

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kulečnick na kruhu



Vedoucí diplomové práce:  
**Prof. RNDr. dr hab. Jan Andres CSc.,DSc.**  
Rok odevzdání: 2013

Vypracoval:  
**Lucie Franková**  
III. ročník

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením Prof. RNDr. dr hab. Jana Andrese CSC., DSc.a všechny použité zdroje jsem uvedla.

V Olomouci dne 30. března 2013

# Obsah

Úvod .....	3
1 Kulečnick jako jeden z dynamických systémů .....	4
2 Kulečnickový systém .....	6
2.1 Kulečnickový stůl .....	6
2.2 Kulečnickový systém .....	9
3 Kulečnick na kruhu .....	10
3.1 Vývoj kulečnicku v čase .....	10
3.2 Popis kulečnickového systému z dlouhodobého hlediska .....	11
3.2.1 Kulečnickový tok .....	12
3.2.2 Kolizní zobrazení .....	15
3.3 Průměrná doba návratu .....	19
3.4 Časová reverzibilita kulečnickových systémů .....	20
4 Dlouhodobý vývoj kulečnicku na kruhu .....	21
4.1 Kruh a kružnice .....	21
4.2 Vlastnosti kulečnicku na kruhu .....	21
4.3 Modifikace kruhu .....	25
Dodatek č. 1 – Lebesgueova míra .....	28
Dodatek č. 2 – Vnější součin forem .....	30
Závěr .....	31
Seznam literatury .....	33

## Úvod

Kulečnickové modely matematicky popisují fyzikální systémy, které se skládají z ohraničené oblasti a jedné či více částic, jež se v dané oblasti pohybují a odrážejí se od hraničních stěn nebo od sebe navzájem. Tvar hraničních stěn uvažované oblasti pak rozhoduje o povaze chodu částic(e), ten může opisovat trajektorie od naprosto pravidelných až po zcela chaotické.

Cílem této práce je popsat vlastnosti kulečnicku, který je tvořen jednotkovým kruhem, v němž se nachází jedna částice. Předpokládáme, že tato částice vykonává rovnoměrný přímočarý pohyb, jehož rychlost je rovna jedné. K bližšímu seznámení s kulečnickovými systémy před zkoumáním kruhového kulečnicku je text strukturován následovně.

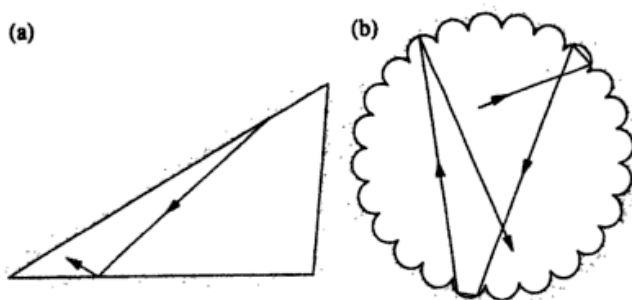
První kapitola shrnuje základní fakta, tedy zařazení kulečnicků mezi systémy, jejich počátky a rozvoj v minulosti, a zmiňuje spektrum možností jejich užití. V druhé kapitole jsou vymezeny požadavky, které by dvojdímenzionální oblasti, na nichž je kulečnick definován, měly splňovat. Nato je vyslovena definice kulečnickového systému. Třetí kapitola nastiňuje způsob, jakým se kulečnickové systémy popisují. Čtvrtá kapitola se již zaměřuje na vlastnosti trajektorií, po kterých se částice pohybuje, na oblastech tvořených kruhem či jeho vhodně zvolených podmnožinách.

Při tvorbě obrázků (s výjimkou obr. č. 1.1, 1.2, 1.3, 3.2, 4.6) bylo použito programu Geogebra 4.2 a zkoumání dlouhodobé povahy pohybu částice v kruhové oblasti probíhalo za pomoci [A1] (Obr. 4.6).

# 1 Kulečnick jako jeden z dynamických systémů

Dynamický systém je vymezená celková část reality popsána skupinou proměnných, a to v průběhu času. Předmětem zájmu se tak stávají změny systému a vzájemné vlivy proměnných, které tyto změny vyvolávají. Příkladem dynamického systému může být vývoj cen na burze cenných papírů nebo počasí. Na základě matematických úvah se pak vytváří rovnice, které zachycují změnu systému (a tedy i jednotlivých proměnných) za určité časové období.

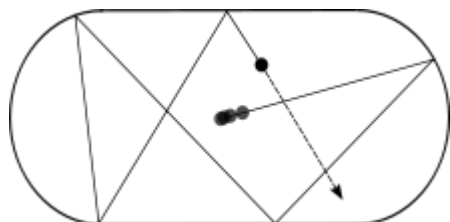
Moderní teorie dynamických systémů vznikla koncem 19. století při řešení otázek týkajících se stability a vývoje sluneční soustavy. Tyto úvahy se postupně začaly používat i při řešení problémů jiných vědních oborů. Výjimkou nebyly ani nelineární deterministické modely kulečnicků, na které obrátil pozornost lord Kelvin. Ten v Královském Institutu Velké Británie v roce 1900 vyslovil přednášku "Mračna 19. století, která zatemňují teorii dynamiky tepla a světla", kde mimo jiné představil svou úvahu s kulečnickovými stoly ve tvaru trojúhelníku a květu.



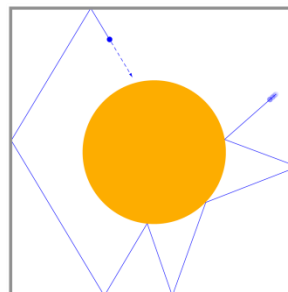
Obrázek 1.1: Kulečnickové stoly ve tvaru trojúhelníku a květu

V průběhu 20. století se touto problematikou dále zabývalo mnoho vědců, což vedlo k jejímu velkému rozvoji. K tomu neodmyslitelně přispěl George D. Birkhoff, který jako první přistupoval ke kulečnickům jako k modelům řešícím problémy klasické mechaniky, a zabýval se především těmi na hladkých konvexních oblastech. Ya Sinai založil a následně prohloubil matematickou teorii chaotických kulečnicků, zahrnujíc různé stoly, na nichž k chaosu dochází. Navíc pomocí jednoho z nich (viz. Obrázek 1.3) zavedl model, na kterém

popisuje fyzikální vlastnosti termodynamiky. Mezi významné osobnosti se rovněž řadí Sinaiův učenec Leonid Bunimovich, po němž je pojmenován "stadionový" stůl tvořený spojením obdélníku a dvou půlkruhů, kterým se zabýval, nebo Nikolai S. Krylov.



Obrázek 1.2: Bunimovichův stůl



Obrázek 1.3: Sinaiův stůl

Kulečnickové modely mají své užití v mnoha z vědních disciplín a technologií. Jednou z možností jejich použití jsou aplikace na projevy kvantových bodů mikroskopického světa (např. elektronů či molekul). Své uplatnění ovšem nachází i v oblasti akustiky či optiky.

## 2 Kulečnickový systém

### 2.1 Kulečnickový stůl

Mějme omezenou oblast  $O \in \mathbf{R}^2$  a její hranici  $q = \partial O$ , kterou tvoří jedna či více (avšak konečně mnoho) hladkých kompaktních křivek  $q_1, \dots, q_n, 1 \leq n < \infty$ , pro které existují jejich alespoň první dvě derivace. Hranice, popř. její úseky, je tak v každém svém bodě diferencovatelná. Tak je možno v každém bodě hranice, popř. jejího úseku, sestrojiti tečnu.

*Předpoklad 1:* Každá z křivek  $q_i$  je určena spojitým zobrazením  $f_i: \langle a_i, b_i \rangle \rightarrow \mathbf{R}^2$ , jež má alespoň první tři derivace nenulové a je prosté na  $\langle a_i, b_i \rangle$ , a v koncových bodech  $a_i, b_i$  má jednostranné derivace.

Pro  $f_i$  platí, že pokud

- $f_i(a_i) \neq f_i(b_i)$ , potom je křivka  $q_i$  oblouk<sup>1</sup>, jehož hraniční body tvoří  $f_i(a_i)$  a  $f_i(b_i)$ ,
- $f_i(a_i) = f_i(b_i)$ , pak je  $q_i$  uzavřená křivka a  $f_i$  lze definovat na kruhu<sup>2</sup>  $S^1$ .

*Předpoklad 2:* Stěny se mohou navzájem protínat pouze ve svých koncových bodech.

To znamená, že pro  $i, j: i \neq j$  platí

$$q_i \cap q_j \subset \partial q_i \cup \partial q_j.$$

Množina  $q_*$ , pro kterou platí:

$$q_* = \partial q_1 \cup \dots \cup \partial q_n,$$

tak obsahuje vrcholové body oblasti  $O$ , zatímco množina  $\tilde{q} = q \setminus q_*$  obsahuje standardní hraniční body.

Nechť je hraniční křivka kladně orientovaná (tj. proti směru hodinových ručiček), tedy tak, že oblast  $O$  je od ní vždy nalevo. Orientací křivky  $q_i$  s parametrizací  $f_i$  je jednotkové tečné vektorové pole  $\vec{g}$ , což je zobrazení, které každému jejímu bodu přiřazuje jednotkový tečný vektor (normalizovaný). Tedy pro každý bod  $t \in \langle a_i, b_i \rangle$ ,  $f_i(t) \in \mathbf{R}^2$ , kde  $f_i'(t) \neq 0$ ,

<sup>1</sup> Oblouk jako vzdálenost po křivce mezi jeho hraničními body.

<sup>2</sup>  $S^1$  představuje varietu kružnice. Varieta  $G$  je definována jako množina, pro jejíž každý bod  $T$  existuje její otevřená podmnožina  $U$ , které bod  $T$  náleží a existuje pro ni spojitě zobrazení  $\phi U \rightarrow \mathbf{R}^n$  takové, že  $U$  a  $\phi U$  si jsou vzájemně bijekcí.  $\phi$  je pak souřadnicové zobrazení a  $(U, \phi)$  je mapa.

platí:

$$\vec{g}(f_i(t)) = \frac{f_i'(t)}{\|f_i'(t)\|},$$

kde spodní výraz značí euklidovskou normu vektoru  $f_i'(t) = (f_{i'1}(t), f_{i'2}(t))$  na prostoru  $\mathbf{R}^2$ , která je definována jako:

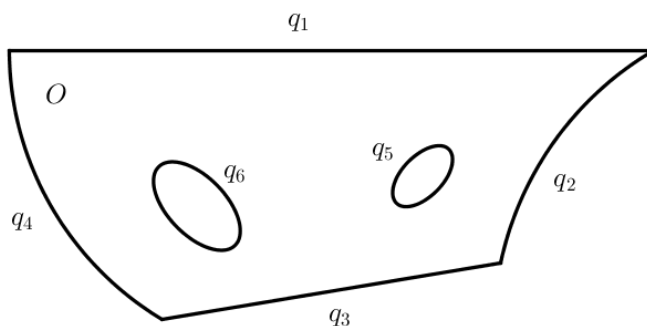
$$\|f_i'(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^2 (f_{i'j}(t))^2}.$$

Parametrizací každé křivky  $q_i$  příslušnou délkou oblouku se k nim kolmé vektory stanou jednotkovými:  $\|f_i'\| = 1$ .

*Předpoklad 3:* Každá ze stěn musí mít druhou derivaci ve všech svých bodech nenulovou nebo naopak v každém bodě nulovou.

Poslední předpoklad zajišťuje, aby byla každá stěna z hlediska zakřivení pouze jednoho typu, a to buďto:

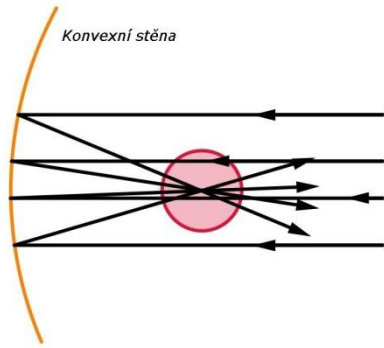
1. Rovná,
2. Konvexní – soustředná,
3. Konkávní – rozptylná.



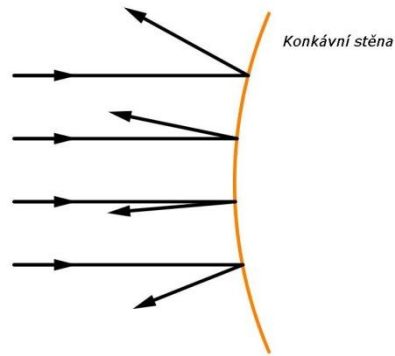
**Obrázek 2.1:** Typy křivek –  $q_1, q_3$  jsou rovné,  $q_4$  konvexní a  $q_2, q_5, q_6$  konkávní křivky;  $q_5$  a  $q_6$  jsou navíc uzavřené.

*Poznámka:* Povšimněme si, že v blízkosti konvexní stěny má dráha pohybující se částice tendenci soustředit se do určitého místa, zatímco u konkávní se dráha rozptyluje (viz. Obr. 2.2 a 2.3).





Obrázek 2.2: Konvexní stěna



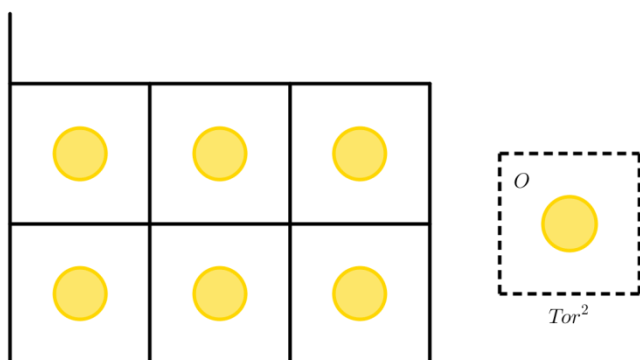
Obrázek 2.3: Konkávní stěna

*Definice 2.1:* Zakřivení  $K$  stěny  $q_i$  je definováno jako:

- $K = 0$ , pokud je  $q_i$  rovná,
- $K = \|f''\|$ , pokud je  $q_i$  konkávní,
- $K = -\|f''\|$ , pokud je  $q_i$  konvexní.

*Definice 2.2:* Necht' omezená oblast  $O \in \mathbf{R}^2$  a její hranice  $q$  splňují všechny tři požadavky zmíněné výše, potom oblast  $O$  je nazývána *kulečnickovým stolem* a křivky  $q_1, \dots, q_n, 1 \leq n < \infty$  jsou jeho *stěny*.

*Poznámka:* Oblast  $O$  může být považována za kulečnickový stůl rovněž v případě, že je neomezená, potom je požadováno, aby hranice  $\partial O$  byla lokálně po částech hladká, tedy že pro jakýkoli čtverec  $K_A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: |x| \leq A, |y| \leq A\}$  má průnik  $K_A \cap O$  po konečně mnoha částech hladkou hranici, která splňuje již výše zmíněné předpoklady pro stěny kulečnickového stolu. Úvahy spjaté s tímto druhem systémů se zaměřují na ty, jejichž stoly mají periodickou strukturu. Souřadnicový systém je pak položen tak, aby přímky tvořící mřížku rovnoměrně rozdělující periodický stůl na navzájem totožné části, byly na jednu ze souřadnicových os kolmé a s druhou vodorovné.  $\mathbf{R}^2$  lze takto převést na plochu příslušného jednotkového toru  $\text{Tor}^2 = \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Z}^2$ . Pak je děj na neomezeném periodickém stole  $O$  zastoupen svým promítnutím na  $\text{Tor}^2$ .

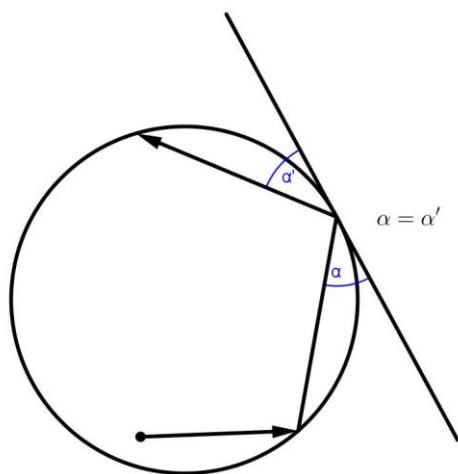


Obrázek 2.4: Rozdělení neomezeného periodického stolu na totožné celky

## 2.2 Kulečnickový systém

*Definice 2.3:* Za kulečnickový systém se považuje volný pohyb bodové částice s konstantní rychlostí a zrcadlovými odrazy od hranice  $q$  na kulečnickovém stole  $O$ .

Zrcadlovými jsou myšleny takové odrazy, které se řídí pravidlem rovnosti úhlu dopadu a úhlu odrazu, jež je součástí zákonů optiky. S těmi se čtenář může blíže seznámit např. v [4]. Částice tak nikdy nepřekročí hranici  $q$ , protože při každém střetu s hranicí stolu dochází k odrazu zpět dovnitř oblasti  $O$ . Nechť částice vykonává mezi střety s hranicí rovnoměrný přímočarý pohyb.



Obrázek 2.5: Zrcadlové odrazy v kruhu

### 3 Kulečník na kruhu

#### 3.1 Vývoj kulečníku v čase

Pohyb částice je popisován pomocí vektoru souřadnic  $s_t = (x_t, y_t)$  a rychlostního<sup>3</sup> vektoru  $r_t = (m_t, n_t)$  v čase  $t$ . Pro jejich časové derivace platí:

$$s'_t = r_t, \quad r'_t = 0,$$

kde vycházíme z těchto předpisů:

$$s_t = r \cdot t \quad r_t = r.$$

Změna pozice, na které se částice zrovna vyskytuje, je tedy přímo úměrná rychlostnímu vektoru, jehož hodnoty jsou konstantní. Na základě těchto poznatků je vyjádřena pozice a rychlost částice v čase  $t+k$ :

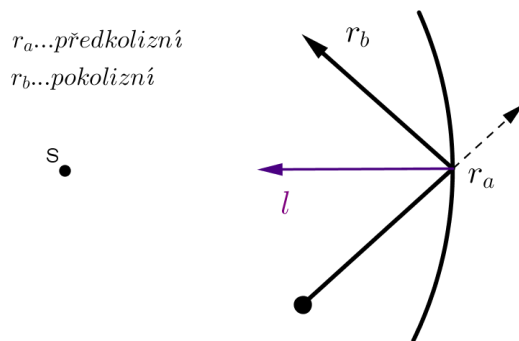
$$\begin{aligned} x_{t+k} &= x_t + k \cdot m_t, & m_{t+k} &= m_t; \\ y_{t+k} &= y_t + k \cdot n_t, & n_{t+k} &= n_t. \end{aligned}$$

To platí tak dlouho, dokud se částice nestřetne se stěnou kruhu. Až se tak stane, rychlostní vektor bude v daném hraničním bodě odražen přes tečnu.

*Věta 3.1:* Nechť  $l = (x, y)$  je jednotkový normálový vektor k hraniční stěně, pak pro rychlostní vektor vyvíjený částicí po kolizi platí:

$$r_{po\ kolizi} = r_{před\ kolizi} - 2 \cdot \langle r_{před\ kolizi}, l \rangle \cdot l,$$

kde  $\langle r_{před\ kolizi}, l \rangle$  značí skalární součin.



Obrázek 3.1: Vektory před a po odrazu

<sup>3</sup> Rychlostní - ve smyslu směrový

Po střetu s hraniční stěnou částice pokračuje ve volném pohybu uvnitř kulečnickové oblasti až do okamžiku, kdy opět narazí na hranici. Takto dochází při pohybu částice opakovaně ke kolizím, což může trvat nekonečně dlouho jak při zpětném popisu minulosti, tak v přirozeném vývoji směrem do budoucnosti.

*Poznámka:* Kolize se rozlišují z hlediska vzájemného vztahu mezi vektory před a po jejich realizaci:

1. Standardní – taková proběhne při dopadu částice na bod stěny, který je z množiny  $\tilde{q}$ , a předkolizní rychlostní vektor není totožný s tečnou v tomto bodě, tedy platí

$$r_{\text{před kolizi}} \neq r_{\text{po kolizi}}$$

2. Dotykové – předkolizní vektor je tečnou hranice v daném bodě kolize a platí, že

$$r_{\text{před kolizi}} = r_{\text{po kolizi}}$$

3. Vrcholové – částice dopadne na vrcholový hraniční bod z množiny  $q_*$  v tomto případě tečnu nelze sestrojít, proto po takové kolizi není další pohyb definován.

U kruhového stolu dochází pouze ke standardním kolizím. Aby došlo k dotykovým kolizím, je zapotřebí přítomnost konkávní stěny (vypouklé směrem dovnitř oblasti  $O$ ).

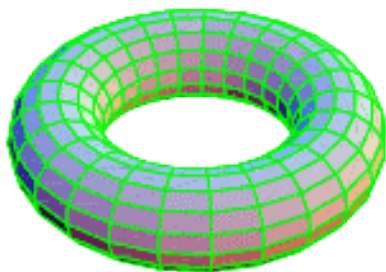
### 3.2 Popis kulečnickového systému z dlouhodobého hlediska

Hlavním cílem kulečnickových modelů jako součástí dynamických systémů je popsat dlouhodobý vývoj systému a zjistit jeho povahu, pokud čas  $t \rightarrow \infty$  (popř. že se počet střetů částice s hranicí kulečnickového stolu blíží nekonečnu, a to za předpokladu, že je rychlostní vektor definován po celou dobu  $t \in (-\infty, \infty)$ ). To lze uskutečnit pomocí kulečnickového toku nebo kolizního zobrazení.

### 3.2.1 Kulečnickový tok

*Definice 3.1:* Fázový prostor je množina všech možných stavů  $(s, r)$ , v nichž se může částice při svém pohybu nacházet, zde představuje  $s \in O$  polohu a  $r \in S^1$  rychlostní vektor.

Fázový prostor je tak trojrozměrný objekt  $\Pi := O \times S^1$ .



Obrázek 3.2: Tvar fázového prostoru – vyplněný torus<sup>4</sup>

Mějme stav  $(s, r) \in \Pi$  a časový interval  $(0, t)$ , po který je pohyb částice z daného stavu definován. Potom částice vycházející ze stavu  $(s, r)$  dosáhne za dobu  $t$  určitého stavu  $(s_t, r_t) \in \Pi$ . Takto lze o  $(s, r) \rightarrow (s_t, r_t)$  uvažovat jako o zobrazení na fázovém prostoru  $\Pi$ . Označíme jej  $\Phi^t$ , kde  $-\infty < t < \infty$ .

*Definice 3.2:* Množina zobrazení  $\{\Phi^t\}$  je grupa<sup>5</sup>, pro kterou platí:

$$\forall t, s \in \mathbf{R}: \Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}, \Phi^0 = \text{Id}$$

a je nazývána *kulečnickovým tokem* na fázovém prostoru.

Každou trajektorii toku  $\{\Phi^t z\}$ ,  $z \in \Pi$ , uvnitř fázového prostoru  $\Pi$  tvoří spojitá křivka. Zobrazení toku na oblast  $O$  je nazýváno *kulečnickovou trajektorií*, ta vytváří orientovanou polygonální křivku, jejíž vrcholy představují kolizní body kulečnicku.

*Věta 3.2:* Necht'  $\tilde{\Pi} \subset \Pi$  představuje množinu stavů, na kterých je pohyb částice definován v jakémkoli čase  $-\infty < t < \infty$ . Jestliže je kulečnickový stůl tvořen omezenou oblastí  $O$ , potom projde každá trajektorie toku  $\Phi^t: \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}$  nekonečně mnoha kolizemi.

Tedy, je-li  $O$  kruhový kulečnickový stůl, potom každá časově neomezená trajektorie toku projde nekonečně mnoha kolizemi.

<sup>4</sup> Vyplněný torus – prostorový útvar, který pochází z rotace kružnice okolo osy ležící ve stejné rovině.

<sup>5</sup> Pro připomenutí: *grupa* je dvojice skládající se z množiny a na ní definovanou binární operací, která je na dané množině uzavřená, asociativní, existuje pro ni neutrální prvek a přiřazuje každému bodu dané množiny inverzní prvek.

K popisu toku  $\Phi^t$  je možno využít souřadnic  $(x, y, \rho)$  na  $\Pi$ , kde  $x$  a  $y$  udávají umístění částice  $s = (x, y) \in O$  a  $\rho \in \langle 0, 2\pi \rangle$  vyjadřuje obloukový úhel mezi kladnou osou  $x$  a rychlostním vektorem  $r$ .

Pro každé  $t$  je zobrazení  $\Phi^t$  součástí fázového prostoru  $\Pi$ , uvažme libovolný bod a jeho obraz

$$(x^-, y^-, \rho^-) \xrightarrow{\Phi^t} (x^+, y^+, \rho^+).$$

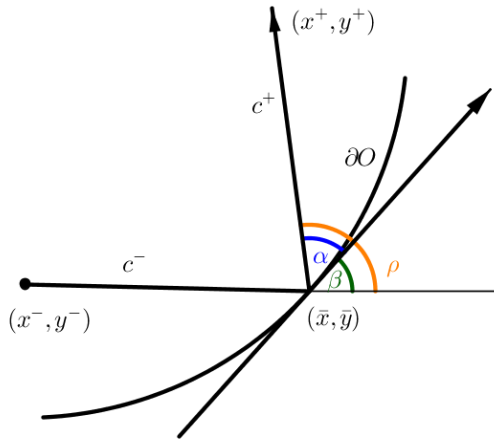
Pro zjištění změny, ke které dojde v průběhu časového intervalu  $(0, t)$ , spočteme derivaci zobrazení  $\Phi^t$ . Pokud mezi dvěma uvažovanými stavy nedojde ke kolizi, platí mezi nimi vztah, který popisují následující rovnice:

$$x^+ = x^- + t \cdot \cos \rho, \quad y^+ = y^- + t \cdot \sin \rho, \quad \rho^+ = \rho^-.$$

Za předpokladu, že v daném časovém intervalu došlo k právě jedné standardní kolizi, pak pro tento vztah platí:

$$\begin{aligned} x^- &= \bar{x} - c^- \cdot \cos \rho^-, & y^- &= \bar{y} - c^- \cdot \sin \rho^-, & \rho^- &= \beta - \alpha, \\ x^+ &= \bar{x} + c^+ \cdot \cos \rho^+, & y^+ &= \bar{y} + c^+ \cdot \sin \rho^+, & \rho^+ &= \beta + \alpha, \end{aligned}$$

kde  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial O$  udává bod kolize,  $c^-$  je čas, ve kterém k ní došlo, pro  $c^+$  platí  $c^+ = t - c^-$  a  $\beta$  je úhel mezi tečným vektorem hranice vedeným bodem kolize a kladnou částí osy  $x$ .



Obrázek 3.3: Proměnné při právě jedné kolizi v časovém intervalu  $(0, t)$

Tyto rovnosti se následně diferencují podle  $h$ , jež značí obloukový parametr na  $\partial O$ . Nejdříve si ovšem vyjádříme

$$d\bar{x} = \cos \beta dh,$$

$$d\bar{y} = \sin \beta dh,$$

$$d\beta = -Kdh.$$

Po diferencování tedy budou mít původní rovnice tento tvar:

$$dx^+ = \cos \beta dh + \cos \rho^+ dc^+ - c^+ \cdot \sin \rho^+ d\rho^+,$$

$$dy^+ = \sin \beta dh + \sin \rho^+ dc^+ + c^+ \cdot \cos \rho^+ d\rho^+,$$

$$d\rho^+ = -Kdh + d\alpha$$

a

$$dx^- = \cos \beta dh - \cos \rho^- dc^- + c^- \cdot \sin \rho^- d\rho^-,$$

$$dy^- = \sin \beta dh - \sin \rho^- dc^- - c^- \cdot \cos \rho^- d\rho^-,$$

$$d\rho^- = -Kdh - d\alpha.$$

Platí, že:

$$dx^+ \wedge dy^+ \wedge d\rho^+ = \sin \alpha dh \wedge dc^+ \wedge d\alpha,$$

$$dx^- \wedge dy^- \wedge d\rho^- = \sin \alpha dh \wedge dc^- \wedge d\alpha,$$

kde  $\wedge$  je znak pro vnější součin (viz. Dodatek č. 2)

A protože  $c^- + c^+ = t$ , kde  $t$  je konstantní, platí  $dc^- + dc^+ = 0$ . Díky tomuto obdržíme rovnost:

$$dx^+ \wedge dy^+ \wedge d\rho^+ = dx^- \wedge dy^- \wedge d\rho^-.$$

*Věta 3.3:* Tok  $\Phi^t$  udržuje formu oběmu  $dx \wedge dy \wedge d\rho$ , a tedy Lebesgueovu míru  $dx dy d\rho$  na  $\Pi$ .

Pro seznámení s Lebesgueovou mírou viz Dodatek č. 1.

*Definice 3.3:* Standardní pravděpodobnostní mírou udržovanou kulečnickovým tokem  $\Phi^t$  je míra  $dx dy d\rho$  normovaná na  $\Pi$ , platí tedy:

$$d\mu_{\Pi} = \frac{1}{2\pi|O|} \cdot dx dy d\rho,$$

kde  $|O|$  značí obsah stolu  $O$ .

### 3.2.2 Kolizní zobrazení

Kolizní zobrazení udává informaci o umístění kolizí, ovšem vzdálenost (resp. čas) v ní zahrnuta není a musí být dopočtena.

Tok  $\Phi^t$  lze pomocí křivé plochy  $G \subset \Pi$  vedené příčně k fázovému prostoru  $\Pi$  převést na zobrazení. Obvykle je plocha  $G$  vedena hranicí kulečnickového stolu, bude tedy tvořena množinou  $q \times S^1$ , kde  $q$  je obvod stolu. Na základě existence vztahu mezi předkolizním a pokolizním vektorem se vyplatí  $S^1$  zredukovat na půlkruh. Aby se tato úvaha uplatnila, popíše se řez jako množina všech pokolizních rychlostních vektorů.

*Definice 3.4:* Necht' hraniční křivka stolu je složena z  $n$  hladkých kompaktních křivek  $q_1, \dots, q_n$ . Pak dvourozměrná varieta  $\mathcal{G} \subset \Pi$ , pro kterou platí:

$$\mathcal{G} = \bigcup_i \mathcal{G}_i, \quad \mathcal{G}_i = \{x = (s, r) \in \Pi: s \in q_i, \langle r, l \rangle \geq 0\},$$

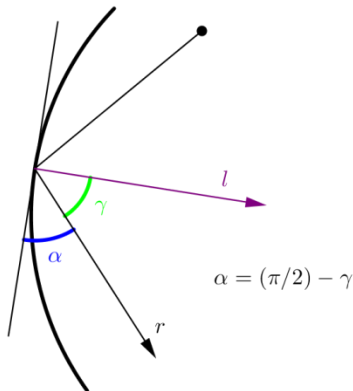
kde  $l$  představuje jednotkový normálový vektor ke kružnici  $q$  mířící dovnitř stolu  $O$ , se nazývá *kolizní prostor* kulečnickového systému.

*Poznámka:* Je-li kulečnickový stůl kruhový, tj. jeho hranice je tvořena jednou kompaktní křivkou – kružnicí, pak *kolizní prostor*  $\mathcal{G}$  definujeme jako

$$\mathcal{G} = \{x = (s, r) \in \Pi: s \in q, \langle r, l \rangle \geq 0\},$$

Můžeme tak říct, že kolizní prostor  $\mathcal{G}$  je tvořen body představující všechny potenciální kolize.

Necht' je každé hraniční křivce z  $q_1, \dots, q_n$  přiřazen obloukový parametr  $h \in \langle a_i, b_i \rangle$ , kde  $\langle a_i, b_i \rangle$  jsou v  $\mathbf{R}$  navzájem disjunktní. Pro každé  $z \in \mathcal{G}$  určuje  $\gamma \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$  úhel mezi  $r$  a  $l$ , přičemž oba vektory míří ze  $z$  dovnitř stolu.

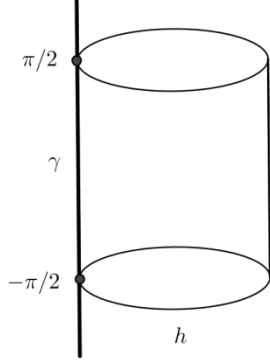


Obrázek 3.4: Vztah mezi  $\alpha$  a  $\gamma$ .

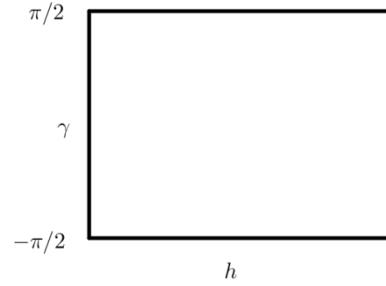


Kolize tak společně tvoří kolizní prostor  $\mathcal{G}$  se souřadnicemi  $h$  a  $\gamma$ .

*Poznámka:* Na hladkých uzavřených křivkách  $q_i$  (mezi něž patří i kružnice) je parametr  $h$  cyklický, proto má jejich kolizní prostor tvar válce, zatímco pro každou jinou část hranice je  $\mathcal{G}_i = \langle a_i, b_i \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$  obdélník.



Obrázek 3.5: Kolizní prostor kulečnicku na kruhu



Obrázek 3.6: Kolizní prostor pro i-tou stěnu hranice

Pokud je trajektorie  $\Phi^t z$ ,  $z \in \mathcal{G}$  definována v určitém časovém intervalu  $(0, \varepsilon)$ , střet částice s plochou  $G$  je v budoucím čase  $\zeta(z) > 0$  nevyhnutelný. Nazvěme  $\zeta(z)$  jako čas návratu. Z důvodu, že rychlost částice je stanovena jako konstanta rovna jedné, se čas návratu  $\zeta(z)$  rovná délce kulečnickové trajektorie počínaje v  $z$  a konče v kolizi, která následuje.

*Věta 3.4:* Necht'  $\tilde{\Pi}_c \subset \tilde{\Pi}$  značí množinu stavů, jimiž prochází trajektorie toku  $\Phi^t$  takové, u nichž dochází ke kolizím. Potom se jakákoli trajektorie toku  $\Phi^t: \tilde{\Pi}_c \rightarrow \tilde{\Pi}_c$  střetne s kolizním prostorem  $\mathcal{G}$  nekonečně mnohokrát.

*Definice 3.5:* Necht'  $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cap \tilde{\Pi}$ . Potom je kolizní zobrazení dáno předpisem

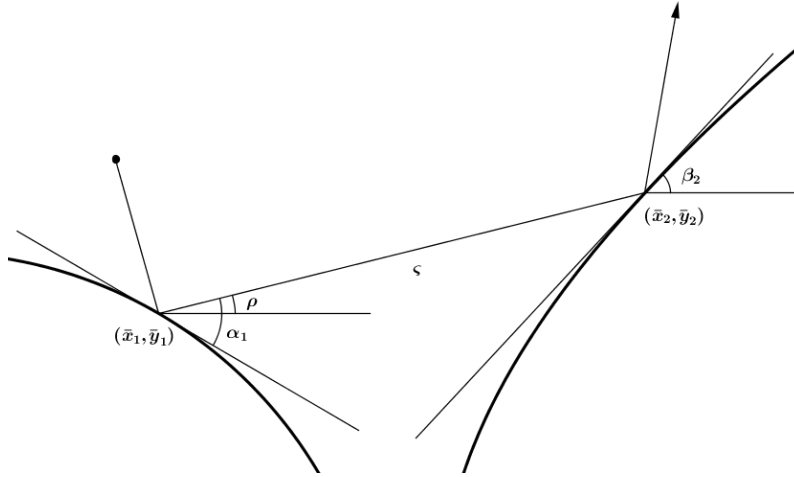
$$\mathcal{Z}: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}, \quad \mathcal{Z}(z) = \Phi^{\zeta(z)+0} z.$$

Uvažme nyní kolizní zobrazení  $\mathcal{Z}$  v bodě  $z = (h_1, \gamma_1) \in \text{int}\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{Z}(z) = (h_2, \gamma_2) \in \text{int}\mathcal{G}.$$

Máme tedy dva po sobě následující střety částice s hranicí nacházející se v bodech o souřadnicích  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  a  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ , kde  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  je hraniční bod příslušný parametru  $h_1$  a  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$  je hraniční bod o parametru  $h_2$ . Dále reprezentuje  $\rho$  úhel, který svírá dráha částice mezi uvažovanými kolizními body s kladnou osou  $x$ ,  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jednotlivé úhly odrazu a  $\beta_1, \beta_2$  úhly

mezi jednotlivými tečnými vektory v daných bodech hranice a kladnou osou  $x$ .



Obrázek 3.7: Proměnné při dvou kolizích (k určení velikosti změny kolizního zobrazení)

Změna v souřadnicích typu  $(x, y)$  je zachycena v následujících rovnicích:

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \zeta \cdot \cos \rho,$$

$$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \zeta \cdot \sin \rho,$$

kde  $\zeta$  udává délku dráhy mezi kolizemi, která je při jednotkové rychlosti rovna času návratu  $\zeta(x)$ .

Při diferencování těchto rovnic se znovu užije rovností

$$d\bar{x}_1 = \cos \beta_1 dh_1,$$

$$d\bar{x}_2 = \cos \beta_2 dh_2,$$

$$d\bar{y}_1 = \sin \beta_1 dh_1,$$

$$d\bar{y}_2 = \sin \beta_2 dh_2,$$

$$d\beta_1 = -K_1 dh_1,$$

$$d\beta_2 = -K_2 dh_2.$$

Potom tedy

$$\cos \beta_2 dh_2 - \cos \beta_1 dh_1 = \cos \rho d\zeta - \zeta \sin \rho d\rho,$$

$$\sin \beta_2 dh_2 - \sin \beta_1 dh_1 = \sin \rho d\zeta + \zeta \cos \rho d\rho.$$

Všimněme si, že platí

$$\rho = \beta_1 + \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2,$$

tato rovnice po diferencování vypadá takto:

$$d\rho = -K_1 dh_1 + d\alpha_1 = -K_2 dh_2 - d\alpha_2.$$

Řešením soustavy diferencovaných rovnic a nahrazením úhlů odrazovými dojdeme k rovnici:

$$\sin \alpha_2 dh_2 + \sin \alpha_1 dh_1 = \zeta d\rho.$$

Nyní v posledních dvou rovnicích nahradíme  $\alpha_1$  za  $\frac{\pi}{2} - \gamma_1$  a  $\alpha_2$  za  $\frac{\pi}{2} - \gamma_2$  a hledáme v nich řešení pro  $dh_2$  a  $d\alpha_2$ . Takto získáme:

$$\begin{aligned} -\cos \gamma_2 dh_2 &= (\zeta K_1 + \cos \gamma_1)dh_1 + \zeta d\gamma_1, \\ -\cos \gamma_2 d\gamma_2 &= (\zeta K_1 K_2 + K_1 \cos \gamma_2 + K_2 \cos \gamma_1)dh_1 + (\zeta K_2 + \cos \gamma_2)d\gamma_1. \end{aligned}$$

*Věta 3.5:* Derivace kolizního zobrazení v bodě  $z$  je dána maticí:

$$D_z \mathcal{Z} = -\frac{1}{\cos \gamma_2} \begin{pmatrix} \zeta K_1 + \cos \gamma_1 & \zeta \\ \zeta K_1 K_2 + K_1 \cos \gamma_2 + K_2 \cos \gamma_1 & \zeta K_2 + \cos \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Determinant derivační matice je pak roven  $\frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2}$ :

$$\begin{aligned} \det D_z \mathcal{Z} &= \left( -\frac{\zeta K_1}{\cos \gamma_2} - \frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} \right) \cdot \left( -\frac{\zeta K_2}{\cos \gamma_2} - \frac{\cos \gamma_2}{\cos \gamma_2} \right) - \\ &- \left( -\frac{\zeta}{\cos \gamma_2} \right) \cdot \left( -\frac{\zeta K_1 K_2}{\cos \gamma_2} - \frac{K_1 \cos \gamma_2}{\cos \gamma_2} - \frac{K_2 \cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} \right) = \frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2}. \end{aligned}$$

*Věta 3.6:* Zobrazení  $\mathcal{Z}$  udržuje míru  $\cos \gamma dh d\gamma$  na kolizním prostoru  $\mathcal{G}$ .

*Definice 3.6:* Standardní pravděpodobnostní mírou udržovanou kulečnickovým zobrazením  $\mathcal{Z}$  je nazývána míra  $\cos \gamma dh d\gamma$  normovaná na  $\mathcal{G}$ :

$$d\mu = \frac{1}{2|q|} \cdot \cos \gamma dh d\gamma.$$

*Příklad 3.1:* Jak vypadá derivační matice kolizního zobrazení v případě kruhového jednotkového kulečnickového stolu?

Užijeme rovnic

$$\begin{aligned} \rho_n &= \rho_0 + 2n\alpha_0, \\ \alpha_n &= \alpha_0. \end{aligned}$$

Po diferenciaci získáme

$$\begin{aligned} d\rho_n &= d\rho_0 + 2n d\alpha_0, \\ d\alpha_n &= d\alpha_0. \end{aligned}$$

Derivační matice má pak tento tvar

$$D\mathcal{Z}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

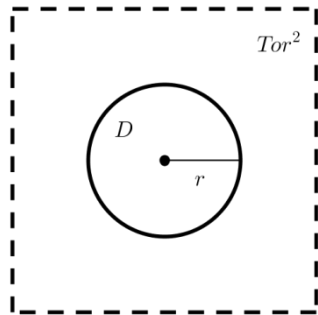
### 3.3 Průměrná doba návratu

Průměrná doba návratu (také lze říct průměrná volná dráha) udává průměrnou dobu (dráhu), která uplyne mezi kolizemi.

*Věta 3.7:* Pro průměrnou dobu návratu platí:

$$\bar{\zeta} = \frac{\pi|O|}{|q|}.$$

*Příklad 3.2:* Jaká je průměrná doba návratu na stole  $O = \text{Tor}^2 \setminus D$ , kde  $D$  je kruh o poloměru  $r$ .



Obrázek 3.8: Kulečnickový stůl  $\text{Tor}^2 \setminus D$

Obsah stolu

$$|O| = 1 \cdot 1 - \pi r^2$$

Délka hranice stolu

$$|q| = 2\pi r$$

Prům. doba návratu

$$\bar{\zeta} = \frac{\pi|O|}{|q|} = \frac{\pi(1 - \pi r^2)}{2\pi r} = \frac{1 - \pi r^2}{2r}$$

Průměrná doba návratu  $\bar{\zeta}$  na stole  $O = \text{Tor}^2 \setminus D$  je  $\frac{1 - \pi r^2}{2r}$ .

*Příklad 3.3:* Vyšetřete průměrnou dobu návratu na stole ve tvaru kruhu o poloměru  $r$ .

Obsah stolu

$$|O| = \pi r^2$$

Délka hranice stolu

$$|q| = 2\pi r$$

Průměrná doba návratu na kruhovém stole je tedy rovna

$$\bar{\zeta} = \frac{\pi|O|}{|q|} = \frac{\pi r}{2}.$$

### 3.4 Časová reverzibilita kulečnickových systémů

Pro jakýkoli bod  $z = (s, r) \in \Pi$  z fázového prostoru bod  $I_{\Pi}(z) = (s, -r)$  splňuje

$$\Phi^{-t}(I_{\Pi}(z)) = I_{\Pi}(\Phi^t z),$$

je-li po danou dobu  $t$  tok  $\Phi^t$  definovaný.  $I_{\Pi}: \Pi \rightarrow \Pi$  se nazývá involuční<sup>6</sup> funkce a s tokem  $\Phi^t$  je antikomutativní:

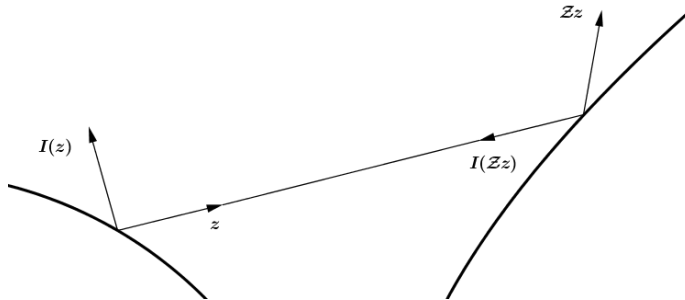
$$\Phi^{-t} \circ I_{\Pi} = I_{\Pi} \circ \Phi^t.$$

Tedy obrátí-li se směr pohybu, částice prochází stejnou dráhou zpět.

Podobně jako u toku, je možno zavést involuční funkci  $i$  u kolizního zobrazení  $\mathcal{Z}$ . Necht'  $I$  je involuce na  $\mathcal{G}$ , tedy  $I: (h, \gamma) \rightarrow (h, -\gamma)$ . Za předpokladu, že  $\mathcal{Z}^k$  je definované lze opět napsat:

$$\mathcal{Z}^{-k} \circ I = I \circ \mathcal{Z}^k,$$

kde  $k$  je celé číslo udávající počet kolizí.



Obrázek 3.9: Involuční vlastnost kulečnicků

<sup>6</sup> Involuce je funkce, která inverzně zobrazuje sebe samu, tedy platí  $f(f(x)) = x$ .

## 4 Dlouhodobý vývoj kulečnicku na kruhu

### 4.1 Kruh a kružnice

Anglický jazyk neuvádí pro kruh a kružnici dvou výrazů tak, jako je tomu v češtině. Jeden výraz (*circle*) zastupuje oba. V českém názvosloví, kružnice představuje spojitou množinu bodů v rovině, jejichž vzdálenost od daného bodu (středu  $S$ ) je pro všechny stejná. Tato vzdálenost je poloměrem kružnice. Kruh je pak spojitá množina bodů v rovině, jejíž hranice je tvořena kružnicí, tedy vzdálenosti bodů kruhu od středu  $S$  jsou rovny nebo menší než poloměr hraniční kružnice.

V kartézském souřadnicovém systému vyjadřuje kružnici se středem v bodě  $S(g, h)$  a poloměrem  $r$  obecná rovnice:

$$(x - g)^2 + (y - h)^2 = r^2.$$

Nachází-li se střed kružnice v bodě  $(0,0)$ , zredukuje se rovnice kružnice na:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pomocí parametru  $\omega \in \langle 0, 2\pi \rangle$  lze kružnici popsat jako množinu bodů  $(x, y)$ , které splňují:

$$x = g + r \cdot \cos \omega,$$

$$y = h + r \cdot \sin \omega.$$

Za použití polárních souřadnic vypadá rovnice kružnice, jejíž střed je v bodě  $S(\rho_0, \omega_0)$  jako

$$\rho^2 - 2\rho \cdot \rho_0 \cos(\omega - \omega_0) + \rho_0^2 = r^2.$$

Rovnici tečny kružnice v bodě získáme dosazením tečného bodu  $(x_0, y_0)$  do obecné rovnice kružnice:

$$(x - g)(x_0 - g) + (y - h)(y_0 - h) = r^2.$$

### 4.2 Vlastnosti kulečnicku na kruhu

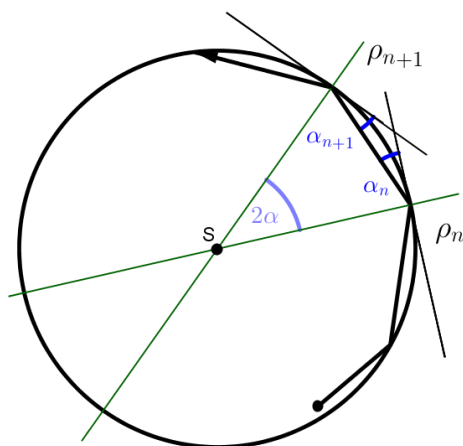
Průběh kulečnickového systému je závislý na výchozím stavu částice a především na tvaru stolu. Zaměřme se nyní blíže na kulečnickové modely, jejichž stolem  $O$  je jednotkový

kruh  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Mějme tedy úhel zvětšující se proti směru hodinových ručiček  $\rho \in \langle 0, 2\pi \rangle$ , který znázorňuje bod kolize a úhel odrazu  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ .

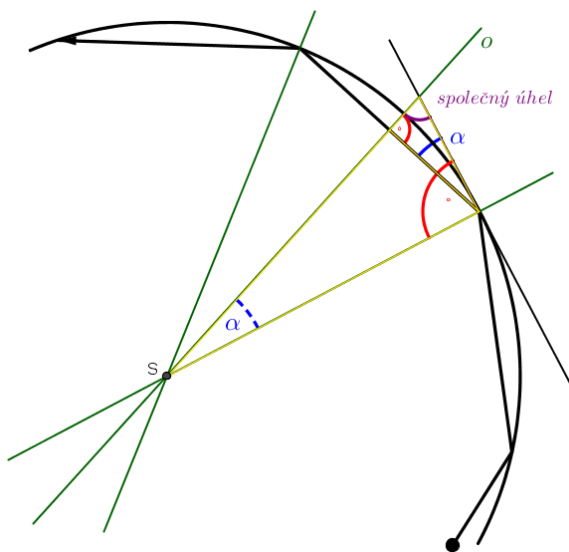
*Věta 4.1:* Pro kolizní zobrazení  $n$ -tého střetu na kruhovém stole platí:

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho_n + 2 \cdot \alpha_n, & \text{mod}(2\pi) & \quad (4.1) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n \end{aligned}$$



Obrázek 4.1

*Důkaz:*



Obrázek 4.2

Na základě podobnosti žlutě označených trojúhelníků z obrázku 4.2 totiž zjišťujeme, že vnitřní úhel trojúhelníku u středu kruhového stolu je roven úhlu odrazu částice. Přímka  $o$  je osou úhlu představujícího obloukovou změnu mezi po sobě následujícími kolizemi. Hodnota této změny je tak rovna dvojnásobku  $\alpha$ .

*Důsledek věty 4.1:* Rozšířeno na  $m$  po sobě následujících kolizí platí, že:

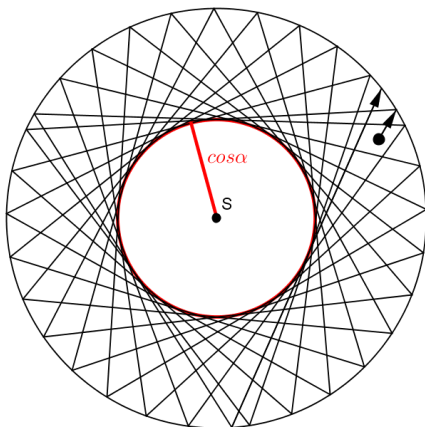
$$\begin{aligned} \rho_m &= \rho_{m-1} + 2 \cdot \alpha_{m-1} = \rho_{m-2} + 2 \cdot \alpha_{m-2} + 2 \cdot \alpha_{m-1} = \dots = \\ &= \rho_0 + 2 \cdot \alpha_0 + \dots + 2 \cdot \alpha_{m-2} + 2 \cdot \alpha_{m-1} = \rho_0 + 2 \cdot m \cdot \alpha_0, \text{ tedy} \\ \rho_m &= \rho_0 + 2 \cdot m \cdot \alpha_0 \\ \alpha_m &= \alpha_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Z vět vyplývá, že úhel odrazu je při všech kolizích stále stejný. Co víc, charakter kulečnickové trajektorie je naprosto určen úhlem odrazu  $\alpha$ . Takže známe-li tento úhel, jsme schopni určit vývoj kulečnicku na kruhu.

*Věta 4.2:* Na kruhovém kulečnickovém stole platí, že délka dráhy mezi každými dvěma po sobě probíhajícími kolizemi je neměnná.

*Důkaz:* Vyplývá to z definice kružnice a z faktu, že umístění kolizí se po kružnici posouvá pod neměnným úhlem  $2\alpha$ .

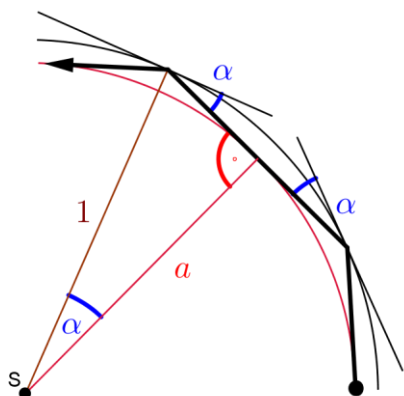
*Věta 4.3:* Každá část dráhy, kterou částice opíše mezi po sobě následujícími kolizemi, je tečnou menšího kruhu  $S_\alpha = \{ x^2 + y^2 = \cos^2 \alpha \}$ , jehož střed je totožný se středem kruhového stolu.



**Obrázek 4.3:** Tečná kružnice o poloměru  $\cos \alpha$



*Důkaz:*



Obrázek 4.4: Důkaz věty 4.3

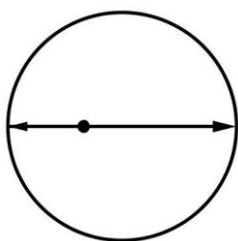
Díky kosinově větě je možno odvodit vzdálenost nejbližšího bodu ke středu kruhu  $S$ , kterým částice při svém pohybu mezi kolizemi prochází, značenou na obrázku 4.4 písmenem  $a$  jako:

$$\cos \alpha = \frac{a}{1}$$

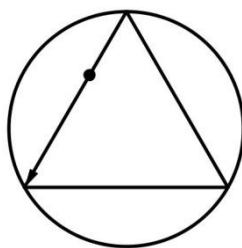
$$a = \cos \alpha$$

Protože každý segment mezi kolizemi je stejný, bude vždy stejná i délka  $a$ .

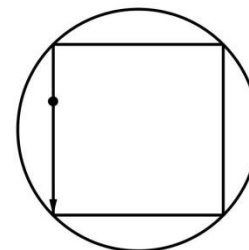
*Věta 4.4:* Necht'  $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{m}{n}$ , kde  $\alpha \in (0, \pi)$  značí úhel odrazu, je racionální číslo, potom má systém periodický vývoj. Po určitém počtu kolizí se tak částice vrací do stavu, ve kterém se již nacházela.



Obrázek 4.5.a



Obrázek 4.5.b



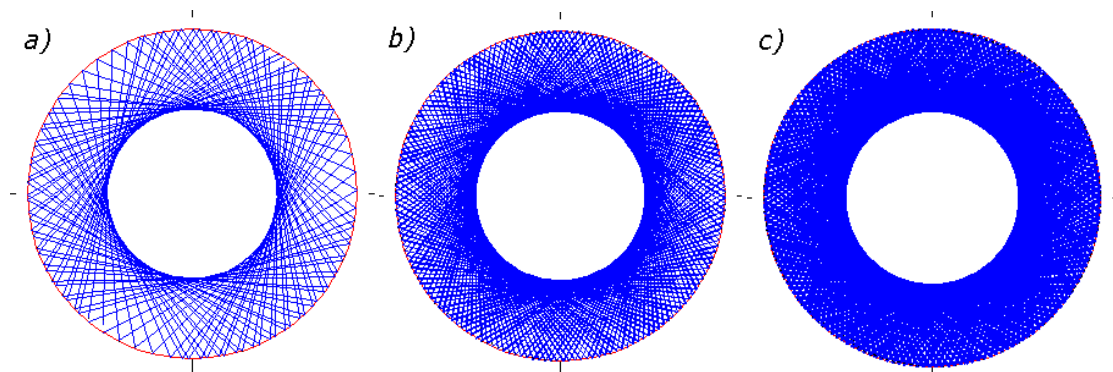
Obrázek 4.5.c

*Důkaz:* Každý následující bod nárazu získáme rotací předchozího kolizního bodu pod úhlem  $2\alpha$ . Jistě existuje takový součet určitého počtu racionálních částí kruhu  $\frac{\alpha}{\pi}$  (představující posuny), který dává celé číslo, tedy se po určitém počtu kolizí vrací do úderové pozice na kružnici  $q$ , ve které se již nacházel.

Je-li zlomek  $\frac{m}{n}$  racionální číslo, pak  $n$  udává minimální periodu a  $m$  počet otáček částice v kruhu během periody.

Pokud  $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{m}{n}$  je iracionální číslo, potom se v žádném kolizním bodě částice nestřetne s hranicí vícekrát než jednou a pro každý kolizní stav  $(\rho, \alpha)$  jsou místa následujících kolizí  $\{\rho + 2n\alpha, n \in \mathbb{Z}\}$  na sobě nahuštěná a rovnoměrně rozdělená po hranici  $q$ . Pak řekneme, že každý

interval hranice obsahuje kolizní body této dráhy.



Obrázek 4.6: Ukázka neperiodického vývoje systému po a) 100 kolizích, b) 500 kolizích, c) 1000 kolizích

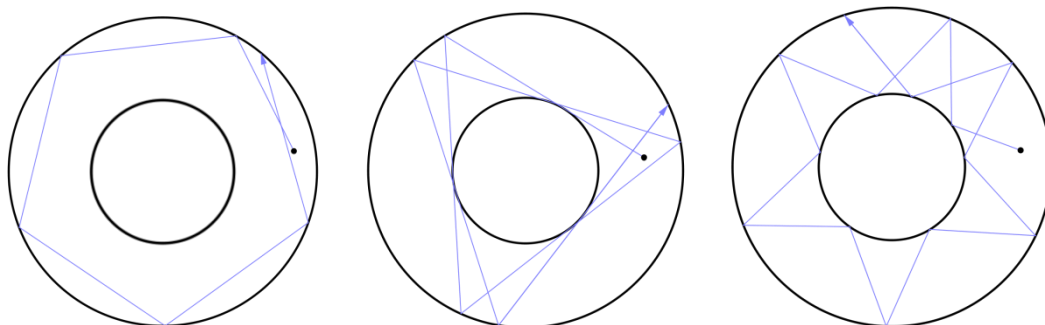
Rotace kolizí po kružnici udržují na kruhu neměnnou Lebesgueovu míru.

### 4.3 Modifikace kruhu

*Příklad 4.1:* Nechť má kulečnickový stůl tvar prstence, jehož plochu ohraničují dvě soustředné kružnice (vnější je jednotková). Jaký má takový systém průběh?

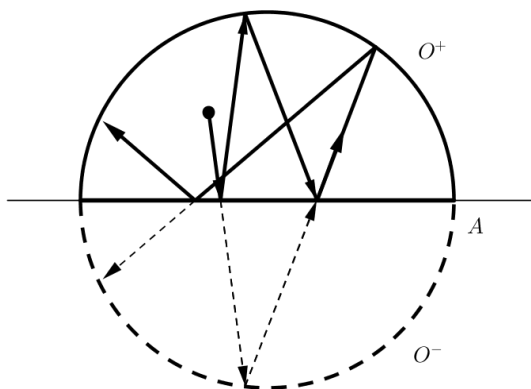
Vývoj systému u prstencového stolu závisí na velikosti vnitřní kružnice stolu a na úhlu odrazu od vnější kružnice.

- Průměr vnitřní kružnice je menší než  $\cos \alpha$  - ke střetu dochází pouze s vnější kružnicí a přítomnost vnitřní stěny chod částice nijak neovlivňuje. Pohyb je totožný s pohybem u kulečnicku na kruhu.
- Průměr vnitřní kružnice je roven  $\cos \alpha$  - částice se vnitřní stěny dotkne, ovšem systém se vyvíjí stále stejně jako u kruhu.
- Průměr vnitřní kružnice je větší než  $\cos \alpha$  - částice střídavě naráží do vnitřní a vnější stěny, u každé s neměnicími se úhly.



Obrázek 4.7: Tři možné situace na prstencovém stole

Za úvahu stojí rovněž modifikace kruhového stolu na půlkruh. Zde se ovšem vyskytují dva vrcholové body.



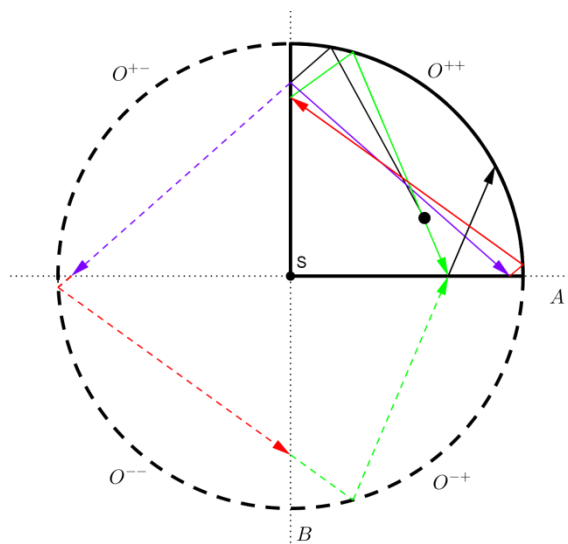
Obrázek 4.8: Kulečnick na půlkruhu

$O^+$  je označením pro vrchní půlkruh  $\{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ , necht' se nyní částice pohybuje v oblasti  $O^+$  a odráží se od hraniční křivky  $q^+$ . Takovýto model lze užitím osové souměrnosti převést na kruhový, kde osou bude  $A = \{y = 0\}$ . Trajektorie v  $O^+$  se po střetu s osou  $A$  bude zobrazovat do spodního půlkruhu  $O^- = \{x^2 + y^2 \leq 1, y < 0\}$  až do dalšího střetu s  $A$ , kdy se obraz díky své symetričnosti zase spojí přechodem přes  $A$  s předlohou a spolu pokračují až do další kolize s osou, kde se opět rozdělí. Tento děj se neustále opakuje za předpokladu, že se částice nedotkne jednoho z vrcholů  $(1,0)$  nebo  $(-1,0)$ . V takovém případě je popis pohybu částice přerušen a dále pohyb není definován. Užitím této úvahy mohou být vlastnosti kulečnickové trajektorie v půlkruhu  $O^+$  odvozeny z kulečnicku na kruhu  $O$ .

*Příklad 4.2:* Lze podobně jako u půlkruhu průběh na čtvrtkruhu odvodit z kruhového stolu?

Ano, mějme čtvrtkruh  $O^{++} = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ , s použitím os  $A = \{y = 0\}$  a

$B = \{x = 0\}$  zobrazujeme dráhu částice při každém střetu s rovnými stěnami, které na nich leží. Při pomyslném putování částice kruhem se přes osu B zobrazí do  $O^{+-} = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}$ , odtud dále přes osu A do  $O^{--} = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, y \leq 0\}$ , kde složením těchto dvou zobrazení je souměrnost vůči  $O^{++}$  převedena na středovou. Z  $O^{--}$  se dráha při styku s osou B zobrazí do  $O^{-+}$ , kde se jí navrací souměrnost osová a při přechodu přes A se opět spojí s předlouhou v  $O^{++}$ . Čtvrtkruh má tři vrcholy:  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  a  $(0,0)$ . Po nárazu do těchto bodů není směr pohybu dále definován.



**Obrázek 4.9: Kulečnick na čtvrtkruhu**

## Dodatek č. 1 – Lebesgueova míra

Mějme množinovou funkci  $\delta: \tau \rightarrow R^*$ , kde  $\tau$  je systém množin, z nichž je jedna prázdná, a  $R^*$  značí obor reálných čísel zahrnující  $+\infty$  a  $-\infty$ . Pak řekneme, že funkce  $\delta$  je *aditivní* (resp.  $\sigma$ -*aditivní*), pokud  $\delta(\emptyset) = 0$  a pro jakýkoli konečný systém po dvou disjunktních množin (resp. jakoukoli posloupnost po dvou disjunktních množin)

$$C_1, \dots, C_k \in \tau: \bigcup_{i=1}^k C_i \in \tau \quad \left( \text{resp. } (C_i) \in \tau: \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \tau \right)$$

platí, že

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^k C_i\right) = \sum_{i=1}^k \delta(C_i) \quad \left( \text{resp. } \delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(C_i) \right).$$

Pak  $\sigma$ -aditivní množinovou funkci, která nabývá pouze nezáporných hodnot, nazveme *mírou*. Je-li nezáporná množinová funkce aditivní, nazveme ji *objemem*.

Nechť  $O$  označuje libovolný okruh<sup>7</sup> podmnožin v  $\mathbf{R}^n$  a  $\delta$  je objem na něm definovaný. Řekneme, že *objem  $\delta$  je regulární*, pokud pro každou množinu  $C \in O$  a každé  $\varepsilon > 0$  existuje uzavřená množina  $K$  a množina otevřená  $L$ , pro které platí  $K \subset C \subset L$  a splňují

$$\delta(L) - \varepsilon \leq \delta(C) \leq \delta(K) + \varepsilon.$$

Dále necht'  $E_n$  značí systém všech množin, jež lze vyjádřit sjednocením konečného počtu intervalů v  $\mathbf{R}^n$  ( $E_n$  tak splňuje podmínky pro to, aby mohl být okruhem). Potom platí, že objem  $m_n$  množiny  $C$  z okruhu  $E_n$  daný předpisem

$$m_n(C) = \sum_{i=1}^k m_n(I_i),$$

kde  $I_1, \dots, I_k$  jsou po dvou disjunktní intervaly, které dohromady udávají množinu  $C$ , je regulární.

Mějme regulární objem  $\xi$  na  $E_n$ . Potom pro každé  $C \in E_n$  definujeme *vnější míru*  $\xi^*(C)$  jako:

$$\xi^*(C) = \inf_{(A_j) \in T_C} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j) \right\},$$

kde  $T_C$  představuje systém tvořený posloupnostmi  $(A_j)$  otevřených množin z okruhu  $E_n$ ,

<sup>7</sup> Okruh  $O$  – neprázdný systém množin  $O$ , pro který platí, že  $\forall C, D \in O: C \cup D \in O$  a také  $C \setminus D \in O$ .

které množinu  $C$  pokrývají, tedy platí  $C \subset \cup A_j$

Vnější míra  $\xi^*$  má tyto vlastnosti:

1.  $\xi^*(\emptyset) = 0$ ,
2.  $C \subseteq D \Rightarrow \xi^*(C) \leq \xi^*(D)$ ,
3.  $\xi^*(\cup_{s=1}^{\infty} C_s) \leq \sum_{s=1}^{\infty} \xi^*(C_s)$ ,

kde  $C, D$  a  $C_s$  jsou množiny ze systému všech podmnožin  $\mathbf{R}^n$ .

Nechť  $M_0$  značí systém všech podmnožin  $C \subset \mathbf{R}^n$ , ke kterým existuje posloupnost  $(C_k) \in E_n$ , pro niž platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = C,$$

a  $M$  představuje systém všech podmnožin  $C \subset \mathbf{R}^n$ , ke kterým lze najít posloupnost množin  $(C_k)$  z  $M_0$ , pro něž platí, že  $C = \cup C_k$ . V případě, že množinovou funkcí  $\xi^*$  na  $E_n$  je  $n$ -rozměrný objem  $m_n$ , pak se tato funkce nazývá *Lebesgueova míra* v  $\mathbf{R}^n$ . *Lebesgueovské měřitelnými množinami* jsou tak prvky  $\sigma$ -okruhu<sup>8</sup>  $M$ .

Lebesgueova míra má následující vlastnosti:

1.  $\xi(\emptyset) = 0$ ,
2.  $C \subseteq D \Rightarrow \xi(C) \leq \xi(D)$ ,
3.  $\sigma$ -aditivita míry  $\xi$ :  $(s \neq t \Rightarrow C_s \cap C_t = \emptyset) \Rightarrow \xi(\cup_{s=1}^{\infty} C_s) = \sum_{s=1}^{\infty} \xi(C_s)$ ,
4. je úplná:  $\xi^*(C) = 0$ , kde  $C \subseteq \mathbf{R}^n \Rightarrow \xi(C) = 0$ , kde  $C \in \Gamma$  (množina míry 0 má nulovou Lebesgueovu míru).

Je vhodné podotknout, že Lebesgueova míra se tak v 1,2,3-dimenzionálních prostorech shoduje s délkami, obsahy a objemy.

---

<sup>8</sup>  $\sigma$ -okruh  $O$  – okruh, pro který platí, že:  $\forall C_1, C_2, \dots \in O: \cup_{j=1}^{\infty} C_j \in O$

## Dodatek č. 2 – Vnější součin forem

Je-li  $B$   $b$ -rozměrný reálný vektorový prostor, pak lineární formou nazveme lineární zobrazení  $\psi: B \rightarrow \mathbf{R}$  a dále  $B^k = B \times B \times \dots \times B$  (v tomto součinu je  $B$   $k$ -krát součinitelem) považujeme za  $k$ -tou kartézskou mocninu  $B$ . Potom zobrazení  $\psi: B^k \rightarrow \mathbf{R}$  je *antisymetrická  $k$ -forma* na  $B$ , pokud platí:

1.  $\forall i: 1 \leq i \leq b$  a  $\forall (\zeta^1, \dots, \zeta^{i-1}, \zeta^{i+1}, \dots, \zeta^b) \in B$

je zobrazení  $\zeta \rightarrow \psi(\zeta^1, \dots, \zeta^{i-1}, \zeta, \zeta^{i+1}, \dots, \zeta^b) \in \mathbf{R}$ , kde  $\zeta \in B$ , lineární.

2. Pro jakékoli  $i, j: 1 \leq i < j \leq b$  a jakékoli vektory  $\zeta_1, \dots, \zeta_r \in B$ :

$\psi(\zeta_1, \dots, \zeta_i, \dots, \zeta_j, \dots, \zeta_k) = -\psi(\zeta_1, \dots, \zeta_j, \dots, \zeta_i, \dots, \zeta_k)$ , kde vektor  $\zeta_i$  (resp.  $\zeta_j$ ) zaujal na pravé straně rovnice původně  $j$ -tou (resp.  $i$ -tou) pozici.

Mějme tedy  $k$ -formu  $\psi$  a  $l$ -formu  $v$  na  $B$  splňující předchozí podmínky, potom

$$(\psi \wedge v)(\zeta_1, \dots, \zeta_{k+l}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\delta} \text{sgn } \delta \cdot \psi(\zeta_{\delta(1)}, \dots, \zeta_{\delta(k)})v(\zeta_{\delta(k+1)}, \dots, \zeta_{\delta(k+l)})$$

kde  $\zeta_1, \dots, \zeta_{k+l}$  jsou jakékoli vektory v prostoru  $B$ ,  $\delta$  značí permutaci množiny  $(1, 2, \dots, k+l)$  a  $\text{sgn } \delta$  dává informaci o tom, zda je to permutace sudá (rovna 1) nebo lichá (rovna  $-1$ ), je *vnějším součinem forem  $\psi$  a  $v$* , který udává  $(k+l)$ -formu  $\psi \wedge v$  na  $B$ . Pro ten mimo jiné platí:

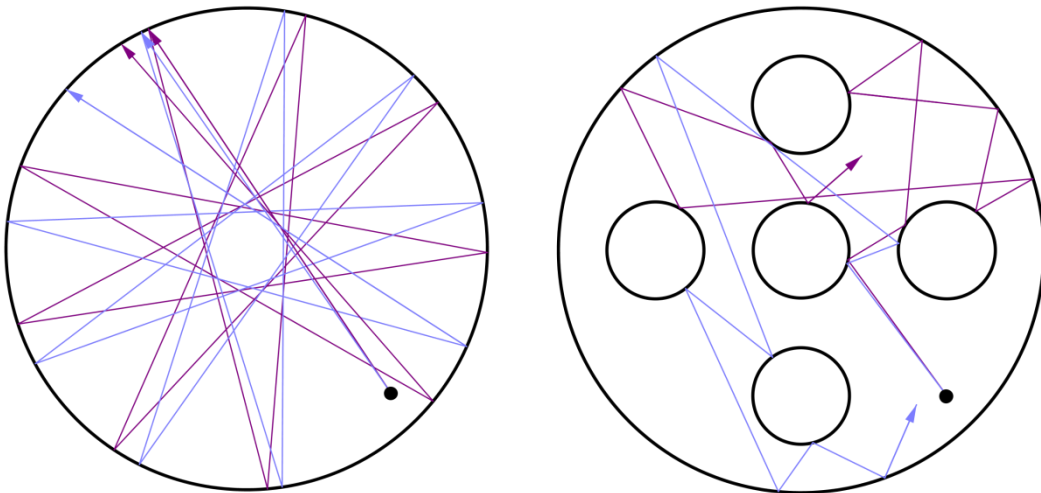
$$\psi \wedge v = (-1)^{k \cdot l} \cdot v \wedge \psi, \quad (\psi \wedge v) \wedge \vartheta = \psi \wedge (v \wedge \vartheta),$$

kde  $\vartheta$  je taktéž antisymetrická forma.

## Závěr

Kulečnick na kruhu se tedy vyznačuje pravidelným pohybem. Díky tomu lze na základě daných počátečních podmínek předpovědět dlouhodobý vývoj. Ten můžeme shrnout následovně. Části trajektorií mezi jednotlivými kolizemi se dotýkají kruhu o poloměru  $\cos \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel odrazu, který se nemění. Díky neměnnému  $\alpha$  lze získat umístění kolizí rotací bodu vždy posledního střetu s hranicí. Umístění kolizí na hranici je dáno předpisy č. (4.1) popř. (4.2). Rovněž jsme si ukázali, že kulečnickové systémy, jejichž stůl tvoří vhodně stanovené kruhové části, mohou mít s kulečnickem na kruhu shodné nebo podobné vlastnosti.

Ovšem musím poznamenat, že v reálném světě se vyskytují velice často složitější systémy. Uvažme, že jsou na kulečnickový stůl umístěny např. překážky či více pohybujících se částic. Systém se tak stává s rostoucím počtem takových objektů nepřehledným a hůře předvídatelným.



Obrázek 5.1: Následky změny směru pohybu částice o  $1^\circ$ : u kruhového stolu je dráha částice podobná, zvětšuje se akorát vzdálenostní rozdíl mezi kolizemi; u kruhového stolu s překážkami jsou dráha i kolize v tomto případě již při 3. kolizi naprosto odlišné.

Z deterministického hlediska po určitém počtu kolizí mohou odchylky výpočtů pozic u některých stolů stoupat až do takových rozměrů, že nelze ani určit, od které stěny se částice příště odrazí. To je chaos. V takových situacích se přistupuje ke stochastickým modelům, které nezávisí na počátečních podmínkách. Stabilitu systému lze určit pomocí tzv. Lyapunovových exponentů, které vyjadřují, jakou tendenci k proměnlivosti kulečnickové trajektorie mají. Avšak takové výpočty jsou již komplikovanější a vyžadují si celkový



přehled dynamických systémů. Proto na chaotické systémy tento text poukazuje jen velice okrajově.

Ačkoli v úvahách kulečnickových systémů došlo v minulosti k rozsáhlému pokroku, není volně dostupných zdrojů mnoho, v češtině takměř nic. Většina textů bývá navíc zpracována za předpokladu, že čtenář je již s danou tématikou obeznámen, což může mít na kulečnickového nováčka demotivující účinek. Tato práce je naopak psána tak, aby bylo vše srozumitelné i pro začátečníka, a tak pevně věřím, že dobře poslouží mnoha těm, kteří se touto problematikou budou zabývat.

## Seznam literatury

- [1] N. Chernov, R. Markarian: *Chaotic Billiards*. Providence, Rhode Island: American Mathematic Society, 2006.
- [2] D. Krupka: *Úvod do analýzy na varietách*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p., 1986.
- [3] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Lebesgueova míra a integrál* In Matematika pro vysoké školy technické. Praha: SNTL, 1985.
- [4] J. Fuka, B. Havelka: *Optika a atomová fyzika – I. Optika*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1961.
- [5] Katsuhiko Nakamura, Takahisa Narayama: *Quantum chaos and quantum dots* In Mesoscopic Physics and Nanotechnology Series. Oxford: Oxford University Press, 2004.
- [6] S. Tabachnikov: *Geometry and Billiards*. Providence, Rhode Island: American Mathematic Society, 2005. [online] dostupné z <http://www.math.psu.edu/tabachni/Books/billiardsgeometry.pdf> .
- [7] B. Hasselblatt, A. Katok: *A First Course in Dynamics with a Panorama of Recent Developments*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [8] U. A. Rozikov: *Mathematical Billiards*, Asia Pacific Mathematics Newsletter, April 2012, pages 6-10.
- [9] *Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie* [online], dostupné z <http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF069/tmf069.pdf> , [citováno 16.1.2013].
- [10] *Křivkový integrál vektorového pole* [online], dostupné z <http://math.feld.cvut.cz/tiser/iweb7.pdf> , [citováno 16.1.2013].
- [11] *Deterministický chaos – plod počítačové fyziky* [online], dostupné z <http://www.chaos.estranky.cz/file/28/pokorny.pdf> , [citováno 24.2.2013].
- [12] *Birkhoff billiards* [online], dostupné z <http://www.dynamical-systems.org/billiard/info.html> [citováno 30.3.2013].
- [13] Leonid Bunimovich: *Dynamical billiards* [online], dostupné z [http://www.scholarpedia.org/article/Dynamical\\_billiards](http://www.scholarpedia.org/article/Dynamical_billiards) , [citováno 13.1.2013].
- [14] *Dynamical billiards*, [online] dostupné z [http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical\\_billiards](http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_billiards) [citováno 13.1.2013].
- [15] Marc Spiegelman: *An introduction to Dynamical Systems and Chaos*, [online] dostupné z <http://www.ldeo.columbia.edu/~mspieg/Complexity/Problems.pdf> , [citováno 14.12.2013].

- [16] *Torus*, [online] dostupné z <http://cs.wikipedia.org/wiki/Torus> , [citováno 16.12.2013].
- [17] *Grupa*, [online] dostupné z <http://cs.wikipedia.org/wiki/Grupa>, [citováno 2.3.2013].
- [18] *Involuce*, [online] dostupné z [http://cs.wikipedia.org/wiki/Involuce\\_\(matematika\)](http://cs.wikipedia.org/wiki/Involuce_(matematika)), [citováno 6.3.2013].
- [19] *Siani's Billiard*, [online] dostupné z <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:SinaiBilliard.png> .
- [20] *Solid Torus*, [online] dostupné z [http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/HomotopicTorus\\_1000.gif](http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/HomotopicTorus_1000.gif) .

### **Online aplikace na vykreslení kulečnickové trajektorie na kruhovém stole**

- [A1] *Circle Billiard*, [online] dostupné z <http://serendip.brynmawr.edu/chaos/javacode/circle/circle.html> .