathbf{x}) \neq A(\mathbf{x} + (0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots, 0)).$$

Věta 2.2. *Nechť A je rostoucí agregační funkce na I. A je také neklesající a senzitivní.*

Důkaz. Je triviální, že pokud je funkce rostoucí, pak je neklesající.
Senzitivita plyne přímo z předpisu ryzí monotónnosti. □

Poznámka 2.6. Je zřejmé, že pokud agregační funkce A je na některé své části konstantní, pak není senzitivní. Speciálně, má-li anihilátor (viz Definice 2.16.), pak není senzitivní, protože pokud vektor $\mathbf{x}$ z Definice 2.5. obsahuje anihilátor a, pak nastává rovnost v předpisu téže definice, což vede ke sporu.

[7] Vlastnost senzitivity můžeme také najít pod označením *cancelativity* nebo *reducibility on each place*.

Definice 2.7. Nechť $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ je agregační funkce a $x \in \langle 0, 1\rangle$ je prvek agregační funkce A. Prvek x nazveme *idempotentní*, jestliže platí:

$$A(x, \dots, x) = x.$$

Definice 2.8. Agregační funkce $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ je *idempotentní* na I, jestliže jsou všechny její prvky idempotentní. Tedy pokud pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

$$A(x, \dots x) = x.$$

Definice 2.9. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Agregační funkce $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ je *symetrická*, jestliže pro každé $i, j \in [n]$ a každé $x_i, x_j \in \langle 0, 1\rangle$ platí [8]:

$$A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Poznámka 2.10. Tato vlastnost nám zabezpečuje to, že libovolná změna pořadí argumentů nám nezmění výsledek operace.

Definice 2.11. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Agregační funkce $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ je *asociativní*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí:

$$A(A(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) = A(x_1, A(x_2, \dots, x_n)).$$

Poznámka 2.12. Právě zmíněná definice není zcela korektní, neboť v uvažovaném výrazu se vyskytují dvě různé arity dané agregační funkce. Tato definice je definována pro tzv. rozšířené agregační funkce, jenž lze definovat pro libovolnou aritu (např. AM, MAX, MIN). Pro náš účel budeme uvažovat pouze binární funkce, pro které je tato definice korektní.

Definice 2.13. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Agregační funkci $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme *spojitou v bodě* x_0, jestliže pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x_o}).$$

Definice 2.14. Prvek $e \in I$ nazveme *neutrální prvek agregační funkce* $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ *na I*, jestliže pro každé $i \in \mathbb{N}, i \leq n$ a každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ takové, že $x_i = e$ platí:

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

[8] Vlastnost symetričnosti agregačních funkcí se v binárních případech často označuje jako komutativita (resp. neutralita či anonymita pro lineární funkce).

Poznámka 2.15. Také v tomto případě narážíme na problém s aritou funkce, který lze vyřešit stejně jako v předchozí poznámce. Pro lineární případ je definice neutrálního prvku uvedena v definici t-normy (viz Definice 1.17.).

Definice 2.16. Prvek $a \in I$ nazveme *anihilátor agregační funkce* $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ *na* I, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$A(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) = a.$$

Poznámka 2.17. Anihilátor se v případě binárních funkcí označuje jako agresivní prvek.

Definice 2.18. Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ a $B : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ jsou agregační funkce na I. Řekneme, že A je menší nebo rovna B (značíme $A \leq B$) (resp. A je větší nebo rovna B (značíme $A \geq B$)), jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$A(\mathbf{x}) \leq B(\mathbf{x});$$

$$\text{resp. } A(\mathbf{x}) \geq B(\mathbf{x}).$$

Poznámka 2.19. Agregační funkce A je menší nebo rovna B, jestliže jsou uspořádané po složkách.

Definice 2.20. Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ je agregační funkce na intervalu I. Řekneme že $A_\top$ je největší (resp. $A_\perp$ je nejmenší) na I, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$A_\top(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } \mathbf{x} = (0, \dots, 0) \\ 1 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

$$\text{resp. } A_\perp(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \mathbf{x} = (1, \dots, 1) \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Věta 2.3. *Nechť* $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ *je agregační funkce na* I. *Pro každé* A *platí:*

$$A_\perp(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n) \leq A_\top(x_1, \dots, x_n).$$

Důkaz. Důkaz plyne přímo z definice 2.20. □

Poznámka 2.21. Některé z již dříve představených agregačních funkcí můžeme tímto způsobem seřadit následovně:

$$A_{\perp}(\mathbf{x}) \leq \prod(\mathbf{x}) \leq MIN(\mathbf{x}) \leq AM(\mathbf{x}) \leq MAX(\mathbf{x}) \leq A_{\top}(\mathbf{x}).$$

Dvojice P_F a P_L, nebo P_F a AM, nebo P_L a AM jsou nesrovnatelné, takže je nemůžeme zahrnout do výše uvedené posloupnosti, ale platí:

$$MIN(\mathbf{x}) \leq P_1(\mathbf{x}) \leq MAX(\mathbf{x}),$$

$$MIN(\mathbf{x}) \leq P_n(\mathbf{x}) \leq MAX(\mathbf{x}).$$

Definice 2.22. Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ je agregační funkce na I. Řekneme že A je *konjunktivní na I*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$0 \leq A(\mathbf{x}) \leq MIN(\mathbf{x}).$$

Definice 2.23. Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ je agregační funkce na I. Řekneme že A je *disjunktivní na I*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$MAX(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{x}) \leq 1.$$

Definice 2.24. Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ je agregační funkce na I. Řekneme že A je *vnitřní na I*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$MIN(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{x}) \leq MAX(\mathbf{x}).$$

Věta 2.4. *Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ je agregační funkce. A je idempotentní, právě tehdy když je vnitřní.*

Důkaz. Nejprve dokážeme platnost implikace ($\Rightarrow$)

A je vnitřní neklesající funkce, platí tedy nerovnosti:

$$\min(x_1,\ldots,x_n) \leq A(x,\ldots,x) \leq \max(x_1,\ldots,x_n).$$

Funkce MIN a MAX jsou idempotentní (tedy $\min(x,\ldots,x) = x$ a $\max(x,\ldots,x) = x$). Nerovnosti tedy můžeme přepsat jako:

$$x \leq A(x,\ldots,x) \leq x.$$

Odtud přímo získáme:

$$A(x, \ldots, x) = x,$$

což je přímo definice idempotence.

Nyní dokážeme platnost implikace ($\Leftarrow$).

Nechť $\min(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ a $\max(x_1, \ldots, x_n) = x_j$. Platí tedy:

$$(x_i, \ldots, x_i) \leq (x_1, \ldots, x_n) \leq (x_j, \ldots, x_j).$$

Z předchozích nerovností plyne:

$$A(x_i, \ldots, x_i) \leq A(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_j, \ldots, x_j).$$

Z předpokladu že A je idempotentní, nám plyne:

$$x_i \leq A(x_1, \ldots, x_n) \leq x_j.$$

Po úpravě:

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, \ldots, x_n);$$

$$MIN(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n) \leq MAX(x_1, \ldots, x_n).$$

Tyto nerovnosti jsou přímo definicí vnitřní funkce. □

Definice 2.25. Nechť $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ a $B : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ jsou agregační funkce na I a $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že *A je distributivní vzhledem k B zleva (resp. zprava)*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí:

$$A(x_1, B(x_2, \ldots, x_n)) = B(A(x_1, x_2), A(x_1, x_3), \ldots, A(x_1, x_n));$$

$$\text{resp. } A(B(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) = B(A(x_1, x_n), A(x_2, x_n), \ldots, A(x_{n-1}, x_n)).$$

Definice 2.26. Nechť $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ a $B : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ jsou agregační funkce na I. Řekneme že *A je distributivní vzhledem k B*, jestliže je distributivní zleva i zprava.

Poznámka 2.27. S vlastností distributivity se často setkáváme v teorii okruhů, kde distributivita násobení vzhledem ke sčítání je axiomem okruhu.

Definice 2.28. Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ je agregační funkce na I a $n \in \mathbb{N}$. Řekneme že A je *autodistributivní na I zleva (resp. zprava)*, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^n$ platí:

$$A(x_1, A(x_2, \dots, x_n)) = A(A(x_1, x_2), A(x_1, x_3), \dots, A(x_1, x_n));$$

$$\text{resp. } A(A(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) = A(A(x_1, x_n), A(x_2, x_n), \dots, A(x_{n-1}, x_n)).$$

Definice 2.29. Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ je agregační funkce na I. Řekneme že A je *autodistributivní na I*, jestliže je autodistributivní zprava i zleva.

Poznámka 2.30. Všimněme si, že autodistributivita je pouze speciální případ distributivity, kde $A = B$.

Definice 2.31. Nechť $A : \langle 0,1\rangle^n \to \langle 0,1\rangle$ je agregační funkce na I a $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že A *je bisymetrická na I*, jestliže pro všechny čtvercové matice $M \in I^{n\times n}$ a každé $x \in I$ platí:

$$A(A(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, A(x_{n1}, \dots, x_{nn})) = A(A(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, A(x_{1n}, \dots, x_{nn})).$$

Poznámka 2.32. Vlastnost bisymetrie nám umožňuje zaměnit pořadí agregace sloupců a řádků, ale pouze u **čtvercových** matic. Také platí, že každá symetrická a asociativní agregační funkce je i bisymetrická (viz [7])

Věta 2.5. *Nechť A je idempotentní a bisymetrická agregační funkce na I, pak A je autodistributivní.*

Důkaz. Jelikož je A bisymetrická, pak pro každé $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \langle 0,1\rangle^4$ platí:

$$A(A(x_{11}, x_{12}), A(x_{21}, x_{22})) = A(A(x_{11}, x_{21}), A(x_{12}, x_{22})).$$

Nyní uvažujme $x_{11} = x_{12}$.

$$A(A(x_{11}, x_{11}), A(x_{21}, x_{22})) = A(A(x_{11}, x_{21}), A(x_{11}, x_{22})).$$

Z toho, že A je idempotentní plyne:

$$A(x_{11}, A(x_{21}, x_{22})) = A(A(x_{11}, x_{21}), A(x_{11}, x_{22})),$$

což je přímo předpis autodistributivity. $\square$

Definice 2.33. Nechť $A : \langle 0, 1\rangle^n \to \langle 0, 1\rangle$ je agregační funkce na I. Řekneme že A je *aditivní* na I, jestliže pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^n$ platí:

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}).$$

3 Vlastnosti agregačních funkcí

V této sekci ukážeme, které agregační funkce mají jaké vlastnosti popřípadě na protipříkladech ukážeme jaké vlastnosti nemají. Důkazy budeme provádět pro binární případy, tedy pro $n = 2$. Ve většině případů by obdobný postup platil i pro n a nebudeme jej tedy uvádět.

3.1 Aritmetický průměr

Věta 3.1. *Nechť AM je aritmetický průměr na I (viz Definice 1.2.), pak platí:*

- **je ryze monotónní**

  Důkaz. Předpokládejme, že platí $(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$.

  Ze zadaných podmínek získáme:

  $$(x_1 < y_1) \wedge (x_2 \leq y_2) \text{ nebo } (x_1 \leq y_1) \wedge (y_1 < y_n).$$

  Bez újmy na obecnosti budeme uvažovat pouze první případ (druhý případ by nastal v případě opačného označení). Nerovnosti sečteme a upravíme:

  $$x_1 + x_2 < y_1 + y_2;$$

  $$\tfrac{x_1+x_2}{2} < \tfrac{y_1+y_2}{2};$$

  $$AM(x_1, x_2) < AM(y_1, y_2).$$

  Tato nerovnost platí pro libovolné $x_i, y_i \in \langle 0, 1 \rangle, i \in \{1, 2\}$ splňující podmínky $(x_i \leq y_i)$ a $(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$.

  Platí tedy implikace:

  $$(x_i \leq y_i) \vee (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow AM(\mathbf{x}) < AM(\mathbf{y}).$$

  □

- **je spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Spojová ryzí monotónnost přímo plyne z ryzí monotónnosti (viz Věta 2.1.). □

- **je senzitivní**

  Důkaz. Vlastnost senzitivity plyne přímo z vlastnosti ryzí monotónnosti (viz Věta 2.2.). □

- **je idempotentní**

  Důkaz. Pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

$$x = \tfrac{2x}{2} = \tfrac{x+x}{2} = AM(x, x).$$

□

- **je symetrická**

  Důkaz. Jelikož sčítání reálných čísel je komutativní, pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

$$x + y = y + x;$$

$$\tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{2} = \tfrac{y}{2} + \tfrac{x}{2};$$

$$\tfrac{x+y}{2} = \tfrac{y+x}{2};$$

$$AM(x, y) = AM(y, x).$$

□

- **není asociativní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že AM je asociativní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1 \rangle^3$ platí:

$$AM(x, AM(y, z)) = AM(AM(x, y), z).$$

  Po dosazení do předpisu z definice 2.2. získáme:

$$AM(x, \tfrac{y+z}{2}) = AM(\tfrac{x+y}{2}, z);$$

$$\frac{x+\frac{y+z}{2}}{2} = \frac{\frac{x+y}{2}+z}{2}.$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x, y, z) = (0.1, 0.2, 0.3)$. Po dosazení získáme:

$$\frac{0.1+\frac{0.2+0.3}{2}}{2} = \frac{\frac{0.1+0.2}{2}+0.3}{2};$$

$$0.175 \neq 0.225.$$

Agregační funkce AM tedy není asociativní. □

- **je spojitá**

Důkaz. Viz graf (Obrázek 1). □

- **nemá neutrální prvek**

Důkaz. Předpokládejme, že AM má neutrální prvek $e \in \langle 0, 1\rangle$. Pak pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

$$AM(x, e) = AM(e, x) = x.$$

Po dosazení do předpisu z definice 2.2. získáme:

$$\frac{x+e}{2} = x.$$

Tato rovnost však platí pouze v případě, kdy $e = x$, což je ve sporu s předpokladem že neutrální prvek je jediný pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$. AM tedy nemá neutrální prvek. □

- **nemá anihilátor**

Důkaz. Předpokládejme, že AM má anihilátor. Pak existuje $a \in \langle 0, 1\rangle$ takové, že pro každou dvojici $(a, x) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$AM(a, x) = AM(x, a) = a.$$

Po dosazení do předpisu z definice 2.2. získáme:

$$\frac{a+x}{2} = a$$

Tato rovnost však nastává pouze v případě $a = x$, což je ve sporu s předpokladem že anihilátor je jediný pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$. AM tedy nemá anihilátor. □

- **není konjunktivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že AM je konjunktivní. Pak pro každé $x = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$0 \leq AM(x, y) \leq MIN(x, y).$$

Po dosazení do předpisu z definice 2.2. získáme:

$$0 \leq \tfrac{x+y}{2} \leq \min(x, y).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.2)$. Po dosazení získáme:

$$0 \leq \tfrac{0.1+0.2}{2} \leq \min(0.1, 0.2);$$

$$0 \leq 0.15 \nleq 0.1.$$

$\square$

- **není disjunktivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že AM je disjunktivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$MAX(x, y) \leq AM(x, y) \leq 1.$$

Po dosazení do předpisu z definice 2.2. získáme:

$$\max(x, y) \leq \tfrac{x+y}{2} \leq 1.$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.2)$. Po dosazení získáme:

$$\max(0.1, 0.2) \leq \tfrac{0.1+0.2}{2} \leq 1;$$

$$0.2 \nleq 0.15 \leq 1.$$

$\square$

- **je vnitřní**

  Důkaz. Tuto vlastnost nám zajišťuje fakt, že AM je idempotentní (viz Věta 2.4.). □

- **je autodistributivní**

  Důkaz. Autodistributivita plyne z idempotence a bisymetrie (viz Věta 2.5.) □

- **je bisymetrická**

  Důkaz. Pro každé $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \langle 0, 1\rangle^4$ platí:

$$AM(AM(x_{11}, x_{12}), AM(x_{21}, x_{22})) = AM(\tfrac{x_{11}+x_{12}}{2}, \tfrac{x_{21}+x_{22}}{2}) = \frac{\frac{x_{11}+x_{12}}{2} + \frac{x_{21}+x_{22}}{2}}{2} =$$

$$= \tfrac{x_{11}+x_{12}}{4} + \tfrac{x_{21}+x_{22}}{4} = \tfrac{x_{11}}{4} + \tfrac{x_{12}}{4} + \tfrac{x_{21}}{4} + \tfrac{x_{22}}{4} = \tfrac{x_{11}}{4} + \tfrac{x_{21}}{4} + \tfrac{x_{12}}{4} + \tfrac{x_{22}}{4} =$$

$$= \tfrac{x_{11}+x_{21}}{4} + \tfrac{x_{12}+x_{22}}{4} = \frac{\frac{x_{11}+x_{21}}{2} + \frac{x_{12}+x_{22}}{2}}{2} = AM(\tfrac{x_{11}+x_{21}}{2}, \tfrac{x_{12}+x_{22}}{2}) =$$

$$= AM(AM(x_{11}, x_{21}), A(x_{12}, x_{22})).$$

  Platí tedy:

$$AM(AM(x_{11}, x_{12}), AM(x_{21}, x_{22})) = AM(AM(x_{11}, x_{21}), A(x_{12}, x_{22})).$$

  AM je tudíž bisymetrická. □

- **je aditivní**

  Důkaz. Pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$AM(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = AM(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \tfrac{x_1+y_1+x_2+y_2}{2} = \tfrac{x_1}{2} + \tfrac{y_1}{2} + \tfrac{x_2}{2} + \tfrac{y_2}{2} =$$

$$= \tfrac{x_1}{2} + \tfrac{x_2}{2} + \tfrac{y_1}{2} + \tfrac{y_2}{2} = \tfrac{x_1+x_2}{2} + \tfrac{y_1+y_2}{2} = AM(\mathbf{x}) + AM(\mathbf{y}).$$

  Platí tedy:

$$AM(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = AM(\mathbf{x}) + AM(\mathbf{y}).$$

  □

3.2 Geometrický průměr

Věta 3.2. *Nechť GM je geometrický průměr na I (viz Definice 1.3.), pak platí:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že GM je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow GM(\mathbf{x}) < GM(\mathbf{y}).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0, 0)$ a $(y_1, y_2) = (0, 0.1)$. Přestože platí:

  $$(0, 0) \leq (0, 0.1) \wedge (0, 0) \neq (0, 0.1),$$

  tak již neplatí:

  $$GM(0, 0) < GM(0, 0.1);$$

  $$(0 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} < (0 \cdot 0.1)^{\frac{1}{2}};$$

  $$0 \not< 0.$$

  GM tedy není ryze monotónní.

  □

- **je spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Nechť $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$, $x_i < y_i$, $i \in \{1, 2\}$. Pak pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ platí:

  $$x_1 \cdot x_2 < y_1 \cdot y_2;$$

  $$(x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}} < (y_1 \cdot y_2)^{\frac{1}{2}};$$

  $$GM(x_1, x_2) < GM(y_1, y_2).$$

  Nerovnosti jsou zachovány, protože se pohybujeme na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Platí tedy:

  $$x_i < y_i \Rightarrow GM(x_1, x_2) < GM(y_1, y_2).$$

  □

- **není senzitivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že GM je senzitivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každé $\lambda \in (0, 1\rangle$ platí:

  $$GM(x, y) \neq GM(x + \lambda, y).$$

  Po dosazení do předpisu z Definice 1.3. získáme:

  $$(x \cdot y)^{\frac{1}{2}} \neq ((x + \lambda) \cdot y)^{\frac{1}{2}}.$$

  Nyní uvažujme hodnoty $\mathbf{x} = (0.1, 0)$ a $\lambda = 0.1$. Po dosazení získáme:

  $$(0.1 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} \neq ((0.1 + 0.1) \cdot 0)^{\frac{1}{2}};$$

  $$0 \neq 0.$$

  GM tedy není senzitivní. □

- **je idempotentní**

  Důkaz. Pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  $$x = \sqrt[2]{x^2} = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = GM(x, x).$$

  □

- **je symetrický**

  Důkaz. Pro každé $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  $$GM(x, y) = (x \cdot y)^{\frac{1}{2}} = x \cdot y = y \cdot x = (y \cdot x)^{\frac{1}{2}} = GM(y, x).$$

  Platí tedy:

  $$GM(x, y) = GM(y, x).$$

  □

- **není asociativní**

  Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

  Předpokládejme, že GM je asociativní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle^3$ platí:

  $$GM(x, GM(y, z)) = GM(GM(x, y), z).$$

  Po dosazení do předpisu z definice 2.3. získáme:

  $$GM(x, (y \cdot z)^{\frac{1}{2}}) = GM((x \cdot y)^{\frac{1}{2}}), y);$$

  $$(x \cdot (y \cdot z)^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}} = ((x \cdot y)^{\frac{1}{2}}) \cdot z)^{\frac{1}{2}}.$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y, z) = (0.1, 0.2, 0.3)$. Po dosazení získáme:

  $$(0.1 \cdot (0.2 \cdot 0.3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = ((0.1 \cdot 0.2)^{\frac{1}{2}} \cdot 0.3)^{\frac{1}{2}};$$

  $$(0.6)^{\frac{1}{4}} = ((0.2)^{\frac{1}{2}} \cdot 0.3)^{\frac{1}{2}};$$

  $$0.88 \neq 0.366.$$

  GM tedy není asociativní. □

- **je spojitý**

  Důkaz. Viz graf (Obrázek 2). □

- **nemá neutrální prvek**

  Důkaz. Předpokládejme, že GM má neutrální prvek. Pak existuje $e \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  $$GM(x, e) = x.$$

  Po dosazení předpisu z definice 2.3. získáme:

  $$(x \cdot e)^{\frac{1}{2}} = x.$$

  Tato rovnost však nastává pouze pro případ kdy $x = e$, což je ve sporu s předpokladem že neutrální prvek je jediný pro všechny $x \in \langle 0, 1\rangle$. GM tedy nemá neutrální prvek. □

- **má anihilátor** $a = 0$

  Důkaz. Pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

  $$0 = x \cdot 0 = (x \cdot 0)^{\frac{1}{2}} = GM(x, 0).$$

  GM tedy má anihilátor $a = 0$. $\square$

- **není konjunktivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že GM je konjunktivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1 \rangle^2$ platí:

  $$0 \leq GM(x, y) \leq \min(x, y);$$

  $$0 \leq (x \cdot y)^{\frac{1}{2}} \leq \min(x, y).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.9)$. Po dosazení získáme:

  $$0 \leq (0.1 \cdot 0.9)^{\frac{1}{2}} \leq \min(0.1, 0.9);$$

  $$0 \leq 0.3 \nleq 0.1.$$

  GM tedy není konjunktivní. $\square$

- **není disjunktivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že GM je disjunktivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1 \rangle^2$ platí:

  $$\max(x, y) \leq GM(x, y) \leq 1;$$

  $$\max(x, y) \leq (x \cdot y)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.2, 0.8)$. Po dosazení získáme:

  $$\max(0.2, 0.8) \leq (0.2 \cdot 0.8)^{\frac{1}{2}} \leq 1;$$

  $$0.8 \nleq 0.4 \leq 1.$$

  GM tedy není disjunktivní. $\square$

- **je vnitřní**

  Důkaz. Tuto vlastnost nám zajišťuje fakt, že GM je idempotentní (viz Věta 2.4.). $\square$

- **je autodistributivní**

  Důkaz. Pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle^3$ platí:

$$GM(x, GM(y, z)) = GM(x, (y \cdot z)^{\frac{1}{2}}) = (x \cdot (y \cdot z)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (x^2 \cdot y \cdot z)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= ((x \cdot y)^{\frac{1}{2}} \cdot (x \cdot z)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = GM((x \cdot y)^{\frac{1}{2}}, (x \cdot z)^{\frac{1}{2}}) = GM(GM(x, y), GM(x, z)).$$

  Platí tedy:

$$GM(x, GM(y, z)) = GM(GM(x, y), GM(x, z)).$$

  GM je tedy autodistributivní zleva. Autodistributivitu zprava bychom dokázali obdobně. $\square$

- **je bisymetrický**

  Důkaz. Pro každé $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \langle 0, 1\rangle^4$ platí:

$$GM(GM(x_{11}, x_{12}), GM(x_{21}, x_{22})) = GM((x_{11} \cdot x_{12})^{\frac{1}{2}}, (x_{21} \cdot x_{22})^{\frac{1}{2}}) =$$

$$((x_{11} \cdot x_{12})^{\frac{1}{2}} \cdot (x_{21} \cdot x_{22})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (x_{11} \cdot x_{12} \cdot x_{21} \cdot x_{22})^{\frac{1}{4}} =$$

$$= (x_{11} \cdot x_{21} \cdot x_{12} \cdot x_{22})^{\frac{1}{4}} = ((x_{11} \cdot x_{21})^{\frac{1}{2}} \cdot (x_{12} \cdot x_{22})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= GM((x_{11} \cdot x_{21})^{\frac{1}{2}}, (x_{12} \cdot x_{22})^{\frac{1}{2}} = GM(GM(x_{11}, x_{21}), GM(x_{12}, x_{22})).$$

  Platí tedy:

$$GM(GM(x_{11}, x_{12}), GM(x_{21}, x_{22})) = GM(GM(x_{11}, x_{21}), GM(x_{12}, x_{22})).$$

  $\square$

- **není aditivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že GM je aditivní, pak pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$GM(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = GM(\mathbf{x}) + GM(\mathbf{y}).$$

Po dosazení do předpisu z definice 2.3. získáme:

$$GM(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = GM(x_1, x_2) + GM(y_1, y_2);$$

$$((x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2))^{\frac{1}{2}} = (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}} + (y_1 \cdot y_2)^{\frac{1}{2}};$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.3, 0.4)$, Po dosazení získáme:

$$(0.4 \cdot 0.6)^{\frac{1}{2}} = 0.2^{\frac{1}{2}} + 0.12^{\frac{1}{2}};$$

$$0.24^{\frac{1}{2}} = 0.2^{\frac{1}{2}} + 0.12^{\frac{1}{2}}.$$

$$0.49 \neq 0.79$$

□

3.3 Vážený aritmetický průměr

Věta 3.3. *Nechť $WAM_{\mathbf{v}}$ je vážený aritmetický průměr na I (viz Definice 1.4.), pak platí:*

- **je ryze monotónní**

Důkaz. Nechť pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každý vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2), v_1 + v_2 = 1$ platí:

$$(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

$$(x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 < y_2).$$

Tyto nerovnosti sečteme (druhý případ by jsme získali opačným označením), a vynásobíme vektorem $v = (v_1, v_2)$:

$$x_1 + x_2 < y_1 + y_2;$$

$$v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 < v_1 \cdot y_1 + v_2 \cdot y_2;$$

$$\sum_{i=1}^{2} v_i x_i < \sum_{i=1}^{2} v_i y_i;$$

$$WAM_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) < WAM_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}).$$

Platí tedy:

$$(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow WAM_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) < WAM_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}).$$

□

- **je spojově ryze monotónní**

Důkaz. Spojová ryzí monotónnost přímo plyne z ryzí monotónnosti (viz Věta 2.1.). Ryzí monotónnost je dokázána výše. □

- **je senzitivní**

Důkaz. Senzitivita přímo plyne z ryzí monotónnosti (viz Věta 2.2.). Ryzí monotónnost je dokázána výše. □

- **je idempotentní**

Důkaz. Nechť $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \langle 0, 1\rangle^2, v_1 + v_2 = 1$. Pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$x = 1 \cdot x = (v_1 + v_2) \cdot x = v_1 \cdot x + v_2 \cdot x = WAM_{\mathbf{v}}(x, x).$$

□

- **není symetrický**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že $WAM_{\mathbf{v}}$ je symetrická a $v \in \langle 0, 1\rangle^2, v_1 + v_2 = 1$. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$WAM_{\mathbf{v}}(x, y) = WAM_{\mathbf{v}}(y, x).$$

Po dosazení z předpisu definice 1.4. získáme:

$$v_1 \cdot x + v_2 \cdot y = v_1 \cdot y + v_2 \cdot x.$$

Uvažujme nyní hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.2)$ a $(v_1, v_2) = (0.1, 0.9)$. Po dosazení získáme:

$$0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.9 = 0.1 \cdot 0.2 + 0.9 \cdot 0.1;$$

$$0.19 \neq 0.11.$$

Agregační funkce $WAM_{\mathbf{v}}$ tedy není symetrická.

□

- **není asociativní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že $WAM_{\mathbf{v}}$ je asociativní a $\mathbf{v} \in \langle 0, 1 \rangle^2, v_1 + v_2 = 1$. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1 \rangle^3$ platí:

$$WAM_{\mathbf{v}}(x, WAM_{\mathbf{v}}(y, z)) = WAM_{\mathbf{v}}(WAM_{\mathbf{v}}(x, y), z).$$

Po dosazení do předpisu z definice 2.4. získáme:

$$WAM_{\mathbf{v}}(x, v_1 \cdot y + v_2 \cdot z) = WAM_{\mathbf{v}}(v_1 \cdot x + v_2 \cdot y, z);$$

$$v_1 \cdot x + v_2 \cdot (v_1 \cdot y + v_2 \cdot z) = v_1 \cdot (v_1 \cdot x + v_2 \cdot y) + v_2 \cdot z.$$

Nyní uvažujme hodnoty $\mathbf{v} = (0.1, 0.9)$ a $\mathbf{x} = (0.3, 0.5, 0.7)$. Po dosazení získáme:

$$0.1 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot (0.1 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.7) = 0.1 \cdot (0.1 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.5) + 0.9 \cdot 0.7;$$

$$0.642 \neq 0.678.$$

Agregační funkce $WAM_{\mathbf{v}}$ tedy není asociativní. □

- **je spojitý**

Důkaz. Viz graf. □

- **nemá neutrální prvek**

  Důkaz. Předpokládejme, že $WAM_{\mathbf{v}}$ má neutrální prvek $e \in \langle 0,1\rangle$, $\mathbf{v} \in \langle 0,1\rangle^2, v_1 + v_2 = 1$. Pak pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$ platí:

  $$WAM_{\mathbf{v}}(x,e) = x.$$

  Po dosazení do předpisu z definice 2.4. získáme:

  $$v_1 \cdot x + v_2 \cdot e = x.$$

  Tato rovnost však nastává pouze v případě, kdy $\mathbf{v} = (1,0)$ a v tomto případě je e libovolné což je také spor. $WAM_{\mathbf{v}}$ tedy nemá neutrální prvek. V případě, kdy $\mathbf{x} = (e,x)$ je postup obdobný. □

- **nemá anihilátor**

  Důkaz. Předpokládejme, že $WAM_{\mathbf{v}}$ má anihilátor $a \in \langle 0,1\rangle, \mathbf{v} \in \langle 0,1\rangle^2$, $v_1 + v_2 = 1$. Pak pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$ platí:

  $$WAM_{\mathbf{v}}(x,a) = a.$$

  Po dosazení do předpisu z definice 2.4. získáme:

  $$v_1 \cdot x + v_2 \cdot a = a.$$

  Tato rovnost však nastává pouze v případě, kdy $\mathbf{v} = (0,1)$. $WAM_{\mathbf{v}}$ tedy nemá anihilátor. V případě, kdy $\mathbf{x} = (a,x)$ je postup obdobný. □

- **není konjunktivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

  Předpokládejme, že $WAM_{\mathbf{v}}$ je konjunktivní, $\mathbf{v} \in \langle 0,1\rangle^2, v_1 + v_2 = 1$. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x,y) \in \langle 0,1\rangle^2$ platí:

  $$0 \leq WAM_{\mathbf{v}}(x,y) \leq \min.$$

  Po dosazení do předpisu z definice 2.4. získáme:

  $$0 \leq v_1 \cdot x + v_2 \cdot y \leq \min(x,y).$$

Nyní uvažujme $\mathbf{v} = (0.1, 0.9)$ a $\mathbf{x} = (0.1, 0.2)$:

$$0 \leq 0.1 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.2 \leq \min(0.1, 0.2);$$

$$0 \leq 0.19 \nleq 0.1.$$

$\square$

- **není disjunktivní**

Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

Předpokládejme, že $WAM_{\mathbf{v}}$ je disjunktivní, $\mathbf{v} \in \langle 0, 1\rangle^2, v_1 + v_2 = 1$. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$\max(x, y) \leq WAM_{\mathbf{v}}(x, y) \leq 1.$$

Po dosazení do předpisu z definice 1.4. získáme:

$$\max(x, y) \leq v_1 \cdot x + v_2 \cdot y \leq 1.$$

Nyní uvažujme $\mathbf{v} = (0.5, 0.5)$ a $\mathbf{x} = (0.1, 0.2)$:

$$\max(0.1, 0.2) \leq 0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.2 \leq 1;$$

$$0.2 \nleq 0.15 \leq 0.1.$$

$\square$

- **je vnitřní**

Důkaz. To že $WAM_{\mathbf{v}}$ je vnitřní plyne z toho, že je idempotentní (viz Věta 2.4.). $\square$

- **je autodistributivní**

Důkaz. Vlastnost autodistributivity plyne z toho, že WAM je idempotentní a bisymetrický (viz Věta 2.5.). $\square$

- **je bisymetrický**

  Důkaz. Nechť $\mathbf{v} \in \langle 0,1\rangle^2, v_1 + v_2 = 1$. Pro každé $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^4$ platí:

$$WAM_\mathbf{v}(WAM_\mathbf{v}(x_1,x_2),WAM_\mathbf{v}(x_3,x_4)) = WAM_\mathbf{v}(v_1{\cdot}x_1 + v_2{\cdot}x_2, v_1{\cdot}x_3 + v_2{\cdot}x_4) =$$

$$= v_1{\cdot}(v_1{\cdot}x_1 + v_2{\cdot}x_2) + v_2{\cdot}(v_1{\cdot}x_3 + v_2{\cdot}x_4) = v_1^2{\cdot}x_1 + v_1{\cdot}v_2{\cdot}x_2 + v_2{\cdot}v_1{\cdot}x_3 + v_2^2{\cdot}x_4 =$$

$$= v_1^2{\cdot}x_1 + v_1{\cdot}v_2{\cdot}x_3 + v_2{\cdot}v_1{\cdot}x_2 + v_2^2{\cdot}x_4 = v_1{\cdot}(v_1{\cdot}x_1 + v_2{\cdot}x_3) + v_2{\cdot}(v_1{\cdot}x_2 + v_2{\cdot}x_4) =$$

$$= WAM_\mathbf{v}(v_1{\cdot}x_1 + v_2{\cdot}x_3, v_1{\cdot}x_2 + v_2{\cdot}x_4) = WAM_\mathbf{v}(WAM_\mathbf{v}(x_1,x_3),WAM_\mathbf{v}(x_2,x_4)).$$

  Platí tedy:

$$WAM_\mathbf{v}(WAM_\mathbf{v}(x_1,x_2),WAM_\mathbf{v}(x_3,x_4)) = WAM_\mathbf{v}(WAM_\mathbf{v}(x_1,x_3),WAM_\mathbf{v}(x_2,x_4)).$$

  □

- **je aditivní**

  Důkaz. Nechť $\mathbf{x} = (x_1,x_2), \mathbf{y} = (y_1,y_2), \mathbf{v} = (v_1,v_2) \in \langle 0,1\rangle^2$. Pak platí:

$$WAM_\mathbf{v}(\mathbf{x}) + WAM_\mathbf{v}(\mathbf{v}) = v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_1 \cdot y_1 + v_2 \cdot y_2 =$$

$$= v_1(x_1 + y_1) + v_2(x_2 + y_2) = WAM_\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

  □

3.4 Uspořádaný vážený průměr

Poznámka 3.1. Vzhledem k tomu, že jediným rozdílem mezi váženým aritmetickým průměrem a uspořádaným váženým průměrem je uspořádanost argumentů, je zřejmé že všechny vlastnosti, které má $WAM_\mathbf{v}$, bude mít také $OWA_\mathbf{v}$. Nebudeme je tedy dokazovat znovu a zaměříme se pouze na vlastnosti, které $WAM_\mathbf{v}$ nemá. V případě vlastností, které nemá ani jeden z vážených průměrů a v případě protipříkladu pro $WAM_\mathbf{v}$ jsme využili již uspořádaný vektor $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^2$ nebudeme jej uvádět znovu.

Věta 3.4. *Nechť $OWA_\mathbf{v}$ je uspořádaný vážený průměr na I (viz Definice 1.7.), pak platí:*

- **je ryze monotónní**

  Důkaz. Viz $WAM_\mathbf{v}$. □

- **je spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Viz $WAM_{\mathbf{v}}$. $\square$

- **je senzitivní**

  Důkaz. Viz $WAM_{\mathbf{v}}$. $\square$

- **je idempotentní**

  Důkaz. Viz $WAM_{\mathbf{v}}$. $\square$

- **je symetrický**

  Důkaz. Symetrie plyne přímo z toho, že zadaný vektor $\mathbf{x} \in \langle 0, 1\rangle^2$ z definice 1.7. nejprve uspořádáme, tedy pořadí argumentů původního vektoru je libovolné. $\square$

- **není asociativní**

  Důkaz. Protipříklad viz asociativita $WAM_{\mathbf{v}}$. $\square$

- **je spojitá**

  Důkaz. Viz $WAM_{\mathbf{v}}$. $\square$

- **nemá neutrální prvek**

  Důkaz. Předpokládejme, že $OWA_{\mathbf{v}}$ má neutrální prvek $e \in \langle 0, 1\rangle$,$\mathbf{v} \in \langle 0, 1\rangle^2$, $v_1 + v_2 = 1$. Pak pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  $$OWA_{\mathbf{v}}(x, e) = x.$$

  V případě, že $x \leq e$, tato rovnost platí pouze pro $v = (1, 0)$ a v opačném případě tato rovnost platí pouze pro vektor $v = (0, 1)$. $OWA_{\mathbf{v}}$ tedy nemá neutrální prvek. Pro $\mathbf{x} = (e, x)$ je postup obdobný.

□

- **nemá anihilátor**

  Důkaz. Předpokládejme, že $OWA_{\mathbf{v}}$ má anihilátor $a \in \langle 0,1\rangle$, $\mathbf{v} \in \langle 0,1\rangle^2$, $v_1 + v_2 = 1$. Pak pro každé $x \in \langle 0,1\rangle$ platí:

  $$OWA_{\mathbf{v}}(x,a) = a.$$

  V případě, že $x \leq a$, tato rovnost platí pouze pro $v = (0,1)$ a v opačném případě tato rovnost platí pouze pro vektor $v = (1,0)$. $OWA_{\mathbf{v}}$ tedy nemá neutrální prvek. Pro $\mathbf{x} = (e,x)$ je postup obdobný. □

- **není konjunktivní**

  Důkaz. Protipříklad viz konjunktivita $WAM_{\mathbf{v}}$. □

- **není disjunktivní**

  Důkaz. Protipříklad viz disjunktivita $WAM_{\mathbf{v}}$. □

- **je vnitřní**

  Důkaz. To že je $OWA_{\mathbf{v}}$ vnitřní plyne z toho, že je idempotentní (viz Věta 2.4.). □

- **je autodistributivní**

  Důkaz. Vlastnost autodistributivity plyne z toho, že $WAM_{\mathbf{v}}$ je idempotentní a bisymetrický (viz Věta 2.5.). □

- **je bisymetrický**

  Důkaz. Viz $WAM_{\mathbf{v}}$. □

- **je aditivní**

  Důkaz. Viz $WAM_{\mathbf{v}}$. □

3.5 Maximum

Věta 3.5. *Nechť MAX je maximum na I (viz Definice 1.10.), pak platí* [9]*:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu. Je-li MAX ryze monotónní, pak pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow MAX(\mathbf{x}) < MAX(\mathbf{y}).$$

  Uvažujme $(x_1, x_2) = (0.1, 0.3)$ a $(y_1, y_2) = (0.2, 0.3)$. Tyto hodnoty splňují podmínku $(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$, ale po dosazení získáme:

  $$MAX(x_1, x_2) < MAX(y_1, y_2);$$

  $$MAX(0.1, 0.3) < MAX(0.2, 0.3);$$

  $$0.3 \not< 0.3.$$

  MAX tedy není ryze monotónní. □

- **je spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^2$ takové, že $x_i < y_i$ pro každé $i \in [n]$, platí:

  1. $x_1 < x_2 \vee y_1 < y_2:$

     $$MAX(x_1, x_2) = x_2 < y_2 = MAX(y_1, y_2).$$

     Tato nerovnost platí díky podmínce $x_i < y_i, \forall i \in \{1, 2\}$.

  2. $x_1 < x_2 \vee y_1 > y_2:$

     $$MAX(x_1, x_2) = x_2 < y_1 = MAX(y_1, y_2).$$

     Tato nerovnost platí díky podmínce $x_2 < y_2 < y_1$.

[9] Pro $n = 2$ agregační funkce MAX odpovídá maximální t-conormě, proto budeme využívat dále poznatků o t-conormách. Vlastnosti maximální t-conormy nebudeme dokazovat zvlášť.

3. $x_1 > x_2 \vee y_1 < y_2$:

$$MAX(x_1, x_2) = x_1 < y_2 = MAX(y_1, y_2).$$

Tato nerovnost platí díky podmínce $x_1 < x_2 < y_2$

4. $x_1 > x_2 \vee y_1 > y_2$:

$$MAX(x_1, x_2) = x_1 < y_1 = MAX(y_1, y_2).$$

Tato nerovnost platí díky podmínce $x_i < y_i, \forall i \in \{1, 2\}$.

Platí tedy:

$$x_i < y_i \Rightarrow MAX(x_1, x_2) < MAX(y_1, y_2).$$

□

- **není senzitivní**

Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

Předpokládejme,že MAX je senzitivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každé $\lambda \neq 0, \mathbf{x} + (0, \lambda) \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

$$MAX(\mathbf{x}) \neq MAX(\mathbf{x} + (0, \lambda)).$$

Po dosazení do předpisu z definice 2.6. získáme:

$$\max(x_1, x_2) \neq \max(x_1, x_2 + \lambda).$$

Uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.3, 0.1)$ a $\lambda = 0.1$. Po dosazení získáme:

$$\max(0.3, 0.1) \neq \max(0.3, 0.2);$$

$$0.3 \neq 0.3.$$

Je nutné uvažovat i vektor $(\lambda, 0)$, avšak sporu bychom dosáhli analogicky.

□

- **je idempotentní**

  Důkaz. Pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  $$x = \max(x, x) = MAX(x, x).$$

  $\square$

- **je symetrické**

  Důkaz. Symetrie plyne z toho, že MAX je t-conormou (pro $n = 2$). $\square$

- **je asociativní**

  Důkaz. Asociativita plyne z toho, že MAX je t-conormou (pro $n = 2$). $\square$

- **je spojité**

  Důkaz. Viz graf (Obrázek 4). $\square$

- **má neutrální prvek** $e = 0$

  Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = 0$ plyne z toho, že MAX je t-conormou (pro $n = 2$). $\square$

- **má anihilátor** $a = 1$

  Důkaz. Existence anihilátoru $a = 1$ plyne z toho, že MAX je t-conormou (pro $n = 2$). $\square$

- **není konjunktivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že MAX je konjunktivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  $$0 \leq MAX(x, y) \leq \min(x, y).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.2)$. Po dosazení získáme:

  $$0 \leq 0.2 \nleq 0.1$$

  MAX tedy není konjunktivní. $\square$

- **je disjunktivní**

  Důkaz. Tato vlastnost plyne z toho, že MAX je t-conormou (pro $n = 2$). □

- **je vnitřní**

  Důkaz. Důkaz plyne z toho, že MAX je nejmenší t-conorma a současně největší vnitřní agregační funkce. □

- **je autodistributivní**

  Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $x \leq y \leq z$. Pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle^3$ platí:

  $$MAX(x, MAX(y, z)) = MAX(x, z) = z =$$

  $$= MAX(y, z) = MAX(MAX(x, y, MAX(x, z)).$$

  □

- **je bisymetrické**

  Důkaz. Při hledání největšího prvku v matici, je postup libovolný pokud zahrnuje veškeré členy. Nezáleží tedy zda porovnáváme prvky nejprve ve sloupcích či řádcích. □

- **není aditivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že MAX je aditivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$MAX(\mathbf{x}) + MAX(\mathbf{y}) = MAX(\mathbf{x} + \mathbf{y});$$

  $$\max(x_1, x_2) + \max(y_1, y_2) = \max(x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.3)$ a $(y_1, y_2) = (0.4, 0.2)$. Po dosazení hodnot získáme:

  $$\max(0.1, 0.3) + \max(0.4, 0.2) = \max(0.5, 0.5);$$

  $$0.3 \neq 0.5.$$

  MAX tedy není aditivní. □

3.6 Minimum

Věta 3.6. *Nechť MIN je minimum na I (viz Definice 1.11.), pak platí* [10]*:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

  Předpokládejme, že MIN je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1 \rangle^2$ platí:

  $$(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow MIN(\mathbf{x}) < MIN(\mathbf{y}).$$

  Uvažujme $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.1, 0.3)$. Tyto hodnoty sice splňují podmínku $(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$, ale po dosazení získáme:

  $$MIN(x_1, x_2) < MIN(y_1, y_2);$$

  $$MIN(0.1, 0.2) < MIN(0.1, 0.3);$$

  $$0.1 \not< 0.1.$$

  MIN tedy není ryze monotónní. □

- **je spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Nechť platí $x_i < y_i$. Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1 \rangle^2$ platí:

  1. $x_1 < x_2 \vee y_1 < y_2$:

     $$MIN(x_1, x_2) = x_1 < y_1 = MIN(y_1, y_2).$$

     Tato nerovnost platí díky podmínce $x_i < y_i, \forall i \in \{1, 2\}$.
  2. $x_1 < x_2 \vee y_1 > y_2$:

     $$MIN(x_1, x_2) = x_1 < y_2 = MIN(y_1, y_2).$$

     Tato nerovnost platí díky podmínce $x_1 < x_2 < y_2$.

[10] Pro $n = 2$ agregační funkce MIN odpovídá minimální t-normě, proto budeme využívat dále poznatků o t-normách. Vlastnosti minimální t-normy nebudeme dokazovat zvlášť.

3. $x_1 > x_2 \vee y_1 < y_2$:

$$MIN(x_1, x_2) = x_2 < y_1 = MIN(y_1, y_2).$$

Tato nerovnost platí díky podmínce $x_2 < x_1 < y_1$.

4. $x_1 > x_2 \vee y_1 > y_2$:

$$MIN(x_1, x_2) = x_2 < y_2 = MIN(y_1, y_2).$$

Tato nerovnost platí díky podmínce $x_i < y_i, \forall i \in \{1, 2\}$.

Platí tedy:

$$x_i < y_i \Rightarrow MIN(\mathbf{x}) < MIN(\mathbf{y}).$$

□

- **není senzitivní**

Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

Předpokládejme, že MIN je senzitivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každé $\lambda \neq 0, x + (0, \lambda) \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

$$MIN(\mathbf{x}) \neq MIN(\mathbf{x} + (0, \lambda)).$$

Uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.3)$ a $\lambda = 0.1$. Po dosazení získáme:

$$MIN(0.1, 0.3) \neq MIN((0.1, 0.3) + (0, 0.1));$$

$$MIN(0.1, 0.3) \neq MIN(0.1, 0.4);$$

$$\min(0.1, 0.3) \neq \min(0.1, 0.4);$$

$$0.1 \neq 0.1.$$

Je nutné uvažovat i vektor $(\lambda, 0)$, avšak sporu bychom dosáhli analogicky.

□

- **je idempotentní**

  Důkaz. Pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

  $$x = \min(x, x) = MIN(x, x).$$

  □

- **je symetrické**

  Důkaz. Symetrie plyne z toho, že MIN je t-normou (pro $n = 2$). □

- **je asociativní**

  Důkaz. Asociativita plyne z toho, že je MIN t-normou (pro $n = 2$). □

- **je spojité**

  Důkaz. Viz graf (Obrázek 7). □

- **má neutrální prvek** $e = 1$

  Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = 1$ plyne z toho, že MIN je t-normou (pro $n = 2$). □

- **má anihilátor** $a = 0$

  Důkaz. Existence anihilátoru $a = 0$ plyne z toho, že MIN je t-normou (pro $n = 2$). □

- **je konjunktivní**

  Důkaz. Vlastnost konjunktivity plyne z toho, že MIN je t-normou (pro $n = 2$). □

- **není disjunktivní**

  Důkaz. To, že MIN není disjunktivní plyne z toho, že MIN je t-normou (pro $n = 2$). □

- **je vnitřní**

Důkaz. Důkaz plyne z toho, že MIN je největší t-norma a nejmenší vnitřní agregační funkce. □

- **je autodistributivní**

Důkaz. Nechť $x \leq y \leq z$. Pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle^3$ platí:

$$MIN(x, MIN(y, z)) = MIN(x, y) = x = MIN(x, z) =$$

$$= MIN(MIN(x, y, MIN(x, z)).$$

□

- **je bisymetrické**

Důkaz. Důkaz plyne z principu duality MAX a MIN. □

- **není aditivní**

Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

Předpokládejme, že MIN je aditivní. Pak pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$MIN(\mathbf{x}) + MIN(\mathbf{y}) = MIN(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.2, 0.1)$. Po dosazení získáme:

$$MIN(0.1, 0.2) + MIN(0.2, 0.1) = MIN(0.1 + 0.2, 0.2 + 0.1);$$

$$\min(0.1, 0.2) + \min(0.2, 0.1) = \min(0.3, 0.3);$$

$$0.1 + 0.1 = 0.3;$$

$$0.2 \neq 0.3.$$

□

3.7 Projekce

Věta 3.7. *Nechť P_k je projekce k-té souřadnice na I (viz Definice 1.14.), pak platí:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

  Předpokládejme, že P_k je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$(x_i \leq y_i \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow P_k(\mathbf{x}) < P_k(\mathbf{y}).$$

Nyní uvažujme hodnoty $k = 1, (x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.1, 0.3)$. Po dosazení získáme:

$$P_1(0.1, 0.2) < P_1(0.1, 0.3);$$

$$0.1 \not< 0.1.$$

□

Poznámka 3.2. Připomeňme si, že P_1 odpovídá funkci MIN a P_n (v našem případě P_2) odpovídá funkci MAX. Jelikož ani MAX ani MIN nejsou ryze monotónní, tak ani P_1 ani P_2 nemůžou být ryze monotónní. Pokud bychom uvažovali vyšší dimenzi, pak vždy můžeme najít protipříklad takový, kdy se budou oba vektory rovnat v k-té souřadnici a ostatní souřadnice budou libovolné, ne však totožné.

- **je spojově ryze monotónní**

Důkaz. Triviální. □

- **není senzitivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že P_k je senzitivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každé $\lambda \in (0, 1\rangle$ platí:

$$P_k(x, y) \neq P_k(x + \lambda, y).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.2), k = 2$ a $\lambda = 0.3$. Po dosazení získáme:

$$P_2(0.1, 0.2) \neq P_2(0.4, 0.2);$$

$$0.2 \neq 0.2$$

P_k tedy není senzitivní. Důkaz pro vektor $(0, \lambda)$ je obdobný. □

- **je idempotentní**

Důkaz. Triviální. □

- **není symetrická**

  Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu. Předpokládejme, že P_k je symetrická. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$P_k(x, y) = P_k(y, x).$$

  Uvažujme $(x, y) = (0.1, 0.2)$ a $k = 1$.

  $$P_1(0.1, 0.2) = 0.1 \neq 0.2 = P_1(0.2, 0.1).$$

  □

- **je asociativní**

  Důkaz. Pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle^3$ platí:

  1. $k = 1$

  $$P_1(x, P_1(y, z)) = P_1(P_1(x, y), z);$$

  $$P_1(x, y) = P_1(x, z) = x.$$

  2. $k = 2$

  $$P_2(x, P_2(y, z)) = P_2(P_2(x, y), z);$$

  $$P_2(x, z) = P_2(y, z) = z.$$

  □

- **je spojitá**

  Důkaz. Viz graf (Obrázky 5 a 6). □

- **nemá neutrální prvek**

  Důkaz. Předpokládejme,že P_k má neutrální prvek. Pak existuje $e \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  $$P_k(x, e) = P_k(e, x) = x.$$

  Při volbě $k = 2$ tato rovnost nastává pouze pro případ $x = e$, což je ve sporu s předpokladem, že e je jediné pro libovolné $x \in \langle 0, 1\rangle$. P_k tedy nemá neutrální prvek. Při volbě $k = 1$ by byl postup analogický. □

- **nemá anihilátor**

  Důkaz. Předpokládejme, že P_k má anihilátor. Pak existuje $a \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  $$P_k(x, a) = P_k(a, x) = a.$$

  Při volbě $k = 1$ tato rovnost nastává pouze pro případ $x = a$, což je ve sporu s předpokladem, že a je jediné pro libovolné $x \in \langle 0, 1\rangle$. P_k tedy nemá anihilátor. Pro volbu $k = 2$ by byl postup analogický. □

- **není konjunktivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že P_k je konjunktivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$0 \leq P_k(\mathbf{x}) \leq MIN(\mathbf{x}).$$

  Uvažujme $k = 1$ a $(x, y) = (0.2, 0.1)$. Pak platí:

  $$0 \leq 0.2 \nleq 0.1.$$

  □

- **není disjunktivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že P_k je disjunktivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$MAX(\mathbf{x}) \leq P_k(\mathbf{x}) \leq 1.$$

  Nyní uvažujme $k = 1$ a $(x, y) = (0.1, 0.2)$. Pak platí:

  $$0.2 \nleq 0.1 \leq 1.$$

  $\square$

- **je vnitřní**

  Důkaz. To, že je P_k vnitřní, plyne přímo z toho, že je idempotentní (viz věta 2.4.). $\square$

- **je autodistributivní**

  Důkaz. Pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle$ platí:

  1. $k = 1:$

     $$P_1(x, P_1(y, z)) = P_1(x, y) = x = P_1(x, x) = P_1(P_1(x, y), P_1(x, z))$$

  2. $k = 2:$

     $$P_2(x, P_2(y, z)) = P_2(x, z) = z = P_1(y, z) = P_2(P_2(x, y), P_2(x, z))$$

  Platí tedy:

  $$P_k(x, P_k(y, z)) = P_k(P_k(x, y), P_k(x, z)).$$

  Autodistributivitu zprava bychom dokázali analogicky. $\square$

- **je bisymetrická**

Důkaz. Pro každé $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \langle 0, 1\rangle^4$ platí:

1. $k = 1$

$$P_1(P_1(x_{11}, x_{12}), P_1(x_{21}, x_{22})) = P_1(x_{11}, x_{21}) =$$

$$= x_{11} = P_1(x_{11}, x_{12}) = P_1(P_1(x_{11}, x_{21}), P_1(x_{21}, x_{22})).$$

2. $k = 2$

$$P_2(P_2(x_{11}, x_{12}), P_2(x_{21}, x_{22})) = P_2(x_{12}, x_{22}) =$$

$$= x_{22} = P_2(x_{21}, x_{22}) = P_2(P_2(x_{11}, x_{21}), P_2(x_{12}, x_{22})).$$

Platí tedy:

$$P_k(P_k(x_{11}, x_{12}), P_k(x_{21}, x_{22})) = P_k(P_k(x_{11}, x_{21}), P_k(x_{12}, x_{22})).$$

□

- **je aditivní**

Důkaz. Pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

1. $k = 1$

$$P_1(x_1, x_2) + P_1(y_1, y_2) = x_1 + y_1 = P_1(x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

2. $k = 2$

$$P_2(x_1, x_2) + P_2(y_1, y_2) = x_2 + y_2 = P_2(x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Platí tedy:

$$P_k(\mathbf{x}) + P_k(\mathbf{y}) = P_k(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

□

3.8 Uspořádaná projekce

Vzhledem k tomu, že jediným rozdílem mezi projekcí a uspořádanou projekcí je uspořádanost argumentů, je zřejmé, že všechny vlastnosti, které má P_k, bude mít také $P_{(k)}$. Nebudeme je tedy dokazovat znovu a zaměříme se pouze na vlastnosti, které P_k nemá. V případě vlastností, které nemá ani jedna z projekcí a v protipříkladu pro P_k jsme využili již uspořádaný vektor $\mathbf{x} \in \langle 0,1 \rangle^2$ nebudeme jej uvádět znovu.

Věta 3.8. *Nechť $P_{(k)}$ je uspořádaná projekce na I (viz Definice 1.15.), pak platí:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Protipříklad viz P_k. □

- **je spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Triviální. □

- **není senzitivní**

  Důkaz. Protipříklad viz P_k. □

- **je idempotentní**

  Důkaz. Triviální. □

- **je symetrická**

  Důkaz. Symetrie plyne z toho, že vektor $\mathbf{x} \in \langle 0,1 \rangle^2$ nejprve uspořádáme. Výsledek tedy není závislý na pořadí argumentů. □

- **je asociativní**

  Důkaz. Důkaz viz P_k. □

- **je spojitá**

  Důkaz. Viz graf projekce (Obrázky 5 a 6). □

- **nemá neutrální prvek**

  Důkaz. Důkaz viz P_k. □

- **nemá anihilátor**

  Důkaz. Důkaz viz P_k. □

- **není konjunktivní**

  Důkaz. Protipříklad viz P_k. □

- **není disjunktivní**

  Důkaz. Protipříklad viz P_k. □

- **je vnitřní**

  Důkaz. To, že je $P_{(k)}$ vnitřní, plyne z toho, že je idempotentní (viz Věta 2.4.). □

- **je autodistributivní**

  Důkaz. Důkaz viz P_k. □

- **je bisymetrická**

  Důkaz. Důkaz viz P_k. □

- **je aditivní**

  Důkaz. Důkaz viz P_k. □

3.9 Součinová t-norma

Věta 3.9. *Nechť* $T_{\prod}$ *je součinová t-norma na* I *(viz Definice 1.20.), pak platí:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že $T_{\prod}$ je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:
  $$(x_i \leq y_i) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow T_{\prod}(\mathbf{x}) < T_{\prod}(\mathbf{y}).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0, 0)$ a $(y_1, y_2) = (0, 0.1)$. Po dosazení získáme:
  $$T_{\prod}(x_1, x_2) < T_{\prod}(y_1, y_2);$$
  $$T_{\prod}(0, 0) < T_{\prod}(0, 0.1);$$
  $$0 \nless 0.$$
  □

- **je spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Nechť $x_i < y_i$, pro každé $i \in \{1, 2\}$. Pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  Ze zadaných podmínek získáme nerovnosti (opačné nerovnosti bychom získali v případě opačného označení):
  $$x_1 < y_1 \vee x_2 < y_2.$$

  Po vynásobení těchto nerovnic získáme:
  $$x_1 \cdot x_2 < y_1 \cdot y_2.$$

  Tento krok můžeme provézt díky podmínce $x_i < y_i$, která nám zabezpečuje, že $y_1 \cdot y_2 \neq 0$.
  $$T_{\prod}(x_1, x_2) < T_{\prod}(y_1, y_2).$$

  Platí tedy:
  $$x_i < y_i \Rightarrow T_{\prod}(\mathbf{x}) < T_{\prod}(\mathbf{y}).$$
  □

- **není senzitivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že $T_{\prod}$ je senzitivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každé $\lambda \in (0, 1\rangle$ platí:

$$T_{\prod}(x, y) \neq T_{\prod}(x + \lambda, y).$$

Po dosazení do předpisu z Definice 1.32. získáme:

$$x \cdot y \neq (x + \lambda) \cdot y.$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0)$ a $\lambda = 0.1$. Po dosazení získáme:

$$0.1 \cdot 0 \neq (0.1 + 0.1) \cdot 0;$$

$$0 \neq 0.$$

$T_{\prod}$ tedy není senzitivní. □

- **není idempotentní**

Důkaz. To, že $T_{\prod}$ není idempotentní plyne z toho, že $T_{\prod}$ je t-normou a jediná vnitřní t-norma je minimum (viz Věta 1.1.). □

- **je symetrická**

Důkaz. Symetrie přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **je asociativní**

Důkaz. Asociativita přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **je spojitá**

Důkaz. Spojitost plyne přímo z grafu (viz Obrázek 9). □

- **má neutrální prvek** $e = 1$

  Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = 1$ přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **má anihilátor** $a = 0$

  Důkaz. Existence anihilátoru $a = 0$ přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **je konjunktivní**

  Důkaz. Vlastnost konjunktivity přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **není disjunktivní**

  Důkaz. To, že $T_\prod$ není disjunktivní plyne z toho, že je konjunktivní. □

- **není vnitřní**

  Důkaz. To, že $T_\prod$ není vnitřní plyne z toho, že je konjunktivní a není rovna minimu. □

- **není autodistributivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

  Předpokládejme, že $T_\prod$ je autodistributivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle^3$ platí:

  $$T_\prod(x, T_\prod(y, z)) = T_\prod(T_\prod(x, y), T_\prod(x, z)).$$

  Po dosazení do předpisu z Definice 1.20. získáme:

  $$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y)(x \cdot z).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y, z) = (0.1, 0.1, 0.1)$. Po dosazení získáme:

  $$0.1^2 = 0.1^3;$$

  $$0.01 \neq 0.001.$$

  $T_\prod$ tudíž není autodistributivní. □

- **je bisymetrická**

  Důkaz. Důkaz plyne přímo z komutativity násobení reálných čísel. □

- **není aditivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že $T_{\prod}$ je aditivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$T_{\prod}(\mathbf{x}) + T_{\prod}(\mathbf{y}) = T_{\prod}(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

  Po dosazení do předpisu z definice 1.18. získáme:

  $$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = (x_1 + y_1) \cdot (x_2, y_2);$$

  $$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2.$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.3, 0.4)$. Po dosazení získáme:

  $$0.1 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.1 \cdot 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.4;$$

  $$0.22 \neq 0.32.$$

  $T_{\prod}$ tedy není aditivní. □

3.10 Łukasiewiczova t-norma

Věta 3.10. *Nechť T_{Luk} je Łukasiewiczova t-norma na I (viz Definice 1.21.), pak platí:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že T_{Luk} je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$(x_i \leq y_i \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow T_{Luk}(\mathbf{x}) < T_{Luk}(\mathbf{y}).$$

Po dosazení do předpisu z definice 1.19. získáme:

$$\max(0, x_1 + x_2 - 1) < \max(0, y_1 + y_2 - 1).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.2, 0.3)$. Tyto vektory splňují podmínku:

$$(0.1, 0.2) \leq (0.2, 0.3) \wedge (0.1, 0.2) \neq (0.2, 0.3),$$

ale po dosazení zjistíme, že neplatí:

$$\max(0, 0.1 + 0.2 - 1) < \max(0, 0.2 + 0.3 - 1);$$

$$0 \nless 0.$$

T_{Luk} tedy není ryze monotónní.

□

- **není spojově ryze monotónní**

Důkaz. Protipříklad viz ryzí monotónnost T_{Luk}. □

- **není senzitivní**

Důkaz. Důkaz provedeme uvedením protipříkladu.

Předpokládejme, že T_{Luk} je senzitivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každé $\lambda \in (0, 1\rangle$ platí:

$$T_{Luk}(x, y) \neq T_{Luk}(x + \lambda, y).$$

Po dosazení do předpisu z definice 1.19. získáme:

$$\max(0, x + y - 1) \neq \max(0, x + \lambda + y - 1).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.2, 0.3)$ a $\lambda = 0.1$. Po dosazení získáme:

$$\max(0, 0.2 + 0.3 - 1) \neq \max(0, 0.2 + 0.3 + 0.1 - 1);$$

$$0 \neq 0.$$

T_{Luk} tedy není senzitivní. □

- **není idempotentní**

  Důkaz. To, že T_{Luk} není idempotentní plyne z toho, že je t-normou a jedinou idempotentní t-normou je minimum. □

- **je symetrická**

  Důkaz. Symetrie přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **je asociativní**

  Důkaz. Asociativita přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **je spojitá**

  Důkaz. Spojitost přímo plyne z grafu funkce (viz Obrázek 10). □

- **má neutrální prvek** $e = 1$

  Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = 1$ přímo plyne z toho, že T_{Luk} je t-normou. □

- **má anihilátor** $a = 0$

  Důkaz. Existence anihilátoru $a = 0$ přímo plyne z toho, že T_{Luk} je t-normou. □

- **je konjunktivní**

  Důkaz. To, že T_{Luk} je konjunktivní přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **není disjunktivní**

  Důkaz. To, že T_{Luk} není disjunktivní plyne z toho, že je konjunktivní. □

- **není vnitřní**

  Důkaz. To, že T_{Luk} není vnitřní plyne z toho, že je konjunktivní a není rovna minimu. □

- **není autodistributivní**

Důkaz. Důkaz plyne z principu duality T_{Luk} a S_{Luk}. Autodistributivita S_{Luk} je dokázána dále. □

- **je bisymetrická**

Důkaz. Důkaz plyne z principu duality T_{Luk} a S_{Luk}. Bisymetrie S_{Luk} je dokázána dále. □

- **není aditivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že T_{Luk} je aditivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$T_{Luk}(\mathbf{x}) + T_{Luk}(\mathbf{y}) = T_{Luk}(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Po dosazení do předpisu z definice 1.20. získáme:

$$\max(0, x_1 + x_2 - 1) + \max(0, y_1 + y_2 - 1) = \max(0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - 1).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.6, 0.7)$ a $(y_1, y_2) = (0, 0.1)$. Po dosazení získáme:

$$\max(0, 0.6 + 0.7 - 1) + \max(0, 0 + 0.1 - 1) = \max(0, 0.6 + 0.7 + 0 + 0.1 - 1);$$

$$0.3 \neq 0.4.$$

T_{Luk} tedy není aditivní. □

3.11 Drastická t-norma

Věta 3.11. *Nechť T_D je drastická t-norma na I (viz Definice 1.22.), pak platí:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že T_D je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$(x_i \leq y_i \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow T_D(\mathbf{x}) < T_D(\mathbf{y}).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.2, 0.3)$. Tyto vektory splňují podmínku:

  $$(0.1, 0.2) \leq (0.2, 0.3) \wedge (0.1, 0.2) \neq (0.2, 0.3),$$

  ale po dosazení získáme:

  $$T_D(0.1, 0.2) < T_D(0.2, 0.3);$$

  $$0 \not< 0.$$

  T_D tedy není ryze monotónní. □

- **není spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Viz protipříklad ryzí monotónnosti T_D. □

- **není senzitivní**

  Důkaz. Předpokládejme, že T_D je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každé $\lambda \in (0, 1\rangle$ platí:

  $$T_D(x, y) \neq T_D(x + \lambda, y).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.2)$ a $\lambda = 0.1$. Po dosazení získáme:

  $$T_D(0.1, 0.2) \neq T_D(0.1 + 0.1, 0.2);$$

  $$0 \neq 0.$$

  T_D tedy není senzitivní. □

- **není idempotentní**

  Důkaz. To, že T_D není idempotentní přímo plyne z toho, že minimum je jediná idempotentní t-norma. □

- **je symetrická**

  Důkaz. Symetrie přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **je asociativní**

  Důkaz. Asociativita přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **není spojitá**

  Důkaz. Viz graf funkce (Obrázek 12). □

- **má neutrální prvek** $e = 1$

  Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = 1$ přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **má anihilátor** $a = 0$

  Důkaz. Existence anihilátoru $a = 0$ přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **je konjuktivní**

  Důkaz. To, že T_D je konjunktivní přímo plyne z vlastností t-norem. □

- **není disjunktivní**

  Důkaz. To, že T_D není disjunktivní plyne z toho, že je konjunktivní. □

- **není vnitřní**

  Důkaz. To, že T_D není vnitřní plyne z toho, že je konjunktivní a není rovna minimu. □

- **není autodistributivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že T_D je autodistributivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle^3$ platí:

$$T_D(x, T_D(y, z)) = T_D(T_D(x, y), T_D(x, z)).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x, y, z) = (0.5, 1, 1)$. Po dosazení získáme:

$$T_D(0.5, T_D(1, 1)) = T_D(T_D(0.5, 1), T_D(0.5, 1));$$

$$T_D(0.5, 1) = T_D(0.5, 0.5);$$

$$0.5 \neq 0.$$

T_D tedy není autodistributivní. □

- **je bisymetrická**

Důkaz. Nechť $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \langle 0, 1\rangle^4$. Důkaz rozdělíme na 16 částí:

1. $x_{11} = 1 \wedge x_{12} \neq 1 \wedge x_{21} \neq 1 \wedge x_{22} \neq 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(x_{12}, 0) = 0 =$$

$$= T_D(x_{21}, T_D(x_{12}, x_{22})) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

2. $x_{11} \neq 1 \wedge x_{12} = 1 \wedge x_{21} \neq 1 \wedge x_{22} \neq 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(x_{11}, 0) = 0 =$$

$$= T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), x_{22}) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

3. $x_{11} \neq 1 \wedge x_{12} \neq 1 \wedge x_{21} = 1 \wedge x_{22} \neq 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(0, x_{22}) = 0 =$$

$$= T_D(x_{11}, T_D(x_{12}, x_{22})) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

4. $x_{11} \neq 1 \wedge x_{12} \neq 1 \wedge x_{21} \neq 1 \wedge x_{22} = 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(0, x_{21}) = 0 =$$

$$= T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), x_{12})) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

5. $x_{11} = 1 \wedge x_{12} = 1 \wedge x_{21} \neq 1 \wedge x_{22} \neq 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(1, 0) = 0 =$$

$$= T_D(x_{21}, x_{22}) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}x_{22})).$$

6. $x_{11} = 1 \wedge x_{12} \neq 1 \wedge x_{21} = 1 \wedge x_{22} \neq 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(x_{12}, x_{22}) = 0 =$$

$$= T_D(1, 0) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

7. $x_{11} = 1 \wedge x_{12} \neq \wedge x_{21} \neq 1 \wedge x_{22} = 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(x_{12}, x_{21}) =$$

$$= T_D(x_{21}, x_{12}) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

8. $x_{11} \neq 1 \wedge x_{12} \neq 1 \wedge x_{21} = 1 \wedge x_{22} = 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(0, 1) = 0 =$$

$$= T_D(x_{11}, x_{12}) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

9. $x_{11} \neq 1 \wedge x_{12} = 1 \wedge x_{21} = 1 \wedge x_{22} \neq 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(x_{11}, x_{22})$$

$$= T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

10. $x_{11} \neq 1 \wedge x_{12} = 1 \wedge x_{21} \neq 1 \wedge x_{22} = 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(x_{11}, x_{21}) = 0 =$$

$$= T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), 1)) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

11. $x_{11} = 1 \wedge x_{12} = 1 \wedge x_{21} = 1 \wedge x_{22} \neq 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(1, x_{22}) =$$

$$= T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

12. $x_{11} = 1 \wedge x_{12} = 1 \wedge x_{21} \neq 1 \wedge x_{22} = 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(1, x_{21}) =$$

$$= T_D(x_{21}, 1) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

13. $x_{11} = 1 \wedge x_{12} \neq 1 \wedge x_{21} = 1 \wedge x_{22} = 1)$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(x_{12}, 1) =$$

$$= T_D(1, x_{12}) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

14. $x_{11} \neq 1 \wedge x_{12} = 1 \wedge x_{21} = 1 \wedge x_{22} = 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(x_{11}, 1) =$$

$$= T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

15. $x_{11} \neq 1 \wedge x_{12} \neq 1 \wedge x_{21} \neq 1 \wedge x_{22} \neq 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(0, 0) =$$

$$= T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

16. $x_{11} = 1 \wedge x_{12} = 1 \wedge x_{21} = 1 \wedge x_{22} = 1$

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22})) = T_D(1, 1) =$$

$$= T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

Pro každé $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \langle 0, 1\rangle^4$ tedy platí:

$$T_D(T_D(x_{11}, x_{12}), T_D(x_{21}, x_{22}))) = T_D(T_D(x_{11}, x_{21}), T_D(x_{12}, x_{22})).$$

□

- **není aditivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že T_D je aditivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$T_D(\mathbf{x}) + T_D(\mathbf{y}) = T_D(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.2, 0.5)$ a $(y_1, y_2) = (0.2, 0.5)$. Po dosazení získáme:

$$T_D(0.2, 0.5) + T_D(0.2, 0.5) = T_D(0.2 + 0.2, 0.5 + 0.5);$$

$$0 \neq 0.4.$$

T_D tedy není aditivní. □

3.12 Pravděpodobnostní suma

Věta 3.12. *Nechť $S_{\sum}$ je pravděpodobnostní suma na I (viz Definice 1.28.), pak platí:*

- **není ryze monotónní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že $S_{\sum}$ je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$(x_i \leq y_i \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow S_{\sum}(\mathbf{x}) < S_{\sum}(\mathbf{y})$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (1, 0.3)$. Přestože platí:

$$(1, 0.2) \leq (1, 0.3) \wedge (1, 0.2) \neq (1, 0.3),$$

již neplatí:

$$S_{\sum}(1, 0.2) < S_{\sum}(1, 0.3);$$

$$1 + 0.2 - 1 \cdot 0.2 < 1 + 0.3 - 1 \cdot 0.3;$$

$$1 \not< 1.$$

$S_{\sum}$ tedy není ryze monotónní. □

- **je spojově ryze monotónní**

Důkaz. Nechť pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$x_i < y_i.$$

Tedy platí:

$$x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2.$$

Jelikož se pohybujeme na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, tak platí:

$$(x_1 + x_2 < y_1 + y_2) \wedge (x_1 \cdot x_2 < y_1 \cdot y_2).$$

Po odečtení získáme:

$$x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 < y_1 + y_2 - y_1 \cdot y_2.$$

$$S_{\sum}(x_1, x_2) < S_{\sum}(y_1, y_2).$$

□

- **není senzitivní**

Důkaz. Důkaz plyne z existence anihilátoru. □

- **není idempotentní**

Důkaz. To, že $T_{\sum}$ není idempotentní, plane z toho, že jediná idempotentní t-conorma je maximum. □

- **je symetrická**

  Důkaz. Symetrie přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **je asociativní**

  Důkaz. Asociativita přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **je spojitá**

  Důkaz. Viz graf (Obrázek 12). □

- **má neutrální prvek** $e = 0$

  Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = 0$ přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **má anihilátor** $a = 1$

  Důkaz. Existence anihilátoru $a = 1$ přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **není konjuktivní**

  Důkaz. To, že $S_{\sum}$ není konjunktivní plyne z toho, že je disjunktivní. □

- **je disjunktivní**

  Důkaz. To, že $S_{\sum}$ je disjunktivní přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **není vnitřní**

  Důkaz. To, že $S_{\sum}$ není vnitřní plyne z toho, že je disjunktivní a není rovna maximu. □

- **není autodistributivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že $S_{\sum}$ je autodistributivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \langle 0, 1\rangle^3$ platí:

$$S_{\sum}(x, S_{\sum}(y, z)) = S_{\sum}(S_{\sum}(x, y), S_{\sum}(x, z)).$$

  Po dosazení do předpisu z definice 1.22. získáme:

$$S_{\sum}(x, y + z - y \cdot z) = S_{\sum}(x + y - x \cdot y, x + z - x \cdot z;$$

$$x + y + z - y \cdot z - x \cdot y - x \cdot z + x \cdot y \cdot z =$$

$$= x + y - x \cdot y + x + z - x \cdot z - (x + y - x \cdot y)(x + z - x \cdot z).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y, z) = (0.1, 0.2, 0.3)$. Po dosazení získáme:

$$0.1 + 0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 - 0.1 \cdot 0.2 - 0.1 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 =$$

$$= 0.1 + 0.2 - 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 + 0.3 - 0.1 \cdot 0.3 - (0.1 + 0.2 - 0.1 \cdot 0.2)(0.1 + 0.3 - 0.1 \cdot 0.3).$$

$$0.496 \neq 0.0269.$$

  $S_{\sum}$ tedy není autodistributivní.

  □

- **není bisymetrická**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že $S_{\sum}$ je bisymetrická. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \langle 0, 1\rangle^4$ platí:

$$S_{\sum}(S_{\sum}(x_{11}, x_{12}), S_{\sum}(x_{21}, x_{22}) = S_{\sum}(S_{\sum}(x_{11}, x_{21}), S_{\sum}(x_{12}, x_{22}).$$

$$S_{\sum}(x_{11} + x_{12} - x_{11} \cdot x_{12}, x_{21} + x_{22} - x_{21} \cdot x_{22} = S_{\sum}(x_{11} + x_{21} - x_{11} \cdot x_{21}, x_{12} + x_{22} - x_{12} \cdot x_{22}$$

$$(x_{11} + x_{12} - x_{11} \cdot x_{12}) + (x_{21} + x_{22} - x_{21} \cdot x_{22}) - (x_{11} + x_{12} - x_{11} \cdot (x_{12}) \cdot (x_{21} + x_{22} - x_{21} \cdot x_{22}) =$$

$$= (x_{11} + x_{21} - x_{11} \cdot x_{21}) + (x_{12} + x_{22} - x_{12} \cdot x_{22}) - (x_{11} + x_{21} - x_{11} \cdot (x_{21}) \cdot (x_{12} + x_{22} - x_{12} \cdot x_{22}).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$. Po dosazení získáme:

$$(0.1 + 0.2 - 0.1{\cdot}0.2) + (0.3 + 0.4 - 0.3{\cdot}0.4) - (0.1 + 0.2 - 0.1{\cdot}0.2){\cdot}(0.3 + 0.4 - 0.3{\cdot}0.4) =.$$

$$= (0.1 + 0.3 - 0.1{\cdot}0.3) + (0.2 + 0.4 - 0.2{\cdot}0.4) - (0.1 + 0.3 - 0.1{\cdot}0.3){\cdot}(0.2 + 0.4 - 0.2{\cdot}0.4).$$

$$0.9376 \neq 0.8576.$$

□

- **není aditivní**

Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

Předpokládejme, že $S_{\sum}$ je aditivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

$$S_{\sum}(\mathbf{x}) + S_{\sum}(\mathbf{y}) = S_{\sum}(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Po dosazení do předpisu z definice 1.22. získáme:

$$x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 + y_1 + y_2 - y_1 \cdot y_2 = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - (x_1 + y_1)(x_2 + y_2).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.3, 0.4)$. Po dosazení získáme:

$$0.1 + 0.2 - 0.1{\cdot}0.2 + 0.3 + 0.4 - 0.3{\cdot}0.4 = 0.1 + 0.3 + 0.2 + 0.4 - (0.1 + 0.3)(0.2 + 0.4);$$

$$0.86 \neq 76.$$

□

3.13 Ohraničená suma

Věta 3.13. *Nechť S_{Luk} je ohraničená suma na I (viz Definice 1.30.), pak platí:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že S_{Luk} je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ platí:

  $$(x_i \leq y_i \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow S_{Luk}(\mathbf{x}) < S_{Luk}(\mathbf{y}).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.3, 0.4)$. Přestože tyto vektory splňují podmínky:

  $$(0.5, 0.6) \leq (0.7, 0.8) \wedge (0.5, 0.6) \neq (0.7, 0.8);$$

  již neplatí:

  $$S_{Luk}(0.5, 0.6) < S_{Luk}(0.7, 0.8);$$

  $$\min(0.5 + 0.6, 1) < \min(0.7 + 0.8, 1);$$

  $$1 \nless 1.$$

  S_{Luk} tedy není ryze monotónní. □

- **není spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Protipříklad viz ryzí monotónnost. □

- **není senzitivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že S_{Luk} je senzitivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1 \rangle^2$ platí:

  $$S_{Luk}(x, y) \neq S_{Luk}(x + \lambda, y).$$

Po dosazení do předpisu z definice 1.23. získáme:

$$\min(x + y, 1) \neq \min(x + \lambda + y, 1).$$

Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.9, 0.8)$ a $\lambda = 0.1$. Po dosazení získáme:

$$\min(0.9 + 0.8, 1) \neq \min(0.9 + 0.8 + 0.1, 1);$$

$$1 \neq 1.$$

S_{Luk} tedy není senzitivní. □

- **není idempotentní**

  Důkaz. To, že S_{Luk} není idempotentní plyne z toho, že jediná idempotentní t-conorma je maximum. □

- **je symetrická**

  Důkaz. Symetrie přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **je asociativní**

  Důkaz. Asociativita přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **je spojitá**

  Důkaz. Viz graf (Obrázek 13). □

- **má neutrální prvek** $e = 0$

  Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = 0$ přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **má anihilátor** $a = 1$

  Důkaz. Existence anihilátoru $a = 1$ přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **není konjuktivní**

  Důkaz. To, že S_{Luk} není disjunktivní plyne z toho, že je disjunktivní. □

- **je disjunktivní**

  Důkaz. To, že S_{Luk} je disjunktivní přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **není vnitřní**

  Důkaz. To, že S_{Luk} není vnitřní plyne z toho, že je disjunktivní. □

- **není autodistributivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že S_{Luk} je autodistributivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y, z)$ platí:

  $$S_{Luk}(x, S_{Luk}(y, z)) = S_{Luk}(S_{Luk}(x, y), S_{Luk}(x, z)).$$

  Po dosazení do předpisu z definice 1.23. získáme:

  $$S_{Luk}(x, \min(y + z, 1)) = S_{Luk}(\min(x + y, 1), \min(x + z, 1));$$

  $$\min(x + \min(y + z, 1), 1) = \min(\min(x + y, 1) + \min(x + z, 1), 1).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y, z) = (0.1, 0.2, 0.3)$. Po dosazení získáme:

  $$\min(0.1 + \min(0.2 + 0.3, 1), 1) = \min(\min(0.1 + 0.2, 1) + \min(0.1 + 0.3, 1), 1);$$

  $$0.6 \neq 0.7.$$

  S_{Luk} tedy není autodistributivní. □

- **je bisymetrická**

  Důkaz. Bisymetrie S_{Luk} plyne z asociativity a symetrie (viz [7]). □

- **není aditivní**

  Důkaz. To, že S_{Luk} není aditivní plyne z principu duality T_{Luk} a S_{Luk}. Aditivita T_{Luk} je vyvrácena výše. □

3.14 Drastická t-conorma

Věta 3.14. *Nechť S_D je t-conorma na I (viz Definice 1.32.). Pro S_D platí:*

- **není ryze monotónní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že S_D je ryze monotónní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \langle 0, 1\rangle^2$ platí:

  $$(x_i \leq y_i \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow S_D(\mathbf{x}) < S_D(\mathbf{y}).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x_1, x_2) = (0.1, 0.2)$ a $(y_1, y_2) = (0.3, 0.4)$. Přestože tyto vektory splňují podmínku:

  $$(0.1, 0.2) \leq (0.3, 0.4) \wedge (0.1, 0.2) \neq (0.3, 0.4),$$

  již neplatí.

  $$S_D(0.1, 0.2) < S_D(0.3, 0.4);$$

  $$0 \not< 0.$$

  S_D tedy není ryze monotónní. □

- **není spojově ryze monotónní**

  Důkaz. Protipříklad viz ryzí monotónnost S_D. □

- **není senzitivní**

  Důkaz. Důkaz provedeme nalezením protipříkladu.

  Předpokládejme, že S_D je senzitivní. Pak pro každé $\mathbf{x} = (x, y) \in \langle 0, 1\rangle^2$ a každé $\lambda \in (0, 1\rangle$ platí:

  $$S_D(x, y) \neq S_D(x + \lambda, y).$$

  Nyní uvažujme hodnoty $(x, y) = (0.1, 0.2)$ a $\lambda = 0.1$. Po dosazení získáme:

  $$S_D(0.1, 0.2) \neq S_D(0.1 + 0.1, 0.2));$$

  $$0 \neq 0.$$

  S_D tedy není senzitivní. □

- **není idempotentní**

  Důkaz. To, že S_D není idempotentní přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **je symetrická**

  Důkaz. Symetrie přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **je asociativní**

  Důkaz. Asociativita přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **není spojitá**

  Důkaz. Viz graf (Obrázek 14). □

- **má neutrální prvek** $e = 0$

  Důkaz. Existence neutrálního prvku $e = 0$ přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **má anihilátor** $a = 1$

  Důkaz. Existence anihilátoru $a = 1$ přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **není konjunktivní**

  Důkaz. To, že S_D není konjunktivní plyne z toho, že je disjunktivní. □

- **je disjunktivní**

  Důkaz. To, že S_D je disjunktivní přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **není vnitřní**

  Důkaz. To, že S_D není vnitřní přímo plyne z vlastností t-conorem. □

- **není autodistributivní**

Důkaz. Důkaz plyne z principu duality mezi T_D a S_D. Důkaz toho, že T_D není autodistributivní viz výše. □

- **je bisymetrická**

Důkaz. Důkaz plyne z principu duality mezi T_D a S_D. Důkaz toho, že T_D je bisymetická viz výše. □

- **není aditivní**

Důkaz. Důkaz plyne z principu duality mezi T_D a S_D. Důkaz toho, že T_D není aditivní viz výše. □

4 Využití aritmetického průměru

Jak jsme dříve ukázali, *aritmetický průměr* přiřazuje všem vloženým hodnotám stejnou váhu. V závislosti na tomto poznatku jsme schopni odvodit, kde je vhodné a naopak nevhodné jej použít.

Přestože jeho nejznámější využití je při výpočtu průměru známek při studiu, právě toto využití nejčastěji není vůbec vhodné. Málokdy mají totiž všechny známky stejnou váhu, ve většině předmětů se píší pololetní práce, které mají pochopitelně daleko větší váhu než obyčejný test či ústní zkoušení. Konkrétně v tomto případě je tedy vhodné použít *vážený aritmetický průměr*, který zohledňuje jak známky, tak i jejich váhu.

Mezi situace, kdy je aritmetický průměr nejlepší možnou volbou, patří případy, kdy mají všechny zadané hodnoty stejnou váhu a ideálně jsou v tzv. *Gaussovském rozdělení* (resp. normálním rozdělení). Normální rozdělení je takové, kdy se hodnoty vzájemně příliš neliší a extrémů dosahuje minimum hodnot (tedy většina hodnot se pohybuje s malou odchylkou kolem výsledné hodnoty jejich aritmetického průměru). Může to být např. výpočet průměrné výšky mužů v České republice či výpočet průměrné výšky lípy srdčité. Aritmetického průměru se také využívá v geometrii již na střední škole při výpočtu souřadnic středu úsečky mezi dvěma body.

Problém u aritmetického průměru nastává ve chvíli, kdy je použit v situacích ve kterých není vhodný a dává nám tak zkreslené údaje. Je snadné tak zmanipulovat výsledky různých statistických výzkumů ať už neznalostí či úmyslně. Pokud budeme uvažovat hodnoty, ze kterých bude 90% v úzkém rozpětí, ale jedna hodnota bude silně vyčnívat ať už tím, že bude nepřiměřeně vysoká či nízká oproti zbývajícím, výslednou hodnotu aritmetického průměru nám právě tato jedna hodnota zkreslí tak, že výsledek bude nevypovídající. Tohoto je často zneužíváno například při výpočtu průměrného platu určité skupiny lidí, kdy jedna jediná hodnota je schopna výsledek aritmetického průměru změnit někdy i o desetitisíce korun.

Nyní si na konkrétním příkladu ukážeme, jak může nesprávná volba agregační funkce zkreslit výslednou hodnotu. Uvažujme firmu, ve které chceme zjistit výši průměrné výplaty. Dva zaměstnanci pobírají mzdu ve výši 15 000 Kč, čtyři zaměstnanci ve výši 17 000 Kč a dvanáct zaměstnanců pobírá mzdu 18 000 Kč. Společně s nimi je ve firmě vedoucí, který pobírá měsíční mzdu ve výši 85 000 Kč. Při použití aritmetického průměru zjistíme, že údajná průměrná mzda činí přibližně 21 000 Kč. Je zřejmé, že tato hodnota je velmi zkreslená právě výší platu vedoucího a je tedy nevypovídající. Při použití funkce MED zjistíme, že průměrná mzda činí 18 000 Kč, což je daleko více vypovídající než hodnota získaná použitím aritmetického průměru.

Na následujícím příkladě si uvedeme situaci, kde je vhodné využít aritmetický průměr. Uvažujme statistický úřad ČR, který se snaží zjistit, jaká byla průměrná denní teplota za měsíc červen v roce 2020. Postupně získané hodnoty (16.7, 16.1, 14.8, 19, 13.7, 17.4, 20.7, 14.2, 15.2, 15.7, 18.6, 20, 20.7, 20.8, 18.8, 17.2, 18.8, 17.6, 15.9, 15.5, 15.9, 18.3, 18.5, 16.6, 19.9, 19.6, 21.5, 23.5, 17, a 19 [11]) dosadíme do předpisu pro výpočet aritmetického průměru. Po dosazení získáme průměrnou teplotu, která činí 17.9°. Tento závěr opravdu odráží, kolem které hodnoty se teploty celý měsíc pohybovaly.

Pokud bychom chtěli srovnat aritmetický průměr s ostatními výše zmíněnými agregačními funkcemi z pohledu vlastností, tak zjistíme, že stejně jako uspořádaný aritmetický průměr je i aritmetický průměr ryze monotónní, spojově ryze monotónní, senzitivní a idempotentní na rozdíl od drastické t-conormy, která není nic z výše uvedeného. Stejně jako aritmetický průměr jsou i všechny t-normy a t-conormy symetrické, oproti váženému průměru a projekci, které symetrické nejsou. Asociativní a konjunktivní není ani aritmetický průměr ani geometrický průměr, ale minimum ano. Disjunktivní jsou všechny t-conormy avšak aritmetický ani geometrický průměr disjunktivní není. Co se týče neutrálního prvku a anihilátoru, tak ani aritmetický průměr ani projekce nemají ani jedno z výše uvedeného, oproti maximu či minimu, které mají oboje. Stejně jako aritmetický průměr, tak i vážený aritmetický průměr je aditivní, oproti všem t-normám a t-conormám, které aditivní nejsou. Všechny definované funkce, až na drastickou t-normu a t-conormu jsou spojité.

[11] Český hydrometeorologický ústav [online]. 2021 [cit. 2021-7-27]. Dostupné z: www.chmi.cz

Závěr

V první části práce jsme se seznámili s agregačními funkcemi na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a následně jsme si uvedli jejich vlastnosti, ze kterých jsme v navazující části vytvořili seznam a postupně je pro konkrétní funkce dokazovali. Pro názornost výsledků jsme vytvořili tabulku, kde je patrné, jak se liší vlastnosti jednotlivých agregačních funkcí. V závěrečné části jsme se zabývali použitím aritmetického průměru a uvedli jsme jeho výhody a nevýhody oproti ostatním agregačním funkcím na konkrétních příkladech z reálného života.

Reference

[1] Beliakov, Gleb and James, Simon *Stability of weighted penalty-based aggregation functions, Fuzzy sets and systems*. 2013.

[2] Bustince, Humberto, Javier Fernandez, Radko Mesiar a Tomasa Calvo. *Aggregation Functions in Theory and in Practise*. 2013

[3] Calvo, Tomasa, Kolesárová, Anna, Komorníková, Magda, Mesiar, R. *Aggregation operators: Properties, classes and construction methods, Aggregation operators. New trends and applications*. Physica, Heidelberg, 2002.

[4] Demirci, Mustafa *Aggregation operators on partially ordered sets and their categorical foundations*. Kybernetika. 2006.

[5] Grabisch Michael, Marichal Jean-Luc, Mesiar Radko, Pap Endre *Aggregation Functions*. Cambridge University Press, 2009.

[6] Kurač Zbyněk, Tomáš Riemel, Lenka Rýparová *Transfer-stable aggregation functions on finite lattices*. Palacky University Olomouc, 2020.

[7] Slezáková Miroslava *Konjunktní a disjunktní agregační operátory*. Univerzita Palackého Olomouc, 2011.

Seznam obrázků

Přílohy

	AM	GM	WAM	OWA	MAX	MIN	P_k	$P_{(k)}$
Ryze monotónní	Ano	Ne	Ano	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne
Spojově ryze monotónní	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Senzitivní	Ano	Ne	Ano	Ano	Ne	Ne	Ne	Ne
Idempotentní	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Symetrická	Ano	Ano	Ne	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano
Asociativní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano	Ano	Ano	Ano
Spojitá	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Neutrální prvek	Nemá	Nemá	Nemá	Nemá	0	1	Nemá	Nemá
Anihilátor	Nemá	0	Nemá	Nemá	1	0	Nemá	Nemá
Konjunktivní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne
Disjunktivní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne	Ne
Vnitřní	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Autodistributivní	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Bisymetrická	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Aditivní	Ano	Ne	Ano	Ano	Ne	Ne	Ano	Ano

Obrázek 15: Tabulka vlastností 1

	T_Π	T_{Luk}	T_D	S_Σ	S_{Luk}	S_D
Ryze monotónní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Spojově ryze monotónní	Ano	Ne	Ne	Ano	Ne	Ne
Senzitivní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Idempotentní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Symetrická	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Asociativní	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Spojitá	Ano	Ano	Ne	Ano	Ano	Ne
Neutrální prvek	1	1	1	0	0	0
Anihilátor	0	0	0	1	1	1
Konjunktivní	Ano	Ano	Ano	Ne	Ne	Ne
Disjunktivní	Ne	Ne	Ne	Ano	Ano	Ano
Vnitřní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Autodistributivní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne
Bisymetrická	Ano	Ano	Ano	Ne	Ano	Ano
Aditivní	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne	Ne

Obrázek 16: Tabulka vlastností 2