

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Wavelety a jejich aplikace



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Bc. Jana Vampolová
MPM, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně pod vedením RNDr. Jitky Machalové, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování této práce.

V Olomouci dne 30. března 2011

Poděkování

Chtěla bych na tomto místě poděkovat především vedoucí mé diplomové práce RNDr. Jitce Machalové, Ph.D. za ochotu, trpělivost a cenné rady. Také bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Karlu Najzarovi, CSc. za zodpovězení všech mých dotazů. Nemalý dík patří i mé rodině a přátelům za podporu během studia.

Obsah

Použité značení	4
Úvod	5
1 Přípravná kapitola	6
1.1 Pomocné definice a vlastnosti	6
1.2 Fourierova transformace	8
2 Wavelety v prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$	10
2.1 Wavelety na první úrovni	10
2.2 Wavelety na p -té úrovni	12
2.3 Maticová reprezentace waveletové transformace	18
2.4 Haarova báze	22
2.5 Daubechies wavelety D6	25
2.6 Komprese dat	29
3 Wavelety v prostoru $L^2(\mathbb{R})$	43
3.1 Spojitá waveletová transformace v $L^2(\mathbb{R})$	43
3.2 Diskrétní waveletová transformace v $L^2(\mathbb{R})$	43
3.3 Multirozklad	45
3.4 Haarův wavelet	65
3.5 Mallatův algoritmus	67
4 Wavelety s kompaktním nosičem	70
4.1 Daubechies wavelety	75
4.2 Mallatův algoritmus	77
4.3 Rychlá waveletová transformace	84
5 Programy v MATLABu	87
5.1 Transformace vektoru pomocí Haarova waveletu D2	87
5.2 Transformace vektoru pomocí Daubechies waveletu D6	91
5.3 Transformace obrazu pomocí Haarova waveletu D2	95
5.4 Transformace obrazu pomocí Daubechies waveletu D6	102
Závěr	110
Literatura	111

Použité značení

\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{Z}_N	$\{0, 1, \dots, N - 1\}$, $N \in \mathbb{N}$
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
i	imaginární jednotka
$\langle a, b \rangle$	pokud $a, b \in \mathbb{R}$, jedná se o uzavřený interval, v případě, že a, b jsou prvky vektorového prostoru, budeme pod tímto označením rozumět skalární součin
\perp	kolmost dvou prostorů
\oplus	direktní součet dvou prostorů
$\bigoplus_{j \in \mathcal{J}} M_j$	direktní součet prostorů $\{M_j\}_{j \in \mathcal{J}}$
$l^2(\mathbb{Z}_N)$	prostor posloupností $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_N}$ konvergujících s druhou mocninou
$l^2(\mathbb{Z})$	prostor posloupností $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ konvergujících s druhou mocninou
$L^2(\mathbb{R})$	prostor funkcí $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ integrovatelných s druhou mocninou
$\mathcal{L}(M)$	lineární obal množiny M
\overline{M}	uzávěr množiny M
$\text{supp } f$	nosič funkce f
$\text{meas}(\Omega)$	míra množiny Ω
$\delta_{i,j}$	Kroneckerovo delta
\mathbf{I}_N	jednotková matice řádu N
$\mathbf{0}_N$	nulová matice řádu N
$A_{i,j}$	prvek matice \mathbf{A} na i -tém řádku a j -tém sloupci
$\mathbf{A}_{N1 \times N2}$	matice typu $N1 \times N2$
$[\mathbf{A} \mathbf{B}]$	matice složená z bloků \mathbf{A}, \mathbf{B}
\mathbf{A}^\top	transponovaná matice \mathbf{A}
$\ \cdot\ _2$	norma prostoru $L^2(\mathbb{R})$

Úvod

Transformace má nejen v matematice významnou úlohu, umožňuje řešit složitější problémy daleko snadněji, než v jejich původní definiční oblasti. Existuje řada transformací, mezi nejznámější bezpochyby patří Fourierova transformace. I přes obrovskou všestrannost má tato transformace své nedostatky. Fourierova transformace má globální charakter, proto není vhodná pro lokálně proměnlivá data nebo pro data obsahující nespojitosti. Ani modifikovaná, tzv. Okénková Fourierova transformace není dostatečně flexibilní. Alternativou k Fourierově analýze jsou právě wavelety, které se přizpůsobují lokální charakteristice dat a stávají se tak vážnou konkurencí Fourierovy transformace v oblastech zpracování a analýzy dat, komprese obrazu, řešení diferenciálních rovnic a v dalších oblastech matematiky, fyziky a techniky.

V přípravné kapitole je z důvodu použití Fourierovy transformace v teorii waveletů uvedena její definice, základní pojmy a některé vlastnosti, které budeme v dalších kapitolách používat. Druhá kapitola je věnována waveletům v prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Je zde zavedena definice waveletové báze a škálového a waveletového filtru. Dále jsou v této kapitole popsány jednotlivé fáze waveletové transformace včetně jejich maticové reprezentace. Součástí kapitoly je konstrukce Haarova waveletu D2 a Daubechies waveletu D6. Krátce je pojednáno o kompresi dat. Uvedená teorie je v závěru aplikována na příkladech transformace a komprese vektoru a obrazu. V třetí kapitole je popsána teorie waveletů v prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Velká část této kapitoly se věnuje konstrukci waveletů na základě multirozkladu prostoru. Dále je zde uveden Mallatův algoritmus pro diskrétní waveletovou transformaci. Na tuto kapitolu navazují wavelety s kompaktním nosičem. V rámci této kapitoly je zkonstruován Daubechies wavelet D6 a uveden Mallatův algoritmus, který lze pro tento typ waveletů zapsat ve formě maticového násobení. Poslední kapitola obsahuje programy sestavené v MATLABu, které slouží pro diskrétní waveletovou transformaci vektoru a obrazu pomocí Haarova a Daubechies waveletu.

1 Přípravná kapitola

V této kapitole uvedeme některé základní pojmy spojené s diskrétní Fourierovou transformací, která se používá pro teoretickou analýzu waveletové transformace. V celé práci budeme uvažovat konečně rozměrné vektory jako sloupcové. Prvky prostoru $l^2(\mathbb{Z})$ budeme označovat klasicky jako posloupnosti $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ nebo také v souvislosti s prostorem $l^2(\mathbb{Z}_N)$ jako vektory $(a(m))_{m \in \mathbb{Z}}$, jejichž indexová množina probíhá celou množinou celých čísel.

1.1 Pomocné definice a vlastnosti

Definice 1.1. Prostorem $l^2(\mathbb{Z}_N)$ budeme rozumět lineární prostor vektorů $z = (z(0), \dots, z(N-1))^T$, kde $z(k) \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, se skalárním součinem

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z(k) \overline{w(k)}, \quad z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$$

s odpovídající l^2 -normou $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle$.

Definice 1.2. Ortonormální bázi v $l^2(\mathbb{Z}_N)$ definovanou předpisem

$$\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_{N-1}\}, \quad \text{kde } e_k \in l^2(\mathbb{Z}_N), \quad e_k(j) = \delta_{k,j}, \quad k, j = 0, \dots, N-1$$

nazveme **standardní (Euklidovou) bázi**.

Poznámka 1.1. V dalším textu budeme pod označením z rozumět periodické rozšíření vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ s periodou N definované předpisem

$$z(n) = z(n - N), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definice 1.3. Nechtě $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Definujme **operátor translace** R_k předpisem

$$(R_k z)(n) = z(n - k), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Poznámka 1.2. Pro vektor $z \in l^2(\mathbb{Z})$ je translace definována stejným předpisem jako v definici 1.3. pro vektor $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$.

Definice 1.4. Necht $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pak **konvoluce** $z * w$ je definována předpisem

$$(z * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m-n)w(n), \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

konvoluce v prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$ se také nazývá **cyklická konvoluce**.

Definice 1.5. Necht $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pak **konjugovanou reflexi** vektoru z definujeme předpisem

$$\tilde{z}(m) = \overline{z(-m)} = \overline{z(N-m)}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Věta 1.1. Vlastnosti konvoluce

Necht $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pak platí

1. $z * w = w * z$
2. $(z * \tilde{w})(k) = \langle z, R_k w \rangle$

Důkaz:

1. V důkazu použijeme substituci $k = m - n$ a také vlastnost periodicky prodloužených vektorů, jejichž součet složek je přes libovolný interval délky N stejný. Tedy platí

$$\begin{aligned} (w * z)(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} w(m-n)z(n) = \sum_{k=m}^{m-N+1} z(m-k)w(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} z(m-k)w(k) = (z * w)(k). \end{aligned}$$

2. Z právě dokázané vlastnosti komutativity konvoluce plyne

$$(z * \tilde{w})(k) = (\tilde{w} * z)(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{w}(k-n)z(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{w(n-k)}z(n) = \langle z, R_k w \rangle.$$

□

Definice 1.6. Nechť je dáno zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}$. Zobrazení **translace** $R_y f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definujeme předpisem

$$R_y f(x) = f(x - y).$$

Definice 1.7. Nechť $z, w \in l^2(\mathbb{Z})$. Pak **konvoluce** $z * w$ je definována předpisem

$$(z * w)(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(m - n)w(n), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Poznámka 1.3. *Použitím substituce $j = m - n$ v definici 1.7. obdržíme komutativitu konvoluce, tj. platí*

$$(z * w)(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(m - n)w(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j)w(m - j) = (w * z)(m), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Definice 1.8. Nechť $z \in l^2(\mathbb{Z})$. **Konjugovanou reflexi** \tilde{z} definujeme vztahem

$$\tilde{z}(n) = \overline{z(-n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1.2 Fourierova transformace

V této kapitole uvedeme Fourierovu transformaci vektoru z z prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$, $l^2(\mathbb{Z})$ a také Fourierovu transformaci funkce z z $L^1(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$. Tyto tvary Fourierovy transformace a jejich inverzní vztahy budeme potřebovat v odvození teorie waveletů a také v důkazech některých jejich vlastností.

Definice 1.9. Diskrétní Fourierova transformace vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ je vektor $\hat{z} \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, který definujeme předpisem

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \dots, \hat{z}(N - 1))^\top, \quad \hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi imn/N}.$$

Definice 1.10. Inverzní diskrétní Fourierova transformace

vektoru $w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ je vektor $\check{w} \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ definovaný předpisem

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m)e^{2\pi imn/N}.$$

Poznámka 1.4. Každý vektor $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ lze rozvinout v řadu

$$z = N \sum_{m=0}^{N-1} \langle z, F_m \rangle F_m, \quad F_m(n) = N^{-1} e^{2\pi i m n / N}, \quad n, m = 0, \dots, N-1,$$

neboť množina $\{F_0, \dots, F_{N-1}\}$ tvoří ortogonální bázi prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$.

Definice 1.11. Fourierovu transformaci vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z})$ definujeme jako funkci $\hat{z}(t) \in L^2\langle -\pi, \pi \rangle$ předpisem

$$\hat{z}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n) e^{int}, \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle, \quad (1.1)$$

tato řada konverguje v normě prostoru $L^2\langle -\pi, \pi \rangle$.

Definice 1.12. Inverzní diskrétní Fourierova transformace

funkce $f \in L^2\langle -\pi, \pi \rangle$ je vektor $\check{f} \in l^2(\mathbb{Z})$ daný předpisem

$$\check{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 1.5. Vzhledem k tomu, že prostor posloupností $l^1(\mathbb{R})$ je podprostorem $l^2(\mathbb{R})$, má Fourierova transformace vektoru $z \in l^1(\mathbb{R})$ také tvar (1.1).

Definice 1.13. Fourierovu transformaci funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$ definujeme jako funkci \hat{f} , pro kterou platí

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Inverzní Fourierovu transformaci funkce $g \in L^1(\mathbb{R})$ definujeme jako funkci \check{g} , pro kterou platí

$$\check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definice 1.14. Necht $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sestrojme posloupnost $\{f_n\}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N} : f_n, \hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ a $f_n \rightarrow f$ v $L^2(\mathbb{R})$. Definujme **Fourierovu transformaci** funkce $f : \hat{f} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n$, kde konvergence je v normě prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Analogicky definujme inverzní Fourierovu transformaci \check{f} jako limitu v L^2 normě posloupnosti $\{\check{f}_n\}$.

2 Wavelety v prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$

V předchozí kapitole je uvedena Fourierova transformace funkcí z $L^2(\mathbb{R})$ a také Fourierova transformace vektorů z konečně dimenzionálního prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$ a z nekonečně dimenzionálního $l^2(\mathbb{Z})$. Teorie waveletů je Fourierově analýze podobná, lze k ní přistupovat oběma způsoby, jak spojitě, tak diskrétně, pro vektory s konečně mnoha nebo nekonečně mnoha složkami. V této kapitole se zaměříme na waveletovou transformaci vektorů z prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$.

2.1 Wavelety na první úrovni

Definice 2.1. Nechtě $N = 2M$, $M \in \mathbb{N}$, $u, v \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Nechtě množina $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ je úplná ortonormální v $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Takovou množinu nazveme **waveletovou bází na první škálové úrovni** pro $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Vektory u, v jsou jejichmi **generátory**. Tyto vektory se také nazývají **škálové filtry**, resp. **waveletové filtry**.

V následující větě uvedeme nutnou a postačující podmínku k tomu, aby vektory u a v generovaly waveletovou bází.

Věta 2.1. Nechtě $N = 2M$, $M \in \mathbb{N}$, $u, v \in l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pak množina daná vztahem $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ je ortonormální báze $l^2(\mathbb{Z}_N)$ právě tehdy, když matice

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}(n) & \hat{v}(n) \\ \hat{u}(n+M) & \hat{v}(n+M) \end{bmatrix}$$

je unitární pro každé $n = 0, \dots, M-1$, tzn. pro všechna $n = 0, \dots, M-1$ platí

$$\begin{aligned} |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n+M)|^2 &= 2 \\ |\hat{v}(n)|^2 + |\hat{v}(n+M)|^2 &= 2 \\ \hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)} + \hat{u}(n+M)\overline{\hat{v}(n+M)} &= 0. \end{aligned}$$

Důkaz: viz [6], str. 19.

Věta 2.2. *Nechť $u \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ je takový vektor, že množina $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ je ortonormální. Sestrojme vektor $v \in l^2(\mathbb{Z}_N) : v(k) = (-1)^k \overline{u(1-k)}$, $k = 0, \dots, N-1$. Pak $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ je waveletová báze $l^2(\mathbb{Z}_N)$ na první úrovni.*

Důkaz: Náznak důkazu je uveden v [6], str. 20.

Je-li $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ waveletová báze, můžeme pomocí vlastnosti konvoluce vyjádřit koeficienty vektoru z vzhledem k této waveletové bázi vztahem

$$[z]_B = (z * \tilde{v}(0), z * \tilde{v}(2), \dots, z * \tilde{v}(N-2), z * \tilde{u}(0), z * \tilde{u}(2), \dots, z * \tilde{u}(N-2))^\top.$$

Definice 2.2. Nechť $N = 2M$. Definujme **operátor filtrace**

$\mathcal{D} : l^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_M)$ předpisem

$$\mathcal{D}(z)(n) = z(2n), \text{ pro } n \in \{0, \dots, M-1\}, z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$$

a **operátor rozšíření** $\mathcal{U} : l^2(\mathbb{Z}_M) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_N)$ předpisem

$$\mathcal{U}(w)(n) = \begin{cases} w(n/2) & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ liché,} \end{cases} \text{ pro } n \in \{0, \dots, N-1\}, w \in l^2(\mathbb{Z}_M).$$

V anglické literatuře najdeme operátor \mathcal{D} pod názvem **downsampling operator**, operátor \mathcal{U} pod názvem **upsampling operator**. Pro tyto operátory se používá značení $\downarrow 2$ resp. $\uparrow 2$.

Položíme-li $x_1 = \mathcal{D}(z * \tilde{v})$ a $y_1 = \mathcal{D}(z * \tilde{u})$, lze koeficienty vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ v bázi $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ vyjádřit vztahem $[z]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$. Složky x_1 se nazývají koeficienty detailů, složky y_1 aproximační koeficienty.

Rozklad vektoru z na složky x_1, y_1 se nazývá **analýzou vektoru** z pomocí waveletových filtrů u, v waveletové báze na první úrovni. Analýzu vektoru z lze graficky znázornit následujícím diagramem.

$$\begin{array}{ccccc}
& & z * \tilde{v} & \longrightarrow & \downarrow 2 & \longrightarrow & x_1 & & \\
& \nearrow & & & & & & \searrow & \\
z & & & & & & & & [z]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\
& \searrow & & & & & & \nearrow & \\
& & z * \tilde{u} & \longrightarrow & \downarrow 2 & \longrightarrow & y_1 & &
\end{array}$$

Zpětnou rekonstrukci, **syntézu** vektoru z ze složek x_1, y_1 popisuje následující věta.

Věta 2.3. *Nechť $M \in \mathbb{N}, N = 2M$ a $u, v \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ jsou generátory waveletové báze prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Sestrojme $\mathcal{D}(z * \tilde{v}) = x_1 \in l^2(\mathbb{Z}_M)$ a $\mathcal{D}(z * \tilde{u}) = y_1 \in l^2(\mathbb{Z}_M)$. Pak vektory $t, s \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ generují perfektní rekonstrukci, tzn. platí*

$$\tilde{t} * \mathcal{U}(x_1) + \tilde{s} * \mathcal{U}(y_1) = z, \quad \forall z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$$

právě když $\tilde{t} = v, \tilde{s} = u$.

Důkaz: Důkaz je naznačen v [6], str. 20.

Na následujícím diagramu můžeme vidět syntézu vektoru z .

$$\begin{array}{ccccc}
& & x_1 & \longrightarrow & \uparrow 2 & \longrightarrow & v * \mathcal{U}(x_1) & & \\
& \nearrow & & & & & & \searrow & \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} & & & & & & & & z \\
& \searrow & & & & & & \nearrow & \\
& & y_1 & \longrightarrow & \uparrow 2 & \longrightarrow & u * \mathcal{U}(y_1) & &
\end{array}$$

Rekonstrukci vektoru z nazveme perfektní, jestliže po analýze a syntéze libovolného vektoru z daného prostoru získáme opět tento vektor, tedy ne pouze jeho aproximaci. Někdy definice perfektní rekonstrukce připouští i posunutí původního vektoru.

2.2 Wavelety na p -té úrovni

Nechť N je dělitelné číslem 2^p , $p \in \mathbb{N}$. Nechť $u_l, v_l \in l^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ jsou takové vektory, že pro $l = 1, 2, \dots, p$ generuje dvojice vektorů u_l, v_l waveletovou bázi v prostoru $l^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$. Tyto vektory nazveme **waveletovými filtry**.

Při analýze vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ na první úrovni jsme položili

$$x_1 = \mathcal{D}(z * \tilde{v}_1), \quad y_1 = \mathcal{D}(z * \tilde{u}_1),$$

obdobně získáme vektory $x_l, y_l \in l^2(\mathbb{Z}_{N/2^l})$, $l = 2, \dots, p$

$$x_l = \mathcal{D}(y_{l-1} * \tilde{v}_l)$$

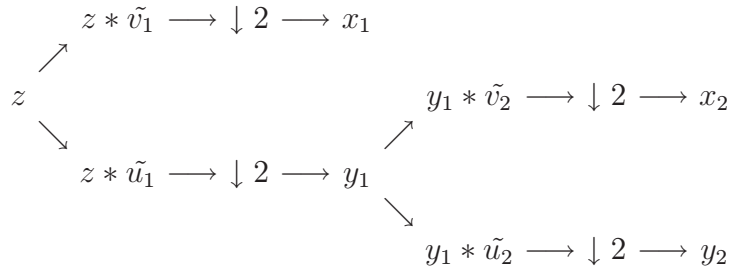
$$y_l = \mathcal{D}(y_{l-1} * \tilde{u}_l).$$

Pro výpočet těchto vektorů platí

$$x_l = \mathcal{D}(\mathcal{D}(\dots \mathcal{D}(\mathcal{D}(z * \tilde{u}_1) * \tilde{u}_2) \dots * \tilde{u}_{l-1}) * \tilde{v}_l)$$

$$y_l = \mathcal{D}(\mathcal{D}(\dots \mathcal{D}(\mathcal{D}(z * \tilde{u}_1) * \tilde{u}_2) \dots * \tilde{u}_{l-1}) * \tilde{u}_l).$$

Analýza vektoru z o více úrovních je zobrazena na následujícím diagramu.



Definice 2.3. Nechť N je dělitelné číslem 2^p , $p \in \mathbb{N}$ a necht' $u_l, v_l \in l^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ jsou waveletové filtry waveletové báze prostoru $l^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ pro každé $l = 1, \dots, p$. Pak množinu vektorů $\{x_1, \dots, x_p, y_p\}$ sestrojenou výše uvedeným způsobem budeme nazývat **analýzou** (rozkladem) **vektoru** $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ na **p -té úrovni**.

Zpětnou rekonstrukci vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ získáme pomocí vektorů x_1, \dots, x_p, y_p a filtrů $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ vztahem

$$z = \mathcal{U}(x_1) * v_1 + \mathcal{U}(y_1) * u_1,$$

$$y_{k-1} = \mathcal{U}(x_k) * v_k + \mathcal{U}(y_k) * u_k, \quad k = 2, \dots, p.$$

Dále položíme

$$\begin{aligned} f_1 &= v_1, \\ g_1 &= u_1, \\ f_2 &= g_1 * \mathcal{U}(v_2), \\ g_2 &= g_1 * \mathcal{U}(u_2), \end{aligned}$$

a pro $l = 3, \dots, p$

$$\begin{aligned} f_l &= g_{l-1} * \mathcal{U}^{l-1}(v_l), \\ g_l &= g_{l-1} * \mathcal{U}^{l-1}(u_l). \end{aligned}$$

Poznámka 2.1. Operátorem \mathcal{D}^1 , resp. \mathcal{U}^1 budeme značit operátor \mathcal{D} , resp. \mathcal{U} .

Lemma 2.1. Pro $l = 2, \dots, p$ platí

1. $\tilde{f}_l = \tilde{g}_{l-1} * \mathcal{U}^{l-1}(\tilde{v}_l)$
2. $\tilde{g}_l = \tilde{g}_{l-1} * \mathcal{U}^{l-1}(\tilde{u}_l)$

Důkaz: Konjugovanou reflexi vektoru $f_l = g_{l-1} * \mathcal{U}^{l-1}(v_l)$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\tilde{f}_l(m) = \overline{f_l(-m)} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{g_{l-1}(-m-n)} \mathcal{U}^{l-1}(\overline{v_l})(n).$$

Dále platí

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_{l-1} * \mathcal{U}^{l-1}(\tilde{v}_l))(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{g}_{l-1}(m-n) \mathcal{U}^{l-1}(\tilde{v}_l)(n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{g_{l-1}(-m+n)} \mathcal{U}^{l-1}(\overline{v_l})(-n) = \sum_{k=-N+1}^0 \overline{g_{l-1}(-m-k)} \mathcal{U}^{l-1}(\overline{v_l})(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_{l-1}(-m-k)} \mathcal{U}^{l-1}(\overline{v_l})(k). \end{aligned}$$

Během odvození jsme použili substituci $k = -n$ a také vlastnosti periodicky prodloužených vektorů, jejichž součet je přes libovolný interval délky N stejný. Důkaz druhého tvrzení lemmatu se provede zcela analogicky. □

Věta 2.4. *Pro $l = 1, \dots, p$ a $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ platí*

$$x_l = \mathcal{D}^l(z * \tilde{f}_l), \quad y_l = \mathcal{D}^l(z * \tilde{g}_l)$$

$$x_l(k) = \langle z, R_{2^l k} f_l \rangle, \quad y_l(k) = \langle z, R_{2^l k} g_l \rangle, \quad k = 0, \dots, N/2^l - 1.$$

Důkaz: Důkaz této věty, která je uvedena v [6], str. 22, je ponechán čtenáři jako cvičení. Před důkazem samotného tvrzení provedeme pomocný výpočet a dokážeme, že

$$\mathcal{D}^l(a) * b = \mathcal{D}^l(a * \mathcal{U}^l(b)), \quad \forall a \in l^2(\mathbb{Z}_{2^l M}), b \in l^2(\mathbb{Z}_M).$$

Levou stranu této rovnosti můžeme vyjádřit ve tvaru

$$(\mathcal{D}^l(a) * b)(m) = \sum_{n=0}^{M-1} \mathcal{D}^l(a)(m-n)b(n) = \sum_{n=0}^{M-1} a(2^l m - 2^l n)b(n).$$

Pro pravou stranu rovnosti platí

$$\mathcal{D}^l(a * \mathcal{U}^l(b))(m) = \mathcal{D}^l\left(\sum_{k=0}^{2^l M - 1} a(m-k)\mathcal{U}^l(b)(k)\right) = \mathcal{D}^l\left(\sum_k a(m-k)b(k/2^l)\right),$$

v poslední rovnosti sčítáme pouze přes $k = 0, 2^l, \dots, 2^l M - 2^l$, protože vektor $\mathcal{U}^l(b)$ je pro ostatní k roven nule. Můžeme tedy použít substituci $n = k/2^l$

$$\mathcal{D}^l\left(\sum_k a(m-k)b(k/2^l)\right) = \mathcal{D}^l\left(\sum_{n=0}^{M-1} a(m-2^l n)b(n)\right) = \sum_{n=0}^{M-1} a(2^l m - 2^l n)b(n).$$

Toto pomocné tvrzení použijeme v důkazu prvního tvrzení věty.

Vektory $x_1, y_1 \in l^2(\mathbb{Z}_{N/2})$ jsou ve tvaru

$$x_1 = \mathcal{D}(z * \tilde{v}_1), \quad y_1 = \mathcal{D}(z * \tilde{u}_1).$$

Dále víme, že pro vektory $x_l, y_l \in l^2(\mathbb{Z}_{N/2^l})$, $l = 2, \dots, p$ platí

$$x_l = \mathcal{D}(y_{l-1} * \tilde{v}_l)$$

$$y_l = \mathcal{D}(y_{l-1} * \tilde{u}_l).$$

Tvrzení věty dokážeme matematickou indukcí na základě předchozích odvození a lemmatu 2.1.

1. Pro analýzu vektoru z na první úrovni platí

$$x_1 = \mathcal{D}(z * \tilde{v}_1) = \mathcal{D}(z * \tilde{f}_1)$$

$$y_1 = \mathcal{D}(z * \tilde{u}_1) = \mathcal{D}(z * \tilde{g}_1).$$

2. Předpokládejme, že platí $y_l = \mathcal{D}^l(z * \tilde{g}_l)$, pak

$$\begin{aligned} y_{l+1} &= \mathcal{D}(y_l * \tilde{u}_{l+1}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^l(z * \tilde{g}_l) * \tilde{u}_{l+1}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^l(z * \tilde{g}_l * \mathcal{U}^l(\tilde{u}_{l+1}))) = \\ &= \mathcal{D}^{l+1}(z * \tilde{g}_{l+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{l+1} &= \mathcal{D}(y_l * \tilde{v}_{l+1}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^l(z * \tilde{g}_l) * \tilde{v}_{l+1}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^l(z * \tilde{g}_l * \mathcal{U}^l(\tilde{v}_{l+1}))) = \\ &= \mathcal{D}^{l+1}(z * \tilde{f}_{l+1}). \end{aligned}$$

Z principu matematické indukce plyne platnost prvního tvrzení věty pro všechna $l = 1, \dots, p$. Nyní dokážeme, že po složkách můžeme vektory x_l, y_l zapsat ve tvaru skalárního součinu

$$\begin{aligned} x_l(k) &= \mathcal{D}^l(z * \tilde{f}_l)(k) = (z * \tilde{f}_l)(2^l k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \tilde{f}_l(2^l k - n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \overline{f_l(n - 2^l k)} = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \overline{R_{2^l k} f_l(n)} = \langle z, R_{2^l k} f_l \rangle. \end{aligned}$$

Obdobně platí

$$y_l(k) = \langle z, R_{2^l k} g_l \rangle.$$

□

Definice 2.4. Nechť N je dělitelné číslem 2^p , $p \in \mathbb{N}$ a $f_1, \dots, f_p, g_p \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ je taková posloupnost vektorů, že množina

$$B = \{R_{2^k} f_1\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{4^k} f_2\}_{k=0}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{R_{2^p k} f_p\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{R_{2^p k} g_p\}_{k=0}^{N/2^p-1}$$

je ortonormální báze prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Pak množinu B nazveme **waveletovou** **bází** prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$ (na p -té úrovni), její prvky nazveme **wavelety** (na p -té úrovni) a vektory $f_1, \dots, f_p, g_p \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ **generátory** této waveletové báze.

Wavelety se v literatuře standardně označují

$$\psi_{-j,k} = R_{2^j k} f_j, \quad \varphi_{-j,k} = R_{2^j k} g_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1.$$

Definujme prostory V_{-j}, W_{-j} jako lineární obal waveletů pro $j = 1, \dots, p$

$$V_{-j} = \mathcal{L}\{\varphi_{-j,k}\}_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}, \quad W_{-j} = \mathcal{L}\{\psi_{-j,k}\}_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1}.$$

Pro prostory V_{-j} se používá označení **škálové prostory**, pro prostory W_{-j} **prostory detailů**. Dále označme P_{-j}, Q_{-j} ortogonální projekce na prostory V_{-j}, W_{-j} , tj. pro $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ platí

$$P_{-j}(z) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \langle z, \varphi_{-j,k} \rangle \varphi_{-j,k}, \quad Q_{-j}(z) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \langle z, \psi_{-j,k} \rangle \psi_{-j,k}.$$

Následující věta, která je převzata z literatury [6], str. 23, uvádí vlastnosti těchto prostorů a vlastnosti ortogonálních projekcí na tyto prostory, které plynou z uvedené konstrukce.

Věta 2.5. *Za výše uvedených označení platí*

1. $V_{-j} \oplus W_{-j} = V_{-j+1}$, $j = 2, \dots, p$.
2. $V_{-1} \oplus W_{-1} = l^2(\mathbb{Z}_N)$.
3. $P_{-j} + Q_{-j} = P_{-j+1}$, $j = 2, \dots, p$.
4. $P_{-1} + Q_{-1} = I$, kde I je identické zobrazení.
5. $P_{-j} + R_{-j} = I$, kde $R_{-j} = \sum_{l=1}^j Q_{-l}$.

Operátor R_{-j} představuje operátor chyby na j -té úrovni, tedy platí

$$R_{-j}(z) = z - P_{-j}(z), \quad z \in l^2(\mathbb{Z}_N).$$

Waveletové filtry u_l, v_l , $l = 1, \dots, p$ můžeme získat pomocí waveletových filtrů na první úrovni u_1, v_1 , jak je uvedeno v následující větě.

Věta 2.6. *Nechť N je dělitelné číslem 2^p , $p \in \mathbb{N}$ a nechť $u_1, v_1 \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ je dvojice waveletových filtrů na první úrovni. Sestrojme posloupnost dvojic vektorů u_l, v_l , $l = 2, \dots, p$ vztahy*

$$u_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} u_1\left(n + \frac{kN}{2^{l-1}}\right), \quad v_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} v_1\left(n + \frac{kN}{2^{l-1}}\right), \quad n = 0, \dots, N/2^{l-1}-1. \quad (2.1)$$

Pak posloupnost dvojic u_l, v_l , $l = 1, \dots, p$ je posloupnost waveletových filtrů na p -té úrovni.

Důkaz: viz [6], str. 23.

2.3 Maticová reprezentace waveletové transformace

V této kapitole provede změnu ve značení, důvodem je porovnatelost waveletové transformace v $l^2(\mathbb{Z}_N)$ s maticovým tvarem Mallatova algoritmu, který je popsán v dalších kapitolách. Koeficienty vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ vzhledem k bázi \mathcal{B} budeme psát v opačném pořadí, než v předchozí kapitole, tedy položíme

$$[z]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Výsledky této kapitoly platí pouze pro reálné vektory.

Pro maticové vyjádření konvoluce vektorů $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ použijeme vztah

$$(z * \tilde{w})(k) = \langle z, R_k w \rangle = \langle R_k w, z \rangle = R_k w^\top z.$$

Tedy platí

$$z * \tilde{w} = \mathbf{M}(w)z, \quad \mathbf{M}(w) = (M_{k,n}(w))_{k,n=0}^{N-1},$$

kde se matice $\mathbf{M}(w)$ po řádcích skládá z translací vektoru w , tj. pro prvky matice $\mathbf{M}(w)$ platí

$$M_{k,n}(w) = R_k w(n), \quad k, n = 0, \dots, N-1.$$

Obdobně pro konvoluci $z * w$ platí

$$z * w = \widetilde{\mathbf{M}}(w)z, \quad \widetilde{\mathbf{M}}(w) = \left(\widetilde{M}_{k,n}(w) \right)_{k,n=0}^{N-1}$$

kde prvky matice $\widetilde{\mathbf{M}}(w)$ mají tvar

$$\widetilde{M}_{k,n}(w) = R_k \tilde{w}(n), \quad k, n = 0, \dots, N-1.$$

Nyní ukážeme, že $\widetilde{\mathbf{M}}^\top(w) = \mathbf{M}(w)$, tedy

$$M_{k,n}(w) = R_k w(n) = w(n-k) = \tilde{w}(k-n) = R_n \tilde{w}(k) = \widetilde{M}_{n,k}(w).$$

Označme \mathbf{D} , resp. \mathbf{U} matici reprezentující operátor downsampling, resp. upsampling. Matice \mathbf{D} je typu $N/2 \times N$, matice \mathbf{U} typu $N \times N/2$ a pro jejich prvky platí

$$D_{i,j} = \begin{cases} 1 & j = 2i \quad 0 \leq i \leq N/2 - 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$U_{i,j} = \begin{cases} 1 & 2j = i \quad 0 \leq j \leq N/2 - 1 \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Z definic matic \mathbf{D}, \mathbf{U} je zřejmé, že $\mathbf{U} = \mathbf{D}^\top$.

Transformace na první úrovni

Pomocí výše uvedených matic můžeme zapsat analýzu vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ na první úrovni ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{DM}(u) \\ \mathbf{DM}(v) \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Syntéza na první úrovni má v maticovém zápisu tento tvar

$$z = \left[\widetilde{\mathbf{M}}(u)\mathbf{U} \mid \widetilde{\mathbf{M}}(v)\mathbf{U} \right] \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Nyní ukážeme, že matice reprezentující analýzu je transpozicí matice reprezentující syntézu. Pro tyto matice platí

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{DM}(u) \\ \mathbf{DM}(v) \end{bmatrix}^\top &= \left[(\mathbf{DM}(u))^\top \mid (\mathbf{DM}(v))^\top \right] = \left[\mathbf{M}^\top(u)\mathbf{D}^\top \mid \mathbf{M}^\top(v)\mathbf{D}^\top \right] = \\ &= \left[\widetilde{\mathbf{M}}(u)\mathbf{U} \mid \widetilde{\mathbf{M}}(v)\mathbf{U} \right]. \end{aligned}$$

Perfektní rekonstrukci vektoru z můžeme zapsat ve tvaru

$$z = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{M}}(u)\mathbf{U} & \widetilde{\mathbf{M}}(v)\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{DM}(u) \\ \mathbf{DM}(v) \end{bmatrix}.$$

Z této rovnosti vyplývá

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{M}}(u)\mathbf{U} & \widetilde{\mathbf{M}}(v)\mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{DM}(u) \\ \mathbf{DM}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{DM}(u) \\ \mathbf{DM}(v) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{DM}(u) \\ \mathbf{DM}(v) \end{bmatrix} = \mathbf{I}_N,$$

a tedy matice reprezentující analýzu a syntézu jsou ortogonální.

Označme matici

$$\mathbf{W}_N := \begin{bmatrix} \mathbf{DM}(u) \\ \mathbf{DM}(v) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_N^\top = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{M}}(u)\mathbf{U} & \widetilde{\mathbf{M}}(v)\mathbf{U} \end{bmatrix},$$

kde N udává řád této matice, která je typu $N \times N$, a také počet složek vektorů u, v .

Transformace o více úrovních

Analýza vektoru y_1 je na základě předchozích výsledků ve tvaru

$$\mathbf{W}_{N/2}y_1 = \begin{bmatrix} y_2 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

kde matice $\mathbf{W}_{N/2}$ je typu $N/2 \times N/2$ a přísluší filtrům u_2, v_2

$$\mathbf{W}_{N/2} = \begin{bmatrix} \mathbf{DM}(u_2) \\ \mathbf{DM}(v_2) \end{bmatrix}.$$

Protože jsou filtry u_2, v_2 konstruovány podle věty 2.6. z vektorů u, v závisí matice $\mathbf{W}_{N/2}$ pouze na těchto vektorech. Dále platí

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Analýzu na druhé úrovni můžeme tedy zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{W}_N z = \begin{bmatrix} y_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Označme matici reprezentující analýzu na druhé úrovni

$$\mathcal{W}_2 := \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{W}_N.$$

Obecně lze analýzu na p -té úrovni zapsat pomocí matice

$$\mathcal{W}_p := \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2^{p-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-N/2^{p-1}} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{W}_N,$$

kde matice $\mathbf{W}_{N/2^r}$ je typu $N/2^r \times N/2^r$ a závisí na vektorech u, v , ze kterých se sestrojí příslušné filtry dle věty 2.6.

Syntézu na p -té úrovni lze zapsat pomocí matice transponované \mathcal{W}_p^\top , tj.

$$\mathcal{W}_p^\top = \mathbf{W}_N^\top \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2^{p-1}}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-N/2^{p-1}} \end{bmatrix}.$$

Transformace matice

Výše uvedený maticový tvar transformace vektoru použijeme pro transformaci matice. Nejdříve ztransformujeme všechny vektory tvořící sloupce matice a následně provedeme transformaci každého řádku vzniklé matice.

Mějme matici \mathbf{A} typu $N_1 \times N_2$, nechť N_1, N_2 jsou dělitelné číslem 2^p , $p \in \mathbb{N}$.

Waveletová transformace matice \mathbf{A} na první úrovni má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1} & \mathbf{C}_{1,2} \\ \mathbf{C}_{1,3} & \mathbf{C}_{1,4} \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{N_1} \mathbf{A} \mathbf{W}_{N_2}^\top,$$

kde matice $\mathbf{C}_{1,j}$, $j = 1, \dots, 4$ jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{1,1} &= \mathbf{D}\mathbf{M}(u)\mathbf{A}(\mathbf{D}\mathbf{M})^\top(u), & \mathbf{C}_{1,2} &= \mathbf{D}\mathbf{M}(u)\mathbf{A}(\mathbf{D}\mathbf{M})^\top(v) \\ \mathbf{C}_{1,3} &= \mathbf{D}\mathbf{M}(v)\mathbf{A}(\mathbf{D}\mathbf{M})^\top(u), & \mathbf{C}_{1,4} &= \mathbf{D}\mathbf{M}(v)\mathbf{A}(\mathbf{D}\mathbf{M})^\top(v) \end{aligned}$$

Druhou úroveň transformace získáme aplikací transformace na matici $\mathbf{C}_{1,1}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N_1/2} \mathbf{C}_{1,1} \mathbf{W}_{N_2/2}^\top & \mathbf{C}_{1,2} \\ \mathbf{C}_{1,3} & \mathbf{C}_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{2,1} & \mathbf{C}_{2,2} & \mathbf{C}_{1,2} \\ \mathbf{C}_{2,3} & \mathbf{C}_{2,4} & \\ \mathbf{C}_{1,3} & & \mathbf{C}_{1,4} \end{bmatrix}$$

Obecně budeme p -tou úrovní waveletové transformace matice $\mathbf{A}_{N_1 \times N_2}$ rozumět její rozklad na dílčí matice

$$\mathbf{C}_{p,1}, \mathbf{C}_{p,2}, \mathbf{C}_{p,3}, \mathbf{C}_{p,4}, \mathbf{C}_{p-1,2}, \mathbf{C}_{p-1,3}, \mathbf{C}_{p-1,4}, \dots, \mathbf{C}_{1,2}, \mathbf{C}_{1,3}, \mathbf{C}_{1,4}.$$

Jednotlivé matice rozkladu získáme rekurentním vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{0,1} &= \mathbf{A}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{j,1} & \mathbf{C}_{j,2} \\ \mathbf{C}_{j,3} & \mathbf{C}_{j,4} \end{bmatrix} &= \mathbf{W}_{N_1/2^{j-1}} \mathbf{C}_{j-1,1} \mathbf{W}_{N_2/2^{j-1}}^\top, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Inverzní waveletovou transformací matice budeme rozumět zpětnou rekonstrukci z jejího rozkladu, která je dána rekurentně

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{j-1,1} &= \mathbf{W}_{N_1/2^{j-1}}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{j,1} & \mathbf{C}_{j,2} \\ \mathbf{C}_{j,3} & \mathbf{C}_{j,4} \end{bmatrix} \mathbf{W}_{N_2/2^{j-1}}, \quad j = p, \dots, 1, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{C}_{0,1}. \end{aligned}$$

2.4 Haarova báze

Nechť $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$. Haarovu bázi prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$ sestavíme pomocí aritmetických průměrů a diferencí sousedních složek vektoru $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$

$$s_{-1}(j) = \frac{z(2j) + z(2j+1)}{2}, \quad d_{-1}(j) = \frac{z(2j) - z(2j+1)}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, N/2 - 1.$$

Dále postupně vypočteme aritmetické průměry a difference sousedních složek vektoru s_{-k} , $k = 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} s_{-k}(j) &= \frac{s_{-k+1}(2j) + s_{-k+1}(2j+1)}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, 2^{-k}N - 1, \\ d_{-k}(j) &= \frac{s_{-k+1}(2j) - s_{-k+1}(2j+1)}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, 2^{-k}N - 1. \end{aligned}$$

Protože vektor z můžeme psát ve tvaru $z = \sum_{k=0}^{N-1} z(k)e_k$, kde $\mathcal{E} = \{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ je standardní báze $l^2(\mathbb{Z}_N)$, platí následující vztahy.

Pro první úroveň, kde $j = 0, 1, \dots, 2^{-1}N - 1$, platí

$$s_{-1}(j) = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle z, \varphi_{-1,j} \rangle, \quad \text{kde } \varphi_{-1,j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (e_{2j} + e_{2j+1})$$

$$d_{-1}(j) = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle z, \psi_{-1,j} \rangle, \quad \text{kde } \psi_{-1,j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (e_{2j} - e_{2j+1}).$$

Pro k -tou úroveň definujeme

$$\varphi_{-k,j} = 2^{-k/2} (e_{2^k j} + \dots + e_{2^k(j+1)-1}),$$

$$\psi_{-k,j} = 2^{-k/2} (e_{2^k j} + \dots + e_{2^{k-1}(2j+1)-1} - e_{2^{k-1}(2j+1)} - \dots - e_{2^k(j+1)-1}),$$

potom platí

$$s_{-k}(j) = 2^{-k/2} \langle z, \varphi_{-k,j} \rangle,$$

$$d_{-k}(j) = 2^{-k/2} \langle z, \psi_{-k,j} \rangle, \quad j = 0, 1, \dots, 2^{-k}N - 1, \quad k = 1, \dots, p.$$

Definice 2.5. Báze $\{\psi_{-1,j}\}_{j=0}^{N/2-1} \cup \{\psi_{-2,j}\}_{j=0}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{\psi_{-p,j}\}_{j=0}^{N/2^p-1} \cup \{\varphi_{-p,j}\}_{j=0}^{N/2^p-1}$ se nazývá **Haarovou bází** prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$ a složky $d_{-k}(j)$ rozvoje vektoru z vzhledem k této bázi se nazývají **waveletové koeficienty**.

Dokažme nyní, že Haarova báze je skutečně ortonormální bází prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Položme $u = \varphi_{-1,0}$, $v = \psi_{-1,0}$. Dle věty 2.1. je třeba ukázat, že pro všechna $n = 0, \dots, M - 1$, kde $N = 2M$, platí

$$|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n+M)|^2 = 2$$

$$|\hat{v}(n)|^2 + |\hat{v}(n+M)|^2 = 2$$

$$\hat{u}(n) \overline{\hat{v}(n)} + \hat{u}(n+M) \overline{\hat{v}(n+M)} = 0.$$

Pro $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, \dots, 0)$ platí

$$\hat{u}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} u(m) e^{-2\pi i m n / N} = \sum_{m=0}^1 u(m) e^{-2\pi i m n / N} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{-2\pi i n / N}),$$

$$\hat{u}(n+M) = \sum_{m=0}^{N-1} u(m) e^{-2\pi i m (n+M) / N} = \sum_{m=0}^1 u(m) e^{-2\pi i m (n+M) / 2M} =$$

$$= \sum_{m=0}^1 u(m) e^{-2\pi i m n / N} e^{-\pi i m} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - e^{-2\pi i n / N}).$$

Pro $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \dots, 0)$ platí

$$\begin{aligned}\hat{v}(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} v(m)e^{-2\pi imn/N} = \sum_{m=0}^1 v(m)e^{-2\pi imn/N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - e^{-2\pi in/N}), \\ \hat{v}(n+M) &= \sum_{m=0}^{N-1} v(m)e^{-2\pi im(n+M)/N} = \sum_{m=0}^1 v(m)e^{-2\pi im(n+M)/2M} = \\ &= \sum_{m=0}^1 v(m)e^{-2\pi imn/N} e^{-\pi im} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{-2\pi in/N}).\end{aligned}$$

Pomocí výše uvedených vztahů dokážeme platnost nutné a postačující podmínky pro generování ortonormální báze. Připomeňme, že pro modul komplexního čísla $x + iy$ platí $|x + iy|^2 = x^2 + y^2$.

Tedy

$$\begin{aligned}|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n+M)|^2 &= \frac{1}{2}(|1 + e^{-2\pi in/N}|^2 + |1 - e^{-2\pi in/N}|^2) = \\ &= \frac{1}{2}(|1 + \cos(2\pi n/N) - i \sin(2\pi n/N)|^2 + |1 - \cos(2\pi n/N) + i \sin(2\pi n/N)|^2) = \\ &= \frac{1}{2}[(1 + \cos(2\pi n/N))^2 + \sin^2(2\pi n/N) + (1 - \cos(2\pi n/N))^2 + \sin^2(2\pi n/N)] = \\ &= \frac{1}{2}(2 + 2 \cos(2\pi n/N) - 2 \cos(2\pi n/N) + 2 \cos^2(2\pi n/N) + 2 \sin^2(2\pi n/N)) = \\ &= \frac{4}{2} = 2,\end{aligned}$$

obdobně lze ukázat, že platí

$$|\hat{v}(n)|^2 + |\hat{v}(n+M)|^2 = \frac{1}{2}(|1 - e^{-2\pi in/N}|^2 + |1 + e^{-2\pi in/N}|^2) = 2.$$

Úpravou a roznásobením získáme platnost třetí podmínky

$$\begin{aligned}\hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)} + \hat{u}(n+M)\overline{\hat{v}(n+M)} &= \\ &= \frac{1}{2}((1 + e^{-2\pi in/N})(1 - e^{2\pi in/N}) + (1 - e^{-2\pi in/N})(1 + e^{2\pi in/N})) = 0.\end{aligned}$$

Ověřili jsme předpoklady věty 2.1. Haarova báze je tedy ortonormální bází prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$.

Z výše uvedené konstrukce je patrné, že waveletovými filtry Haarovy báze pro první úroveň jsou vektory $u = \varphi_{-1,0}$, $v = \psi_{-1,0}$. Vektor u se nazývá **škálový filtr** nebo také wavelet – otec, vektor v se nazývá **wavelet – matka**, zkráceně se používá jen wavelet.

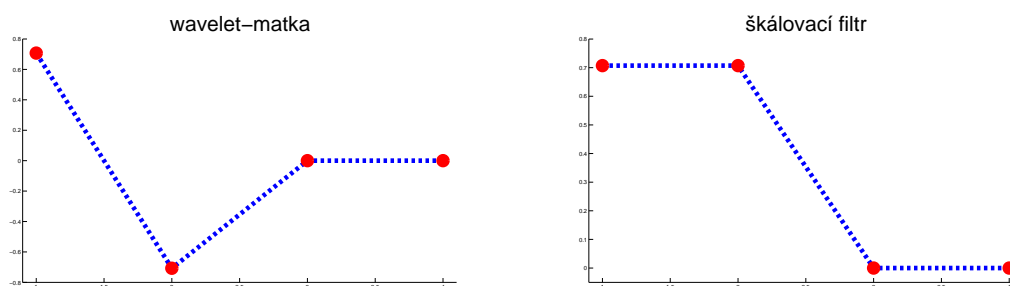
Příklad 2.1. Haarova báze pro $p = 2$, $N = 4$

$$\psi_{-1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$$

$$\psi_{-1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)$$

$$\varphi_{-2,0} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$$

$$\psi_{-2,0} = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$$



Obrázek 2.1: Haarův wavelet a jeho škálový filtr

2.5 Daubechies wavelety D6

V této kapitole zkonstruujeme Daubechies wavelety D6.

Nechť N je dělitelné číslem 2^p , $p \in \mathbb{N}$, $N/2^p > 6$. Označme $M = N/2$. Škálový filtr u musí splňovat podmínku

$$|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n + M)|^2 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_N.$$

Ke konstrukci waveletů D6 použijeme umocněnou identitu $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$\left(\cos^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right)^5 = 1.$$

Pro zjednodušení zápisu položíme $\alpha(n) = \frac{\pi n}{N}$. Roznásobením získáme následující vztah

$$\begin{aligned} (\cos^2 \alpha(n) + \sin^2 \alpha(n))^5 &= \cos^{10} \alpha(n) + 5 \cos^8 \alpha(n) \sin^2 \alpha(n) + \\ &+ 10 \cos^6 \alpha(n) \sin^4 \alpha(n) + 10 \cos^4 \alpha(n) \sin^6 \alpha(n) + 5 \cos^2 \alpha(n) \sin^8 \alpha(n) + \sin^{10} \alpha(n). \end{aligned}$$

Dále položíme

$$b(n) = \cos^{10} \alpha(n) + 5 \cos^8 \alpha(n) \sin^2 \alpha(n) + 10 \cos^6 \alpha(n) \sin^4 \alpha(n).$$

S využitím vztahů pro funkce sinus a kosinus a vzhledem k tomu, že $M = \frac{N}{2}$, lze psát

$$\begin{aligned} \cos \alpha(n + M) &= \cos \left(\frac{\pi(n + M)}{N} \right) = \cos \left(\frac{\pi n}{N} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\pi n}{N} \right) = -\sin \alpha(n) \\ \sin \alpha(n + M) &= \sin \left(\frac{\pi(n + M)}{N} \right) = \sin \left(\frac{\pi n}{N} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi n}{N} \right) = \cos \alpha(n), \end{aligned}$$

a tedy

$$b(n + M) = 10 \cos^4 \alpha(n) \sin^6 \alpha(n) + 5 \cos^2 \alpha(n) \sin^8 \alpha(n) + \sin^{10} \alpha(n).$$

Celkem jsme dostali

$$b(n) + b(n + M) = (\cos^2 \alpha(n) + \sin^2 \alpha(n))^5 = 1.$$

Nyní stačí najít vektor $u \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, který by pro každé $n = 0, \dots, N - 1$ splňoval

$$|\hat{u}(n)|^2 = 2b(n). \quad (2.2)$$

Protože pro modul komplexního čísla $x + iy$ platí $|x + iy|^2 = x^2 + y^2$, upravíme $b(n)$ do následujícího tvaru

$$b(n) = \cos^6 \alpha(n) \left[\left(\cos^2 \alpha(n) - \sqrt{10} \sin^2 \alpha(n) \right)^2 + (5 + 2\sqrt{10}) \cos^2 \alpha(n) \sin^2 \alpha(n) \right].$$

Je tedy zřejmé, že zvolený vektor

$$\begin{aligned}\hat{u}(n) &= \tag{2.3} \\ &= \sqrt{2}e^{-5\frac{\pi in}{N}} \cos^3 \alpha(n) \left[\cos^2 \alpha(n) - \sqrt{10} \sin^2 \alpha(n) + i\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \cos \alpha(n) \sin \alpha(n) \right]\end{aligned}$$

splňuje podmínku (2.2).

Naší snahou bude nyní najít $u(k)$, $k = 0, \dots, 5$ tak, aby platilo

$$\hat{u}(n) = \sum_{k=0}^5 u(k)e^{-2\pi i kn/N}.$$

V následujícím odvození použijeme vztahy pro dvojnásobný argument funkcí sinus a kosinus a vztahy pro druhé mocniny těchto funkcí

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \tag{2.4}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \tag{2.5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \tag{2.6}$$

a také Eulerovy vzorce

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \tag{2.7}$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}. \tag{2.8}$$

Pro jednoduchost zápisu označme

$$a = 1 - \sqrt{10}, \quad b = 1 + \sqrt{10}, \quad c = \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}.$$

Vyjdeme ze vztahu (2.3) a použijeme vzorce (2.4)–(2.8). Argument $\alpha(n)$ bu-

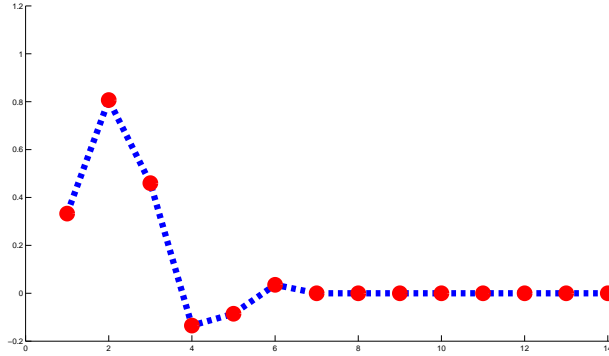
deme psát zkráceně $\alpha = \alpha(n)$. Provedeme úpravu

$$\begin{aligned}
\hat{u}(n) &= \sqrt{2}e^{-5\pi in/N} \cos^3 \alpha \left[\cos^2 \alpha - \sqrt{10} \sin^2 \alpha + ic \cos \alpha \sin \alpha \right] = \\
&= \sqrt{2}e^{-5i\alpha} \cos^3 \alpha \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) - \frac{\sqrt{10}}{2} (1 - \cos 2\alpha) + i\frac{c}{2} \sin 2\alpha \right] = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-5i\alpha} \left[e^{3i\alpha} + 3e^{i\alpha} + 3e^{-i\alpha} + e^{-3i\alpha} \right] \left[\frac{a}{2} + \frac{b}{4} (e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}) + \frac{c}{4} (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{32} \left[e^{-2i\alpha} + 3e^{-4i\alpha} + 3e^{-6i\alpha} + e^{-8i\alpha} \right] \left[2a + b (e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}) + c (e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) \right] = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{32} \left[2ae^{-2i\alpha} + b + be^{-4i\alpha} + c - ce^{-4i\alpha} + \right. \\
&\quad + 6ae^{-4i\alpha} + 3be^{-2i\alpha} + 3be^{-6i\alpha} + 3ce^{-2i\alpha} - 3ce^{-6i\alpha} + \\
&\quad + 6ae^{-6i\alpha} + 3be^{-4i\alpha} + 3be^{-8i\alpha} + 3ce^{-4i\alpha} - 3ce^{-8i\alpha} + \\
&\quad \left. + 2ae^{-8i\alpha} + be^{-6i\alpha} + be^{-10i\alpha} + ce^{-6i\alpha} - ce^{-10i\alpha} \right] = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{32} \left[e^0 (b + c) + e^{-2i\alpha} (2a + 3b + 3c) + e^{-4i\alpha} (6a + 4b + 2c) + \right. \\
&\quad \left. + e^{-6i\alpha} (6a + 4b - 2c) + e^{-8i\alpha} (2a + 3b - 3c) + e^{-10i\alpha} (b - c) \right] = \\
&= \sum_{k=0}^5 u(k) e^{-2ik\alpha} = \sum_{k=0}^5 u(k) e^{-2\pi i kn/N}.
\end{aligned}$$

Roznásobením závorek a porovnáním konstant u jednotlivých členů $e^{-2ik\alpha}$, $k = 0, 1, \dots, 5$ získáme složky škálového filtru u

$$\begin{aligned}
&(u(0), u(1), u(2), u(3), u(4), u(5))^{\top} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{32} (b + c, 2a + 3b + 3c, 6a + 4b + 2c, 6a + 4b - 2c, 2a + 3b - 3c, b - c)^{\top}.
\end{aligned}$$

Na obrázku 2.2 je zobrazen vektor u generující Daubechies wavelety D6.



Obrázek 2.2: Škálový filtr D6

2.6 Kompresí dat

Je-li $B = \{v_j\}_{j=0}^{N-1}$ ortonormální báze prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$ můžeme vektor $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ psát ve tvaru

$$z = \sum_{k=0}^{N-1} \langle z, v_k \rangle v_k.$$

Kompresí dat ve waveletové transformaci je založena na zanedbání malých hodnot Fourierových koeficientů v absolutní hodnotě vzhledem k uvedené bázi. Při kompresi dat postupujeme následujícím způsobem. Posloupnost Fourierových koeficientů v absolutní hodnotě $\{|\langle z, v_k \rangle|\}_{k=0}^{N-1}$ uspořádáme sestupně. Pro dané $K < N$ aproximujeme vektor z pomocí prvních K koeficientů, množinu jejich indexů označíme S_k . Aproximace w je potom tvaru

$$w = \sum_{k \in S_k} \langle z, v_k \rangle v_k,$$

tuto aproximaci nazveme kompresí vektoru z .

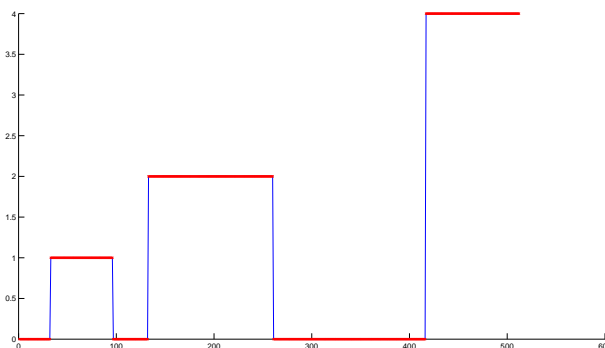
V následujících příkladech předvedeme kompresi vektoru pomocí Haarova waveletu D2 a Daubechies waveletu D6 a porovnáme relativní chyby těchto kompresí, které jsou dány podílem norm prostoru $l^2(\mathbb{Z})$, tj.

$$\frac{\|w - z\|}{\|z\|}.$$

Příklad 2.2. Pro $N = 512$, $p = 4$, $K = 8, 16, 25, 50$ provedeme kompresi vektoru

$$z(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 32 \leq n \leq 95 \\ 2 & \text{pro } 132 \leq n \leq 259 \\ 4 & \text{pro } 416 \leq n \leq 511 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

pomocí Haarovy báze a Daubechies báze D6 a uvedeme jejich relativní chyby. Vektor z je vykreslen na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Původní vektor z

Tento příklad vypočítáme pomocí programů `kompresa_haar` a `kompresa_haar`, které jsou sestaveny v softwaru MATLAB a jsou uvedeny v páté kapitole. Tyto programy zavoláme příkazy

```
w=kompresa_haar(z,4,K);
w=kompresa_daubechies(z,4,K);
```

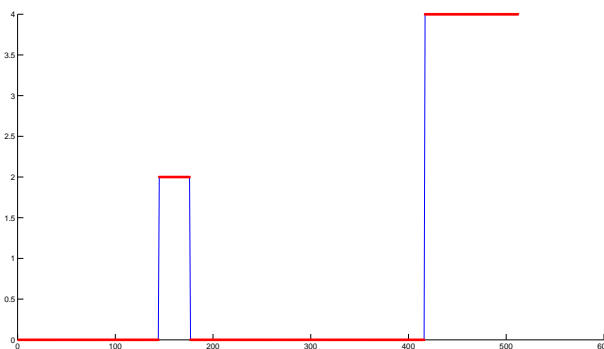
kde za hodnoty parametru K postupně dosazujeme $K = 8, 16, 25, 50$. Kompresi vektorů provedeme postupem uvedeným na začátku kapitoly, tedy zanedbáme nejmenší koeficienty získané transformací. Dále vypočítáme relativní chyby a zobrazíme výslednou kompresi pomocí příkazů

```
chyba=norm(w'-z)/norm(z);
plot([1:512],w,'-x','MarkerSize',4, 'MarkerEdgeColor','r')
```

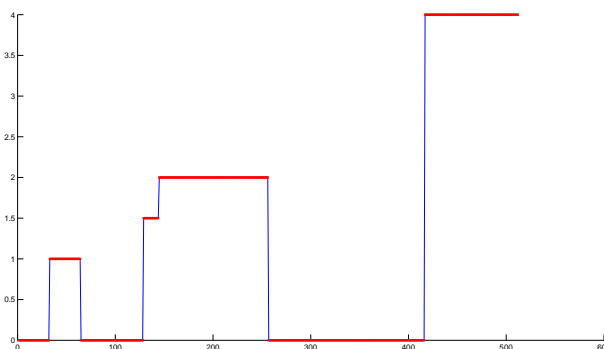
Relativní chyby komprese pro $K = 8, 16, 25, 50$ získané použitím Haarovy báze mají hodnoty

$$\text{chyba} = 0.4606, 0.1685, 1.0\text{e-}015 \cdot 0.4464, 1.0\text{e-}015 \cdot 0.4464.$$

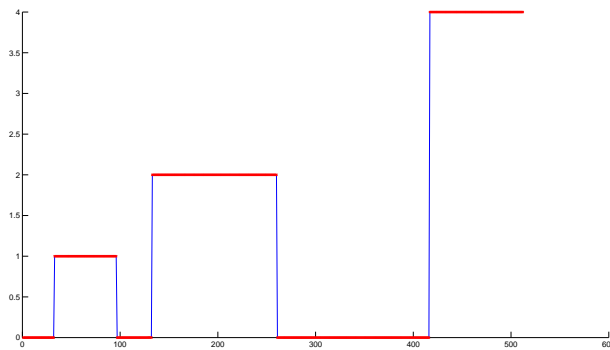
Aproximaci vektoru z získanou kompresí pro $K = 25$ můžeme na základě velikosti relativní chyby považovat za dostatečně přesnou, a proto nebudeme aproximaci pro $K = 50$ zobrazovat.



Obrázek 2.4: Komprese pomocí Haarova waveletu pro $K=8$



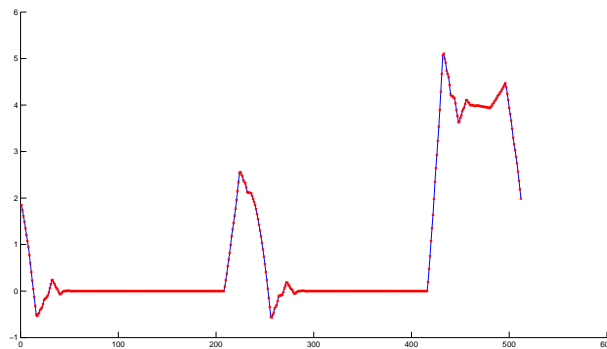
Obrázek 2.5: Komprese pomocí Haarova waveletu pro $K=16$



Obrázek 2.6: Kompresi pomocí Haarova waveletu pro $K=25$

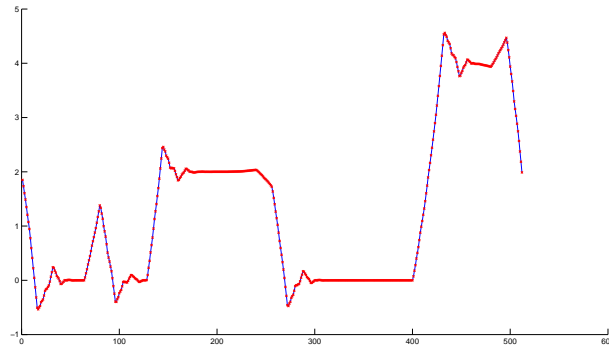
Relativní chyby komprese získané transformací pomocí Daubechies báze D6 nabývají hodnot

chyba = 0.5146, 0.2556, 0.1505, 0.0468.

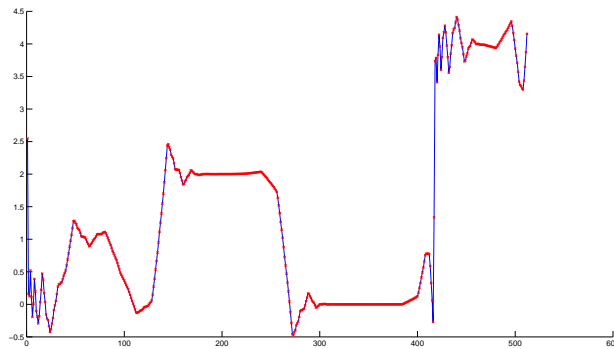


Obrázek 2.7: Kompresi pomocí Daubechies waveletu pro $K=8$

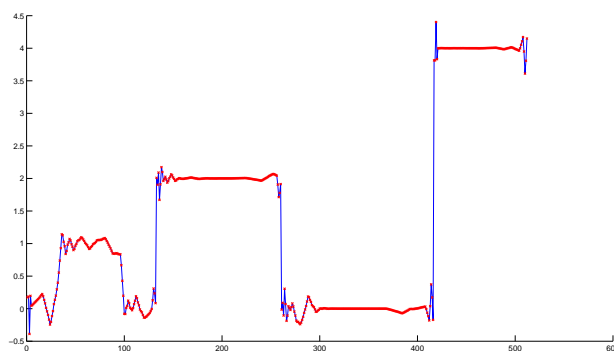
Z velikostí relativních chyb snadno vyčteme, že pro vektor z , který má po částech konstantní průběh, je vhodnější použít Haarův wavelet.



Obrázek 2.8: Kompresi pomocí Daubechies waveletu pro $K=16$



Obrázek 2.9: Kompresi pomocí Daubechies waveletu pro $K=25$

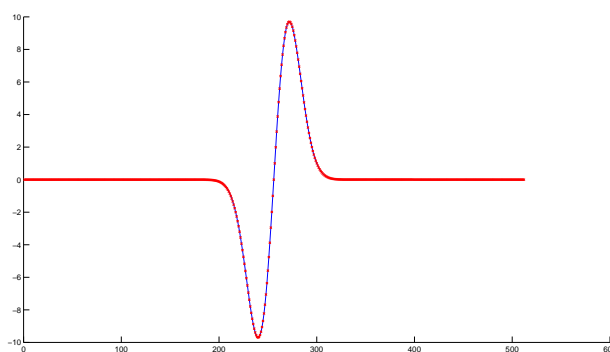


Obrázek 2.10: Kompresi pomocí Daubechies waveletu pro $K=50$

Příklad 2.3. Pro $N = 512$, $p = 4$, $K = 8, 16, 25, 50$ provedeme kompresi vektoru

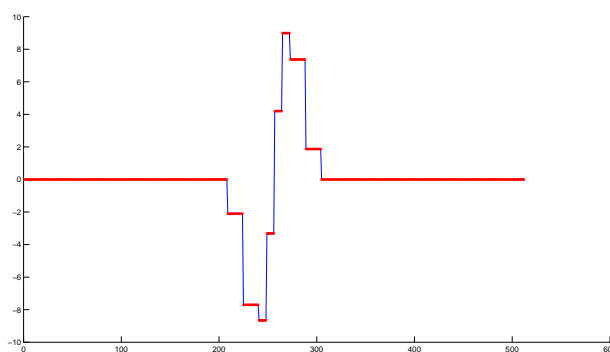
$$z(n) = (n - 256)e^{-(n-256)^2/512}, \quad n = 0, \dots, 511$$

pomocí Haarovy báze a Daubechies báze D6. Uvedený vektor z je vykreslen na obrázku 2.11. Budeme postupovat obdobně jako v příkadu 2.2.

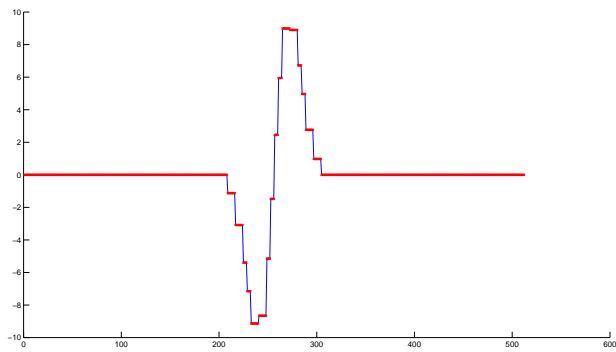


Obrázek 2.11: Původní vektor z

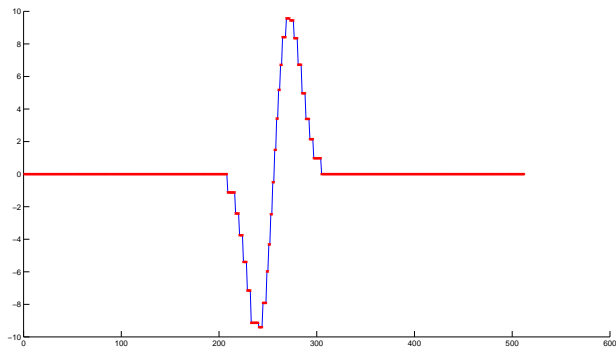
Kompresi vektoru z provedeme pro $K = 8, 16, 25, 50$ pomocí programů `komprese_haar` a `komprese_daubechies`, výsledné zpětné transformace jsou vykresleny na obrázcích 2.12 - 2.19.



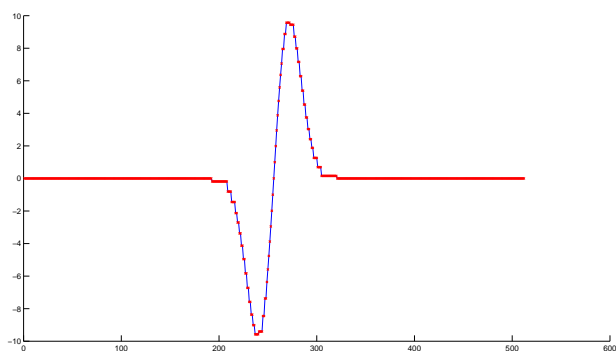
Obrázek 2.12: Komprese pomocí Haarova waveletu pro $K=8$



Obrázek 2.13: Kompresi pomocí Haarova waveletu pro $K=16$



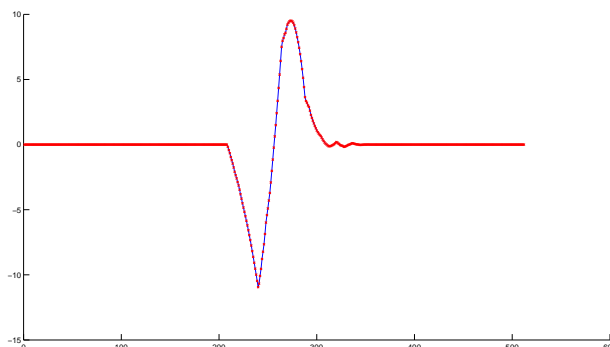
Obrázek 2.14: Kompresi pomocí Haarova waveletu pro $K=25$



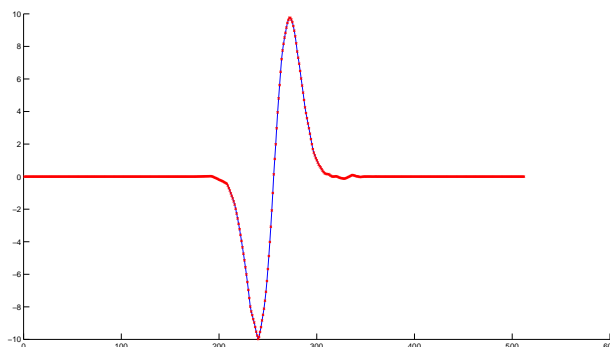
Obrázek 2.15: Kompresi pomocí Haarova waveletu pro $K=50$

Přesnost jednotlivých kompresí porovnáme na základě relativní chyby transformace, které mají pro $K = 8, 16, 25, 50$ pomocí Haarova waveletu hodnoty

chyba = 0.2400, 0.1140, 0.0712, 0.0314.



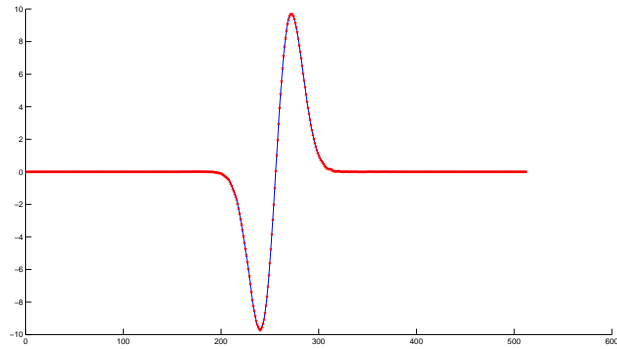
Obrázek 2.16: Kompresi pomocí Daubechies waveletu pro $K=8$



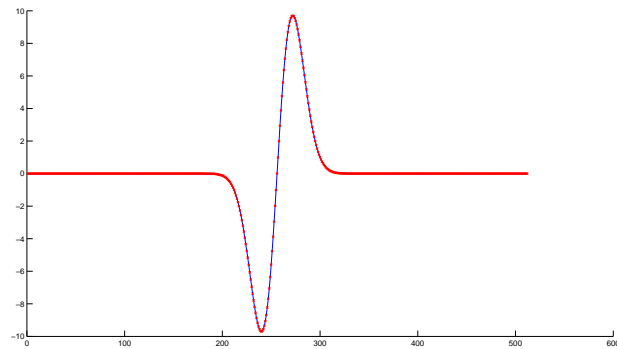
Obrázek 2.17: Kompresi pomocí Daubechies waveletu pro $K=16$

Relativní chyby komprese pro $K = 8, 16, 25, 50$ získané transformací pomocí Daubechies waveletu nabývají hodnot

chyba = 0.0672, 0.0161, 0.0049, $1.0e-003 \cdot 0.6620$.



Obrázek 2.18: Kompresa pomocí Daubechies waveletu pro $K=25$



Obrázek 2.19: Kompresa pomocí Daubechies waveletu pro $K=50$

Pro vektor z je na základě velikosti relativní chyby výhodnější použít Daubechies wavelet D6.

Na předchozích příkladech je vidět, že je aproximace vektoru ovlivněna tvarem waveletu. Proto je vhodné volit wavelety na základě transformovaných dat.

Příklad 2.4. Pro $p = 3$, $K = 25\%$, 10% , 5% provedeme waveletskou transformaci a následnou kompresi digitální fotografie z [9], která je zobrazena na obrázku 2.20.



Obrázek 2.20: Původní barevná fotografie

Pro transformaci použijeme Haarův wavelet D2. Fotografie reprezentujeme jako matici, jejíž každý prvek udává stupeň šedi odpovídajícího obrazového bodu. Na takto získanou matici aplikujeme waveletovou transformaci, která je uvedena v kapitole 2.3.

Pro výpočet waveletové transformace pomocí Haarova waveletu D2 použijeme program `komprese2_haar`, který jsem sestavila v MATLABu, a který je uveden v 5. kapitole. Pro transformaci obrazu na první úrovni voláme program příkazem

```
komprese2_haar('havirov.tif',1);
```

Výstupem je původní obraz převedený do stupnice šedi, který je vykreslen na



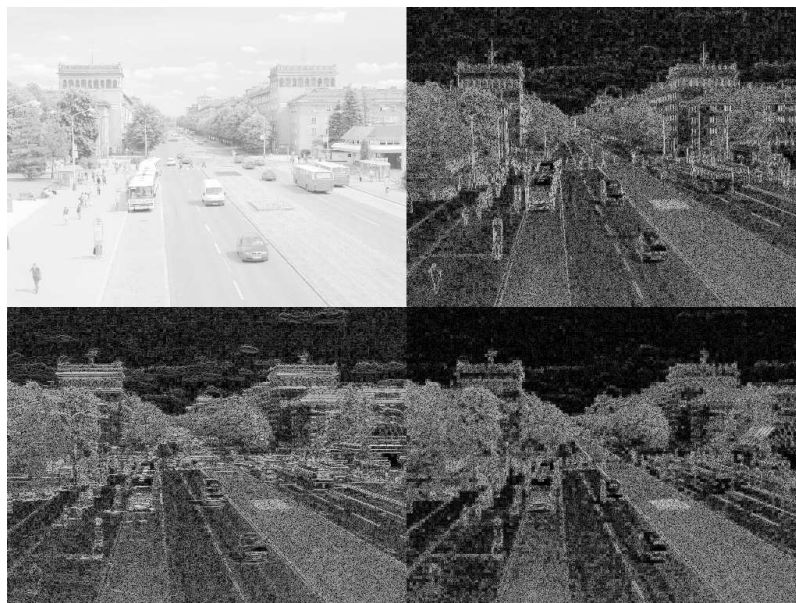
Obrázek 2.21: Fotografie převedená do škály šedi

obrázku 2.21, a jeho waveletová transformace na první úrovni. Tato transformace je graficky znázorněna na obrázku 2.22, který se skládá ze čtyř částí. Levý horní kvadrant aproximuje původní obraz a odpovídá ortogonální projekci do škálového prostoru, zbývající tři části transformace odpovídají projekci do prostoru detailů. Levý dolní kvadrant obsahuje horizontální detaily, pravý horní vertikální a pravý dolní kvadrant zahrnuje diagonální detaily.

Waveletová transformace na druhé úrovni se volá obdobně

```
komprese2_haar('havirov.tif',2);
```

Tato transformace je vykreslena na obrázku 2.23. Pokud chceme provést kompresi obrazu, přidáme ve volání funkce třetí, nepovinný parametr, který udává, kolik procent původních dat se bude využívat ve zpětné rekonstrukci. Pro kompresi obrazu použijeme přednostně koeficienty získané projekcí do škálového prostoru,

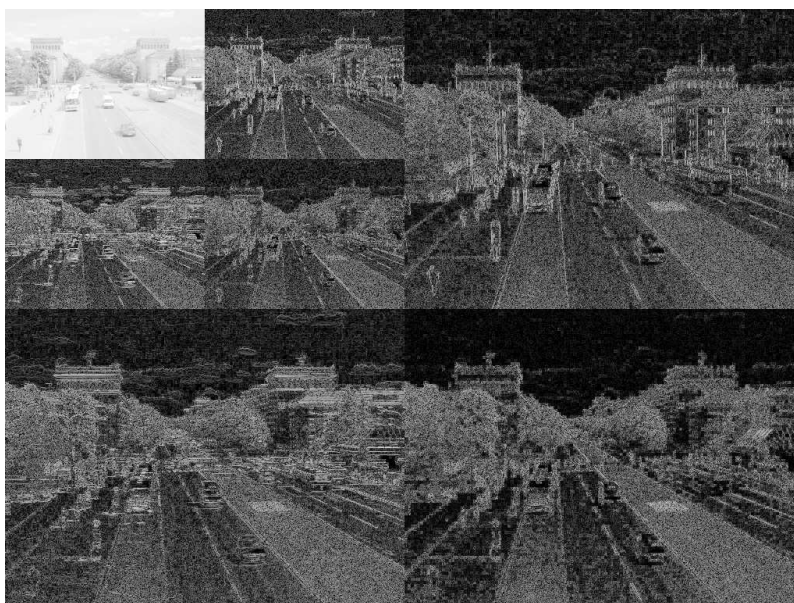


Obrázek 2.22: Waveletová transformace obrazu na první úrovni

kteřá je nejjednodušší aproximací původního obrazu. Dále budeme ve zpětné transformaci uvažovat nejvýznamnější koeficienty získané projekcí do prostorů detailů, tj. koeficienty s největší absolutní hodnotou. Tento přístup ke kompresi, který rozlišuje mezi škálovými prostory a prostory detailů, je v literatuře preferován. Pro ukázkové příklady komprese vektorů 2.2, 2.3 však dává lepší výsledky postup uvedený na začátku této kapitoly. Syntaxe příkazu pro kompresi z 25% původních dat, která je vykreslena na obrázku 2.24 má následující tvar

```
komprese2_haar('havirov.tif',2,25);
```

Obdobně získáme také kompresi z původních 10%, resp. 5% dat, která je zachycena na obrázku 2.25, resp. 2.26. Relativně dobrá kvalita komprese je dána koncentrací důležitých informací v malém množství waveletových koeficientů. Waveletovou transformaci lze tedy považovat za efektivní nástroj pro kompresi obrazu.



Obrázek 2.23: Waveletová transformace obrazu na druhé úrovni



Obrázek 2.24: Komprese obrazu z 25% původních dat



Obrázek 2.25: Kompresi obrazu z 10% původních dat



Obrázek 2.26: Kompresi obrazu z 5% původních dat

3 Wavelety v prostoru $L^2(\mathbb{R})$

V této kapitole opustíme prostor posloupností $l^2(\mathbb{Z}_N)$ a přejdeme k waveletové transformaci funkcí z prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Popíšeme princip konstrukce waveletů metodou multirozkladu prostoru $L^2(\mathbb{R})$ a uvedeme některé její vlastnosti. Konstrukci waveletového systému zakončíme Mallatovou větou. Na závěr odvodíme tvar Mallatova algoritmu.

3.1 Spojitá waveletová transformace v $L^2(\mathbb{R})$

Stejně jako Fourierova transformace má i waveletová transformace svou spojitou verzi. V této kapitole uvedeme pro úplnost její definici, dále se budeme zabývat pouze diskrétní waveletovou transformací.

Zvolme $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Pro reálné $s > 0$ definujme

$$\begin{aligned}\psi_s(u) &= |s|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{u}{s}\right) \\ \psi_{s,t}(u) &\equiv \psi_s(u-t) = |s|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{u-t}{s}\right).\end{aligned}$$

Definice 3.1. Spojitou waveletovou transformací funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$ definujeme předpisem

$$\check{f}(s,t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\overline{\psi_{s,t}(u)}du \equiv \langle f, \psi_{s,t} \rangle, \quad s > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametr s se nazývá **škálový parametr**, funkce ψ se nazývá **základní wavelet** nebo **wavelet matka**.

3.2 Diskrétní waveletová transformace v $L^2(\mathbb{R})$

V úvodu této kapitoly uvedeme definici waveletového systému, jehož tvar je motivován Fourierovou bází prostoru $L^2\langle -\pi, \pi \rangle$, která je tvořena systémem funkcí

$$\{e_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad e_n(t) = \frac{1}{2\pi}e^{int}, \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

Každý prvek Fourierovy báze lze vyjádřit ze základní funkce $e_1(t)$ pomocí celočíselného násobku nezávisle proměnné t , platí tedy $e_n(t) = e_1(nt)$, $n \in \mathbb{Z}$. Obdobně jako v případě Fourierovy báze budeme chtít generovat prostor $L^2(\mathbb{R})$ pomocí jediné funkce $\psi(t)$. V tomto prostoru bude ovšem nezbytné uvažovat také všechna posunutí $\psi(t - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ nezávisle proměnné t . Systém funkcí $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ tedy vznikne posunutím a dilatací jediné funkce ψ .

Nechť $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$. Definujme funkce $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$, $j, k \in \mathbb{Z}$ předpisem

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

a uzavřené podprostory V_j, W_j , $j \in \mathbb{Z}$ prostoru $L^2(\mathbb{R})$

$$V_j = \overline{\mathcal{L}\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}}, \quad W_j = \overline{\mathcal{L}\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}}.$$

Definice 3.2. Nechť $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ a nechť systém funkcí $\psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$, $j, k \in \mathbb{Z}$ tvoří úplnou ortonormální množinu funkcí v prostoru $L^2(\mathbb{R})$, tj. platí

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}.$$

Pak se tento systém nazývá **waveletový systém**, jehož prvky jsou **wavelety** a funkce ψ , která generuje tento waveletový systém, se nazývá **wavelet**.

Definice 3.3. Zobrazení $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$, které každé funkci f přiřadí systém koeficientů

$$T(f) = \{\langle f, \psi_{j,k} \rangle\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

se nazývá **diskrétní waveletová transformace**.

Věta 3.1. Nechť $\psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$, $j, k \in \mathbb{Z}$ je waveletový systém funkcí v prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Pak pro každou funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$ platí

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Tato identita se nazývá **waveletová identita**, koeficienty $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$, $j, k \in \mathbb{Z}$ se nazývají **waveletové koeficienty**.

Důkaz: viz [5], str. 13.

3.3 Multirozklad

Waveletový systém zavedený v definici 3.2. tvoří rozklad prostoru $L^2(\mathbb{R})$, tj.

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \dots$$

Definujeme-li podprostor $V_j, j \in \mathbb{Z}$ prostoru $L^2(\mathbb{R})$ vztahem

$$V_j := \dots \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1},$$

získáme rostoucí posloupnost podprostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Metoda konstrukce waveletového systému, kterou se budeme zabývat, se nazývá multirozklad prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Nejprve zkonstruujeme tzv. škálovou funkci $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, která generuje posloupnost podprostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Pomocí této posloupnosti podprostorů získáme waveletový systém. Místo pojmu multirozklad prostoru $L^2(\mathbb{R})$ budeme používat zkratku MRA (the multiresolution analysis). Nutno poznamenat, že multirozklad není jediným způsobem konstrukce waveletového systému.

Definice 3.4. Multirozklad prostoru $L^2(\mathbb{R})$

Řekneme, že posloupnost uzavřených podprostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ prostoru $L^2(\mathbb{R})$ tvoří multirozklad prostoru $L^2(\mathbb{R})$, jestliže jsou splněny následující vlastnosti.

a) **Vlastnost monotonie**

Posloupnost podprostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je rostoucí, tj. $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$.

b) **Existence škálové funkce**

Existuje tzv. škálová funkce $\varphi \in V_0$ taková, že posloupnost $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální a úplná v prostoru V_0 , tzn. existuje $z \in l^2(\mathbb{Z})$ tak, že

$$f(x) \in V_0 \Rightarrow f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) \varphi_{0,k}(x), \quad z = (z(k))_{k \in \mathbb{Z}}.$$

A naopak kombinace $\sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) \varphi_{0,k}(x)$, kde $z \in l^2(\mathbb{Z})$, je prvkem prostoru V_0 .

c) **Dilatační vlastnost**

Pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$.

d) **Vlastnost průniku**

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

e) **Hustota**

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists f_n \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0 \right\}$$

Poznámka 3.1. V literatuře lze najít wavelet ψ , který generuje waveletový systém, pod názvem **mateřský wavelet**, škálová funkce z definice multirozkladu φ se také označuje jako **otcovský wavelet**. Jednotlivé prostory $V_j, j \in \mathbb{Z}$ z definice 3.4 nazveme **škálové prostory**.

Věta 3.2. Necht $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je MRA se škálovou funkcí φ . Pak platí

1. vlastnost translace $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.
2. systém funkcí $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální a úplný v prostoru V_j .
3. existuje vektor $u = (u(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ tak, že

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi(2x - k).$$

Důkaz: Tato věta je uvedena v [6], str. 56. Její důkaz je ponechán jako cvičení. Tyto vlastnosti multirozkladu prostoru $L^2(\mathbb{R})$ budeme dále potřebovat, proto je na tomto místě také dokážeme.

1. Funkce $f \in V_0 \Leftrightarrow$ existuje posloupnost $z \in l^2(\mathbb{Z})$ taková, že

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j) \varphi_{0,j}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j) \varphi(x - j).$$

Což platí právě tehdy, když

$$f(x - k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z(j) \varphi(x - k - j) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m - k) \varphi(x - m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} y(m) \varphi(x - m)$$

Použili jsme substituci $m = k + j$, j prochází množinu celých čísel, tedy pro pevné k nabývá m také všech hodnot z množiny \mathbb{Z} . Posloupnost $\{y_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ vznikla z posloupnosti $\{z_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ translací, proto $y \in l^2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0$.

2. Systém funkcí $\{\varphi_{j,k}\}$ je ortonormální v prostoru V_j , jestliže $\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,l} \rangle = \delta_{k,l}$. Z tvaru funkcí $\varphi_{j,l}$ plyne

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,l} \rangle &= \langle 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), 2^{j/2} \varphi(2^j x - l) \rangle = 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j x - k) \overline{\varphi(2^j x - l)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y - k) \overline{\varphi(y - l)} dy = \delta_{k,l}. \end{aligned}$$

Použili jsme substituci $y = 2^j x$ a ortonormalitu množiny $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Úplnost množiny $\{\varphi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ ve V_j plyne z konstrukce tohoto prostoru $V_j = \overline{\mathcal{L}\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}}$.

3. Z vlastnosti monotonie MRA plyne, že $V_0 \subset V_1$ a tedy můžeme funkci $\varphi \in V_0$ psát ve tvaru lineární kombinace funkcí $\varphi_{1,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, tj.

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi(2x - k).$$

Funkce φ leží v prostoru $L^2(\mathbb{R})$, pro její normu tedy platí

$$\begin{aligned} +\infty > \|\varphi\|^2 &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k} \right\|^2 = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) \varphi_{1,j} \right\rangle = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(k) u(j) \langle \varphi_{1,k}, \varphi_{1,j} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)^2, \end{aligned}$$

přičemž jsme využili vlastností skalárního součinu a ortonormality množiny $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ v prostoru V_1 . Platí tedy, že posloupnost $u \in l^2(\mathbb{Z})$. □

Definice 3.5. Nechť $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je MRA se škálovou funkcí φ . Pak rovnice

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi(2x - k) \quad (3.1)$$

se nazývá **dilatační rovnice** (také škálová nebo zjemňující rovnice). Vektor $u = (u(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ se nazývá **škálový vektor** (také škálová posloupnost, vektor škálových parametrů nebo koeficientů filtrace).

Poznámka 3.2. *Vzhledem k neustálenému názvosloví pro škálový vektor, resp. škálovou posloupnost, si v následujícím textu dovolíme označovat prvky prostoru $l^2(\mathbb{Z})$ jako posloupnosti i jako vektory.*

Provedeme-li Fourierovu transformaci dilatační rovnice (3.1), získáme tzv. ekvivalentní dilatační rovnici

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi}, \quad (3.2)$$

funkce m_0 se nazývá **funkce filtrace** nebo také škálový filtr. Funkce filtrace hraje důležitou roli v konstrukci multirozkladu MRA.

Existuje několik způsobů jak zkonstruovat multirozklad prostoru $L^2(\mathbb{R})$. V této práci se soustředíme na konstrukci MRA pomocí škálového vektoru u . Škálovou funkci sestrojíme tak, aby s daným škálovým vektorem u splňovala dilatační rovnici (3.1). Zkonstruovaná škálová funkce generuje MRA za předpokladu, že vektor u splňuje řadu podmínek.

Základní myšlenka konstrukce škálové funkce φ spočívá na iterování ekvivalentní dilatační rovnice (3.2) v proměnné ξ . Tedy

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \\ \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) &= m_0\left(\frac{\xi}{4}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right), \\ \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right) &= m_0\left(\frac{\xi}{8}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{8}\right), \dots \end{aligned}$$

Řešení této rovnice můžeme při splnění dále uvedených podmínek zapsat ve tvaru

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right). \quad (3.3)$$

V následující části budeme zkoumat, za jakých předpokladů je dilatační rovnice řešitelná a zkonstruovaná škálová funkce φ generuje MRA.

Definice 3.6. Jestliže pro funkci $m_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ existuje $\delta > 0$ a konstanta $C < +\infty$ tak, že pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$ platí

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C|\xi|^\delta,$$

pak budeme říkat, že m_0 splňuje **Lipschitzovu podmínku** řádu δ v bodě 0.

Následující lemma zodpoví otázku konvergence součinu ve vztahu (3.3).

Lemma 3.1. *Nechť funkce $m_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ splňuje*

1. *Lipschitzovu podmínku řádu δ v bodě 0.*
2. *$m_0(0) = 1$ a $|m_0(\xi)| \leq 1$ pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sestrojme funkci $G_n(\xi)$ ve tvaru*

$$G_n(\xi) = \prod_{j=1}^n m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right).$$

Pak posloupnost funkcí $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně na každé omezené množině v \mathbb{R} , a tedy bodově v každém bodě $\xi \in \mathbb{R}$.

Důkaz: viz [6], str. 66.

Nyní uvedeme postačující podmínku na vektor u k tomu, aby funkce filtrace m_0 splňovala Lipschitzovu podmínku.

Lemma 3.2. *Nechť vektor u pro nějaké $\varepsilon > 0$ splňuje podmínku*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^\varepsilon |u(k)| < +\infty. \quad (3.4)$$

Pak funkce m_0 definovaná vztahem

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi}$$

splňuje Lipschitzovu podmínku řádu $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$ v bodě 0.

Důkaz: viz [6], str. 66.

Poznámka 3.3. Jestliže vektor u splňuje podmínku (3.4), pak nutně leží v prostoru $l^1(\mathbb{Z})$. Platí totiž

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u(k)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^\varepsilon |u(k)| + |u(0)| < +\infty.$$

Ještě než popíšeme konstrukci MRA pomocí škálového vektoru u , uvedeme lemma, které budeme potřebovat v důkazu konstrukce.

Lemma 3.3. Nechť funkce $m_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ splňuje následující vlastnosti.

1. Funkce m_0 splňuje Lipschitzovu podmínku řádu $\delta > 0$ v bodě 0.
2. $m_0(0) = 1$.
3. Funkce m_0 je 2π periodická.
4. Pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$ platí $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$.
5. $\inf_{|\xi| \leq \pi/2} |m_0(\xi)| > 0$.

Definujme funkci $\hat{\varphi}$ předpisem

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pak platí

- a) Funkce $\hat{\varphi}$ splňuje pro všechna $\xi \in \mathbb{R}$ rovnici

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

- b) $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$.
- c) Funkce $\hat{\varphi}$ je spojitá v bodě 0.

d) Množina $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Sestrojme vektor $u \in l^2(\mathbb{Z})$ tak, že v normě prostoru $L^2\langle -\pi, \pi \rangle$ platí

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi},$$

$$\text{tzn. } u(k) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m_0(\xi) e^{ik\xi} d\xi = \sqrt{2} \check{m}_0(-k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Předpokládejme navíc, že

6. $u \in l^1(\mathbb{Z})$

Pak

e) Funkce φ splňuje dilatační rovnici se škálovým vektorem u , tzn.

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{1,k}(x).$$

f) Funkce $\hat{\varphi}$ a m_0 jsou spojité funkce na \mathbb{R} .

Důkaz: viz [6], str. 67.

Na základě tohoto lemmatu však nemůžeme zaručit, že zkonstruovaná škálová funkce φ vyhovuje všem podmínkám pro generování multirozkladu, neboť není zajištěno splnění vlastností průniku a hustoty v definici MRA. Následující lemma stanoví zbývající podmínky na funkci φ , aby vyhovovala těmto požadavkům.

Lemma 3.4. *Nechť funkce $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ je taková, že $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v prostoru $L^2(\mathbb{R})$ pro každé $j \in \mathbb{Z}$. Definujme prostory V_j pro každé $j \in \mathbb{Z}$ předpisem $V_j = \overline{\mathcal{L}\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}}$. Pak $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$. Je-li navíc funkce $\hat{\varphi}$ ohraničená, spojitá v nule a $\hat{\varphi}(0) = 1$, pak $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.*

Důkaz: viz [6], str. 70.

Nyní můžeme zkonstruovat multirozklad prostoru $L^2(\mathbb{R})$ pomocí škálového vektoru u . Podmínky, které musí škálový vektor splňovat, udává následující věta. Tento způsob konstrukce MRA není jediný, multirozklad lze zkonstruovat na základě funkce filtrace m_0 , nebo přímo pomocí škálové funkce φ . Podmínky pro tyto typy konstrukce MRA lze najít např. v [6].

Věta 3.3. Konstrukce MRA pomocí škálového vektoru u

Nechť vektor $u = (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ splňuje následující podmínky.

1. *Pro nějaké $\varepsilon > 0$ platí*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^\varepsilon |u(k)| < +\infty.$$

2. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}$.

3. *Posloupnost $\{R_{2^k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální posloupnost v prostoru $l^2(\mathbb{Z})$.*

4. $\inf_{|\xi| \leq \pi/2} |m_0(\xi)| > 0$, kde $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)e^{-ik\xi}$.

Pak součin

$$\prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

konverguje na každé ohraničené množině stejnoměrně k funkci $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$. Sestrojme funkci $\varphi = (\hat{\varphi})^\vee$. Pak tato funkce splňuje škálovou rovnici s vektorem u tzn. platí

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}(x)$$

a množina funkcí $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Pro každé $j \in \mathbb{Z}$ sestrojme $V_j = \overline{\mathcal{L}(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}}$. Posloupnost prostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ tvoří MRA se škálovou funkcí φ a škálovým vektorem u .

Důkaz: Tato věta je převzata z [6], str. 73, přičemž její důkaz je ponechán jako cvičení. V důkazu využijeme dříve uvedené lemma 3.3 a 3.4. Nejprve ověříme, zda

předpoklady věty, tj. podmínky 1.–4., jsou postačující ke splnění předpokladů lemmatu 3.3.

1. První podmínka zaručuje podle lemmatu 3.2, že funkce

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi}$$

splňuje Lipschitzovu podmínku řádu $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$ v bodě 0.

2. Druhá podmínka implikuje $m_0(0) = 1$, neboť

$$m_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) = 1.$$

3. Periodičnost funkce $m_0(\xi)$ plyne z 2π periodičnosti funkcí $e^{-ik\xi}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

4. Posloupnost $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální posloupnost prostoru $l^2(\mathbb{Z})$, tedy platí

$$\langle u, R_{2k}u \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) \overline{u(j-2k)} = \delta_{k,0}.$$

Na základě tohoto vztahu ověříme platnost čtvrté podmínky lemmatu 3.3, tj. $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$. Úpravou získáme

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= m_0(\xi) \overline{m_0(\xi)} + m_0(\xi + \pi) \overline{m_0(\xi + \pi)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{u(j)} e^{ij\xi} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi} e^{-ik\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{u(j)} e^{ij\xi} e^{ij\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{u(j)} e^{ij\xi} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{u(j)} e^{ij\xi} e^{i\pi(j-k)}. \end{aligned}$$

Pro $j - k$ liché se výraz $e^{i\pi(j-k)} = (-1)^{j-k}$ rovná -1 a jednotliví sčítanci se od sebe odečtou, pro $j - k$ sudé je výraz $e^{i\pi(j-k)}$ roven 1 a dojde naopak k součtu. Pro $j - k = 2n$ sudé můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{u(j)} e^{ij\xi} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(k) \overline{u(j)} e^{i\xi(j-k)} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j-2n) \overline{u(j)} e^{i\xi(2n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n,0} e^{i\xi 2n} = e^{i\xi 0} = 1. \end{aligned}$$

Dokázali jsme splnění podmínek lemmatu 3.3. Platí tedy, že funkce $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ je spojitá na celé reálné ose a splňuje dilatační rovnici se škálovým vektorem u . Dále platí, že množina $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Stejněměrná konvergence nekonečného součinu

$$\prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

na každé omezené množině v \mathbb{R} plyne z lemmatu 3.1. Podmínky tohoto lemmatu jsou splněny, protože funkce $m_0(\xi)$ splňuje Lipschitzovu podmínku řádu δ v bodě 0, $m_0(0) = 1$ a $|m_0(\xi)| \leq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$. Poslední nerovnost plyne ze vztahu $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti a), b), c) z definice 3.4 plynou z konstrukce prostorů V_j , $j \in \mathbb{Z}$. Vlastnosti d) a e) jsou důsledkem lemmatu 3.4. Ověřme nyní jeho předpoklady.

Víme, že množina $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v prostoru $L^2(\mathbb{R})$, a že funkce $\hat{\varphi}$ je spojitá v nule. Ohraničenost funkce $\hat{\varphi}$ plyne z vlastnosti funkce filtrace $|m_0(\xi)| \leq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, neboť

$$|\hat{\varphi}(\xi)| = \prod_{j=1}^{+\infty} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq \prod_{j=1}^{+\infty} 1 = 1.$$

Zbývá ověřit, že $\hat{\varphi}(0) = 1$. Fourierovu transformaci škálové funkce $\hat{\varphi}$ můžeme upravit na tvar

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi/2^j},$$

dosazením $\xi = 0$ získáme

$$\hat{\varphi}(0) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^0 = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) = \prod_{j=1}^{+\infty} 1 = 1.$$

Dokázali jsme tedy, že posloupnost $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $V_j = \overline{\mathcal{L}(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}}$ tvoří MRA.

□

Nyní si ukážeme, jak pomocí MRA sestavit waveletový systém. Budeme hledat takovou funkci ψ , aby množina $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ byla úplná v prostoru W_0 a ortonormální v $L^2(\mathbb{R})$. Tato funkce není pro daný multirozklad dána jednoznačně. Konkrétní volbou získáme tzv. přidružený wavelet. Tvar obecného waveletu, přesněji jeho Fourierův obraz, lze najít např. v [6].

Definice 3.7. Nechť $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je MRA se škálovou funkcí $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ a škálovým vektorem $u = \{u(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Funkci

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi(2x - k), \text{ kde } v(k) = (-1)^k \overline{u(1-k)}$$

nazveme **přidružený wavelet** k tomuto multirozkladu.

Definice 3.8. Rovnice

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi(2x - k) \quad (3.5)$$

se nazývá **waveletová rovnice** a $\{v(k), k \in \mathbb{Z}\}$ **waveletové parametry**.

V následujících tvrzeních se ovšem objevuje wavelet daný vztahem

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi(2x - k), \text{ kde } v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)}.$$

Poznamenejme, že tato tvrzení platí i pro přidružený wavelet, který je pouze (-1) násobkem uvedeného waveletu, a tedy generuje stejný prostor.

Základem konstrukce waveletového systému je Mallatova věta, která využívá vlastnosti následujícího lemmatu.

Lemma 3.5. Nechť $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je MRA se škálovou funkcí φ a škálovým vektorem $(u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$. Předpokládejme, že $u \in l^1(\mathbb{Z})$. Sestrojme vektor

$$v = (v(k))_{k \in \mathbb{Z}}, v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)}$$

a funkci

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi(2x - k).$$

Označme $W_0 = \overline{\mathcal{L}(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}}$. Pak platí

1. Množina $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v $L^2(\mathbb{R})$ a úplná v prostoru W_0 a

$$V_1 = V_0 \oplus W_0, \quad V_0 \perp W_0$$

2. Definujme $W_j = \overline{\mathcal{L}(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}}$. Pak pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(x) \in W_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_j, \quad f(x) \in W_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in W_0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

3. Pro každé $j \in \mathbb{Z}$ je

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad V_j \perp W_j$$

$$V_j = \bigoplus_{l=-\infty}^{j-1} W_l.$$

4. Množina funkcí $\{\psi_{l,k}\}_{l < j, k \in \mathbb{Z}}$ je úplná v prostoru V_j .

5. Nechť P_j je ortogonální projekce na V_j daná vztahem

$$P_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

pak $\{\|P_j(f) - f\|\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je nerostoucí posloupnost a platí

$$\|P_j(f) - f\| \rightarrow 0 \text{ pro } j \rightarrow +\infty \text{ a } f - P_j(f) \perp W_l \text{ pro } l \leq j - 1.$$

6. Nechť $g \in V_j$ pro nějaké $j \in \mathbb{Z}$ a $g \perp W_l$ pro všechna $l \leq j - 1$, pak $g = 0$.

Důkaz: Toto lemma je uvedeno v [6] na str. 60, jeho důkaz je ponechán jako cvičení. Abychom mohli Mallatovu větu položit na pravdivý základ, dokážeme postupně jednotlivá tvrzení.

1. Vyjdeme z ortonormality množiny $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, tedy platí $\langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,l} \rangle = \delta_{k,l}$.

Do tohoto skalárního součinu dosadíme dilatační rovnici danou vztahem (3.1)

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,l} \rangle &= \left\langle \sqrt{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) \varphi(2x - 2k - j), \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(s) \varphi(2x - 2l - s) \right\rangle = \\ &= 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(j) \overline{u(s)} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,2k+j}, \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,2l+s} \right\rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(j) \overline{u(s)} \delta_{2k+j, 2l+s} = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) \overline{u(2k - 2l + j)} = \delta_{k,l} \end{aligned}$$

Tento vztah a waveletovou rovnici (3.5) využijeme k důkazu ortonormality množiny $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Můžeme tedy za použití substituce $m = 1 - j$ psát

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{0,k}, \psi_{0,l} \rangle &= \left\langle \sqrt{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} v(j) \varphi(2x - 2k - j), \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} v(s) \varphi(2x - 2l - s) \right\rangle = \\
&= 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} v(j) \overline{v(s)} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,2k+j}, \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,2l+s} \right\rangle = \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} v(j) \overline{v(s)} \delta_{2k+j, 2l+s} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v(j) \overline{v(2k - 2l + j)} = \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^{j-1} (-1)^{2k-2l+j-1} \overline{u(1-j)} u(1 - 2k + 2l - j) = \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^{2(k-l+j-1)} \overline{u(1-j)} u(1 - 2k + 2l - j) = \\
&= \sum_m \overline{u(m)} u(m - 2k + 2l) = \overline{\delta_{l,k}} = \delta_{k,l}
\end{aligned}$$

Úplnost množiny $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ v prostoru W_0 plyne z konstrukce tohoto prostoru. Dokažme nyní, že $V_0 \perp W_0$, tj. $\langle \varphi_{0,k}, \psi_{0,l} \rangle = 0$, $\forall k, l \in \mathbb{Z}$. Tedy

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{0,k}, \psi_{0,l} \rangle &= \left\langle \sqrt{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) \varphi(2x - 2k - j), \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} v(s) \varphi(2x - 2l - s) \right\rangle = \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(j) \overline{v(s)} \delta_{2k+j, 2l+s} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) (-1)^{2k-2l+j-1} u(1 - 2k + 2l - j) = \\
&= \sum_{j=l-k+1}^{+\infty} (-1)^{j-1} u(j) u(1 - 2k + 2l - j) + \\
&\quad + \sum_{j=-\infty}^{l-k} (-1)^{j-1} u(j) u(1 - 2k + 2l - j) = \\
&= \sum_{j=l-k+1}^{+\infty} (-1)^{j-1} u(j) u(1 - 2k + 2l - j) + \\
&\quad + \sum_{r=l-k+1}^{+\infty} (-1)^r u(1 - 2k + 2l - r) u(r) = 0.
\end{aligned}$$

Při úpravě uvedeného skalárního součinu jsme použili substituci $r = 1 - 2k + 2l - j$. Ukázali jsme, že prostory W_0 a V_0 jsou na sebe kolmé. Dokažme, že jejich direktní součet tvoří prostor V_1 .

Z vlastnosti monotonie MRA víme, že $V_0 \subset V_1$.

Z tvaru funkce

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi(2x - k)$$

plyne, že $W_0 \subset V_1$. Zbývá tedy dokázat, že $V_1 \subset (V_0 \oplus W_0)$. Vzhledem k tomu, že systém funkcí $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tvoří bázi prostoru V_1 , stačí ukázat, že

$$\varphi_{1,k} \in V_0 \oplus W_0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pro tento důkaz budeme potřebovat několik pomocných tvrzení. Z ortonormality množiny $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ za použití substituce $s = j - 2k$ plyne

$$\begin{aligned} \delta_{k,l} &= \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,l} \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j) \overline{u(2k - 2l + j)} = \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(s - 2k) \overline{u(s - 2l)} \\ &= \langle R_{2k}u, R_{2l}u \rangle. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je tedy ortonormální množina v prostoru $l^2(\mathbb{Z})$. Za tohoto předpokladu je množina $\mathcal{B} = \{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ úplná ortonormální množina prostoru $l^2(\mathbb{Z})$, toto tvrzení je uvedeno v [6] str. 33 věta 3.1.3. Dále z ortonormality báze prostoru V_1 platí

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{1,k}, \varphi_{0,j} \rangle &= \langle \varphi_{1,k}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} u(l) \varphi_{1,2j+l} \rangle = \overline{u(k - 2j)} \\ \langle \varphi_{1,k}, \psi_{0,j} \rangle &= \langle \varphi_{1,k}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} v(l) \varphi_{1,2j+l} \rangle = \overline{v(k - 2j)}. \end{aligned}$$

Pro každou funkci $f \in V_1$, $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \varphi_{1,k}$ platí

$$\langle f, \varphi_{0,j} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \langle \varphi_{1,k}, \varphi_{0,j} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \overline{u(k - 2j)} \quad (3.6)$$

$$\langle f, \psi_{0,j} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \langle \varphi_{1,k}, \psi_{0,j} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \overline{v(k - 2j)}. \quad (3.7)$$

Bázovou funkci $\varphi_{1,j}$ chceme vyjádřit ve tvaru lineární kombinace

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \psi_{0,k} \rangle \psi_{0,k}.$$

Pokud se nám to podaří, funkce $\varphi_{1,j} \in V_0 \oplus W_0$. Označme

$$g = \varphi_{1,j} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \psi_{0,k} \rangle \psi_{0,k}.$$

Vzhledem k tomu, že jednotlivé funkce $\varphi_{1,j}, \varphi_{0,k}, \psi_{0,k}$, $k \in \mathbb{Z}$ leží v prostoru V_1 , leží i funkce $g \in V_1$, a proto ji můžeme zapsat ve tvaru

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \varphi_{1,k}.$$

Dále pro všechna $m \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} \langle g, \varphi_{0,m} \rangle &= \langle \varphi_{1,j}, \varphi_{0,m} \rangle - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \varphi_{0,k} \rangle \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,m} \rangle - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \psi_{0,k} \rangle \langle \psi_{0,k}, \varphi_{0,m} \rangle \\ &= \overline{u(j-2m)} - \overline{u(j-2m)} - 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle g, \psi_{0,m} \rangle &= \langle \varphi_{1,j}, \psi_{0,m} \rangle - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \psi_{0,k} \rangle \langle \varphi_{0,k}, \psi_{0,m} \rangle - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \psi_{0,k} \rangle \langle \psi_{0,k}, \psi_{0,m} \rangle \\ &= \overline{v(j-2m)} - 0 - \overline{v(j-2m)} = 0. \end{aligned}$$

Dosazením do (3.6), (3.7) získáme

$$\langle g, \varphi_{0,m} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \overline{u(k-2m)} = \langle a, R_{2m}u \rangle = 0,$$

$$\langle g, \psi_{0,m} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \overline{v(k-2m)} = \langle a, R_{2m}v \rangle = 0.$$

Vzhledem k tomu, že množina $\mathcal{B} = \{R_{2m}u\}_{m \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2m}v\}_{m \in \mathbb{Z}}$ je úplná ortonormální množina v prostoru $l^2(\mathbb{Z})$, musí být a nulový prvek tohoto prostoru, tj. $a(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Potom funkce $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \varphi_{1,k} \equiv 0$ a pro funkci $\varphi_{1,j}$ platí

$$\varphi_{1,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{1,j} \psi_{0,k} \rangle \psi_{0,k}.$$

Prostor $V_1 \subset V_0 \oplus W_0$ a tím je důkaz hotov.

2. Následující tvrzení dokážeme pomocí několika ekvivalencí. Z konstrukce prostorů W_j plyne, že systém funkcí $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je úplný v prostoru W_j , tedy $f \in W_j$ právě tehdy, když existuje posloupnost $z \in l^2(\mathbb{Z})$ taková, že $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k)\psi_{j,k}$. Tedy platí

$$\begin{aligned} f(x) \in W_0 &\iff f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m)\psi_{0,m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m)\psi(x-m) \\ &\iff f(2^j x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m)\psi(2^j x - m) = 2^{-j/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m)\psi_{j,k} \\ &\iff f(2^j x) \in W_j. \end{aligned}$$

Obdobnou úpravou a použitím substituce $s = m + k$ získáme následující ekvivalenci

$$\begin{aligned} f(x) \in W_0 &\iff f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m)\psi_{0,m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m)\psi(x-m) \\ &\iff f(x-k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z(m)\psi(x-k-m) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} z(s-k)\psi(x-s) \\ &\iff f(x-k) \in W_0. \end{aligned}$$

3. Prostory V_j a W_j jsou ortogonální, jestliže $\langle \varphi_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle = 0, \forall k, l \in \mathbb{Z}$. Tuto rovnost získáme úpravou skalárního součinu

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle &= \langle 2^{j/2}\varphi(2^j x - k), 2^{j/2}\psi(2^j x - l) \rangle = \\ &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j x - k) \overline{\psi(2^j x - l)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y - k) \overline{\psi(y - l)} = \langle \varphi_{0,k}, \psi_{0,l} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Při úpravě jsme použili substituci $y = 2^j x$. Skalární součin $\langle \varphi_{0,k}, \psi_{0,l} \rangle$ se rovná nule, protože prostory V_0 a W_0 jsou ortogonální, jak jsme dokázali v prvním tvrzení lemmatu.

Ukažme nyní, že $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Z vlastnosti monotonie MRA plyne, že $V_j \subset V_{j+1}$. Bázovou funkci $\varphi_{j,l}$, $l \in \mathbb{Z}$ prostoru V_j můžeme za použití

dilatační rovnice psát ve tvaru

$$\varphi_{j,l} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - l) = 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi(2^{\frac{j+1}{2}} x - 2l - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \varphi_{j+1, 2l+k}.$$

Obdobně můžeme bázovou funkci $\psi_{j,l}, l \in \mathbb{Z}$ prostoru W_j psát ve tvaru

$$\psi_{j,l} = 2^{j/2} \psi(2^j x - l) = 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi(2^{\frac{j+1}{2}} x - 2l - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi_{j+1, 2l+k},$$

kde jsme místo dilatační rovnice dosadili rovnici waveletovou. Takto můžeme vyjádřit každou funkci $\psi_{j,l}, l \in \mathbb{Z}$, tedy $W_j \subset V_{j+1}$. Pokud se nám podaří ukázat, že $V_{j+1} \subset V_j \oplus W_j$, bude tvrzení dokázáno.

Důkaz provedeme obdobně jako v prvním tvrzení lemmatu, kde jsme ukázali, že množina $\mathcal{B} = \{R_{2^k} u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2^k} v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je úplná ortonormální množina prostoru $l^2(\mathbb{Z})$. Skalární součiny můžeme vzhledem k ortonormalitě báze $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, j \in \mathbb{Z}$ upravit do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j,m} \rangle &= \langle \varphi_{j+1,k}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} u(l) \varphi_{j+1, 2m+l} \rangle = \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{u(l)} \langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j+1, 2m+l} \rangle = \overline{u(k-2m)}, \\ \langle \varphi_{j+1,k}, \psi_{j,m} \rangle &= \langle \varphi_{j+1,k}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} v(l) \varphi_{j+1, 2m+l} \rangle = \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{v(l)} \langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j+1, 2m+l} \rangle = \overline{v(k-2m)}. \end{aligned}$$

Potom pro každou funkci $f \in V_{j+1}$, $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \varphi_{j+1,k}$ platí

$$\langle f, \varphi_{j,m} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \langle \varphi_{j+1,k}, \varphi_{j,m} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \overline{u(k-2m)}, \quad (3.8)$$

$$\langle f, \psi_{j,m} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \langle \varphi_{j+1,k}, \psi_{j,m} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \overline{v(k-2m)}. \quad (3.9)$$

K důkazu tvrzení potřebujeme vyjádřit funkci $\varphi_{j+1,m}, m \in \mathbb{Z}$ v následujícím tvaru

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Dále označme funkci

$$g = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Z konstrukce této funkce plyne, že $g \in V_{j+1}$, tedy ji lze zapsat ve tvaru

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \varphi_{j+1,k}.$$

Pro tuto funkci platí

$$\begin{aligned} \langle g, \varphi_{j,r} \rangle &= \\ &= \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,r} \rangle - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,k} \rangle \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,r} \rangle - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \psi_{j,k} \rangle \langle \psi_{j,k}, \varphi_{j,r} \rangle \\ &= \overline{u(m-2r)} - \overline{u(m-2r)} - 0 = 0, \end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned} \langle g, \psi_{j,r} \rangle &= \\ &= \langle \varphi_{j+1,m}, \psi_{j,r} \rangle - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,k} \rangle \langle \varphi_{j,k}, \psi_{j,r} \rangle - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \psi_{j,k} \rangle \langle \psi_{j,k}, \psi_{j,r} \rangle \\ &= \overline{v(m-2r)} - 0 - \overline{v(m-2r)} = 0. \end{aligned}$$

Do vztahů (3.8), (3.9) dosadíme za funkci f funkci g a získáme

$$\langle g, \varphi_{j,r} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \overline{u(k-2m)} = \langle a, R_{2m}u \rangle = 0$$

$$\langle g, \psi_{j,r} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \overline{v(k-2m)} = \langle a, R_{2m}v \rangle = 0.$$

Vzhledem k tomu, že množina $\mathcal{B} = \{R_{2m}u\}_{m \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2m}v\}_{m \in \mathbb{Z}}$ je úplná ortonormální množina v prostoru $l^2(\mathbb{Z})$, musí být a nulový prvek tohoto prostoru, tedy funkce $g \equiv 0$. Funkci $\varphi_{1,k}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\varphi_{j+1,m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Tedy $V_{j+1} \subset V_j \oplus W_j$, celkem platí $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Z této vlastnosti pak plyne

$$\begin{aligned} V_j &= V_{j-1} \oplus W_{j-1} = V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} = \dots = V_{j-k} \oplus \left(\bigoplus_{l=j-k}^{j-1} W_l \right) = \\ &= \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(V_{j-n} \oplus \left(\bigoplus_{l=j-n}^{j-1} W_l \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigcap_{l=j-n}^{\infty} V_l \oplus \left(\bigoplus_{l=j-n}^{j-1} W_l \right) \right) = \\ &= \bigcap_{l=-\infty}^{\infty} V_l \oplus \left(\bigoplus_{l=-\infty}^{j-1} W_l \right) = \{0\} \oplus \left(\bigoplus_{l=-\infty}^{j-1} W_l \right) = \bigoplus_{l=-\infty}^{j-1} W_l, \end{aligned}$$

kde jsme využili vlastnost průniku MRA, tj. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

4. Čtvrté tvrzení věty plyne z vlastnosti

$$V_j = \bigoplus_{l=-\infty}^{j-1} W_l$$

a z úplnosti množiny $\{\psi_{l,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ prostoru W_l , $\forall l \in \mathbb{Z}$.

5. Buď $P_j(f)$ ortogonální projekce funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$ na prostor V_j , tedy platí

$$\langle f - P_j(f), h \rangle = 0, \quad \forall h \in V_j.$$

Posloupnost $\{\|f - P_j(f)\|\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je nerostoucí, protože platí

$$\begin{aligned} \|f - P_j(f)\|^2 &= \|f - P_{j+1}(f) + P_{j+1}(f) - P_j(f)\|^2 = \\ &= \|f - P_{j+1}(f)\|^2 + \langle f - P_{j+1}(f), P_{j+1}(f) - P_j(f) \rangle + \\ &+ \langle P_{j+1}(f) - P_j(f), f - P_{j+1}(f) \rangle + \|P_{j+1}(f) - P_j(f)\|^2 = \\ &= \|f - P_{j+1}(f)\|^2 + \|P_{j+1}(f) - P_j(f)\|^2 \geq \|f - P_{j+1}(f)\|^2. \end{aligned}$$

Skalární součin $\langle f - P_{j+1}(f), P_{j+1}(f) - P_j(f) \rangle$ je roven nule, neboť

$$P_{j+1}(f) - P_j(f) \in V_{j+1}.$$

Skalární součin

$$\langle P_{j+1}(f) - P_j(f), f - P_{j+1}(f) \rangle = \overline{\langle f - P_{j+1}(f), P_{j+1}(f) - P_j(f) \rangle},$$

a je tedy také nulový. Z uvedené nerovnosti plyne, že posloupnost $\{\|f - P_j(f)\|\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je nerostoucí. Z vlastnosti normy prostoru $L^2(\mathbb{R})$ víme, že je také zdola omezená a má tedy limitu. To znamená, že existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - P_j(f)\| = a, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Nulovost této limity dokážeme sporem. Buď limita a nenulová a vezměme funkci $g \in V_m$, $m \in \mathbb{Z}$. Protože posloupnost škálových podprostorů je neklesající, platí $g \in V_j$, $\forall j \geq m$. Pak $P_j(g) = g$, $\forall j \geq m$, a pro limitu tedy platí $\lim_{j \rightarrow \infty} \|g - P_j(g)\| = 0$. To je spor s předpokladem, že limita je nenulová. Sporem jsme dokázali, že

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - P_j(f)\| = 0, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Z vlastnosti ortogonální projekce víme, že $\langle f - P_j(f), h \rangle = 0$, $\forall h \in V_j$, tj. platí $f - P_j(f) \perp V_j$. Vzhledem k tomu, že prostor V_j můžeme zapsat ve tvaru

$$V_j = \bigoplus_{l=-\infty}^{j-1} W_l,$$

platí $f - P_j(f) \perp W_l$, $\forall l \leq j - 1$.

6. Volme $j \in \mathbb{Z}$ pevně a pomocí několika ekvivalencí dokážeme tvrzení. Platí

$$\begin{aligned} g \in V_j \wedge g \perp W_l, \quad \forall l \leq j - 1 &\iff g \in V_j \wedge g \in W_l^\perp, \quad \forall l \leq j - 1 \\ &\iff g \in V_j \wedge g \in V_l, \quad \forall l \leq j - 1 \\ &\iff g \in \bigcap_{l=-\infty}^j V_l = \bigcap_{l=-\infty}^{\infty} V_l = \{0\} \end{aligned}$$

Tedy funkce $g = 0$. V odvození jsme využili vlastnost, že prostor V_{j-1} je ortogonální doplněk prostoru W_{j-1} v prostoru V_j pro každé $j \in \mathbb{Z}$.

□

Poznámka 3.4. Prostory W_j , $j \in \mathbb{Z}$ se nazývají **prostory detailů**, protože zahrnují informace o detailech, které obsahuje prostor V_{j+1} oproti prostoru V_j , což plyne ze vztahu

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Na základě lemmatu 3.5. můžeme uvést následující větu o konstrukci waveletu a waveletového systému.

Věta 3.4. Mallatova věta Necht $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je MRA se škálovou funkcí φ a škálovou posloupností $(u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ takovou, že $u \in l^1(\mathbb{Z})$. Sestrojme vektor

$$v = (v(k))_{k \in \mathbb{Z}}, \quad v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)}$$

a funkci

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) \varphi(2x - k).$$

Pak ψ je wavelet příslušný MRA, tzn. množina funkcí $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální a úplná v prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Důkaz: viz [6], str.61.

3.4 Haarův wavelet

Funkce ψ definovaná předpisem

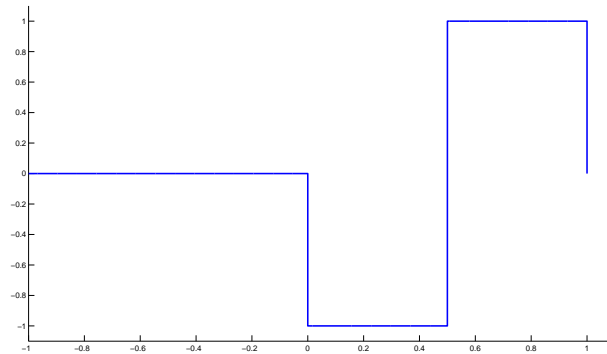
$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pro } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \text{ a pro } x \geq 1 \end{cases}$$

se nazývá **Haarův wavelet** a generuje Haarův waveletový systém $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Tato funkce je zobrazena na obrázku 3.1.

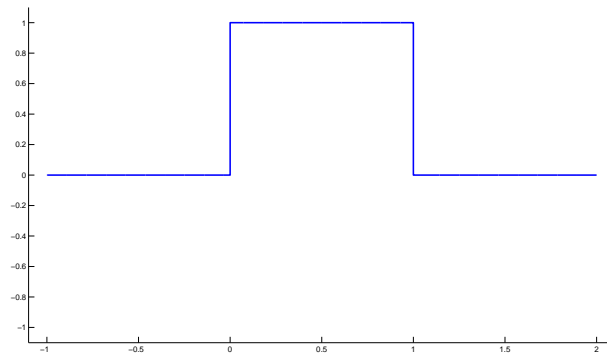
Škálová funkce pro Haarův wavelet má následující tvar

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \text{ a pro } x \geq 1 \end{cases}$$

a je vykreslena na obrázku 3.2.



Obrázek 3.1: Haarův wavelet



Obrázek 3.2: Škálová funkce příslušející Haarovu waveletu

Škálová funkce splňuje dilatační rovnici

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1)$$

se škálovým vektorem

$$u(0) = u(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ a } u(k) = 0 \text{ pro } k \neq 0, 1.$$

3.5 Mallatův algoritmus

Diskrétní waveletová transformace se provádí tzv. Mallatovým algoritmem. Tento algoritmu se opírá o vlastnost škálových prostorů a prostorů detailů

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j \in \mathbb{Z}.$$

Postupnou projekcí na škálové prostory lze získat waveletové koeficienty pouze na základě znalosti škálového a waveletového vektoru.

Mějme multirozklad MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ se škálovou funkcí φ a škálovou posloupností $(u(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$. Wavelet ψ sestrojme podle Mallatovy věty. Pro funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$ označme $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ waveletové koeficienty a $\{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ škálové koeficienty této funkce

$$x_j(k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, y_j(k) = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Definujme **operátor filtrace** (downsampling operator) $\mathcal{D} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ předpisem

$$\mathcal{D}(z)(n) = z(2n), n \in \mathbb{Z}.$$

Operátor rozšíření (upsampling operator) $\mathcal{U} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ definujme předpisem

$$\mathcal{U}(z)(n) = \begin{cases} z(n/2) & \text{pro } n \text{ sudé} \\ 0 & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

Operátor konjugované reflexe $l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ je dán předpisem

$$\tilde{z}(n) = \overline{z(-n)}.$$

1. fáze ANALÝZA

V první fázi Mallatova algoritmu získáme rekurentně waveletové koeficienty x_j a škálové koeficienty y_j , které dále použijeme pro výpočet waveletových koeficientů na nižší úrovni transformace x_{j-1} , $j = m - 1, \dots, m - l$, $m, l \in \mathbb{N}$.

Z pátého tvrzení lemmatu 3.5. víme, že pro $m \rightarrow \infty$ platí $\|f - P_m(f)\| \rightarrow 0$. Mějme tedy škálové koeficienty $\{y_m(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, kde $m \in \mathbb{Z}$ je dostatečně velké, aby byla zaručena požadovaná přesnost. Tyto koeficienty reprezentují projekci funkce

$f \in L^2(\mathbb{R})$ do škálového prostoru V_m . Vektory waveletových a škálových koeficientů $x_{m-1}, \dots, x_{m-l}, y_{m-l}$ pro námi zvolené $l \in \mathbb{N}$, které udává počet úrovní transformace, získáme rekurentními vztahy

$$x_j = \mathcal{D}(y_{j+1} * \tilde{v}), \quad y_j = \mathcal{D}(y_{j+1} * \tilde{u}), \quad j = m-1, \dots, m-l. \quad (3.10)$$

Waveletová transformace funkce f je tedy reprezentována množinou vektorů $\{x_{m-1}, \dots, x_{m-l}, y_{m-l}\}$. Rekurentní vztahy (3.10) lze odvodit následujícím způsobem

$$\begin{aligned} x_j(k) &= \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \langle f, 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \rangle = \left\langle f, 2^{j/2} \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} v(s) \varphi(2^{j+1} x - 2k - s) \right\rangle = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{v(m-2k)} \langle f, 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1} x - m) \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{v(m-2k)} y_{j+1}(m) = \\ &= \mathcal{D} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{v(m-k)} y_{j+1}(m) \right) (k) = \mathcal{D} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{v}(k-m) y_{j+1}(m) \right) (k) = \\ &= \mathcal{D}(\tilde{v} * y_{j+1})(k) = \mathcal{D}(y_{j+1} * \tilde{v})(k), \end{aligned}$$

použili jsme substituci $m = 2k + s$. Podobně platí

$$\begin{aligned} y_j(k) &= \langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \langle f, 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) \rangle = \left\langle f, 2^{j/2} \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(s) \varphi(2^{j+1} x - 2k - s) \right\rangle = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{u(m-2k)} \langle f, 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1} x - m) \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{u(m-2k)} y_{j+1}(m) = \\ &= \mathcal{D}(y_{j+1} * \tilde{u})(k). \end{aligned}$$

2. fáze SYNTÉZA

V druhé fázi Mallatova algoritmu zpětně zrekonstruujeme škálové koeficienty reprezentující projekci funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$ do prostoru $V_m, m \in \mathbb{N}$.

Mějme dánu množinu vektorů $\{x_{m-1}, \dots, x_{m-l}, y_{m-l}\} \subset l^2(\mathbb{Z})$. Vektor y_m sestrojíme postupným užitím vztahu

$$y_{j+1} = (\mathcal{U}(y_j)) * u + (\mathcal{U}(x_j)) * v, \quad j = m-l, \dots, m-1.$$

Tento vztah získáme pomocí následující implikace

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \Rightarrow \varphi_{j+1,m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_{j+1,m}, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Nejprve si vyjádříme jednotlivé skalární součiny, při jejich úpravě použijeme dilatační a waveletovou rovnici. Tedy lze psát

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,k} \rangle &= \langle \varphi_{j+1,m}, 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(s) \varphi(2^{j+1}x - 2k - s) \rangle = \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \overline{u(s)} \langle \varphi_{j+1,m}, \varphi_{j+1,2k+s} \rangle = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \overline{u(s)} \delta_{m,2k+s} = \overline{u(m-2k)} \\ \langle \varphi_{j+1,m}, \psi_{j,k} \rangle &= \langle \varphi_{j+1,m}, 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} v(i) \varphi(2^{j+1}x - 2k - i) \rangle = \overline{v(m-2k)}. \end{aligned}$$

Pro škálový koeficient $y_{j+1}(m)$ potom platí

$$\begin{aligned} y_{j+1}(m) &= \langle f, \varphi_{j+1,m} \rangle = \langle f, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{u(m-2k)} \varphi_{j,k} \rangle + \langle f, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{v(m-2k)} \psi_{j,k} \rangle = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(m-2k) y_j(k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(m-2k) x_j(k) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(m-2k) \mathcal{U}(y_j)(2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(m-2k) \mathcal{U}(x_j)(2k) = \\ &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(m-s) \mathcal{U}(y_j)(s) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(m-s) \mathcal{U}(x_j)(s) = \\ &= (u * \mathcal{U}(y_j))(m) + (v * \mathcal{U}(x_j))(m), \end{aligned}$$

tedy

$$y_{j+1} = (\mathcal{U}(y_j)) * u + (\mathcal{U}(x_j)) * v.$$

V následující kapitole se k Mallatovu algoritmu vrátíme a uvedeme jej v maticovém tvaru pro wavelety s kompaktním nosičem.

4 Wavelety s kompaktním nosičem

Cílem této kapitoly je popsat podmínky, které zaručí, že škálová funkce a wavelet příslušný multirozkladu mají kompaktní nosiče. Wavelety s kompaktním nosičem mají zásadní význam pro numerické výpočty, protože příslušný škálový vektor obsahuje pouze konečný počet nenulových složek, a tím je zaručena vysoká rychlost transformačních algoritmů.

Následující věta udává podmínky, za kterých má škálová funkce φ kompaktní nosič.

Věta 4.1. *Nechť $m_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je trigonometrický polynom tvaru*

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{D-1} u(k)e^{-ik\xi}, \quad D \in \mathbb{N}.$$

Nechť $m_0(0) = 1, |m_0(\xi)| \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}$ a nechť $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \in L^2(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}$.

Pak funkce $\varphi = (\hat{\varphi})^\vee$ má kompaktní nosič a $\text{supp } \varphi \subseteq \langle 0, D-1 \rangle$.

Důkaz: viz. [6], str. 86.

Následující věta je obdobou věty 3.3 pro konečný počet nenulových složek škálového vektoru. Zformulování této věty je v [6] str. 88 ponecháno jako cvičení. Nalezené podmínky na škálový vektor u , které zaručují, že škálový vektor generuje škálovou funkci ortogonálního multirozkladu, jsou ověřeny v důkazu věty.

Věta 4.2. Konstrukce MRA pomocí škálového vektoru u

Nechť vektor $u = (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ má pouze D nenulových složek $u(0), u(1), \dots, u(D-1)$ a nechť splňuje následující podmínky.

1. $\sum_{k=0}^{D-1} u(k) = \sqrt{2}.$
2. $\sum_{k=0}^{D-1} u(k)\overline{u(k-2l)} = \delta_{l,0}, \quad \forall l \in \mathbb{Z}.$

$$3. \inf_{|\xi| \leq \pi/2} |m_0(\xi)| > 0, \text{ kde } m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{D-1} u(k) e^{-ik\xi}.$$

Pak součín

$$\prod_{j=1}^{+\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

konverguje na každé ohraničené množině stejnoměrně k funkci $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$. Sestrojíme funkci $\varphi = (\hat{\varphi})^\vee$. Pak tato funkce splňuje škálovou rovnici s vektorem u tzn. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{D-1} u(k) \varphi_{1,k}(x)$$

a množina funkcí $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Pro každé $j \in \mathbb{Z}$ sestrojíme prostor $V_j = \overline{\mathcal{L}(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}}$. Pak posloupnost prostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ tvoří MRA se škálovou funkcí φ a škálovým vektorem u . Funkce $\hat{\varphi}$ je spojitá, ohraničená, $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ a $\hat{\varphi}(0) = 1$. Přidružený wavelet $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ splňuje waveletovou rovnici

$$\psi(x) = \sum_{k=2-D}^1 v(k) \varphi_{1,k}(x), \text{ kde } v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)}.$$

Škálová funkce φ a přidružený wavelet ψ mají kompaktní nosiče

$$\text{supp } \varphi \subseteq \langle 0, D-1 \rangle \text{ a } \text{supp } \psi \subseteq \left\langle -\frac{D}{2} + 1, \frac{D}{2} \right\rangle.$$

Důkaz: Zformulování a důkaz této věty je ponecháno v [6], str. 88 jako cvičení. V důkazu vyjdeme z vět 3.3 a 4.1. Nejprve ověříme předpoklady věty 3.3.

1. Podmínka konvergence součtu

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^\varepsilon |u(k)| < +\infty \text{ pro nějaké } \varepsilon > 0$$

je pro konečný počet sčítanců splněna.

2. V druhé podmínce pouze nahradíme nekonečný součet konečným.

3. Podmínku, že posloupnost $\{R_{2l}u\}_{l \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v prostoru $l^2(\mathbb{Z})$, můžeme napsat ve tvaru

$$\langle R_{2r}u, R_{2s}u \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j-2r) \overline{u(j-2s)} = \delta_{r,s}.$$

Dále provedeme substituci $k = j - 2s$ a dostaneme

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} u(j-2r) \overline{u(j-2s)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k+2s-2r) \overline{u(k)} = \delta_{r,s}.$$

Položíme-li $r - s = l$, pak platí

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k-2l) \overline{u(k)} = \delta_{r,r-l} = \delta_{l,0}.$$

Protože vektor u má pouze D nenulových složek je podmínka ortonormality posloupnosti $\{R_{2l}u\}_{l \in \mathbb{Z}}$ v $l^2(\mathbb{Z})$ ekvivalentní podmínce

$$\sum_{k=0}^{D-1} u(k-2l) \overline{u(k)} = \delta_{l,0}.$$

4. Ve čtvrté podmínce nahradíme pouze nekonečný součet konečným.

Tímto je dokázána první část tvrzení. Spojitost a ohraničenost funkce $\hat{\varphi}$, stejně jako její vlastnost $\hat{\varphi}(0) = 1$ plyne rovněž z věty 3.3, jak je uvedeno v jejím důkazu.

Věta 4.1 nám dává informaci o nosiči škálové funkce φ . Její předpoklady jsou splněny, protože

$$m_0(0) = 1 \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) = \sqrt{2}.$$

Odvození této ekvivalence a rovněž platnost $|m_0(\xi)| \leq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ jsou uvedeny v důkazu věty 3.3. Škálová funkce má tedy kompaktní nosič $\text{supp } \varphi \subseteq \langle 0, D-1 \rangle$.

Z tvaru waveletové rovnice

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)} \varphi_{1,k} = \sum_{k=2-D}^1 (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)} \varphi_{1,k}(x)$$

plyne

$$\begin{aligned} \text{supp } \psi &= \bigcup_{k=2-D}^1 \text{supp } \varphi_{1,k} \subseteq \bigcup_{k=2-D}^1 \left\langle \frac{k}{2}, \frac{D-1+k}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{2-D}{2}, \frac{D}{2} \right\rangle = \\ &= \left\langle -\frac{D}{2} + 1, \frac{D}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Vlastnost škálové funkce $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ a waveletu $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ dokážeme pomocí Hölderovy nerovnosti ve větě 4.3. S odvoláním na tuto větu můžeme důkaz uzavřít. \square

Pomocí konkrétního tvaru Hölderovy nerovnosti ukážeme, že každá funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$ s kompaktním nosičem leží v prostoru $L^1(\mathbb{R})$.

Lemma 4.1. Hölderova nerovnost

Nechť $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, pak $fg \in L^1(\mathbb{R})$ a platí

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| dx \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Důkaz: viz. [4], str. 65.

Věta 4.3. *Nechť funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$ má kompaktní nosič, pak $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

Důkaz: Definujme funkci $g(x)$ předpisem

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \text{supp } f \\ 0 & \text{pro } x \notin \text{supp } f. \end{cases}$$

Pro tuto funkci platí

$$\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} g^2 dx = \int_{\text{supp } f} 1 dx = \text{meas}(\text{supp } f) < +\infty.$$

Dosadíme do Hölderovy nerovnosti a dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}} |f| dx = \int_{\text{supp } f} |f| \cdot 1 = \int_{\mathbb{R}} |fg| dx \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < +\infty.$$

\square

V následující části se budeme věnovat momentům waveletů, které nám zaručí jejich lepší aproximační vlastnosti. Nejvyšší polynomiální přesnost mají Daubechies wavelety, které zkonstruujeme na základě odvozených podmínek v další kapitole.

Definice 4.1. Nechť $f \in L^2(\mathbb{R})$ je taková funkce, že pro nějaké $l \in \mathbb{N}$ resp. $l = 0$ je $x^l f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Definujme **l-tý moment funkce** vztahem

$$M_l(f) = \int_{\mathbb{R}} x^l f(x) dx.$$

Věta 4.4. Nechť škálová funkce $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ má kompaktní nosič se škálovým vektorem $\{u_k\}_{k=0}^{D-1}$, $D \geq 2$, $\hat{\varphi}(0) = 1$ a ψ je přidružený wavelet. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. Waveletové momenty $M_q(\psi) \equiv \int_{\mathbb{R}} x^q \psi(x) dx$ jsou pro $q = 0, \dots, L-1$ nulové.
2. Pro $k = 0, \dots, L-1$ je $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n u(n) n^k = 0$, kde pro $k = n = 0$ položíme $n^k = 1$.

Důkaz: viz. [6], str. 100.

Lemma 4.2. Nechť škálová funkce $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ má kompaktní nosič, $\hat{\varphi}(0) = 1$ a přidružený wavelet ψ má prvních L momentů nulových.

Pak pro každé $k = 0, \dots, L-1$ existují koeficienty $\{q_{k,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tak, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} q_{k,n} \varphi(x+n) = x^k.$$

Důkaz: viz. [6], str. 101.

Poznámka 4.1. Z předchozího lemmatu plyne, že jsme schopni pomocí waveletů přesně aproximovat polynomy až do řádu, který je roven počtu nulových momentů waveletu. Více nulových momentů nám tedy zaručuje lepší aproximační vlastnosti. S větším počtem nulových momentů získáváme také větší hladkost waveletu a škálové funkce a lepší odhad chyby aproximace. Odvozením těchto vlastností se zde nebudeme z důvodu rozsahu práce věnovat.

4.1 Daubechies wavelety

Daubechies wavelety patří mezi nepoužívanější wavelety. Jejich konstrukce je uvedena např. v [6], kapitola 6.2 a jsou pro ni zapotřebí některé poznatky z teorie polynomů. Daubechies wavelety jsou určeny svými škálovými parametry a nemají, až na jednu výjimku, explicitní předpis. Tyto wavelety vzniknou konkrétní volbou polynomu v obecném postupu konstrukce MRA pomocí škálového filtru $m_0(\xi)$, který je popsán v [6], str. 87 a je jistou analogií věty 4.2. Nejjednodušším Daubechies waveletem je wavelet D2, který se označuje jako Haarův wavelet. Tento wavelet je zobrazen na obrázku 3.1.

Daubechies wavelety mají nejvyšší polynomiální přesnost (uvedeno např. v [6], str. 105), tj. maximální počet nulových momentů. Pokusme se na základě této informace sestavit wavelety D2N pomocí věty 4.2.

Nechť vektor $u = (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ má pouze D nenulových složek $u(0), \dots, u(D-1)$ a nechť D je sudé číslo $D = 2N, N \in \mathbb{N}$. Uvažujme v této konstrukci pouze reálné složky vektoru u . Aby škálový vektor generoval MRA musí splňovat na základě věty 4.2 následující podmínky

1. $\sum_{k=0}^{D-1} u(k) = \sqrt{2}$.
2. $\sum_{k=0}^{D-1} u(k)u(k-2l) = \delta_{l,0}, \forall l \in \mathbb{Z}$.
3. $\inf_{|\xi| \leq \pi/2} |m_0(\xi)| > 0$, kde $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{D-1} u(k)e^{-ik\xi}$.

K těmto předpokladům přidáme podmínku na N nulových momentů přidruženého waveletu

4. $\sum_{k=0}^{D-1} (-1)^k u(k)k^p = 0, p = 0, \dots, N-1$, kde pro $k = p = 0$ položíme $k^p = 0^0 = 1$.

Vyřešením soustavy rovnic dané podmínkami 1. – 4. získáme škálový vektor, který určuje wavelet s kompaktním nosičem a nejvyšší polynomiální přesností. Zkonstruuje nyní škálový vektor pro konkrétní volbu $N = 2$. Výše uvedené podmínky přejdou do tvaru

$$u(0) + u(1) + u(2) + u(3) = \sqrt{2} \quad (4.1)$$

$$u^2(0) + u^2(1) + u^2(2) + u^2(3) = 1 \quad (4.2)$$

$$u(2)u(0) + u(3)u(1) = 0 \quad (4.3)$$

$$u(0) - u(1) + u(2) - u(3) = 0 \quad (4.4)$$

$$-u(1) + 2u(2) - 3u(3) = 0 \quad (4.5)$$

$$\inf_{|\xi| \leq \pi/2} |m_0(\xi)| > 0 \quad (4.6)$$

Řešením rovnic (4.1) - (4.5) získáme vektory tvaru

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3} \right)^\top \quad (4.7)$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(1 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \right)^\top. \quad (4.8)$$

Wavelet generovaný vektorem u_1 se nazývá **Daubechies wavelet D4**. Vektor u_2 určuje wavelet, který je, jak uvidíme, s waveletem D4 úzce spjat.

Přistoupíme k ověření podmínky (4.6), pro zjednodušení zápisu položíme $a_k = u(k)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Tedy lze psát

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 &= m_0(\xi) \overline{m_0(\xi)} = \\ &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 e^{-i\xi} + a_2 e^{-2i\xi} + a_3 e^{-3i\xi}) (a_0 + a_1 e^{i\xi} + a_2 e^{2i\xi} + a_3 e^{3i\xi}) = \\ &= \frac{1}{2} (a_0^2 + a_0 a_1 e^{i\xi} + a_0 a_2 e^{3i\xi} + a_0 a_3 e^{3i\xi} + a_1 a_0 e^{-i\xi} + a_1^2 + a_1 a_2 e^{i\xi} + a_1 a_3 e^{2i\xi} + \\ &+ a_2 a_0 e^{-2i\xi} + a_2 a_1 e^{-i\xi} + a_2^2 + a_2 a_3 e^{i\xi} + a_3 a_0 e^{-3i\xi} + a_3 a_1 e^{-2i\xi} + a_3 a_2 e^{-i\xi} + a_3^2) = \\ &= \frac{1}{2} [(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (e^{i\xi} + e^{-i\xi})(a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3) + \\ &+ (e^{3i\xi} + e^{-3i\xi})(a_0 a_2 + a_1 a_3) + (e^{3i\xi} + e^{-3i\xi})(a_0 a_3)]. \end{aligned}$$

Dále využitím vztahů (4.2), (4.3) dostáváme

$$\begin{aligned}
|m_0(\xi)|^2 &= \frac{1}{2} [1 + (e^{i\xi} + e^{-i\xi})(a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3) + (e^{3i\xi} + e^{-3i\xi})(a_0a_3)] = \\
&= \frac{1}{2} (1 + 2 \cos(\xi)(a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3) + 2 \cos(3\xi)(a_0a_3)) = \\
&= \frac{1}{2} (1 + 2 \cos(\xi)(a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3) + 2a_0a_3(4 \cos^3(\xi) - 3 \cos(\xi))) = \\
&= \frac{1}{2} (1 + 2 \cos(\xi) \frac{3}{4} - 2 \cos^3(\xi) \frac{1}{4}) \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} 0 - \frac{1}{2} 1 \right) > 0.
\end{aligned}$$

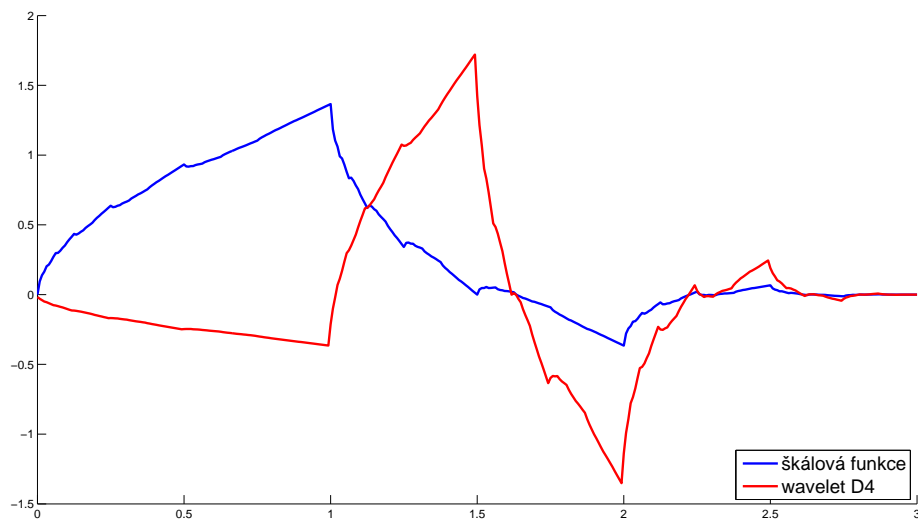
V předchozí úpravě jsme použili Eulerův vzorec pro funkci kosinus, vzorec pro kosinus trojnásobného úhlu, dále jsme dosadili konkrétní hodnoty a provedli jsme odhad pro funkce $\cos(\xi)$, $\cos^3(\xi)$ pro $\xi \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Tento odhad platí pro vektor u_1 i u_2 . Z odvození tohoto odhadu je patrné, že koeficienty a_0, a_3 a a_1, a_2 lze zaměnit, a právě touto záměnou získáme z vektoru u_1 vektor u_2 . Tedy odhad stačí provést pouze pro jeden z nich.

Na obrázku 4.1 je vykreslen Daubechies wavelet D4 a škálová funkce odpovídající vektoru (4.7), ze které je wavelet D4 odvozen. Funkční hodnoty těchto funkcí jsou vypočítány algoritmem, který je uveden v [6], str. 114. Tento algoritmus, ani jeho odvození nebudeme z důvodu rozsahu práce uvádět. Graf škálové funkce odpovídající škálovému vektoru (4.8) a příslušného waveletu je zobrazen na obrázku 4.2. Souvislost tohoto waveletu a škálové funkce s waveletem D4 a s příslušnou škálovou funkcí lze pozorovat z afinity jejich grafů.

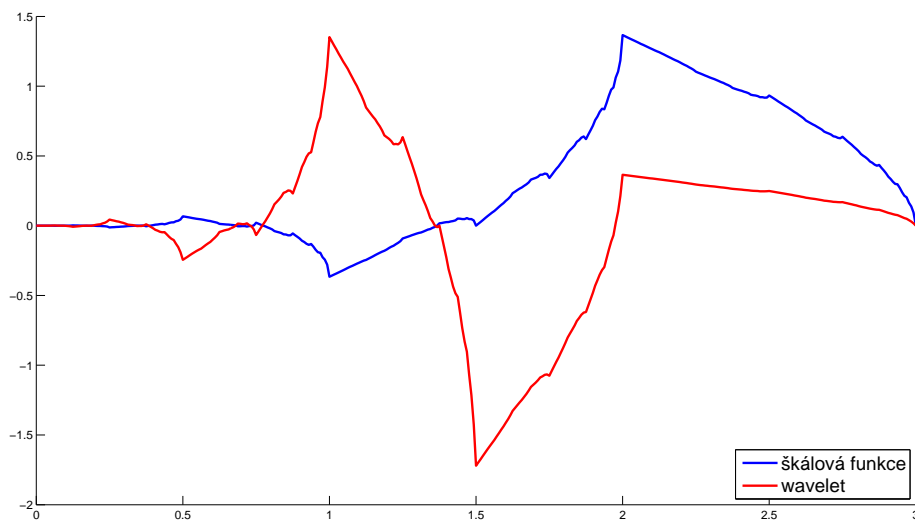
Obdobným způsobem lze zkonstruovat i další Daubechies wavelety $D2N$, $N \in \mathbb{N}$. Nutno podotknout, že existuje mnoho jiných typů waveletů, kterým se v této práci nevěnujeme.

4.2 Mallatův algoritmus

Nyní si uvedeme tvar Mallatova algoritmu pro škálovou funkci s kompaktním nosičem. Využijeme vlastnosti, že škálový a waveletový vektor mají pouze konečný počet nenulových složek. Z důvodu zjednodušení vztahů budeme v následujícím textu uvažovat pouze reálné hodnoty škálového vektoru u .



Obrázek 4.1: wavelet D4 a jeho škálová funkce



Obrázek 4.2: wavelet a škálová funkce odpovídající vektoru (4.8)

Mějme multirozklad MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ se škálovou funkcí $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ s kompaktním nosičem a se škálovým vektorem $\{u(k)\}_{k=0}^{D-1}$, který má pouze $D \geq 2$ nenulových složek. Nechť $D = 2N$, $N \in \mathbb{N}$ je sudé číslo a nechť wavelet ψ je dán

waveletovou rovnicí

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \varphi(2x - k), \text{ kde } b_k = (-1)^k u(D - 1 - k), k = 0, \dots, D - 1.$$

Tento wavelet ψ obdržíme translací přidruženého waveletu ψ o celé číslo $N - 1$, tj.

$$\begin{aligned} \psi(x - N + 1) &= \sqrt{2} \sum_{j=D-2}^1 (-1)^j u(1 - j) \varphi(2x - 2N + 2 - j) = \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} (-1)^k u(D - 1 - k) \varphi(2x - k) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \varphi(2x - k), \end{aligned}$$

během odvození jsme použili substituci $k = D - 1 - k$. Touto volbou waveletových parametrů dojde k zjednodušení formulí.

Škálou rovnici přepíšeme do tvaru

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \varphi(2x - k), \text{ kde } a_k = u(k), k = 0, \dots, D - 1.$$

Pro nosiče škálové funkce φ a waveletu ψ platí

$$\text{supp } \varphi = \text{supp } \psi = \langle 0, D - 1 \rangle.$$

Nechť funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$. Označme $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ waveletové koeficienty a $\{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ škálové koeficienty této funkce. Pro tyto koeficienty jsme v kapitole 3.5 odvodili vztahy, které lze za uvedených předpokladů upravit do tvaru

$$y_{j-1}(l) = \mathcal{D}(y_j * \tilde{u})(l) = \sum_{k=2l}^{D-1+2l} a_{k-2l} y_j(k) = \sum_{m=0}^{D-1} a_m y_j(m + 2l) \quad (4.9)$$

$$x_{j-1}(l) = \sum_{k=2l}^{D-1+2l} b_{k-2l} y_j(k) = \sum_{m=0}^{D-1} b_m y_j(m + 2l), \quad (4.10)$$

v úpravě jsme použili substituci $m = k - 2l$. Pro druhou fázi waveletové transformace opět na základě výsledků kapitoly 3.5 platí

$$y_j(l) = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_{l-2k} y_{j-1}(k) + b_{l-2k} x_{j-1}(k), \quad k_1 = \frac{l - D + 1}{2}, k_2 = \frac{l}{2}. \quad (4.11)$$

V případě, že $k1 \vee k2 \notin \mathbb{Z}$, budeme uvažovat pouze celou část tohoto čísla. Tento závěr plyne z použití operátoru upsampling v odvození vztahu v kapitole 3.5.

1. fáze ANALÝZA

V první fázi waveletové transformace pracujeme se škálovými koeficienty $\{y_m(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, které získáme projekcí funkce f do prostoru V_m

$$P_m(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_m(k) \varphi_{m,k}. \quad (4.12)$$

Škálových koeficientů je v tomto případě nekonečně mnoho, v praxi však počítáme pouze s konečným počtem. Uvažujme tedy pouze n koeficientů

$$y_m(k), k = 0, \dots, n-1, n = 2^m n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Označme vektory škálových a waveletových koeficientů

$$y_j = (y_j(0), \dots, y_j(n_j - 1))^T, x_j = (x_j(0), \dots, x_j(n_j - 1))^T, n_j = 2^j n_0.$$

Počet složek těchto vektorů plyne z použití operátoru downsampling ve vztahu (3.10).

Pomocí vztahů (4.9), (4.10) můžeme zapsat Mallatův algoritmus v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} y_{j-1} \\ x_{j-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_j y_j, j = m, \dots, m-l+1, \quad (4.13)$$

kde l je zvolené přirozené číslo takové, že $D < 2^{m-l+1} n_0$. Matice $\mathbf{Q}_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$ se skládá z bloků

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j \\ \mathbf{B}_j \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{(n_j/2) \times n_j}$

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{D-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{D-3} & a_{D-2} & a_{D-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \dots & & & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Matice \mathbf{B}_j je vytvořena analogicky z koeficientů b_k

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{D-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{D-3} & b_{D-2} & b_{D-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \dots & & & & \\ b_4 & b_5 & b_6 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Vztahy (4.9), (4.10) platí pro nekonečně mnoho škálových koeficientů $\{y_m(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, které získáme projekcí (4.12). Matice $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j$ jsou však konstruovány pro konečný počet škálových koeficientů, což se projeví v levém dolním rohu matic $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j$, kde maticový zápis Mallatova algoritmu přesně neodpovídá vztahům (4.9), (4.10). Tvar matic $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j$ je dán periodickým prodloužením vektoru y_m . Více informací o periodických waveletech a transformaci periodických funkcí lze nalézt např. v [6].

Nechť $l \in \mathbb{N}$, $2^{m-l+1}n_0 > D$. Opakovaným použitím jednoho kroku Mallatova algoritmu (4.13) pro $j = m, \dots, m-l+1$ získáme waveletové koeficienty $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_{m-l}$ a škálový koeficient y_{m-l} . Počet použití vztahu (4.13) se nazývá hloubka waveletové transformace.

2. fáze SYNTÉZA

V druhé fázi waveletové transformace sestavíme vektor y_m z množiny vektorů $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_{m-l}, y_{m-l}$. Využijeme ortogonalitu matice \mathbf{Q}_j , která plyne z ortonormality škálové funkce a jejích translací, jak záhy odvodíme. Rekonstrukční vztah získáme vynásobením (4.13) maticí $\mathbf{Q}_j^{-1} = \mathbf{Q}_j^\top$

$$y_j = \mathbf{Q}_j^\top \begin{bmatrix} y_{j-1} \\ x_{j-1} \end{bmatrix}, \quad j = m-l+1, \dots, m. \quad (4.14)$$

Z předpokladu ortonormality systému funkcí $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ plyne

$$\langle \varphi(x), \varphi(x-l) \rangle = \delta_{l,0},$$

po dosazení dilatační rovnice do tohoto vztahu platí

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(x), \varphi(x-l) \rangle &= \langle \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \varphi(2x-k), \sqrt{2} \sum_{j=0}^{D-1} a_j \varphi(2x-2l-j) \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{D-1} a_k \sum_{j=0}^{D-1} a_j 2 \langle \varphi(2x-k), \varphi(2x-2l-j) \rangle = \\
&= \sum_{k=0}^{D-1} a_k \sum_{j=0}^{D-1} a_j \langle \varphi(y), \varphi(y-2l-j+k) \rangle = \\
&= \sum_{k=0}^{D-1} a_k \sum_{j=0}^{D-1} a_j \delta_{-2l-j+k,0} = \sum_{k=0}^{D-1} a_k a_{k-2l} = \delta_{l,0}.
\end{aligned}$$

Během úpravy jsme použili substituci $y = 2x - k$.

Tento výsledek použijeme k důkazu ortogonality matice \mathbf{Q}_j

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j \\ \mathbf{B}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{D-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{D-3} & a_{D-2} & a_{D-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \dots & & & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{D-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{D-3} & b_{D-2} & b_{D-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \dots & & & & \\ b_4 & b_5 & b_6 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{bmatrix}$$

Matice \mathbf{Q}_j je ortogonální $\Leftrightarrow \mathbf{Q}_j \mathbf{Q}_j^\top = \mathbf{I} \Leftrightarrow (\mathbf{Q}_j \mathbf{Q}_j^\top)_{s,t} = \sum_{r=1}^{n_j} q_{s,r} q_{t,r} = \delta_{s,t}$. Index j zvolíme pevně a pokud nebude hrozit nedorozumnění, nebudeme jej v zápisu uvádět. Označme $A_{s,t}$, resp. $B_{s,t}$ prvek matice \mathbf{A} , resp. \mathbf{B} .

Pro $s, t \leq n_j/2$ platí $(\mathbf{Q} \mathbf{Q}^\top)_{s,t} = \sum_{r=1}^{n_j} A_{s,r} A_{t,r}$. Z tvaru matice plyne, že prvek $(\mathbf{Q} \mathbf{Q}^\top)_{s,t}$ získáme pouhým násobením jednotlivých řádků matice \mathbf{A} mezi sebou, tedy platí

$$\sum_{r=1}^{n_j} A_{s,r} A_{t,r} = \sum_{k=0}^{D-1} a_k a_{k-2(t-s)} = \delta_{t-s,0} = \delta_{s,t},$$

Obdobně můžeme pro $s, t > n_j/2$ psát

$$\begin{aligned} (QQ^\top)_{s,t} &= \sum_{r=1}^{n_j} B_{s,r} B_{t,r} = \sum_{k=0}^{D-1} b_k b_{k-2(t-s)} = \\ &= \sum_{k=0}^{D-1} (-1)^k a_{D-1-k} (-1)^{k-2(t-s)} a_{D-1-k-2(s-t)} = \sum_{j=0}^{D-1} a_j a_{j-2(s-t)} = \delta_{s,t}, \end{aligned}$$

použitá substituce je tvaru $j = D - 1 - k$.

Pro $s \leq n_j/2, t > n_j/2$, resp. pro $s > n_j/2, t \leq n_j/2$ platí

$$(QQ^\top)_{s,t} = \sum_{r=1}^{n_j} A_{s,r} B_{t,r}, \text{ resp. } (QQ^\top)_{s,t} = \sum_{r=1}^{n_j} B_{s,r} A_{t,r}.$$

V obou případech získáme prvek $(QQ^\top)_{s,t}$ násobením řádků matice \mathbf{A} s řádky matice \mathbf{B} , tj.

$$\begin{aligned} (QQ^\top)_{s,t} &= \sum_{r=1}^{n_j} A_{s,r} B_{t,r} = \sum_{k=0}^{D-1} a_k b_{k-2l} = \sum_{k=0}^{D-1} a_k (-1)^{k-2l} a_{D-1-k+2l} = \\ &= \sum_{k=0}^{D-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l}. \end{aligned}$$

Pro $l \geq 0$ platí

$$\sum_{k=0}^{D-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} = \sum_{k=2l}^{D-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l},$$

vynechané členy součtu jsou nulové, protože $D - 1 - k + 2l > D - 1$ pro dané l , a tedy $a_{D-1-k+2l} = 0$. Rozdělením součtu a použitím substituce $j = D - 1 - k + 2l$ získáme

$$\begin{aligned} \sum_{k=2l}^{D-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} &= \sum_{k=2l}^{D/2+l-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} + \sum_{k=D/2+l}^{D-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} = \\ &= \sum_{k=2l}^{D/2+l-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} - \sum_{j=2l}^{D/2+l-1} (-1)^j a_{D-1-j+2l} a_j = 0. \end{aligned}$$

Obdobně pro $l \leq 0$ platí

$$\sum_{k=0}^{D-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} = \sum_{k=0}^{D-1+2l} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l}.$$

Použitím stejné substituce jako v předchozím případě můžeme provést následující úpravy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{D-1+2l} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} &= \\ &= \sum_{k=0}^{D/2+l-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} + \sum_{k=D/2+l}^{D-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} = \\ &= \sum_{k=0}^{D/2+l-1} (-1)^k a_k a_{D-1-k+2l} - \sum_{j=2l}^{D/2+l-1} (-1)^j a_{D-1-j+2l} a_j = 0. \end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že matice \mathbf{Q}_j je ortogonální, a tedy rekurentní vztah (4.13) je korektní.

4.3 Rychlá waveletová transformace

Pro výpočet Fourierovy transformace existuje rychlý algoritmus FFT (Fast Fourier Transform), jehož výpočtová složitost dosahuje řádu $O(n \log_2(n))$. Pro waveletovou transformaci existuje ještě rychlejší algoritmus se složitostí výpočtu $O(n)$, který odvodíme v této kapitole.

První fáze waveletové transformace vektoru koeficientů $y_m(k)$, $k = 0, \dots, n-1$, $n = 2^m n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, lze Mallatovým algoritmem zapsat ve tvaru (4.13), tj.

$$\begin{bmatrix} y_{j-1} \\ x_{j-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_j y_j, \quad j = m, \dots, m-l+1,$$

kde l je zvolené přirozené číslo takové, aby platilo $D < 2^{l+1} n_0$, $y_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $\mathbf{Q}_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$, $y_{j-1}, x_{j-1} \in \mathbb{R}^{n_j/2}$. Pro $j = m$ tedy platí

$$\begin{bmatrix} y_{m-1} \\ x_{m-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_m y_m.$$

Obdobně lze waveletovou transformaci pro $j = m - 1$ zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} y_{m-2} \\ x_{m-2} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{m-1} y_{m-1}.$$

Waveletovou transformaci vektoru y_m s hloubkou $l = 2$ můžeme maticově vyjádřit vztahem

$$\begin{bmatrix} y_{m-2} \\ x_{m-2} \\ x_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{m-1} \\ x_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_m y_m.$$

Takto lze pokračovat pro další úrovně waveletové transformace.

Označme \mathbf{x} vektor sestavený z vektorů $y_{m-l}, x_{m-l}, x_{m-l+1}, \dots, x_{m-1}$, vektor y_m označme nyní jako \mathbf{y} , tj.

$$\mathbf{x}^\top = [y_{m-l}^\top, x_{m-l}^\top, x_{m-l+1}^\top, \dots, x_{m-1}^\top], \quad \mathbf{y} = y_m, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

a definujme matici \mathbf{W}^l , typu $n \times n$ ve tvaru

$$\mathbf{W}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{m-l+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{m-l+2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l-2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-j} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_m,$$

kde matice \mathbf{Q}_j jsou typu $n_j \times n_j$, $n_j = 2^j n_0$, matice \mathbf{I}_{m-j} je jednotková matice typu $n_{m-j} \times n_{m-j}$ a matice $\mathbf{0}$ jsou nulové matice odpovídajícího typu.

Potom lze waveletovou transformaci psát ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^l \mathbf{y},$$

který nazýváme **rychlou waveletovou transformací**.

Inverzní rychlou waveletovou transformaci lze maticově zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y} = (\mathbf{W}^l)^\top \mathbf{x}.$$

Mallatův algoritmus je v této kapitole odvozen pro waveletovou transformaci vektoru hodnot ortogonální projekce funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$, tj. vektoru

$$(y_m(0), y_m(1), \dots, y_m(n-1))^\top, \quad n = 2^m n_0, \quad n_0, m \in \mathbb{N}$$

pomocí waveletů s kompaktním nosičem. Tento algoritmus lze použít pro waveletovou transformaci libovolného vektoru z prostoru $l^2(\mathbb{Z}_N)$, a také pro transformaci matice, kterou provádíme jako transformaci sloupcových a následně řádkových vektorů. V kapitole 2.3. je popsána waveletová transformace vektoru a matice pomocí maticového násobení. Porovnáním matice transformace odvozené v kapitole 2.3. a W^l , $l \in \mathbb{N}$ zjistíme, že mají stejnou strukturu.

Waveletová transformace má široké pole použití, jednou z možných oblastí aplikací je komprese dat, na kterou jsem se ve své práci zaměřila. Pro waveletovou transformaci a následnou kompresi vektoru a obrazu jsem v MATLABu sestavila programy, které jsou uvedeny v následující kapitole. Jak již bylo řečeno, algoritmus rychlé waveletové transformace a algoritmus pro transformaci vektoru v kapitole 2.3. jsou shodné, tedy lze použít uvedené programy i pro waveletovou transformaci funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$. Zde ovšem narážíme na problém, jak získat hodnoty koeficientů

$$(y_m(0), y_m(1), \dots, y_m(n-1))^T, \quad n = 2^m n_0, \quad n_0, m \in \mathbb{N}$$

odpovídající ortogonální projekci funkce $f \in L^2(\mathbb{R})$ do škálového prostoru V_m . Vzhledem k tomu, že škálová funkce obecně nemá explicitní předpis, nelze koeficienty spočítat přímo pomocí skalárního součinu. Výpočet koeficientů projekce se provádí numericky a je popsán např. v [6]. Z důvodu navýšení rozsahu práce nebudeme tento výpočet uvádět.

5 Programy v MATLABu

V této kapitole jsou uvedeny programy, které jsem vytvořila v matematickém softwaru MATLAB pro waveletovou transformaci a následnou kompresi vektoru a obrazu. Na jednorozměrnou i dvourozměrnou transformaci jsem aplikovala Haarův wavelet D2 a Daubechies wavelet D6. Uvedené programy lze snadno modifikovat i pro jiné wavelety s kompaktním nosičem změnou škálových koeficientů.

5.1 Transformace vektoru pomocí Haarova waveletu D2

Pro waveletovou transformaci a následnou kompresi vektoru pomocí Haarova waveletu jsem v MATLABu sestavila program s názvem `komprese_haar`. Prvním vstupním parametrem `z` je vektor, který chceme transformovat, druhým vstupem `r` je počet úrovní waveletové transformace. Program kontroluje, zda-li je počet složek vektoru `z` dělitelný číslem 2^r , jak vyžaduje odvozená teorie. Třetí vstup `K` je nepovinný a udává počet původních dat, které zachováme ve fázi komprese. Pokud není tento parametr uveden, provede se zpětná transformace ze všech původních dat a ke kompresi vůbec nedojde. Výstupem je vektor rekonstrukce, který získáme zpětnou rekonstrukcí z dat získaných waveletovou transformací vektoru `z` a jejich případnou kompresí.

```
function[rekonstrukce]=komprese_haar(z,r,K)
% program provede waveletovou transformaci vektoru pomocí Haarova
% waveletu na r-té úrovni. Dále dojde ke kompresi vektoru
% z K původních dat a ke zpětné rekonstrukci vektoru.

% VSTUP
% z - vektoru, který chceme komprimovat
% r - počet úrovní waveletové transformace
% K - počet dat, které použijeme při kompresi původního vektoru.
% Tento parametr je nepovinný, při jeho neuvedení nedojde k žádné
% kompresi původního vektoru
```



```

% VÝSTUP
% rekonstrukce - vektor získaný zpětnou transformací po kompresi
% z K původních dat

if nargin < 3
    komprese=0;
else
    komprese=1;
end
N=length(z);

if (nargin == 3 && (K<=0 || K>N))
    error('Chyba na vstupu: počet dat pro kompresi vektoru musí
    být kladné číslo menší než %d',N)
elseif (nargin == 3 && K~=round(K))
    error('Chyba na vstupu: počet dat pro kompresi musí být celé
    číslo')
elseif r<0
    error('Chyba na vstupu: počet úrovní musí být nezáporné číslo')
elseif (r~=round(r))
    error('Chyba na vstupu: počet úrovní musí být
    celé číslo')
elseif (mod(N,2^r)~=0)
    error('Chyba na vstupu: rozměry vektoru musí být dělitelné
    číslem %d',2^r)
else
%% vytvoření matice škálových koeficientů
u=spalloc(r,N,2*r);
u(1,1:2)=1/sqrt(2).*[1,1];

```

```

v=spalloc(r,N,2*r);

for k=1:2
    v(1,k)=(-1)^(k+1)*u(1,3-k);
end
%vektory pro konstrukci matice transformace
ur=spalloc(r,N,2*r);
vr=spalloc(r,N,2*r);
ur(1,:)=[u(1,1),u(1,N:-1:2)];
vr(1,:)=[v(1,1),v(1,N:-1:2)];

for k=2:r
    u(k,1:N/2^(k-1))=u(k-1,1:N/2^(k-1))+u(k-1,N/2^(k-1)+
1:N/2^(k-2));
    ur(k,1:N/2^(k-1))=[u(k,1),u(k,N/2^(k-1):-1:2)];
    v(k,1:N/2^(k-1))=v(k-1,1:N/2^(k-1))+v(k-1,N/2^(k-1)+
1:N/2^(k-2));
    vr(k,1:N/2^(k-1))=[v(k,1),v(k,N/2^(k-1):-1:2)];
end
%% matice reprezentující downsampling
Down=spalloc(N/2,N,N/2);
for i=1:N/2
    Down(i,2*(i-1)+1)=1;
end
%% waveletová transformace vektoru z
A=speye(N);
B=speye(N);

for k=1:r
    M=N/2^(k-1);

```

```

clear DM
clear W
clear T
DM=[Down(1:M/2,1:M)*toeplitz(ur(k,1:N/2^(k-1)),
u(k,1:N/2^(k-1)));
    Down(1:M/2,1:M)*toeplitz(vr(k,1:N/2^(k-1)),
v(k,1:N/2^(k-1)))];
W=[DM,sparse([],[],[],M,N-M,0);sparse([],[],[],N-M,M,0),
speye(N-M)];
T=[DM',sparse([],[],[],M,N-M,0);sparse([],[],[],N-M,M,0),
speye(N-M)];
A=W*A;
B=B*T;
end
rozklad=A*z';

%% komprese vektoru
if komprese==1
    [komprese,index]=sort(abs(rozklad),'descend');
    rozklad_komprese=zeros(1,length(rozklad));
    for i=1:K
        rozklad_komprese(index(i))=rozklad(index(i));
    end
else
    rozklad_komprese=rozklad';
end

%% zpětná rekonstrukce vektoru
rekonstrukce=B*rozklad_komprese';
end

```

5.2 Transformace vektoru pomocí Daubechies waveletu D6

Pro použití waveletové transformace vektoru pomocí Daubechies waveletu D6 jsem v MATLABu vytvořila program `komprese_daubechies`. Tento program se od programem `komprese_haar` liší použitým waveletem, vstupy i výstupy těchto programů se shodují, nebudeme je proto znovu popisovat.

```
function[rekonstrukce]=komprese_daubechies(z,r,K)
% program provede waveletovou transformaci vektoru pomocí Daubechies
% waveletu D6 na r-té úrovni. Dále dojde ke kompresi vektoru z K
% původních dat a ke zpětné rekonstrukci vektoru.

% VSTUP
% z - vektoru, který chceme komprimovat
% r - počet úrovní waveletové transformace
% K - počet dat, které použijeme při kompresi původního vektoru.
% Tento parametr je nepovinný, při jeho neuvedení nedojde k žádné
% kompresi původního vektoru

% VÝSTUP
% vektor - vektor získaný zpětnou transformací po kompresi
% z K původních dat

if nargin < 3
    komprese=0;
else
    komprese=1;
end
N=length(z);

if (nargin == 3 && (K<=0 || K>N))
    error('Chyba na vstupu: počet dat pro kompresi vektoru musí
```

```

    být kladné číslo menší než %d',N)
elseif (nargin == 3 && K~=round(K))
    error('Chyba na vstupu: počet dat pro kompresi musí být celé
    číslo')
elseif r<0
    error('Chyba na vstupu: počet úrovní musí být nezáporné číslo')
elseif (r~=round(r))
    error('Chyba na vstupu: počet úrovní musí být celé číslo')
elseif (mod(N,2^r)~=0)
    error('Chyba na vstupu: rozměry vektoru musí být dělitelné
    číslem %d',2^r)
else

%% vytvoření matice škálových koeficientů

u=spalloc(r,N,6*r);

a=1-sqrt(10);
b=1+sqrt(10);
c=sqrt(5+2*sqrt(10));

u(1,1)=sqrt(2)/32*(b+c);
u(1,2)=sqrt(2)/32*(2*a+3*b+3*c);
u(1,3)=sqrt(2)/32*(6*a+4*b+2*c);
u(1,4)=sqrt(2)/32*(6*a+4*b-2*c);
u(1,5)=sqrt(2)/32*(2*a+3*b-3*c);
u(1,6)=sqrt(2)/32*(b-c);

v=spalloc(r,N,6*r);

```

```

for k=1:2
    v(1,k)=(-1)^(k+1)*u(1,3-k);
end
for k=3:N
    v(1,k)=(-1)^(k+1)*u(1,3-k+N);
end
%vektory pro konstrukci matice transformace
ur=spalloc(r,N,6*r);
vr=spalloc(r,N,6*r);
ur(1,:)=[u(1,1),u(1,N:-1:2)];
vr(1,:)=[v(1,1),v(1,N:-1:2)];
for k=2:r
    u(k,1:N/2^(k-1))=u(k-1,1:N/2^(k-1))+u(k-1,N/2^(k-1)+
1:N/2^(k-2));
    ur(k,1:N/2^(k-1))=[u(k,1),u(k,N/2^(k-1):-1:2)];
    v(k,1:N/2^(k-1))=v(k-1,1:N/2^(k-1))+v(k-1,N/2^(k-1)+
1:N/2^(k-2));
    vr(k,1:N/2^(k-1))=[v(k,1),v(k,N/2^(k-1):-1:2)];
end

%% matice reprezentující downsampling
Down=spalloc(N/2,N,N/2);
for i=1:N/2
    Down(i,2*(i-1)+1)=1;
end
%% waveletová transformace vektoru z
A=speye(N);
B=speye(N);

for k=1:r

```

```

M=N/2^(k-1);
clear DM
clear W
clear T
DM=[Down(1:M/2,1:M)*toeplitz(ur(k,1:N/2^(k-1)),
u(k,1:N/2^(k-1)));
      Down(1:M/2,1:M)*toeplitz(vr(k,1:N/2^(k-1)),
v(k,1:N/2^(k-1)))];
W=[DM, sparse([], [], [], M, N-M, 0); sparse([], [], [], N-M, M, 0),
speye(N-M)];
T=[DM', sparse([], [], [], M, N-M, 0); sparse([], [], [], N-M, M, 0),
speye(N-M)];
A=W*A;
B=B*T;
end
rozklad=A*z';

%% komprese vektoru
if komprese==1
    [komprese, index]=sort(abs(rozklad), 'descend');
    rozklad_komprese=zeros(1, length(rozklad));
    for i=1:K
        rozklad_komprese(index(i))=rozklad(index(i));
    end
else
    rozklad_komprese=rozklad';
end

%% zpětná rekonstrukce vektoru
rekonstrukce=B*rozklad_komprese';
end

```

5.3 Transformace obrazu pomocí Haarova waveletu D2

Pro waveletovou transformaci obrazu pomocí Haarova waveletu jsem v MATLABu sestavila program `komprese2_haar`. Program má 3 vstupní parametry, 2 povinné a jeden nepovinný. Nepovinný parametr `K` udává procenta původních dat, ze kterých se provede zpětná rekonstrukce obrazu. Pokud tento parametr není uveden, zpětná rekonstrukce se provede ze 100 % původních dat, ke kompresi obrazu tedy nedojde. Prvním povinným vstupem je název bitmapového souboru, který je uveden v řetězci `string`. Pokud není soubor v aktuálním adresáři, je potřeba uvést celou cestu k tomuto souboru. Vstupem může být jakýkoli bitmapový soubor, který je podporován v MATLABu implementovanou funkcí `imread`. Druhý povinný vstup `r` udává počet úrovní waveletové transformace. Program převede barevný obraz do škály šedi, provede jeho waveletovou transformaci na r -té úrovni a případnou kompresi a z hodnot získaných transformací obraz zpětně zrekonstruuje. V případě, že rozměry matice, kterou je obraz reprezentován, nejsou dělitelné číslem 2^r , je matice doplněna o požadovaný počet nulových řádků nebo sloupců tak, aby se mohla realizovat transformace na r -té úrovni. Výstupem je matice `C`, která reprezentuje zpětnou rekonstrukci obrazu. Program také vykreslí původní obraz ve škále šedi, jeho transformaci v logaritmickém měřítku a v případě komprese dat jeho zpětnou rekonstrukci.

Program lze jednoduše modifikovat pro transformaci barevného obrazu, který je reprezentován třemi maticemi, kde každá odpovídá jedné barevné složce modelu RGB, nebo jiného barevného modelu.

Pro konstrukci matice waveletové transformace je v programu použita implementovaná funkce `toeplitz`, jejíž výstupem je Toeplitzova matice. Speciálním typem Toeplitzovy matice je cirkulantní matice, která reprezentuje konvoluci. Vzhledem k tomu, že konvoluce je součástí Mallatova algoritmu, můžeme využít funkci `toeplitz` a zjednodušit tak zápis matice transformace.

Při kompresi obrazu využívá program primárně koeficienty odpovídající projekci obrazu do škálového prostoru, které dále doplňuje koeficienty odpovídající projekci do prostoru detailů až do naplnění zadaných procent dat `K`. V případě, že

zadaný počet dat pro rekonstrukci v procentech je menší než procentuální zastoupení koeficientů ze škálového prostoru, program vypíše na obrazovku varování, které např. pro kompresi na druhé úrovni zní následovně

```
Warning: Došlo ke kompresi důležitých dat. Navyšte počet úrovní  
nebo procenta pro kompresi nad 6.25 % .
```

Zpětná rekonstrukce se provede pouze z části koeficientů ze škálového prostoru, dojde tedy ke ztrátě informací, které zaručují aproximaci původního obrazu. Proto je uživatel vyzván ke zvýšení počtu úrovní transformace nebo k použití většího počtu původních dat ke kompresi.

```
function[C]=komprese2_haar(string,r,K)
% program provede waveletovou transformaci obrazu pomocí Haarova
% waveletu na r-té úrovni. Dále dojde ke kompresi obrazu
% z K procent původních dat a ke zpětné rekonstrukci obrazu.

% VSTUP
% string - název souboru obrazu, který chceme komprimovat.
% Název souboru musí být uveden v apostrofech.
% r - počet úrovní waveletové transformace
% K - množství dat v procentech, které použijeme při kompresi
% původního obrazu. Tento parametr je nepovinný, při jeho
% neuvedení nedojde k žádné kompresi původního obrazu

% VÝSTUP
% Program zobrazí původní obraz, jeho waveletovou transformaci a
% v případě komprese obraz získaný zpětnou transformací z K procent
% původních dat

if nargin < 3
```

```

    komprese=0;
else
    komprese=1;
end

C=double(rgb2gray(imread(string)));
[N1,N2]=size(C);
figure(1)
imshow(C,[0,255])

if (nargin == 3 && (K<=0 || K>100))
    error('Chyba na vstupu: množství dat v procentech pro kompresi
obrazu musí ležet v intervalu (0,100>')
elseif r<0
    error('Chyba na vstupu: počet úrovní musí být nezáporné číslo')
elseif (r~=round(r))
    error('Chyba na vstupu: počet úrovní musí být celé číslo')
else
    zvetseni=0;
    puv_N1=N1;
    puv_N2=N2;
    if (mod(N1,2^r)~=0)
        zvetseni=1;
        N1=N1+(2^r-mod(N1,2^r));
        C(puv_N1+1:N1,:)=zeros(N1-puv_N1,N2);
    end
    if (mod(N2,2^r)~=0)
        zvetseni=1;
        N2=N2+(2^r-mod(N2,2^r));
        C(1:N1,puv_N2+1:N2)=zeros(N1,N2-puv_N2);

```

```

end

%% vytvoření matice škálových koeficientů
u1=spalloc(r,N1,2*r);
u1(1,1:2)=1/sqrt(2).*[1,1];
v1=spalloc(r,N1,2*r);
for k=1:2
    v1(1,k)=(-1)^(k+1)*u1(1,3-k);
end

%vektory pro konstrukci matice transformace
ur1=spalloc(r,N1,2*r);
vr1=spalloc(r,N1,2*r);
ur1(1,:)=[u1(1,1),u1(1,N1:-1:2)];
vr1(1,:)=[v1(1,1),v1(1,N1:-1:2)];

for k=2:r
    u1(k,1:N1/2^(k-1))=u1(k-1,1:N1/2^(k-1))+u1(k-1,N1/2^(k-1)+
1:N1/2^(k-2));
    ur1(k,1:N1/2^(k-1))=[u1(k,1),u1(k,N1/2^(k-1):-1:2)];
    v1(k,1:N1/2^(k-1))=v1(k-1,1:N1/2^(k-1))+v1(k-1,N1/2^(k-1)+
1:N1/2^(k-2));
    vr1(k,1:N1/2^(k-1))=[v1(k,1),v1(k,N1/2^(k-1):-1:2)];
end

u2=spalloc(r,N2,2*r);
u2(1,1:2)=1/sqrt(2).*[1,1];
v2=spalloc(r,N2,2*r);

for k=1:2

```

```

        v2(1,k)=(-1)^(k+1)*u2(1,3-k);
    end
    ur2=spalloc(r,N2,2*r);
    vr2=spalloc(r,N2,2*r);
    ur2(1,:)=[u2(1,1),u2(1,N2:-1:2)];
    vr2(1,:)=[v2(1,1),v2(1,N2:-1:2)];
    for k=2:r
        u2(k,1:N2/2^(k-1))=u2(k-1,1:N2/2^(k-1))+u2(k-1,N2/2^(k-1)+
1:N2/2^(k-2));
        ur2(k,1:N2/2^(k-1))=[u2(k,1),u2(k,N2/2^(k-1):-1:2)];
        v2(k,1:N2/2^(k-1))=v2(k-1,1:N2/2^(k-1))+v2(k-1,N2/2^(k-1)+
1:N2/2^(k-2));
        vr2(k,1:N2/2^(k-1))=[v2(k,1),v2(k,N2/2^(k-1):-1:2)];
    end

    %% matice reprezentující downsampling
    Nm=max(N1,N2);
    Down=spalloc(Nm/2,Nm,Nm/2);
    for i=1:Nm/2
        Down(i,2*(i-1)+1)=1;
    end

    %% waveletová transformace matice
    for j=1:r

        M1=N1/2^(j-1);
        M2=N2/2^(j-1);
        clear DM1
        clear DM2
        DM1=[Down(1:M1/2,1:M1)*toeplitz(ur1(j,1:N1/2^(j-1))),

```

```

u1(j,1:N1/2^(j-1)));
    Down(1:M1/2,1:M1)*toeplitz(vr1(j,1:N1/2^(j-1)),
v1(j,1:N1/2^(j-1)))];

    DM2=[Down(1:M2/2,1:M2)*toeplitz(ur2(j,1:N2/2^(j-1)),
u2(j,1:N2/2^(j-1)));
    Down(1:M2/2,1:M2)*toeplitz(vr2(j,1:N2/2^(j-1)),
v2(j,1:N2/2^(j-1)))];

    C(1:N1/2^(j-1),1:N2/2^(j-1))= DM1*C(1:N1/2^(j-1),
1:N2/2^(j-1))*DM2';
end

L=log(1+abs(C));
M=max(max(L));
figure(2)
imshow(255*L/M,[0,255])

%% komprese obrazu
if komprese==1
    if((K>=100/2^(2*r)))
        R=C;
        R(1:N1/2^r,1:N2/2^r)=max(max(C)).*ones(N1/2^r,N2/2^r);
        serazen=sort(abs(reshape(R,1,N1*N2)),'descend');
        index=floor(K*0.01*N1*N2);
        mez=serazen(index);
        R=R.*(abs(R)>=mez);
        R(1:N1/2^r,1:N2/2^r)=C(1:N1/2^r,1:N2/2^r);
        C=R;
    else

```

```

R=zeros(N1/2^r,N2/2^r);
R(1:N1/2^r,1:N2/2^r)=C(1:N1/2^r,1:N2/2^r);
serazen=sort(abs(reshape(R,1,N1/2^r*N2/2^r)), 'descend');
index=floor(K*(2^(2*r))*0.01*N1/(2^r)*N2/(2^r));
if index==0
    error('Chyba: množství dat pro kompresi obrazu je
příliš malé, prakticky nebyla použita žádná původní data')
end
mez=serazen(index);
R=R.*(abs(R)>=mez);
C=zeros(N1,N2);
C(1:N1/2^r,1:N2/2^r)=R(1:N1/2^r,1:N2/2^r);
warning('Došlo ke kompresi důležitých dat. Navyšte počet
úrovní nebo procenta pro kompresi nad %g %% .',100/2^(2*r));
end
end

%% zpětná rekonstrukce obrazu
for j=r:-1:1

    M1=N1/2^(j-1);
    M2=N2/2^(j-1);
    clear DM1
    clear DM2
    DM1=[Down(1:M1/2,1:M1)*toeplitz(ur1(j,1:N1/2^(j-1))),
u1(j,1:N1/2^(j-1))];
        Down(1:M1/2,1:M1)*toeplitz(vr1(j,1:N1/2^(j-1)),
v1(j,1:N1/2^(j-1)))]];

    DM2=[Down(1:M2/2,1:M2)*toeplitz(ur2(j,1:N2/2^(j-1))),

```

```

u2(j,1:N2/2^(j-1)));
        Down(1:M2/2,1:M2)*toeplitz(vr2(j,1:N2/2^(j-1)),
v2(j,1:N2/2^(j-1)))]];

        C(1:N1/2^(j-1),1:N2/2^(j-1))= DM1'*C(1:N1/2^(j-1),
1:N2/2^(j-1))*DM2;

end
if ((zvetseni==1)&&(komprese==1))
    figure(3)
    imshow(real(C(1:puv_N1,1:puv_N2)), [0,255])
elseif(komprese==1)
figure(3)
imshow(real(C), [0,255])
end
end

```

5.4 Transformace obrazu pomocí Daubechies waveletu D6

Druhým programem, který jsem pro waveletovou transformaci obrazu v MATLABu sestavila, je program `komprese2_daubechies`, který používá Daubechies wavelety D6. Vstupy i výstupy tohoto programu se shodují s programem `komprese2_haar`, proto je na tomto místě nebudeme znovu vypisovat. Rozdíl je v použitých waveletech, které se liší svými waveletovými koeficienty.

Program pro transformaci obrazu lze jednoduše přizpůsobit i jiným waveletům změnou škálových koeficientů.

```

function[C]=komprese2_daubechies(string,r,K)
% program provede waveletovou transformaci obrazu pomocí Daubechies
% waveletu D6 na r-té úrovni. Dále dojde ke kompresi obrazu
% z K procent původních dat a ke zpětné rekonstrukci obrazu.

```

```

% VSTUP
% string - název souboru obrazu, který chceme komprimovat.
% Název souboru musí být uveden v apostrofech.
% r - počet úrovní waveletové transformace
% K - množství dat v procentech, které použijeme při kompresi
% původního obrazu. Tento parametr je nepovinný, při jeho neuvedení
% nedojde k žádné kompresi původního obrazu

% VÝSTUP
% Program zobrazí původní obraz, jeho waveletovou transformaci a
% v případě komprese obraz získaný zpětnou transformací z K procent
% původních dat

if nargin < 3
    komprese=0;
else
    komprese=1;
end

C=double(rgb2gray(imread(string)));
[N1,N2]=size(C);
figure(1)
imshow(C,[0,255])

if (nargin == 3 && (K<=0 || K>100))
    error('Chyba na vstupu: množství dat v procentech pro kompresi
obrazu musí ležet v intervalu (0,100>')
elseif r<0
    error('Chyba na vstupu: počet úrovní musí být nezáporné číslo')

```



```

elseif (r~=round(r))
    error('Chyba na vstupu: počet úrovní musí být celé číslo')
else
    zvetseni=0;
    puv_N1=N1;
    puv_N2=N2;
    if (mod(N1,2^r)~=0)
        zvetseni=1;
        N1=N1+(2^r-mod(N1,2^r));
        C(puv_N1+1:N1,:)=zeros(N1-puv_N1,N2);
    end
    if (mod(N2,2^r)~=0)
        zvetseni=1;
        N2=N2+(2^r-mod(N2,2^r));
        C(1:N1,puv_N2+1:N2)=zeros(N1,N2-puv_N2);
    end

    end

%% vytvoření matice škálových koeficientů

u1=spalloc(r,N1,6*r);

a=1-sqrt(10);
b=1+sqrt(10);
c=sqrt(5+2*sqrt(10));

u1(1,1)=sqrt(2)/32*(b+c);
u1(1,2)=sqrt(2)/32*(2*a+3*b+3*c);
u1(1,3)=sqrt(2)/32*(6*a+4*b+2*c);
u1(1,4)=sqrt(2)/32*(6*a+4*b-2*c);

```

```

u1(1,5)=sqrt(2)/32*(2*a+3*b-3*c);
u1(1,6)=sqrt(2)/32*(b-c);

v1=spalloc(r,N1,6*r);

for k=1:2
    v1(1,k)=(-1)^(k+1)*u1(1,3-k);
end
for k=3:N1
    v1(1,k)=(-1)^(k+1)*u1(1,3-k+N1);
end

%vektory pro konstrukci matice transformace
ur1=spalloc(r,N1,6*r);
vr1=spalloc(r,N1,6*r);
ur1(1,:)=[u1(1,1),u1(1,N1:-1:2)];
vr1(1,:)=[v1(1,1),v1(1,N1:-1:2)];

for k=2:r
    u1(k,1:N1/2^(k-1))=u1(k-1,1:N1/2^(k-1))+u1(k-1,N1/2^(k-1)+
1:N1/2^(k-2));
    ur1(k,1:N1/2^(k-1))=[u1(k,1),u1(k,N1/2^(k-1):-1:2)];
    v1(k,1:N1/2^(k-1))=v1(k-1,1:N1/2^(k-1))+v1(k-1,N1/2^(k-1)+
1:N1/2^(k-2));
    vr1(k,1:N1/2^(k-1))=[v1(k,1),v1(k,N1/2^(k-1):-1:2)];
end

u2=spalloc(r,N2,6*r);

u2(1,1)=sqrt(2)/32*(b+c);

```

```

u2(1,2)=sqrt(2)/32*(2*a+3*b+3*c);
u2(1,3)=sqrt(2)/32*(6*a+4*b+2*c);
u2(1,4)=sqrt(2)/32*(6*a+4*b-2*c);
u2(1,5)=sqrt(2)/32*(2*a+3*b-3*c);
u2(1,6)=sqrt(2)/32*(b-c);

v2=spalloc(r,N2,6*r);

for k=1:2
    v2(1,k)=(-1)^(k+1)*u2(1,3-k);
end
for k=3:N2
    v2(1,k)=(-1)^(k+1)*u2(1,3-k+N2);
end

ur2=spalloc(r,N2,6*r);
vr2=spalloc(r,N2,6*r);
ur2(1,:)=[u2(1,1),u2(1,N2:-1:2)];
vr2(1,:)=[v2(1,1),v2(1,N2:-1:2)];
for k=2:r
    u2(k,1:N2/2^(k-1))=u2(k-1,1:N2/2^(k-1))+u2(k-1,N2/2^(k-1)+
1:N2/2^(k-2));
    ur2(k,1:N2/2^(k-1))=[u2(k,1),u2(k,N2/2^(k-1):-1:2)];
    v2(k,1:N2/2^(k-1))=v2(k-1,1:N2/2^(k-1))+v2(k-1,N2/2^(k-1)+
1:N2/2^(k-2));
    vr2(k,1:N2/2^(k-1))=[v2(k,1),v2(k,N2/2^(k-1):-1:2)];
end

%% matice reprezentující downsampling
Nm=max(N1,N2);

```

```

Down=spalloc(Nm/2,Nm,Nm/2);
for i=1:Nm/2
    Down(i,2*(i-1)+1)=1;
end

%% waveletová transformace matice
for j=1:r

    M1=N1/2^(j-1);
    M2=N2/2^(j-1);
    clear DM1
    clear DM2
    DM1=[Down(1:M1/2,1:M1)*toeplitz(ur1(j,1:N1/2^(j-1)),
u1(j,1:N1/2^(j-1)));
        Down(1:M1/2,1:M1)*toeplitz(vr1(j,1:N1/2^(j-1)),
v1(j,1:N1/2^(j-1)))];

    DM2=[Down(1:M2/2,1:M2)*toeplitz(ur2(j,1:N2/2^(j-1)),
u2(j,1:N2/2^(j-1)));
        Down(1:M2/2,1:M2)*toeplitz(vr2(j,1:N2/2^(j-1)),
v2(j,1:N2/2^(j-1)))];

    C(1:N1/2^(j-1),1:N2/2^(j-1))= DM1*C(1:N1/2^(j-1),
1:N2/2^(j-1))*DM2';

end

L=log(1+abs(C));
M=max(max(L));
figure(2)

```

```

imshow(255*L/M, [0,255])

%% komprese obrazu
if komprese==1
    if((K>=100/2^(2*r)))
        R=C;
        R(1:N1/2^r,1:N2/2^r)=max(max(C)).*ones(N1/2^r,N2/2^r);
        serazen=sort(abs(reshape(R,1,N1*N2)), 'descend');
        index=floor(K*0.01*N1*N2);
        mez=serazen(index);
        R=R.*(abs(R)>=mez);
        R(1:N1/2^r,1:N2/2^r)=C(1:N1/2^r,1:N2/2^r);
        C=R;
    else
        R=zeros(N1/2^r,N2/2^r);
        R(1:N1/2^r,1:N2/2^r)=C(1:N1/2^r,1:N2/2^r);
        serazen=sort(abs(reshape(R,1,N1/2^r*N2/2^r)), 'descend');
        index=floor(K*(2^(2*r))*0.01*N1/(2^r)*N2/(2^r));
        if index==0
            error('Chyba: množství dat pro kompresi obrazu je
příliš malé, prakticky nebyla použita žádná původní data')
        end
        mez=serazen(index);
        R=R.*(abs(R)>=mez);
        C=zeros(N1,N2);
        C(1:N1/2^r,1:N2/2^r)=R(1:N1/2^r,1:N2/2^r);
        warning('Došlo ke kompresi důležitých dat. Navyšte počet
úrovní nebo procenta pro kompresi nad %g %% .',100/2^(2*r));
    end
end
end

```

```

%% zpětná rekonstrukce obrazu
for j=r:-1:1

    M1=N1/2^(j-1);
    M2=N2/2^(j-1);
    clear DM1
    clear DM2
    DM1=[Down(1:M1/2,1:M1)*toeplitz(ur1(j,1:N1/2^(j-1)),
u1(j,1:N1/2^(j-1)));
        Down(1:M1/2,1:M1)*toeplitz(vr1(j,1:N1/2^(j-1)),
v1(j,1:N1/2^(j-1)))];

    DM2=[Down(1:M2/2,1:M2)*toeplitz(ur2(j,1:N2/2^(j-1)),
u2(j,1:N2/2^(j-1)));
        Down(1:M2/2,1:M2)*toeplitz(vr2(j,1:N2/2^(j-1)),
v2(j,1:N2/2^(j-1)))];

    C(1:N1/2^(j-1),1:N2/2^(j-1))= DM1'*C(1:N1/2^(j-1),
1:N2/2^(j-1))*DM2;

end
if ((zvetseni==1)&&(komprese==1))
    figure(3)
    imshow(real(C(1:puv_N1,1:puv_N2)), [0,255])
elseif(komprese==1)
    figure(3)
    imshow(real(C), [0,255])
end
end

```

Závěr

Cílem mé diplomové práce bylo nastudovat základy teorie waveletů, zaměřit se na jejich použití a v MATLABu sestavit programy pro waveletovou transformaci.

Teorie waveletů je rozsáhlou oblastí matematiky, jejíž komplexní popis přesahuje rámec této práce. Proto jsem se soustředila na diskrétní waveletovou transformaci vektoru s konečně mnoha složkami a funkcí z prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Waveletovou transformaci vektoru lze rozšířit na prostor posloupností $l^2(\mathbb{Z})$, na teorii v tomto prostoru jsem se v případě potřeby odkázala a z důvodu rozsahu práce jsem se jí více nevěnovala. Ze stejného důvodu jsem se podrobněji nezabývala spojitou waveletovou transformací a neuvádla jsem výsledky transformace v prostoru $L^2(a, b)$. Celá práce je zaměřena na ortogonální wavelety, dále existují také wavelety neortogonální, semiortogonální a biortogonální.

Při psaní diplomové práce jsem narazila na absenci důkazů některých zásadních tvrzení v použité literatuře, která byla buď technického zaměření, nebo důkazy vět ponechala čtenáři. Z tohoto důvodu jsem potřebné věty dokázala, a tím potvrdila platnost odvozené teorie.

Nastudovanou teorii jsem se rozhodla aplikovat na transformaci a následnou kompresi vektoru a obrazu. Tato oblast použití není zdaleka jediná. Dále by bylo možné wavelety použít například pro řešení diferenciálních rovnic.

Uvedené programy byly sestaveny v matematickém softwaru MATLAB R2007b a jsou k dispozici na přiloženém CD. Veškeré výpočty byly prováděny na notebooku lenovo ThinkPad R500, procesor Intel Core2Duo T6570 2,10 GHz, paměť 1,94 GB.

Literatura

- [1] Chui C.K.: *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Inc., San Diego, 1992.
- [2] Broughton S.A., Bryan K.: *Discrete fourier analysis and wavelets: applications to signal and image processing*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2009.
- [3] Kučera R.: *Wavelety a jejich použití*, Habilitační práce, 2001.
- [4] Kufner A., John O., Fučík S.: *Function Spaces*, ACADEMIA, 1977.
- [5] Lukeš J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, 2003.
- [6] Najzar K.: *Základy teorie waveletů*, Karolinum, Praha, 2004.
- [7] Veselý V.: *Wavelety a časově-frekvenční analýza dat* In: Sborník ANALÝZA DAT 95/II, Trilobyte, Pardubice, 1995.
- [8] Veselý V.: *Waveletová analýza dat* In: Sborník ANALÝZA DAT'96, Trilobyte, Pardubice, 1996.
- [9] Fotoalbum města Havířova [online], dostupné z <http://www.havirov-city.cz> [citováno 17. 3. 2011].