



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

VÝPOČET PRŮHYBU HŘÍDELE ELEKTRICKÉHO STROJE ZAHRNUJÍCÍ VLIV MAGNETICKÉHO TAHU

PROGRAMME FOR CALCULATION OF ELECTRIC MACHINE SHAFT DEFLECTION CAUSED BY
MAGNETIC TRACTION

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. RADEK KUKAČKA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. RADEK VLACH, Ph.D.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Radek Kukačka

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Výpočet průhybu hřídele elektrického stroje zahrnující vliv magnetického tahu

v anglickém jazyce:

Programme for calculation of electric machine shaft deflection caused by magnetic traction

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem je navrhnout výpočtový postup pro výpočet průhybu odstupňované hřídele používané v elektrických strojích v programu ANSYS/WORKBENCH. Při výpočtu průhybu hřídele elektrického stroje se objevuje problém se stanovením vlivu magnetického tahu na průhyb, který je závislý právě na průhybu pod rotorovým svazkem. Velikost magnetického tahu je závislá na vzájemné interakci mezi rotorem a statorem elektrického stroje. Výpočet průhybu hřídele s uvážením magnetického tahu je ve většině programů založených na MKP dosti problematický. Výjimkou není ani ANSYS/WORKBENCH, kde není možné zahrnout vliv magnetického tahu bez použití iteračního přístupu. Oproti tomu metoda přenosových matic umožňuje zahrnutí vlivu magnetického tahu a to tak, že není třeba použít iteračního řešení.

Cíle diplomové práce:

- volba výpočtové metody
- metoda stanovení vlivu magnetického tahu na výpočet pomocí MKP
- vytvoření výpočtového postupu průhybu hřídele

Seznam odborné literatury:

- [1] Puchmajer P., Řezníček J., Švehla V.: Pružnost a pevnost pro VS I
- [2] Janíček P., Ondráček E., Vrbka J, Burša J.: Mechanika těles - Pružnost a pevnost I
- [3] Florian Z., Ondráček E., Kříkryl K.: Mechanika těles - Statika

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Radek Vlach, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 22.11.2013

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá návrhem metodiky výpočtu průhybu a kritických otáček rotoru elektrických strojů. V práci jsou použity dvě metody výpočtu. První je metoda přenosových matic, se kterou je spojeno prostředí Matlab. V něm je vytvořen jednoduchý program pro tvorbu geometrie hřídele a výpočet požadovaných hodnot. Druhou je metoda konečných prvků, která je prezentována v programu Ansys Workbench.

Klíčová slova:

Magnetický tah, metoda přenosových matic, metoda konečných prvků, průhyb hřídele, kritické otáčky.

Abstract

This Master thesis describes the design of methodology for calculating shaft deflection and critical speed of electric machines. There are two methods used. The first one is transfer matrix method, which is represented by a simple programme for shaft creation and calculating needed results built in the Matlab software. The second one is finite element method, which is presented in the Ansys Workbench software.

Key words:

Magnetic traction, magnetic pull, transfer matrix method, finite element method, shaft deflection, critical speeds.

Bibliografická citace:

KUKAČKA, R. Výpočet průhybu hřídele elektrického stroje zahrnující vliv magnetického tahu. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 67 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Radek Vlach, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, pod vedením vedoucího diplomové práce pana doc. Ing. Radka Vlacha, Ph.D. a s použitím uvedených zdrojů.

V Brně dne 30. května 2014

.....

Radek Kukačka

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval panu doc. Ing. Radku Vlachovi, Ph.D. za cenné připomínky a odborné rady, kterými přispěl k vypracování této diplomové práce, a za čas, který mi věnoval. Dále bych chtěl také poděkovat panu Ing. László Ivánovi, Ph.D. ze společnosti SVS FEM s.r.o. v Brně za odborné rady s prostředím ANSYS.

Obsah

1	Úvod	11
2	Cíle práce	12
3	Magnetický tah	13
4	Metody výpočtu	15
4.1	Přímá integrace – diferenciální přístup	15
4.2	Castiglianova věta – integrální přístup	15
4.3	Metoda počátečních parametrů	15
4.4	Metoda přenosových matic	15
5	Metoda přenosových matic	16
5.1	Odvození přenosové matice pro prostý ohyb	16
5.2	Vytvoření celkové přenosové matice hřídele	18
5.3	Modelování ložisek	19
5.4	Modelování magnetického tahu	22
6	Program Hřídel	24
6.1	Bloky programu	25
6.1.1	Charakteristika hřídele	25
6.1.2	Geometrie	26
6.1.3	Manipulační tlačítka a hlavní nabídka	27
6.2	Kontroly vstupů a varování	28
6.3	Výpočet	30
6.3.1	Výpočet průhybové čáry a reakcí ve vazbách	31
6.3.2	Výpočet kritických otáček	32
6.4	Reprezentace výsledků	33
6.5	Přenos aplikace	34
7	Metoda konečných prvků	35
7.1	MKP elementy	35
7.1.1	BEAM188	35
7.1.2	SOLID 187	35
7.1.3	MASS21	36
7.1.4	COMBIN14	36
7.1.5	COMBI214	37
7.1.6	Bushing Joint (MPC184)	37
7.2	Magnetický tah	37
7.3	Řešení průhybu	39

7.4	Dynamika rotoru	41
7.4.1	Souběžná a protiběžná precese.....	41
7.4.2	Gyroskopický efekt	41
7.4.3	Campbellův diagram.....	41
7.5	Modální analýza	42
8	Výsledky.....	44
8.1	Rotor elektromotoru.....	44
8.1.1	Program Hřidel	45
8.1.2	Program Ansys Workbench	46
8.1.3	Porovnání výsledků.....	47
8.2	Rotor servomotoru	48
8.2.1	Program Hřidel	48
8.2.2	Program Ansys Workbench	50
8.2.3	Porovnání výsledků.....	51
9	Model rotoru a statoru.....	52
10	Závěr	54
11	Seznam použitých zdrojů a programového vybavení	55
11.1	Zdroje	55
11.2	Programové vybavení	56
12	Seznam použitých zkratk a symbolů	57
13	Seznam obrázků	59
14	Seznam tabulek	61
15	Přílohy.....	62
	Základní matice	63
	Matice pro rotující prvky.....	66

1 Úvod

V dnešní době je používáno mnoho elektrických rotačních strojů. Průhyb hřídelí těchto strojů není závislý jen na gravitační síle a vazbách s okolím, ale také na interakci rotoru a statoru, při které vzniká magnetické pole. Toto pole pak působí na rotor i stator výsledným magnetickým tahem. V současnosti je samozřejmostí používání softwaru pro řešení matematických a fyzikálních problémů, ale zahrnutí magnetického tahu do výpočtu v těchto softwarech není vždy nejjednodušším úkolem.

V této práci bude navržena metodika pro výpočet průhybu a kritických otáček hřídele používané v elektrických strojích se zahrnutím vlivu magnetického tahu. Výsledky budou počítány metodou přenosových matic a metodou konečných prvků. Výstupem obou metod bude graf průhybové čáry a hodnoty kritických otáček.

2 Cíle práce

Cílem této práce je navrhnout metodiku pro výpočet průhybu a kritických otáček hřídele používané v elektrických strojích. Výpočet bude proveden dvěma metodami, a to metodou přenosových matic a metodou konečných prvků.

První část práce se zabývá metodou přenosových matic. V programu Matlab bude vytvořen program, který uživateli umožní ve zjednodušené míře vymodelovat hřídel a vypočítat požadované výsledky.

Druhá část se bude zabývat metodou konečných prvků a programem Ansys Workbench. Na jednoduchém modelu, který nebude reprezentovat žádný konkrétní stroj, bude ukázáno zadání magnetického tahu.

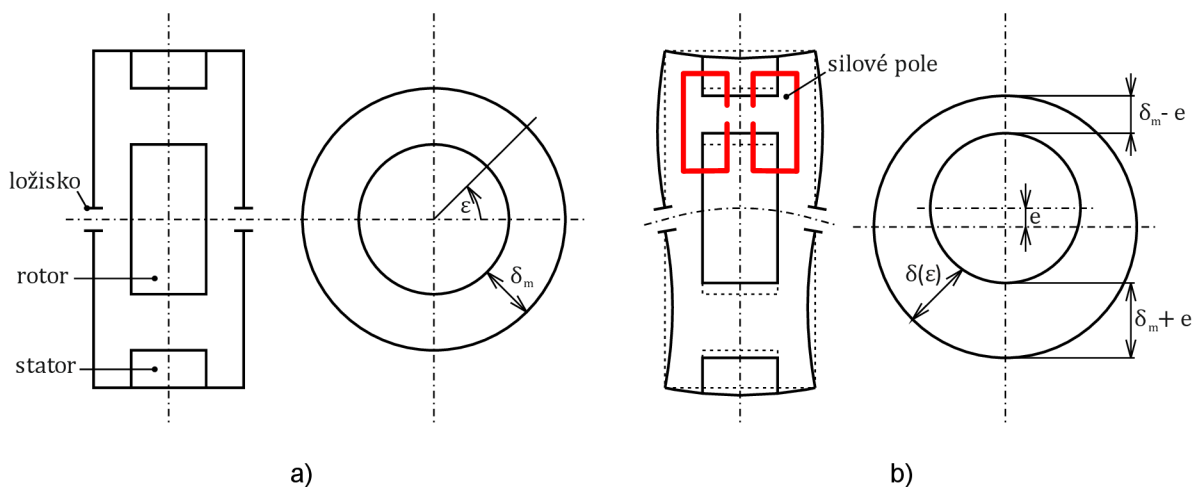
Následně budou na dvou složitějších modelech odstupňovaných hřídelí porovnány výsledky získané vytvořeným programem v prostředí Matlab a hodnoty z programu Ansys Workbench.

V závěru bude metodou konečných prvků simulována interakce mezi rotorem a statorem ovlivněnými magnetickým tahem.

3 Magnetický tah

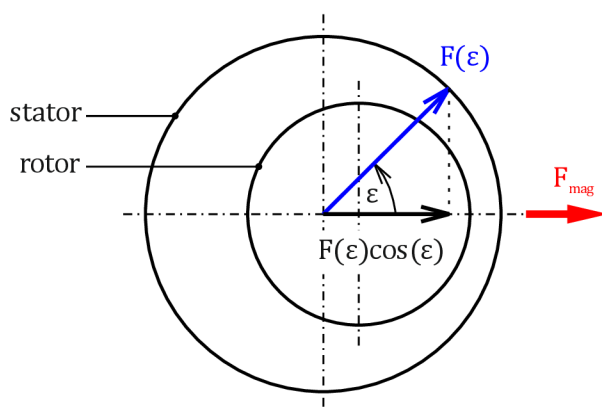
Rotační elektrické stroje mají mezi rotorem a státorem malou vzduchovou mezeru. Na rotoru i statoru se nachází vinutí, ze kterých se při průchodu elektrického stroje stávají magnety, čímž v této mezeře vzniká magnetické pole. Díky němu se indukují magnetické síly. V ideálním případě je velikost vzduchové mezery po celém obvodu konstantní a výslednice sil je nulová.

Ve skutečnosti však není velikost mezery po celém obvodu konstantní. Může to být zapříčiněno geometrickými odchylkami statoru a rotoru od ideálního válcového tvaru, výrobními tolerancemi, statickou nebo dynamickou excentricitou (obr. 3.1). Toto má za výsledek vznik magnetických sil, které se navzájem nevyruší. Výslednice těchto sil je označována jako magnetický tah. [1]



Obr. 3.1 Excentricita způsobená magnetickým tahem:
a) bez magnetického tahu; b) s magnetickým tahem [2]

Magnetický tah se skládá z radiální a tangenciální složky. Radiální složka je obvykle výrazně větší než tangenciální, a proto magnetický tah působí přibližně ve směru, kde je nejmenší tloušťka vzduchové mezery (obr. 3.2), a jeho maximální hodnota se odvíjí od velikosti excentricity. Obecně platí, že tato závislost je nelineární. [1]



Obr. 3.2 Působení magnetické síly [2]

Matematically můžeme definovat magnetický tah pomocí následujících rovnic (je to jeden z několika možných způsobů). [2]

Velikost odchylky δ závislé na úhlu natočení rotoru ε excentricitě e

$$\delta(\varepsilon) = \delta_m \cdot (1 + e \cdot \cos \varepsilon) \quad (3-1)$$

a velikost síly F v místě natočení ε

$$F(\varepsilon) = \frac{C}{(1 + e \cdot \cos \varepsilon)^2} \quad (3-2)$$

A na závěr celková velikost magnetické síly působící mezi rotorem a statorem

$$F_{mag} = \int_{\Gamma} F(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = C \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varepsilon}{(1 + e \cdot \cos \varepsilon)^2} d\varepsilon \quad (3-3)$$

Pomocí magnetické síly můžeme následně definovat magnetický tah takto

$$C_M = \frac{F_{mag}}{e} \quad (3-4)$$

Definice magnetického tahu rovnicí (3-4) umožňuje analogii s mechanickou pružinou, proto je v článku [2] zaveden také název magnetická tuhost.

$$F_{mag} = C_M \cdot e \quad (3-5a)$$

$$F_k = -k \cdot x \quad (3-5b)$$

Rovnice (3-5a) a (3-5b) vyjadřují podobnost do té míry, že velikost síly je přímo úměrná velikosti odchylky (u magnetické síly se jedná o excentricitu, u mechanické síly o stlačení pružiny). Rozdílem je opačný směr působení (F_k – tlaková, F_{mag} – tahová).

Další možnost výpočtu magnetického tahu je na základě charakteristik magnetického pole způsobujícího vznik tahu a geometrie rotoru. [3]

$$C_M = 1,31 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot D_{pak} \cdot L_{pak} \cdot B^2}{\delta_m}, \quad (3-6)$$

kde

D_{pak} ... velký průměr paketu rotoru

L_{pak} ... délka paketu rotoru

B ... elektromagnetická indukce

δ_m ... velikost vzduchové mezery mezi statorem a rotorem

4 Metody výpočtu

Pro výpočet průhybu hřídele existuje několik metod. Každá z těchto metod má své výhody i nevýhody. Tyto metody jsou převážně založené na analytických výpočtech diferenciálních rovnic.

4.1 Přímá integrace – diferenciální přístup

Princip metody spočívá v řešení diferenciální rovnice průhybové čáry (4-1) přímou integrací.

$$w''(x) = -\frac{M_{oy}(x)}{E \cdot J_y} \quad (4-1)$$

Dvojitou integrací této rovnice získáme rovnici vyjadřující průhyb po celé délce hřídele. Pro konkrétní výsledek je nutné výpočet doplnit o okrajové podmínky. Výhodami metody je možnost řešení velkých průhybů, určení velikosti průhybu a natočení v kterémkoli místě a určení extrému průhybu i v případě, že neznáme jeho polohu. Mezi nevýhody metody lze zařadit matematickou složitost a to, že nelze zahrnout vliv posouvající síly. [4]

4.2 Castiglianova věta – integrální přístup

Máme-li lineárně pružné těleso zatížené silou, je posuv v působišti síly po její nositelce dán jako parciální derivace celkové energie napjatosti tělesa podle této síly. Při řešení dosadíme energii napjatosti do Castiglianovy věty a derivujeme podle působící síly [4]

$$w_j = \frac{\partial W}{\partial F_j} = \int_0^l \frac{M_{oy}}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oy}}{\partial F_j} dx + \beta \int_0^l \frac{T}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T}{\partial F_j} dx . \quad (4-2)$$

První člen vyjadřuje příspěvek ohybového momentu, druhý posouvající síly. Výhodami jsou možnost určit deformační charakteristiky v kterémkoli bodě střednice, možnost zahrnutí vlivu posouvající síly a použitelnost u lomených a zakřivených prutů. Zároveň je matematicky snazší a rychlejší. Nevýhodou je použitelnost pouze v lineární pružnosti a obtížnost hledání extrémů. [4]

4.3 Metoda počátečních parametrů

Metoda udává možnost formulace obecného řešení diferenciálních rovnic. Principem je převedení okrajového problému na problém počáteční. Integrační konstanty jsou vyjádřeny pomocí stavových veličin v počátku souřadnicového systému, takzvaných počátečních parametrů. [5]

4.4 Metoda přenosových matic

Jedná se o maticovou formu metody počátečních parametrů. Je velmi účinným nástrojem pro řešení úloh se sériově řazenými dílčími prvky. Ve srovnání s metodou konečných prvků má výhodu v tom, že pracuje s maticemi nízkých řádů, což snižuje její náročnost pro výpočetní techniku. [5] Důkladnější rozbor metody je uveden v následující kapitole.

5 Metoda přenosových matic

Metoda přenosových matic (MPM) bude dále detailněji popisována pro případ použitý v této práci. Jedná se o namáhání rotoru elektrického stroje prostým ohybem. [6]

Prostý ohyb označuje namáhání přímého prizmatického prutu za následujících podmínek:

- jsou splněny prutové předpoklady (geometrické, vazbové a zatěžovací, deformační, napjatostní)
- příčné průřezy se vzájemně natáčejí kolem osy ležící v příčném průřezu a následně se deformují
- jedinými nenulovými složkami VVÚ jsou ohybové momenty M_{oy} , M_{oz}
- pro řešení statické rovnováhy prvku jsou statické deformace nepodstatné.

Prostý ohyb lze ještě zjednodušit na ohyb základní, při kterém uvažujeme pouze jednu nenulovou složku ohybového momentu ($M_{oy} \neq 0$, $M_{oz} = 0$). [4]

Kterékoli místo rotoru je popsáno stavovým vektorem $\{v\}$. [6]

$$v = [w \quad \varphi \quad M_o \quad T]^T, \quad (5-1)$$

kde

- w ... průhyb hřídele
- φ ... natočení hřídele
- M_o ... ohybový moment
- T ... posouvající síla

Základním principem metody je transformace stavového vektoru $\{v\}_0$ v počátku souřadnicového systému na stavový vektor $\{v\}_x$ v obecném místě. Tuto transformaci zajišťuje přenosová matice $[C]_{x,0}$. Přenosový vztah (transformační rovnice) je vyjádřen následujícím vztahem

$$\{v\}_x = [C]_{x,0} \cdot \{v\}_0 \quad (5-2)$$

5.1 Odvození přenosové matice pro prostý ohyb

Vycházíme ze stavových funkcí části nosníku ovlivněnými pouze počátečními parametry. Po čtyřnásobné integraci úplné diferenciální rovnice prostého ohybu přímého nosníku (5-3a) dostaneme následující rovnice

$$v^{(IV)}(x) = 0 \quad (5-3a)$$

$$v'''(x) = c_1 \quad (5-3b)$$

$$v''(x) = c_1 \cdot x + c_2 \quad (5-3c)$$

$$v'(x) = c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 \cdot x + c_3 \quad (5-3d)$$

$$v(x) = c_1 \cdot \frac{x^3}{6} + c_2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_3 \cdot x + c_4, \quad (5-3e)$$

kteřé lze zapsat v maticovém tvaru jako

$$\begin{bmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ v''' \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (5-4a)$$

stručně

$$\{v\}'_x = [F]_x \cdot \{c\}, \quad (5-4b)$$

kde

$\{v\}'_x$... vektor řešení homogenní diferenciální rovnice $v^{(IV)}(x) = 0$
a jeho první tři derivace

$\{c\}$... vektor integračních konstant

$[F]_x$... fundamentální matice

Vyjádření vektoru $\{c\}$ nám umožňuje znalost vektoru $\{v\}'_x$ v počátku systému souřadnic

$$\{v\}'_0 = [F]_0 \cdot \{c\} \quad (5-5)$$

a následnou úpravou

$$\{c\} = [F]_0^{-1} \cdot \{v\}'_0. \quad (5-6)$$

Následně dosadíme (5-6) do (5-4b)

$$\{v\}'_x = [F]_x \cdot [F]_0^{-1} \cdot \{v\}'_0 \quad (5-7)$$

Nyní pomocí rozměrové matice $[R]$ transformujeme vektor $\{v\}'_x$ na stavový vektor $\{v\}_x$.

$$\begin{bmatrix} v \\ \varphi \\ M_o \\ T \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E \cdot J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \cdot J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v' \\ v'' \\ v''' \end{bmatrix}_x \quad (5-8a)$$

stručně

$$\{v\}_x = [R] \cdot \{v\}'_x. \quad (5-8b)$$

Poté pomocí (5-8b) vyloučíme vektor $\{v\}'_x$ z (5-7)

$$[R]^{-1} \cdot \{v\}_x = [F]_x \cdot [F]_0^{-1} \cdot [R]^{-1} \cdot \{v\}'_0 \quad (5-9)$$

a úpravou vychází výsledný přenosový vztah

$$\{v\}_x = [R] \cdot [F]_x \cdot [F]_0^{-1} \cdot [R]^{-1} \cdot \{v\}'_0, \quad (5-10)$$

ze kterého je již snadno odvodit přenosovou matici

$$[C]_{x,0} = [R] \cdot [F]_x \cdot [F]_0^{-1} \cdot [R]^{-1}. \quad (5-11)$$

Tento vztah lze ještě zjednodušit na základě $[F]_0^{-1} \cdot [R]^{-1} = [R]^{-1}$ na

$$[C]_{x,0} = [R] \cdot [F]_x \cdot [R]^{-1} \quad (5-12)$$

podrobně

$$C_{x,0} = \begin{bmatrix} 1 & x & -\frac{x^2}{2 \cdot E \cdot J} & -\frac{x^3}{6 \cdot E \cdot J} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{E \cdot J} & -\frac{x^2}{2 \cdot E \cdot J} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{x,0} \cdot \quad (5-13)$$

Rozšíříme-li celý přenosový vztah (5-2) o formální identitu $1 = 1$, můžeme do přenosové matice zahrnout parametry F_w, F_φ, F_M, F_T popisující zatížení hřídele na daném úseku.

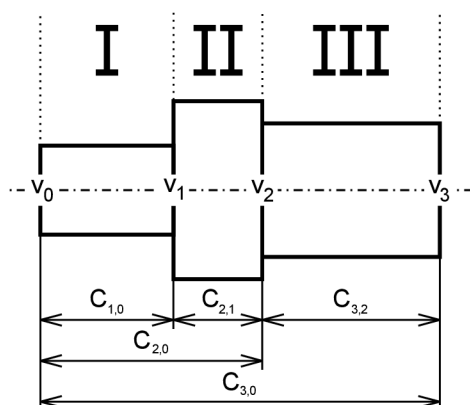
$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M_o \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 1 & x & -\frac{x^2}{2 \cdot E \cdot J} & -\frac{x^3}{6 \cdot E \cdot J} & F_w \\ 0 & 1 & -\frac{x}{E \cdot J} & -\frac{x^2}{2 \cdot E \cdot J} & F_\varphi \\ 0 & 0 & 1 & x & F_M \\ 0 & 0 & 0 & 1 & F_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{x,0} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M_o \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_0 \quad (5-14)$$

Vztah (5-13), případně (5-14), udává výslednou přenosovou matici pro délkový prvek hřídele. Hřídel samozřejmě obsahuje i jiné prvky, jejichž přenosové matice jsou uvedeny v příloze A.

Odvození převzato z [5] a [6].

5.2 Vytvoření celkové přenosové matice hřídele

Pro praktické využití metody je potřeba určit přenosovou matici mezi pravým a levým koncem hřídele. Princip vytvoření matice je ukázán na jednoduchém příkladu hřídele skládající se ze tří délkových prvků (obr. 5.1).



Obr. 5.1 Hřídel ze tří délkových prvků

Hřídel rozdělíme na úseky I, II a III. Každý úsek je popsán přenosovou maticí prvku mezi body hřídele popsanými stavovými vektory $\{v\}_i$. Následně lze přenosové vztahy zapsat takto:

$$\{v\}_1 = [C]_{1,0} \cdot \{v\}_0 \quad (5-15a)$$

$$\{v\}_2 = [C]_{2,1} \cdot \{v\}_1 \quad (5-15b)$$

$$\{v\}_3 = [C]_{3,2} \cdot \{v\}_2 \quad (5-15c)$$

Dosazením (5-15c) do (5-15b) získáme přenosový vztah pro úsek II+III

$$\{v\}_3 = [C]_{3,2} \cdot [C]_{2,1} \cdot \{v\}_1 = [C]_{3,1} \cdot \{v\}_1 \quad (5-16)$$

Stejným způsobem následně získáme přenosový vztah pro celou hřídel.

$$\{v\}_3 = [C]_{3,2} \cdot [C]_{2,1} \cdot [C]_{1,0} \cdot \{v\}_0 = [C]_{3,0} \cdot \{v\}_0 \quad (5-17)$$

Tento postup lze zobecnit pro n prvků

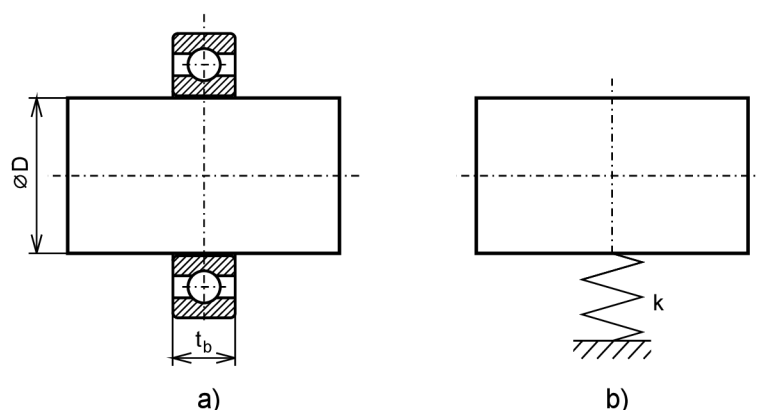
$$\{v\}_n = [C]_{n,n-1} \cdot [C]_{n-1,n-2} \cdot \dots \cdot [C]_{2,1} \cdot [C]_{1,0} \cdot \{v\}_0 = [C]_{n,0} \cdot \{v\}_0 \quad (5-18)$$

Je zřejmé, že pokud se vyskytují na hřídeli i jiné než délkové prvky, je přenosová matice pro konkrétní prvek zvolena podle typu prvku (viz. příloha A).

5.3 Modelování ložisek

Ložisko je jeden z případů realizace vazby u hřídele. Existuje mnoho variant a modelů, jak lze pro ložisko vytvořit přenosovou matici. Některé tyto modely jsou velmi jednoduché, jiné složitější. Je to závislé na tom, kolik různých parametrů ložiska do matice zahrneme a kolik jich zanedbáme. Samozřejmě od toho se také odvíjí složitost výpočtu a přesnost konkrétního modelu.

Nejjednodušší variantou je model, ve kterém se celé ložisko nahradí pružnou podporou. Podstata náhrady spočívá v redukci všech účinků ložiska na tuhost pružiny uchycené v jediném bodě (obr. 5.2). [6] Výhodou tohoto modelu je jednoduchost, ale nevýhodou je zanedbání ostatních parametrů, jako je například reálná šířka ložiska, což ale není tak velké zvýšení nepřesnosti, protože často je poměr šířky ložiska vzhledem k délce celé hřídele zanedbatelný. Z tohoto důvodu je většina zde uvedených modelů zjednodušená na působení v jediném bodě.



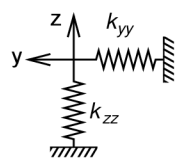
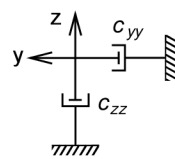
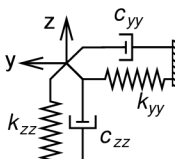
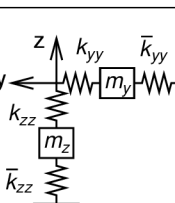
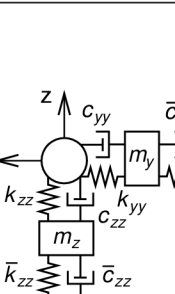
Obr. 5.2 Ložisko: a) reálný model; b) nejjednodušší výpočtový model

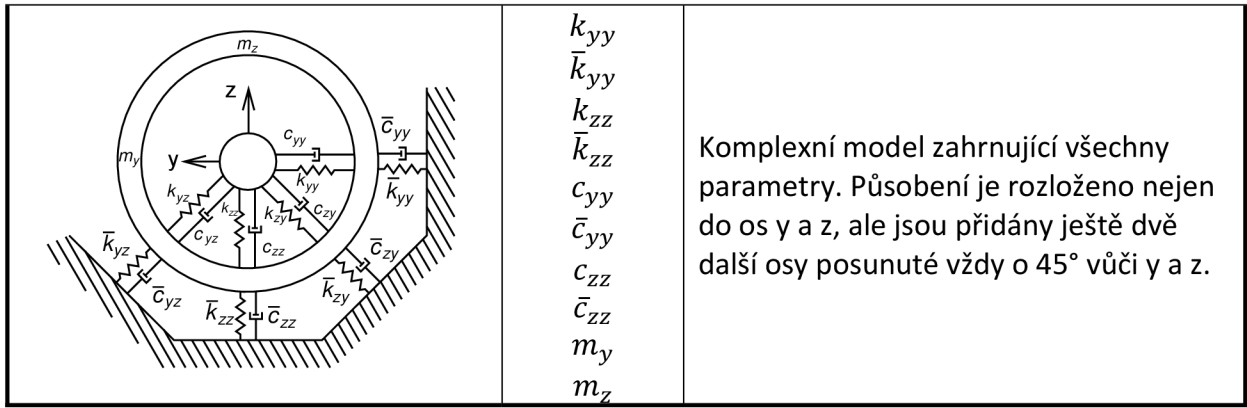
Další uvedené modely ložisek jsou vytvořeny pro výpočty trojrozměrných případů. Dalo by se na ně pohlížet jako na jeden složitý model, ze kterého se postupným zanedbáváním parametrů stávají modely jednodušší, nebo na několik samostatných modelů. Přehled parametrů ložiska je uveden v tab. 5.1 a základní přehled modelů je uveden v tab. 5.2.

Tab. 5.1 Parametry ložiska [7]

parametr	význam	parametr	význam
k_{ij}	tuhost ložiska	c_{ij}	tlumení ložiska
\bar{k}_{ij}	tuhost uložení ložiska	\bar{c}_{ij}	tlumení v uložení ložiska
m_i	hmotnost kroužku ložiska	ω	úhlová frekvence

Tab. 5.2 Přehled modelů ložiska [7]

Schéma modelu	Parametry	poznámka
	k_{yy} k_{zz}	Tento model je analogický k náhradě pružnou podporou s rozdílem, že je ve 3D.
	c_{yy} c_{zz}	Model neuvažuje tuhost ložiska, počítá pouze s jeho tlumením.
	k_{yy} k_{zz} c_{yy} c_{zz}	Model počítá s tuhostí i tlumením ložiska, ale nepočítá s hmotností kroužku.
	k_{yy} \bar{k}_{yy} k_{zz} \bar{k}_{zz} m_y m_z	Model zahrnuje hmotnost kroužku ložiska a tuhost jeho uložení. Naopak nezahrnuje žádné tlumení.
	k_{yy} \bar{k}_{yy} k_{zz} \bar{k}_{zz} c_{yy} \bar{c}_{yy} c_{zz} \bar{c}_{zz} m_y m_z	Komplexní model zahrnující všechny parametry. Působení je rozloženo do os y a z.

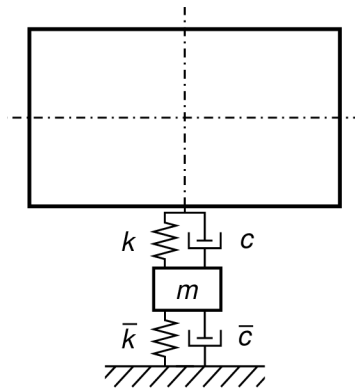


Modely uvedené v tab. 5.2 mají přenosovou matici o velikosti 16x16, případně 17x17, pokud je formálně rozšířena. V této matici je mnoho parametrů počítaných složitými rovnicemi (úplné znění lze nalézt v [7]). Pro použití v této práci jsou modely nevyhovující, protože je uvažován pouze dvourozměrný model s ohybem v jedné rovině.

Vhodný model získáme úpravou komplexního modelu, ve kterém je působení rozloženo do os y a z. Úprava tkví v předpokladu izotropického ložiska, pro které zavedeme rovnost některých parametrů (tab. 5.3) a tím i výrazné zjednodušení přenosové matice. [7]

Tab. 5.3 Zjednodušení parametrů [7]

$k = k_{yy} = k_{zz}$
$\bar{k} = \bar{k}_{yy} = \bar{k}_{zz}$
$c = c_{yy} = c_{zz}$
$\bar{c} = \bar{c}_{yy} = \bar{c}_{zz}$
$m = m_y = m_z$



Obr. 5.3 Použitý model ložiska

Za těchto předpokladů můžeme výsledný přenosový vztah zapsat takto [7]:

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M_o \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M_o \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_a, \quad (5-19)$$

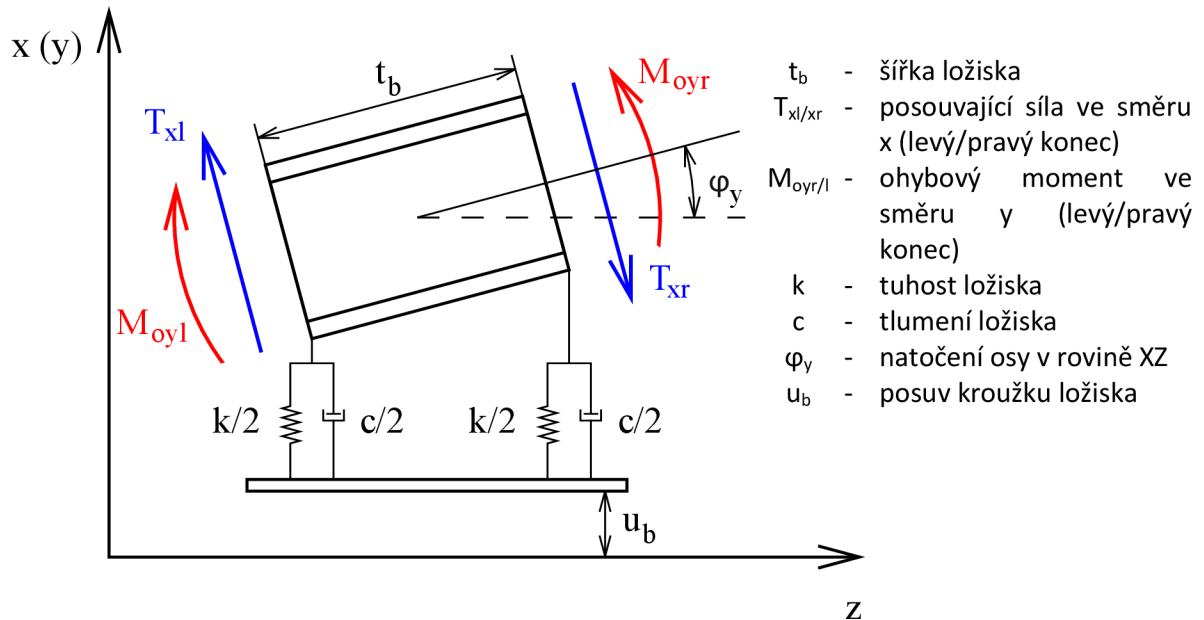
kde

$$z = \frac{(k + sc) \cdot (\bar{k} + s\bar{c} + s^2m)}{k + sc + \bar{k} + s\bar{c} + s^2m} \quad (5-20)$$

$s = \Omega$ pro vynucené kmitání

$s = \omega$ pro vlastní kmitání .

Pro doplnění je zde uveden ještě komplexnější model ložiska (obr. 5.4), který zahrnuje i jeho šířku. Model ložiska využívá dva ekvivalentní páry pružina a tlumič. Zobrazení je analogické pro obě roviny, čímž se opět jedná o trojrozměrný model. Pomocí diferenciálních rovnic silové a momentové rovnováhy lze posléze sestavit přenosovou matici (úplné znění lze nalézt v [8]).



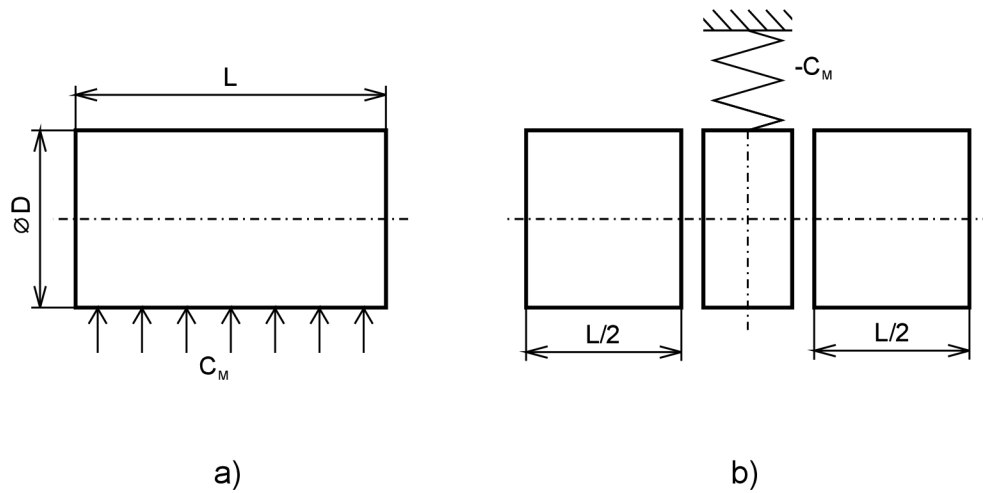
Obr. 5.4 Model ložiska zahrnující jeho šířku [8]

5.4 Modelování magnetického tahu

Magnetický tah lze při výpočtu uvažovat jako mechanickou pružinu s obráceným směrem působící síly. Vyjdeme-li z tohoto předpokladu, výsledná matice prvku s magnetickým tahem bude velice podobná matici pružné podpory. Jediným rozdílem bude záporné znaménko u hodnoty magnetického tahu (jednoduše řečeno se jedná o model pružiny se zápornou tuhostí). [6]

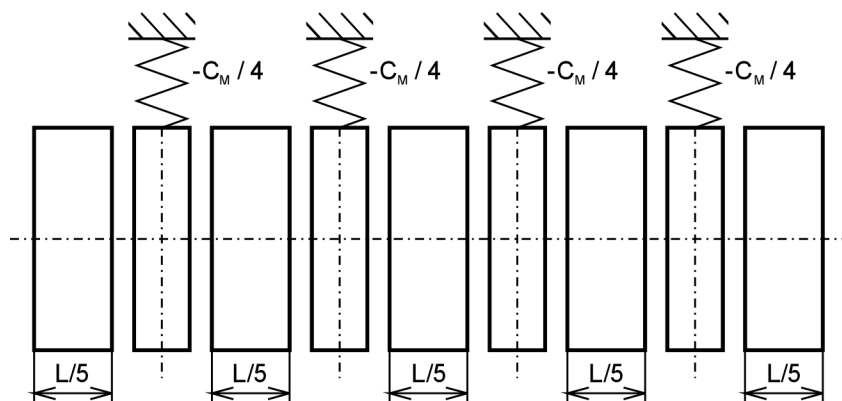
Na rozdíl od mechanické pružiny nebo ložiska však nelze magnetický tah zjednodušit působišťem v jediném bodě, protože délka oblasti působení je významná vzhledem k celkové délce hřídele. Proto je výsledná přenosová matice kombinací jednoduchých prvků hřídele s prvkem pružiny se zápornou tuhostí.

Princip vytvoření matice je velmi jednoduchý. Celý prvek s magnetickým tahem je rozdělen na poloviny (matice jednoduchého prvku) a mezi nimi jeden prvek pružiny (obr. 5.5).



Obr. 5.5 Prvek s magnetickým tahem: a) reálný model; b) základní výpočtový model

Pro zpřesnění výpočtu je dobré rozdělit prvek na více jak dvě části (obr. 5.6). Při rozdělení na více než dvě části je samozřejmě nutné poměrným dílem i rozdělit hodnotu magnetického tahu. [6]

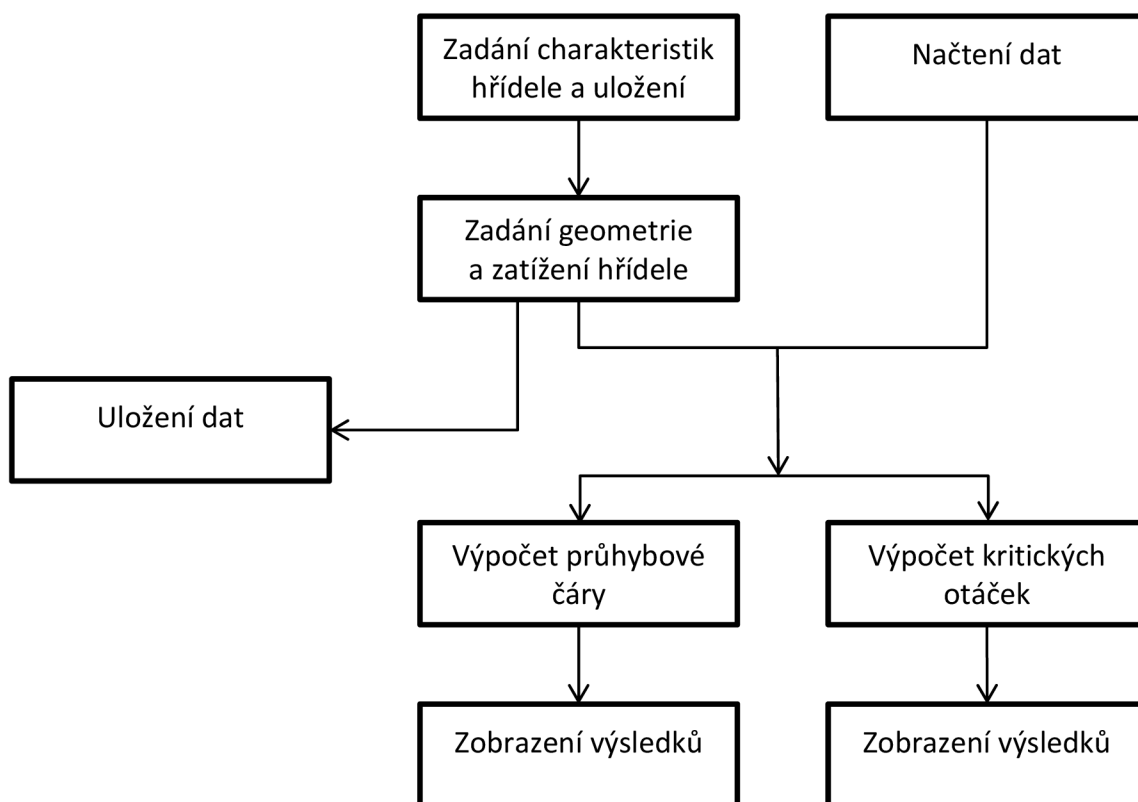


Obr. 5.6 Prvek s magnetickým tahem - přesnější model

6 Program Hřídel

Metoda přenosových matic byla použita ve spojení s výpočtovým a programovacím prostředím Matlab k vytvoření programu pro výpočet hřídele. Matlab není nejvhodnější pro tvorbu uživatelských aplikací, ale na rozdíl od jiných prostředí umí velmi dobře pracovat s maticemi.

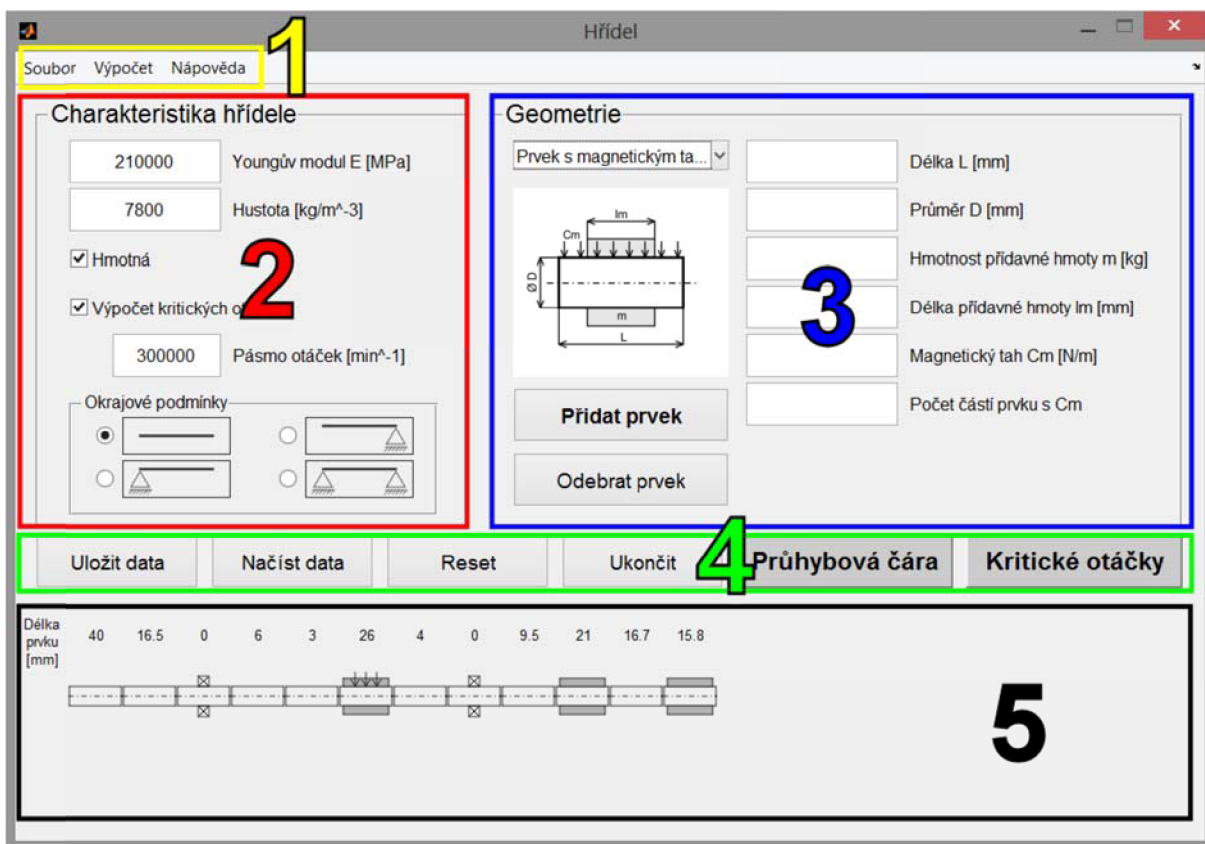
Vytvořený program s názvem Hřídel umožňuje každému uživateli zadat materiálové charakteristiky, geometrii, uložení a zatížení hřídele. Následně lze vypočítat průhybovou čáru a případně kritické otáčky hřídele.



Obr. 6.1 Schéma programu

6.1 Bloky programu

V této podkapitole jsou přiblíženy jednotlivé části programu zobrazené na obr. 6.2.



Obr. 6.2 Hlavní okno programu: 1 - Hlavní nabídka (žlutě), 2 - Charakteristika hřídele (červeně), 3 - Geometrie (modře), 4 - Manipulační tlačítka (zeleně), 5 - Zobrazovací plocha (černě)

6.1.1 Charakteristika hřídele

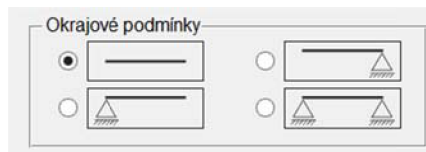
Blok je umístěn v levém horním rohu, aby bylo i pro uživatele intuitivní, že má být vyplňován jako první. Nachází se zde vstupní pole pro zadávání údajů charakterizující hřídel. Uživatel zde zadává Youngův modul a hustotu materiálu, ze kterého je počítaná hřídel vyrobená. Dále je zde zaškrťovací pole, kterým je voleno, zda je hřídel hmotná, nebo ne. Je tím míněno to, jestli počítáme s vlivem gravitačního zrychlení. Pokud je hřídel počítána jako hmotná, je automaticky počítáno s hodnotou gravitačního zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Další položkou je zaškrťovací pole Výpočet kritických otáček (obr. 6.3). Jeho zaškrtnutí je nutné pro možnost počítání kritických otáček (není-li zatrženo, program neumožní výpočet). Po zaškrtnutí je nutné zadat pásmo otáček, ve kterém bude program kritické otáčky prověřovat. Zadává se horní mez intervalu, dolní je 0. Hodnota zadaného pásma je pro snadnější zpracování zaokrouhlena nahoru na stovky. Popis výpočtu kritických otáček je uveden v kapitole 6.3.2.



Obr. 6.3 Checkbox Výpočet kritických otáček: a) vypnutý, b) zapnutý

Posledním údajem tohoto bloku je volba okrajových podmínek (volný konec-volný konec, volný konec-podpora, podpora-volný konec, podpora-podpora). Je vytvořena pomocí přepínačů tak, aby bylo možné mít vybráno právě jeden typ okrajových podmínek (obr. 6.4).



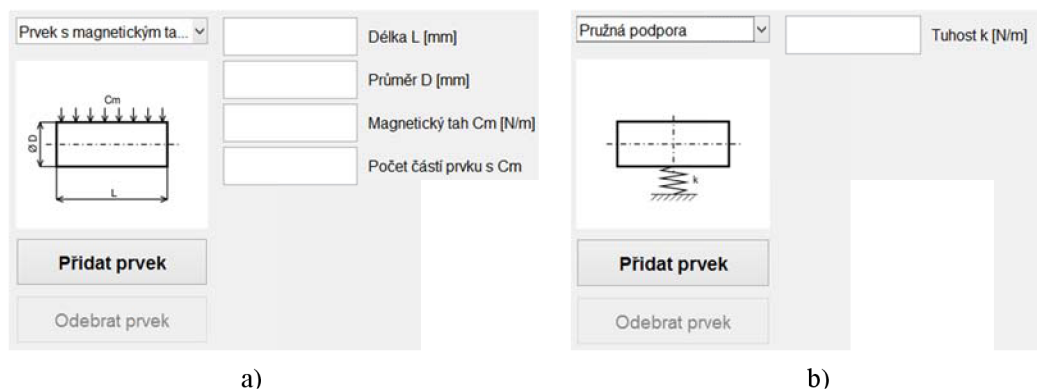
Obr. 6.4 Panel Okrajové podmínky

6.1.2 Geometrie

V tomto bloku uživatel definuje celou geometrii hřídele pomocí jednotlivých prvků s přímo definovanými parametry (seznam prvků je uveden v tab. 6.1). Pro různé prvky jsou tyto parametry odlišné. Po výběru prvku z rozbalovací nabídky se vždy zobrazí obrázek prvku s vyznačením veličin a vstupní pole pouze pro hodnoty veličin konkrétního prvku (obr. 6.5).

Tab. 6.1 Seznam prvků

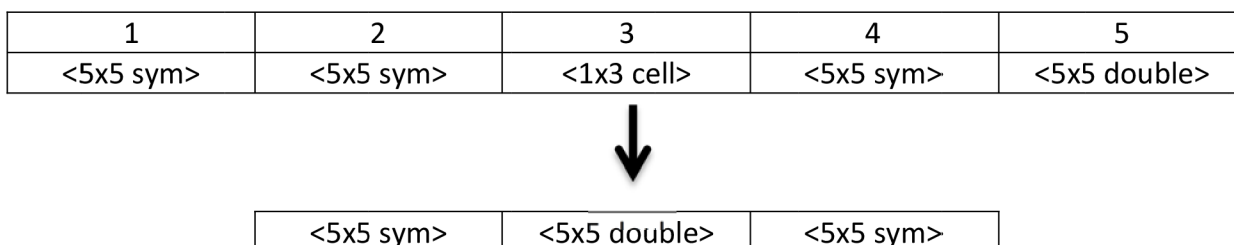
Pořadí prvku	Název prvku	Počet parametrů	Schematická značka
1	Prvek hřídele	2	
2	Prvek s přídavnou hmotou	4	
3	Prvek s magnetickým tahem	4	
4	Prvek s magnetickým tahem a přídavnou hmotou	6	
5	Disk	2	
6	Ložisko	5	
7	Pružná podpora	1	
8	Skoková změna příčné síly	1	



Obr. 6.5 Zobrazování různých parametrů pro různé prvky:
a) prvek s magnetickým tahem, b) pružná podpora

Po vyplnění údajů je prvek kliknutím na tlačítko *Přidat prvek* přidán a zároveň se v zobrazovací ploše ukáže schématická značka a délka prvku. Takto uživatel nadefinuje celou hřídel. Počet prvků je z důvodu velikosti okna omezen na 40. Pomocí tlačítka *Odebrat prvek* je vždy možné odebrat poslední zobrazený prvek.

Každý prvek je reprezentován svou vlastní přenosovou maticí. Postupným přidáváním prvků se tyto matice řadí za sebe do jednoho pole matic. Přidávání prvku hřídele s magnetickým tahem (s/bez přídavné hmoty) je o něco složitější, protože výsledná přenosová matice je kombinací matic prvku pružiny a obyčejného prvku, jejichž počet je různý (definovaný uživatelem). Tento prvek je tedy do pole uložen jako další pole matic. Výsledná struktura pole přenosových matic je tedy dvouúrovňová (tvořená maticemi a poli matic).



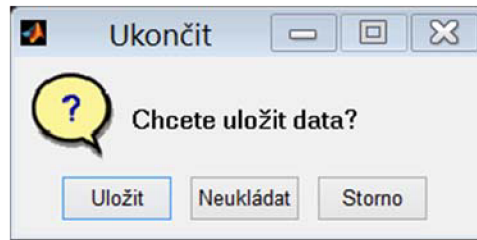
Obr. 6.6 Dvouúrovňová struktura výsledného cell pole (sym - matice obsahující symbolické proměnné, double - matice obsahující pouze proměnné typu double)

Při přidávání prvků se v programu tvoří dvě různá pole. Jedno z nich je tvořeno základními maticemi prvků a druhé je tvořeno maticemi pro rotující prvky. První je tvořeno vždy a využívá se při výpočtu průhybové čáry. Druhé je využíváno k určení kritických otáček a tvoří se pouze v případě zaškrtnutí tohoto výpočtu.

6.1.3 Manipulační tlačítka a hlavní nabídka

Nabídka v horní liště obsahuje všechny příkazy, které program umožňuje. Pro snadnější ovládání programu jsou nejdůležitější příkazy v pásu manipulačních tlačítek. Pomocí tlačítek *Uložit* a *Načíst data* je možné svoji práci načíst nebo naopak uložit do formátu .mat. Ukládají se pouze hodnoty zadané uživatelem v blocích *Charakteristika hřídele* a *Geometrie*. Neukládají se výsledky výpočtu. Zároveň při načítání dat jsou vymazána všechna aktuálně zadaná data. Další dvě tlačítka jsou *Reset* a *Ukončit*. *Reset* vymaže všechna zadaná data

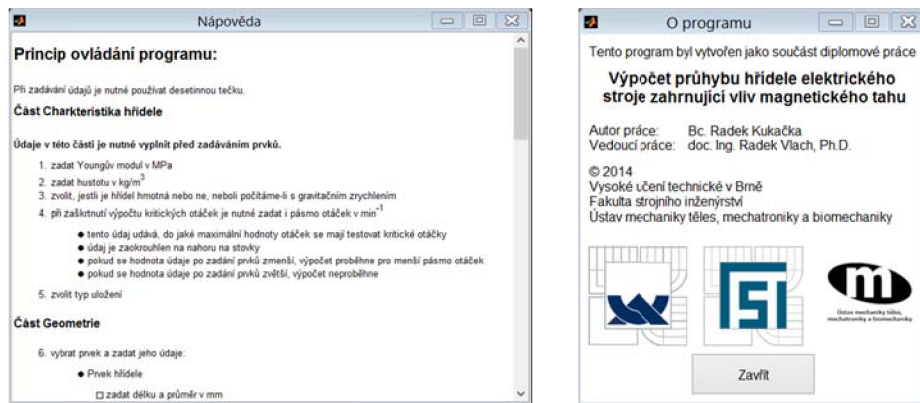
a Ukončit ukončuje celý program. Při ukončování programu pomocí tlačítka ukončit je zobrazen dialog o uložení dat (obr. 6.7).



Obr. 6.7 Ukončovací dialog programu

Poslední dvě tlačítka (Průhybová čára a Kritické otáčky) jsou zvýrazněná, neboť se jedná o tlačítka výpočtu. Princip výpočtu a reprezentace výsledků je popsán dále.

V nabídce pak lze nalézt ještě položku Nápověda, která obsahuje samotnou nápovědu k práci s programem a údaje o programu (obr. 6.8).



a)

b)

Obr. 6.8 Okno Nápověda (a) a O programu (b)

6.2 Kontroly vstupů a varování

V průběhu zadávání hodnot je uživatel v některých případech varován o nesprávnosti zadání nebo důsledcích uživatelem zadané hodnoty. Konkrétně se jedná o varovné nebo chybové dialogy zobrazené v tab. 6.2.

Tab. 6.2 Varování a chybové hlášky

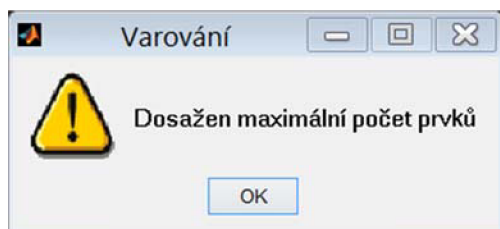
Událost	Typ	Znění	Efekt
Zadávání pásma otáček	Varování	Rozsah otáček je nutné zadat před zadáváním prvků. Po zadání prvků lze pásmo případně zmenšit. Čím větší bude pásmo otáček, tím déle bude trvat výpočet kritických otáček.	Pouze informativní

Dosažení maximálního počtu prvků	Varování	Dosažen maximální počet prvků	Nelze zadat další prvek
Zadávání prvku Ložisko	Varování	Nevyplněna tuhost uložení kroužku. Počítáno s nalisovaným ložiskem.	Při výpočtu je uvažováno s nalisovaným ložiskem
Zadávání prvku s přídatnou hmotou	Chyba	Délka přídatné hmoty je větší než délka prvku. Nastaveno $L = l_m$.	Při přidání prvku je upravena délka přídatné hmoty
Zadávání prvku s magnetickým tahem	Chyba	Počet částí musí být přirozené číslo.	Při přidání prvku je počet částí nastaven na nejbližší přirozené číslo
	Chyba	Počet částí musí být alespoň 2.	Při přidání prvku je počet částí nastaven na 2

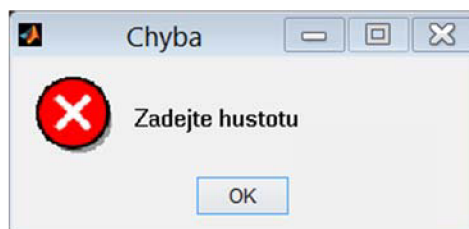
Po kliknutí na jedno ze dvou tlačítek výpočtu (Průhybová čára nebo Kritické otáčky) je provedena kontrola parametrů uvedených v tab. 6.3. Výpočet nezačne, pokud nebudou všechny kontroly úspěšně provedeny.

Tab. 6.3 Kontrola parametrů

Událost	Typ	Znění	Efekt
Výpočet	Chyba	Zadejte Youngův modul E	Výpočet neproběhne
Výpočet	Chyba	Zadejte hustotu	Výpočet neproběhne
Výpočet	Chyba	Zadejte alespoň jeden prvek	Výpočet neproběhne
Výpočet	Varování	Hřídel není hmotná	Pouze informativní
Kritické otáčky	Chyba	Nenastaveny parametry pro výpočet	Výpočet neproběhne
Kritické otáčky	Chyba	Zadejte pásmo otáček	Výpočet neproběhne
Kritické otáčky	Chyba	Po zadání prvků bylo zvětšeno pásmo otáček	Výpočet neproběhne



a)

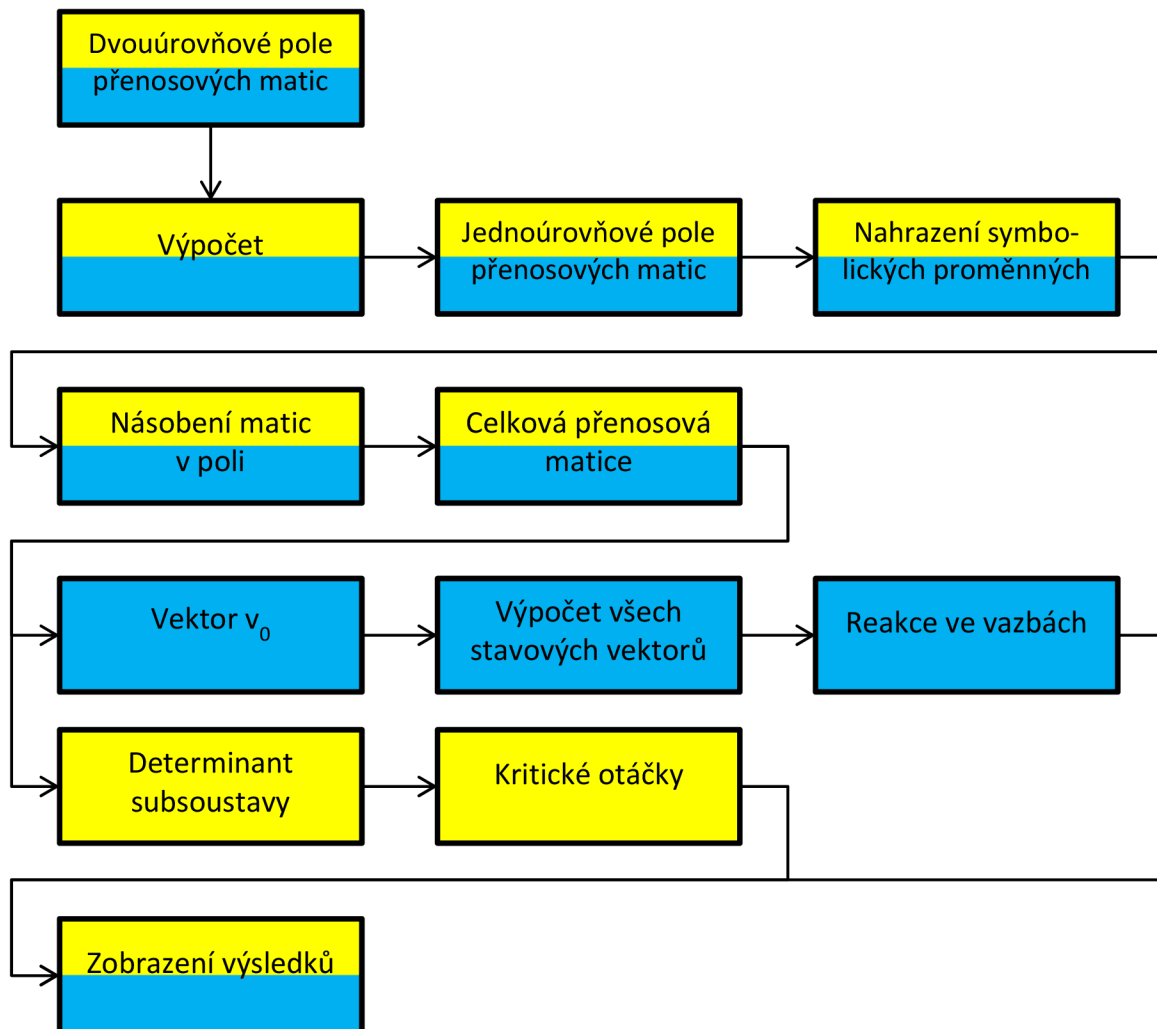


b)

Obr. 6.9 Varovný (a) a Chybový dialog (b)

6.3 Výpočet

Výpočet je rozdělen na dvě části – Průhybová čára a Kritické otáčky. Schematicky je výpočet zobrazen na obr. 6.10 (v obrázku jsou dvě části odlišeny barevně: Průhybová čára modře, Kritické otáčky žlutě).



Obr. 6.10 Struktura výpočtu


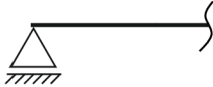
Do výpočtu vstupuje dvouúrovňové pole přenosových matic. Prvním krokem výpočtu je převedení víceúrovňového pole na pole jednouúrovňové. Následně jsou nahrazeny symbolické proměnné konkrétními hodnotami. Těmito proměnnými jsou Youngův modul, hustota a gravitační zrychlení. Toto řešení umožňuje měnit před spuštěním nového výpočtu materiál hřídele bez nutnosti zadávání celé geometrie znovu. Program toto umožňuje pouze u výpočtu průhybové čáry, u výpočtu kritických otáček tato možnost byla odstraněna z důvodu velké časové náročnosti.

Dalším krokem je vytvoření celkové přenosové matice. Je to vyřešeno pomocí *for* cyklu, kdy jsou matice postupně násobeny od konce pole. Tímto získáme přenosový vztah (6-1) mezi pravým a levým koncem hřídele.

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M_o \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} U_{ww} & U_{w\varphi} & U_{wM} & U_{wT} & F_w \\ U_{\varphi w} & U_{\varphi\varphi} & U_{\varphi M} & U_{\varphi T} & F_\varphi \\ U_{Mw} & U_{M\varphi} & U_{MM} & U_{MT} & F_M \\ U_{Tw} & U_{T\varphi} & U_{TM} & U_{TT} & F_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i,0} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ M_o \\ T \\ 1 \end{bmatrix}_0 \quad (6-1)$$

Ve vztahu (6-1) jsou podle zadaného uložení dosazeny okrajové podmínky (tab. 6.4).

Tab. 6.4 Okrajové podmínky podle uložení [6]

Uložení	Schéma	Okrajové podmínky
Volný konec		$M_o = 0$ $T = 0$
Tuhá podpora		$w = 0$ $M_o = 0$

6.3.1 Výpočet průhybové čáry a reakcí ve vazbách

Při výpočtu průhybové čáry je následně postupováno tak, že získáme soustavu dvou lineárních rovnic. Toho docílíme zrušením sloupců, ve kterých je hodnota stavového vektoru levého konce $\{v\}_0$ nulová, a řádků s nenulovou hodnotou stavového vektoru pravého konce $\{v\}_i$, ve vztahu (6-1). Zároveň rušíme i poslední řádek, který formálně nemá žádný význam. [6] Výsledná soustava vypadá takto (pro uložení s volnými konci):

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ U_{Mw} & U_{M\varphi} & - & - & F_M \\ U_{Tw} & U_{T\varphi} & - & - & F_T \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix}_{i,0} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_0 \quad (6-2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} U_{Mw} & U_{M\varphi} \\ U_{Tw} & U_{T\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} F_M \\ F_T \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

Z této soustavy lze pak již snadno vypočítat chybějící hodnoty stavového vektoru levého konce $\{v\}_0$. Pro případ s volnými konci je výsledný vektor

$$v_0 = [w_0 \quad \varphi_0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (6-4)$$

Za pomoci tohoto vektoru a přenosových matic jednotlivých prvků vypočteme jednotlivé stavové vektory po celé délce hřídele. Tyto vektory jsou uloženy do výsledné matice a následně je z této matice zobrazena průhybová čára. [6]

Při zadávání prvků hřídele, které charakterizují vazbu (ložisko a pružná podpora) je do pomocné proměnné uložena informace, že se jedná o vazbu. Pokud je zadána okrajová podmínka s podporou, je počítána i reakce na podepřeném konci hřídele. V této části výpočtu jsou vybrány stavové vektory v místech s vazbou a počítána hodnota reakce. Velikost reakce je stanovena změnou posouvající síly mezi levým a pravým bodem vazby. Lze to popsat následujícím vztahem [6]

$$R_i = T_{i+1} - T_i \quad (6-5)$$

Takto program pomocí cyklu projde celou hřídel a spočítá všechny vazby. Po vypočítání všech vazeb se otevře nové okno se zobrazením výsledků.

6.3.2 Výpočet kritických otáček

Při výpočtu kritických otáček hřídele opět vycházíme z celkové přenosové matice, která je vytvořena maticemi pro rotující prvky (viz příloha A).

$$\begin{bmatrix} W \\ \varphi \\ M_o \\ T \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} O_{ww} & O_{w\varphi} & O_{wM} & O_{wT} \\ O_{\varphi w} & O_{\varphi\varphi} & O_{\varphi M} & O_{\varphi T} \\ O_{Mw} & O_{M\varphi} & O_{MM} & O_{MT} \\ O_{Tw} & O_{T\varphi} & O_{TM} & O_{TT} \end{bmatrix}_{i,0} \cdot \begin{bmatrix} W \\ \varphi \\ M_o \\ T \end{bmatrix}_0 \quad (6-6)$$

Následně opět rušíme sloupce a řádky podle okrajových podmínek (stejně jako při výpočtu průhybové čáry). Vztah (6-6) se nám tímto zjednoduší na soustavu dvou rovnic (pro uložení s volnými konci). [6]

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} O_{Mw} & O_{M\varphi} \\ O_{Tw} & O_{T\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}_0 \quad (6-7)$$

Tato soustava obsahuje dvě neznámé stavového vektoru $\{v\}_0$ a ještě neznámou úhlovou frekvenci Ω . Matematicky je dáno, že pro soustavu rovnic ve tvaru $[A] \cdot \{x\} = \{b\}$ existuje jiné než netriviální řešení ($\{x\} = 0$), pokud se determinant matice $[A]$ rovná nule. Toto může nastat pro určité hodnoty úhlové frekvence Ω . Tyto hodnoty jsou pak hledanými kritickými frekvencemi ω_i , ze kterých vypočteme kritické otáčky hřídele (vztah (6-9)). [6]

$$\det \begin{bmatrix} O_{Mw} & O_{M\varphi} \\ O_{Tw} & O_{T\varphi} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_i \quad (6-8)$$

$$N_{ki} = \frac{60 \cdot \omega_i}{2 \cdot \pi} \text{ [min}^{-1}\text{]} \quad (6-9)$$

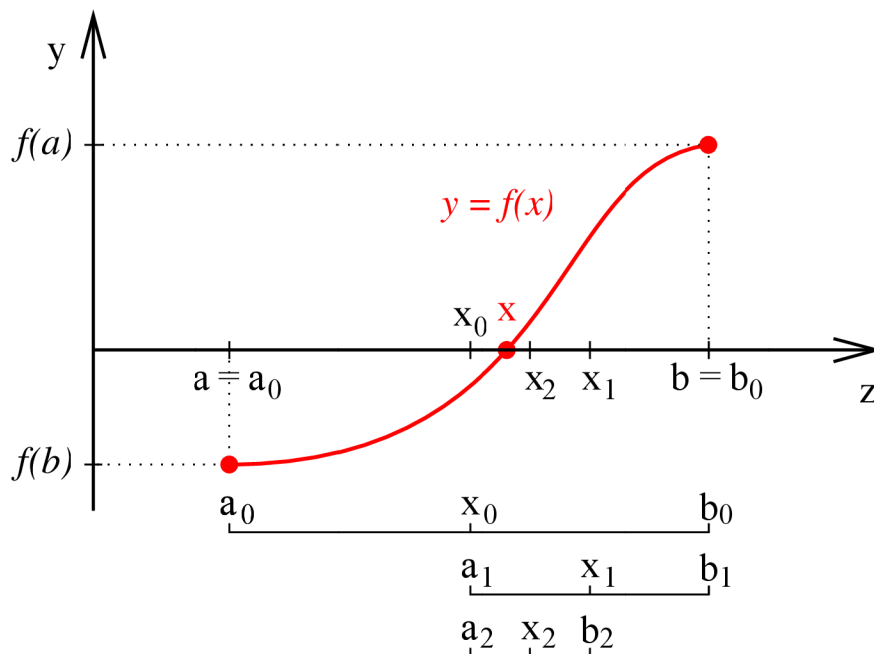
Hledání úhlových frekvencí je řešeno postupným dosazováním úhlové frekvence Ω pro nastavené pásmo otáček. V programu je to realizováno tak, že při tvorbě pole matic je pro každou stou frekvenci vytvořen další řádek (každá stá frekvence je dosazována z důvodu urychlení výpočtu). Při dosazování úhlových frekvencí pak výpočet postupně prochází přes všechny řádky.

Následně jsou posuzovány dvě po sobě jdoucí hodnoty determinantu. Jakmile je nalezena dvojice hodnot, kdy je první kladná a druhá záporná nebo naopak, je jisté, že hodnota kritických otáček leží mezi otáčkami odpovídajícími těmto hodnotám determinantu. Následně je ve výpočtu použita numerická metoda půlení intervalů pro nalezení výsledné hodnoty kritických otáček.

Takto program pomocí cyklu projde celé zadané pásmo a spočítá všechny kritické otáčky. Poté se otevře nové okno se zobrazením výsledků.

Princip metody půlení intervalů lze shrnout tak, že máme funkci $y = f(x)$, jejíž kořen hledáme v intervalu $\langle a; b \rangle$. Zavedeme označení $a = a_0$ a $b = b_0$. Určíme střed intervalu pomocí vztahu $x_0 = a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2}$. Pokud $f(x_0) = 0$, pak je právě hodnota x_0 hledanou

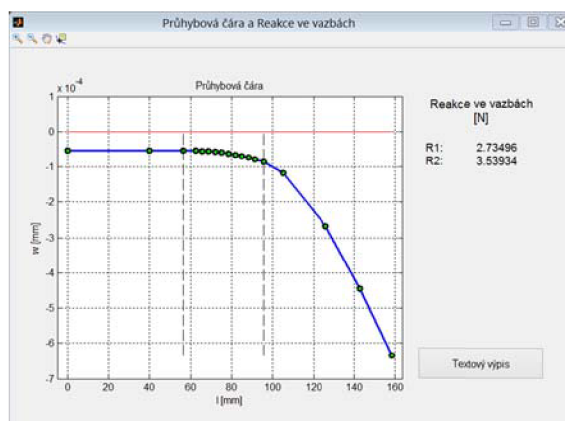
hodnotou kořene, jinak je znaménko $f(x_0)$ shodné buď s $f(a_0)$, nebo $f(b_0)$. Je-li znaménko $f(x_0)$ shodné s $f(a_0)$, nachází se kořen v intervalu $\langle x_0; b_0 \rangle$. Proto určíme nové koncové body intervalu jako $a_1 = x_0$ a $b_1 = b_0$. V opačném případě, kdy jsou znaménka $f(x_0)$ a $f(b_0)$ shodná, jsou nové koncové body intervalu $a_1 = a_0$ a $b_1 = x_0$. Takto opakujeme postup na intervalech $\langle a_1; b_1 \rangle, \langle a_2; b_2 \rangle, \dots$ až do té doby, než splníme předem zadanou přesnost. [9]



Obr. 6.11 Metoda půlení intervalů [9]

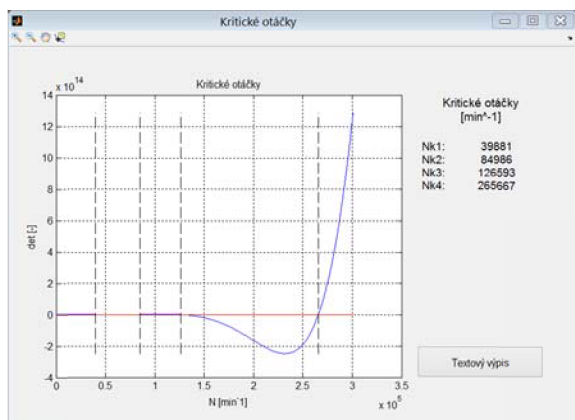
6.4 Reprezentace výsledků

Po dokončení výpočtu se v novém okně zobrazí výsledky. V případě výpočtu průhybové čáry se zobrazí graf průhybové čáry hřídele (obr. 6.12). Součástí okna jsou také nástroje pro práci s grafem (přiblížení a oddálení pohledu, posun pohledu a kurzor zobrazující konkrétní hodnoty grafu). Společně s průhybovou čarou jsou v grafu naznačena místa reakcí a vedle vypsaný jejich hodnoty (číslování reakcí je zleva). Uživatel má také možnost zobrazit data v textovém výpisu (obr. 6.14), kde uvidí ve sloupcích vedle sebe průhyb hřídele v konkrétní vzdálenosti od počátku hřídele (levý konec) a dále reakce ve vazbách.

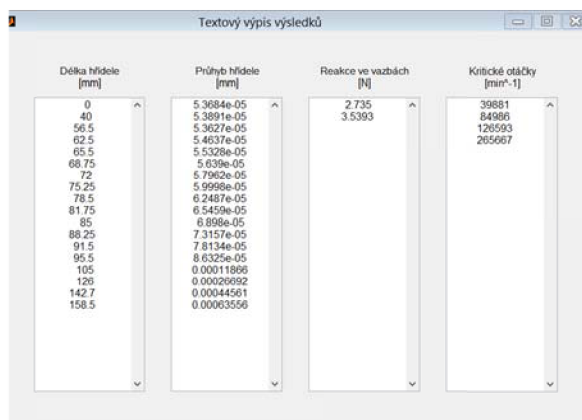


Obr. 6.12 Výsledná průhybová čára a reakce ve vazbách

Po ukončení výpočtu kritických otáček je zobrazeno podobné okno se stejnými nástroji (obr. 6.13). V okně grafu je zobrazena křivka determinantu v závislosti na otáčkách hřídele. Dále jsou v grafu vyznačeny hodnoty kritických otáček, které jsou vedle vypsány. Uživatel má opět možnost zobrazit textový výpis dat.



Obr. 6.13 Výsledné kritické otáčky



Obr. 6.14 Textový výpis výsledků

6.5 Přenos aplikace

Jednou z nevýhod tvorby uživatelské aplikace v prostředí Matlab je její distribuce. Pro tvorbu výsledného spustitelného souboru využívá program vlastní kompilátor s názvem MCR, který je různý pro každou verzi (pro verzi Matlabu R2012b je to verze MCR 8.0). Základní nevýhodou je různost verzí. Výsledná vytvořená aplikace je spustitelná pouze v systému, ve kterém je nainstalovaná stejná verze Matlabu, v jaké byla aplikace vytvořena. Jako náhradu celého programu lze nainstalovat pouze samostatný kompilátor, který lze stáhnout z internetových stránek výrobce Matlabu, firmy Mathworks. Další možností je spouštět program přes skript hridel.m (je k tomu potřeba program Matlab, ale nezáleží na jeho verzi).

7 Metoda konečných prvků

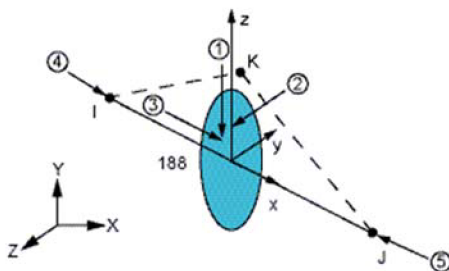
Pro výpočet pomocí metody konečných prvků je použit program ANSYS. Je to software, který je v inženýrské praxi velmi používaný pro řešení velkého množství různorodých problémů. Kapitola se zabývá řešením průhybu a kritických otáček za použití prostředí Ansys Workbench.

7.1 MKP elementy

Při volbě konečně prvkových elementů v tomto případě je vhodné uvažovat tak, aby pro obě analýzy (statickou i modální) bylo možné využít stejných prvků. Z tohoto důvodu jsou voleny elementy podporující gyroskopický efekt, což nám umožní možnost výpočtu dynamiky rotoru (kritické otáčky). Zároveň jsou také tyto prvky voleny z důvodu, že je program Ansys Workbench nabízí jako výchozí.

7.1.1 BEAM188

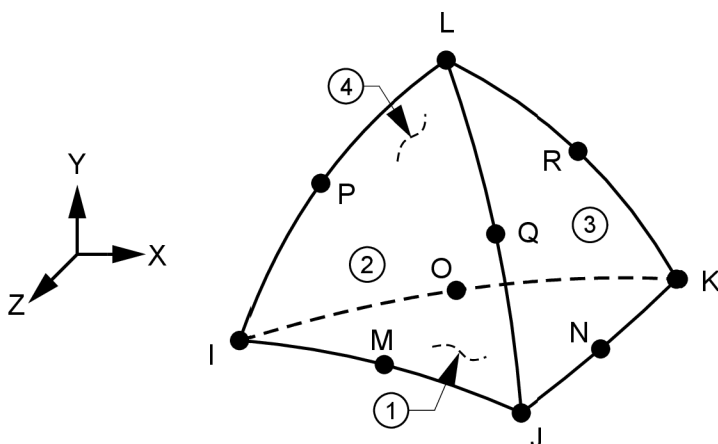
Prutový prostorový prvek, který má dva uzly plus jeden volitelný sloužící pro prostorovou orientaci prvku. Má šest stupňů volnosti v každém uzlu (posuvy ve směru x, y a z a rotace kolem těchto os). [10]



Obr. 7.1 Element BEAM188 [10]

7.1.2 SOLID 187

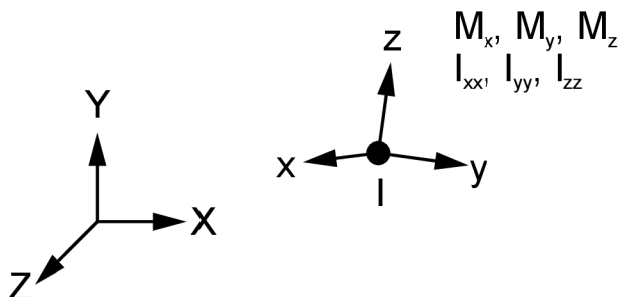
Tento element je prostorový ve tvaru čtyřstěnu s deseti uzly (obr. 7.2). V každém uzlu má 3 stupně volnosti (posuvy ve směru x, y a z). Je vhodný pro modelování složitých i nepravidelných tvarů. [10]



Obr. 7.2 Element SOLID187 [10]

7.1.3 MASS21

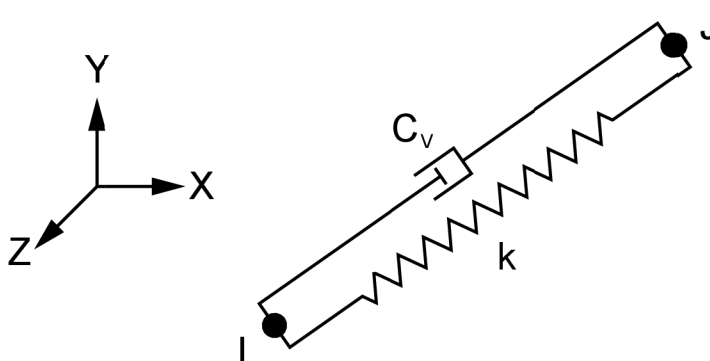
Element je definovaný jako jeden uzel (obr. 7.3), který má šest stupňů volnosti (posuvy ve směru x , y a z a rotace kolem těchto os). V uzlu jsou soustředěny složky hmotnosti ve směrech souřadného systému a momenty setrvačnosti k těmto osám. [10] V programu Ansys Workbench je zadáván jako Point Mass.



Obr. 7.3 Element MASS21 [10]

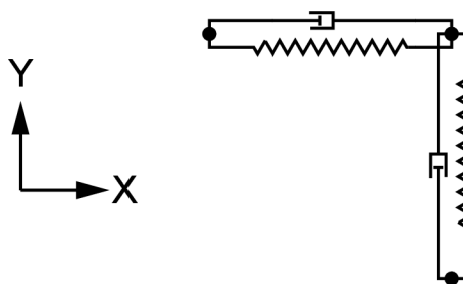
7.1.4 COMBIN14

Element je použitelný jako podélný nebo torzní 1-D, 2-D nebo 3-D prvek typu pružina-tlumič (obr. 7.4). Použití možnosti podélného prvku je možné jako jednoosý element tah-tlak, který může mít až tři stupně volnosti v každém uzlu, posuvy ve směru (x , y a z). [10] V programu Ansys Workbench je zadáván jako Spring.



Obr. 7.4 Element COMBIN14 [10]

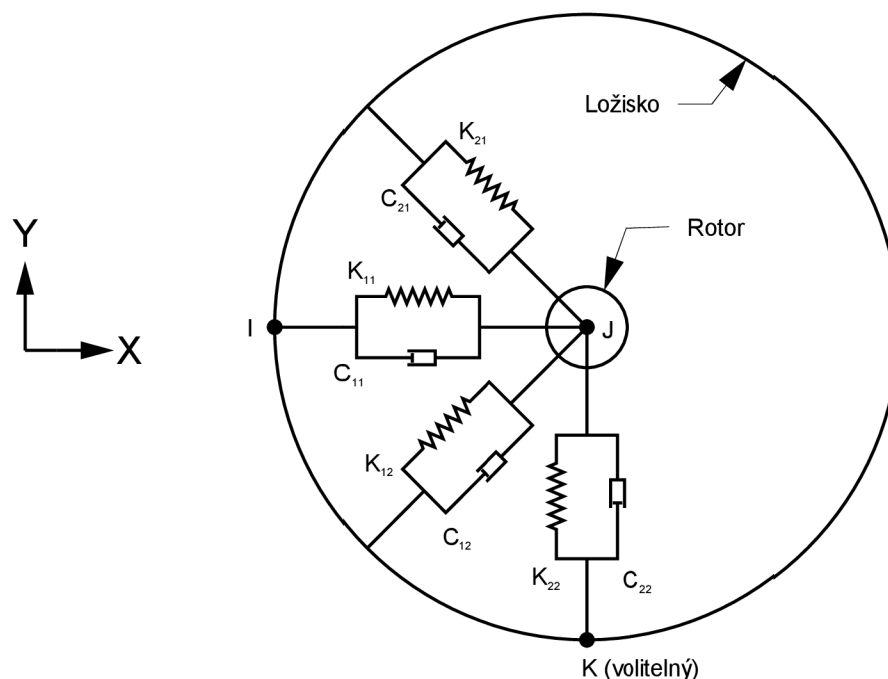
Lze jej využít pro jednoduchý model uložení v ložisku, který je vytvořen za pomoci dvou elementů (obr. 7.5). Při vytvoření ložiska tímto způsobem lze použít pouze koeficienty tuhosti ložiska K_{xx} a K_{yy} a tlumení C_{xx} a C_{yy} . Je také vhodný pro modelaci magnetického tahu.



Obr. 7.5 Modelování ložiska za pomoci dvou elementů typu COMBIN14

7.1.5 COMBI214

Je to rovinný element sloužící pro modelování uložení v ložisku (obr. 7.6). Má dva uzly plus jeden volitelný. V každém uzlu má dva stupně volnosti (posuvy v x a y nebo z). Nemá žádnou hmotnost. Pokud je nutné s hmotností počítat, musí být dodána pomocí elementu MASS21. [10] Lze jím modelovat i magnetický tah. V programu Ansys Workbench je zadáván jako Bearing.



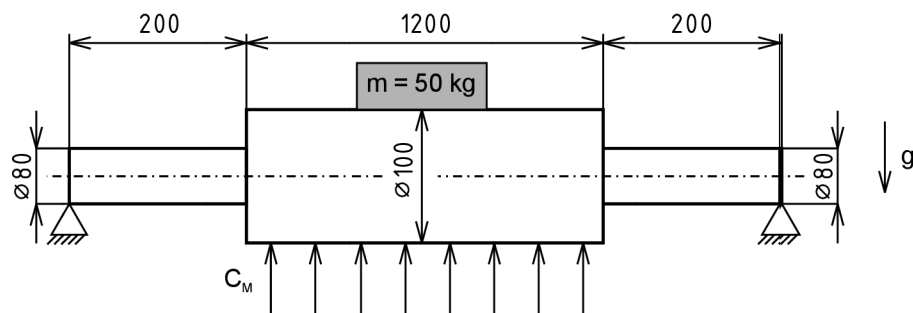
Obr. 7.6 Element COMBI214 [10]

7.1.6 Bushing Joint (MPC184)

Další možností, jak v programu Ansys Workbench zadat ložisko je vazba Bushing Joint. Po přiřazení tohoto prvku ke geometrii lze zadat matice tuhosti a tlumení ložiska. Tato vazba je reprezentována elementem MPC184. Prvek má šest stupňů volnosti (posuvy ve směru x, y a z a rotace kolem těchto os), z nichž mohou být všechny omezeny zadanými parametry. [10]

7.2 Magnetický tah

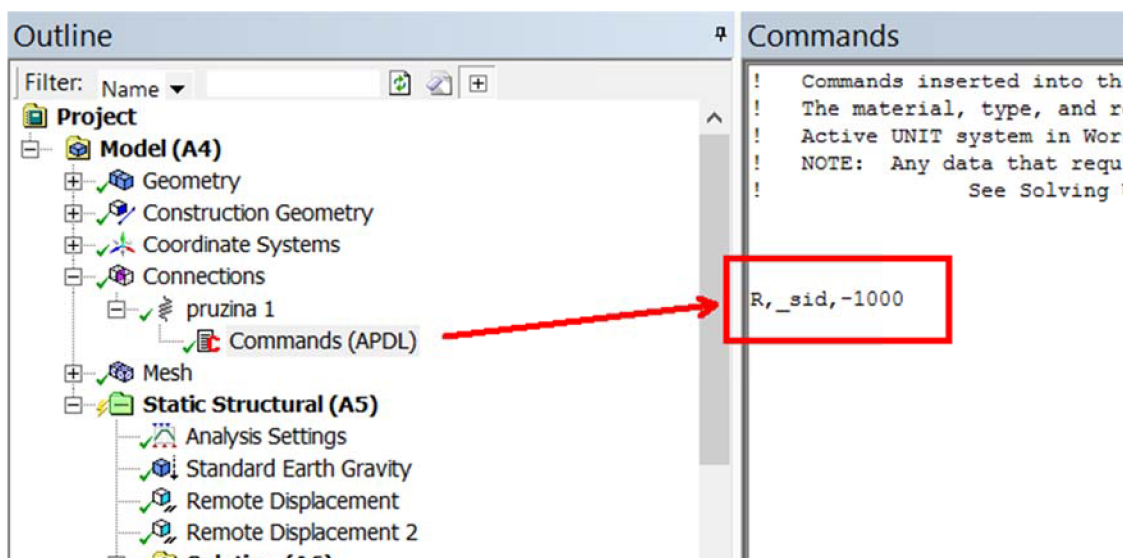
Pro názornou ukázkou zadání působení magnetického tahu byl vytvořen jednoduchý model v prostředí Ansys Workbench (obr. 7.7). Model je vytvořen pomocí prvků BEAM188 s nastavením průměrů pomocí Cross Section. Přídavná hmota je přidána příkazem Point Mass. Vazby jsou realizovány s využitím Remote Displacement a zatížení gravitací pomocí Standard Earth Gravity. Vazba Remote Displacement umožňuje zadat okrajové podmínky pomocí vzdálených bodů (nemusejí ležet přímo na geometrii tělesa). Lze zadat omezení posuvů a rotace ve všech směrech. [10]



Obr. 7.7 Model pro demonstraci zadání magnetického tahu

Modelace magnetického tahu lze obecně provést dvojím způsobem. Prvním z nich je iterační přístup, kdy je nejprve vypočten průhyb hřídele způsobený gravitační silou, poté je vypočtena ohybová tuhost hřídele. Následně je tuhost přepočítána na ekvivalentní s uvažováním gravitační i magnetické síly. Nakonec je výsledný průhyb vypočítán na základě ekvivalentní tuhosti. Druhým způsobem je přímé modelování pomocí prvku pružiny se zápornou tuhostí (analogicky s kapitolou 5.4). Pro tuto práci je využit druhý přístup.

Při modelování v programu Ansys Workbench nelze standardně zadat pružině zápornou tuhost. Při zadání pružiny Workbench nastaví výchozí element typu COMBIN14. Chceme-li jej použít pro modelaci magnetického tahu, musíme zadat pomocí příkazu Commands (APDL) vloženým k definici pružiny zápornou tuhost. V příkazu stačí definovat tuhost pomocí reálné konstanty daného prvku, a to příkazem $R, _sid, -hodnota_mag_tahu$ (obr. 7.8). Parametr $_sid$ nahrazuje číselné označení typu prvku, které si program doplňuje automaticky.



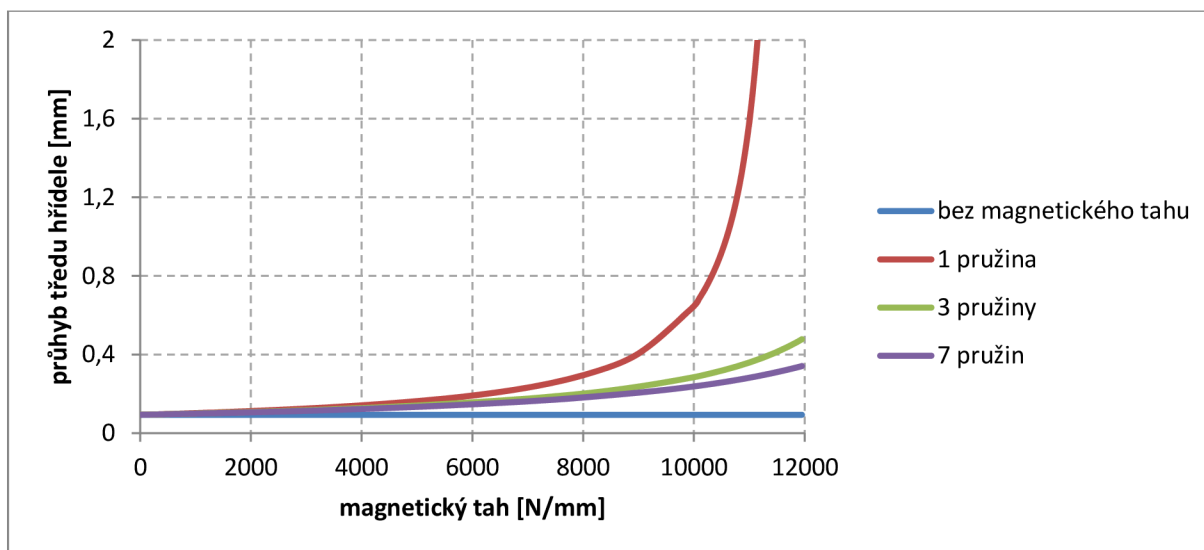
Obr. 7.8 Zadání záporné tuhosti

Pro zpřesnění výpočtu lze magnetický tah definovat pomocí více pružin (opět viz. kapitola 5.4 a obr. 5.6). Při použití více pružin je průhyb hřídele lépe aproximován. Byly provedeny simulace s použitím jedné, tří a sedmi pružin. Porovnání hodnot průhybu středu hřídele (zobrazeného na obr. 7.7) v závislosti na počtu pružin jsou uvedeny v tab. 7.1.

Tab. 7.1 Hodnoty průhybu středu hřídele v závislosti na počtu pružin

magnetický tah [$N \cdot mm^{-1}$]	1 pružina [mm]	3 pružiny [mm]	7 pružin [mm]
1	0,09275	0,09275	0,09275
10	0,09282	0,09281	0,09280
100	0,09355	0,09337	0,09331
1000	0,10143	0,09944	0,09875
5000	0,16222	0,13986	0,13330
10000	0,64610	0,28466	0,23724
11000	1,58219	0,35905	0,28113
12000	9,77915	0,47763	0,34110

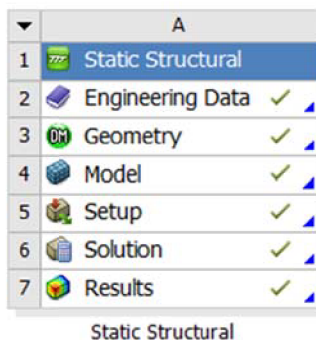
Z hodnot v tabulce je vidět, že pokud je použito více pružin, je průhyb lépe aproximován. Postupným zvětšováním velikosti hodnoty magnetického tahu roste i průhyb hřídele. Při zadání vysokých hodnot výpočet přestává být lineární a posléze přestává dávat akceptovatelné výsledky. V grafu na obr. 7.9 jsou graficky znázorněny výsledky z tab. 7.1. Je vidět, že při použití pouze jedné pružiny výpočet přestává být lineární pro nižší hodnoty magnetického tahu.



Obr. 7.9 Graf závislosti průhybu středu hřídele na velikosti magnetického tahu

7.3 Řešení průhybu

Pro řešení průhybu hřídele je zvolen blok analýzy Static Structural (obr. 7.10), ve kterém jsou nejdříve nastaveny materiálové hodnoty (řádek 2 – Engineering Data). Následně je v modeláři (řádek 3 – Geometry) vytvořen model rotoru. Třetím krokem je nastavení modelu (řádek 4 – Model).



Obr. 7.10 Blok analýzy Static Structural

Pokud je model tvořen pomocí SOLID prvků, lze pro pozdější zobrazení průhybové čáry v bloku Construction Geometry vytvořit cestu (Path) zadáním souřadnic koncových bodů střednice. Druhým krokem je blok Connections a zadání ložisek a magnetického tahu. Je to realizováno pomocí pružinových prvků (COMBIN14) z nabídky Body-Ground (postup dle kapitol 7.1 a 7.2). Modelování ložiska pomocí těchto prvků je dostačující, ale pokud chceme přesnější model, lze ložiska modelovat pomocí vazby Bushing Joint ze stejné nabídky. Posledním nastavením modelu je konečně prvková síť. V nabídce je upravena velikost elementů a nastavení ploch pro mapovanou síť, případně přidání metody vytvoření sítě.

Čtvrtým krokem je nastavení analýzy, zatížení a dalších vazeb (řádek 5 – Setup). Pro tento případ je zde použito z nabídky Inertial zatížení gravitací (Standart Earth Gravity) a případně modelace vazeb pomocí Remote Displacement (v případě, že nejsou nastavována ložiska prvkem pružiny nebo vazbou Bushing Joint). Následuje nastavení analýzy (obr. 7.11). Pro zpřesnění je výpočet rozdělen na více kroků pomocí nastavení Auto Time Settings na *zapnuto* a definování pomocí Substeps. Pro zrychlení výpočtu lze ještě nastavit řešič na Direct Solver.

Details of "Analysis Settings"	
Step Controls	
Number Of Steps	1,
Current Step Number	1,
Step End Time	1, s
Auto Time Stepping	On
Define By	Substeps
Initial Substeps	5,
Minimum Substeps	1,
Maximum Substeps	10,
Solver Controls	
Solver Type	Direct
Weak Springs	Program Controlled
Large Deflection	Off
Inertia Relief	Off

Obr. 7.11 Nastavení statické analýzy v programu Ansys Workbench

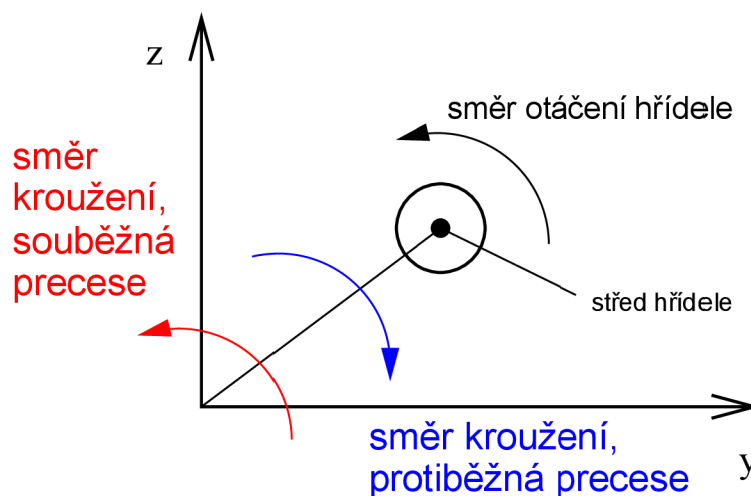
Posledním krokem je nastavení zobrazení výsledků (řádek 6 – Solution). Zobrazení průhybové čáry je docíleno pomocí Directional Deformation, u kterého nastavíme Scoping method na Path a orientaci pro zvolenou osu. Pro zobrazení reakcí ve vazbách je použito Spring Probe, když jsou ložiska modelována pružinou, Joint Probe při modelaci vazbou Bushing Joint, nebo Probe Force Reaction při modelaci vazeb pomocí Remote Displacement.

7.4 Dynamika rotoru

Pro výpočet kritických otáček je použita modální analýza. Pro úplnost je zde uvedeno několik pojmů z dynamiky rotorů, které je vhodné znát.

7.4.1 Souběžná a protiběžná precese

Jakmile se rotor otáčí, dochází k jeho průhybu. Tím dochází k tomu, že se střed hřídele začne pohybovat po kruhové nebo elipsovité trajektorii, což je označováno jako precese (kroužení). Rozeznáváme dva druhy, a to souběžnou (regulární), při které střed hřídele krouží ve stejném směru jako je smysl otáčení rotoru, a protiběžnou, při které je směr kroužení opačný než smysl otáčení rotoru (obr. 7.12). [13]



Obr. 7.12 Souřadnicový systém a precese [13]

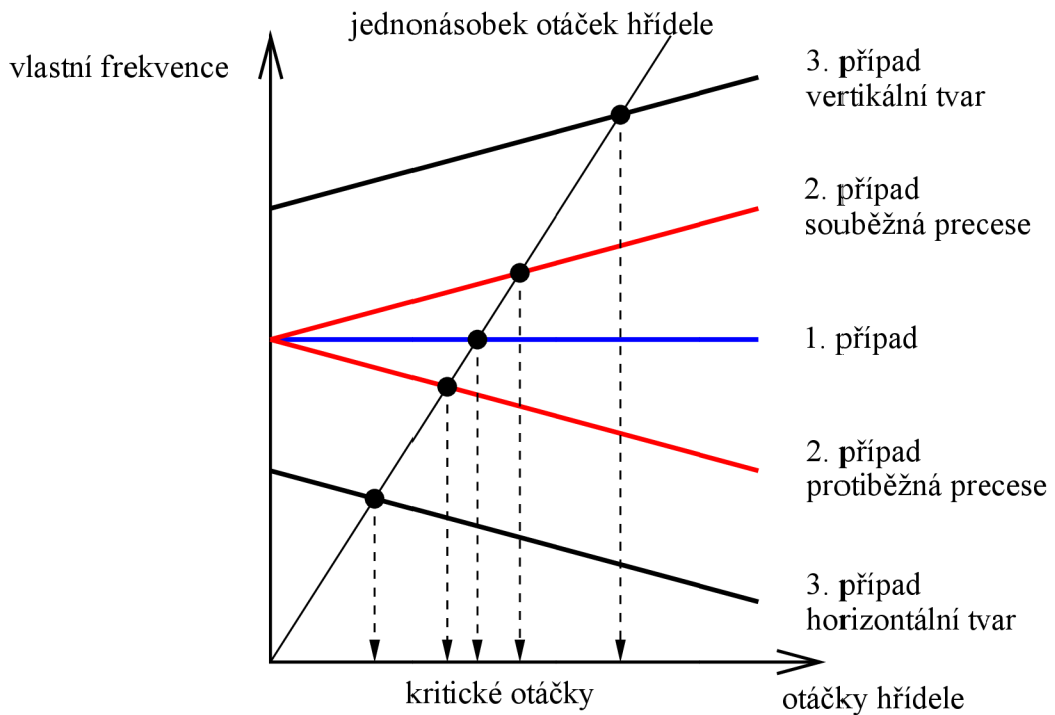
7.4.2 Gyroskopický efekt

Pokud rotor vykonává precesní pohyb, vzniká gyroskopický moment, jehož osa je kolmá k ose rotace hřídele i k ose kroužení. Vliv gyroskopického momentu se projeví závislostí vlastních úhlových frekvencí na otáčkách. Moment snižuje průhyb hřídele, a proto jeho uvažováním při výpočtu docílíme zvýšení hodnot kritických otáček. [13]

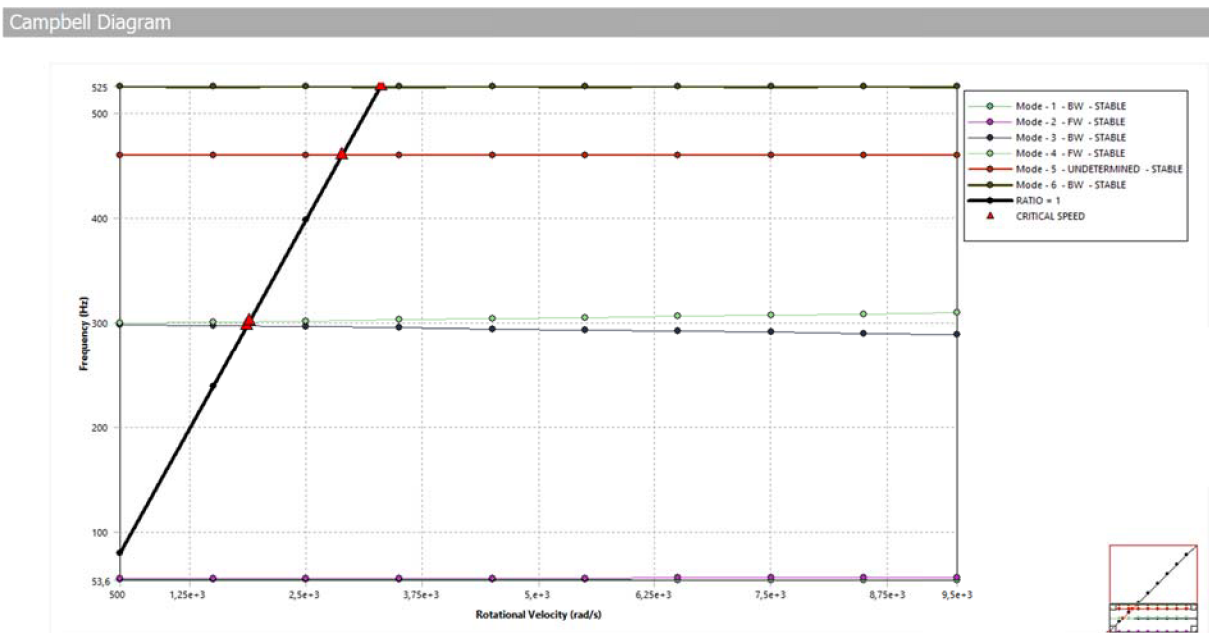
7.4.3 Campbellův diagram

V dynamice rotorových soustav slouží ke grafickému vyjádření závislosti vlastních frekvencí na otáčkách hřídele. Rozlišujeme tři případy podle symetričnosti uložení hřídele a s ohledem na gyroskopické účinky (obr. 7.13). [13]

1. Bez gyroskopických efektů a symetrické uložení hřídele
2. S gyroskopickými efekty a symetrické uložení hřídele
3. S gyroskopickými efekty a nesymetrickým uložení



Obr. 7.13 Zobrazení Cambellova diagramu [13]

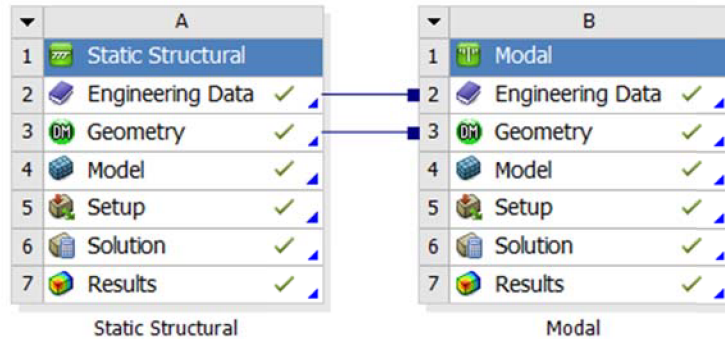


Obr. 7.14 Cambellův diagram v programu Ansys Workbench

7.5 Modální analýza

Pro řešení kritických otáček hřídele je zvolen blok analýzy Modal (obr. 7.15 blok B). Nastavení materiálových hodnot, geometrie a modelu je stejné jako při statické analýze (kapitola 7.3) nebo lze analýzy v těchto bodech propojit (obr. 7.15). Jediný rozdíl v nastavení modelu modální analýzy je zpřístupnění použití vazby Bearing z bloku Connections, která je realizovaná prvkem COMBI214. Zde je možné zadávat kladné i záporné hodnoty (tuhost a tlumení), takže není nutné zadávat je pomocí příkazu Command. Lze zde takto tedy zadat

i magnetický tah, u kterého však zadáváme pouze tuhost v hlavních směrech (k_{yy} a k_{zz} , pokud je osou rotace osa x). Pokud nechceme použít těchto vazeb, lze opět ložiska modelovat pomocí pružinového prvku COMBIN14 nebo vazbou Bushing Joint a magnetický tah definovat pružinovým prvkem COMBIN14.



Obr. 7.15 Propojení bloků analýz (blok A – statická, blok B – modální)

Při nastavování analýzy je nutné zohlednit, zda je model tlumený nebo netlumený a jestli uvažujeme analýzu bez rotace nebo s rotací. Chceme-li získat pouze vlastní frekvence rotoru bez otáčení, není nutné zadávat žádné zatížení, pouze zadáme, kolik vlastních frekvencí chceme vypočítat.

V dalších případech je uvažováno vždy s modální analýzou za rotace. Proto je nutné z nabídky Inertial zadat úhlovou rychlost otáčení (Rotational Velocity). V nastavení analýzy (obr. 7.16) nastavíme pro tlumenou soustavu řešič na Damped. Pokračujeme nastavením dynamiky rotoru (Rotordynamics Controls). Pro zahrnutí gyroskopického momentu nastavíme Coriolis Effect na *zapnuto*. Pro zobrazení vlastních frekvencí rotujícího rotoru pro různý rozsah otáček využijeme Campbellův diagram. Nastavíme Campbell Diagram na *zapnuto* a v nabídce Number of Points zvolíme počet provozních otáček, pro které bude diagram tvořen. Tyto hodnoty pak nastavíme v nastavení úhlové rychlosti. Posledním krokem je nastavení zobrazení Campbellova diagramu z nabídky Solution.

Details of "Analysis Settings"	
Options	
Max Modes to Find	3
Limit Search to Range	No
Solver Controls	
Damped	Yes
Solver Type	Reduced Damped
Store Complex Solution	Yes
Rotordynamics Controls	
Coriolis Effect	On
Campbell Diagram	On
Number of Points	18
Mode Reuse	Program Controlled
Output Controls	
Damping Controls	
Analysis Data Management	

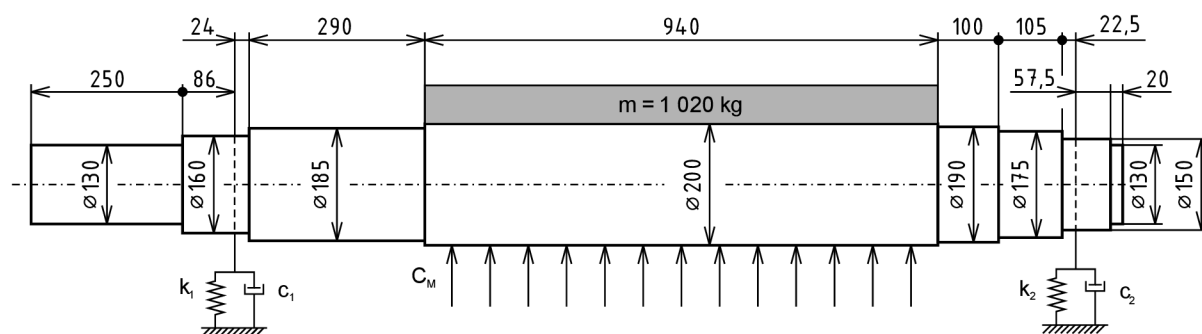
Obr. 7.16 Nastavení modální analýzy v programu Ansys Workbench

8 Výsledky

Pro porovnání výsledků jsou zvoleny dva modely. První je rotor elektromotoru, jehož geometrie a zatížení jsou převzaty z [3]. Druhý je model rotoru servomotoru převzatý z [6]. Pro každý rotor je v programu Hřidel a v programu Ansys Workbench vypočítána průhybová čára, reakce ve vazbách a kritické otáčky. Výsledky jsou následně porovnány.

8.1 Rotor elektromotoru

Geometrie modelu je znázorněna na obr. 8.1. Pro výpočet byly zvoleny parametry ložisek a magnetického tahu, které jsou uvedeny v tab. 8.1

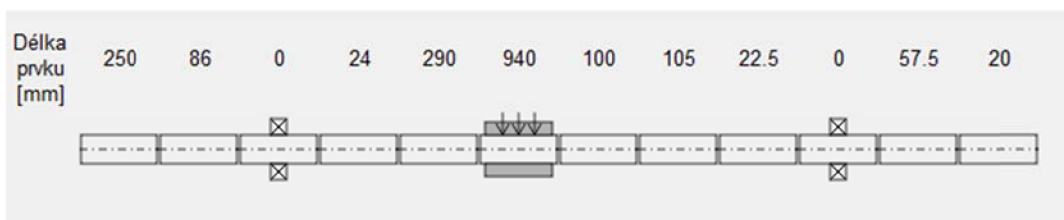


Obr. 8.1 Geometrie rotoru elektromotoru [3]

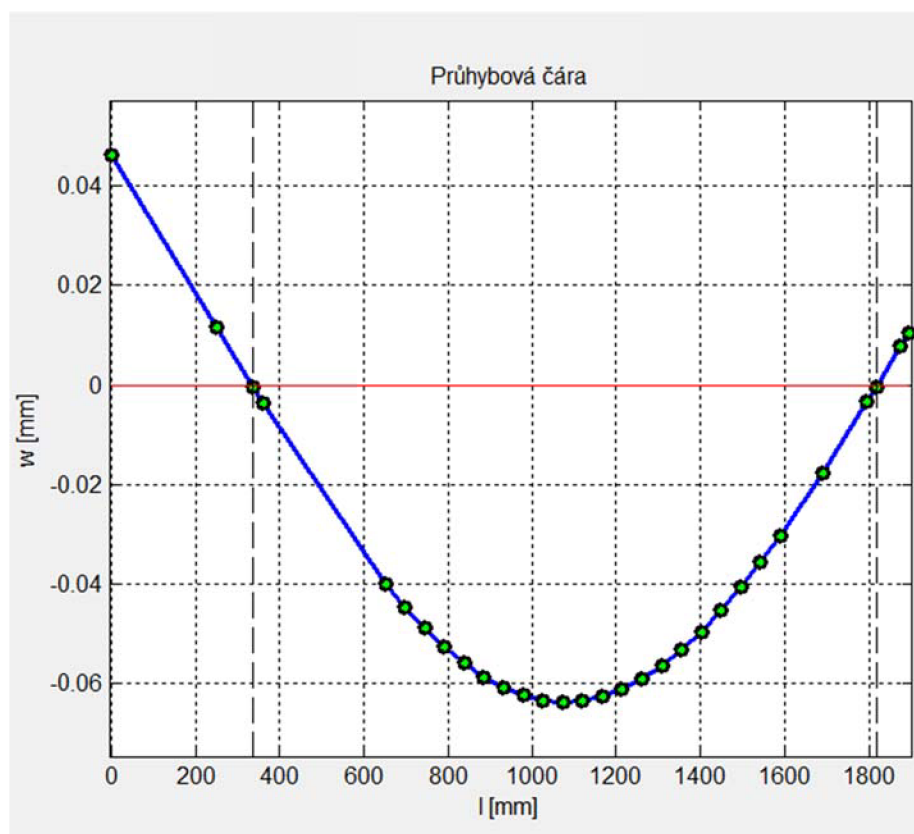
Tab. 8.1 Parametry rotoru elektromotoru

koeficienty tuhosti ložisek	$[N \cdot mm^{-1}]$
k_{1yy}	$3 \cdot 10^7$
k_{1zz}	$3 \cdot 10^7$
k_{2yy}	$2,8 \cdot 10^7$
k_{2zz}	$2,8 \cdot 10^7$
koeficienty tlumení ložisek	$[N \cdot s \cdot mm^{-1}]$
c_{1yy}	$1 \cdot 10^4$
c_{1zz}	$1 \cdot 10^4$
c_{2yy}	$8 \cdot 10^3$
c_{2zz}	$8 \cdot 10^3$
koeficient tuhosti magnetického tahu	$[N \cdot mm^{-1}]$
C_{My}	$-1 \cdot 10^5$
C_{Mz}	$-1 \cdot 10^5$
materiálové vlastnosti	
E	$210\,000\,MPa$
ρ	$7\,850\,kg \cdot m^{-3}$
μ	$0,3$

8.1.1 Program Hřídel



Obr. 8.2 Geometrie rotoru elektromotoru zadaná v programu Hřídel

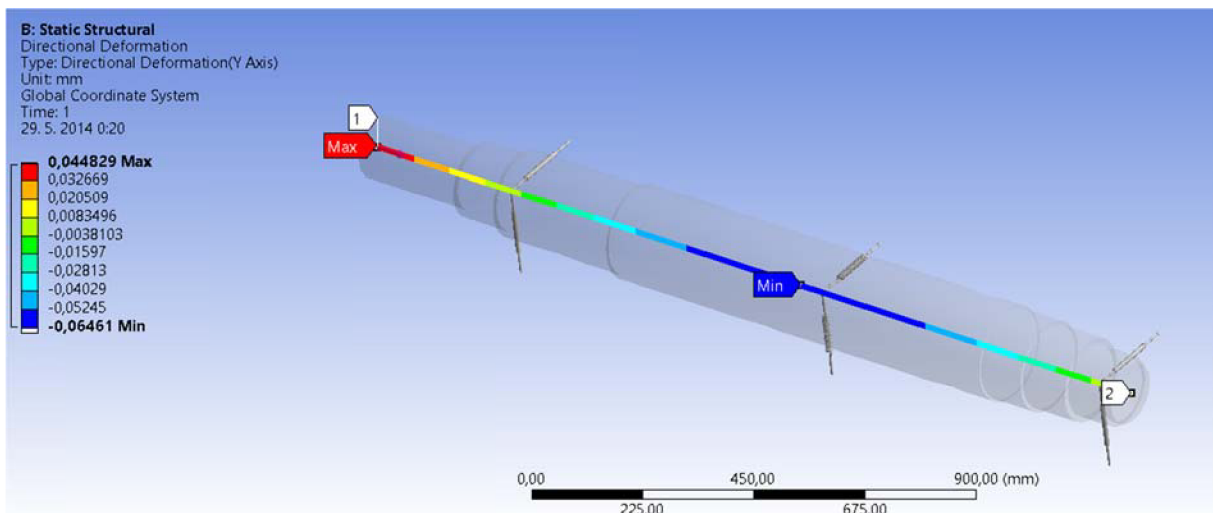


Obr. 8.3 Zobrazení průhybové čáry rotoru elektromotoru v programu Hřídel

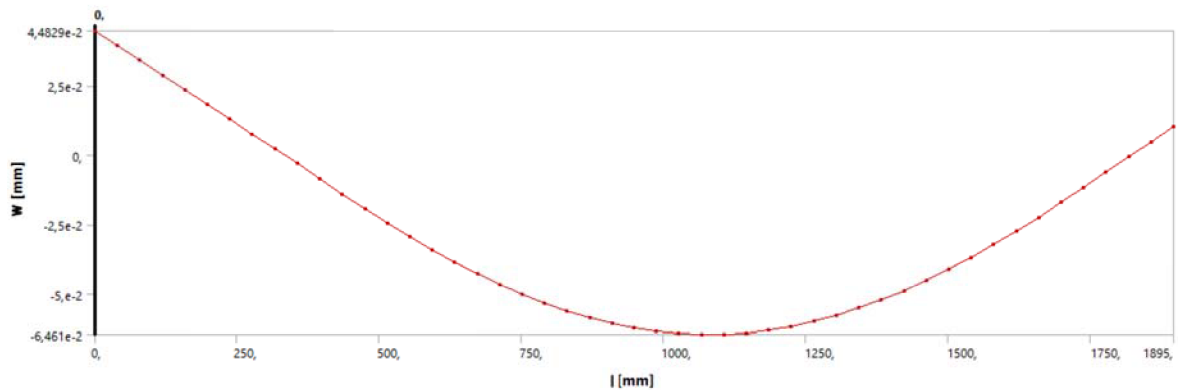
Tab. 8.2 Hodnoty průhybu rotoru elektromotoru v programu Hřídel

l [mm]	w [mm]	l [mm]	w [mm]	l [mm]	w [mm]
0,0	0,04627	932,0	-0,06086	1402,0	-0,04961
250,0	0,01160	979,0	-0,06244	1449,0	-0,04540
336,0	-0,00028	1026,0	-0,06343	1496,0	-0,04074
360,0	-0,00361	1073,0	-0,06381	1543,0	-0,03568
650,0	-0,04009	1120,0	-0,06356	1590,0	-0,03027
697,0	-0,04472	1167,0	-0,06270	1690,0	-0,01774
744,0	-0,04893	1214,0	-0,06124	1795,0	-0,00346
791,0	-0,05269	1261,0	-0,05917	1817,5	-0,00032
838,0	-0,05596	1308,0	-0,05653	1875,0	0,00770
885,0	-0,05869	1355,0	-0,05333	1895,0	0,01049

8.1.2 Program Ansys Workbench



Obr. 8.4 Průhyb rotoru elektromotoru zadaného v programu Ansys Workbench

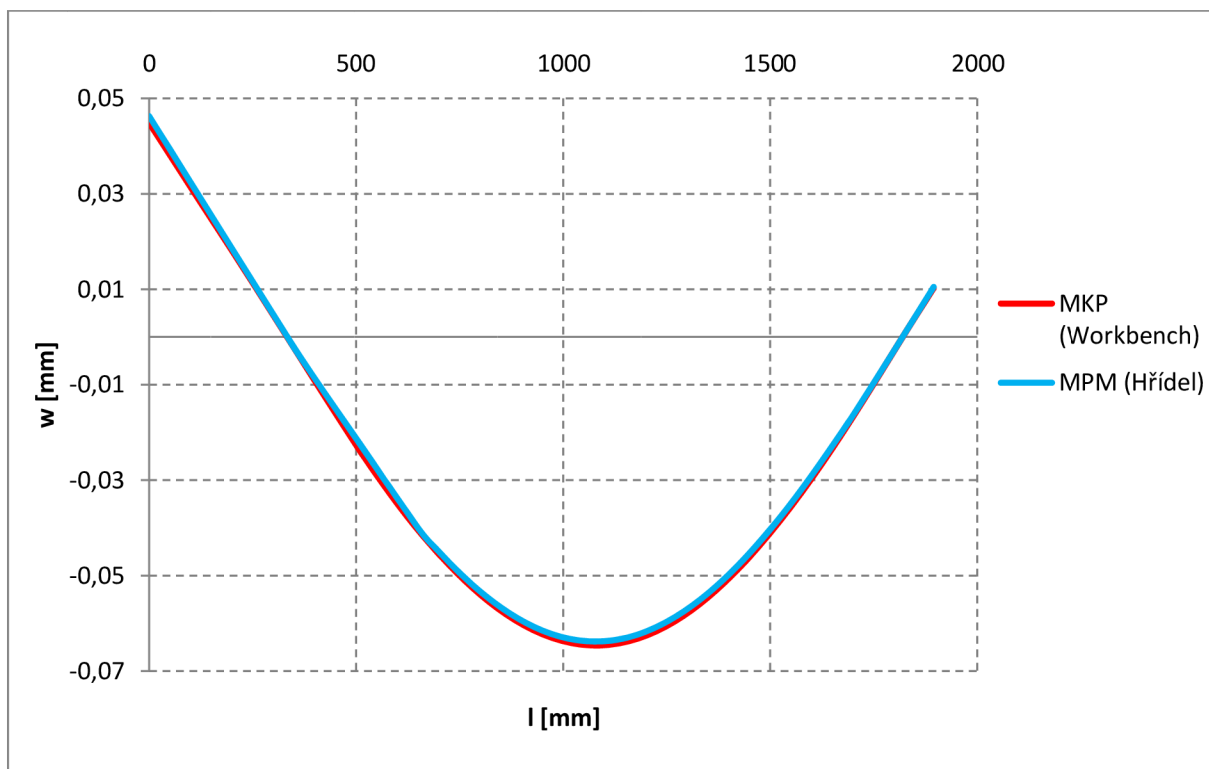


Obr. 8.5 Zobrazení průhybové čáry rotoru elektromotoru v programu Ansys Workbench

Tab. 8.3 Hodnoty průhybu rotoru elektromotoru v programu Ansys Workbench

l [mm]	w [mm]	l [mm]	w [mm]	l [mm]	w [mm]
0,0	0,04483	932,0	-0,06161	1402,0	-0,05046
250,0	0,01129	979,0	-0,06322	1449,0	-0,04621
336,0	-0,00036	1026,0	-0,06423	1496,0	-0,04151
360,0	-0,00366	1073,0	-0,06463	1543,0	-0,03639
650,0	-0,04053	1120,0	-0,06441	1590,0	-0,03090
697,0	-0,04523	1167,0	-0,06356	1690,0	-0,01813
744,0	-0,04951	1214,0	-0,06210	1795,0	-0,00356
791,0	-0,05333	1261,0	-0,06005	1817,5	-0,00041
838,0	-0,05663	1308,0	-0,05740	1875,0	0,00752
885,0	-0,05940	1355,0	-0,05419	1895,0	0,01026

8.1.3 Porovnání výsledků



Obr. 8.6 Porovnání průhybové čáry rotoru elektromotoru pro oba programy

Tab. 8.4 Odchylky průhybu rotoru elektromotoru pro oba programy

l [mm]	odchylka [%]	l [mm]	odchylka [%]	l [mm]	odchylka [%]
0,0	1,577	932,0	0,612	1402,0	0,852
250,0	1,372	979,0	0,614	1449,0	0,889
336,0	12,186	1026,0	0,624	1496,0	0,937
360,0	0,737	1073,0	0,642	1543,0	0,982
650,0	0,540	1120,0	0,660	1590,0	1,027
697,0	0,571	1167,0	0,678	1690,0	1,085
744,0	0,585	1214,0	0,702	1795,0	1,369
791,0	0,600	1261,0	0,735	1817,5	12,161
838,0	0,595	1308,0	0,763	1875,0	1,191
885,0	0,602	1355,0	0,801	1895,0	1,089

Tab. 8.5 Reakce ve vazbách rotoru elektromotoru

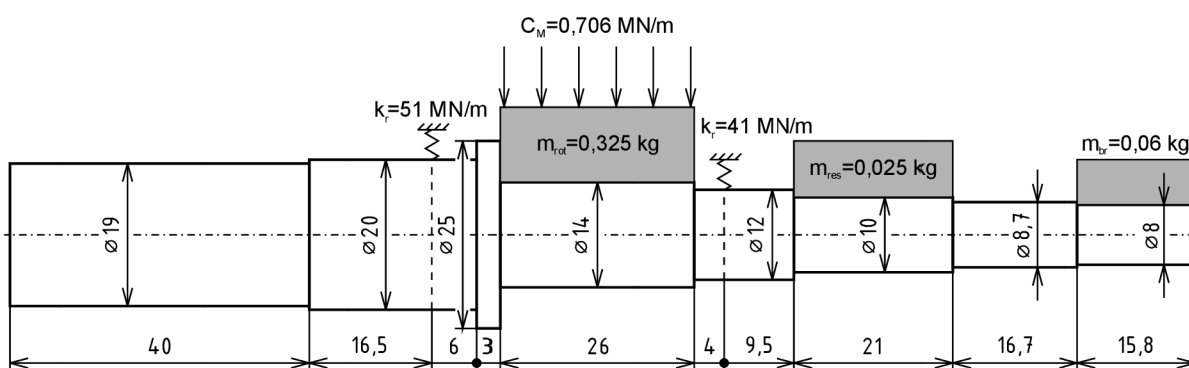
program Hřídel [N]	Ansys Workbench [N]	odchylka [%]
9 438,1546	9 376,4000	0,328
9 881,3401	9 917,9000	0,185

Tab. 8.6 Kritické otáčky rotoru elektromotoru

program Hřídel	Ansys Workbench	odchylka
$[min^{-1}]$	$[min^{-1}]$	[%]
4 011	4 022,1	0,138
20 180	19 202,7	2,482
44 238	39 855,5	5,215
57 649	56 467,9	1,035

8.2 Rotor servomotoru

Je zvolena hřídel servomotoru AF502 převzatá z [6]. Geometrie a zatížení jsou znázorněny na obr. 8.7., materiálové vlastnosti jsou uvedeny v tab. 8.7.

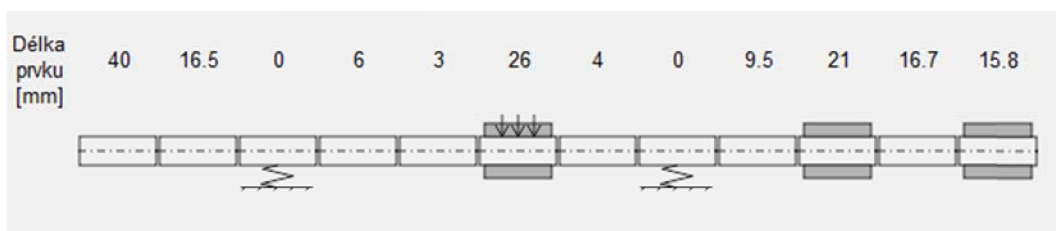


Obr. 8.7 Rotor servomotoru AF502 [6]

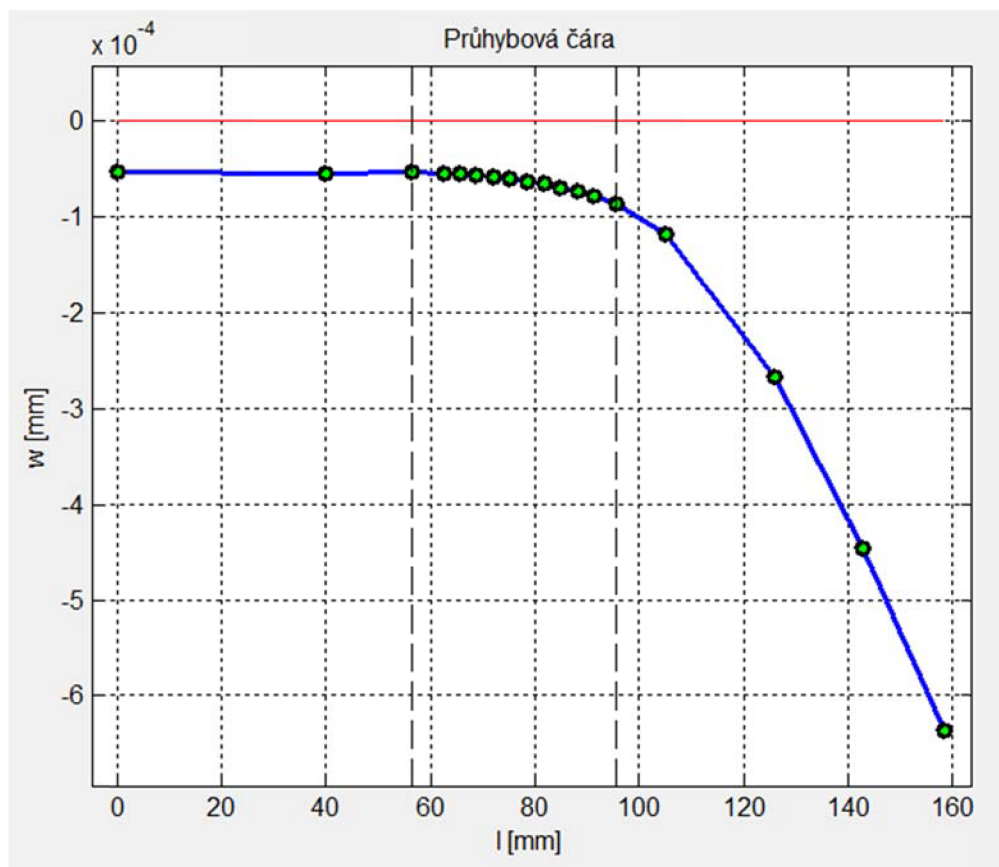
Tab. 8.7 Materiálové vlastnosti hřídele servomotoru AF502

materiálové vlastnosti	
E	210 000 MPa
ρ	7 850 $kg \cdot m^{-3}$
μ	0,3

8.2.1 Program Hřídel



Obr. 8.8 Geometrie hřídele servomotoru AF502 zadaná v programu Hřídel

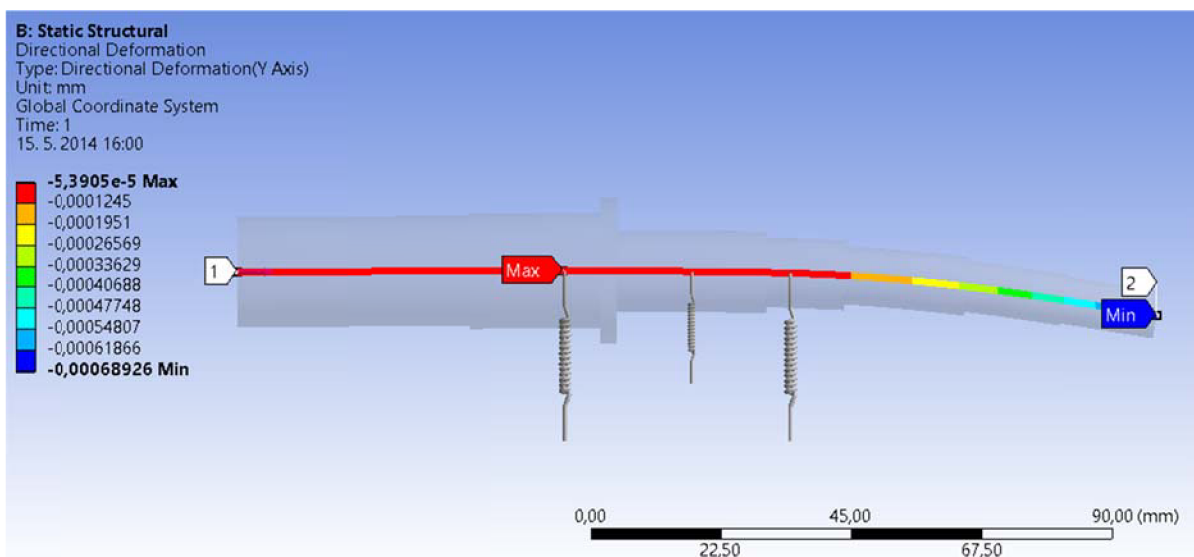


Obr. 8.9 Zobrazení průhybové čáry hřídele servomotoru AF502 v programu Hřídel

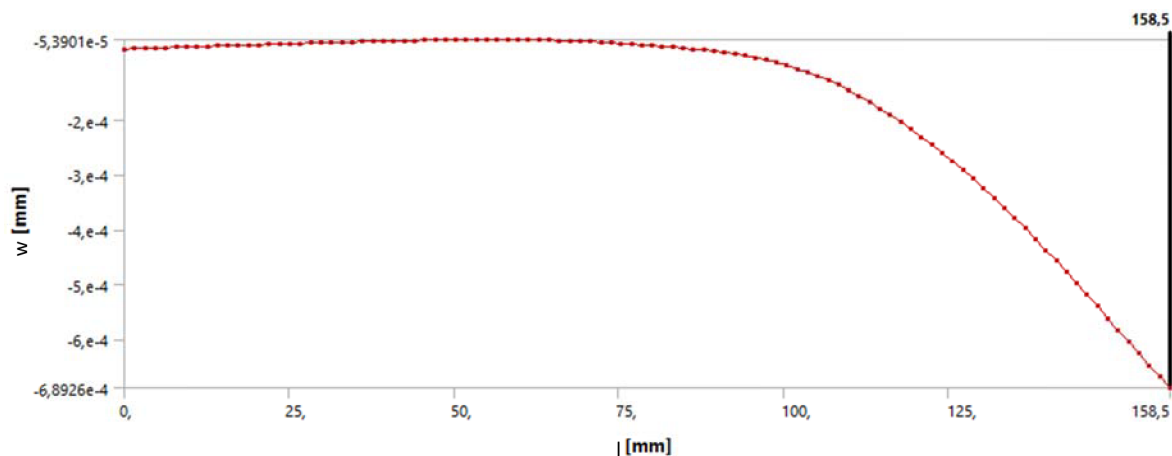
Tab. 8.8 Hodnoty průhybu hřídele servomotoru AF502 v programu Hřídel

l	w	l	w	l	w
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0,00	-5,4702E-05	72,00	-5,8079E-05	91,50	-7,8135E-05
40,00	-5,4394E-05	75,25	-6,0088E-05	95,50	-8,6314E-05
56,50	-5,3914E-05	78,50	-6,2554E-05	105,00	-1,1863E-04
62,50	-5,4854E-05	81,75	-6,5506E-05	126,00	-2,6694E-04
65,50	-5,5510E-05	85,00	-6,9010E-05	142,70	-4,4572E-04
68,75	-5,6537E-05	88,25	-7,3172E-05	158,50	-6,3575E-04

8.2.2 Program Ansys Workbench



Obr. 8.10 Průhyb hřídele servomotoru AF502 zadané v programu Ansys Workbench

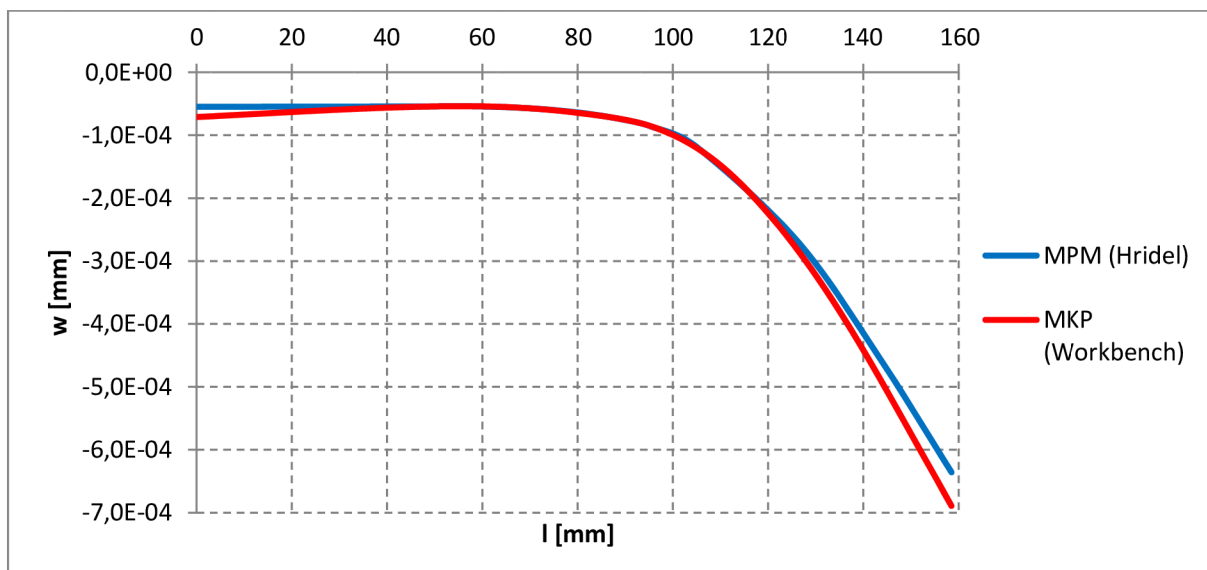


Obr. 8.11 Zobrazení průhybové čáry hřídele servomotoru AF502 v programu Ansys Workbench

Tab. 8.9 Hodnoty průhybu hřídele servomotoru AF502 v programu Ansys Workbench

l	w	l	w	l	w
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0,00	-7,1154E-05	72,00	-5,8335E-05	91,50	-7,7699E-05
40,00	-5,6206E-05	75,25	-6,0524E-05	95,50	-8,5916E-05
56,50	-5,3914E-05	78,50	-6,3056E-05	105,00	-1,1998E-04
62,50	-5,4485E-05	81,75	-6,5964E-05	126,00	-2,8015E-04
65,50	-5,5190E-05	85,00	-6,9294E-05	142,70	-4,7677E-04
68,75	-5,6512E-05	88,25	-7,3116E-05	158,50	-6,8926E-04

8.2.3 Porovnání výsledků



Obr. 8.12 Porovnání průhybové čáry servomotoru AF502 pro oba programy

Tab. 8.10 Odchylyky průhybu hřídele servomotoru AF502 pro oba programy

l [mm]	odchylka [%]	l [mm]	odchylka [%]	l [mm]	odchylka [%]
0,00	13,072	72,00	0,220	91,50	0,280
40,00	1,638	75,25	0,361	95,50	0,231
56,50	0,000	78,50	0,400	105,00	0,566
62,50	0,337	81,75	0,348	126,00	2,415
65,50	0,289	85,00	0,205	142,70	3,366
68,75	0,022	88,25	0,038	158,50	4,038

Tab. 8.11 Reakce ve vazbách hřídele servomotoru AF502

program Hřidel [N]	Ansys Workbench [N]	odchylka [%]
2,7496	2,7496	0,000
3,5389	3,5373	0,023

Tab. 8.12 Kritické otáčky hřídele servomotoru AF502

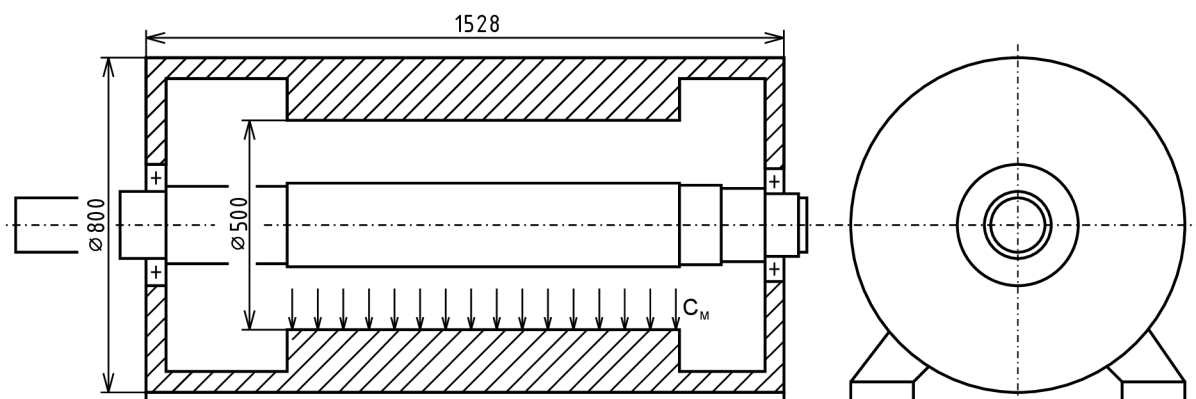
program Hřidel [min ⁻¹]	Ansys Workbench [min ⁻¹]	odchylka [%]
39 858	38 473,6	1,767
84 729	83 224,2	0,896
126 511	125 178,3	0,530
265 332	263 254,8	0,393

9 Model rotoru a statoru

Do této chvíle se práce zabývala pouze rotorem. V reálné praxi ale magnetický tah ovlivňuje nejen rotor, ale i stator. Tato kapitola se zabývá vytvořením modelu rotoru i statoru a jejich vzájemnou interakcí. Celá simulace je provedena v programu Ansys Workbench.

Je využit rotor z předchozí kapitoly (obr. 8.1 obr. 9.1). K němu je vytvořen model statoru (obr. 9.1). Vinutí na rotoru v tomto modelu není modelováno, je nahrazeno prvkem MASS21 (m na obr. 8.1). Je tomu tak zvoleno kvůli zjednodušení modelu (jde o průhyb rotoru a statoru).

Parametry jsou uvedeny v tab. 9.1.



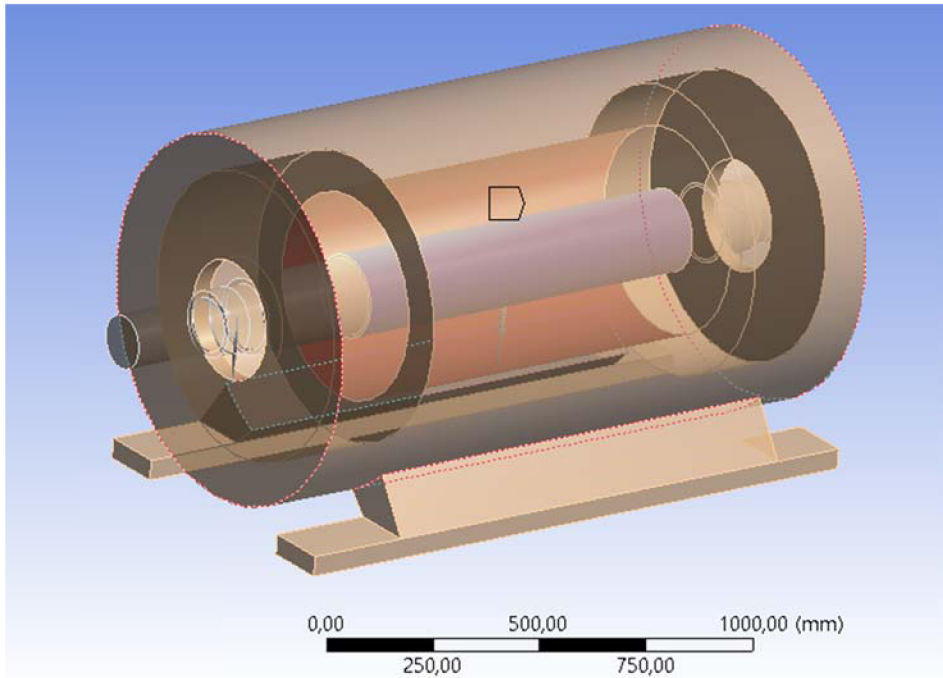
Obr. 9.1 Geometrie statoru

Tab. 9.1 Parametry modelu

koeficient tuhosti magnetického tahu	$[N \cdot mm^{-1}]$
C_M	$-1 \cdot 10^5$
materiálové vlastnosti	
E	210 000 MPa
ρ	7 850 $kg \cdot m^{-3}$
μ	0,3

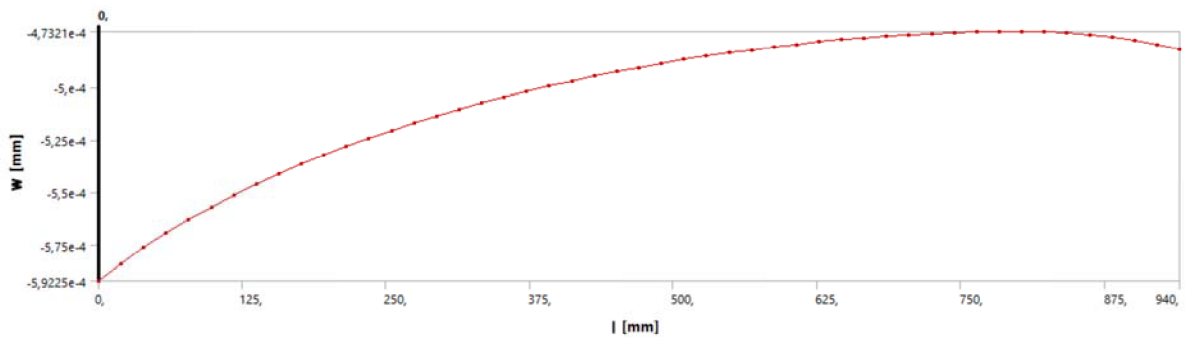
Při zadávání vazeb je postupováno obdobně jako v kapitole 7.3. Jediným rozdílem je, že pružinové prvky nejsou zadávány jako vázané k základnímu tělesu, ale jako vazba mezi dvěma tělesy (nabídka Body-Body). Následně je stator vázán k základnímu tělesu pomocí vazby Fixed Support.

Pro zobrazení výsledků jsou vytvořeny cesty po střednici rotoru a po hraně statoru ve středové rovině (řez na obr. 9.1). Při zadávání zobrazovaných výsledků je pak opět využito Directional Deformation na zadaných cestách.

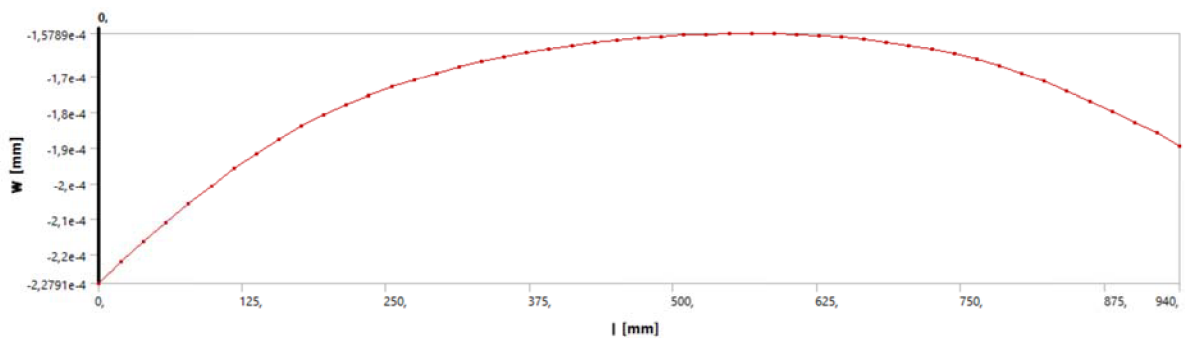


Obr. 9.2 Model statoru a rotoru v programu Ansys Workbench

Z výsledků průhybových čar statoru (obr. 9.3 a obr. 9.4) a rotoru (obr. 8.5) je patrné, že průhyb odpovídá teorii (obr. 3.1b). V místě nejmenší vzduchové mezery (největšího průhybu hřídele) je stator k rotoru přitahován (magnetický tah působí tahově). Naopak v místě největší vzduchové mezery působí magnetický tah tlakově.



Obr. 9.3 Průhybová čára horní části statoru



Obr. 9.4 Průhybová čára spodní části statoru

10 Závěr

Byl vytvořen program Hřídel v prostředí Matlab, který umožňuje uživateli vypočítat průhybovou čáru a kritické otáčky hřídele. Pro výpočet v tomto programu je použita metoda přenosových matic, která je také popsána. Při zadávání parametrů lze zadat materiálové charakteristiky pro hřídel, možnost přidání působení gravitačního pole, pásmo otáček, uložení a po jednotlivých prvcích geometrii a zatížení hřídele. Pro zobrazení výsledných dat jsou k dispozici okna s vykreslenou průhybovou čárou a reakcemi ve vazbách, grafem determinantu soustavy a kritických otáček a textovým výpisem všech vypočtených hodnot. K programu je vytvořena nápověda s popisem ovládání.

Nevýhodou zvoleného programovacího prostředí je distribuce samotné aplikace. Je vázána na počítače, ve kterých je nainstalován buď program Matlab ve stejné verzi, jako byla ta, ve které byla aplikace naprogramována (R2012b), nebo kompilátor MCR firmy Mathworks ve stejné verzi (8.0). Variantou je spouštět aplikaci přímo ze skriptu (je nutný pouze Matlab, ale nezáleží na verzi). I přes tuto nevýhodu bylo zvoleno toto programovací prostředí, protože zvládá bez problémů počítat s maticemi. To bylo výhodné, protože celý postup výpočtu byl založen na násobení matic a maticových rovnicích. V jiných programovacích prostředích by bylo nutné doplnit program o externí knihovny, které umí počítat s maticemi.

V programu Ansys Workbench je vytvořen jednoduchý model, na kterém je demonstrován princip zadávání magnetického tahu. Je zvolena metoda pomocí pružinového elementu se zápornou tuhostí. Zároveň je provedena simulace se zadáváním více pružin pro zpřesnění výpočtu. Byly provedeny simulace s jednou, třemi a sedmi pružinami. Z výsledných hodnot je vidět, že pokud je použito více pružin, je průhyb lépe aproximován. Postupným zvětšováním velikosti hodnoty magnetického tahu roste i průhyb hřídele. Při zadání vysokých hodnot výpočet přestává být lineární a posléze přestává dávat akceptovatelné výsledky. Čím méně je použito pružin, tím dříve (při zvětšování hodnoty magnetického tahu) přestává být výpočet lineární.

Následně je popsána metodika v programu Ansys Workbench pro vytvoření modelu a simulace pro statickou a modální analýzu hřídele se zahrnutím vlivu magnetického tahu.

Na dvou modelech je provedeno porovnání výsledků získaných metodou přenosových matic v programu Hřídel a výsledků získaných metodou konečných prvků v programu Ansys Workbench. Prvním je rotor elektromotoru převzatý z [3] a druhým je hřídel servomotoru AF502 převzatá z [6]. Při porovnání hodnot průhybu byla odchylka metod do 5 % s výjimkou velmi mála bodů, které tuto hranici přesáhly. Tento rozdíl je možné odůvodnit velikostí elementů konečně prvkové sítě v případě metody konečných prvků. V případě metody přenosových matic lze lepší aproximace dosáhnout rozdělením celistvých úseků hřídele na menší díly. Odchylka hodnoty reakcí ve vazbách byla do 2 %, což je velmi příznivý výsledek. Při porovnání hodnot kritických otáček se odchylka pohybovala do 6 %, což lze považovat za akceptovatelný výsledek.

V poslední části je demonstrováno ovlivnění magnetickým tahem nejen rotoru, ale také statoru. Výsledky provedené simulace potvrzují teorii o průhybu rotoru a statoru, ale pro vyvození obecného závěru by bylo nutné provést statisticky významné množství simulací.

11 Seznam použitých zdrojů a programového vybavení

11.1 Zdroje

- [1] DONÁT, Martin. Computational Modelling of the Unbalanced Magnetic Pull by Finite Element Method. *Procedia Engineering* [online]. 2012, vol. 48, s. 83-89 [cit. 2014-03-30].
Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.489>
- [2] SPRYSL, H., VÖGELE H., EBI G. The Influence of Magnetic Forces on the Stability Behavior of Large Electrical Machines. *VDI Berichte* [online]. 1996, č. 1285 [cit. 2014-02-20].
Dostupné z:
http://www.sensoplan.com/_literature_42870/The_influence_of_magnetic_forces_on_the_stability_behavior_of_large_electrical_machines
- [3] ČALA, Václav. *Katalogizace asynchronních motorů*. Brno, 2009. 76 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství.
- [4] HORNÍKOVÁ, Jana. *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text* [online]. 1. vyd. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-720-4268-8 [cit. 2014-02-20].
Dostupné z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>
- [5] PUCHMAJER, Pavel, ŘEZNÍČEK Jan, ŠVEHLA Vladimír. *Pružnost a pevnost pro VS I*. Praha: ČVUT, 1993, 149 s. ISBN 80-01-00993-9.
- [6] VLACH, Radek. *Metoda přenosových matic*. Brno, 2009, 17 s.
- [7] PILKEY, Walter D. *Formulas for stress, strain, and structural matrices*. 2. ed. Norwich, NY: Kovel, 2007. ISBN 978-160-1190-451.
- [8] GHASEMALIZADEH, Omid et al. Rotor Bearing System Analysis Using the Transfer Matrix Method with Thickness Assumption of Disk and Bearing. *International Journal of Mechanical, Industrial and Aerospace Engineering* [online]. 2008, vol. 2, issue 4, s. 206-213 [cit. 2014-02-02].
Dostupné z: <http://arxiv.org/abs/1306.4417>
- [9] ČIHÁK, Michal. *Hledání kořenů rovnic jedné reálné proměnné: metoda půlení intervalů* [online]. Hradec Králové, 2012 [cit. 2014-02-02].
Dostupné z: <http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/cihakmi1/zanumat/bisekce.pdf>
- [10] *Nápověda programu ANSYS – ANSYS Help 14.5*. 2012.
- [11] MALENOVSKÝ, Eduard. *Dynamika rotorových soustav* [online]. 2007 [cit. 2014-05-14].
Dostupné z: http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dyn_rot/index.html
- [12] ŠIMEK, Jakub. *Příprava výukového materiálu pro tvorbu GUI v MATLABu*. České Budějovice, 2012. 107 s. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra aplikované fyziky [cit. 2014-05-27].
Dostupné z: <http://theses.cz/id/tbynsc/>
- [13] HUMUSOFT S.R.O. *MATLAB: Školení MATLAB I*. Praha, 2013, 86 s.
- [14] HUMUSOFT S.R.O. *MATLAB: Školení MATLAB II*. Praha, 2013, 102 s.
- [15] *Nápověda programu MATLAB – MATLAB Help*. 2012.

11.2 Programové vybavení

- Matlab R2012b (8.0.0.783)
- Microsoft Office 2010 (14.0.7106.5003)
- CorelDRAW X6 (16.2.0.998)
- Ansys Workbench 14.5

12 Seznam použitých zkratk a symbolů

B	$[T]$	elektromagnetická indukce
c, c_{ij}	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	tlumení ($i, j = y, z$)
\bar{c}, \bar{c}_{ij}	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	tlumení uložení ($i, j = y, z$)
C_M	$[N \cdot m^{-1}]$	magnetický tah
D	$[m]$	průměr prvku
D_{pak}	$[m]$	velký průměr paketu rotoru
e	$[m]$	excentricita
E	$[Pa]$	modul pružnosti v tahu, Youngův modul
F, F_j	$[N]$	síla
F_k	$[N]$	síla v pružině
F_{mag}	$[N]$	magnetická síla
g	$[m \cdot s^{-2}]$	gravitační zrychlení
G	$[Pa]$	modul pružnosti ve smyku
I	$[kg \cdot m^2]$	moment setrvačnosti
J, J_y, J_z	$[m^4]$	kvadratický moment průřezu
k, k_{ij}	$[N \cdot m^{-1}]$	tuhost ($i, j = y, z$)
\bar{k}, \bar{k}_{ij}	$[N \cdot m^{-1}]$	tuhost uložení ($i, j = y, z$)
L	$[m]$	délka prvku
L_{pak}	$[m]$	délka paketu rotoru
lm	$[m]$	délka přídavné hmoty
m, m_i	$[kg]$	hmotnost ($i = y, z$)
M_o, M_{oy}, M_{oz}	$[N \cdot m]$	ohybový moment
N_{ki}	$[min^{-1}]$	kritické otáčky
R_i	$[N]$	reakce ve vazbě
S	$[m^2]$	plocha, průřez
t_b	$[m]$	šířka ložiska
T, T_i	$[N]$	posouvající síla
u_b	$[m]$	posuv kroužku ložiska
w, w_j	$[m]$	průhyb
W	$[J]$	energie napjatosti
β	$[1]$	průřezové charakteristiky
δ	$[m]$	proměnná velikost vzduchové mezery
δ_m	$[m]$	pevná velikost vzduchové mezery
ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota
φ	$[rad]$	natočení střednice
ω	$[rad \cdot s^{-1}]$	úhlová frekvence
Ω	$[rad \cdot s^{-1}]$	úhlová frekvence vynuceného kmitání
ω_i	$[rad \cdot s^{-1}]$	kritická úhlová frekvence
$\{c\}$...	vektor integračních konstant
$\{v\}$...	vektor stavových veličin pro ohyb
$[C]_{i,j}$...	přenosová matice
$[F]_x$...	fundamentální matice
$[R]$...	rozměrová matice
F_w, F_φ, F_M, F_T	...	parametry popisující zatížení hřídele

O_{ij}	...	prvek přenosové matice rotujících prvků
U_{ij}	...	prvek přenosové matice
MKP	...	metoda konečných prvků
MPM	...	metoda přenosových matic
VVÚ	...	výsledné vnitřní účinky

13 Seznam obrázků

Obr. 3.1 Excentricita způsobená magnetickým tahem	13
Obr. 3.2 Působení magnetické síly	13
Obr. 5.1 Hřídel ze tří délkových prvků	18
Obr. 5.2 Ložisko	19
Obr. 5.3 Použitý model ložiska	21
Obr. 5.4 Model ložiska zahrnující jeho šířku	22
Obr. 5.5 Prvek s magnetickým tahem	23
Obr. 5.6 Prvek s magnetickým tahem - přesnější model.....	23
Obr. 6.1 Schéma programu	24
Obr. 6.2 Hlavní okno programu	25
Obr. 6.3 Checkbox Výpočet kritických otáček	26
Obr. 6.4 Panel Okrajové podmínky.....	26
Obr. 6.5 Zobrazování různých parametrů pro různé prvky	27
Obr. 6.6 Dvouúrovňová struktura výsledného cell pole	27
Obr. 6.7 Ukončovací dialog programu.....	28
Obr. 6.8 Okno Nápověda a O programu.....	28
Obr. 6.9 Varovný a Chybový dialog	29
Obr. 6.10 Struktura výpočtu	30
Obr. 6.11 Metoda půlení intervalů.....	33
Obr. 6.12 Výsledná průhybová čára a reakce ve vazbách	33
Obr. 6.13 Výsledné kritické otáčky	34
Obr. 6.14 Textový výpis výsledků	34
Obr. 7.1 Element BEAM188.....	35
Obr. 7.2 Element SOLID187	35
Obr. 7.3 Element MASS21	36
Obr. 7.4 Element COMBIN14.....	36
Obr. 7.5 Modelování ložiska za pomoci dvou elementů typu COMBIN14.....	36
Obr. 7.6 Element COMBI214	37
Obr. 7.7 Model pro demonstraci zadání magnetického tahu	38
Obr. 7.8 Zadání záporné tuhosti.....	38
Obr. 7.9 Graf závislosti prhybu středu hřídele na velikosti magnetického tahu.....	39
Obr. 7.10 Blok analýzy Static Structural	40
Obr. 7.11 Nastavení statické analýzy v programu Ansys Workbench.....	40
Obr. 7.12 Souřadnicový systém a precese	41
Obr. 7.13 Zobrazení Cambellova diagramu	42
Obr. 7.14 Cambellův diagram v programu Ansys Workbench	42
Obr. 7.15 Propojení bloků analýz	43
Obr. 7.16 Nastavení modální analýzy v programu Ansys Workbench	43
Obr. 8.1 Geometrie rotoru elektromotoru.....	44
Obr. 8.2 Geometrie rotoru elektromotoru zadaná v programu Hřídel.....	45
Obr. 8.3 Zobrazení průhybové čáry rotoru elektromotoru v programu Hřídel.....	45
Obr. 8.4 Průhyb rotoru elektromotoru zadaného v programu Ansys Workbench	46
Obr. 8.5 Zobrazení průhybové čáry rotoru elektromotoru v programu Ansys Workbench ...	46
Obr. 8.6 Porovnání průhybové čáry rotoru elektromotoru pro oba programy	47
Obr. 8.7 Rotor servomotoru AF502.....	48

Obr. 8.8 Geometrie hřídele servomotoru AF502 zadaná v programu Hřidel	48
Obr. 8.9 Zobrazení průhybové čáry hřídele servomotoru AF502 v programu Hřidel	49
Obr. 8.10 Průhyb hřídele servomotoru AF502 zadané v programu Ansys Workbench.....	50
Obr. 8.11 Zobrazení průhybové čáry hřídele servomotoru AF502 v programu Ansys Workbench	50
Obr. 8.12 Porovnání průhybové čáry servomotoru AF502 pro oba programy	51
Obr. 9.1 Geometrie statoru	52
Obr. 9.2 Model statoru a rotoru v programu Ansys Workbench	53
Obr. 9.3 Průhybová čára horní části statoru	53
Obr. 9.4 Průhybová čára spodní části statoru	53

14 Seznam tabulek

Tab. 5.1 Parametry ložiska.....	20
Tab. 5.2 Přehled modelů ložiska.....	20
Tab. 5.3 Zjednodušení parametrů	21
Tab. 6.1 Seznam prvků.....	26
Tab. 6.2 Varování a chybové hlášky.....	28
Tab. 6.3 Kontrola parametrů	29
Tab. 6.4 Okrajové podmínky podle uložení	31
Tab. 7.1 Hodnoty průhybu středu hřídele v závislosti na počtu pružin	39
Tab. 8.1 Parametry rotoru elektromotoru	44
Tab. 8.2 Hodnoty průhybu rotoru elektromotoru v programu Hřídel	45
Tab. 8.3 Hodnoty průhybu rotoru elektromotoru v programu Ansys Workbench	46
Tab. 8.4 Odchytky průhybu rotoru elektromotoru pro oba programy	47
Tab. 8.5 Reakce ve vazbách rotoru elektromotoru	47
Tab. 8.6 Kritické otáčky rotoru elektromotoru.....	48
Tab. 8.7 Materiálové vlastnosti hřídele servomotoru AF502.....	48
Tab. 8.8 Hodnoty průhybu hřídele servomotoru AF502 v programu Hřídel.....	49
Tab. 8.9 Hodnoty průhybu hřídele servomotoru AF502 v programu Ansys Workbench	50
Tab. 8.10 Odchytky průhybu hřídele servomotoru AF502 pro oba programy	51
Tab. 8.11 Reakce ve vazbách hřídele servomotoru AF502	51
Tab. 8.12 Kritické otáčky hřídele servomotoru AF502	51
Tab. 9.1 Parametry modelu	52

15 Přílohy

A) Přenosové matice prvků

B) Obsah přiloženého CD

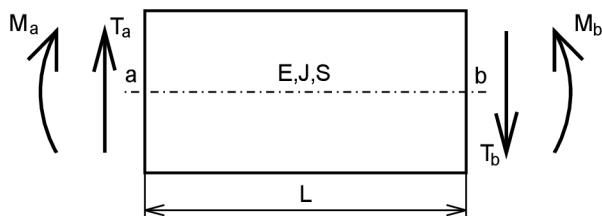
- Hridel – složka se skripty a daty k programu Hřidel
- Hridel data – složka s modelovými daty do programu Hřidel
- Hridel servomotor – Ansys Workbench projekt hřídele servomotoru AF502
- Magnetický tah – Ansys Workbench projekt s porovnáním zadávání magnetického tahu pomocí více pružin všechny pružiny
- Rotor elektromotor – Ansys Workbench projekt modelového rotoru
- Stator – Ansys Workbench projekt s rotorem a statorem
- diplomova_prace_kukacka.pdf

Příloha A: Přenosové matice prvků

převzato z [5], [6] a [7]

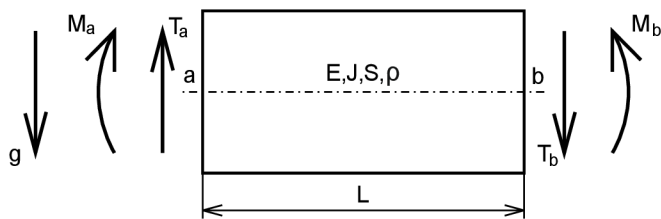
Základní matice

Nehmotný prvek stálého průřezu



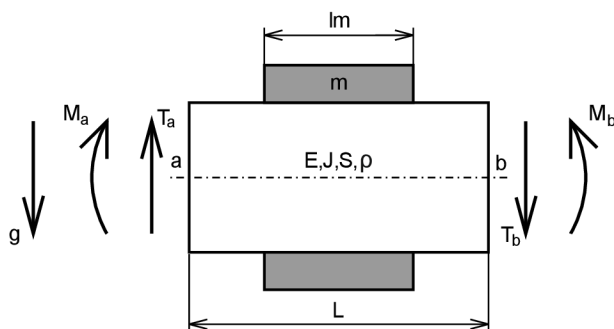
$$\begin{bmatrix} 1 & L & -\frac{L^2}{2 \cdot E \cdot J} & -\frac{L^3}{6 \cdot E \cdot J} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{L}{E \cdot J} & -\frac{L^2}{2 \cdot E \cdot J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

Hmotný prvek stálého průřezu



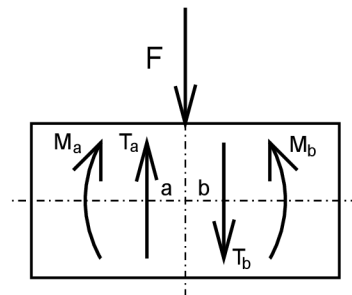
$$\begin{bmatrix} 1 & L & -\frac{L^2}{2 \cdot E \cdot J} & -\frac{L^3}{6 \cdot E \cdot J} & \frac{-S \cdot \rho \cdot g \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J} \\ 0 & 1 & -\frac{L}{E \cdot J} & -\frac{L^2}{2 \cdot E \cdot J} & \frac{-S \cdot \rho \cdot g \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot J} \\ 0 & 0 & 1 & L & \frac{-S \cdot \rho \cdot g \cdot L^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -S \cdot \rho \cdot g \cdot L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

Hmotný prvek stálého průřezu s přidavnou hmotou



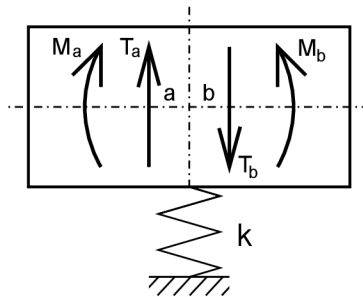
$$\begin{bmatrix} 1 & L & -\frac{L^2}{2 \cdot E \cdot J} & -\frac{L^3}{6 \cdot E \cdot J} & \frac{-(S \cdot \rho \cdot g + \frac{m \cdot g}{lm}) \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot J} \\ 0 & 1 & -\frac{L}{E \cdot J} & -\frac{L^2}{2 \cdot E \cdot J} & \frac{-(S \cdot \rho \cdot g + \frac{m \cdot g}{lm}) \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot J} \\ 0 & 0 & 1 & L & \frac{-(S \cdot \rho \cdot g + \frac{m \cdot g}{lm}) \cdot L^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(S \cdot \rho \cdot g + \frac{m \cdot g}{lm}) \cdot L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

Skoková změna příčné síly



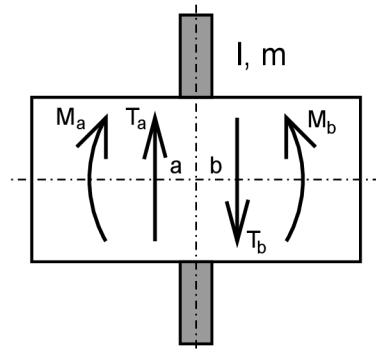
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

Pružná podpora



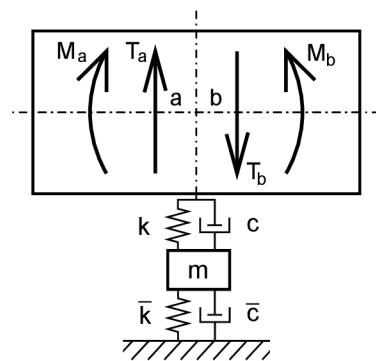
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

Disk



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I \cdot \omega^2 & 1 & 0 & 0 \\ -m \cdot \omega^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

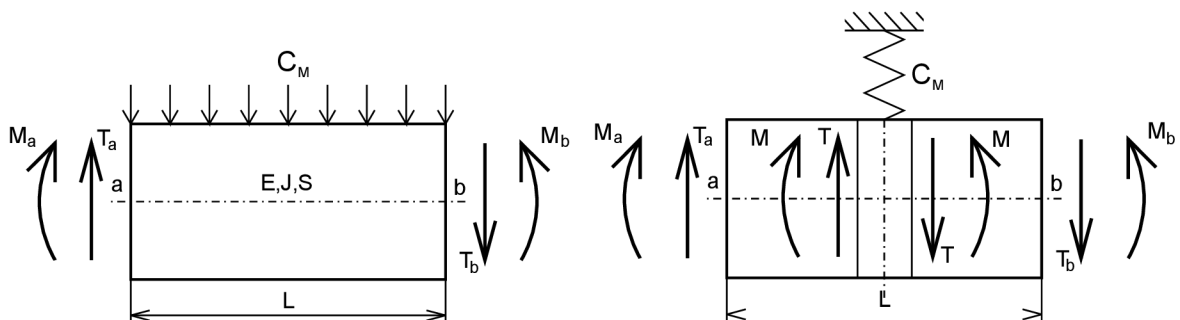
Ložisko



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

$$z = \frac{(k + \omega c) \cdot (\bar{k} + \omega \bar{c} + \omega^2 M)}{k + \omega c + \bar{k} + \omega \bar{c} + \omega^2 M}$$

Nehmotný prvek stálého průřezu s magnetickým tahem



$$\begin{bmatrix} 1 & L & -\frac{(\frac{L}{2})^2}{2 \cdot E \cdot J} & -\frac{(\frac{L}{2})^3}{6 \cdot E \cdot J} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{L}{E \cdot J} & -\frac{(\frac{L}{2})^2}{2 \cdot E \cdot J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -C_M & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L & -\frac{(\frac{L}{2})^2}{2 \cdot E \cdot J} & -\frac{(\frac{L}{2})^3}{6 \cdot E \cdot J} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{L}{E \cdot J} & -\frac{(\frac{L}{2})^2}{2 \cdot E \cdot J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bude-li se jednat o prvek hmotný prvek nebo hmotný prvek s přidavnou hmotou, je třeba doplnit poslední sloupec matice podle matic prvků tohoto typu.

Matice pro rotující prvky

Prvek stálého průřezu

$$\begin{bmatrix} V_1(\gamma \cdot L) & \frac{V_2(\gamma \cdot L)}{\gamma} & -\frac{V_3(\gamma \cdot L)}{\gamma^2 \cdot E \cdot J} & -\frac{V_4(\gamma \cdot L)}{\gamma^3 \cdot E \cdot J} \\ \gamma \cdot V_4(\gamma \cdot L) & V_1(\gamma \cdot L) & -\frac{V_2(\gamma \cdot L)}{\gamma \cdot E \cdot J} & -\frac{V_3(\gamma \cdot L)}{\gamma^2 \cdot E \cdot J} \\ -\gamma^2 \cdot E \cdot J \cdot V_3(\gamma \cdot L) & -\gamma \cdot E \cdot J \cdot V_4(\gamma \cdot L) & V_1(\gamma \cdot L) & \frac{V_2(\gamma \cdot L)}{\gamma} \\ -\gamma^3 \cdot E \cdot J \cdot V_2(\gamma \cdot L) & -\gamma^2 \cdot E \cdot J \cdot V_3(\gamma \cdot L) & \gamma \cdot V_4(\gamma \cdot L) & V_1(\gamma \cdot L) \end{bmatrix}_{b,a}$$

$$V_1(\gamma \cdot L) = \frac{1}{2} \cdot [\cosh(\gamma \cdot L) + \cos(\gamma \cdot L)]$$

$$V_2(\gamma \cdot L) = \frac{1}{2} \cdot [\sinh(\gamma \cdot L) + \sin(\gamma \cdot L)]$$

$$V_3(\gamma \cdot L) = \frac{1}{2} \cdot [\cosh(\gamma \cdot L) - \cos(\gamma \cdot L)]$$

$$V_4(\gamma \cdot L) = \frac{1}{2} \cdot [\sinh(\gamma \cdot L) - \sin(\gamma \cdot L)]$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{\rho \cdot S \cdot \Omega^2}{E \cdot J}}$$

Prvek stálého průřezu s přidavnou hmotou

Matice je téměř shodná s předchozí, jenom je nutné přepočítat hustotu a následně parametr gamma podle následujících rovnic:

$$\rho_m = \rho + \frac{m}{S \cdot l m}$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{\rho_m \cdot S \cdot \Omega^2}{E \cdot J}}$$

Pružná podpora

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

Disk

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & I \cdot \Omega^2 & 1 & 0 \\ -m \cdot \Omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

Ložisko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{b,a}$$

$$z = \frac{(k + \Omega c) \cdot (\bar{k} + \Omega \bar{c} + \Omega^2 M)}{k + \Omega c + \bar{k} + \Omega \bar{c} + \Omega^2 M}$$

Prvek stálého průřezu s magnetickým tahem

$$\begin{bmatrix} V_1\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & \frac{V_2\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma} & -\frac{V_3\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma^2 \cdot E \cdot J} & -\frac{V_4\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma^3 \cdot E \cdot J} \\ \gamma \cdot V_4\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & V_1\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & -\frac{V_2\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma \cdot E \cdot J} & -\frac{V_3\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma^2 \cdot E \cdot J} \\ -\gamma^2 \cdot E \cdot J \cdot V_3\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & -\gamma \cdot E \cdot J \cdot V_4\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & V_1\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & \frac{V_2\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma} \\ -\gamma^3 \cdot E \cdot J \cdot V_2\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & -\gamma^2 \cdot E \cdot J \cdot V_3\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & \gamma \cdot V_4\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & V_1\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -C_M & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & \frac{V_2\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma} & -\frac{V_3\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma^2 \cdot E \cdot J} & -\frac{V_4\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma^3 \cdot E \cdot J} \\ \gamma \cdot V_4\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & V_1\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & -\frac{V_2\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma \cdot E \cdot J} & -\frac{V_3\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma^2 \cdot E \cdot J} \\ -\gamma^2 \cdot E \cdot J \cdot V_3\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & -\gamma \cdot E \cdot J \cdot V_4\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & V_1\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & \frac{V_2\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right)}{\gamma} \\ -\gamma^3 \cdot E \cdot J \cdot V_2\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & -\gamma^2 \cdot E \cdot J \cdot V_3\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & \gamma \cdot V_4\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) & V_1\left(\gamma \cdot \frac{L}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Pokud se jedná o prvek s přidavnou hmotou je nutné přepočítat hustotu a následně parametr gamma podle výše uvedených rovnic.