FAKULTA
PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ
A PEDAGOGICKÁ TUL

Diplomová práce

Nestandardní úlohy ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy

Studijní program:	M7503 Učitelství pro základní školy
Studijní obor:	Učitelství pro 1. stupeň základní školy
Autor práce:	**Bc. Monika Moravcová, DiS.**
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
	Katedra matematiky
	Liberec 2023

FAKULTA
PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ
A PEDAGOGICKÁ TUL

Zadání diplomové práce

Nestandardní úlohy ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy

Jméno a příjmení:	**Bc. Monika Moravcová, DiS.**
Osobní číslo:	P16000062
Studijní program:	M7503 Učitelství pro základní školy
Studijní obor:	Učitelství pro 1. stupeň základní školy
Zadávající katedra:	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Akademický rok:	2019/2020

Zásady pro vypracování:

Cíl práce: Teoreticky zpracovat problematiku nestandardních úloh z matematiky a jejich využití při přípravě na přijímací řízení na víceletá gymnázia. Provést výzkumné šetření k zařazení a využívání nestandardních úloh do výuky matematiky. Navrhnout klasifikaci nestandardních úloh a na základě ní vytvořit soubor úloh, který bude využitelný v praxi. Navržený soubor prakticky ověřit ve škole a vyhodnotit dle předem vymezených kritérií a jeho přínos.
Požadavky:

- Znalost Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání.
- Práce s učebnicemi pro 1. stupeň.
- Průběžná práce ve škole.
- Seznámení se s požadavky víceletých gymnázií na znalosti žáků z matematiky.

Metody:

- Rešerše odborné literatury.
- Dotazníkové šetření pro učitele.
- Srovnávací test pro žáky.
- Praktická realizace ve škole.
- Reflexe (sebereflexe) k využití nestandardních úloh při přípravě na přijímací zkoušky.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování práce: tištěná/elektronická
Jazyk práce: čeština

Seznam odborné literatury:

Cirjak, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (tvorivosť v matematike)*. Essox, Prešov 2000.
Lokšová, I., Lokša, J.: *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Portál, Praha 1999.
Metodické a výukové portály:
Zkoušky nanečisto. Dostupné z https://zkousky-nanecisto.cz/5trida
Cermat: Dostupné z https://prijimacky.cermat.cz/
Matematika v médiích. Dostupné z https://suma.jcmf.cz/_files/200000074-e30e3e4083/Matematika_v_mediich.pdf
Nestandardní úlohy. Dostupné z https://clanky.rvp.cz/wp--content/upload/prilohy/3002/nestandardni_aplikacni_ulohy_a_problemy_pro_1stupen_zs.pdf

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
Katedra matematiky

Datum zadání práce: 8. ledna 2020
Předpokládaný termín odevzdání: 1. května 2022

L.S.

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 9. dubna 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má diplomová práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

25. srpna 2023 Bc. Monika Moravcová, DiS.

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala vedoucí mé práce, paní docentce RNDr. Janě Příhonské, Ph.D., za její odborné vedení, cenné rady, inspiraci a čas, které mi po dobu psaní této práce věnovala. Dále také za milý a vstřícný přístup po celou dobu vzniku této diplomové práce.

Anotace

Diplomová práce se zabývá problematikou nestandardních úloh z matematiky a jejich využití při přípravě na přijímací řízení na víceletá gymnázia.

Cílem této diplomové práce bylo rozpracovat problematiku nestandardních slovních úloh na prvním stupni základních škol a porovnat strategie řešení těchto úloh používaných žáky pátých ročníků. Za tímto účelem provést výzkumné šetření k zařazení a využívání nestandardních úloh do výuky matematiky. Navrhnout klasifikaci nestandardních úloh a na základě ní vytvořit soubor úloh, který bude využitelný v praxi. Navržený soubor prakticky ověřit ve škole a vyhodnotit dle předem vymezených kritérií a jeho přínos.

Klíčová slova

Nestandardní úlohy, logické myšlení, kreativita, matematická gramotnost, metody řešení nestandardních úloh, matematické soutěže, přijímací řízení na víceletá gymnázia, žák středního školního věku.

Annotation

The Diploma thesis deals with the issue of non-standard mathematical tasks and their use in preparation for the admission procedure to multi-year grammar schools.

The aim of this thesis was to elaborate on the issue of non-standard word problems in primary schools and to compare the strategies of solving these problems used by fifth grade students. For this purpose, to conduct a research survey in order to include and use non-standard word problems in math classes. To propose classification of non-standard tasks and, on its basis, to create a set of tasks that can be applied to practice. To practically test the proposed set at school and to evaluate it according to predefined criteria and its contribution.

Key words

Non-standard tasks, logical thinking, creativity, mathematical literacy, methods of solving non-standard tasks, mathematical competitions, admission to multi-year grammar schools, secondary school pupil.

Obsah

1 Úvod....9
2 Teoretická část....11
2.1 Nestandardní úlohy v matematice....11
2.1.1 Základní typy nestandardních úloh....12
2.1.2 Fáze řešení nestandardních úloh....18
2.2 Charakteristika rozvoje myšlení dítěte středního školního věku....21
2.2.1 Období středního školního věku....22
2.2.2 Kognitivní vývojová psychologie....23
2.2.3 Nestandardní úlohy a žák středního školního věku....24
2.2.3.1 Potřeba citové jistoty a bezpečí....25
2.2.3.2 Potřeba učení, rozvoj zkušeností a dovedností....26
2.2.3.3 Potřeba seberealizace....27
2.3 Rámcový vzdělávací program....28
2.3.1 Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace....29
2.3.2 Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy....30
2.3.3 Cílové zaměření nestandardních úloh v RVP....31
2.3.4 Nestandardní úlohy a klíčové kompetence....31
2.3.5 Nestandardní úlohy a matematická gramotnost....33
2.4 Využití nestandardních úloh při přijímacích zkouškách na víceletá gymnázia...35
2.4.1 Kritéria přijímacích zkoušek CERMAT....35
2.4.2 Využití nestandardních úloh při přijímacím řízení....36
2.5 Matematické a logické soutěže a nestandardní úlohy....38
2.5.1 Matematické soutěže a nestandardní úlohy....39
2.5.2 Druhy matematických soutěží....39
2.5.3 Nadané děti, nestandardní úlohy a matematické soutěže....43
2.6 Srovnání učebnic pro páté ročníky ZŠ z hlediska nestandardních úloh....44
2.6.1 Nakladatelství Taktik....44
2.6.2 Nakladatelství Nová škola....45
2.6.3 Nakladatelství Prodos....46
2.6.4 Nakladatelství H-mat....47
3 Prakticko-výzkumná část....49

3.1 Praktická část a její cíle 49
3.1.1 Navržený soubor nestandardních úloh z matematiky 50
3.1.1.1 Nestandardní úlohy řešené pomocí diofantovských rovnic 50
3.1.1.2 Nestandardní úlohy kombinatorického typu 63
3.1.1.3 Nestandardní úlohy z geometrie 79
3.2 Výzkumná část a její cíle 89
3.2.1 Stanovení výzkumných předpokladů 89
3.2.2 Charakteristika výzkumného vzorku 91
3.2.3 Dotazníkové šetření mezi pedagogy 91
3.2.4 Případová studie 101
3.2.4.1 Shrnutí případové studie 114
3.2.5 Vyhodnocení řešení navrženého souboru NÚ z matematiky 115
3.2.5.1 Reflexe z řešení navrženého souboru NÚ 119
3.2.6 Ověření výzkumných předpokladů 120
4 Závěrečná část 121
Seznam použité literatury 123
Seznam použitých symbolů a zkratek 126
Seznam obrázků 127
Seznam tabulek 129
Přílohy 130

1 Úvod

Téma této diplomové práce jsem si vybrala proto, že jsem matkou dvou dětí, které se hlásily na víceletá gymnázia. Dcera, která je starší, se na přijímací řízení připravovala prostřednictvím předplaceného kurzu. Kurz navštěvovala půl roku před přijímacím řízením, kde se zdokonalovala v řešení testových otázek. Syn, který je o dva roky mladší od své sestry, se také hlásil na víceletá gymnázia. Ten se na rozdíl od ní na přijímací řízení nepřipravoval a své „štěstí" šel pouze zkusit bez jakékoliv přípravy. Oba dva jsou velmi šikovní, ve škole nemají problémy s žádným předmětem a hodnoceni jsou na výbornou. Dcera, na rozdíl od syna, byla přijata na gymnázium a syn ani po odvolání na gymnázium přijat nebyl. Ze své pedagogické praxe se domnívám, že i když je dítě nadané v matematice, pro úspěšné zvládnutí přijímacího řízení na víceletá gymnázia nestačí pouze základní znalosti v matematice, ale je nutné mu poskytovat individuální podporu a péči se zaměřením na rozšířené a náročnější nestandardní úlohy. Je důležité žáky stimulovat a rozvíjet jejich matematické schopnosti.

Cílem této diplomové práce je rozpracovat problematiku nestandardních slovních úloh na prvním stupni základních škol a porovnat strategie řešení těchto úloh používaných žáky pátých tříd. Soustředím se především na kombinatorické slovní úlohy a úlohy vedoucí k řešení pomocí diofantovských rovnic. Třetím typem sledovaných úloh jsou geometrické úlohy zaměřené na obsah a obvod mnohoúhelníků jak v rovině, tak i v prostoru.

V teoretické části mé práce analyzuji propojení nestandardních aplikačních úloh s Rámcovým vzdělávacím programem, zvláště pak s rozvíjením klíčových kompetencí jako jsou: rozvoj logického myšlení, čtenářská gramotnost a prostorová představivost. Hodnotím význam práce s chybou a kooperaci žáků při řešení těchto problémů.

Porovnávám zastoupení těchto úloh v učebnicích pro pátý ročník ZŠ a provádím rozbor vybraných netradičních úloh ve vybraných učebnicových řadách.

V závěrečné části teoretického oddílu diplomové práce specifikuji kritéria přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia společnosti CERMAT z hlediska nestandardních úloh a využití dovedností získaných řešením těchto úloh v matematických soutěžích.

V praktické části diplomové práce se zabývám dvěma typy úloh z oblasti nestandardních úloh a oblasti geometrie v rovině a prostoru. Prvním z nich jsou úlohy diofantovkého typu, druhý se zabývá kombinatorikou. Geometrický problém se zaměřuje na výpočet obsahu mnohoúhelníku ve čtvercové síti, prostorové představivosti a krychlové stavby.

Kromě zadání a rozboru jednotlivých úloh uvádím příklady žákovského řešení .

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě, a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svou nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium. (RVP ZV, 2021, s. 30)

Při posledním mezinárodním testování PISA, které proběhlo v roce 2018 a zúčastnilo se ho více než 60 zemí, se naši žáci umístili na 22. místě na světě. Jejich výsledky byly lehce nadprůměrné a matematické dovednosti přesáhly čtenářskou gramotnost, ve které jsou naopak české děti průměrné až podprůměrné. Zatímco na základních školách se české děti s těmi ostatními mohou v průměru měřit, postupem času jejich matematické gramotnosti ubývá. Smutnou prioritu držíme v oblíbenosti matematiky mezi žáky. Většina z nich na tuto otázku odpovídá, že matematiku nemají rády nebo dokonce velmi nemají rády (podle Hejného, M., Kuřiny, F., 2015, s. 13).

Důvodem může být i to, že matematické poznatky jsou odtržené od praxe. Množství informací, definic, algoritmů a předem naučených postupů stále více odcizuje studentům matematiku od praktického života. Žáci a později studenti se matematiku učí většinou výhradně proto, aby uspěli v testech a zkouškách. Znalost matematiky jim nedává praktický smysl, jsou demotivovaní a nemají potřebu se touto oblastí dále zabývat. Naopak se často stává, že velmi rychle zapomínají naučené poučky, pro které, podle jejich zkušeností, nemají praktické využití.

Další příčinou tohoto stavu je také přístup vyučujících matematiky. Pokud volí především transmisivní způsob výuky, nepředkládají dětem otázky, ale rovnou odpovědi a hotová řešení, přeskakují tím velmi důležitou část vzdělávacího procesu: proces experimentu, objevování a vlastní aplikaci.

Nestandardní úlohy, jak se snažím ukázat práci, jsou z tohoto hlediska velmi důležitou součástí matematického vzdělávání. Žáci při jejich řešení mohou uplatnit logické myšlení do jisté míry nezávislé na požadovaných znalostech a dovednostech vymezených osnovami, respektive ŠVP. Žáci se na úlohách z běžného života naučí řešit problémové úlohy, pochopí daný problém a naučí se ho analyzovat. Jsou nuceni vymyslet svoje originální řešení, které nekopíruje naučené algoritmy. K vyřešení problému se musí naučit třídit a systematizovat získané informace. Obtížnost problému je přímo úměrná rozumovým schopnostem žáků a navozuje jejich vnitřní motivaci. Tyto typy úloh rozvíjí nejen matematickou a čtenářskou gramotnost, ale i kompetence k učení, kompetence k řešení problémů a kompetence komunikativní. (podle RVP, 2021, s. 12—13)

2 Teoretická část

V teoretické části diplomové práce se v první kapitole zabývám nestandardními úlohami, jejich typy a fázemi řešení. Další kapitolou je charakteristika rozvoje myšlení dítěte středního školního věku a specifické potřeby v souvislosti s NÚ. V následující kapitole se věnuji RVP a vzdělávací oblasti matematiky pro první stupeň. Čtvrtá kapitola pojednává o využití NÚ při přijímacích zkouškách na víceletá gymnázia. Předposlední kapitola poukazuje na matematické a logické soutěže ve spojení s NÚ, druhy soutěží a využití dovedností řešit NÚ při soutěžích. V poslední kapitole srovnávám učebnice matematiky pro páté ročníky ZŠ z hlediska NÚ čtyř různých nakladatelství (Taktik, Nová škola, Prodos a H-mat).

2.1 Nestandardní úlohy v matematice

Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. (RVP, 2021, s. 30)

V odborné literatuře se nesetkáme s jednotnou definicí ani s jednotným pojmenováním podobných typů úloh. V RVP jsou pojmenovány jako *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, jinde v literatuře se setkáme s pojmy: problémové, nestereotypní nebo atypické úlohy. Pod všemi těmito názvy rozumíme typy úloh, při kterých musí žáci používat alternativní postupy a nemohou se spoléhat na známý algoritmus, jako při dříve nacvičených úlohách nebo řešeních.

Mohou být zadávány slovní nebo písemnou formou za pomoci slovního vyjádření, grafických nebo matematických schémat. Může se u nich vyskytnout více správných řešení nebo metod, jak ke správnému řešení dojít. Podporují logické a kreativní myšlení žáků. Můžeme je zařadit mezi otevřené úlohy, resp. problémy.

Jejich typickým rysem je navodit problémovou situaci, která často vychází z osobní zkušenosti žáka. Žák se musí v dané situaci zorientovat a najít vhodnou strategii řešení.

Nestandardní aplikační úlohy mají mnohdy širší kontext, který navozuje konkrétní problémovou situaci. Při zpracování zadaných údajů musí žáci analyzovat více informací, musí hledat souvislosti a informace dále zpracovávat. (Metodické komentáře, s. 103)

Dalším typickým rysem je variabilita řešení. Žák při správném zadání problému zažije radost z experimentování při hledání účinné strategie a často také z úspěšného řešení. Při společném sdílení má cennou možnost se inspirovat řešeními ostatních, porovnat jednotlivé způsoby řešení a inspirovat se těmi úspěšnějšími.

2.1.1 Základní typy nestandardních úloh

V odborné literatuře není možné dohledat jednotnou typologii Nestandardních úloh. Pro účely práce využiji jako základ rozdělení z diplomové práce Veroniky Babákové (podle Babákové, V., 2007, s. 26—27), které dále rozšířím. Její rozdělení vychází z Rámcového vzdělávacího programu. V RVP je do vzdělávacího okruhu Nestandardní úlohy a jejich aplikace zařazeno toto učivo:

- slovní úlohy
- číselné a obrázkové řady
- magické čtverce
- prostorová představivost (podle Babákové, V., 2007, s. 26)

Pro účely diplomové práce uvedu jemnější dělení slovních úloh než V. Babáková obohacené o další kategorie. Rozdělím tedy NÚ na:

Slovní úlohy

- inverzně formulované
- kapitánské
- s antisignálem
- řešené pomocí diofantovských rovnic
- kombinatorické
- s využitím logické úvahy

Logické řady

- číselné řady
- obrázkové řady

Aritmetická schémata

- číselné pyramidy
- algebrogramy
- magické čtverce
- sudoku

Geometrické úlohy

- úlohy řešené v rovině: tangramy, geoboardy, čtvercová síť
- úlohy řešené v prostoru: origami, krychlové stavby, sítě

Slovní úlohy

Slovní úlohy rozvíjejí obecné kompetence, především čtenářskou gramotnost, a propojují je s matematikou. Umožňují využít matematické znalosti v mimo matematických situacích a pomáhají porozumět a uchovat matematické znalosti a dovednosti.

Slovní úlohy jsou často vnímány dětmi jako obtížné, a to hned z několika důvodů. Žák neporozumí zadání nebo nevidí souvislost mezi zadáním a matematickým problémem. Z množství uvedených informací si nedokáže najít ty, které jsou potřebné k vytvoření matematického modelu. V neposlední řadě matematický model najde, ale neumí s pomocí modelu úlohu vyřešit.

Řešení slovní úlohy je komplexní proces, kde jednotlivé fáze na sebe přímo navazují a výsledek závisí na každé z nich. *Na uchopování slovní úlohy budeme pohlížet jako na operaci složenou z pěti činností: identifikace objektů, identifikace vztahů mezi objekty, identifikace otázky, nalezení sjednocujícího pohledu, získání vhledu do struktury slovní úlohy a vytvoření matematického modelu.* Jak uvádí Novotná J. v (Hejný, M., Novotná, J., Vondrová, N., 2004, s. 367)

Při řešení slovních úloh je třeba postupovat s žáky kontinuálně, krok po kroku, a vybírat problémy přiměřené věku žáků. Zejména při zavádění slovních úloh je důležité, aby žák mohl zažívat úspěch, a pokud nenajde vhodný matematický model, mohl danou úlohu vyřešit jinou vhodnou strategií, např. „pokus-omyl". Proto je také v této počáteční fázi důležité, aby problém v úloze obsažený byl pro žáka srozumitelný a snadno představitelný.

Inverzně formulované slovní úlohy

Inverzně formulované slovní úlohy nebo také úlohy řešené pomocí inverzních operací jsou problémy, ve kterých neznáme výchozí číslo, ale známe výsledek a cestu, kterou se k výsledku dostaneme.

Cílem je, aby žáci experimentováním, objevováním a společným sdílením přišli brzy na to, že tyto úlohy se řeší „pozpátku", za pomoci inverzních operací.

Kapitánské slovní úlohy

Dalším příkladem nestandardních slovních úloh jsou tzv. Kapitánské úlohy nebo také úlohy s nadbytečnými či nedostatečnými informacemi podněcující k tvořivosti, logickému uvažování, sdílení svých myšlenek a spolupráci a komunikaci ve skupině. Kromě posilování čtenářské gramotnosti, mají také motivační hodnotu. Dokážou vtáhnout žáka do zajímavého příběhu a spojit mu matematiku se skutečným světem.

Slovní úlohy s antisignálem

Většina slovních úloh obsahuje sloveso nebo příslovce, které vysílá signál, jakým způsobem se má daná úloha řešit. Tedy jakým způsobem se dá převést do matematického jazyka, resp. jakou početní operaci je nutno zvolit.
Maminka upekla pět koláčů, teta upekla o deset více. Kolik koláčů teta upekla? Signál o deset více odpovídá operaci sčítání. Antisignální úlohy naopak vysílají tzv. antisignál. Teprve poté má smysl mluvit o antisignálu. *Teta napekla deset koláčů, měla jich o pět více než maminka. Kolik koláčů měla maminka?* Zde signál „o opět více" opět asociuje sčítání, ale pro vyřešení úlohy je třeba použít odčítání. Stejným příkladem jsou slova typu „ubrat, prohrát, zmenšit", která jsou běžně spojena s operací odčítání, ale v tomto typu úloh jsou spojeny s operací sčítání. *Petr měl na konci hry 15 kuliček. Během hry 10 prohrál. Kolik kuliček měl na začátku hry?*

K vyřešení úloh s antisignálem tedy nestačí pouhé porozumění signálu a použití naučeného algoritmu. Žák je nucen přečíst s porozuměním text a antisignál odhalit. Žák získává zkušenost, že není dobré spoléhat jen na signál, ale zaměřit se na analýzu textu. (podle Chaloupkové, S., 2009, s. 11—12)

Slovní úlohy řešené pomocí diofantoských rovnic

Diofantovské rovnice jsou rovnice, které mají celočíselné řešení a celočíselné koeficienty u neznámých. Tyto rovnice jsou pojmenovány po antickém matematikovi Diofantovi z Alexandrie. Existují různé typy diofantovských rovnic, například lineární, kvadratické, diofantovské s parametry a další. Každý typ má své vlastní podmínky řešitelnosti.

Pro účely této práce se zabývám pouze lineárními diofantovskými rovnicemi, díky nimž si žáci rozvíjí abstraktní myšlení, rozšiřují si matematické dovednosti, připravují se na složitější matematické koncepty, podporují kreativitu a logické uvažování a v neposlední řadě jsou motivující a zajímavé. Pro lineární diofantovské rovnice typu $ax+by=c$, kde a, b, c jsou celá čísla, platí, že tato rovnice má celočíselné řešení pouze tehdy, když a, b dělí c. (podle Mokré, T., 2015, s. 19—20)

Příkladem může být úloha:

Na dvoře pobíhaly kozy a slepice, dohromady měly 16 nohou a pět hlav. Kolik bylo slepic a kolik koz? Žáci vycházejí ze známého faktu, že koza má čtyři nohy a slepice dvě. Znají počet nohou a z počtu hlav si logicky vyvodí i celkový počet zvířat, nevědí ale, kolik je zvířat od každé skupiny.

Dalším typickým příkladem diofantovských úloh je určování počtu dopravních prostředků: jízdních kol, tříkolek, čtyřkolek, když známe celkový počet kol.

Žákovské postupy řešení diofantovských slovních úloh jsou obsahem praktické části diplomové práce.

Kombinatorické slovní úlohy

Kombinatorika je obor matematiky, který se zabývá výběrem a uspořádáním prvků z předem dané konečné množiny prvků podle předem daných pravidel. Tyto typy úloh se často vyskytují v matematických soutěžích.

Kombinatorické slovní úlohy jsou též předmětem praktické části diplomové práce, kde se soustředím na jednotlivé strategie žákovských řešení.

Úlohy s využitím logické úvahy

Úlohy tohoto typu se nedají řešit pouze pomocí osvojených stereotypů a algoritmů. K jejich vyřešení je zapotřebí představivost, pochopení textu, ale také pochopení souvislostí mezi jednotlivými subjekty, nápad k řešení a především matematická tvořivost. *Matematická tvořivost je chápána jako schopnost všímat si* *zákonitostí, schopnost porovnávat, účelně experimentovat, vytvářet správné analogie, zobecňovat, vyslovovat hypotézy a ověřovat je, manipulovat se schématy a další dovednosti. (*Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M., 1992, s. 61)

Úlohy nemusí mít konkrétní číselný výsledek. Žáci se učí porovnávat a systematizovat jednotlivé údaje. Musí postupovat krok po kroku a jednotlivé operace si zaznamenávat. V neposlední řadě je nutné, aby porozuměli textu a dokázali v něm vyhledávat potřebné informace.

U některých typů úloh neexistuje matematický model, jak dospět k výsledku. Žáci si většinou najdou svůj individuální způsob zápisu (obrázek, tabulka, diagram) a zaznamenávají si jednotlivé informace. Řešení je výsledkem správného pochopení informací v textu a také nalezením přehledného způsobu zápisu, jak tyto informace zaznamenat. Při společném sdílení se žáci mohou inspirovat úspěšnými řešeními a způsob záznamu optimalizovat.

Číselné a obrázkové řady

Číselné a obrázkové řady jsou dva různé typy řad, které se liší svou povahou a způsobem, jakým jsou sestaveny.

Číselné řady jsou posloupnosti čísel, které jsou sestaveny podle určitého pravidla. Toto pravidlo může být *aritmetické,* kdy se např. každý další člen řady liší o stejnou konstantu od předchozího členu, nebo je násobkem členu předcházejícího. U těchto typů úloh se jedná v podstatě o propedeutiku aritmetické nebo geometrické posloupnosti. Existují však i jiná pravidla pro sestavení číselných řad. Příkladem číselné řady může být např.: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … (pravidlo: každý následující člen je součtem dvou předchozích členů). Cílem je, aby žáci tato jednotlivá pravidla objevili.

Obrázkové řady jsou posloupnosti obrázků, které jsou sestaveny podle jiného pravidla. Toto pravidlo může být například změna barvy, změna tvaru nebo změna pozice obrázku v rámci řady. Řešení číselných a obrázkových řad vybízí k logické úvaze. Jedná se v podstatě o identifikaci vzorců a relací mezi jednotlivými čísly nebo obrázky v řadě.

Číselné řady pomáhají rozvíjet schopnost rychlého a přesného počítání, zejména v oblasti aritmetiky.

Obrázkové řady pomáhají rozvíjet vizuální vnímání a schopnost rozpoznat vzorce a relace v obrázcích.

Aritmetická schémata

Aritmetická schémata jsou základní matematické struktury, které se používají pro řešení aritmetických problémů. Jedná se o reprezentaci matematických vztahů, které umožňují jednoduše a efektivně řešit aritmetické operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení. Jsou vytvářena postupným učením se aritmetických operací.

Jako příklady aritmetických schémat uvedu: *číselné pyramidy*, *algebrogramy*, *magické čtverce* nebo *sudoku*.

Číselné pyramidy

Číselné pyramidy jsou matematická cvičení, která pomáhají žákům zlepšit početní schopnosti v aritmetice a rozvíjejí logické myšlení. Jedná se o pyramidu sestavenou z čísel, která jsou umístěna ve vrstvách tak, že každé číslo v nižší vrstvě je např. součtem dvou čísel v předchozí vrstvě, která mu přímo předcházejí.

Číselné pyramidy jsou užitečné pro rozvoj základních matematických dovedností, jako je sčítání, odčítání, násobení, dělení a řešení rovnic. Tato cvičení také pomáhají rozvíjet schopnost logického uvažování, protože žáci musí v pyramidě odhalit vztahy mezi jednotlivými čísly.

Existuje mnoho různých typů číselných pyramid, například pyramidy s celými čísly, pyramidy s desetinnými čísly nebo pyramidy s racionálními čísly. Různá obtížnost nebo-li gradace je dána postavením čísel v jednotlivých cihličkách pyramidy.

Algebrogramy

Algebrogramy jsou matematické hádanky či rébusy, kde jsou některá čísla nebo operace nahrazeny písmeny či symboly a cílem je najít hodnoty těchto neznámých prvků. Algebrogramy jsou často prezentovány formou rovnic, kde jsou jednotlivá písmena neznámou hodnotou, která se musí odhalit.

Při řešení algebrogramů je nutné dodržet pravidlo desítkové soustavy, kde každé místo (pozice) má svou váhu v závislosti na pozici, na které se v čísle nachází, stejně jako číslice zapsané pomocí jednotek, desítek, stovek atd.

Při řešení algebrogramů žáci zprvu nejčastěji používají metodu „pokus-omyl", až poté pracují s číslicemi a za jednotlivá písmena je doplňují.

Magické čtverce

Magický čtverec je matematické schéma, které se skládá z čísel umístěných do čtvercové matice tak, aby součet čísel v každém řádku, sloupci a diagonále byl stejný. Tento součet se nazývá magická konstanta. Žáci opět mohou řešit metodou „pokus-omyl", kdy pro menší čtverce (3 x 3 nebo 4 x 4) postupně doplňují čísla do prázdných políček a ověřují, zda součty odpovídají magickému pravidlu.

Žáci na tomto typu problémů, kromě logického uvažování, trénují matematické dovednosti sčítání čísel do 1 000, aritmetický průměr a dělení.

Sudoku

Sudoku je populární logická hra. Prezentuje ji mřížka o velikosti 9 x 9, která je dále rozdělena na devět menších mřížek o velikosti 3 x 3. Cílem hry je vyplnit všechny buňky mřížky čísly od 1 do 9 tak, aby se každé číslo vyskytovalo právě jednou v každém řádku, sloupci a menší mřížce.

Počet možných postupů vyplnění Sudoku mřížky je extrémně velký, což z něj dělá zajímavý příklad pro studium kombinatoriky a pravděpodobnosti.

Opět první možností, jak řešit problémy toho typu, je „pokus-omyl". Další strategií, se kterou žáci přicházejí, je najít číslo, které v daném řádku, sloupci nebo menší mřížce chybí, a poté ho tam doplnit.

Další strategie, kterou žáci objeví, je strategie „možného čísla". Pro každou prázdnou buňku si zapíší možná čísla, která by se tam mohla vyskytnout podle pravidel hry. Poté čísla porovnají s dalšími kritérii (řádky, sloupce, malé čtverce).

Kromě logického myšlení, trpělivosti a počtářských dovedností sudoku rozvíjí prostorové myšlení, protože hráč musí být schopen vizualizovat mřížku a pracovat s ní v různých úhlech.

2.1.2 Fáze řešení nestandardních úloh

Nestandardní úlohou rozumíme to, že řešitel nezná proceduru na její řešení. Chce-li ji vyřešit, musí zkoumat, hledat, experimentovat, vynaložit jisté intelektuální úsilí. (Hejný, M., Novotná, J., Vondrová, N., 2004, s.191)

Už ze samotné charakteristiky nestandardní úlohy, dále jen NÚ, vyplývá, že se jedná o úlohy velmi rozmanité, které zasahují do všech oblastí matematiky. Jako jejich společný rys můžeme uvést (viz citát v úvodu) to, že řešitel při zadání nedostává přesný návod nebo algoritmus, jak problém vyřešit, a musí projevit schopnost experimentovat a aplikovat své matematické dovednosti.

Stejně jako jsou variabilní typy NÚ, jsou různorodé i způsoby práce s nimi. Ať se jedná o způsoby zadávání, fáze a způsoby jejich řešení nebo prezentace výsledků. V tomto oddílu popisuji některé z nich.

Zadání problému

Nestandardní úlohy můžeme zadávat ústně, písemně, pomocí obrazových nebo grafických vyjádření. Zásadní je, aby žák chápal výrazové prostředky v zadání obsažené. Na základě získaných údajů si žák jednotlivé informace zaznamenává a zároveň si vytváří jejich první rozbor.

Specifický je druh záznamu slovních úloh. Učitel může žáky seznámit se standardním způsobem zápisu a tento model vyžadovat. Pro pochopení matematického problému žákem je ale mnohem smysluplnější, když se naučí vytvářet si vlastní formu zápisu: identifikaci objektů, která odráží jeho vlastní vidění světa. Je velmi efektivní, když žáci svoje zápisy sdílejí a prezentují je ostatním. Žáci se tím seznamují se způsobem myšlení ostatních spolužáků a uvědomují si, že stejný problém může každý vidět odlišně.

Jinou formou zadávání problémové úlohy je „pracovní postup". Používá se nejčastěji u konstrukčních úloh, stavby podle plánu u krychlových stavebnic nebo při skládání z papíru. Žáci dostanou zadání úlohy rozdělené na jednotlivé fáze práce. Pokud postupují přesně podle pracovního postupu, vznikne jim výsledný produkt. Pokud ne, musejí identifikovat chybu a vrátit se o potřebný počet kroků zpět. Gradovaná úloha může vzniknout tak, že u jednotlivých fází procesu změníme pořadí. V tom případě žáci nejprve musejí správně seřadit jednotlivé kroky.

Rozbor problému

Po porozumění úlohy je třeba, aby žák identifikoval problém a pochopil vztah mezi jednotlivými objekty. Záleží na charakteru problémové úlohy a cílech učitele.

Rozbor úlohy může probíhat formou samostatné práce, společné diskuze, individuální pomoci učitele jednotlivým žákům nebo práce v menších žákovských skupinách.

Rozbor úlohy by měl zahrnovat v první fázi porozumění textu (v případě slovních úloh) nebo pochopení podstaty úlohy. Žák by měl být schopen úlohu sám nebo s pomocí analyzovat a formulovat problém, který bude řešit. Často je důležité si daný problém graficky znázornit. Výstupem této fáze by mělo být, že si žáci zvolí nejvhodnější metodu řešení.

Je potřeba vést žáky k podrobnému rozboru úloh, nabádat je k podrobnému znázornění. Zároveň se ubezpečit, že rozumí všem informacím a jsou jim jasná kritéria potřebná pro řešení problému.

Dobré zvládnutí jazyka je důležité jak pro komunikaci společenskou, tak i pro porozumění všem předmětům. Mnohé potíže žáků s řešením úloh tkví svou podstatou v nízké úrovni porozumění jazyku. (Hejný, M., Kuřina, F., 2015, s. 19)

Způsob řešení

Jako jsou různorodé nestandardní úlohy, stejně variabilní mohou být i jejich způsoby řešení. Vychází už ze samotné podstaty těchto problémových úloh, totiž že žáci po identifikaci problému, samostatně nebo po poradě ve skupině, zvolí strategii, která jim připadá k řešení nejvhodnější.

K vyřešení žáci často používají pomůcky, modelují si danou situaci s předměty, řeší úlohy graficky, pomocí tabulky nebo si situaci znázorní výtvarně. K řešení podobných typů úloh neodmyslitelně patří zkoumání a experimentování, které je samo o sobě přínosné a přináší dětem radost z učení.

Metody řešení

Aritmetické řešení: po identifikaci problému žák problém převede do matematického příkladu. Tento způsob řešení bývá úspěšný u úloh s antisignálem nebo u příkladů typu sčítací nebo odčítací pyramidy.

Algebraické řešení: zde už žáci musí manipulovat se symboly nebo neznámými. Vyjádří si problém pomocí rovnic nebo jiných matematických výrazů s proměnnými. Žáci tyto postupy často používají u inverzních úloh nebo algebrogramů.

Grafické řešení (řešení obrázkem): k vizualizaci problému žáci využívají obrázek - často volí při řešení diofantovských nebo kombinatorických problémů.

Logická úvaha: tento způsob řešení je efektivní při řešení číselných a obrázkových řad, sudoku nebo magických čtverců.

Pokus-omyl: často se ukáže jako nejúčinnější strategie, zvláště při setkání s novým typem úlohy. Při opakovaném řešení podobných problémů žák postupně nachází podobnosti a analogie v řešení, objevuje strategie a postupy, které mu úkol ulehčí.

Jednotlivá řešení mohou žáci libovolně kombinovat. Když najdou efektivnější způsob řešení, přijmou ho za svůj a předchozí opustí. Důležité pro řešení problémů je svoboda dětí řešit problémy po svém a zažívat radost z objevování. *Tento psychologický efekt způsobuje, že se dítě k takovým úlohám a problémům rádo vrací, jelikož mnohdy zažije jisté řešitelské vzrušení.* (mpp_metodicke_komentare.pdf, str. 102)

Kontrola a sdílení

V závěrečné fázi řešení nestandardních problémů je důležité, aby žáci svá řešení sdíleli, ať už se doberou správného výsledku nebo ne. Při citlivé práci s chybou, jejím konstruktivním popisu a společném hledání, jak k ní došlo, se z chyby může vytvořit žádaný bonus pro řešitele i pro ostatní spolužáky. Dobré je formulovat problém respektujícím způsobem. Místo otázky: „Kde udělal Toník chybu?“ Zkusit: „Rozumíte, jak Tonda uvažoval?“ nebo „Chceš nám, Toníku, vysvětlit, jak jsi počítal?“

Naopak sdílená správná řešení se mohou stát inspirací pro ostatní. Každý z žáků má možnost vybrat si pro inspiraci řešení, které se mu zdá nejefektivnější. Postupem času dochází žák k vytvoření vlastního matematického modelu, který mu nejvíc vyhovuje.

Vrstevnické učení je v případě NÚ důležitým faktorem. Žák při společné práci lépe problém pochopí (jazyk vrstevníků bývá pochopitelnější než řeč učitele). Tím získá další možnosti řešení, které může využít při řešení jiného problému.

Spolužák dokáže poskytnout častější zpětnou vazbu než učitel a dokáže ji poskytnout způsobem, který je pro dítě přijatelnější a pochopitelnější... Profit z vrstevnického učení však nemá jenom vyučovaný žák... Tutor rozvíjí své znalosti a dovednosti, stoupá jeho sebedůvěra, sebevědomí, sebeúcta. Jak uvádí Mareš J. v (Hejný, M., Novotná, J., Vondrová, N., 2004, s. 117)

2.2 Charakteristika rozvoje myšlení dítěte středního školního věku

V této kapitole se věnuji charakteristice rozvoje myšlení dítěte středního věku v souvislosti s řešením nestandardních úloh. Cílem je porozumět specifickým hlediskům kognitivního vývoje tohoto věku, která ovlivňují jejich schopnost řešit úlohy netradičními způsoby a kreativním myšlením. Dále porozumění jejich specifickým potřebám souvisejícím se vzděláváním.

Duševní vývoj lze charakterizovat jako proces vzniku postupných změn a rozvoje psychologických procesů, vlastností i integrace celé osobnosti. Jeho základem jsou vrozené dispozice, které se rozvíjejí pod vlivem prostředí. (Vágnerová, M., 1997, s. 5)

Vývojová psychologie se zabývá studiem vývoje lidského chování, myšlení a emocí od narození až do dospělosti. Z hlediska dětí tento obor zkoumá, jak se děti učí, jak se vyvíjejí jejich schopnosti, jaké jsou jejich sociální a emoční vztahy a jakým způsobem se mění jejich myšlení a chování v průběhu vývoje. Vývojová psychologie se také zabývá tím, které faktory (genetické, biologické, sociální a kulturní) ovlivňují vývoj jedince.

Vývoj osobnosti dítěte se podle Vágnerové a dalších psychologů dělí na několik na sebe navazujících období. Jedno z rozdělení může být: prenatální, novorozenecké, kojenecké, batolecí, předškolní věk, školní věk, puberta a adolescence. Pro účely diplomové práce, která se zaměřuje na žáky 5. ročníku, je zásadní takzvaný „střední školní věk", doba, která je určena rozmezí 8 až 12 let. V podmínkách českého školství se jedná o děti mezi 3. až 5. třídou. Toto období se zvláště u žáků páté třídy začíná prolínat s dalším obdobím: obdobím rané puberty. (podle Vágnerové, M., 1997)

2.2.1 Období středního školního věku

Z hlediska biologického ani psychologického se v této fázi neděje nic mimořádného. Dítě se plynule vyvíjí a připravuje se na fázi puberty. U většiny jedinců v tomto věku stále převažuje realistické myšlení s vazbou na skutečnost a převládá potřeba mít učení a poznávání založeno na faktech a hmatatelných důkazech.

Postupně se ale proměňuje role žáka a zvyšuje se význam vrstevnické skupiny. Dítě ve středním školním věku už zjistilo, jaký výkon se po něm ve škole očekává a jak dosáhnout ocenění dospělých. Ačkoliv se snižuje význam autority učitele a potřeba citové vazby s ním, žák stále vnímá hodnocení školní práce jako součást své identity. Postupně získává autonomii v sebehodnocení a vytváří si vlastní kritéria hodnocení práce. Začíná být citlivý na objektivně zadaná kritéria hodnocení. Požadavky, které se od nich liší nebo jsou odlišné pro jednotlivé členy skupiny, vnímá jako nespravedlivé.

V této fázi vývoje se také mění význam vrstevnické skupiny. Společenství spolužáků se postupně stává zásadní sociální skupinou, se kterou se žák identifikuje, a která v mnoha směrech uspokojuje jeho sociální potřeby. Spolužáci výrazně ovlivňují i jeho poznávací procesy. Skupina se vzájemně podporuje ve výkonech, je schopna ocenit a motivovat jedince v procesu učení. Mezi důležité potřeby každého jedince středního školního věku patří být spolužáky akceptován. Skupina jako taková ale také začíná být kritická a odmítá jedince s vývojovými nebo sociálními odlišnosti. Proces odmítání může vést i k vyčlenění takového jedince ze skupiny. (podle Vágnerové, M., 1997, s. 214—221)

Další proměny v osobnosti dítěte předpubertálního období se týkají změny vnímání své identity.

Obsah identity závisí na tom, čím se dítě cítí být, za koho se považuje a už není tak významné, jaké skutečně je. (Vágnerová, M., 1997, s. 229)

Ve středním školním věku se rozvíjí vědomí vlastní identity. Děti si začínají uvědomovat vlastní originální osobnost, dokážou se soustředit na své silné stránky. Sebehodnocení ale stále závisí, v rámci realistického myšlení, na konkrétních a dokazatelných dovednostech a projevech. Vnímání vlastní osoby závisí do velké míry na hodnocení okolí, zvláště na naplnění potřeby pozitivního přijetí. Výkon je pro žáka důkazem osobních kvalit a má vliv na sebepřijetí. Na druhé straně děti také začínají chápat, že odlišní jedinci mohou mít různé pocity a různé kvality a učí se je tolerovat a oceňovat. (podle Vágnerové, M., 1997, s. 232—236)

2.2.2 Kognitivní vývojová psychologie

Kognitivní psychologie se zabývá procesy, které probíhají v našem myšlení, jako jsou: vnímání, paměť, učení, pozornost a řešení problémů. Zkoumá také, jak tyto procesy souvisejí s našimi vědomými zážitky, a jak jsou ovlivněny naším prostředím a zkušenostmi.

Mezi zakladatele psychologie kognitivního vývoje je řazen švýcarský psycholog Jean Piaget. Jeho teorie je založena na myšlence, podle které se děti vyvíjejí prostřednictvím dvou hlavních faktorů. Jedním z nich je *asimilace*, tedy zapracování nových informací do známých schémat a druhým *akomodace,* pozměnění schématu na základě nových informací a opětovné nastolení rovnováhy. (podle Sternberga, R., J., 2002, s. 475)

Podle Piageta procházejí děti čtyřmi vývojovými stádii:

- *Senzomotorické období (0-2 let): dítě se učí vnímat svět skrze své smysly a pohyb.*

- *Předoperační období (2-7 let): dítě se učí používat symboly a získává schopnost řešit jednoduché problémy.*
- *Konkrétně operativní období (7-11 let): dítě se učí logickému myšlení a řešení problémů.*
- *Stadium formálních operací (12 let a více): Dokáže myslet logicky o abstraktních pojmech a systematicky testovat hypotézy. Zabývá se abstrakcí, budoucností a ideologickými problémy.* (Atkinson, R., L., 2003, s. 77)

Tato teorie se opírá mimo jiné o myšlenku, že kognitivní vývoj dítěte není pouze procesem růstu a získávání znalostí, ale že dítě aktivně buduje své chápání světa pomocí svých vlastních zkušeností a interakcí se světem. Tento proces se nazývá konstruktivismus.

Konkrétně operativní období

Období konkrétních operací nastává u dětí ve věku přibližně od 7 do 11 let. V této fázi se dítě začíná učit logicky a systémově myslet. Začíná chápat, že objekty a situace mohou být popsány a kategorizovány podle určitých charakteristik a vztahů, které mezi nimi existují. Dítě začíná rozumět základním matematickým konceptům, jako jsou čísla, množiny a velikosti. Dítě také začíná chápat příčinné souvislosti a dokáže provést jednoduché úvahy.

Období konkrétních operací tedy zahrnuje schopnost logicky uvažovat o konkrétních věcech a situacích, ale dítě zatím není schopné abstraktního a formálního uvažování, což se rozvíjí až v následujícím období formálních operací.

2.2.3 Nestandardní úlohy a žák středního školního věku

V každém vývojovém období mají žáci specifické potřeby, které souvisejí se vzděláváním. V této části se pokusím dát potřeby žáků pátého ročníku do souvislosti s NESTANDARDNÍMI problémy. Pro účel práce vycházím z knihy Vývojová psychologie Marie Vágnerové, která potřeby těchto dětí rozdělila do tří kategorií:

- Potřeba citové jistoty a bezpečí
- Potřeba učení, rozvoje zkušeností a dovedností
- Potřeba seberealizace (podle Vágnerové, M., 1997, s. 216—220)

2.2.3.1 *Potřeba citové jistoty a bezpečí*

První a zásadní je potřeba citové jistoty a bezpečí. Měla by být zabezpečena především v rodině, ale ve školním kolektivu má také své nezastupitelné místo. Stres, úzkost a další negativní pocity blokují žákovu schopnost učit se a objevovat. V Maslowově pyramidě potřební hierarchie (viz obrázek č. 1) je pocit bezpečí na druhém nejnižším stupni, hned nad fyziologickými potřebami. Pokud tedy žák nenaplní svou potřebu bezpečí a v dalším „patře” lásky a přijetí, není schopen se kvalitně učit.

Obrázek 1: Maslowova pyramida - hierarchie potřeb (https://www.mentem.cz/blog/teorie-motivace/)

Bezpečné klima ve třídě by mělo umožnit dětem bez obav vyslovit své názory, prezentovat způsoby řešení problému a obhajovat hypotézy, bez rizika výsměchu nebo nevhodných komentářů ze strany učitele nebo spolužáků.

V tomto věku, jak uvádím výše, žáci potřebují ocenění a přijetí svých spolužáků a jsou citliví ke kritice. Při skupinové práci by tedy mělo být nastoleno přijímající prostředí a jednotlivé názory by měly být akceptovány, respektovány a oceněny. Žáci by měli být vedeni k tomu, aby se snažili pochopit odlišný přístup k problému a dokázali ocenit originální způsob řešení daného problému.

Zásadní pro pocit bezpečí a jistoty ve třídě je práce s chybou a poskytování konstruktivní zpětné vazby, ať už učitelem nebo spolužáky. Pokud je zpětná vazba popisná, je chápána žákem jako součást výukového procesu, jako cílená pomoc a možnost naučit se něco nového. V takovém případě žáci chápou chybu jako něco přirozeného, za co není potřeba se stydět, ale naopak využít ji k dalšímu posunu.

Zpětná vazba poskytovaná žákovi má nejméně dva závažné kontexty. První je sociální: záleží na sociálním klimatu třídy (které spoluvytváří i učitel), zda zpětná vazba bude žákovi prezentována jako informace konstruktivní, vstřícná, neohrožující, nezesměšňující jeho úsilí, anebo jako příležitost ho pokárat, zesměšnit, ztrapnit jeho snahu, odradit ho od dalších pokusů. Jak uvádí Mareš J. v (Hejný, M., Novotná, J., Vondrová, N., 2004, s. 109)

Společná práce nad problémovými úkoly může kromě výukových cílů naplnit i cíle sociální, jako: zajištění bezpečného klimatu ve třídě, prevenci proti patologickým jevům (vyloučení, výsměchu, šikaně), naplnění pocitu přijetí a sounáležitosti se skupinou.

2.2.3.2 *Potřeba učení, rozvoj zkušeností a dovedností*

Žáci v tomto věku se učí logicky myslet, mají schopnost řešit problémy, aniž by s nimi měli konkrétní zkušenost. Pro rozvoj svých dovedností ale stále potřebují srozumitelné argumenty a důkazy.

V 5. třídě je pro pedagoga při práci s nestandardními problémy výhodné zaměřit se na podporu dovedností spojených s kolektivním řešením těchto typů úloh. V této fázi vývoje děti potřebují přijetí vrstevnické skupiny, dokážou se vzájemně podporovat ve výkonech a oceňovat odlišné způsoby řešení. Zásadní je také mít možnost vysvětlit svá řešení a seznámit se se způsobem uvažování ostatních ve skupině.

Děti školního věku dovedou se svými vrstevníky skutečně komunikovat, dovedou jim naslouchat a chápat na určité úrovni obsah i motiv jejich sdělení. (Vágnerová, M., 1997, s. 217)

Potřeba učení ve skupině je přirozená, jazyk vrstevníků je pro člena skupiny pochopitelnější. Žáci často pochopí snadněji vysvětlení svého spolužáka než učitele.

U nestandardních úloh, pokud se řeší ve skupině, žáci daný problém spontánně analyzují a najdou společně vhodný způsob řešení. Ve skupině (v bezpečném prostředí) dochází ke konfrontaci, argumentaci a často k AHA afektu (žáci, kteří předtím problému nerozuměli, ho pochopí a zažijí úspěch). Správné řešení není chápáno jako úspěch jednotlivých žáků, ale pozitivní výsledek celé skupiny. Tím tyto úlohy (společná bádání a experimentování nad možnými řešeními) umožňují všem dětem zažít pocit úspěchu a rozvíjet své dovednosti na maximum.

Pokud žáci akceptují jiné přístupy k řešení a inspirují se jimi, mohou se vyhnout při učení tzv. *„mentálnímu nastavení (zablokování)"*. (podle Sternberga, R., J., 2002, s. 423)

Tento psychologický termín charakterizuje situaci, kdy žák zjistí, že strategie, která fungovala při předchozích podobných problémech, se nedá aplikovat na aktuálně řešený problém a úkol odloží jako nevyřešitelný. Pokud má ale zkušenosti se skupinovou prací, ví, že jeden problém může mít víc způsobů řešení, pokusí se najít jinou strategii nebo vyhledá radu některého spolužáka.

2.2.3.3 Potřeba seberealizace

Třídní skupina se stává pro děti středního školního věku nejdůležitější sociální komunitou. Od ostatních skupin (sourozenecké, kamarádské, zájmové) se liší stejným věkem zúčastněných, množstvím času, který společně děti ve škole tráví, společnými aktivitami a zážitky. Děti mají potřebu být skupinou přijímány, tvořit „partu".

Hodnocení jednotlivých členů třídní komunity stále ještě záleží na školních výkonech a hodnocení učitele. Tento význam ale pomalu klesá. Děti se začínají hodnotit podle nových kritérií a úspěšnost jedince záleží na tom, jak v těchto nových podmínkách obstojí. Kritéria jsou stále spíše založena na vlastnostech a projevech, které jsou zjevné, snadno dokazatelné a skupině příjemné. Mohou to být materiální věci, které určují sociální status dětí: značkové oblečení, telefon, počítač, kolo atd. Projevy chování, které jsou ostatním příjemné: smysl pro humor, schopnost komunikace, štědrost, přátelskost atd. Vliv mohou mít i všeobecně přijatelné dovednosti: sportovní zdatnost, hudební nebo výtvarné dovednosti.

Děti, které nemají preferované sociální dovednosti, a ani žádné skupinou přijatelné schopnosti nebo výhody, chtějí také naplnit potřebu přijetí. Většinou se snaží získat respekt skupiny jinými prostředky, často neadekvátními: vnucují se ostatním, šaškují, mohou být agresivní ke slabším, uplácejí. Tyto strategie ale málokdy bývají úspěšné. Je úkolem pedagoga se skupinou pracovat, tyto slabé jedince identifikovat a pomoci jim odhalit jejich silné stránky. Sebehodnocení dětí v tomto věku velmi záleží na hodnocení skupiny a jedinec se často identifikuje s rolí, kterou mu skupina přisoudí. (podle Vágnerové, M., 1997, s. 219—225)

Jestliže se od všech členů tříd očekává stejná zralost v chování, stupňuje se tendence odmítat projevy, které tomu neodpovídají. (Vágnerová, M., 1997, s. 221)

Podobným dětem, které mají potíže s přijetím třídního kolektivu, může v nemalé míře pomoci pocit úspěchu při školní práci. Při řešení problémových úloh, jak zmiňuji výše, mohou být často úspěšné děti, které sice nezvládly dokonale výukové strategie a algoritmy, ale dokážou se na problém podívat originálně. Ačkoliv takový řešitel nedojde vždycky ke správnému výsledku, je třeba jeho přístup zviditelnit, umožnit mu vysvětlit svou cestu a vyzdvihnout i dílčí etapy jeho práce. To může mimo jiné napomoci změně jeho pohledu na sebe a zvýšení sebedůvěry.

2.3 Rámcový vzdělávací program

Rámcový vzdělávací program vydalo ministerstvo školství v nejnovější verzi v roce 2021. Je to závazný podklad pro vypracování jednotlivých školních vzdělávacích programů a je platný pro všechny druhy základních škol včetně nižších stupňů víceletých gymnázií. Už v úvodu tohoto dokumentu se píše, že strategie a cíle v něm obsažené: *...vycházejí z nové strategie vzdělávání, která zdůrazňuje klíčové kompetence, jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě.* (RVP, 2021, s.11)

Strategie obsažené v RVP se tedy zaměřují ve velké míře na kompetence, které žák získává v rámci celého vzdělávání, prolínají se celým vzdělávacím obsahem, a měly by být v souladu se získanými vědomostmi a znalostmi. Žáci, kteří opouštějí základní školu, by měli být připraveni na svět kolem sebe a jejich vzdělání by nemělo být „odtrženo" od praktického života.

V současnosti se hodně diskutuje o připravenosti žáků našich škol na odchod ze školy do praxe. U absolventů se klade stále větší důraz na schopnost spolupracovat, být kreativní a umět pracovat s informacemi.

Jedno z desatera konstruktivistického přístupu k výuce matematiky profesora Hejného říká: *Poznatky, a to nejen poznatky matematické, jsou nepřenosné. Přenosné (z knih, časopisů, přednášek a médií) jsou pouze informace. Poznatky vznikají v mysli poznávajícího člověka. Jsou to individuální konstrukty.* (Hejný, M., Kuřina, F., 2015, s. 194)

Z těchto důvodů (menší důraz na získané a naučené informace a větší důraz na vytváření vlastních konstruktů) jsou právě matematická gramotnost a rozvoj dalších matematických kompetencí ve vztahu ke klíčovým kompetencím oblasti, na které se obrací v hodnocení výsledků žáků, zasloužená pozornost.

S problémovými úlohami se nesetkáváme jen v matematických kvízech a soutěžích, ale jsou součástí přijímacích testů společnosti CERMAT, výběrového testování žáků 5. a 9. tříd ČŠI nebo srovnávacích testů společnosti SCIO, kterých se každoročně účastní stovky škol. (https://www.testovani.cz/Projekt/4/narodni-testovani).

2.3.1 Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium. (RVP, 2021, s. 32)

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace pro první stupeň je v RVP rozdělena na čtyři tematické okruhy:

- čísla a početní operace,
- závislost, vztahy a práce s daty,
- geometrie v rovině a v prostoru,
- nestandardní úlohy a jejich aplikace.

Tematický okruh „*Čísla a početní operace*“, se soustřeďuje na dovednost provádět matematické operace, porozumět algoritmům a jejich významu a dokázat je používat v praxi.

Tematický okruh „*Závislost, vztahy a práce s daty*“ se zabývá typy změn a závislostí. Žáci se učí pracovat s daty, tabulkami, grafy, diagramy a získávat z nich informace nebo do nich zaznamenávat nejrůznější data.

Žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. (RVP, 2021, s. 33)

V okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* se výuka zaměřuje na geometrické útvary, které se žáci učí znázorňovat a určovat. Zabývají se vzájemnou polohou těles, zkoumají jejich shody a odlišnosti. Učí se počítat obvody, obsahy rovinných útvarů a prostorových těles, získávají vhodný grafický projev. (podle RVP, 2021, s. 32—33)

2.3.2 Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY

Očekávané výstupy – 2. období

žák

M-5-4-01 řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

(RVP, 2021, s. 36)

Okruh „Nestandardní a aplikační úlohy" je jeden z tematických okruhů vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, ale zároveň zasahuje do všech ostatních okruhů. Řešení nestandardních problémů ověřuje dovednost žáka pochopit a analyzovat matematický problém, zvolit správnou cestu k řešení.

Matematická gramotnost a schopnost řešit nestandardní úlohy jsou úzce propojeny. Pokud žáci rozumějí, jakým způsobem matematické koncepty fungují a jak se vzájemně propojují, jsou schopni přizpůsobit své znalosti řešení složitějších problémů.

Je důležité, aby žáci ZŠ byli vystaveni různým typům nestandardních úloh. To jim umožní rozvíjet své matematické myšlení a zlepšit své schopnosti řešit složité problémy.

Učivo obsažené v tomto okruhu je rozděleno do čtyř částí kurikula:

- slovní úlohy
- číselné a obrázkové řady
- magické čtverce
- prostorová představivost

Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní. (RVP, 2021, s. 32)

2.3.3 Cílové zaměření nestandardních úloh v RVP

Práce s nestandardními a aplikačními problémy v hodinách matematiky rozvíjí, podle RVP, kompetence žáka tím, že ho vede nejen ke zvládnutí naučených matematických postupů, ale především k tvorbě matematického myšlení a schopnosti jeho využití v praktických činnostech.

Rozvíjí kombinatorické a logické myšlení a vede žáka ke kritickému usuzování a argumentaci.

Učí žáka efektivně využívat matematické nástroje a rozvíjí jeho zkušenosti s matematickým modelováním: jedna situace se dá vyjádřit různými modely, ale současně se jeden model dá použít pro různé situace.

Učí žáka při řešení problému postupovat systematicky: provádět rozbor, plán, zvolit správný postup.

V neposlední řadě vede k rozvíjení spolupráce, posiluje dovednost argumentovat, vyslovovat nebo vyvracet hypotézy. (podle RVP, 2021, s. 32—33)

2.3.4 Nestandardní úlohy a klíčové kompetence

Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti. Jejich výběr a pojetí vychází z hodnot obecně přijímaných ve společnosti a z obecně sdílených představ o tom, které kompetence jedince přispívají k jeho vzdělávání, spokojenému a úspěšnému životu a k posilování funkcí občanské společnosti. (RVP, 2021, s. 12)

Výstupem výuky, podle nového vzdělávacího plánu, není jen samotné kurikulum, ale také klíčové kompetence, které sledují rozvoj žáka ve všech oblastech jeho vývoje. Nejedná se jen o vědomosti, ale celostní rozvoj jeho osobnosti, osobní motivaci, schopnost vyjadřovat se, prezentovat svou práci, schopnost pracovat v kolektivu, přijmout svou roli ve skupině a později i ve společnosti. Zjednodušeně řečeno jedná se o jeho „lidskou" vybavenost pro budoucí život a schopnost uplatnit se podle svých nejlepších schopností.

Pro účely práce jsem vybrala tři klíčové kompetence: *k učení, k řešení problémů a komunikativní* a hledala jsem souvislosti s nestandardními úlohami.

Kompetence k učení:

- *vybírá a využívá pro efektivní učení vhodné způsoby, metody a strategie, plánuje, organizuje a řídí vlastní učení, projevuje ochotu věnovat se dalšímu studiu a celoživotnímu učení,*
- *vyhledává a třídí informace a na základě jejich pochopení, propojení a systematizace je efektivně využívá v procesu učení, tvůrčích činnostech a praktickém životě,*
- *operuje s obecně užívanými termíny, znaky a symboly, uvádí věci do souvislostí, propojuje do širších celků poznatky z různých vzdělávacích oblastí a na základě toho si vytváří komplexnější pohled na matematické, přírodní, společenské a kulturní jevy,*
- *samostatně pozoruje a experimentuje, získané výsledky porovnává, kriticky posuzuje a vyvozuje z nich závěry pro využití v budoucnosti,*
- *poznává smysl a cíl učení, má pozitivní vztah k učení, posoudí vlastní pokrok a určí překážky či problémy bránící učení, naplánuje si, jakým způsobem by mohl své učení zdokonalit, kriticky zhodnotí výsledky svého učení a diskutuje o nich.* (RVP, 2021, s. 12)

Nestandardní typy úloh rozvíjejí v nejvyšší míře kompetence k učení. Vedou žáky k samostatnému a logickému myšlení, učí je shromažďovat, systematizovat a efektivně využívat získané informace.

Žáci dokážou řídit své učení, vymýšlí vlastní (často úspěšné) strategie řešení. Užívají předem dané matematické znaky a symboly, ale zároveň zavádějí a vyžívají i vlastní terminologii, kterou dokážou sdílet s ostatními.

Dokážou samostatně pracovat, hledají vlastní kreativní a alternativní řešení problému. Aplikují své postupy na další problémové jevy i mimo oblast matematiky. V neposlední řadě získávají pozitivní vztah k učení a důvěru ve vlastní schopnosti.

Kompetence k řešení problému:

- *vyhledá informace vhodné k řešení problému, nachází jejich shodné, podobné a odlišné znaky,*
- *využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému,*

- *samostatně řeší problémy; volí vhodné způsoby řešení; užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy,*
- *ověřuje prakticky správnost řešení problémů a osvědčené postupy aplikuje při řešení obdobných nebo nových problémových situací, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problémů,*
- *kriticky myslí, činí uvážlivá rozhodnutí, je schopen je obhájit, uvědomuje si zodpovědnost za svá rozhodnutí a výsledky svých činů zhodnotí.* (RVP, 2021, s. 13)

Při řešení nestandardních úloh žáci naplňují kompetence k řešení problému tím, že se učí systematizovat získané informace, oddělit důležité od nedůležitého a vytvářet vlastní formu zápisu.

Práce s chybou se stává samozřejmou součástí procesu: je přirozené pro jednotlivé žáky zjišťovat, v které konkrétní části řešení došlo k omylu, a zároveň se inspirovat inovativním řešením spolužáků.

Kompetence komunikativní:

- *formuluje a vyjadřuje své myšlenky a názory v logickém sledu, vyjadřuje se výstižně, souvisle a kultivovaně v písemném i ústním projevu,*
- *naslouchá promluvám druhých lidí, porozumí jim, vhodně na ně reaguje, účinně se zapojuje do diskuse, obhajuje svůj názor a vhodně argumentuje.* (RVP, 2021, s. 13—14)

Sdílení výsledků práce a návrhů řešení je důležitou součástí řešení nestandardních úloh. Žáci se učí obhájit svou práci nebo myšlenkový postup, sdílí způsob svého záznamu informací a dokážou se inspirovat z řešení svých spolužáků.

Při řešení podobných úloh ve skupině se učí argumentovat a obhájit svoji hypotézu nebo vhodným způsobem vyvrátit hypotézu svého spolužáka nebo učitele.

2.3.5 Nestandardní úlohy a matematická gramotnost

Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby *splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.* (Metodický portál RVP.CZ, https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogický_lexikon/G/Gramotnost/Matematická_gramotnost)

Česká školní inspekce (dále jen ČŠI) definuje matematickou gramotnost trochu rozsáhleji, s důrazem na možnost navázat jednotlivé součásti definice na konkrétní pozorovatelné aspekty výuky a projevů žáků. Získává tak základ pro následné hodnocení rozvoje matematické gramotnosti u žáků.

Matematická gramotnost spočívá v:

1. *potřebě žáka opakovaně zažívat radost z úspěšně vyřešené úlohy, pochopení nového pojmu, vztahu, argumentu nebo situace a v důvěře ve vlastní schopnosti,*
2. *porozumění různým typům matematického textu (symbolický, slovní, obrázek, graf, tabulka) a v aktivním používání či dotváření různých matematických jazyků,*
3. *schopnosti získávat a třídit zkušenosti pomocí vlastní manipulativní, experimentální a badatelské činnosti*
4. *zobecňování získaných zkušeností a objevování zákonitostí,*
5. *tvoření modelů a protipříkladů a dovednosti vhodně argumentovat,*
6. *schopnosti účinně pracovat s chybou jako podnětem k hlubšímu pochopení zkoumané problematiky,*
7. *schopnosti individuálně i v diskusi (především se spolužáky) analyzovat procesy, pojmy, vztahy a situace v oblasti matematiky.*

(ČŠI, https://www.csicr.cz/cz/Aktuality/Rozvoj-matematicke-gramotnosti-na-zakladnich-skola)

Při rozboru jednotlivých bodů této definice matematické gramotnosti zjistíme, že systematické a cílené zařazování a řešení nestandardních úloh naplňuje jednotlivá kritéria získávání matematické gramotnosti. Pokud považujeme jako učitelé za nezbytné, aby žáci získávali matematické dovednosti, učili se postupy a algoritmy, stejný prostor bychom měli dát dětem na objevování, experimentování a vlastní aplikaci. Jen tak je možné naplňovat kompetence obsažené v RVP.

Souvislost mezi naplňováním strategií RVP (ať se jedná o cíle vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace), aspekty kompetence matematická gramotnost nebo schopnost komplexně využít získané schopnosti a dovednosti (klíčové kompetence) a řešením nestandardních úloh je zřejmá. Umožňují jedinci porozumět situaci, formulovat problémy, aplikovat matematické a logické myšlení a spolupracovat s ostatními na řešení složitých problémů.

Aby došlo k opravdovému naplnění jmenovaných strategií, je třeba pracovat s podobným typem problémů celostně, zařazovat je do výuky pravidelně a systematicky.

2.4 Využití nestandardních úloh při přijímacích zkouškách na víceletá gymnázia

CERMAT (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání) je státní organizace zřízená Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy, která se zabývá výzkumem a hodnocením vzdělávání v České republice. Jednou z jejich činností je také organizace přijímacích řízení na střední školy a vysoké školy.

Přijímací zkoušky na víceletá gymnázia se obvykle skládají ze dvou částí (testů z českého jazyka a matematiky), které mají za úkol zjistit úroveň znalostí uchazečů a jejich schopnosti. Některé střední školy mohou mít specifické požadavky na zkoušky, ale většina vzdělávacích institucí využívá jednotné přijímací zkoušky organizace CERMAT.

Písemné testy jednotné zkoušky obsahují uzavřené a otevřené testové úlohy. Testové otázky jednotných přijímacích zkoušek jsou zpracovány v rozsahu učiva stanoveného pro první stupeň základní školy daného vzdělávacím obsahem Rámcového vzdělávacího programu.

2.4.1 Kritéria přijímacích zkoušek CERMAT

Přijímací řízení společnosti CERMAT vychází z Rámcového vzdělávací programu, Standardů pro základní vzdělávání a doporučených osnov pro ZŠ. Testy z matematiky určené pro uchazeče na víceletá gymnázia jsou koncipovány tak, aby ověřily znalosti a dovednosti žáků v jednotlivých oborech matematiky obsažených v RVP:

- čísla a početní operace,
- závislost, vztahy a práce s daty,
- geometrie v rovině a v prostoru,
- nestandardní úlohy.

Požadavky na uchazeče v oboru Nestandardních úloh jsou společností CERMAT charakterizovány takto:

Žák využívá úsudek při řešení slovních úloh a jednoduchých problémů, matematizuje reálné situace, pro řešení jednoduchých nestandardních situací objevuje a využívá jednoduché zákonitosti, zaznamenává situace pomocí schémat, k řešení problémů využívá grafickou interpretaci, formuluje odpověď.

(https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/specifikace-pozadavku/Specifikace_2022-2023/MASPECIFIKACEPOZADAVKU2022.pdf, s. 5)

Přijímací řízení je koncipováno tak, aby v něm uspěli především žáci se studijními předpoklady, tedy ti, kteří jsou schopni logicky uvažovat a své získané vědomosti aplikovat na problémové situace. Dá se říci, že většina úloh v testech CERMATU určených pro přijímací řízení na víceletá gymnázia a střední školy splňuje kritéria problémových úloh.

U většiny z nich není po prvním přečtením zřejmý způsob řešení a je třeba důkladné analýzy řešené úlohy. V některých případech je nezbytné, aby si žák vytvořil vlastní grafické znázornění nebo nákres, pokud chce najít odpovídající způsob řešení. Často je možné k problému přistupovat různými způsoby a úlohy mohou mít více způsobů řešení, a proto je obtížné hned určit, jakou matematickou operaci je vhodné použít. Úlohy jsou obvykle koncipovány tak, aby žák musel na jejich vyřešení použít různé druhy algoritmů, numerických postupů, matematických znalostí a dovedností. V neposlední řadě ověřují i čtenářskou gramotnost uchazeče a jeho schopnost orientovat se v daném problému.

Většina úloh je sestavena gradovaně. Po zadání základních informací má žák vyřešit několik problémů, většinou seřazených od jednodušších ke složitějším. Zatímco jednodušší úlohy zjišťují schopnost žáka vyznat se v problému, ověřují jeho znalost základních matematických termínů nebo schopnost ovládat numerické postupy, složitější problémy zjišťují jeho schopnost logického a analytického myšlení.

V podobných testech jsou hendikepováni žáci, kteří se ve škole zabývají výhradně typovými úlohami se stejným algoritmem řešení nebo počítají množství numerických příkladů. Na přijímací řízení se žáci většinou připravují individuálně nebo ve speciálních kurzech. Řeší zkušební testy a učí se různé postupy, jak k podobným problémům přistupovat. Výhodou pro každého žáka, který se chce účastnit přijímacího řízení, bezesporu je, když se s podobným typem úloh setkává i ve škole.

2.4.2 Využití nestandardních úloh při přijímacím řízení

Přijímací řízení na víceletá gymnázia je pro většinu žáků pátých tříd nová zkušenost, která je vystavuje nezvyklým výzvám: nové prostředí, časová tíseň, stres. Žáci se na přijímací řízení většinou připravují, navštěvují kurzy, seznamují se s dřívějšími testy, účastní se zkoušek nanečisto. Není úkolem ZŠ je na přijímací zkoušky připravit, ale jak je napsáno na webových stránkách Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT):

Testy neobsahují nic nad rámec Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání pro jednotlivé ročníky vzdělávání. K jejich úspěšnému absolvování by proto mělo stačit dobré zvládnutí učiva základní školy.

(https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/specifikace-pozadavku/ Specifikace_2022-2023/MASPECIFIKACEPOZADAVKU2022.pdf)

Už samotné naplňování vzdělávacích cílů RVP by mělo být tedy dostatečnou přípravou pro přijímací řízení. Skutečnost je trochu jiná. Právě setkání s problematickými, gradovanými problémy je pro některé žáky nová zkušenost. Testové otázky, z velké části založené na pochopení textu a obsahující velké množství informací a termínů, mohou být pro zkoušené žáky překážkou v úspěšném řešení. Jejich znalosti by na vyřešení běžného matematického problému podobného typu stačily, nepodaří se jim ale text analyzovat a problém identifikovat.

Je důležité, aby žáci v hodinách matematiky získávali potřebné matematické dovednosti a seznamovali se s matematickými pojmy. NÚ jim ale navíc umožňují dostat se za hranice obvyklé školní matematiky. Mohou si spojovat znalosti a dovednosti z různých oborů (nejen matematických), aplikovat své teoretické a praktické znalosti. Najít vhodné řešení problému je dovednost, kterou by měli žáci právě řešením těchto problémů získat. Na tento druh dovedností přijímací řízení mimo jiné cílí.

Logické myšlení, matematická a čtenářská gramotnost se dají, jako kterékoliv jiné dovednosti, trénovat a podporovat. Pokud se na hodinách řeší nestandardní problémy pravidelně, žáci jsou zvyklí problém si logicky rozebrat, analyzovat a alespoň se pokusit o nalezení cesty k řešení. Pokoušejí se řešit i složité, na první pohled neřešitelné, úlohy. Získávají sebevědomí a neděsí se případné chyby. Žáci, kteří podobnou zkušenost nemají, většinou úkol vzdávají s odůvodněním: „Tomu nerozumím." nebo „Tohle jsme nebrali."

V souladu s požadavky na žáka u přijímacích zkoušek se v praktické části diplomové práce věnuji třem typům NÚ, uvádím různé typy řešení, které žáci mohou použít. Popisuji znalosti, které žáci získávají na hodinách matematiky ve spojitosti s dovednostmi, které používají při řešení těchto úloh. Dále rozebírám různé druhy řešení a logických úvah, které mohou při řešení použít.

Pokud shrneme význam pravidelného zařazování problémových úloh při hodinách matematiky, dostaneme čtyři hlavní dovednosti, které jimi žák získá:

- rozvíjí získávání informací a čtenářskou gramotnost,
- vymýšlí vlastní strategie řešení,

- dokáže sdílet své myšlenkové postupy a obhájit své řešení,
- získává sebedůvěru.

2.5 Matematické a logické soutěže a nestandardní úlohy

Matematické soutěže probíhají na národní nebo nadnárodní úrovni, mohou se konat v online i offline prostředí a řešitelé soutěží samostatně nebo v týmech. Jejich význam zasahuje do mnoha myšlenkových, sociálních i dovednostních oblastí.

V matematických soutěžích se žáci setkávají s různými typy matematických problémů, u kterých musí projevit kreativitu, netradiční myšlení, logické uvažování a různé matematické schopnosti potřebné k nalezení neobvyklého řešení. Žáci si soutěžemi rozšiřují své znalosti a dovednosti v různých matematických disciplínách jako jsou například aritmetika, kombinatorika, pravděpodobnost, geometrie a další. Úkoly bývají často uspořádány podle stoupající náročnosti - gradují. Vyzývají k aplikaci matematických konceptů na reálné situace. Úlohy jsou často prezentovány zábavnou a atraktivní formou a tím jsou žáci schopni se více soustředit k jejich vyřešení. Soutěže, které umožňují spolupráci v týmu, podporují komunikační kompetence a sdílení nápadů.

Problémové úlohy, které v rámci jednotlivých soutěží žáci řeší, vyžadují většinou kreativní myšlení a komplexní schopnost řešení problémů. Účastníci se učí hledat nové přístupy k řešení úloh a rozvíjet svou schopnost přemýšlet mimo běžné postupy známé z hodin matematiky. Matematické soutěže mohou být důležitým motivačním faktorem také pro nadané děti.

*K tomu, aby nebylo frustrované (*nadané dítě*) ve svých poznávacích potřebách, vyžaduje smysluplné a účelné využití poznatků a manipulaci s nimi i v nových kontextech, ideálně ještě tak, aby zároveň rozvinulo i dovednosti komunikační, sociální nebo psychologické, nikoliv jen prosté memorování a opakování.* (Stehlíková, M., 2018, s. 129)

Také sám princip soutěžení, který může být pro některé pedagogy diskutabilní, může být pro některé žáky motivující. Nadané děti často v běžných hodinách nacházejí málo výzev, které by je opravdu uspokojovaly. Atmosféra soutěží na národní nebo dokonce mezinárodní úrovni může podpořit účastníky k vynaložení většího úsilí a motivovat je k dosažení lepších výsledků i v běžných vyučovacích hodinách.

2.5.1 Matematické soutěže a nestandardní úlohy

Řešení nestandardních problémů je dovednost, která je ceněna odbornou veřejností. Dovednosti, které si žáci právě na těchto problémech trénují, jsou mimo jiné: matematická gramotnost, čtenářská a jazyková gramotnost, schopnost vnímat souvislosti mezi jednotlivými předměty, rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, argumentace, ověřování hypotéz, volba správného postupu řešení.

Schopnost podobné úlohy kreativně (bez ohledu na naučené postupy) řešit, je žádaná a preferovaná kompetence pro budoucí uplatnění. Matematické soutěže mohou mít různá zaměření, mohou cílit na různý druh matematických dovedností, mohou mít odlišnou obtížnost, ale jejich společným rysem je podporovat v dětech logické myšlení a schopnost aplikovat své znalosti a dovednosti na nejrůznější typy logických problémů.

2.5.2 Druhy matematických soutěží

Existuje mnoho různých matematických soutěží po celém světě. Některé z nejznámějších, kterých se mohou účastnit i žáci pátého ročníku ZŠ, jsou:

- Matematická olympiáda,
- Klokan,
- Pangea,
- Logická olympiáda.

Všechny tyto soutěže, ať už jsou řešeny offline nebo online a jsou lokální, národní nebo mezinárodní, zaměřují se na rozvoj matematických dovedností a žáci v nich řeší především problémové (nestandardní) úkoly.

Matematická olympiáda

Matematická olympiáda je jednou z nejstarších matematických soutěží organizovaných v naší republice.

Soutěž je určena pro žáky základních a středních škol, kteří projevují zájem o matematiku a mají základní znalosti a schopnosti v této oblasti. Cílem olympiády je rozvíjet matematické myšlení a kreativitu studentů, podpořit jejich zájem o matematiku a identifikovat talenty v této oblasti. (https://www.matematickaolympiada.cz/co-je-mo)

Žáci pátých ročníků dostávají v rámci prvního kola k řešení 6 úloh a mohou je řešit samostatně během vyučování nebo doma. Pro postup do okresního kola stačí, když úspěšně vyřeší 4 z nich. Paralela mezi Matematickou olympiádou a NÚ je zřejmá. Všechny úlohy obsahují problémové prvky a jsou jak z oblasti aritmetiky, tak geometrie.

Specifika Matematické olympiády

Matematická olympiáda oproti ostatním soutěžím v základním kole předkládá žákům k řešení jen 6 úloh a umožňuje jim tyto úlohy řešit nejen ve škole, ale i v domácím prostředí. Jednotlivé úlohy jsou voleny tak, aby postihly co nejrůznější matematická prostředí a prověřili dovednosti žáků, a to nejen matematické, ale i logické a jazykové.

Oproti ostatním matematickým soutěžím autoři úloh Matematické olympiády nepoužívají otázky testového typu (nenabízí možnosti řešení) a jako součást řešení u některých úloh požadují a hodnotí popis a zdůvodnění jednotlivých řešitelských postupů. Žáci kromě odpovědi na zadanou otázku popisují svoje strategie a vysvětlují jednotlivé kroky svého řešení.

Matematická olympiáda je tedy specifická především tím, že se soustředí na kvalitu jednotlivých řešení. Žáci řeší menší množství úloh, soustředí se na jednotlivé dílčí kroky. Na konci zadání každého úkolu získá žák nápovědu: popis prvního kroku, který by mohl udělat.

Každý řešený problém je v konečném hodnocení Matematické olympiády důležitý. Hodnoceny jsou nejen konečné výsledky, ale i správné řešitelské postupy. Žáci jsou nuceni nejen přemýšlet nad svými myšlenkovými postupy, ale učí se je i srozumitelně a přehledně formulovat. Kromě upevňování matematických dovedností je tato soutěž tedy zaměřena na kompetence k řešení problémů a komunikační dovednosti.

Nestačí tedy jen úkol vyřešit, ale důležité pro úspěšné řešení je také co nejlépe objasnit své myšlenkové pochody a strategie řešení. Samotný problém není složitý. Záleží z velké míry na jazykových a komunikačních dovednostech žáka, jak dokáže vysvětlit jednotlivé logické kroky.

Klokan

Matematická soutěž Klokan je mezinárodní soutěž v matematice pro žáky základních a středních škol. Soutěž se koná každý rok od března do dubna a účastní se jí více než 6 milionů žáků z celého světa. Cílem soutěže je podnítit zájem žáků o matematiku a rozvíjet jejich schopnosti řešit matematické úlohy.

Pro žáky pátého ročníku je určena kategorie Klokánek. Žáci řeší 24 úloh rozdělených do tří stupňů obtížnosti. V České republice se soutěž poprvé konala v roce 1996.

Matematická soutěž Klokan se soustředí na všechny typy problémových úloh. Otázky jsou testového typu: žáci mají na výběr z několika druhů odpovědí. Vše je znázorněno a žáci jsou vedeni k tomu, aby si udělali podrobné rozbory a grafické znázornění jednotlivých úloh.(https://matematickyklokan.net/index.php/o-soutezi)

Specifika soutěže Klokan

Matematická soutěž Klokan, ve čtvrtých a pátých třídách se zadává kategorie Klokánek, nabízí žákům nejrůznější typy matematických a logických problémů. Jsou zde zastoupeny slovní úlohy s antisignálem, problémy s prvky kombinatoriky, řešení pomocí grafů a diagramů, úlohy, kde žáci dopočítávají neznámou hodnotu. Početné jsou problémy rozvíjející prostorovou představivost a schopnost logického úsudku. Ve výběru a rozmanitosti úloh tato soutěž nachází styčné body nejvíce s Logickou olympiádou.

Matematická soutěž je mezinárodní. Všechny otázky mají formu testu: žák dostane na výběr 5 možností (A—E) s jednou správnou odpovědí. V soutěži jsou otázky rozděleny do tří kategorií obtížnosti, za úspěšné řešení získávají žáci 3, 4 nebo 5 bodů. Za špatnou odpověď se jim jeden bod odčítá. Na vyřešení 24 otázek mají žáci 60 minut.

Pangea

Matematická soutěž Pangea je celosvětová soutěž pro studenty základních škol, která se zaměřuje na matematické a logické myšlení. Soutěž je určena pro žáky od 2. do 9. ročníku a skládá se ze dvou kol.

V prvním kole se žáci zabývají úlohami, které jsou rozděleny podle ročníku. Úkoly jsou zaměřeny na aritmetiku, geometrii a kombinatoriku. Každý rok se objevují dvě témata úzce spojená s logickými problémy, které mají žáci řešit. Studenti mají na vypracování úloh 75 minut a mohou používat pouze psací potřeby. (https://www.pangeasoutez.cz/o-soutezi)

Specifika soutěže Pangea

Matematická soutěž Pangea se od ostatních známých soutěží liší svou přímou provázaností s předem danými tématy. Zaměřuje se na úzké propojování matematických kompetencí s dalšími tematickými okruhy. Každému matematickému problému předchází krátký výklad z daného oboru, ze kterého přímo vychází zadaný úkol. Rok 2022/2023 dával do souvislosti matematická témata s tematickými okruhy věda a živočichové. Ve věkově nejnižší kategorii, určené pro 5. ročník, řešili žáci 15 úkolů.

Matematické úkoly této soutěže nejsou příliš obtížné a zaměřují se na běžné matematické dovednosti získané během výuky. K řešení žáci mohou využívat obvyklé algoritmy běžně používané v hodinách matematiky.

Žáci si posilují kompetence k učení, prohlubují si zájem o další oblasti vědění, rozšiřují si matematické kompetence s možností praktického využití matematiky, posilují si kompetence k řešení problémů a rozvíjí si schopnost logicky uvažovat.

Logická olympiáda

Prostředky, které nám (logika) *poskytuje k ověření správnosti myšlenkových postupů a podobně, nevyžadují žádné zvláštní znalosti. Jde v podstatě o kodifikaci způsobu uvažování, který je člověku dán od přirozenosti. Každý člověk, má-li dostatek času, dokáže najít logicky správný postup.* (https://www.esf.kfi.zcu.cz/logika/opory/lof/prezentace/1.pdf, s. 2)

Logická olympiáda je mezinárodní soutěž v matematické logice pro studenty základních škol, středních škol a univerzit. Cílem soutěže je podpořit zájem studentů o logiku a rozvíjet jejich schopnosti v této oblasti.

Tato soutěž je pořádaná Mensou České republiky a je založena na problémových úlohách, jejichž řešení vyžaduje samostatný a kreativní přístup. Nerozhodují zde naučené znalosti, ale schopnost samostatného uvažování a pohotového rozhodování. Logická olympiáda je svým pojetím unikátní soutěží, protože se nejedná o znalostní soutěž, ale o soutěž rozvíjející především schopnost samostatného logického uvažování.

Soutěž probíhá na národní i mezinárodní úrovni a soutěží se individuálně i týmově. Vítězové a úspěšní účastníci získávají ceny a možnosti dalšího rozvoje svých logických schopností. (https://www.logickaolympiada.cz/)

Specifika logické olympiády

Logika je disciplína, která se zabývá způsoby, jakými lidé přemýšlejí a argumentují. Je to věda o způsobech, jak rozumět, vyvodit a hodnotit argumenty a závěry. Logika se věnuje otázkám jako například, co znamenají slova a jak se s nimi zachází, jak sestavit a vyhodnotit argumenty, jak identifikovat a odstranit chyby v myšlení a argumentaci, a jak rozlišit pravdivé tvrzení od nepravdivého. (https://www.esf.kfi.zcu.cz/logika/opory/lof/prezentace/1.pdf)

Logická olympiáda, určena pro věkovou kategorii 5. třídy, obsahuje 25 logických problémů, z nichž většina nabízí formu testových otázek (až 8 možností) k řešení daných problémů. Řeší se online, řešitel má na práci 60 minut a svou strukturou, obsahem i způsobem zadávání nejvíc připomíná IQ testy.

2.5.3 Nadané děti, nestandardní úlohy a matematické soutěže

Matematické soutěže komplexně rozvíjejí nejen běžné matematické dovednosti: jako je schopnost rychle a přesně řešit složité úlohy, ale také se snaží pomoci dětem naučit se nové matematické koncepty, zlepšit své znalosti a zvýšit své matematické sebevědomí. Není výjimkou, že v matematických soutěžích, stejně jako při řešení nestandardních úloh, uspějí děti, které nevynikají při běžných vyučovacích hodinách. Nadané děti jsou často při hodinách velmi intenzivní a oscilují mezi vysokým pracovním výkonem a absolutním odpočinkem. Stačí jim látku pochopit a další procvičování už pro ně ztrácí smysl. Stává se tedy, že chybují v základních věcech, ale na druhé straně jsou schopni řešit velmi složité úkoly. (podle Stehlíkové, M., 2018, s. 117—119)

Právě řešení nestandardních úloh a matematické soutěže dávají nadaným dětem možnost komplexně uplatnit svůj potenciál a získat potřebné sebevědomí. V neposlední řadě jim tyto činnosti mohou pomáhat i v sociálních dovednostech: mohou se při podobných činnostech stát vůdčím, respektovaným a aktivizujícím prvkem dětské skupiny.

Podobný druh aktivit má smysl i pro děti, které nejsou jednoznačně zaměřené na matematiku. Prohlubují jejich schopnost vidět matematické úlohy v souvislosti s jinými tématy a matematika pro ně získává další význam. Může se přirozeně zvýšit jejich zájem o tento předmět a posiluje se i motivace.

2.6 Srovnání učebnic pro páté ročníky ZŠ z hlediska nestandardních úloh

Pro účely diplomové práce jsem si vybrala čtyři typy učebnic: *Hravá matematika* vydávaná nakladatelstvím Taktik, *Matýskova matematika*: nakladatelství Nová škola, *Matematika a její aplikace*: nakladatelství Prodos a *Hejného metoda - Matematika*: nakladatelství H-mat.

Zaměřuji se na vyhledávání a popis nestandardních úloh v jednotlivých učebnicích. Soustředím se na jejich četnost, provázanost s probíraným tématem, systematičnost jejich výskytu. Charakterizuji v jednotlivých učebnicích logické úlohy, které souvisejí přímo s praktickým zkoumáním v druhé části diplomové práce.

2.6.1 Nakladatelství Taktik

HRAVÁ MATEMATIKA

V řadě učebnic *Hravá matematika* vydavatelství Taktik jsou jednotlivé kapitoly rozděleny podle probíraného tématu. Nestandardní úlohy jsou zde skryty pod názvem „Netradiční úlohy”. Tyto problémové úkoly shrnují jednotlivé matematické dovednosti a algoritmy probírané v dané kapitole a jsou zaměřeny na aplikaci těchto dovedností. Jsou zaštítěny společným tématem, a tím cílí mimo jiné také na mezioborový rozvoj a čtenářskou gramotnost.

Provázanost matematických kompetencí s tématem z jiného oboru zvyšuje motivaci žáků učit se tento předmět a pomáhá jim chápat souvislosti mezi látkou probíranou v hodinách matematiky a jejím praktickým využitím. Jedná se většinou o slovně zadané úlohy, které je třeba řešit logickou úvahou nebo musí údaje potřebné k řešení žáci vyčíst z tabulky, grafu nebo strukturovaného textu.

V jednotlivých kapitolách jsou také zařazeny slovní úlohy tzv. zvýšené obtížnosti (označené třemi tečkami). Ty většinou nesplňují charakteristiku nestandardních úloh, u kterých není hned zřejmý způsob řešení, a je třeba přijít s neobvyklým řešením, ale většinou se jedná o slovní úlohy, při jejichž řešení je třeba použít více matematických operací, dopočítat neznámou hodnotu nebo se v nich operuje s vysokými čísly.

Geometrie v rovině a v prostoru

V učebnici Hravá Matematika jsem nenašla žádnou úlohu zaměřenou na kombinatoriku nebo na diofantovské rovnice. Učebnice obsahuje např. geometrické úlohy zaměřené na pochopení obsahu obdélníku (Bártová, M. Beďačová, M., Faltinová M., Hravá matematika, 2017, s. 26), působí mezioborově: znázorňuje a vysvětluje žákům označení jednotlivých formátů papíru. Definici nestandardních úloh splňuje tento úkol variabilitou řešení. Žáci si na tomto problému mohou objasnit pojem dvojnásobku z výchozí velikosti papíru a k výsledku mohou dojít jak sčítáním, tak násobením nebo grafickým ztvárněním.

2.6.2 Nakladatelství Nová škola

MATÝSKOVA MATEMATIKA

Řada *Matýskova matematika* je kromě matematických dovedností zaměřena také na rozvoj čtenářské a finanční gramotnosti, prostorovou představivost a logické myšlení. (podle: https://www.matyskova-matematika.cz)

Nestandardní úlohy jsou označeny šedě a obsahují různé typy těchto úloh. V prvním díle této řady jsou problematické úlohy zařazeny na konec každé tematické kapitoly a zaměřují se na aplikaci získaných matematických dovedností.

Setkáme se zde s různorodými typy úloh: početní hadi, úlohy s myšleným číslem, slovní úlohy s antisignálem, kapitánské slovní úlohy, algebrogramy. Výhodou je, že tyto úlohy uzavírají danou kapitolu a nabídnou žákům aplikaci získaných matematických dovedností na další úrovni. Jako problém vnímám, že učebnice zároveň nabídne jeden příklad možného řešení. Následuje několik podobných typových úloh, aby si žáci nabídnutý algoritmus mohli osvojit. Cílem NÚ je ale vést žáky k objevování vlastních řešení a oproštění se od naučených algoritmů.

V druhém a třetím díle této učebnice se systém zařazování nestandardních problémů mění. Úlohy označené šedě tvoří samostatnou kapitolu na konci učebnice nazvanou „Užití matematických vědomostí”. Tato kapitola opět obsahuje množství problémových úloh různých typů a opět jsou u podobných typů úkolů nabídnuta možná řešení.

Diofantovské rovnice

Úlohy diofantovského typu provází celý první díl *Matýskovy matematiky*. Příklady na procvičení a užití matematických vědomostí jsou na konci každé kapitoly. Jsou označeny šedou barvou (šedé pergameny), kde je uvedena vzorová úloha, u které je rozepsána jedna možnost řešení. Následuje úloha podobného typu (Novotný, M. Novák, F., Matýskova matematika pro 5. ročník 1. díl, 2017, s. 50). Tato úloha nabízí algoritmus na řešení úloh, kde jsou známy dvě definované neznámé, kterých je stejný počet (mincí, dopravních prostředků, zvířat), a zároveň je znám součet jejich předem daných atributů (hodnoty, končetiny, kola). Žákům nabízí metodu párování, které je efektivní, ale nedává možnost zkoušet alternativní řešení.

V další části učebnice pokračují úlohy diofantovského typu,

Kombinatorika

V druhém díle *Matýskovy matematiky* je celá strana věnována úlohám z kombinatoriky. Modelová úloha (Novotný, M. Novák, F., Matýskova matematika pro 5. ročník 2. díl, 2017, s. 59) se týká turnaje ve vybíjené: systém realizace zápasů, kdy každé družstvo musí hrát každý s každým.

Geometrie v rovině a v prostoru

Třetí díl *Matýskovy matematiky* je zaměřen pouze na geometrické úlohy (Novotný, M., Novák, F., Geometrie pro 5. ročník Matýskova matematika, 2019, s. 60 a 64). Na konci učebnice je opět kapitola orientovaná na aplikační a nestandardní úlohy. Zabývá se obsahy a obvody mnohoúhelníků ve čtvercové síti a dopočítáváním neznámých hodnot (délky stran) při znalosti obsahu nebo obvodu částí mnohoúhelníků. Dále zde najdeme úlohy cílené na aplikaci znalosti výpočtu povrchu a obsahu prostorových těles (krychlové stavby).

Zatímco v prvním dílu *Matýskovy matematiky* jsou problémové úlohy přirozeně začleněny do celého obsahu učebnice, ve druhém a třetím díle tvoří samostatnou kapitolu. Dochází ke kumulaci těchto úloh a ztrácí se jejich napojení na konkrétní látku, téma, dovednost. Nedochází k systematické práci s těmito problémy v průběhu celého školního roku.

2.6.3 Nakladatelství Prodos

MATEMATIKA A JEJÍ APLIKACE

Učebnice nakladatelství Prodos jsou velmi přehledně a názorně zpracované. Úlohy v nich obsažené jsou snadno pochopitelné, logicky řazené a jsou zaměřeny na mezioborové dovednosti. Grafika se vyznačuje velkými písmeny a čísly, s dostatkem prostoru na práci žáků. Pracovní materiály jsou uživatelsky přátelské pro děti, které se hůře orientují v textu a potřebují dostatek času na jednotlivá řešení. Naopak nenabízejí příliš možností pro žáky, kteří potřebují matematické výzvy.

Nestandardním úlohám je zde věnována celá tematická kapitola ve druhém dílu pracovního sešitu, která je přímo nazvaná „Nestandardní úlohy”. Jedná se především o úlohy typu obrázkové, číselné řady a různé logické úkoly, na které jsou žáci zvyklí z kvízů a dětských časopisů. I tyto úlohy jsou velmi jednoduché a neodpovídají úrovni, jakou by měli žáci většinově splňovat v pátém ročníku.

Mezi problémovými úlohami obsaženými v této řadě učebnic není žádný úkol diofantovského nebo kombinatorického typu, ani geometrická úloha zaměřená na výpočet obsahu nebo obvodu čtyřúhelníků.

2.6.4 Nakladatelství H-mat

HEJNÉHO METODA - MATEMATIKA

Vydavatelství H-mat vydalo řadu učebnic pro výuku matematiky založené na tzv. Hejného metodě. Tuto metodu vyvinul na popud svého otce profesor Milan Hejný a sama tato metoda je založena na nestandardních úlohách.

Na rozdíl od tradiční výuky matematice zaměřené na nácvik standardních úloh je nová metoda zaměřena na budování sítě mentálních matematických schémat, které si každý žák tvoří řešením vhodných úloh a diskusí o svých řešeních se spolužáky. (https://www.h-mat.cz/hejneho-metoda)

Metoda výuky matematiky podle profesora Hejného je založena na konstruktivismu, tedy na budování schémat a práci v jednotlivých prostředích. Jednotlivé matematické dovednosti nejsou izolované a žáci jsou vedeni k tomu, aby nacházeli vlastní způsoby řešení a sdíleli je s ostatními.

Jednotlivé matematické dovednosti jsou v učebnicích a pracovních sešitech prezentovány v jednotlivých prostředích vytvořených právě pro účely této metody. Typická prostředí Hejného matematiky jsou: k*rokování, autobus, parkety, šipkové grafy, pavučiny, sčítací trojúhelníky, myšlené číslo, krychlové stavby, geoboardy, ciferníky, vláčky, tangramy, stovková tabulka, čtvercová síť, váhy, násobilkové čtverce, egyptské chleby a mnohé další*.

Kombinatorika

Kombinatorika se v učebnicích pro pátou třídu příliš nevyskytuje. Dvě úlohy najdeme v učebnici v rámci opakovacích cvičení. První modelová úloha je určena k dramatickému ztvárnění (Hejný, M. Jirotková, D., Slezáková, J., Hejného metoda učebnice pro 5. ročník, 2022, s. 9) a druhá z prostředí Mince (Hejný, M. a kol., Hejného metoda učebnice pro 5. ročník, 2022, s. 13).

Žáci jsou vedeni k tomu, aby vytvořili vlastní cestu k řešení, popř. danou situaci vymodelovali, graficky nebo dramaticky ztvárnili a tím si vytvořili konstrukt pro řešení podobných problémů.

Geometrie v rovině a prostoru

Učebnice metody Hejného matematiky se v páté třídě věnují nejprve v kapitole Geometrie v rovině především obsahu trojúhelníků. Tyto problémy se řeší především pomocí metody rámování (Hejný, M. Jirotková, D., Slezáková, J., Hejného metoda učebnice pro 5. ročník, 2022, s. 47).

Geometrie v prostoru, která je obsažena v učebnici a v druhém dílu pracovních sešitů, se zaměřuje na zakreslování plánů krychlových staveb z různých pohledů a využívá při této aktivitě znalost žáků o povrchu a objemu krychlových těles (Hejný, M. Jirotková, D., Slezáková, J., Hejného metoda pracovní sešit pro 5. ročník, 2. díl, 2022, s. 86).

SHRNUTÍ

Ve všech zkoumaných řadách učebnic se vyskytují ve větší či menší míře nestandardní slovní úlohy.

V řadě *Hravá matematika nakladatelství Taktik* jsou tyto úlohy provázané s jednotlivými probíranými tématy a cílí také na čtenářskou gramotnost a mezioborové souvislosti.

*Matýskova matematika nakladatelství Nová škol*a věnuje problémovým úlohám relativně velký prostor, ale nabízí žákům jednu možnost řešení (efektivní algoritmus) a následnými podobnými typy úloh vede k jeho exkluzivnímu využití. Tím popírá samotný smysl nestandardních úloh, tedy motivaci žáků ke kreativitě a inovativním řešením.

Řada *Matematika a její aplikace nakladatelství Prodos* nabízí problémové úlohy typu obrázkových, číselných řad, sudoku, sčítacích pyramid nebo myšleného čísla. Výhodou je, že tyto typy úloh jsou žáky většinou pozitivně přijímány a vnímány jako zábavná část matematiky. Přesto žáci musejí hledat inovativní způsoby řešení. Jejich obtížnost většinou ale nesplňuje úroveň žáků páté třídy.

Řada *Hejného metoda nakladatelství H-mat* pracuje s problémovými úlohami systematicky a ve všech probíraných tématech a prostředích. Žáci mají dostatek času a prostoru na vlastní inovativní řešení a jejich sdílení.

3 Prakticko-výzkumná část

V praktické části diplomové práce prezentuji tvorbu a realizaci vlastního souboru nestandardních úloh z matematiky, který je zaměřen na kombinatoriku, úlohy řešené pomocí diofantovských rovnic a geometrii v rovině a prostoru. Skládá se celkem z deseti úloh a jejich podúloh (dílčích úloh), které slouží jako návodné pro vyřešení zadaných úloh.

Ve výzkumné části vyhodnocuji dotazníkové šetření pedagogů vyučujících matematiku v 5. ročníku ZŠ, které ověří nebo vyvrátí mnou stanovené předpoklady.

Dále se věnuji případové studii jedné dívky a vyhodnocení výsledků žákovských řešení navrženého souboru NÚ. Tyto výsledky a zjištění výzkumu rozebírám ve vztahu k cílům práce.

3.1 Praktická část a její cíle

Hlavním cílem praktické části diplomové práce bylo vytvoření souboru nestandardních úloh. Soubor byl navržen a upraven pro cílovou skupinu žáků 5. ročníků ZŠ a to především pro žáky, kteří mají zájem o studium na víceletých gymnáziích. V této části práce také popisuji, jak jsem s žáky při řešení úloh pracovala.

Okruhy úloh (kombinatorické úlohy, úlohy řešené pomocí diofantovských rovnic, rovinná a prostorová geometrie) byly vybírány z pohledu rozvoje kreativity a logiky, které vyžadují myšlení a uvažování mimo běžné zavedené postupy, kdy se žáci musí potýkat s neznámými situacemi a musí hledat nové cesty řešení. Vyžadují od dětí kritické myšlení při jejich posuzování a aplikování různých vhodných metod řešení. Úlohy jsou inspirovány reálnými situacemi a problémy, které se uplatňují v běžném životě. Tyto úlohy jsou zábavné a neotřelé, což zvyšuje jejich motivaci a zájem o studium matematiky.

Pro žáky chystající se na jednotné přijímací zkoušky na víceletá gymnázia je bezesporu velmi důležité takovéto typy úlohy řešit, jelikož se v přijímacím řízení (jak uvádím v teoretické části) podobné úlohy vyskytují. Jak mohu soudit ze své pedagogické praxe tak i z některých odpovědí učitelů v dotazníkovém šetření, se tyto úlohy a možné postupy řešení v běžných hodinách matematiky moc často nevyskytují nebo se nevyskytují vůbec. Pokud se s nimi žáci nesetkají a nemají možnost si je vyřešit, neuspějí s největší pravděpodobností při přijímacím řízení tak dobře jako žáci, kteří s NÚ umí pracovat a dokážou je řešit.

3.1.1 Navržený soubor nestandardních úloh z matematiky

V následující části DP předkládám NÚ, které jsem vytvořila na základě dostupné literatury, modifikovala či samostatně vytvořila. Jedná se o NÚ řešené pomocí diofantovských rovnic, úlohy z kombinatoriky a NÚ z prostorové a rovinné geometrie.

3.1.1.1 Nestandardní úlohy řešené pomocí diofantovských rovnic

Úlohy těchto typů můžeme řešit tabulkovou metodou (doplňováním do tabulky), kdy za jednu proměnnou budeme dosazovat celé číslo z daného definičního oboru a zkoušet, ve kterém případě vyjde druhá a třetí proměnná (opět celé číslo) z daného definičního oboru hodnot. Do tabulky budeme zaznamenávat získané výpočty. Dále je můžeme řešit obrázkem, odhadem a matematicky pomocí diofantovských rovnic.

MARUŠKA A MINCE

Zadání:

Maruška dostala od babičky mince v hodnotách 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč. Celková hodnota všech mincí dohromady činila 100 korun. Kolik kusů od každé mince Maruška dostala, když víme, že nejvíce bylo pětikorunových mincí a nejméně korunových mincí a zároveň, že jednotlivé počty kusů mincí se od sebe lišily o tři kusy?

Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* početní operace sčítání a násobení, kombinace prvků, práce s neznámou, řešení rovnic se třemi neznámými.
- *Co si žáci musí uvědomit:* rozpoznat neznámé hodnoty v úloze a korunové mince (x), dvoukorunové mince (y) a pětikorunové mince (z) + jejich vyjádření pomocí algebraického výrazu x a $2y$ a $5z$.

- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: početní operace sčítání a násobení, znalost práce s rovnicemi, schopnost sestavovat jednoduché tabulky a číst z nich.

Řešení tabulkou:

Ze zadání této úlohy víme, že nejmenší počet kusů mincí jsou korunové mince, větší počet než korunové mince a to o tři kusy jsou dvoukorunové mince a nejvíce kusů mincí a opět o tři kusy od dvoukorunových mincí jsou pětikorunové mince. Z této podmínky tedy víme, že může být buďto jedna mince korunová plus 4 mince dvoukorunové plus 7 mincí pětikorunových, kdyby celková hodnota všech mincí nemusela být 100 korun. Pokud víme, že celková hodnota všech mincí musí být 100 korun, musíme zvolit jednotlivé počty mincí tak, aby součet všech hodnot dohromady byl 100 korun.

Do tabulky uvedeme jednotlivé počty a hodnoty jednokorunových, dvoukorunových a pětikorunových mincí.

Tabulka 1: Maruška a mince

Počet korunových mincí	1	2	3	4	5	6	7	***8***
Hodnota korunových mincí	1 Kč	2 Kč	3 Kč	4 Kč	5 Kč	6 Kč	7 Kč	***8 Kč***
Počet dvoukorunových mincí	4	5	6	7	8	9	10	***11***
Hodnota dvoukorunových mincí	8 Kč	10 Kč	12 Kč	14 Kč	16 Kč	18 Kč	20 Kč	***22 Kč***
Počet pětikorunových mincí	7	8	9	10	11	12	13	***14***
Hodnota pětikorunových mincí	35 Kč	40 Kč	45 Kč	50 Kč	55 Kč	60 Kč	65 Kč	***70 Kč***
Součet hodnot všech mincí dohromady	44 Kč	52 Kč	60 Kč	68 Kč	76 Kč	84 Kč	92 Kč	***100 Kč***

Z dané tabulky jsme zjistili, že **Maruška dostala od babičky 8 kusů korunových mincí, 11 kusů dvoukorunových mincí a 14 kusů pětikorunových mincí.**

Řešení rovnicí:

Ze zadání úlohy si vypíšeme nejdůležitější informace:

- mince hodnot: 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč,
- celková hodnota všech mincí: 100 Kč,
- nejmenší počet kusů mincí je korunových,
- největší počet kusů mincí je pětikorunových,
- jednotlivé počty kusů mincí se od sebe liší třemi kusy.

korunové mince (kusy) ... $\boldsymbol{x}$ ... hodnota mincí $1x$

dvoukorunové mince (kusy) ... $\boldsymbol{y}$ ... hodnota mincí $2y$

pětikorunové mince (kusy) ... $\boldsymbol{z}$ ... hodnota mincí $5z$

$x < y < z$

Jestliže víme, že se se kusy mincí od sebe liší vždy třemi kusy, kde nejméně je jednokorunových, dvoukorunových je o 3 kusy více a pětikorunových je o 6 kusů více než jednokorunových mincí. Z této informace si vypíšeme možné počty kusů, se kterými můžeme počítat:

Jednokorunové mince - počet kusů:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

Dvoukorunové mince - počet kusů vždy o tři více než jednokorunové mince:

1 + 3 , 2 + 3, 3 + 3, 4 + 3, 5 + 3, 6 + 3, 7 + 3, 8 + 3, 9 + 3, 10 + 3, ...

tj. (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...)

Pětikorunové mince - počet kusů vždy o tři více než dvoukorunové mince:

1 + 6, 2 + 6, 3 + 6, 4 + 6, 5 + 6, 6 + 6, 7 + 6, 8 + 6, 9 + 6, 10 + 6, ...

tj. (7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, ...)

- sestavíme rovnici dle zadání: $x + 2y + 5z = 100$ a do rovnice budeme doplňovat počty mincí dle zadaných podmínek:

$$\underline{x + 2y + 5z = 100}$$
$$1 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 100$$
$$44 \neq 100$$

$$\underline{x + 2y + 5z = 100}$$
$$2 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 = 100$$
$$52 \neq 100$$

$$\underline{x + 2y + 5z = 100}$$
$$3 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 9 = 100$$
$$60 \neq 100$$

$$\underline{x + 2y + 5z = 100}$$
$$4 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 10 = 100$$
$$68 \neq 100$$

$$\underline{x + 2y + 5z = 100}$$
$$5 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 11 = 100$$
$$76 \neq 100$$

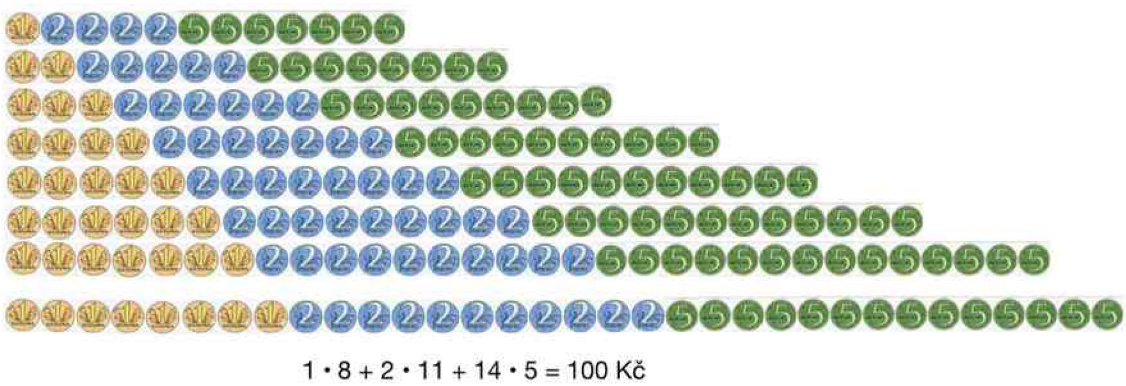
$$\underline{x + 2y + 5z = 100}$$
$$6 + 2 \cdot 9 + 5 \cdot 12 = 100$$
$$84 \neq 100$$

$$\underline{x + 2y + 5z = 100}$$
$$7 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 13 = 100$$
$$92 \neq 100$$

$$\underline{\mathbf{x + 2y + 5z = 100}}$$
$$\mathbf{8 + 2 \cdot 11 + 5 \cdot 14 = 100}$$
$$\mathbf{100 = 100}$$

Postupným doplňováním do rovnice jsme zjistili, že **Maruška dostala od babičky 8 kusů korunových mincí, 11 kusů dvoukorunových mincí a 14 kusů pětikorunových mincí**.

Řešení obrázkem:



Obrázek 2: Obrázek - Maruška a mince

PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ

Inspirováno: Kapitoly z didaktiky matematiky, s. 49

Zadání:

V půjčovně skateboardů mají pennyboardy a longboardy. Pennyboardy mají 4 kolečka a longboardy mají 8 koleček. Všechny skateboardy mají dohromady 60 koleček. Ke každému boardu se vždy půjčují helmy, kterých mají v půjčovně 13. Kolik mají v půjčovně pennyboardů a kolik longboardů?

Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* početní operace sčítání a násobení, kombinace prvků, práce s neznámou, řešení rovnic s dvěma neznámými.
- *Co si žáci musí uvědomit:* rozpoznat neznámé hodnoty v úloze a to pennyboardy (x) a longboardy (y) plus jejich vyjádření pomocí algebraického výrazu $4x+8y$.
- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: početní operace sčítání a násobení, úpravy rovnic o jedné a dvou neznámých, schopnost sestavovat jednoduché tabulky a číst z nich.

Úlohu budeme řešit doplňováním do tabulky. Dalším způsobem řešení je využití obrázku a nebo budeme odhadovat největší a nejmenší (extrémní) možný počet koleček pro oba boardy, který můžeme k 13 helmám přiřadit.

Řešení tabulkou:

Nejdříve budeme zaznamenávat pennyboardy. Každý pennyboard má 4 kolečka. Ta budeme rozpočítávat po čtyřech do počtu 60 koleček. Počet koleček pennyboardu je uvedený ve druhém řádku tabulky. Ve třetím řádku jsou uvedená zbylá kolečka pro longboard. Ta vypočítáme tak, že od celkového počtu koleček odečteme kolečka daného počtu pennyboardu. Počet longboardů určíme tak, že zbylá kolečka vydělíme 8, protože každý longboard má osm koleček.

Tabulka 1: Půjčovna skateboardů

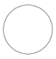
Pennyboard - počet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**	12	13	14	15
Kolečka pennyboardu	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	**44**	48	52	56	60
Zbylá kolečka	56	52	48	44	40	36	32	28	24	20	**16**	12	8	4	0
Longboard - počet	7	-	6	-	5	-	4	-	3	-	**2**	-	1	-	-
Helmy - celkem	8	-	9	-	10	-	11	-	12	-	**13**	-	14	-	15

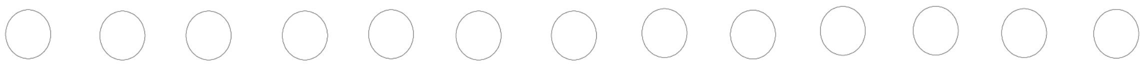
Pokud by nebyla v zadání uvedena podmínka, že se boardy půjčují pouze s helmou, kterých je 13, bylo by více možných řešení. Jelikož je podmínka v zadání uvedená, tak z pátého řádku tabulky zjistíme pomocí sečtení počtů pennyboardů a longboardů, kolik pennyboardů a longboardů potřebujeme k 13 helmám.

Z tabulky vyplývá, že v půjčovně mají 11 pennyboardů a 2 longboardy.

Řešení grafickým znázorněním:

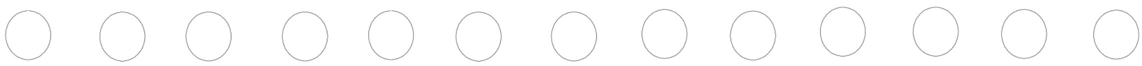
Budeme postupovat od zadané podmínky, že mají v půjčovně 13 kusů helem. Ke každé helmě přikreslíme alespoň čtyři kolečka.

1 helma  ... 4 kolečka (IIII). Z toho vyplývá, že
13 helem ... $13 \cdot 4 = 52$ koleček



IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII

Z celkového počtu koleček ještě zbývá 8 ..... $60 - 52 = 8$ koleček.
Těchto 8 koleček rozdělíme po čtyřech ..... 8 : 4 = 2. Z toho vyplývá, že ke dvěma helmám přidáme (přikreslíme) další 4 kolečka.



IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII IIII
IIII IIII

Z grafického znázornění plyne, že **v půjčovně mají 11 pennyboardů a 2 longboardy.**

Řešení odhadem:

Tentokrát budeme postupovat od známých podmínek a to, že mají v půjčovně 13 kusů helem a celkový počet koleček je 60.
Zvolíme si největší a nejmenší (extrémní) možný počet koleček pro oba boardy, který můžeme k 13 helmám přiřadit.

Největší možný počet koleček pro 13 boardů za předpokladu, že budou zapůjčeny oba typy boardů:

1 pennyboard + 12 longboardů ... 1 · 4 kolečka + 12 · 8 koleček = 4 + 96 = 100 koleček

- vyšlo vysoké číslo, které potřebujeme snížit, jelikož další podmínkou je, že na všech boardech je celkem 60 koleček.

Nejmenší možný počet koleček pro 13 boardů za předpokladu, že budou zapůjčeny oba typy boardů:

12 pennyboardů + 1 longboard ... 12 · 4 kolečka + 1 · 8 koleček = 48 + 8 = 56 koleček

- v tomto případě jsme se volbou počtu boardů dostali k výpočtu, který se přiblížil správnému počtu 60 koleček podstatně blíže, než u prvního příkladu s největším možným počtem koleček. Proto se budeme dále držet odhadu z druhého příkladu a ubereme jeden pennyboard a přidáme jeden longboard.

11 pennyboardů + 2 longboardy ... 11 · 4 kolečka + 2 · 8 koleček = 44 + 16 = 60

Postupným odhadem jsme došli k výsledku, že **v půjčovně mají 11 pennyboardů a 2 longboardy.**

Dílčí úloha č. 1:

Zadání:

V půjčovně skateboardů mají pennyboardy a longboardy. Pennyboardy mají 4 kolečka a longboardy mají 8 koleček. Ke každému boardu se vždy půjčují helmy, kterých mají 13. Kolik mají v půjčovně pennyboardů a kolik longboardů?

Pokud by nebyla v úloze uvedena podmínka 60 koleček jako je tomu v originálním zadání úlohy, ale pouze podmínka 13 helem, můžeme řešit úlohu tabulkou.

Řešení tabulkou:

Nejdříve budeme zaznamenávat do tabulky počet kusů pennyboardů. Do druhého řádku pod pennyboardy zaznamenáme počet longboardů, který budeme dopočítávat do počtu 13 helem. Tzn., že součet sloupce prvního a druhého řádku musí být vždy 13. Do třetího řádku budeme zaznamenávat celkový počet koleček k danému počtu pennyboardů a longboardů zároveň, kdy sečteme počet pennyboardů vynásobený počtem kusů koleček (4 kolečka), tzn. $1 \cdot 4$ a počet longboardů vynásobený počtem kusů koleček (8 koleček), tzn. $12 \cdot 8 \rightarrow 1 \cdot 4 + 12 \cdot 8 = 100$.

Tabulka 2: Půjčovna skateboardů - dílčí úloha č. 2

Pennyboardy Počet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Longboardy Počet	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Kolečka celkový počet	100	96	92	88	84	80	76	72	68	64	60	56

Kdyby byla v zadání uvedena pouze podmínka, že se boardy půjčují pouze s helmou, kterých je 13 a nebyl by omezený celkový počet koleček, bylo by více možných řešení.
Z tabulky vyplývá, že **v půjčovně mohou mít 12 různých možností pennyboardů a longboardů zároveň.**

Dílčí úloha č. 2:

Zadání:

V půjčovně skateboardů mají pennyboardy a longboardy. Pennyboardy mají 4 kolečka a longboardy mají 8 koleček. Všechny skateboardy mají dohromady 60 koleček. Kolik mají v půjčovně pennyboardů a kolik longboardů?

Pokud by nebyla v úloze uvedena podmínka 13 helem v půjčovně jako je tomu v originálním zadání úlohy, ale pouze podmínka 60 koleček, je řešení obdobné.

Řešení pomocí diofantovské rovnice a zaznamenání do tabulky:

K řešení těchto úloh můžeme také použít diofantovské rovnice typu $ax+by=c$.
Nejprve zjistíme, zda má rovnice takové řešení. Prvním krokem bude zjištění největšího společného dělitele a,b. Druhým krokem bude zjištění, zda tímto dělitelem lze dělit číslo c.

x ... pennyboardy

y ... longboardy

c ... počet koleček

t ... celé číslo

$ax+by=c$

$4x+8y=60$

$2x+4y=30$

$x+2y=15$ ... z této rovnice vypočítáme neznámou x

$x=15-2y$ ... z této rovnice vypočítáme neznámou y

$$y = \frac{15-x}{2} = 7{,}5 - \frac{x}{2} = 7 + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} = 7 + \frac{1-x}{2}$$

Jelikož hledáme neznámou proměnnou y z oboru celých čísel, musí i výsledkem zlomku $\frac{1-x}{2}$ být celé číslo. Za tento zlomek si zvolím parametr t.

$t = \frac{1-x}{2}$

$2t = 1 - x$ kde $t \neq 0$

$\boldsymbol{x = 1 - 2t}$

Proměnná x je větší než nula (pennyboardů musí být více než nula).

$1 - 2t > 0$

$-2t > -1 \rightarrow \boldsymbol{t} < \frac{1}{2}$

Proměnnou $x=1-2t$ dosadím do rovnice

$x = 15 - 2y$

$1 - 2t = 15 - 2y \rightarrow y = 14 + 2t = \boldsymbol{7 + t}$

Proměnná y je větší než nula (longboardů musí být více než nula) a proto, $\boldsymbol{t > -7}$

Výsledné t je tedy větší než -7 a zároveň menší než $\frac{1}{2}$,

$t \in (0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7)$

Řešení zaznamenáváním do tabulky:

Tabulka 3: Půjčovna skateboardů - dílčí úloha č. 2

t celé číslo	-1	-2	-3	-4	-5	-6
x pennyboardy $1-2t$	3 1 - 2 · (-1)	5 1 - 2 · (-2)	7 1 - 2 · (-3)	9 1 - 2 · (-4)	11 1 - 2 · (-5)	13 1 - 2 · (-6)
y longboardy $7+t$	6 7 + (-1)	5 7 + (-2)	4 7 + (-3)	3 7 + (-4)	2 7 + (-5)	1 7 + (-6)
k počet koleček $x \cdot 4 + y \cdot 8$	60 3 · 4 + 6 · 8 12 + 48	60 5 · 4 + 5 · 8 20 + 40	60 7 · 4 + 4 · 8 28 + 32	60 9 · 4 + 3 · 8 36 + 24	60 11 · 4 + 2 · 8 44 + 16	60 13 · 4 + 1 · 8 52 + 8

Z řešení zaznamenáváním do tabulky jsem zjistili, že je šest možných řešení. **V půjčovně můžou mít 3 pennyboardy (dále jen P) a 6 longboardů (dále jen L), nebo 5 P a 5 L, nebo 7 P a 4 L, nebo 9 P a 3 L, nebo 11 P a 2 L, a nebo 13 P a 1 L.**

DĚDEČEK A SAZENICE

Inspirováno: VÚP, Nestandardní aplikační úlohy problémy pro 1. stupeň ZŠ str. 45

Zadání:

Dědeček si doma vypěstoval sazenice rajčat, paprik a okurek. Rozhodl se, že je prodá na sobotním trhu. Všechny své vypěstované sazenice prodal a utržil tím 500 korun. Přitom jednu sazenici rajčat prodal za 35 korun, paprik za 60 korun a okurek za 45 korun. Také víme, že od každého kusu prodal alespoň jednu sazenici a zároveň víme, že sazenic rajčat a okurek prodal stejné množství. Kolik kusů od každé sazenice prodal?

Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* rovnice, soustavy rovnic, aritmetické operace sčítání a násobení, kombinatorické uvažování, finanční gramotnost.

- *Co si žáci musí uvědomit:* identifikovat všechny neznámé hodnoty v úloze a jejich závislost na zadaných podmínkách.
- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: matematické operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, práce s rovnicemi a neznámými, schopnost řešit soustavy rovnic, finanční gramotnost, schopnost číst a sestavovat jednoduché tabulky.

Řešení sestavením tabulky:

R .... sazenice rajčat

P ... sazenice paprik

O ... sazenice okurek

R a O ... stejné množství

Budeme vycházet z podmínky, že sazenic rajčat a okurek dědeček prodal stejné množství. K němu budeme dopočítávat sazenice paprik do hodnoty 500 korun. Dopočítávaná částka musí být dělitelná bez zbytku cenou paprik tj. 60 korun.

Tabulka 4: Dědeček a sazenice

rajčata - počet sazenic	**1**	2	3	**4**	5
cena v korunách za počet sazenic	**35**	70	105	**140**	175
okurky - počet sazenic	**1**	2	3	**4**	5
cena v korunách za počet sazenic	**45**	90	135	**180**	225
celkem korun za R + O	**80**	160	240	**320**	400
dopočítání částky do 500 korun 500 - (R + O)	**420**	340	260	**180**	100
počet paprik (vydělíme dopočítanou částku 60 korunami)	**7**	X	X	**3**	X

Z tabulky jsme zjistili, že má úloha dvě řešení. **Dědeček buďto prodal po jednom kuse sazenic rajčat s okurkami a k tomu sedm sazenic paprik, nebo prodal po čtyřech sazenicích rajčat s okurkami a k tomu tři sazenice paprik.**

Dílčí úloha č. 1:

Zadání:

Dědeček si doma vypěstoval sazenice rajčat, paprik a okurek. Rozhodl se, že je prodá na sobotním trhu. Všechny své vypěstované sazenice prodal a utržil tím 500 korun. Přitom jednu sazenici rajčat prodal za 35 korun, paprik za 60 korun a okurek za 45 korun. Také víme, že od každého kusu prodal alespoň jednu sazenici. Kolik kusů od každé sazenice prodal?

Pokud by nebyla v úloze uvedena podmínka, že dědeček prodal stejné množství sazenic rajčat a okurek jako je uvedená v předchozím zadání, budeme úlohu řešit pomocí diofantovské rovnice a vypočítaná data zaznamenávat do tabulky.

Řešení: pomocí diofantovské rovnice a zaznamenání do tabulky.

R .... sazenice rajčat

P ... sazenice paprik

O ... sazenice okurek

Úloha vede k řešení diofantovské rovnice typu $ax+by=c$ a k řešení metodou dostupnou pro žáky, tj. doplňováním do tabulky.

$35R+45P+60O=500$

$7R+9P+12O=100$ ... základní rovnice, ze které vypočítáme neznámou R, P, O

$R=(100-9P-12O):7$

... aby neznámá P byla celé číslo, musí být výraz v závorce dělitelný číslem 7

$P=(100-7R-12O):9$

... aby neznámá P byla celé číslo, musí být výraz v závorce dělitelný číslem 9

$O=(100-7R-9P):12$

... aby neznámá O byla celé číslo, musí být výraz v závorce dělitelný číslem 12

Tabulka 5: Dědeček a sazenice - dílčí úloha č. 1

R	$100-9P-12O$	P	$100-7R-12O$	O	$100-7R-9P$
1	7	1	9	1	12
				1	12
2	14	2	18	2	24
3	21	3	27	3	36
4	28	4	36	4	48
5	35	5	45	5	60
6	42	6	54	6	72
7	49	7	63	7	84
8	56	8	72	8	96
9	63	9	81	-	-
10	70	10	90	-	-
11	77	11	99	-	-
12	84	-	-	-	-
13	91	-	-	-	-
14	98	-	-	-	-

Ze sestrojené tabulky budeme postupně doplňovat do daných rovnic vypsané násobky čísla 7 (R ... rajčata), 9 (P ... papriky) a 12 (O ... okurky) a výsledek musí být roven 100. Tzn. k jedné sazenici rajčete, které vyjadřuje číslo sedm, musíme přiřadit takové číslo ze sloupečku P a sloupečku O, aby byl požadovaný výsledek roven 100.

7 + 81 + 12 = 100 ... **1 sazenice rajčete + 9 sazenic paprik + 1 sazenice okurky**

... $1 \cdot 35 + 9 \cdot 45 + 1 \cdot 60 = 35 + 405 + 60 = 500$ korun

70 + 27 + 12 = 100 ... **10 sazenice rajčat + 2 sazenice paprik + 1 sazenice okurky**

... $10 \cdot 35 + 2 \cdot 45 + 1 \cdot 60 = 350 + 90 + 60 = 500$ korun

49 + 27 + 24 = 100 ... 7 **sazenice rajčat + 3 sazenice paprik + 2 sazenice okurek**

... $7 \cdot 35 + 3 \cdot 45 + 2 \cdot 60 = 245 + 135 + 120 = 500$ korun

28 + 36 + 36 = 100 ... 4 **sazenice rajčat + 4 sazenice paprik + 3 sazenice okurek**

... $4 \cdot 35 + 4 \cdot 45 + 3 \cdot 60 = 140 + 180 + 180 = 500$ korun

Z doplněné tabulky jsme zjistili, že **dědeček mohl prodat své sazenice ve čtyřech možných variantách.**

3.1.1.2 Nestandardní úlohy kombinatorického typu

Úlohy těchto typů budeme řešit výčtem všech možností, pomocí stromových diagramů, kde každá větev reprezentuje jednu možnost a kombinací větví můžeme nalézt celkový počet variant. Tabulkovou metodou (doplňováním do tabulky), kam budeme zapisovat všechny možnosti, které mohou nastat. Dále základními kombinatorickými pravidly a vztahy. Pro počet možných uspořádání n prvků můžeme použít faktoriál n!

ŠTAFETOVÉ ZÁVODY

Inspirováno: Koumák pro páťáky, s. 162

Zadání:

Na plavecké štafetové závody ve volném stylu jsou z páté třídy vybráni 4 žáci: Denisa, Patrik, Monika a Jarda. Urči, kolika různými způsoby můžeme sestavit pořadí, ve kterém budou plavat (nikdo nesmí ve štafetě plavat dvakrát).

Poznámka:

Štafeta je druh závodu, při kterém členové družstva postupně absolvují určité části trati. Často si členové družstva musí předávat určený předmět, zpravidla tzv. štafetový kolík. V plavání si nic nepředávají. (Wikipedia)

Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* oblast kombinatoriky v matematice.
- *Co si žáci musí uvědomit:* každý žák může plavat pouze jednou - nesmí se opakovat ve stejném pořadí, počet možností závisí na počtu žáků a pozic.
- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: matematické operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, porozumění co je to pořadí a kombinace, základní znalosti kombinatoriky.

Řešení výčtem všech možných variant:

Úlohy těchto typů můžeme řešit rozepsáním všech účastníků na všech možných pozicích , jak za sebou ve štafetě budou plavat.

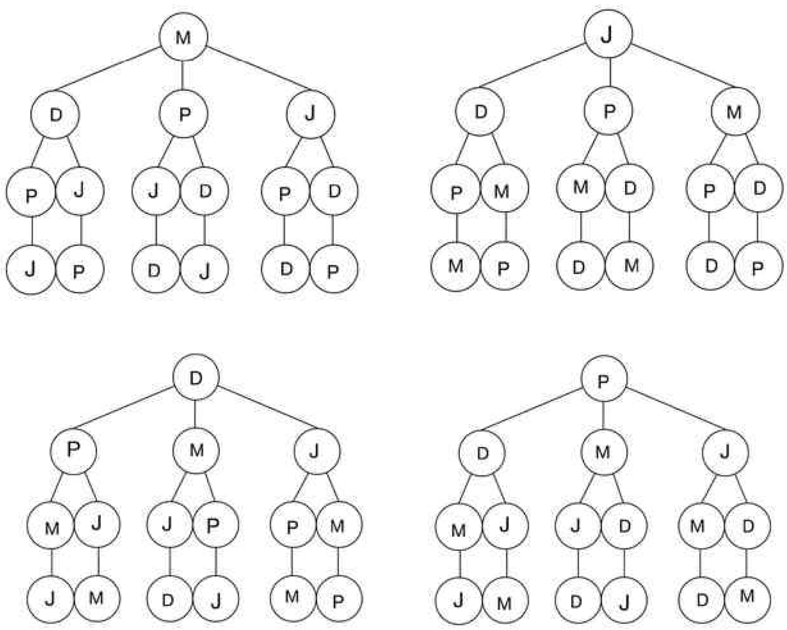
4 žáci (D ... Denisa, P ... Patrik, M ... Monika, J ... Jarda):

D - P - M - J	D - P - J - M	P - D - M - J	P - D - J - M
D - M - J - P	D - M - P - J	P - M - J - D	P - M - D - J
D - J - P - M	D - J - M - P	P - J - D - M	P - J - M - D

M - D - P - J	M - D - J - P	J - D - P - M	J - D - M - P
M - P - J - D	M - P - D - J	J - P - M - D	J - P - D - M
M - J - D - P	M - J - P - D	J - M - D - P	J - M - P - D

Z výčtu všech možných variant a z řešení stromovým diagramem (viz obrázek č. 3), kdy budou plavat 4 děti, nastane celkem 24 různých možností. Jelikož budou plavat ve štafetě, může být každý z nich zařazen ve štafetě na první, druhé, třetí nebo čtvrté pozici. Zvolíme jedno dítě na první pozici a na ostatní pozice zařadíme zbylé tři děti, které budeme obměňovat, aby se vystřídaly na všech třech zbylých pozicích. Výsledkem bude šest možných variant pořadí, jak je vidět z těchto výčtů možností a stromového diagramu. Z toho vyplývá, že 4 x 6 = **24 různých možností, v jakém pořadí poplavou při štafetě.**

Řešení stromovým diagramem:



Obrázek 3: Stromový diagram - Štafetové závody - 4 žáci

(24 možností - 4 x 6 možnosti)

Řešení tabulkou:

Tabulka 6: Štafetové závody

Možnosti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. poplave	D	D	D	D	D	D	P	P	P	P	P	P
2. poplave	P	P	M	M	J	J	D	D	M	M	J	J
3. poplave	M	J	P	J	M	P	M	J	J	D	D	M
4. poplave	J	M	J	P	P	M	J	M	D	J	M	D

Možnosti	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1. poplave	M	M	M	M	M	M	J	J	J	J	J	J
2. poplave	D	D	P	P	J	J	D	D	P	P	M	M
3. poplave	P	J	J	D	D	P	P	M	M	D	D	P
4. poplave	J	P	D	J	P	D	M	P	D	M	P	D

- ve sloupcích jsou zapsány všechny kombinace, které mohou nastat
- v řádcích jsou zapsané jednotlivé děti, na jaké pozici (v jakém pořadí) budou plavat štafetu

Řešení matematicky:

Matematicky se pro výpočet těchto typů úloh používají permutace. Permutace na *n* prvcích je dána faktoriálem *n,* resp. *n!* . Faktoriál nám umožňuje spočítat, kolika způsoby můžeme seřadit "*n*" prvků, kde "*n*" je vždy přirozené číslo. Faktoriál přirozeného čísla "*n*" značíme *n*!..

Vypočítáme ho jako součin $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

žáci (D, P, M a J):

4 faktoriál (čtyři žáci) ... kolika způsoby můžeme uspořádat 4 prvky (čtyři žáky)

$4! = 4 \cdot (4 - 1) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 3) = 24$

Tzn., že 4 **prvky můžeme seřadit ve 24 různých variantách pořadí.**

Využití kombinatorického pravidla součinu:

Každý ze čtyř žáků může plavat jako první, druhý, třetí nebo čtvrtý. Pro prvního plavce existují **4** možnosti, pro druhého **3** možnosti, pro třetího **2** možnosti a pro posledního plavce pouze **1** možnost, jelikož první tři již byli zvoleni. Proto můžeme využít pravidlo kombinatorického součinu, kolika různými způsoby můžeme sestavit pořadí, ve kterém budou žáci plavat.

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **24 způsobů sestavení pořadí, ve kterou budou děti plavat**.

Dílčí úloha č. 1:

Zadání:

Na plavecké štafetové závody ve volném stylu jsou z páté třídy vybráni 2 žáci: Denisa a Patrik. Urči, kolika způsoby můžeme sestavit pořadí, ve kterém budou plavat (nikdo nesmí ve štafetě plavat dvakrát).

Řešení výčtem všech možných variant:

Úlohu můžeme řešit rozepsáním všech účastníků na všech možných pozicích, jak za sebou ve štafetě budou plavat a dále prohozením pořadí na těchto pozicích.

Zjistíme, kolik existuje možností, když budou plavat dva žáci:

2 žáci (D ... Denisa, P ... Patrik): D - P P - D

- **v případě, kdy budou plavat dva žáci, nastanou 2 možnosti**. Jako první bude plavat D a druhý P a nebo bude plavat jako první P a druhá D.

Řešení matematicky:

žáci (D a P):

2 faktoriál (dva žáci) ... kolika způsoby můžeme uspořádat dva prvky (dva žáky)

$2! = 2 \cdot (2 - 1) = 2$ ... **dvě možnosti**

Dílčí úloha č. 2:

Zadání:

Na plavecké štafetové závody ve volném stylu jsou z páté třídy vybráni 3 žáci: Denisa a Patrik a Monika. Urči, kolika způsoby můžeme sestavit pořadí, ve kterém budou plavat (nikdo nesmí ve štafetě plavat dvakrát).

Řešení výčtem všech možných variant:

Úlohu můžeme řešit rozepsáním všech účastníků na všech možných pozicích, jak za sebou ve štafetě budou plavat a dále prohozením pořadí na těchto pozicích.

Zjistíme, kolik existuje možností, když budou plavat tři žáci:

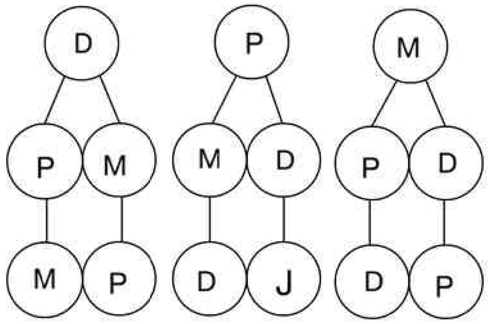
3 žáci (D ... Denisa,P ... Patrik, M ... Monika):

D - P - M		P - D - M		M - D - P

D - M - P		P - M - D		M - P - D

- **v případě, kdy budou plavat 3 žáci, nastane celkem 6 různých možností.**

Řešení stromovým diagramem:



Obrázek 4: Stromový diagram - Štafetové závody - 3 žáci (6 možností - 3 x 2 možnosti)

Řešení tabulkou:

Tabulka 7: Štafetové závody - dílčí úloha č. 2

Možnosti	1	2	3	4	5	6
1. poplave	D	D	P	P	M	M
2. poplave	P	M	D	M	D	P
3. poplave	M	P	M	D	P	D

Řešení matematicky:

žáci (D, P a M):

3 faktoriál (tři žáci) ... kolika způsoby můžeme uspořádat tři prvky (tři žáky)

$3! = 3 \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 2) = 6$ ... **šest možností**

V případě, kdy budou plavat 3 žáci, nastane celkem 6 různých možností.

KÓD ZÁMEČKU ŠATNÍ SKŘÍŇKY

Zadání:

Žáci si mají na začátku školního roku na svých šatních skříňkách nastavit kód, který se skládá ze tří symbolů - kroužek, trojúhelník a kostička, aby se nikdo cizí do jejich skříňky nedostal. Symboly se můžou mezi sebou opakovat. Kolika možnými způsoby je možné kód nastavit?

Charakteristika úlohy:

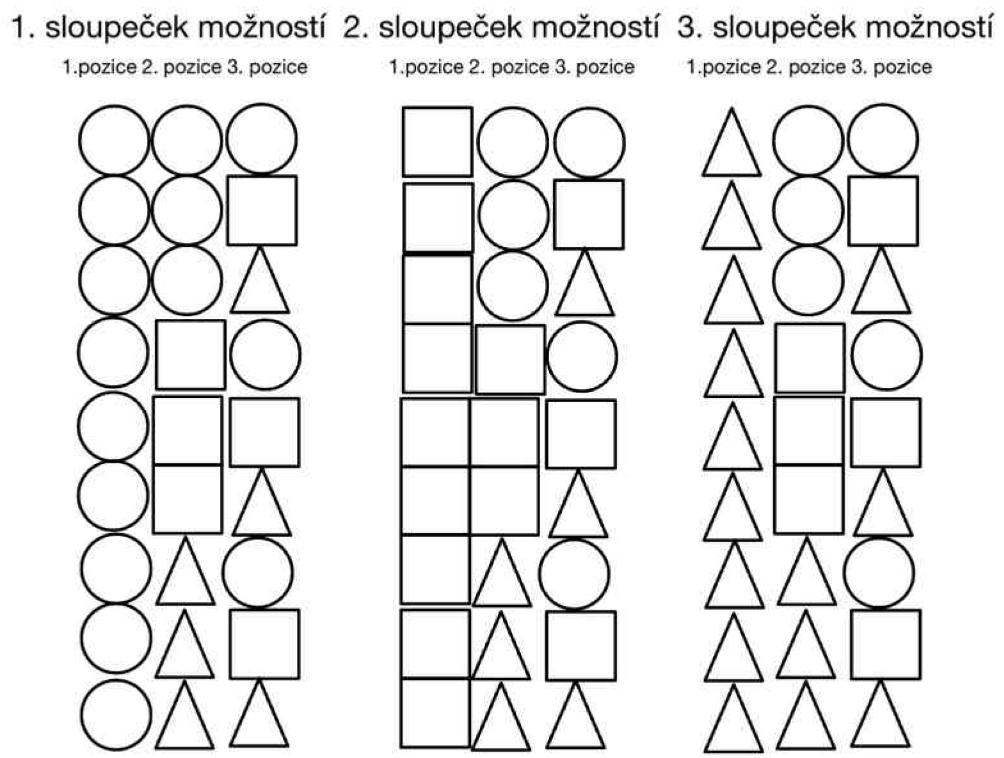
- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* oblast kombinatoriky v matematice.
- *Co si žáci musí uvědomit:* identifikovat tři symboly, které jsou k dispozici pro nastavení kódu, ze kterých se skládá, můžeme je umístit na tři různé pozice a máme možnost opakování těchto symbolů.
- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: rozumět symbolům, uvědomit si existenci několika pozic v kódu, na kterých mohou být symboly umístěny.

Metody řešení

Řešení zakreslením všech možností

Metoda vhodná pro žáky. Zakreslíme všechny možnosti kódů, které se mohou na skříňce nastavit. Symboly se mohou v kódu opakovat, tzn., že se může kód skládat například ze tří trojúhelníků, nebo dvou trojúhelníků a jednoho kroužku či všech tří různých symbolů. Budeme postupovat systematicky. Nejdříve si sestavíme tři sloupce, ve kterých budou na prvních pozicích vždy pro každý sloupec stejné symboly. Tzn., že v prvním sloupci bude na první pozici vždy kroužek, ve druhém sloupci bude na první pozici vždy kostička a ve třetím sloupci bude na první pozici vždy trojúhelník.

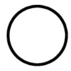
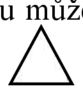
Na druhé pozici ve všech třech sloupcích se budou symboly střídat vždy po třech stejných symbolech (tři kroužky, tři kostičky a tři trojúhelníky). Na třetí pozici se budou pravidelně střídat všechny tři symboly (kroužek, kostička a trojúhelník). Tímto způsobem doplníme všechny tři sloupce na druhých a třetích pozicích, viz rozpis níže.

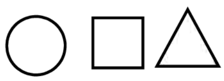


Obrázek 5: Řešení zakreslením všech možností - Kód zámečku šatní skříňky (3 symboly x 9 možností = 27 možností)

Zakreslením všech možností třímístného kódu, u kterých se mohou symboly v kódu opakovat, jsme zjistili, že **žáci mají na výběr 27 možností nastavení svého kódu na skříňce**.

Řešení matematicky:

Na každou ze tří pozici zámku můžeme nastavit jeden ze tří symbolů - kroužek , kostičku  a trojúhelník  .

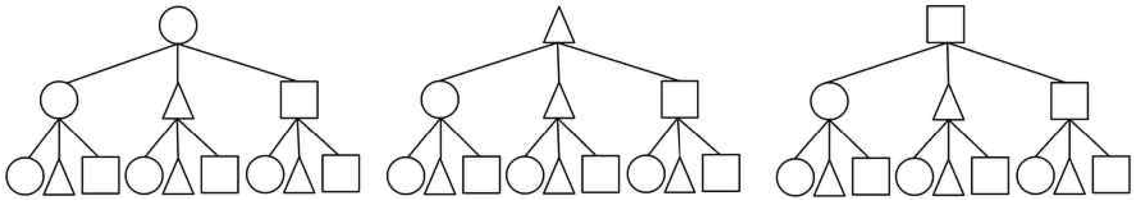
tři symboly ... 

tři pozice ... 1. pozice, 2. pozice a 3. pozice

Postupně budeme sestavovat kód, kde na první pozici můžeme zvolit jeden ze 3 různých symbolů. Symboly můžeme opakovat, tzn., že i na druhé pozici kódu můžeme využít opět jeden ze tří symbolů, např. stejný symbol jako jsme zvolili na první pozici. Stejně tak i na třetí pozici máme opět možnost zvolit jeden ze tří symbolů. Pro každou ze tří pozic máme tedy k jejímu obsazení k dispozici 3 symboly.

Pro výpočet použijeme kombinatorické pravidlo součinu $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Daným kombinatorickým součinem jsem vypočítali, **že žáci mají 27 možností nastavení kódu na svém zámku šatní skříňky**. Jedná se zde o variace s opakováním.

Řešení stromovým diagramem:



Obrázek 6: Řešení stromovým diagramem - Kód zámečku šatní skříňky (3 symboly x 9 možností = 27 možností)

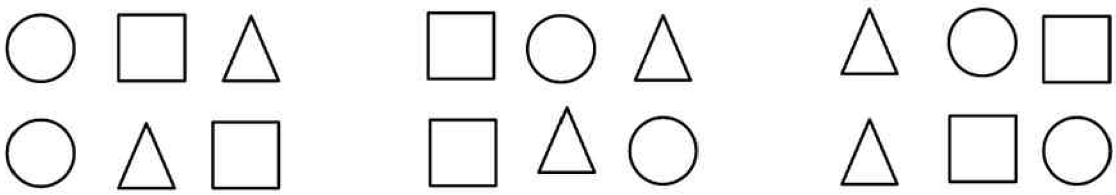
Dílčí úloha č. 1:

Zadání:

Žáci si mají na začátku školního roku na svých šatních skříňkách nastavit kód, který se skládá ze tří symbolů - kolečko, trojúhelník a čtverec, aby se nikdo cizí do jejich skříňky nedostal. Symboly se nemůžou mezi sebou opakovat. Kolika možnými způsoby si můžou kód nastavit?

Sestavujeme kód se symboly, ve kterém se žádný ze tří symbolů nesmí opakovat.

Řešení zakreslením všech variant (trojic) bez opakování symbolů:



Obrázek 7: Řešení zakreslením všech variant (trojic) bez opakování symbolů - Kód zámečku šatní skříňky (3 symboly x 2 možnosti= 6 možností)

- nakreslíme si všechny varianty, které mohou nastat,
- žádný ze symbolů se nesmí opakovat. Všechny symboly budeme postupně střídat.

Kód si můžou nastavit 6 možnými způsoby.

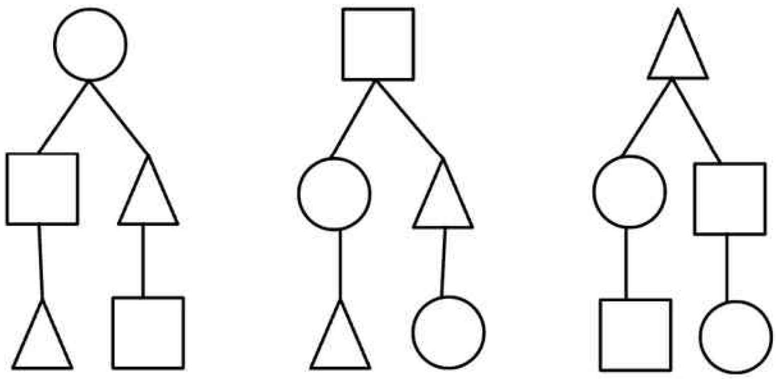
Řešení matematicky:

Na první pozici kódu můžeme nastavit jeden symbol ze **tří** možných symbolů, na druhou pozici můžeme nastavit jeden symbol ze **dvou** zbývajících symbolů (jeden symbol jsme již použili pro první pozici) a na třetí pozici můžeme nastavit poslední symbol z **jednoho** zbývajícího symbolu (jedna možnost, protože dva různé symboly jsme použili v předešlých 2 krocích).

Pro výpočet použijeme permutace ze tří prvků: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Kód si můžou nastavit 6 možnými způsoby.

Řešení stromovým diagramem:



Obrázek 8: Řešení stromovým diagramem (bez opakování symbolů) - Kód zámečku šatní skříňky (3 symboly x 2 možnosti= 6 možností)

Kód si můžou nastavit 6 možnými způsoby.

PODÁVÁNÍ RUKOU

Inspirováno: Matematika pro 5. ročník, učebnice: Hejného metoda, s. 9

Zadání:

Šest kamarádů z letního tábora se po roce opět potkají na stejném táboře. Při setkání se navzájem vítají a podávají si u toho ruce na přivítanou. Kolikrát si kamarádi mezi sebou podají ruce?

Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* oblast kombinatoriky v matematice.
- *Co si žáci musí uvědomit:* každý kamarád si podá ruce s každým dalším kamarádem, kde není důležité pořadí, ve kterém si budou ruce podávat.

- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: základní aritmetické operace - sčítání, odčítání, násobení a dělení, základní znalosti kombinatoriky.

Řešení vypsáním všech kombinací (dvojicí):

Jednotlivé kamarády označíme písmeny (A, B, C, D, E, F) a budeme zjišťovat, jaké kombinace kamarádů při podávání rukou nastanou.

Ruce si podají vždy dva kamarádi. Pokud si podají ruku kamarádi A a B, tak je to to samé jako BA → z těchto dvou kamarádů vznikne pouze jedno podání rukou.

1. kamarád ... A	4. kamarád ... D
2. kamarád ... B	5. kamarád ... E
3. kamarád ... C	6. kamarád ... F

AB	BA	CA	DA	EA	FA
AC	BC	CB	DB	EB	FB
AD	BD	CD	DC	EC	FC
AE	BE	CE	DE	ED	FD
AF	BF	CF	DF	EF	FE

... kombinace všech dvojic, které mohou nastat

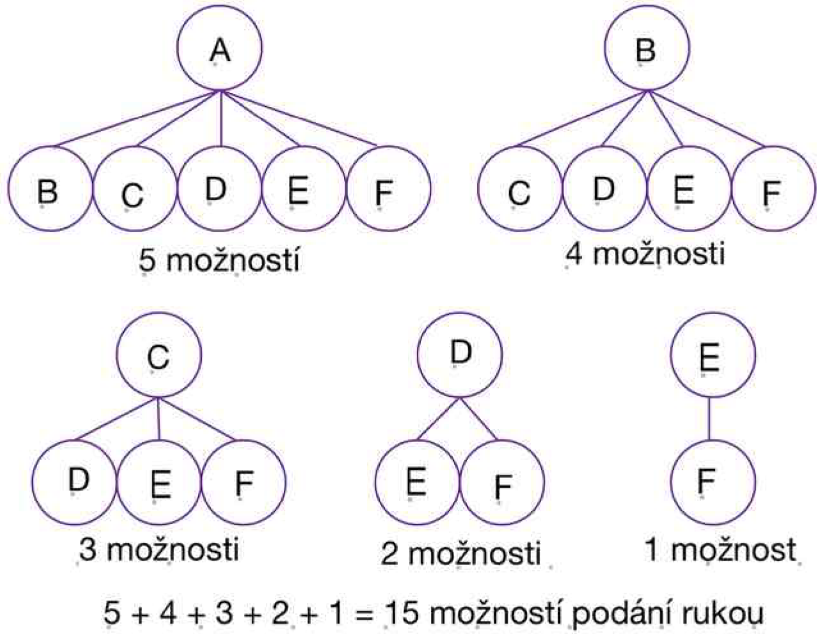
Vypsáním všech možností jsme zjistili, že jich je celkem 30. Vyškrtáme ze všech vypsaných kombinací duplikované dvojice:

AB	~~BA~~	~~CA~~	~~DA~~	~~EA~~	~~FA~~
AC	BC	~~CB~~	~~DB~~	~~EB~~	~~FB~~
AD	BD	CD	~~DC~~	~~EC~~	~~FC~~
AE	BE	CE	DE	~~ED~~	~~FD~~
AF	BF	CF	DF	EF	~~FE~~

Vyškrtáním zbyde 15 možností vzájemného podání rukou.

Kamarádi si mezi sebou podají ruce 15krát.

Řešení stromovým diagramem:



Obrázek 9: Podávání rukou - řešení stromovým diagramem

Kamarádi si mezi sebou podají ruce 15krát.

Řešení tabulkou:

Tabulka 8: Podávání rukou - řešení tabulkou

	1. kamarád	2. kamarád	3. kamarád	4. kamarád	5. kamarád	6. kamarád
1. kamarád	X	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
2. kamarád	už si podali	X	ANO	ANO	ANO	ANO
3. kamarád	už si podali	už si podali	X	ANO	ANO	ANO
4. kamarád	už si podali	už si podali	už si podali	X	ANO	ANO
5. kamarád	už si podali	už si podali	už si podali	už si podali	X	ANO
6. kamarád	už si podali	už si podali	už si podali	už si podali	už si podali	X

Do záhlaví tabulky napíšeme prvního až šestého kamaráda a budeme zaznamenávat, jaké kombinace podávání rukou nastanou. Ruce si podají vždy dva kamarádi. Pokud si podají ruku první a druhý kamarád, již nebudeme zaznamenávat do tabulky opačné podávání rukou a to druhý s prvním kamarádem.

Z tabulky můžeme vyčíst, že kamarádi si mezi sebou podali ruce 15tkrát.

Řešení matematicky:

Nezáleží na pořadí. Proto budeme počítat kombinace, konkrétně kombinace druhé třídy ze šesti prvků, tj. K(2,6). Vždy si podávají ruce dva žáci z celkového počtu šesti žáků. Můžeme to zaznačit také kombinačním číslem šest nad dvěma a můžeme pokračovat tak, že nejdříve vypočítáme příslušné variace. To znamená šest krát pět, což jsou všechny dvojice, kdy nám záleží na pořadí a vydělíme je číslem dva krát jedna, což je počet způsobů, jak tyto dvojice seřadit (jsou to pouze dva způsoby):

$$K(2,6) = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

$$K(2,6) = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Celkem tedy bude 15 podání rukou.

PANÍ UČITELKA PARÁDNICE

Inspirováno: Pythagoriáda 2017/2018 - zadání školního kola

Zadání:

Paní učitelka si pro sebe ráda nakupuje nové oblečení, aby se dětem ve škole líbila. Nejraději nakupuje oblečení v těchto barvách: bílá, černá, šedá a zelená. V těchto barvách si nakoupila sukně, punčocháče, halenky a šály na krk. Když si vybírá oblečení, ve kterém půjde do školy, tak si nejdříve vybere halenku a punčocháče stejné barvy. Dále si oblékne odlišnou barvu sukně a nakonec si vezme šálu na krk, která je taktéž jiné barvy než zbytek oblečení. Paní učitelka nikdy nenosí černou a šedou barvu dohromady. Kolik různých kombinací oblečení paní učitelka má?

Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* kombinatorika, číselné operace sčítání a násobení, logické (slovní) úlohy.
- *Co si žáci musí uvědomit:* jaké jsou vtahy mezi jednotlivými prvky, vyloučení a omezení určitých možností kombinací.
- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: matematické operace sčítání a násobení, základní znalosti kombinatoriky, práce s textem.

Řešení vypsáním všech možných kombinací oblečení:

Jednotlivé druhy oblečení si označíme písmeny (H, P, S, Š) a budeme zjišťovat, jaké kombinace barev oblečení mohou nastat, když se nesmí kombinovat zároveň černá barva se šedou, halenka a punčocháče mají být vždy stejné barvy a ostatní druh oblečení má být odlišné barvy.

halenka ...	H	barvy:	bílá
punčocháče ...	P		černá
sukně ...	S		šedá
šála ...	Š		zelená

- H + P (halenka a punčocháče) jsou vždy stejné barvy,
- černá a šedá barva se nesmí spolu kombinovat.

H + P	S		Š	
bílá	černá	+	zelená	
	zelená	+	černá	
	šedá	+	zelená	
	zelená	+	šedá	4 možnosti
zelená	bílá	+	černá	
	černá	+	bílá	
	šedá	+	bílá	
	bílá	+	šedá	4 možnosti
černá	bílá	+	zelená	
	zelená	+	bílá	2 možnosti
šedá	bílá	+	zelená	
	zelená	+	bílá	2 možnosti

celkem: 12 možností

Vypsáním všech možných barevných kombinací na jednotlivé druhy oblečení jsme zjistili, že existuje 12 různých kombinací.

Paní učitelka má 12 různých kombinací oblečení.

Řešení matematicky:

Řešení úlohy musíme rozdělit na dvě části. První část, pro halenku a punčocháče vybírám z barev bílé a zelené a druhou část, kdy pro halenku a punčocháče vybírám barvu šedou a černou.

První část:

H + P ... volba zelené nebo bílé barvy:

- první krok - vybereme H + P v barvách bílé nebo zelené (tzn. 2 možnosti),
- druhý krok - vybíráme barvu pro S a to ze zbylých dvou barev šedé či černé (tzn. 2 možnosti),
- třetí krok - vybíráme barvu pro Š, kde máme opět dvě možnosti v závislosti na předchozí volbě.

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností - využijeme zde kombinatorické pravidlo součinu.

Druhá část:

H + P ... volba šedé nebo černé barvy:

- první krok - vybereme H + P v barvě šedé či černé (tzn. 2 možnosti),
- druhý krok - vybíráme barvu pro S z barev bílé či zelené (tzn. 2 možnosti),
- třetí krok - vybíráme barvu pro Š, kde zbývá již jen jedna (tzn. 1 možnost).

$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ možnosti - využijeme zde kombinatorické pravidlo součinu.

Třetí část:

- v posledním kroku celé úlohy sečteme všechny možnosti.

$2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8 + 4 = 12$ možností.

Paní učitelka má 12 různých kombinací oblečení.

Dílčí úloha č. 1:

Zadání:

Paní učitelka si pro sebe ráda nakupuje nové oblečení, aby se dětem ve škole líbila. Nejraději nakupuje oblečení v těchto barvách: bílá, černá, šedá a zelená. V těchto barvách si nakoupila sukně, punčocháče, halenky a šály na krk. Když si vybírá oblečení, ve kterém půjde do školy, tak si nejdříve vybere halenku a punčocháče stejné barvy. Dále si oblékne odlišnou barvu sukně a nakonec si vezme šálu na krk, která je taktéž jiné barvy než zbytek oblečení. Kolik různých kombinací oblečení paní učitelka má?

Daná úloha neobsahuje podmínku, že paní učitelka nikdy nekombinuje černou a šedou barvu dohromady, jak je uvedené v předešlém zadání. Tím se mění obtížnost úlohy na lehčí. Úlohu budeme řešit matematicky a vypsáním všech možných barevných kombinací jednotlivých druhů oblečení.

Řešení matematicky:

Jelikož si paní učitelka obléká halenku a punčocháče stejné barvy, může vybírat ze **4** barev. Dále si oblékne sukni rozdílné barvy, kterou může vybírat již pouze ze **3** zbylých barev. Jako poslední si vezme šálu odlišné barvy než předešlé oblečení, na kterou má výběr ze **2** barev. Celkový počet různých kombinací oblečení je výsledkem permutace čtyř prvků, kdy je v prvním kroku (halenka a punčocháče) vybraná jedna barva ze 4 barev, ve druhém kroku (sukně) další barva ze 3 barev a v posledním kroku (šála) barva ze 2 barev ... $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ možností.

4 faktoriál (4 barvy) ... kolika způsoby můžeme uspořádat čtyři barvy na dané oblečení (H + P, S, Š).

$P(4) = 4! = 4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 24$ možností.

Paní učitelka má 24 různých kombinací oblečení.

Řešení vypsáním všech možných kombinací oblečení:

Jednotlivé druhy oblečení si označíme písmeny (H, P, S, Š) a budeme zjišťovat, jaké kombinace barev oblečení mohou nastat, když halenka a punčocháče mají být vždy stejné barvy a ostatní druh oblečení má být odlišné barvy.

halenka ...	H	barvy:	bílá
punčocháče ...	P		černá
sukně ...	S		šedá
šála ...	Š		zelená

- H + P (halenka a punčocháče) jsou vždy stejné barvy.

H + P	S		Š	
bílá	černá	+	zelená	
	černá	+	šedá	
	zelená	+	černá	
	zelená	+	šedá	
	šedá	+	černá	
	šedá	+	zelená	6 možností
zelená	černá	+	bílá	
	černá	+	šedá	
	šedá	+	černá	
	šedá	+	bílá	
	bílá	+	šedá	
	bílá	+	černá	6 možností
černá	bílá	+	zelená	
	bílá	+	bílá	
	šedá	+	zelená	
	šedá	+	bílá	
	zelená	+	šedá	
	zelená	+	bílá	6 možností
šedá	bílá	+	zelená	
	bílá	+	černá	
	zelená	+	bílá	
	zelená	+	černá	
	černá	+	bílá	
	černá	+	zelená	6 možností

celkem: 24 možností

Paní učitelka má 24 různých kombinací oblečení.

3.1.1.3 Nestandardní úlohy z geometrie

Geometrické úlohy typů uzlových mnohoúhelníků budeme řešit pomocí rozkreslení obrázků na známé geometrické tvary jako jsou čtverce, obdélníky a trojúhelníky. Úlohy na prostorovou představivost budeme řešit pomocí znalostí základních geometrických tvarů a těles a jejich vlastností. Úlohy zaměřené na krychlové stavby budeme řešit pomocí náčrtků a obrázků různých pohledů, které budeme ověřovat experimentováním a manipulací s molitanovými kostkami vytvořením fyzického modelu a práci s ním.

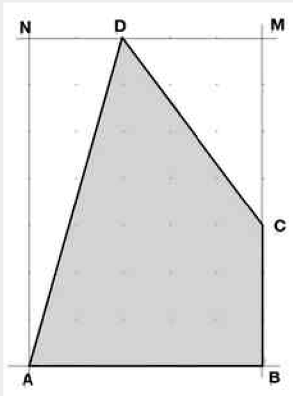
OBSAH UZLOVÉHO MNOHOÚHELNÍKU

Inspirováno: Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování, s. 77

Zadání:

Vypočítej obsah S uzlového čtyřúhelníku ABCD, kde délka mezi uzlovými body je 2 cm. A(0,0), B(5, 0), C(5, 3), D(2, 7).

(Poznámka: uzlový bod je místo, ve kterém se dvě kolmé přímky čtverečkovaného papíru protnou. Uzlový mnohoúhelník je mnohoúhelník, jehož vrcholy jsou uzlové body.)



Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* geometrie - výpočet obsahu čtyřúhelníku, vlastnosti geometrických útvarů: čtverec, obdélník, pravoúhlý trojúhelník.
- *Co si žáci musí uvědomit:* obdélník a čtverec jsou složeny ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků.
- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: znalost základních geometrických tvarů a jejich vlastností (čtverec, obdélník, trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník), znalost pojmu uzlový bod, měření délky stran a použití měřítka, znalost výpočtu obsahu čtverce, obdélníku a trojúhelníku.

Obsah daného čtyřúhelníku mohou žáci vyřešit dvěma způsoby:

a) rozdělením čtyřúhelníku ABCD na tři útvary - trojúhelníky AED a FCD a čtverec EBCF, jejichž obsah žáci umí vypočítat (viz obrázek č. 11),
b) čtyřúhelník ABMN (obdélník), od kterého odečteme obsahy dvou pravoúhlých trojúhelníků ADN a CMD (viz obrázek č. 10).

Řešení a) výpočet obsahu S čtyřúhelník ABCD:

Nejdříve čtyřúhelník ABCD rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky a jeden čtverec (viz obrázek č. 11). U těchto geometrických útvarů vypočítáme jejich obsahy, které sečteme a tím zjistíme obsah čtyřúhelníku ABCD.

Obsah pravoúhlého trojúhelníku S1 vypočítáme tak, že vynásobíme délky dvou stran, které svírají pravý úhel a výsledek vydělíme dvěma. Jelikož je vzdálenost mezi jednotlivými uzlovými body 2 cm, je kratší strana trojúhelníku dlouhá $2 \cdot 2$ cm = 4 cm a delší strana trojúhelníku dlouhá $2 \cdot 7$ cm = 14 cm.

$S1 = (4 \cdot 14) : 2$

$S1 = 28\ cm^2$

Stejným způsobem vypočítáme obsah pravoúhlého trojúhelníku S2, kde víme, že kratší strana je dlouhá $3 \cdot 2$ cm = 6 cm a strana kolmá na ni má délku $4 \cdot 2$ cm = 8 cm.

$S2 = (6 \cdot 8) : 2$

$S2 = 24\ cm^2$

Jako poslední krok vypočítáme obsah čtverce S3, kde jsou délky stran $3 \cdot 2$ cm = 6 cm.

$S3 = 6 \cdot 6$

$S3 = 36\ cm^2$

Následně sečteme obsahy S1, S2 a S3 a tím získáme obsah čtyřúhelníku ABCD.

$S = S1 + S2 + S3$

$S = 28 + 24 + 36$

$S = 88\ cm^2$

Obsah čtyřúhelníku ABCD je 88 cm^2.

Řešení b) výpočet obsahu S čtyřúhelníku ABMN, od kterého odečteme obsahy S1 pravoúhlého trojúhelníku ADN a S2 pravoúhlého trojúhelníku CMD:

Nejdříve vypočítáme obsah obdélníku ABMN,

kde |AB| = 5 · 2 cm a |BM| = 7 · 2 cm.

$S_{ABMN} = 10 \cdot 14$

$S_{ABMN} = 140\ cm^2$

Od obsahu obdélníku ABMN odečteme obsahy S1 prvního pravoúhlého trojúhelníku ADN a S2 druhého pravoúhlého trojúhelníku CMD (viz obrázek č. 10).

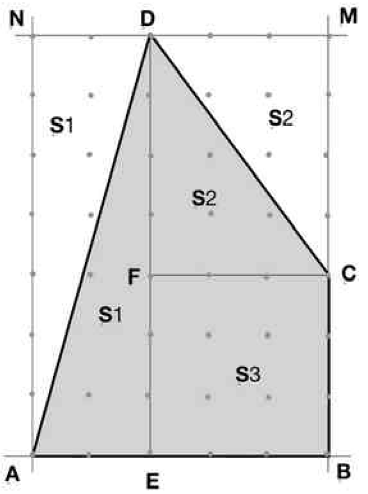
$S1 = (4 \cdot 14) : 2$ $\quad$ $S2 = (6 \cdot 8) : 2$

$S1 = 28\ cm^2$ $\quad$ $S2 = 24\ cm^2$

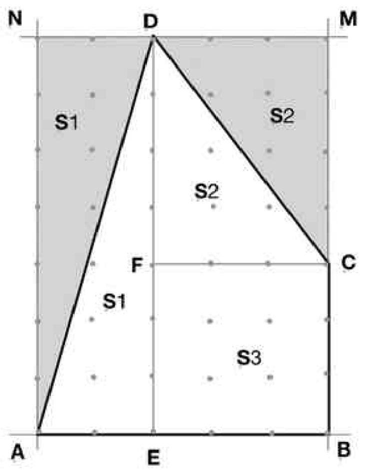
$S = S_{ABMN} - S1 - S2$

$S = 140 - 28 - 24$

$S = 88\ cm^2$



Obrázek 11: Obsah uzlového mnohoúhelníku - řešení a)



Obrázek 10: Obsah uzlového mnohoúhelníku - řešení b)

Obsah čtyřúhelníku ABCD je 88 cm².

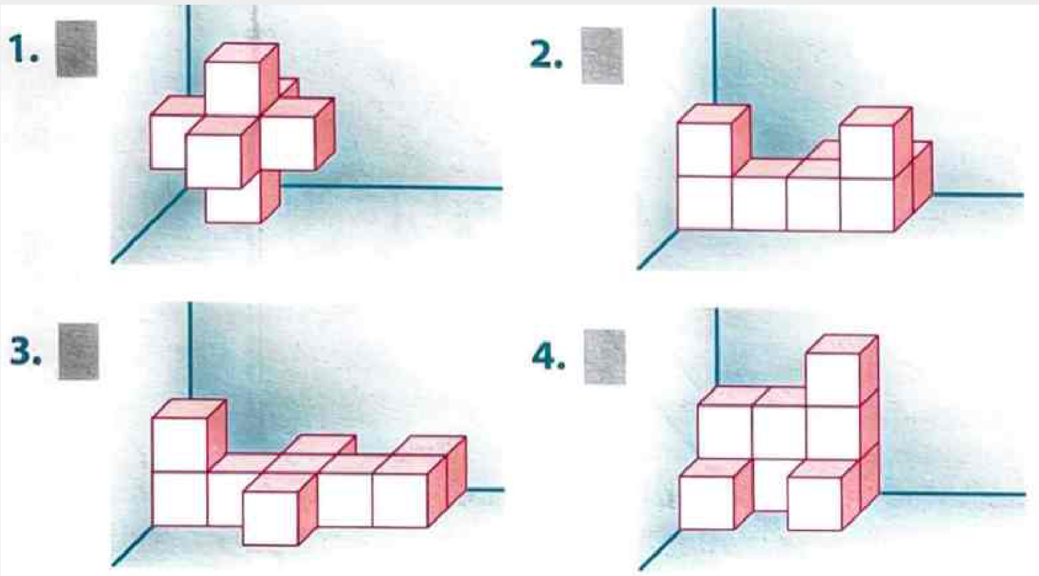
POVRCH KRYCHLOVÉ STAVBY

Převzato: Koumák pro páťáky, s. 131

Zadání:

Iveta skládala krychličky z papíru a poskládala následující stavby. Přiřaď každé stavbě její povrch, jestliže víš, že jedna krychle má hranu délky 2 cm.

a)104 cm^2 b) 120 cm^2 c) 128 cm^2 d) 136 cm^2 e) 140 cm^2 f)152 m^2



Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* geometrie - výpočet povrchu geometrických těles.
- *Co si žáci musí uvědomit:* krychle je tvořena ze šesti stejných stěn, které stěny krychlí jsou navzájem spojené.
- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: znalost základních geometrických těles a jejich vlastnosti, znalost výpočtu obsahu čtverce a povrchu krychle.

Povrch každé ze čtyř staveb můžou žáci vyřešit těmito způsoby:

a) zjistit, kolik je na každé stavbě viditelných stěn,

b) určit, kolik stěn z každé krychličky se navzájem dotýká.

Řešení a) viditelné stěny na stavbě:

Ze staveb 1 - 4 vypíšeme, jaké stěny jsou viditelné a vypočítáme jejich obsah. Obsah čtverce se vypočítá jako součin délek dvou sousedních stran (v našem případě $2 \cdot 2 = 4$ cm^2).

Určíme počet viditelných stěn ze všech pohledů (pohled shora ↓, zespodu ↑, zleva →, zprava ←, přední ○ a zadní ●).

Tabulka 9: Povrch krychlové stavby: viditelné stěny na stavbě - stavba č. 1

Stavba č. 1						
Pohled	↓	↑	→	←	○	●
Počet viditelných stěn	5	5	5	5	5	5
Povrch stavby (součet všech viditelných stěn vynásobený obsahem čtverce $2 \cdot 2 = 4$ cm^2)	$30 \cdot 4 =$ **120 cm^2 → b)**					

Tabulka 10: Povrch krychlové stavby: viditelné stěny na stavbě - stavba č. 2

Stavba č. 2						
Pohled	↓	↑	→	←	○	●
Počet viditelných stěn	6	6	4	4	6	6
Povrch stavby (součet všech viditelných stěn vynásobený obsahem čtverce $2 \cdot 2 = 4$ cm^2)	$32 \cdot 4 =$ **128 cm^2 → c)**					

Tabulka 11: Povrch krychlové stavby: viditelné stěny na stavbě - stavba č. 3

Stavba č. 3						
Pohled	↓	↑	→	←	○	●
Počet viditelných stěn	8	8	5	5	6	6
Povrch stavby (součet všech viditelných stěn vynásobený obsahem čtverce $2 \cdot 2 = 4$ cm^2)	$38 \cdot 4 =$ **152 cm^2 → f)**					

Tabulka 12: Povrch krychlové stavby: viditelné stěny na stavbě - stavba č. 4

Stavba č. 4						
Pohled	↓	↑	→	←	○	●
Počet viditelných stěn	5	5	5	5	7	7
Povrch stavby (součet všech viditelných stěn vynásobený obsahem čtverce $2 \cdot 2 = 4$ cm^2)	$34 \cdot 4 =$ **136 cm^2 → d)**					

<u>Řešení b) dotýkající se krychličky:</u>

Ze staveb 1 - 4 vypíšeme, z kolika krychliček celkem se stavba skládá. Dále zjistíme, kolik krychliček se navzájem dotýká a vynásobíme dvěma, jelikož jedno dotknutí znamená 2 stěny. Vypočítáme povrch všech krychliček a od něho odečteme obsah dotýkajících se stěn.

Tabulka 13: Povrch krychlové stavby: dotýkající se krychličky - stavba č. 1

Stavba č. 1	
Celkový počet krychliček	7
Povrch všech krychliček ($S = 6 \cdot 2 \cdot 2$)	$7 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 168$ cm^2
Počet dotýkajících se stěn vynásobený dvěma (jeden dotyk = 2 stěny)	$6 \cdot 2 = 12$
Obsah dotýkajících se stěn	$12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ cm^2
Povrch stavby (povrch všech krychliček mínus obsah dotýkajících se stěn)	$168 - 48 =$ **120 cm ^{2} → b)**

Tabulka 14: Povrch krychlové stavby: dotýkající se krychličky - stavba č. 2

Stavba č. 2	
Celkový počet krychliček	8
Povrch všech krychliček (S = 6 · 2 · 2)	8 · 6 · 2 · 2 = 192 cm^2
Počet dotýkajících se stěn vynásobený dvěma (jeden dotyk = 2 stěny)	8 · 2 = 16
Obsah dotýkajících se stěn	16 · 2 · 2 = 64 cm^2
Povrch stavby (povrch všech krychliček mínus obsah dotýkajících se stěn)	192 - 64 = **128 cm^2 → c)**

Tabulka 15: Povrch krychlové stavby: dotýkající se krychličky - stavba č. 3

Stavba č. 3	
Celkový počet krychliček	9
Povrch všech krychliček (S = 6 · 2 · 2)	9 · 6 · 2 · 2 = 216 cm^2
Počet dotýkajících se stěn vynásobený dvěma (jeden dotyk = 2 stěny)	8 · 2 = 16
Obsah dotýkajících se stěn	16 · 2 · 2 = 64 cm^2
Povrch stavby (povrch všech krychliček mínus obsah dotýkajících se stěn)	216 - 64 = **152 cm^2 → f)**

Tabulka 16: Povrch krychlové stavby: dotýkající se krychličky - stavba č. 4

Stavba č. 4	
Celkový počet krychliček	9
Povrch všech krychliček (S = 6 · 2 · 2)	9 · 6 · 2 · 2 = 216 cm^2
Počet dotýkajících se stěn vynásobený dvěma (jeden dotyk = 2 stěny)	10 · 2 = 20
Obsah dotýkajících se stěn	12 · 2 · 2 = 136 cm^2
Povrch stavby (povrch všech krychliček mínus obsah dotýkajících se stěn)	216 - 80 = **136 cm^2 → d)**

PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST

Inspirováno: PS Geometrie pro 5. ročník, Matýskova matematika, s. 48

Zadání:

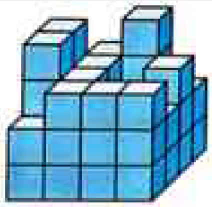
Na obrázku je znázorněna stavba z krychliček.

a) ***doplň chybějící počty krychliček v daných směrech (doplň do tabulek pohledy zepředu, shora, zprava),***

b) ***urči, z kolika krychliček se skládá podstava,***

c) ***urči, z kolika krychliček se skládá dané těleso,***

d) ***urči, kolik krychliček chybí do postavení celé stavby - celé velké krychle.***



pohled zepředu

4		3	
4		4	

pohled shora

2			
		2	
		1	

pohled zprava

	3	4	4
	4	4	4

Charakteristika úlohy:

- *Jakou oblast matematiky zahrnuje:* geometrie, geometrická tělesa.
- *Co si žáci musí uvědomit:* jakým směrem se musí na těleso dívat, aby určili počty krychlí v daném pohledu, co je podstava tělesa, že má krychle všechny stěny shodné.
- *Jaké vstupní znalosti musí mít žáci, aby vypočítali úlohu*: znalost základních geometrických těles a jejich vlastnosti.

Řešení a) doplň chybějící počty krychliček v daných směrech (doplň do tabulek pohledy zepředu, shora, zprava):

Z již doplněných počtů krychliček v jednotlivých tabulkách doplníme zbývající počty (viz obrázek č. 12). Ověřovat budeme pomocí skládání stavby z molitanových kostek. V každém pohledu musí být stejný počet krychliček (součet všech čísel v tabulce) tj. 44 krychliček (viz obrázek č. 14).

pohled zepředu			
2	0	1	0
2	4	2	2
4	4	3	4
4	4	4	4

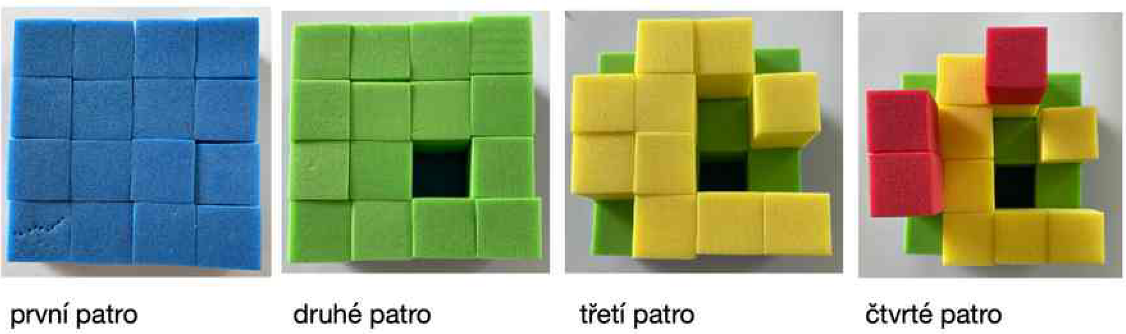
pohled shora			
2	3	4	2
4	3	2	3
4	3	1	2
2	3	3	3

pohled zprava			
0	1	1	1
3	2	3	2
4	3	4	4
4	4	4	4

Obrázek 12: Prostorová představivost - tabulka pohledů

Ověření pohledů pomocí stavby z molitanových kostek. Každá vrstva stavby je složená z jiné barvy kostek z důvodu přehlednosti (viz obrázek č. 13 a 14).

první patro .... modré kostky
druhé patro ... zelené kostky
třetí patro ... žluté kostky
čtvrté patro ... červené kostky



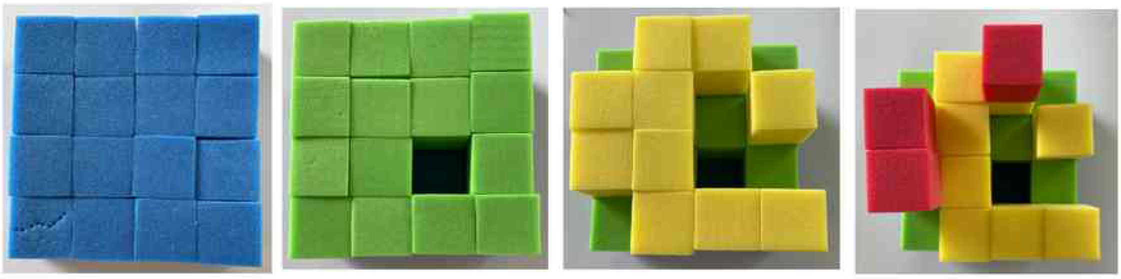
Obrázek 13: Prostorová představivost - patra

Obrázek 14: Prostorová představivost - pohledy

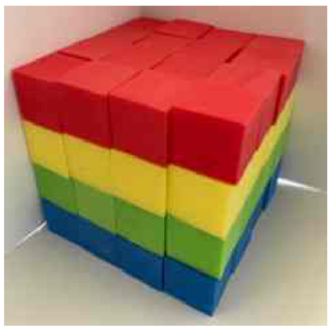
Řešení b) urči, z kolika krychliček se skládá podstava:
Podstava je spodní část stavby, která se skládá
ze 4 x 4 kostek = **16 krychliček**
Podstava daného tělesa se skládá z 16 krychliček.


Obrázek 15: Podstava

Řešení c) urči, z kolika krychliček se skládá dané těleso:
Z pohledů na stavbu jsem určili, že se celá stavba skládá ze 44 krychliček (součet všech krychliček v daném pohledu).
Dané tvrzení ověříme rozložením tělesa na poschodí pomocí stavby z molitanových kostek. Každá vrstva stavby je složená z jiné barvy kostek (viz obrázek č. 16).
16 kostek modrých + 15 kostek zelných + 10 kostek žlutých + 3 kostky červené = 44 kostek celkem.
Dané těleso se skládá ze 44 krychliček.


Obrázek 16: Prostorová představivost - patra

Řešení d) *urči, kolik krychliček chybí do postavení celé stavby - celé velké krychle:*
Z vlastností krychle víme, že krychle má všechny hrany stejně dlouhé, všechny stěny shodné. Jestliže se její podstava skládá z 16 krychliček a poschodí jsou čtyři, vypočítáme celkový počet krychliček v poschodí a to 16 x 4 = 64 krychliček (viz obrázek č.17). Z celkového počtu 64 krychliček odečteme počet 44 krychliček, ze kterých je dané těleso postavené. Rozdíl udává, kolik krychliček chybí do postavení celé krychle.


Obrázek 17: Prostorová představivost - celá stavba (krychle)

64 - 44 = 20. Z daného výpočtu jsem zjistili, že **20 krychliček chybí do sestavení celé stavby - celé velké krychle.**

3.2 Výzkumná část a její cíle

Ve výzkumné části diplomové práce se zabývám vyhodnocením dotazníkového šetření učitelů matematiky 5. ročníků ZŠ a vyhodnocením navrženého souboru NÚ. Dále případovou studií žákyně 5. ročníku ZŠ z výzkumného vzorku, která se hlásí ke studiu na víceletá gymnázia.

Obsahem výzkumné části je stanovení výzkumných předpokladů.

Cílem výzkumné části diplomové práce je potvrzení či vyvrácení předem stanovených výzkumných předpokladů.

3.2.1 Stanovení výzkumných předpokladů

Výzkumné předpoklady jsem si stanovila tři. Vyplývají z mých dosavadních poznatků učitelské praxe, výsledků dotazníkového šetření, vyhodnocení řešení souboru NÚ a pozorování žáků při řešení těchto úloh.

Za tímto účelem jsem stanovila následující výzkumné předpoklady:

P1: V učebnicích a pracovních sešitech matematiky se vyskytuje nestandardních aplikačních úloh málo. *Četnost NÚ.*

Zdůvodnění P1:

V současné době je kladen důraz na propojení teoretické část matematiky s praktickým využitím a to i prostřednictvím NÚ. Z vlastní zkušenosti vím, že se NÚ úlohy vyskytují pouze v menší míře v učebnicích a pracovních sešitech matematiky. Některá nakladatelství dokonce poskytují učitelům velmi jednoduché NÚ, nad kterými nemusí žáci moc přemýšlet a využívat více možností řešení.

Ověření:

Způsob ověření předpokladu P1 bude probíhat prostřednictvím dotazníkového šetření učitelů matematiky 5. ročníků ZŠ a srovnáním učebnic pro páté ročníky ZŠ z hlediska NÚ nakladatelství Taktik, Prodos, Nová škola a H-mat v teoretické části DP.

Předpoklad P1 bude považován za potvrzený, pokud se z dotazníkového šetření prokáže, že učitelé vyhledávají NÚ i v jiných materiálech než v učebnicích a pracovních sešitech nebo si je tvoří sami.

P2: Žáci při řešení NÚ využívají převážně naučené algoritmy v hodinách matematiky.

Dílčí předpoklad DP 2: Pokud se s žáky při výuce matematiky řeší NÚ, využívají více metod řešení NÚ (tabulky, obrázky, grafy, ...). *Metody řešení NÚ.*

Zdůvodnění P2:

Pokud žáci využívají pouze naučené algoritmy, nerozvíjí svoji kreativitu a kritické myšlení, může je to brzdit v jejich samostatném přemýšlení nad úlohami a hledáním různých postupů řešení. Využívat různé metody řešení je důležité v běžném životě i pro přípravu na další vzdělávání. Na základě poznatků z hodin matematiky, které jsem získala během své učitelské praxe vím, že převážná většina žáků nechce přemýšlet a logicky uvažovat. Z toho důvodu volí naučené postupy z hodin matematiky nebo volí metodu „pokus-omyl".

Zdůvodnění DP2:

Pokud žáci řeší v hodinách matematiky NÚ a jsou jim interpretovány různé metody řešení úloh, nevolí již k jejich vyřešení pouze naučené běžné algoritmy a postupy, ale dokážou využívat širší škálu metod řešení - obrázek, graf, tabulka, ...

Ověření:

Způsob ověření předpokladu P2 a DP2 bude probíhat vyhodnocením navrženého souboru NÚ, kde je celkem 10 logických úloh z oblastí kombinatoriky, úloh vedoucí k řešení pomocí diofantovských rovnic a geometrie v rovině a prostoru. Dále pozorováním žáků při řešení těchto úloh.

Předpoklad P2 bude považován za potvrzený, pokud se z žákovského řešení navrženého souboru NÚ prokáže, že žáci používají pouze naučené postupy z hodin matematiky a neuplatňují kreativitu při hledání jiných forem řešení NÚ. Dílčí předpoklad DP2 bude považován za potvrzený, pokud se z žákovského řešení NÚ prokáže, že žáci využívají v průběhu řešení úloh (ne z řešení první úlohy z daného okruhu) různé metody řešení.

P3: Využití NÚ v hodinách matematiky nebo v rámci přípravy na přijímací zkoušky na víceletá gymnázia zlepší dovednosti, schopnosti a logické přemýšlení a uvažování u žáků 5. ročníku ZŠ. *Zlepšení matematických dovedností.*

Zdůvodnění P3:

Zařazování NÚ do hodin matematiky nebo při přípravě na přijímací zkoušky se na žácích projevuje pozitivně. Žáci mají šanci na větší úspěšnost u přijímacích zkoušek, právě v důsledku toho, že využívají různé metody řešení a jsou schopni využít abstraktní a kritické myšlení.

Ověření:

Způsob ověření předpokladu P3 bude probíhat vyhodnocením navrženého souboru NÚ a pozorováním žáků během řešení úloh z daného souboru NÚ.

Předpoklad P3 bude považován za potvrzený, pokud se z žákovského řešení navrženého souboru NÚ a pozorováním žáků při jejich řešení prokáže, že se stoupajícím množstvím zadávaných úloh mají menší obtíže s řešením úloh, zlepšují se a využívají kreativnější formy řešení.

3.2.2 Charakteristika výzkumného vzorku

Pro výzkumnou část jsem si zvolila žáky 5. ročníku Základní školy Mochov, okres Praha - východ, kterých je celkem 15. Škola je málotřídní a 5. ročník je spojený s 2. ročníkem, ve kterém je 6 žáků. Celkem tedy 21 žáků. V této škole pracuji jako učitelka a nejsem třídní učitelkou tohoto ročníku. Žáci mě ale dobře znají, jelikož je od prvního ročníku vyučuji VV, PČ, HV, AJ, PRV a PŘ.

V 5. ročníku je 7 chlapců a 8 dívek. Tato třída je velmi klidná, zdravě soutěživá a nevyskytují se zde žádné kázeňské problémy. Vzájemně si všichni žáci vypomáhají a nikdo není vyřazen z kolektivu. Všichni jsou schopni samostatně pracovat a nevyrušují. Pokud někdo z žáků potřebuje pomoc, v tichosti si mezi sebou vypomáhají, aby nerušili paní učitelku, která se v daný okamžik věnuje 2. ročníku. Jedna dívka má diagnostikovanou dyslexii, dysgrafii a dysortografii. Jeden chlapec je ukrajinské národnosti, ale naši školu navštěvuje již od prvního ročníku. V této třídě se hlásí pět žáků ke studiu na víceletá gymnázia, které jsem si vybrala pro výzkumnou část.

3.2.3 Dotazníkové šetření mezi pedagogy

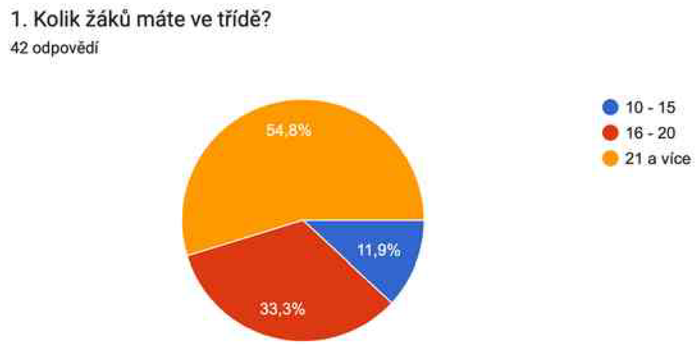
Dotazníkové šetření probíhalo on-line prostřednictvím Formulářů Google. Probíhalo v období září - listopad 2022, kdy bylo osloveno celkem 38 ZŠ okresu Praha - východ a Praha. Dotazníkového šetření se zúčastnilo celkem 42 učitelů matematiky pátých ročníků ZŠ. Odpovídali na devět otázek. Otázky 1., 2., 4., 6. a 7. byly formou zaškrtávání předepsaných možných odpovědí a otázky 3., 5., 8. a 9. byly pro získání konkrétnějších informací týkajících se tématu otázky.

Cílem dotazníku bylo zjistit, zda učitelé zařazují do výuky matematiky a geometrie nestandardní úlohy, jaké typy úloh převážně využívají, kde čerpají inspiraci úloh a v neposlední řadě také, zda nestandardní úlohy zařazují do běžné výuky nebo pouze při práci s nadanými žáky a to především při přípravě dětí na přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia.

OTÁZKA: PRVNÍ: ***Kolik žáků máte ve třídě?***

Tato otázka je přímá a slouží pouze k získání informací o počtu žáků ve třídě. Pokusím se ji dát do kontextu s odpověďmi na následující otázky. Počet žáků ve třídě ovlivňuje interakci mezi učitelem a žáky, organizaci vyučovacích metod, postupů, aktivit a také způsob diferenciace výuky.

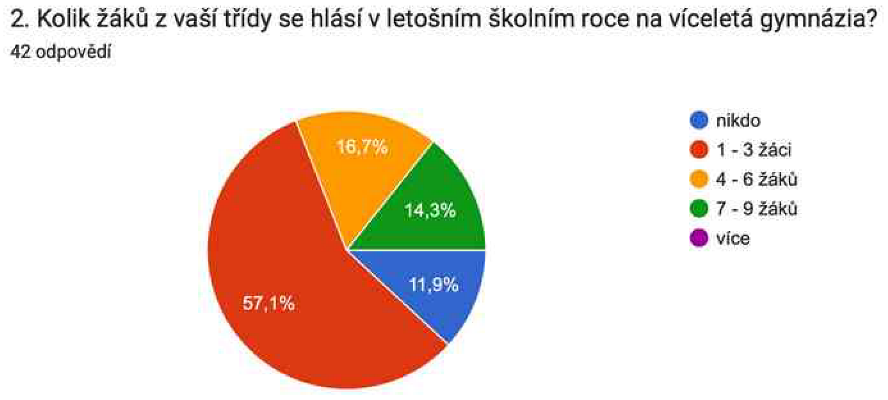
Nejčastěji zastoupené třídy s daným počtem žáků v ročníku jsou třídy s 21 a více žáky. Pouze v pěti případech ze 42 učitelé uvedli, že mají ve třídě 10 - 15 žáků.



Obrázek 18: Dotazníkové šetření - otázka č. 1

OTÁZKA DRUHÁ: ***Kolik žáků z vaší třídy se hlásí na víceletá gymnázia?***

Následující otázka je již specifická a informativní. Poskytuje argumentaci zkoumání důležitost NÚ pro přípravu na přijímací řízení. Tuto otázku se pokusím dát do souladu s dalšími odpověďmi. Nejčastější odpovědí na tuto otázku byla z 57,1 %, že se na gymnázia hlásí 1 - 3 děti.



Obrázek 19: Dotazníkové šetření - otázka č. 2

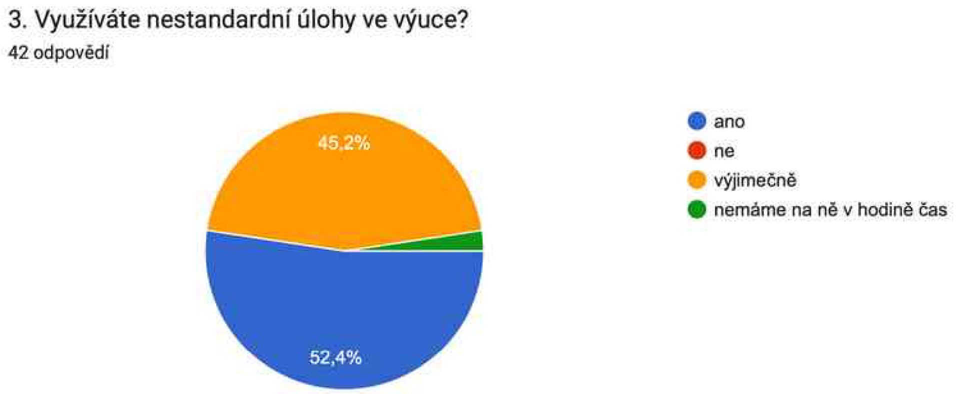
OTÁZKA TŘETÍ: ***Využíváte nestandardní úlohy ve výuce?***

Z dotazovaných odpovědělo kladně 52,4 %, že zařazují nestandardní úlohy do hodin matematiky, zatímco 45,2 % učitelů je využívá jen výjimečně a 2,4 % učitelů odpovědělo, že je nevyužívá vůbec.

Existuje řada možných důvodů, proč někteří učitelé NÚ do svých hodin nezařazují. Může to být upřednostňování tradiční výuky matematiky, kdy učitelé využívají standardní úlohy a algoritmické postupy. Dále také jejich nejistota ve vyučování NÚ, jejich nedostatek znalostí či jejich nedůvěra v sebe při vedení žáků během řešení NÚ. Jeden z možných důvodů může být nedostatečná časová dotace v rámci výuky matematiky, kdy jim zbývá malý nebo žádný prostor na řešení těchto úloh. Další z možných důvodů může být nedostatek materiálů a jejich náročná příprava. V poslední otázce dotazníkového šetření většina učitelů uvedla, že čerpají NÚ z internetu a jiných zdrojů, což je pro ně časově náročné na vyhledání, ověření správnosti, zpracování a následné zařazení do výuky. Zařazení NÚ do hodin matematiky vyžaduje čas a náročnější přípravu. Pro některé učitelé je velmi náročné být kreativní a nacházet nové postupy a řešení NÚ.

Ze čtvrté otázky, zda využívají učitelé NÚ při přípravě žáků k přijímacím zkouškám jsem zjistila, že 15 z dotazovaných učitelů využívá ve svých hodinách NÚ a tím podporuje u žáků jejich kreativitu, představivost, schopnost řešit matematické problémy, kritické uvažování. Dva učitelé odpověděli, že vůbec NÚ do své výuky matematiky nezařazují. S největší pravděpodobností nekladou důraz na specifické rozšiřování vědomostí a dovedností svých žáků a dávají přednost standardní výuce matematiky.

Učitelé, kteří odpověděli, že využívají v hodinách matematiky NÚ, nejčastěji zmiňovali následující typy úloh, které do nich zařazují: *magické čtverce, pyramidy, číselné a logické řady, sudoku, kombinatorické úlohy, tangramy, šifry, Hejného metoda - výuka, bludiště, logické úlohy, obrazce jedním tahem, číselné záhady, matematické hádanky, práce s grafy a tabulkami, zebry, dále všechny možné úlohy, především ty, kde nestačí jen početní operace, ale je potřeba si nakreslit obrázek pro správné porozumění úloze*.



Obrázek 20: Dotazníkové šetření - otázka č. 3

OTÁZKA ČTVRTÁ: ***Využíváte nestandardní úlohy při přípravě žáků k přijímacím zkouškám?***

Mezi učiteli jsou rozdílné postoje a přístupy k využívání NÚ při přípravě k přijímacím zkouškám. 59,5 % učitelů odpovědělo, že nepřipravují své žáky k přijímacím zkouškám, 35,7 % učitelů připravuje žáky a 4,8 % učitelů neřeší ve svých hodinách NÚ z časových důvodů, což koresponduje s výsledky předchozí otázky.

Učitelé, kteří odpověděli, že nepřipravují děti k přijímacím zkouškám a z toho důvodu nezařazují do výuky NÚ, pravděpodobně nekladou důraz na specifickou příprava na zkoušky na gymnázium. Dávají přednost učení se standardním úlohám a celkovému všeobecnému rozvoji žáků a jejich dovednostem.

Na druhou stranu učitelé, kteří připravují své žáky na přijímací zkoušky a využívají v hodinách matematiky NÚ, vidí velkou výhodu v této přípravě z důvodu větší úspěšnosti při zkouškách. NÚ mohou pomoci žákům rozvíjet jejich kreativitu, představivost, schopnost řešit problémy, kriticky uvažovat a následně je učí vše aplikovat na nové a netradiční situace.

Z pohledu potřeb a schopností žáků je důležité, aby učitelé zohledňovali jejich schopnosti a potřeby již při výběru metod, které jsou nejvhodnější pro jejich vzdělávání.

Obrázek 21: Dotazníkové šetření - otázka č. 4

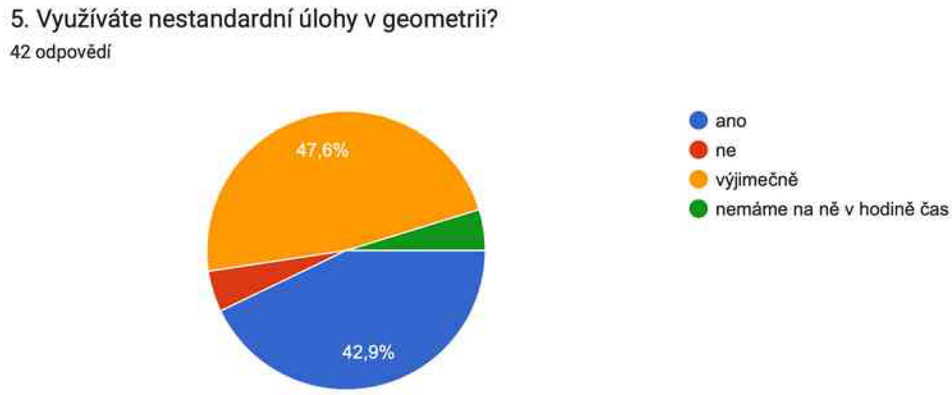
OTÁZKA PÁTÁ: ***Využíváte nestandardní úlohy v geometrii?***

Z poskytnutých informací data naznačují, že učitelé 5. ročníků ZŠ zastávají různé přístupy k zařazování NÚ do jejich výuky v hodinách geometrie. 18 učitelů (42,9 %) uvedlo, že NÚ z geometrie ve svých hodinách využívají.

20 učitelů (47,6 %) odpovědělo, že ve svých hodinách využívají NÚ v geometrii výjimečně. Můžeme pouze spekulovat, z jakého je to důvodu, zda časového, materiálního či jiného, ale pravděpodobně ve specifických situacích rozšiřují svoji tradiční výuku o NÚ.

2 učitelé uvedli, že v hodinách geometrie nemají na řešení NÚ čas. Omezený čas mohou mít již ve výuce matematiky a z toho důvodu nemají dostačující časovou dotaci na přípravu a zařazení NÚ do hodin geometrie. Stejný počet učitelů a to 2 učitelé uvedli, že NÚ v geometrii vůbec nevyužívají.

Učitelé, kteří odpověděli, že zařazují do hodin geometrie NÚ, nejčastěji uváděli následující typy úloh: *krychlové stavby, konstrukční úlohy, geobordy, práce se sítí krychlí a kvádrů, tangramy, čtvercové sítě, diagramy, dále takové úlohy, které propojují více znalostí a dovedností nejen z geometrie, aplikace výpočtů obvodů a obsahů na* *úlohy každodenního života, modelování, povrch krychle a kvádru jako prostor pokoje, manipulace se špejlemi, uzlové body.*



Obrázek 22: Dotazníkové šetření - otázka č. 5

OTÁZKA ŠESTÁ: ***Pokud nestandardní úlohy zařazujete do výuky, jakým způsobem je s žáky řešíte?***

Na tuto otázku učitelé odpovídali zaškrtnutím výběru možností, jaké způsoby nejvíce ve výuce matematiky při řešení NÚ využívají. Možné odpovědi byly: *nezařazujeme je do výuky*, *každý žák řeší NÚ sám*, *společně s celou třídou*, *skupinová práce a potom společně konzultujeme*. Poslední možnost byla, že t*yto typy úloh řeší pouze s nadanými žáky*.

V předcházejících otázkách byli dva učitelé, kteří uvedli, že do výuky matematiky a geometrie nezařazují NÚ. V této otázce ale tuto možnost nikdo nevybral.

29 učitelů (69 %) uvedlo, že NÚ řeší ve skupinách a potom všichni společně konzultují. Práce ve skupinách a následné konzultování rozvíjí u žáků dovednost spolupracovat a komunikovat. Žáci se učí od sebe navzájem. Při spolupráci se žáci učí argumentovat, vyměňovat si nápady a diskutovat nad vymyšlenými postupy řešení úloh.

24 učitelů (57,1 %) uvedlo, že NÚ řeší společně s celou třídou, přičemž se rozvíjí komunikační dovednosti a kolektivní učení.

13 učitelů (31 %) uvedlo, že NÚ řeší pouze s nadanými dětmi. Nadaní žáci často projevují větší zájem a schopnosti v matematice. Zařazením NÚ do hodin matematiky poskytuje těmto žákům výzvu a příležitost rozšířit si své znalosti a dovednosti a tím si

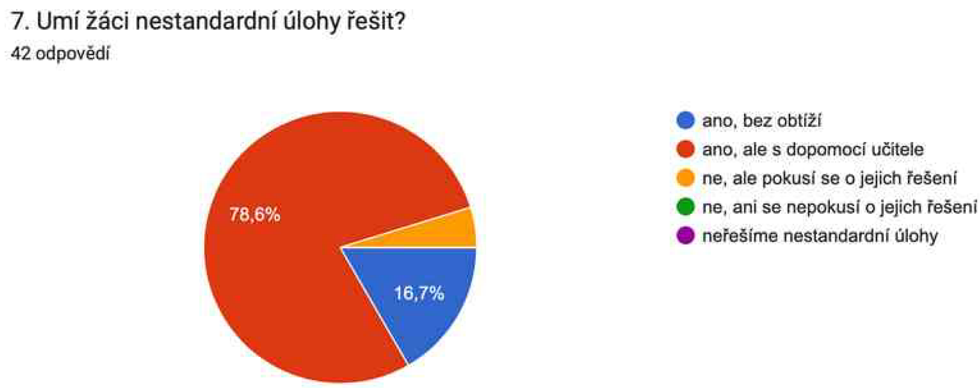
rozvíjet své schopnosti na vyšší úroveň. Takovéto úkoly jsou pro nadané dětí výzvou, stimulací a uspokojením, aby udržely zájem a pokrok v matematice. Učitel by měl podpořit jejich růst a udržet u nich zájem o matematiku. Na druhou stranu zadávání NÚ pouze nadaným žákům není dobrý přístup, jelikož by měli mít všichni žáci možnost setkávat se s výzvami a rozšiřovat si své matematické schopnosti a dovednosti. Je důležité nabízet všem žákům různé stupně výzev.

9 učitelů (21,4 %) uvedlo, že NÚ řeší každý žák samostatně.

Obrázek 23: Dotazníkové šetření - otázka č. 6

OTÁZKA SEDMÁ: ***Umí žáci nestandardní úlohy řešit?***

Převážná část učitelů (78,6 %) odpověděla, že žáci NÚ umí řešit, ale pouze s dopomocí učitele. Pouze 16 % učitelů odpovědělo, že jejich žáci umí NÚ řešit bez obtíží. Zbytek dotazovaných zaškrtla, že jejich žáci neumí tyto úlohy řešit, ale pokusí se o jejich řešení. Žádný z učitelů neuvedl, že by se jeho žáci ani nepokusili o vyřešení úloh.

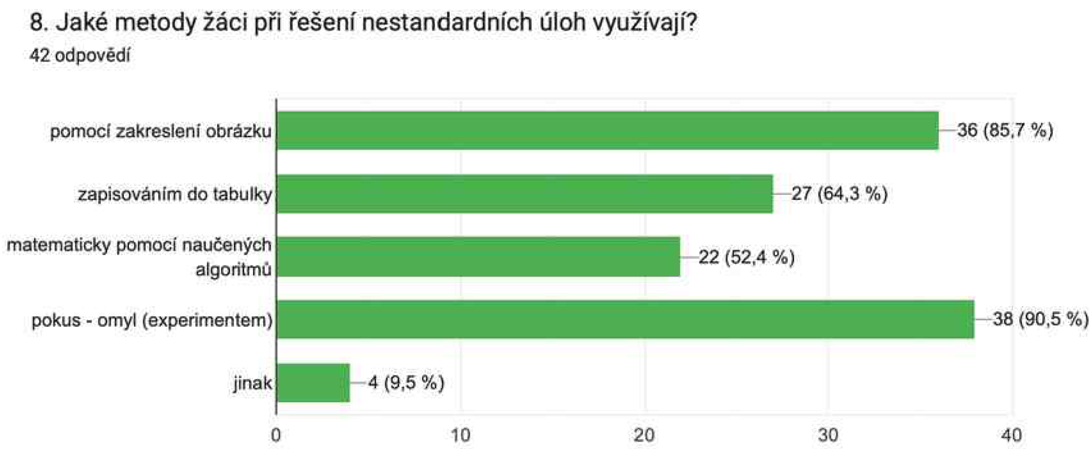


Obrázek 24: Dotazníkové šetření - otázka č. 7

OTÁZKA OSMÁ: ***Jaké metody žáci při řešení nestandardních úloh využívají?***

Při řešení NÚ v matematice mohou žáci 5. ročníků využívat několik metod a strategií, které jim mohou pomoci při řešení těchto úloh. Nejdůležitější je, aby žáci porozuměli danému zadání úlohy. Měli by využívat kritické myšlení, které jim napomůže přemýšlet o různých postupech a přístupech v řešení problémové úloze. Měli by identifikovat problém a pokud to jde, stanovit si menší části, ze kterých budou vycházet a následně řešit strategie vedoucí k vyřešení úlohy. Dále by měli hledat podobnosti s již známými úlohami, naučená pravidla, vzorce, schémata a postupy. Žáci by měli být podporováni v hledání nových postupů, řešení a strategií, experimentování s různými postupy a možnostmi řešení. Jeden z důležitých nástrojů pro porozumění a řešení NÚ je vizuální opora ve formě obrázku, grafu nebo tabulky, která vede ke snadnějšímu vyřešení úlohy. Při řešení NÚ by měl být spíše kladen důraz na proces řešení, kreativitu, logické myšlení a schopnosti žáků, než pouze na konečné správné řešení NÚ.

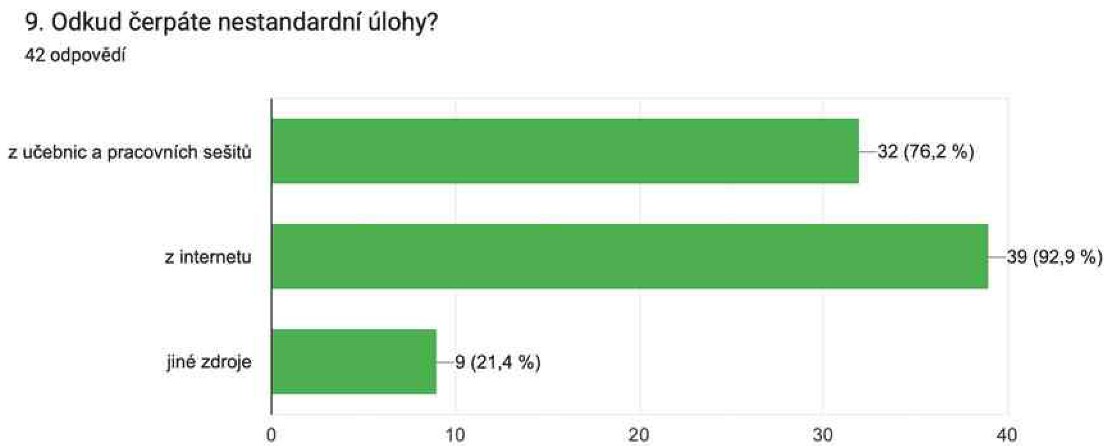
Z dotazníku vyplynulo, že žáci nejvíce využívají metodu „pokus-omyl" (90,5 %) - tím sei potvrzuje předpoklad **P2** a zakreslení úlohy pomocí obrázku (85,7 %). Dále potom zaznamenávání údajů do tabulky (64,3 %). Více jak polovina učitelů (52,5 %) označila možnost, že žáci využívají metodu řešení úloh pomocí naučených postupů a algoritmů. Tím se potvrzuje předpoklad **P2** . Čtyři učitelé odpověděli, že řeší NÚ formou diskuse a dramatizací situace vyplývající ze zadání úlohy.



Obrázek 25: Dotazníkové šetření - otázka č. 8

OTÁZKA DEVÁTÁ: ***Odkud čerpáte nestandardní úlohy?***

Zde se nabízí několik možností. Z dotazníků jsme zjistili, že nejčastěji a to 92,9 % učitelů využívá online zdroje. Tím se potvrzuje předpoklad **P1**. Existuje mnoho webových stránek, platforem a aplikací, které nabízejí NÚ v matematice pro různé věkové kategorie. Tyto zdroje nabízejí mimo jiné i interaktivní úlohy a logické problémy, které podporují kreativitu a myšlení mimo běžné matematické postupy.



Obrázek 26: Dotazníkové šetření - otázka č. 9

76,2 % učitelů odpovědělo, že se inspirují učebnicemi a pracovními sešity. Další z možností, které učitelé vypsali do dotazníku jsou: *soutěže a olympiády, didaktické testy od CERMATu, materiály od kolegyň, materiály z jejich studií na vysoké škole,* *Hejného metoda. Pět učitelů odpovědělo, že si tvoří vlastní nestandardní úlohy na základě učiva a potřeb svých žáků*.

Je důležité, aby učitelé vybírali nestandardní úlohy, které jsou vhodné pro daný věk a úroveň jejich žáků. Úlohy by měly být dostatečně motivující, měly by být tvořeny na reálné situace.

SHRNUTÍ DOTAZNÍKOVÉHO ŠETŘENÍ

Z dotazníkového šetření jsem získala informace ohledně zařazování a využívání nestandardních úloh ve výuce matematiky na základních školách a jejich přínos na přípravu žáků k přijímacím zkouškách na víceletá gymnázia.

Výuka NÚ v matematice je závislá na různých faktorech, včetně počtu žáků ve třídě, zájmu o studium na víceletých gymnáziích, přístupu učitele k výuce matematiky a jeho vyučovacích metodách.

Z výsledků dotazníku vyplývají následující závěry:

- *Počet žáků ve třídě:* většina tříd má kolem 21 žáků, což může ovlivňovat interakci mezi učitelem a žáky, organizaci výuky a diferenciaci výuky.
- *Zájem o víceletá gymnázia*: v současné době má stále více dětí zájem o studium na víceletých gymnáziích, což klade důraz na zařazování NÚ do hodin matematiky nebo při přípravě na přijímací řízení.
- *Zařazení nestandardních úloh do výuky*: pouze polovina z dotazovaných učitelů zařazuje NÚ do své výuky. Někteří je zařazují pouze výjimečně nebo vůbec. Důvody mohou zahrnovat nedostatek času v hodinách matematiky a jejich náročnější příprava, nevyhovující množství materiálů a znalostí ze strany učitelů či jejich nedostatečná sebejistota v této oblasti.
- *Příprava na přijímací zkoušky*: zhruba třetina učitelů připravuje své žáky na přijímací zkoušky a využívá NÚ pro rozvoj jejich dovedností, logického uvažování, kritického myšlení, kreativity, atd.
- *Způsoby řešení nestandardních úloh v hodinách matematiky*: nejčastějším způsobem řešení NÚ učitelé uvedli skupinovou práci a společnou konzultaci, při které se žáci učí od sebe navzájem, rozvíjí si tím dovednosti spolupracovat, komunikovat a respektovat názor druhých.
- *Metody řešení nestandardních úloh žáky*: žáci využívají různé metody řešení NÚ. Nejčastější metodou je „pokus-omyl" a kreslení obrázků. Přičemž i tyto

metody vedou ke kreativnímu a kritickému myšlení, logickému uvažování a učitelé by je měli podporovat.

- *Čerpání nestandardních úloh*: nejčastěji se učitelé inspirují online zdroji (potvrzen předpoklad **P1**) a učebnicemi. Někteří si dokonce vytváří vlastní úlohy na míru svým žákům.

Celkově lze z dotazníku usoudit, že NÚ mají pozitivní vliv na výuku matematiky a přípravu na přijímací zkoušky na víceletá gymnázia. Učitelé se však potýkají s různými úskalími jako je nedostatek času či materiálů a správného výběru NÚ tak, aby odpovídaly potřebám a schopnostem žáků a jejich efektivnímu zařazení do výuky.

3.2.4 Případová studie

Dívka (budu ji říkat Sylvie), kterou jsem si vybrala pro tuto případovou studii, je žákyní 5. ročníku základní školy. Tato základní škola se nachází v malé vesnici ve středních Čechách, okres Praha - východ, je málotřídní a 5. ročník je spojený s 2. ročníkem. Školu navštěvuje pouze 80 žáků.

Sylvie je milá, příjemná a tichá dívka. Je jí 11 let. Vyrůstá v úplné a funkční rodině s o deset let starší sestrou. Sylvie nemá diagnostikovanou žádnou specifickou poruchu učení ani chování. Není moc sportovně nadaná, hraje na klavír a nejraději navštěvuje zájmový kroužek šachy. Šachy navštěvuje již od mateřské školy. Účastní se republikových soutěží, na kterých se umísťuje na předních příčkách. Její velkou oblibou je četba knih, která zaplňuje každou její volnou chvíli.

Sylvie není moc komunikativní, ale v kolektivu je velmi oblíbená a přátelská. Je naprosto bezproblémovou žákyní, přijímá autority, a když je požádána o pomoc jak ze strany učitelů, tak ze strany spolužáků, plní ji okamžitě bez jakýchkoliv řečí a protestů. Z vyučovacích předmětů má dle vlastního hodnocení nejraději anglický jazyk, matematiku a přírodopis. Nejhoršími předměty jsou pro ni tělesná a výtvarná výchova.

V matematice je Sylvie jednou z lepších a talentovanějších žáků ve třídě. Je pohotová a rychlá v početních dovednostech. Její schopnost analytického myšlení a rychlého řešení matematických úloh je velmi dobrá v porovnání s jejími spolužáky. Má již vyvinuté abstraktní myšlení a dobrou prostorovou představivost. Dokáže si představit a manipulovat s trojrozměrnými objekty. Je celkově výborná v geometrii, která ji moc baví. Je schopná snadno identifikovat geometrické tvary a tělesa, objasňovat jejich vlastnosti a rozumí jejich vzájemným vztahům. Bez obtíží vypočítá obvody a obsahy různých geometrických tvarů. Správně a efektivně používá matematické vzorce.

Sylvie se zapojuje do všech matematických soutěží a olympiád, které škola nabízí. V nich se neumisťuje na předních příčkách, ale spíše se projevuje jako průměrný žák.

Sylvie si podala přihlášky na dvě víceletá gymnázia, na která byla přijata. Na základě jejího celkového talentu na matematiku a geometrii s rodiči usoudili, že nemusí navštěvovat přípravné kurzy na jednotné přijímací zkoušky. Pouze si sama zkoušela počítat různé aritmetické příklady, slovní úlohy a didaktické testy - testová zadání z předešlých let (CERMAT) a zdokonalovala se v naučených postupech řešení úloh z hodin matematiky.

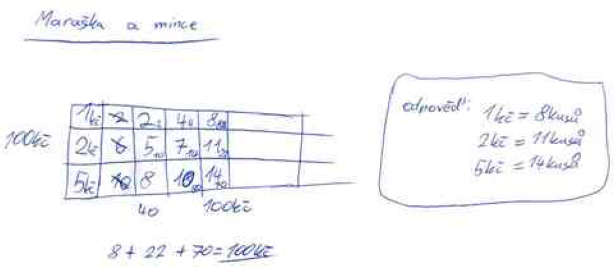
Vyhodnocení NÚ řešených Sylvií

V následující části vyhodnocuji a komentuji NÚ, které řešila Sylvie v hodinách matematiky s ostatními dětmi (dětmi hlásícími se na víceletá gymnázia).

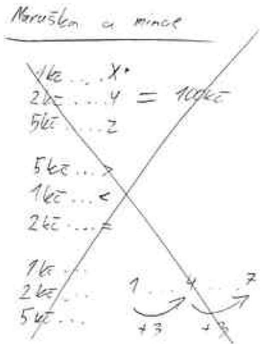
Komentář k řešení nestandardní úlohy - MARUŠKA A MINCE

Když Sylvie řešila tuto úlohu, zdála se jí být po prvním přečtení velmi jednoduchá. Začala si psát zápis, který po chvilce škrtla (viz obrázek č. 28) a řekla, že tomu nerozumí a zamotala se do toho. Po chvilce, kdy si opakovaně četla zadání, ji napadlo, že by mohla k řešení použít tabulku (viz obrázek č. 27) a zapisovat si do ní. Podle zadaných podmínek doplňovala do tabulky počty jednotlivých mincí, kdy bylo nejméně jednokorunových a nejvíce pětikorunových a postupně k nim doplňovala jejich hodnoty. Nevypsala si počty korunových mincí od 1 až do 8 kusů, ale nejdříve postupovala po dvou kusech, kde u dvou korunových, pěti dvoukorunových a osmi pětikorunových mincí zjistila, že celková hodnota mincí je nízká. Logicky usoudila, že odzkouší vyšší počet mincí a to 8 korunových, 11 dvoukorunových a 14 pětikorunových, aby se celková hodnota mincí přiblížila co nejblíže hodnotě 100 korun. Po sečtení zjistila, že se hodnota těchto jednotlivých kusů mincí rovná zadané hodnotě 100 korun a tím úlohu vyřešila. Na úlohu ani nemusela využívat celou časovou dotaci 15 minut.

Sylvie úlohu vyřešila správně bez větších obtíží. Určila správně počty mincí jednotlivých hodnot a tím dospěla ke správnému vyřešení úlohy. Během řešení využila kreativity a logického myšlení a zohlednila všechny zadané podmínky. Správně určila, že je nejméně korunových a nejvíce pětikorunových mincí a dále, že se jednotlivé počty mincí od sebe liší o tři kusy. Tyto informace správně aplikovala při hledání řešení. Přemýšlela a využila efektivní a vhodnou strategii - řešení tabulkou. Ukázala aktivní zapojení do řešení úlohy, kladla otázky typu - „Co je to celková hodnota všech mincí?” a co znamená slovo „a zároveň” (domnívám se, že se pouze ujišťovala, zda úloze rozumí správně). To svědčí o jejím úsilí úloze porozumět.



Obrázek 27: Řešení Sylvie - MARUŠKA A MINCE - řešení tabulkou



Obrázek 28: Řešení Sylvie - MARUŠKA A MINCE - zápis

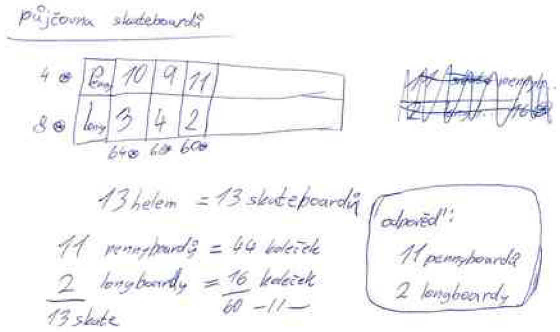
Komentář k řešení nestandardní úlohy - PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ

Sylvie řešila tuto úlohu s velkým odhodláním. Při diskusi o možných postupech řešení první úlohy si Sylvie uvědomila možné strategie, které lze použít při řešení těchto typů úloh. Chvíli přemýšlela nad zdáním úlohy, kde se pozastavila nad větou „Ke každému skateboardu půjčují helmy, kterých mají 13.” Ujistila se, zda to znamená, že má být celkový počet skateboardů stejný jako počet helem. Poté se snažila řešit úlohu obrázkem (viz obrázek č. 30). Kreslila skateboardy a dokreslovala k nim kolečka podle obrázku v zadání. Nejdříve si nakreslila jeden pennyboard (dále jen P), který má 4 kolečka a k němu jeden longboard (dále jen L), který má 8 koleček a pod obrázky napsala číslo 12, které značilo celkový počet koleček. Postupně přikreslila další P a L a pod ně číslo 24 a pod další dokreslené skateboardy číslo 36. Poté přestala kreslit obrázky a dopisovala už pouze počty koleček. Uvědomila si, že počet koleček roste úměrně a to vždy plus 12 koleček. Tudíž ještě napsala čísla 48 a 60. Myslela si, že úlohu vyřešila správně a papír odevzdala. Až po chvilce, kdy konzultovala své řešení úlohy s jedním ze spolužáků, si uvědomila, že nedodržela podmínku ze zadání, která uváděla, že ke každému skateboardu půjčují helmy, kterých je 13.

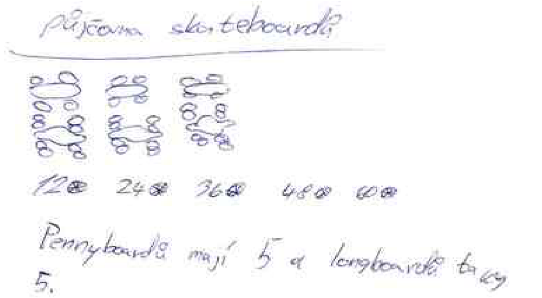
Sylvie si vzala nový papír a pokusila se o nové řešení úlohy. Použila řešení tabulkou (viz obrázek č. 29), do které zapisovala počty P. K nim dopočítala příslušný počet L tak, aby bylo celkem 13 skateboardů jako je helem. Náhodně si vybrala číslo 10 (P) a k němu dopočítala 3 (L). Pod daný sloupeček dopsala celkový počet koleček. Vyšlo jí číslo 64, které ale neodpovídalo celkovému počtu koleček. Uvědomovala si, že celkový počet koleček musí být 60 a z toho důvodu snížila o jeden kus P a zvýšila počet L. Nepřemýšlela o tom, že jí vyjde ještě větší počet koleček, protože ubrala 4 kolečka a zároveň 8 koleček přidala. Pokusila se tedy o opačný postup, kdy přidala jeden P (11 kusů) a ubrala jeden L (2 kusy), kde jí vyšel správný počet koleček (60 kusů).

Své doplňování do tabulky komentovala tím, že u něho nepřemýšlela a pouze to zkusila a řešila úlohu metodou „pokus-omyl".

Sylvie vyřešila úlohu správně a určila počty P a L v půjčovně dle zadaných podmínek. Její odpověď souhlasí s řešením - pomocí tabulky a postupným dopočítáváním, které ji vedlo ke správnému určení počtu jednotlivých skateboardů na základě počtu koleček a helem. Využila matematické dovednosti při vytváření tabulky a správné sčítání a odčítání pro dopočítávání počtu skateboardů. Projevila vytrvalost a systematický přístup k řešení.



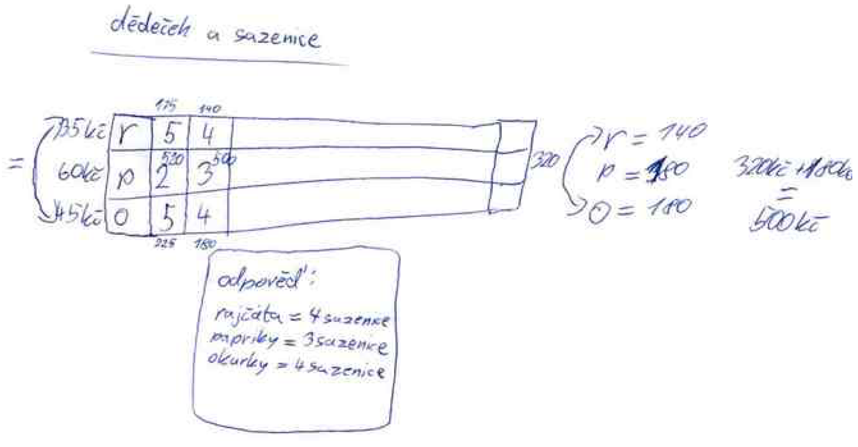
Obrázek 29: Řešení Sylvie - PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ - řešení tabulkou



Obrázek 30: Řešení Sylvie - PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ - řešení obrázkem

Komentář k řešení nestandardní úlohy - DĚDEČEK A SAZENICE

Tato poslední úloha z okruhu NÚ řešených pomocí diofantovských rovnic dělala Sylvii obtíže. Ze začátku si musela několikrát přečíst zadání, aby úloze porozuměla. Poté měla potřebu se doptávat, aby se ujistila, že danému zadání úlohy rozumí, a stanovila si správný postup řešení. Pokládala otázky typu: „Co znamená slovo utržil?”, „Znamená, prodal stejné množství, stejný počet sazenic nebo za stejnou cenu různé počty sazenic?”, „Co přesně znamená, že od každého kusu prodal alespoň jednu sazenici? Znamená to, že dědeček musí prodat všechny druhy sazenic vždy nejméně po jednom kuse?” Poslední otázka s největší pravděpodobností utvrdila Sylvii v tom, že dědeček prodal více než jeden kus od každé sazenice a z tabulky (viz obrázek č. 31), kterou využila pro řešení úlohy vidíme, že nepočítala s variantou jednoho kusu sazenic. Opět náhodně (dle jejího tvrzení později), jako tomu bylo v předešlé úloze, si stanovila nějaké číslo, v tomto případě číslo 5 jako možný počet kusů sazenic rajčat a okurek. Z nich si vypočítala částku korun, kterou dědeček vydělal z prodeje těchto kusů sazenice a dopočítala možný počet paprik, který byl ale vyšší než částka vydělaná dědečkem. Proto snížila kusy sazenic o jeden a to na 4 kusy sazenic a opět dopočítala možný počet paprik Když všechny částky za prodané sazenice sečetla, zjistila, že určila správné počty sazenic. Vůbec ale nepočítala s tím, že může mít úloha více řešení. Tato informace ani nebyla uvedena v zadání, proto nad touto variantou nepřemýšlela.



Obrázek 31: Řešení Sylvie - DĚDEČEK A SAZENICE - řešení tabulkou

Sylvie si v průběhu sdílení informací se spolužáky uvědomila, že úlohu pochopila špatně a s variantou jednoho kusu sazenic vůbec nepočítala. I když našla pouze jedno správné řešení ze dvou, použila správné matematické vztahy a strategie pro řešení úlohy, logické myšlení a aplikaci matematických dovedností jako jsou sčítání, odčítání, násobení a dělení.

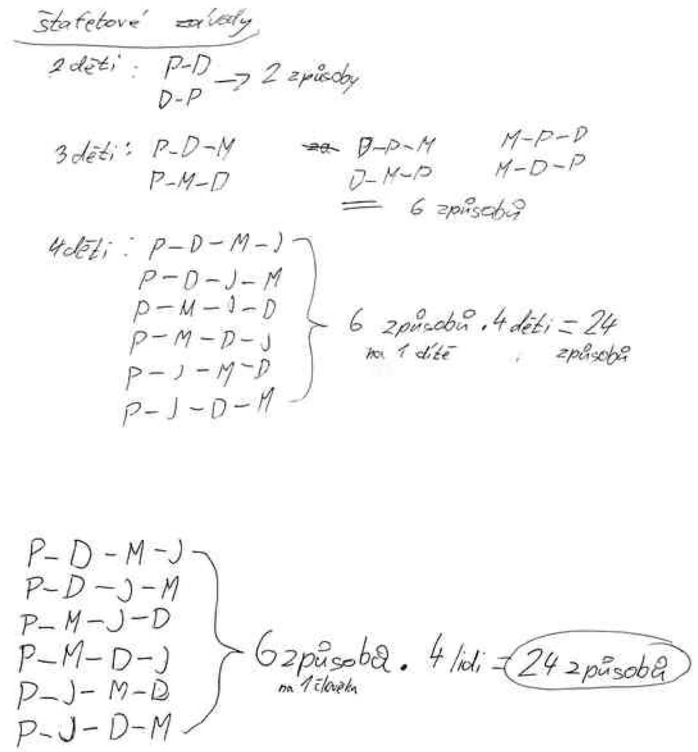
Komentář k řešení nestandardní úlohy - ŠTAFETOVÉ ZÁVODY

Tuto NÚ Sylvie řešila čtvrtý den od zahájení vypracovávání NÚ. Jelikož před tím neměla zkušenosti s řešením kombinatorických úloh, nejdříve jsem jí i ostatním dětem vysvětlila, že musí hledat všechny možnosti, které mohou nastat podle zadání a jaké postupy se při řešení u těchto typů úloh dají využívat.

Sylvie se těšila na úlohy z kombinatoriky. Když si poprvé přečetla zadání této úlohy, komentovala to tím, že tomu vůbec nerozumí. Nevěděla si rady s pojmem „štafetové závody v plavání". Nepřečetla si poznámku o vysvětlení daného pojmu pod zadáním úlohy. Jakmile se ale ujistila, že rozumí významu, co to jsou štafetová závody, vrhla se do práce. Zpočátku přemýšlela nahlas a sama si intuitivně předříkávala možnosti pořadí v případě, kdyby byly pouze dvě děti ve štafetě a to, jakým způsobem by se mohly mezi sebou prostřídat. Potom i variantu tří dětí. Následně si začala všechno zaznamenávat na papír. Použila k vyřešení úlohy výčet všech možných variant (viz obrázek č. 32). Postupovala nejdříve od dvou dětí, kde vypsala 2 možnosti střídání. Dále tří dětí, kde vypsala 6 možností. Nakonec vypsala možnosti, při kterých se prostřídaly čtyři děti. Zde už nevypisovala všech 24 možností, ale uvědomila si z předešlého vypsání možného prostřídání tří dětí, že stačí vypsat všechny možnosti u jednoho dítěte a potom vzniklé možnosti vynásobit počtem dětí. Proto si vypsala pouze jedno dítě, které plave na prvním místě a ostatní se budou na dalších pozicích obměňovat. Všechny tyto možnosti, kterých vypsala šest (6 způsobů) vynásobila čtyřmi dětmi .

Sylvie vyřešila úlohu správně. Sestavila správný výčet možných variant pořadí, ve kterém budou děti plavat. Zohlednila podmínku, že žádné dítě nesmí plavat dvakrát. Postupovala logicky a systematicky při výpisu možných variant pro daný počet dětí ve štafetě. Začala s výčtem pro dvě děti, poté pro tři a nakonec pro čtyři děti. Tento postup ji napomohl k tomu, aby neopomenula žádnou možnou variantu. Sylvie zde využila své matematické dovednosti. Správně rozpoznala, že počet možností závisí na počtu dětí ve štafetě. K výpočtu použila kombinatorický přístup, aniž by se to někdy učila.

Komunikace a sdílení svých poznatků ji pomohlo v porozumění a správném řešení úlohy.

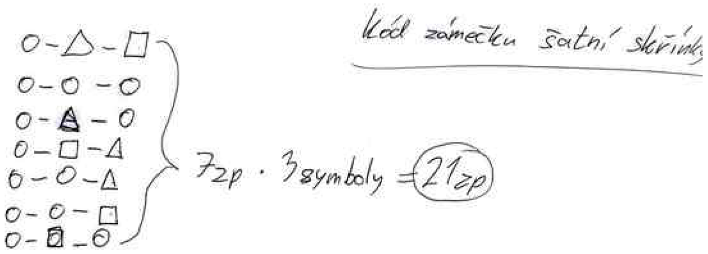


Obrázek 32: Řešení Sylvie - ŠTAFETOVÉ ZÁVODY - řešení výčtem možných variant

Komentář k řešení nestandardní úlohy - KÓD ZÁMEČKU ŠATNÍ SKŘÍŇKY

Následující den, kdy již měla Sylvie zkušenost s první úlohou z kombinatoriky, kterou vyřešila správně, si věřila a vrhla se do práce. Na okamžik se pozastavila nad větou „Symboly se můžou mezi sebou opakovat." , jelikož v předešlé úloze možnost opakování nebyla. Ale i s tímto zadáním si věděla rady a začala úlohu řešit zakreslením - výčtem všech možností (viz obrázek č. 33), jak se může kód nastavit.

Uvědomovala si, že má k dispozici tři symboly, které se mohou opakovat a musí se mezi sebou prostřídat. Rozkreslila si možnosti, kde na první pozici umístila kroužek a na dalších dvou pozicích střídala všechny tři symboly. Nepostupovala moc systematicky a z toho důvodu na dvě možnosti prostřídání opomněla. Zakreslila pouze sedm z devíti možných způsobů, které vynásobila třemi symboly . Z toho důvodu nevyřešila úlohu správně, i když postupovala správně.



Obrázek 33: Řešení Sylvie - KÓD U ŠATNÍ SKŘÍŇKY - řešení zakreslením - výčtem možností

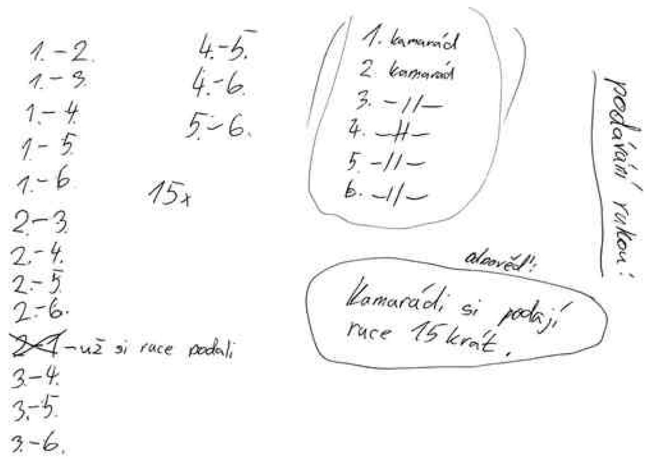
Sylvie využila logického myšlení a uvažování při zakreslování kombinací prostřídání symbolů s možností opakování, ale díky nepozornosti a nesystematičnosti na dvě možnosti prostřídání symbolů opomněla. Kvůli této chybě nevyřešila úlohu správně.

Komentář k řešení nestandardní úlohy - PODÁVÁNÍ RUKOU

S touto úlohou neměla Sylvie žádné výrazné problémy. Aby správně vyřešila úlohu a porozuměla zadání, položila tyto otázky: „Počítá se podání rukou mezi dvěma lidmi jako jedno podání nebo jako dvě podání?”, „Podává si ruce každá dvojice pouze jednou?”. Na tyto otázky dostala správné odpovědi od spolužáků při společném sdílení svých názorů.

Sylvie pro své řešení použila metodu vypsání všech kombinací podání ruky mezi kamarády (viz obrázek č. 34). Nejdříve vypsala prvního kamaráda, který si se všemi kamarády podává ruku. Těchto možných kombinací vypsala celkem pět. Poté vypsala všechny možnosti druhého kamaráda, který si s ostatními, kromě prvního kamaráda, podává ruku. Těchto možností vypsala také celkem pět, ale jednu kombinaci s prvním kamarádem vyškrtla, jelikož si uvědomila, že si už ruku podali. Dále vypsala tři další kombinace podávání ruky třetího kamaráda. Následovaly další dvě kombinace čtvrtého kamaráda a jako poslední kombinaci vypsala podání ruky pátého kamaráda se šestým. Celkem tedy vypsala 15 možných kombinací.

Sylvie určila správný počet podávání rukou mezi kamarády a její výsledek odpovídá správnému řešení úlohy. Logicky zohlednila skutečnost, že každý kamarád se vítá s každým dalším kamarádem právě pouze jednou. Postupovala systematicky při vypsání všech kombinací dvojic.

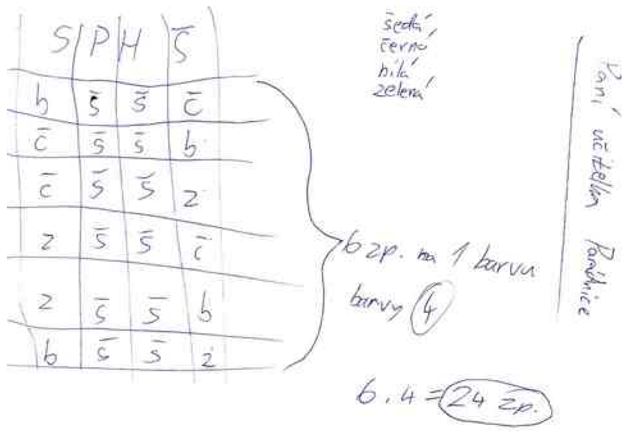


Obrázek 34: Řešení Sylvie - PODÁVÁNÍ RUKOU - řešení vypsáním kombinací

Komentář k řešení nestandardní úlohy - PANÍ UČITELKA PARÁDNICE

Tato úloha byla poslední ze skupiny kombinatorických úloh. Pro Sylvie byla nejobtížnější a trvala jí nejdelší čas.

Sylvie si úlohu několikrát pročítala. Aby mohla přemýšlet o zadání úlohy, porozuměla stanoveným podmínkám v zadání a mohla postupovat systematicky v nalezení správných kombinací, pokládala tyto otázky: „Když si vybere paní učitelka halenku a punčocháče v jedné barvě, může se tato barva ještě vyskytovat na jiném druhu oblečení?”, „Musí mít halenka a punčocháče stále stejnou barvu?”, „Kolik barev může paní učitelka míchat dohromady?”. Tyto otázky opět diskutovala se svými spolužáky. Pokaždé na ně dostala správné odpovědi. Následně se vrhla do práce. Nakreslila tabulku (viz obrázek č. 35), do které v prvním řádku vypsala jednotlivé kusy oblečení a pod ně začala doplňovat kombinace barev, které přiřazovala konkrétnímu kusu oblečení. I když při diskusi nad úlohou Sylvie usoudila, že halenka a zároveň punčocháče nemusí mít vždy šedou barvu, uvedla do tabulky u těchto dvou druhů oblečení pouze šedou barvu. Dále si v prvních čtyřech navržených kombinacích barev hned neuvědomila, že je v zadání uvedená další podmínka, která stanovuje, že paní učitelka nikdy nekombinuje černou barvu se šedou. Díky této nepozornosti a možná i neporozumění zadání Sylvie navrhla špatný výčet možných kombinací. Z toho důvodu úlohu nevyřešila správně a její odpověď nesouhlasí s podmínkami zadáním.



Obrázek 35: Řešení Sylvie - PANÍ UČITELKA PARÁDNICE - řešení výčtem možných kombinací

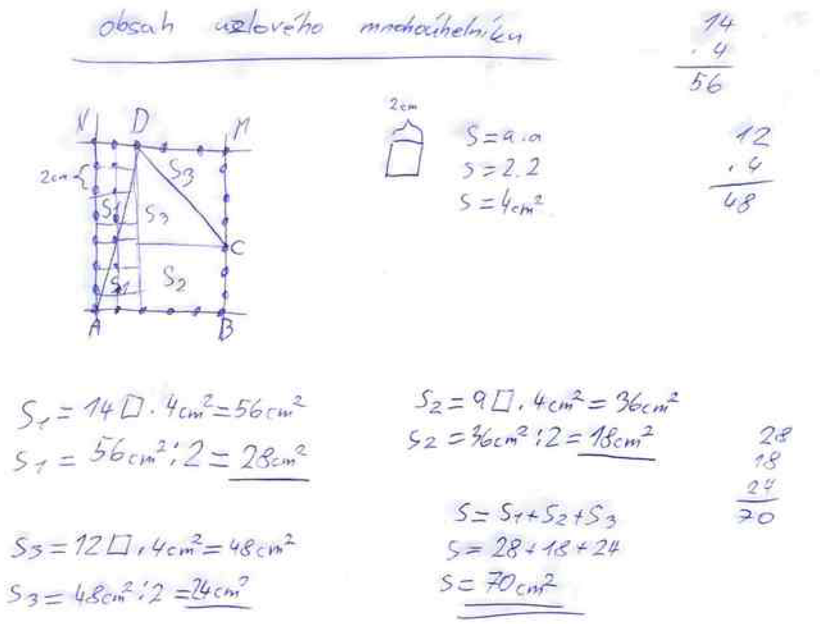
U této úlohy bylo důležité, aby Sylvie správně pochopila zadání - podmínky a pravidla. V tomto případě by pomohl zápis, který si neudělala. Úloha nevyžadovala složitější matematické dovednosti, ale schopnost aplikovat zadaná pravidla a podmínky výběru barev. Sylvie ale projevila snahu logického uvažování při výpisu kombinací barev, i když to nevedlo ke správnému vyřešení úlohy.

Komentář k řešení nestandardní úlohy z geometrie - OBSAH UZLOVÉHO MNOHOÚHELNÍKU

Sylvie je v řešení geometrických úloh jedna z nejlepších ve třídě. V hodinách geometrie pracuje samostatně, vyhledává složitější úlohy, vypomáhá slabším spolužákům a objasňuje jim postupy řešení.

S touto úlohou si z počátku nevěděla rady. Až po chvilce přemýšlení přišla na metodu, jakým způsobem by mohla úlohu řešit. Uvědomila si a správně identifikovala, že obsah mnohoúhelníku ABCD může vypočítat rozdělením na dva trojúhelníky a jeden čtverec (viz obrázek č. 36), se kterými bude pracovat a poté sečte jejich obsahy.

Nejdříve si nakreslila jeden čtvereček o velikosti 2 cm a vypočítala jeho obsah. Rozdělila mnohoúhelník ABMN na dva obdélníky, u kterých vyznačila obsahy S_1 a S_3 a jeden čtverec, kde vyznačila obsah S_2. Ze znalosti vlastností geometrických útvarů prokázala schopnost aplikovat vzorce pro výpočet obsahů. Uvědomovala si, že u obdélníků musí počítat pouze s polovinou jejich obsahů, aby vypočítala správně obsah daného mnohoúhelníku. Do části obrázku dokreslila uzlovou síť. Z ní určila počty čtverečků, ze kterých se obdélníky a čtverec skládají. Počty čtverečků vydělila dvěma a tím vypočítala obsahy pravoúhlých trojúhelníků, ze kterých se obsah mnohoúhelníku ABCD skládá. Bohužel si neuvědomila, že obsah čtverce S_2 nemůže dělit dvěma, jelikož musí počítat s celým útvarem. Zde vznikla chyba z nepozornosti, která vedla k chybnému výsledku úlohy. Jako poslední sečetla všechny obsahy.



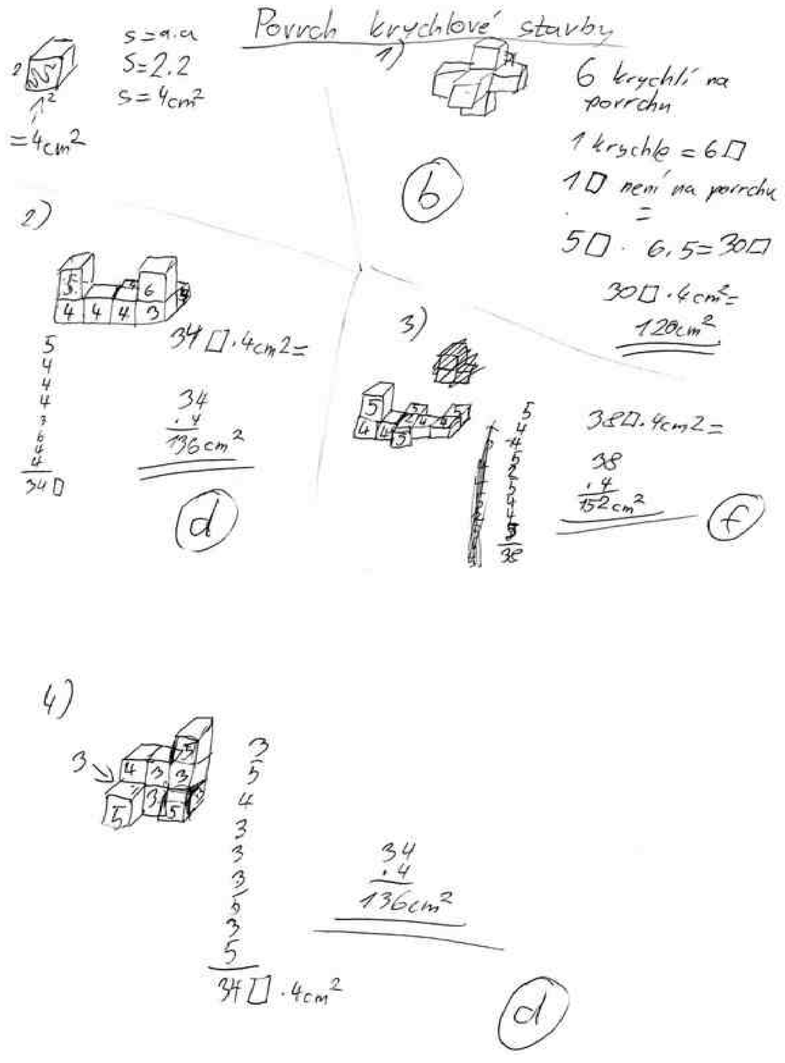
Obrázek 36: Řešení Sylvie - OBSAH UZLOVÉHO MNOHOÚHELNÍKU

Sylvie pochopila úlohu správně. Správně využila své znalosti geometrických útvarů a vzorců pro výpočty jejich obsahů. Ačkoli došlo k chybě při určení jednoho z obsahů, což vedlo k vyřešení úlohy špatně, lze ocenit její úsilí a použití správné metody.

Komentář k řešení nestandardní úlohy z geometrie - POVRCH KRYCHLOVÉ STAVBY

Druhá úloha z geometrie se týkala výpočtu povrchu krychlové stavby. Tyto typy úloh Sylvie řešila v hodinách geometrii velice ráda. Jelikož má dobrou prostorovou představivost, pustila se okamžitě do svých výpočtů. Jen se potřebovala ujistit, zda správně pochopila zadání a zeptala se, jestli bude správně řešit úlohu, když si vypíše všechny viditelné stěny z celé stavby a jejich počet vynásobí povrchem jedné stěny. Zda se jako viditelná stěna počítá i ta, která leží na zemi.

Nejdříve si nakreslila krychličku a správně vypočítala povrch jedné viditelné stěny (viz obrázek č. 37). Dále si překreslila geometrické těleso - krychlovou stavbu. Určila, že se stavba skládá z šesti krychliček, každá krychlička má 6 stěn a vždy jedna její stěna není vidět. Z těchto údajů vypočítala povrch tělesa vynásobením povrchu jedné stěny a počtem viditelných stěn. Správně přiřadila k první stavbě odpověď.



Obrázek 37: Řešení Sylvie - POVRCH KRYCHLOVÉ STAVBY

Podobným způsobem vypočítala povrch druhé stavby, jen si počty viditelných stěn zapsala přímo do překreslené stavby. U dvou krychličky ale určila špatný počet viditelných stěn, kterých mělo být celkem 32. Sylvie jich napočítala 34. Z toho důvodu tuto druhou stavbu vyřešila špatně.

Ve zbylých dvou stavbách postupovala obdobným způsobem. Vypsala všechny viditelné stěny do krychliček a potom je vynásobila povrchem jedné stěny.

Tři krychlové stavby vyřešila správně a u jedné stavby udělala dvě drobné chyby, které byly způsobené nepozorností.

Komentář k řešení nestandardní úlohy z geometrie - PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST

Poslední úlohou z geometrie byla prostorová představivost. K této úloze měla Sylvie možnost využít molitanové kostky pro kontrolu svých řešení. Této možnosti nevyužila, jelikož věřila, že úlohu vyřeší i bez nich.

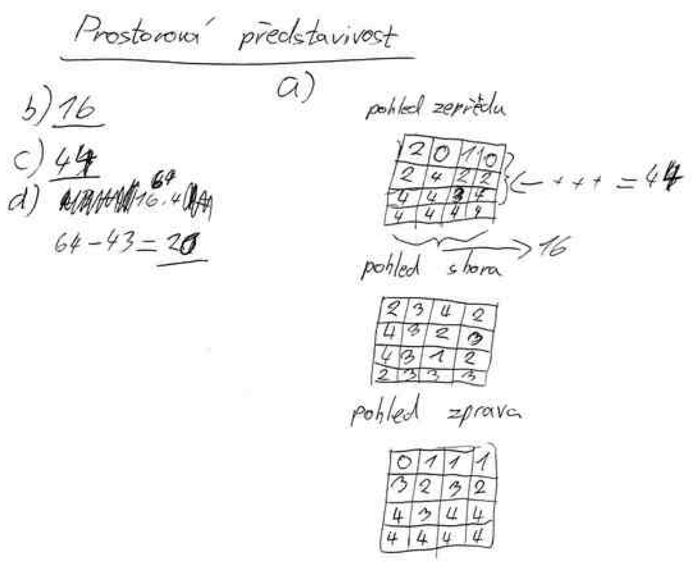
Sylvie si překreslila tabulky (viz obrázek č. 38), do kterých měla zapisovat počty krychliček z různých pohledů. Nejdříve se ale zeptala, zda musí být pod krychličkou, kam nevidí, vždy další krychlička, nebo může krychlička levitovat.

Doplňování počtu krychliček z pohledu zepředu byl pro Sylvii nejjednodušší. Vůbec nezaváhala a správně doplnila všechny počty. Po doplnění celé tabulky sečetla všechna čísla, která ji udávala počet krychliček, ze kterých se stavba skládá. Tím správně vyřešila i otázku c). Pohled shora ji dělal trochu problémy, ale i tak ho doplnila správně. Zároveň si uvědomovala, že musí být v tabulkách ze všech pohledů stejný počet krychliček. Nad doplněním počtů krychliček do poslední tabulky (pohled zprava) chvíli váhala. Nebyla si jistá, z jaké strany má do tabulky doplňovat. Po chvilce přemýšlení nad zadanými čísly v tabulce sama opět správně doplnila zbylé počty krychliček.

Na otázku b) odpověděla také správně. Správně určila počet krychliček, ze kterých se skládá podstava. Vycházela z počtu krychliček ve spodní řadě tabulky pohledu zepředu a jejich součtu.

I poslední otázku d) vyřešila Sylvie správně. Vycházela ze známých faktů, že se podstava tělesa skládá z 16 krychliček a 4 vrstev. Kdyby nechyběla žádná krychlička v tělese, skládala by se ze 64 krychliček. Od tohoto počtu odečetla skutečný počet krychliček a vypočítala, kolik krychliček chybí do postavení celé stavby.

Sylvie doplnila počty krychliček v tabulkách správně a určila správně i zbylé tři otázky. Prokázala tím schopnost správného vnímání, představivosti a vizualizaci geometrických útvarů v trojrozměrném prostoru.



Obrázek 38: Řešení Sylvie - PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST

3.2.4.1 Shrnutí případové studie

Sylvie se hned od začátku jevila jako žákyně, která by se měla vzdělávat na víceletém gymnáziu. Přesto se díky vypracování souboru NÚ u ní zlepšil celkový přistup a pohled na tyto úlohy. Jelikož se s nimi předtím v hodinách matematiky nesetkala, ze začátku s nimi trochu „bojovala”. Především tehdy, když řešila první úlohu z nové matematické oblasti. Pouze geometrické úlohy ji nedělaly problémy. Při jejich řešení se cítila „jako ryba ve vodě”.

Ze začátku váhala a přemýšlela, jakým způsobem by se úlohy daly řešit. Navrhovala pouze naučené postupy z hodin matematiky, jako jsou zápis a naučené postupy typu sčítání, odčítání, násobení a dělení. To ale nevedlo k řešení. Ukázkou a vysvětlením možných postupů řešení se zlepšovala v navrhování strategií, logicky nad nimi uvažovala, postupovala systematicky při jejich vypracovávání, využívala analytické myšlení, kriticky hodnotila a správně argumentovala. Také bylo vidět, když se snažila při řešení těchto úloh využívat odzkoušené postupy z předešlých řešení a společných rozborech, začal se jí zkracovat čas potřebný k jejich vypracování, kterého při přijímacím řízení není dostatek. Sylvii se také zvýšilo sebevědomí, jelikož si byla jistější v řešení složitějších úloh. Dříve se jí stávalo při řešení matematického problému v časové tísni, že ho raději vynechala a řešila úlohy „na jistotu”.

I když udělala párkrát chybu z nepozornosti, s úlohami se poprala výborně a bylo vidět, že má z toho radost. Rozšířila si tím nové matematické vědomosti a dovednosti potřebné pro zdárné vykonání zkoušek na víceletá gymnázia.

Tím se potvrdily předpoklady **P2, DP2 a P3.**

3.2.5 Vyhodnocení řešení navrženého souboru NÚ z matematiky

Tato kapitola se věnuje vyhodnocení úloh žáků v porovnání se Sylvií z případové studie (viz kapitola 3.2.4) a celkovému shrnutí řešení NÚ všech žáků.

Navržený soubor NÚ se skládá celkem z 10 úloh. Tři úlohy, které se dají řešit pomocí diofantovských rovnic, čtyři úlohy kombinatorického typu a tři úlohy z geometrie. V každé úloze, kromě geometrických úloh, jsou vždy uvedeny dílčí úlohy, které jsou návodné a měly by napomoci k vyřešení původní úlohy.

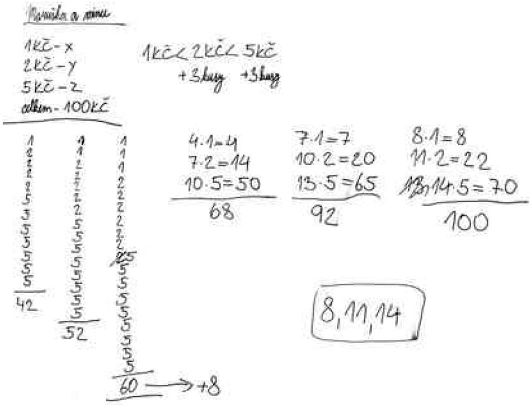
Soubor NÚ řešilo pět žáků (včetně Sylvie), kteří se hlásili ke studiu na víceletá gymnázia v hodinách matematiky v březnu, v období před přijímacím řízení. Žáci vypracovávali úlohy postupně, vždy jednu úlohu denně po dobu 10 dní. Na každou měli 15minutovou časovou dotaci na konci vyučovací hodiny matematiky. Pokud za tuto dobu nestihli úlohu vyřešit, měli možnost ji dokončit na začátku následující hodiny. Úlohy řešili žáci z části samostatně. Pokud nevěděli, jak úlohu řešit, mohli mezi sebou konzultovat a sdílet své názory a řešit navržené postupy. Během vypracovávání úloh se mohli žáci doptávat a klást otázky, zda porozuměli zadání. Občas se potřebovali ujistit v jejich navrženém postupu řešení. Po vyučování jsme se vždy sešli na 20 minut a společně jsme diskutovali o postupech a navržených řešeních a komentovali výsledky.

Žáci řešili nejdříve všechny nestandardní úlohy řešené pomocí diofantovkých rovnic, jako druhé řešili NÚ kombinatorického typu a poslední řešili NÚ z geometrie. První úlohy z daného okruhu byly pro žáky velmi obtížné. Často si s nimi nevěděli rady, nepochopili zadání a byli celkově bezradní, nebyli schopni rozkreslení, vytvoření tabulky nebo grafu, pouze přemýšleli nad tím, jak úlohu vypočítat dle běžných postupů z hodin matematiky. Naopak poslední, třetí či čtvrtá úloha z daného okruhu, byla pro ně nejsnazší. To již měli z předešlých úloh nastíněné možné postupy řešení, ze společné konzultace, pomocí kterých mohli úlohy řešit. Nemuseli ani využívat dílčí (návodné) úlohy a několikrát jsem si všimla, že si i sami úlohu upravili odstraněním zadané podmínky, bez které úlohu vyřešili a poté postup aplikovali do původního zadání úlohy.

Komentáře k jednotlivým NÚ v porovnání se Sylvií

NÚ MARUŠKA A MINCE

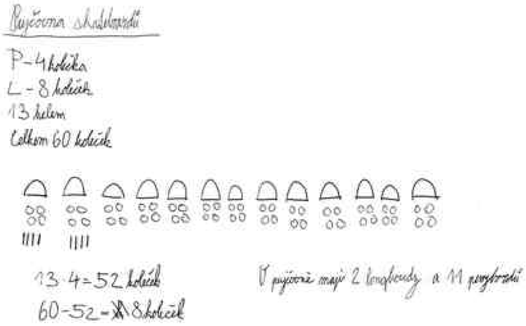
Žáci řešili tuto úlohu s většími obtížemi. 3 žáci měli problém se zadanou podmínkou, že se „jednotlivé počty kusů mincí od sebe liší o tři kusy”. Jeden žák nerozuměl, co je to „celková hodnota mincí”. Při společné konzultaci možných způsobů řešení úlohy usoudili, že kdyby je napadlo úlohu řešit tabulkou jako Sylvie nebo rozkreslením jednotlivých mincí, byla by to dle jejich slov „brnkačka”. Pouze jeden žák si zakresloval jednotlivé kusy mincí (viz obrázek č. 39)



Obrázek 39: Ukázka žákovského řešení - MARUŠKA A MINCE

NÚ PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ

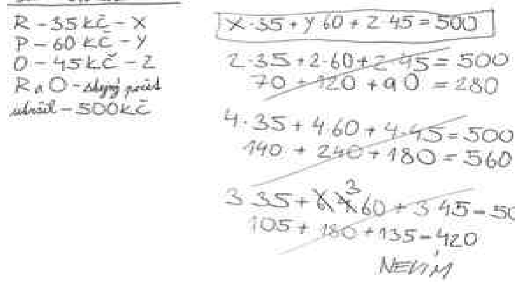
Tři žáci řešili úlohu podobně jako Sylvie a to kreslením skateboardů. Pouze jeden ze žáků nakreslil 13 skateboardů - helem (viz obrázek č. 40), ke kterým nakreslil čtyři kolečka a zbylých osm koleček rozkreslil ke dvěma skateboardů po 4 kusech koleček. Další žák úlohu nevyřešil vůbec.



Obrázek 40: Ukázka žákovského řešení - PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ

NÚ DĚDEČEK A SAZENICE

Jeden žák si zapisoval údaje do tabulky, stejně jako Sylvie. Dva žáci úlohu nevyřešili vůbec. Další žák úlohu řešil pomocí rovnice o třech neznámých (viz obrázek č. 41), ale dále s ní neuměl pracovat. Nestanovil si ani podmínku, kde $x = y$.



Obrázek 41: Ukázka žákovského řešení - DĚDEČEK A SAZENICE

NÚ ŠTAFETOVÉ ZÁVODY V PLAVÁNÍ

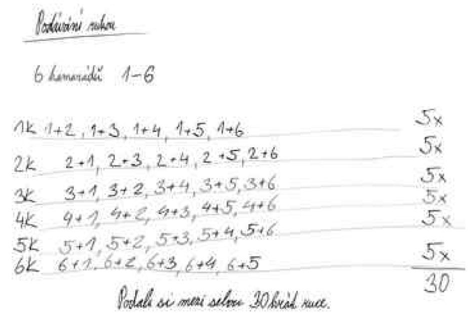
Ostatní žáci v porovnání se Sylvií měli s úlohou větší obtíže. Nenapadlo je si vypsat možné varianty prostřídání dětí mezi sebou od nižšího počtu dětí (dvě děti, tři děti, čtyři děti), proto měli ve vypsání všech možných variant značné chyby. Někdo plaval dvakrát a nebo se neprostřídal na všech pozicích. Úlohu vyřešila správně pouze Sylvie a jeden chlapec.

NÚ KÓD ZÁMEČKU ŠATNÍ SKŘÍŇKY

Dvě děti úlohu vyřešily správně jako Sylvie. Pro jejich vyřešení úlohy použili stromový graf. Další dvě děti tuto úlohu řešily bez možnosti opakování symbolů. Z toho důvodu úlohu vyřešily špatně.

NÚ PODÁVÁNÍ RUKOU

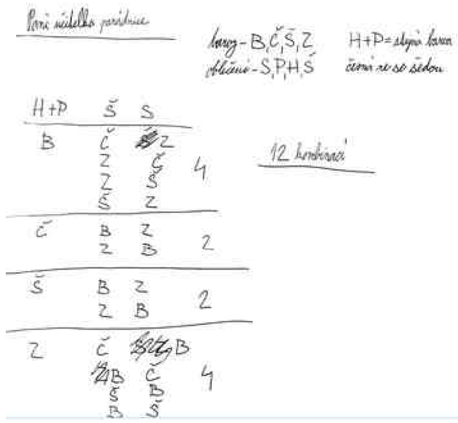
Tři spolužáci tuto úlohu vyřešili také správně jako Sylvie. Pouze jeden spolužák vypsal všechny kombinace (viz obrázek č. 42) i ty, které byly duplikované a tím úlohu nevyřešil správně.



Obrázek 42: Ukázka žákovského řešení - PODÁVÁNÍ RUKOU

NÚ PANÍ UČITELKA PARÁDNICE

Tato úloha byla pro všechny žáky nejobtížnější. Všichni úlohu dokončili až v nastavené časové dotaci. Pouze jeden žák vyřešil úlohu správně, kdy si udělal zápis a provedl výčet všech možných kombinací (viz obrázek č. 43).



Obrázek 43: Ukázka žákovského řešení - PANÍ UČITELKA PARÁDNICE

NÚ OBSAH UZLOVÉHO MNOHOÚHELNÍKU

Dva žáci úlohu nedokončili. Neměli trpělivost k jejímu dořešení a neustále mezi sebou diskutovali o možných postupech. Jedna žákyně neporozuměla pojmu „uzlový bod" a úlohu se ani nepokusila řešit. Jeden žák vyřešil úlohu stejně jako Sylvie.

NÚ POVRCH KRYCHLOVÉ STAVBY

Tři žáci řešili úlohu obdobným způsobem jako Sylvie. Občas chybovali a z nepozornosti určili více nebo méně viditelných stěn. Z toho důvodu špatně přiřadili špatný výsledek k dané stavbě. Jeden žák vyřešil celou úlohu správně.

NÚ PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST

Dva žáci prokazovali jen částečnou schopnost správného vnímání a představivost trojrozměrných útvarů, jelikož se v jejich doplňování do tabulek z různých pohledů vyskytovaly drobné chyby. Tím pádem vyřešili úlohu pouze částečně správně. Na rozdíl od Sylvie dva žáci využili molitanové kostky, těleso si postavili a pracovali se skutečným modelem. Krychlovou stavbu postavili správně, neustále si kontrolovali své výpočty a úlohu vyřešili také správně, i když v nastavené časové dotaci.

SHRNUTÍ ŘEŠENÍ NAVRŽENÉHO SOUBORU NÚ Z MATEMATIKY

Z řešení jednotlivých úloh a pozorováním žáků při vypracovávání NÚ mohu usoudit a tvrdit, že těchto pět žáků by bez nápovědy, objasnění zadání, možností konzultování jejich dotazů a možných postupů řešení, mělo při samostatném řešení zadaných úloh značné problémy. Nejen při řešení první úlohy bylo vidět, že se ocitli v nové situaci a nevědí si rady s vypracováním. Nebyli schopni použít jinou metodu řešení než „pokus-omyl" a naučené postupy (sčítání, odčítání, násobení a dělení) z hodin matematiky, při kterých takovéto typy úloh s paní učitelkou neřešili. Tím se potvrzuje předpoklad **P2**. Postupná následná práce a seznamování se s danými typy úloh ukázala, že žáci začali využívat i jiné metody řešení úloh než pouze „pokus-omyl", při kterých využívali k řešení tabulky, stromové grafy a obrázky. Zde se potvrzuje dílčí předpoklad **DP2**.

V rámci pozorování žáků při řešení úloh bylo patrné, že byli postupně schopnější a zároveň rychlejší při analýze problémů, přemýšleli mimo zaběhnuté vzorce a hledali inovativní způsoby řešení. Kriticky hodnotili svá řešení a zlepšovali se v matematických dovednostech a schopnostech. Projevovali analytické myšlení, při kterém ze složitějšího problému vytvořili jednodušší části (viz řešení úlohy Štafetové závody od Sylvie obrázek č. 32). Pracovali systematicky, naslouchali druhým a postupně se učili správně vyjadřovat své myšlenky a přínosně argumentovat. Zde se potvrzuje předpoklad **DP3**.

I když byli všichni v tuto dobu, těsně před přijímacími zkouškami unavení a začínali mít strach z nepřijetí na víceletá gymnázia, s úlohami se popasovali dobře. Ukázalo se, že zařazování NÚ do výuky matematiky má přínos jak pro intelektuální a osobnostní rozvoj dítěte, lepší zvládnutí přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia, tak i pro přípravu na složitější úlohy nejen v matematice, ale i v běžném životě.

3.2.5.1 Reflexe z řešení navrženého souboru NÚ

Řešení souboru NÚ v hodinách matematiky hodnotím velmi kladně. Žáci byli ze začátku velmi ochotni úlohy řešit. Cítili potřebu si tyto okruhy matematiky (úlohy řešené pomocí diofantovských rovnic, kombinatorika a geometrie v rovině a prostoru) trochu přiblížit. Pouze jedna dívka z této třídy navštěvovala přípravný kurz na přijímací zkoušky. Ostatní žáci se připravovali na zkoušky sami v rámci opakování probraného školního učiva. Se svými rodiči doma procvičovali testová zadání z předešlých let (https://prijimacky.cermat.cz) a věděli tak, že se podobné typy úloh při přijímacím řízení vyskytují.

Během řešení jednotlivých úloh mě občas překvapilo a zarazilo, jakým způsobem žáci s úlohou pracují a vymýšlí nesmyslné postupy a metody řešení. Ze začátku nebyli schopni samostatně pracovat a přijít na způsob, jak úlohy řešit. Neustále zkoušeli nesmyslně sčítat, odčítat, násobit a dělit, využívali metodu „pokus-omyl” a postupně propadali beznaději. Z tohoto důvodu měly děti možnost mezi sebou konzultovat svá navrhovaná řešení a postupy. Také měly možnost se zeptat i mě, aby se ujistily, zda úlohu pochopily správně a navrhly správné řešení.

Jediné, co bych příště změnila, by bylo časové naplánování řešení úloh. Neřešila bych úlohy s žáky těsně před přijímacími zkouškami, ale již během začátku školního roku, aby mohli tuto zkušenost s řešením NÚ a navrhováním různých způsobů řešení samostatně procvičovat na podobných úlohách. Ukázalo se, že v této době před přijímací zkouškami je již pozdě s ukázkou možných řešení a žáci si je nemohou pořádně upevnit pro zdárné vykonání přijímacích zkoušek. Děti již byly nervózní, byly unavené a občas už ani neměly náladu úlohu řešit a dokončovat ji.

S třídou se mi pracovalo dobře. I když nejsem jejich třídní učitelka a nevyučuji je matematice, chodily za mnou děti, které se hlásily na přijímací řízení, o velké přestávce konzultovat příklady z testových zadání předešlých let, které se jim doma nedařilo vyřešit.

3.2.6 Ověření výzkumných předpokladů

Tato kapitola je věnována zhodnocení všech tří stanovených výzkumných předpokladů P1, P2, DP2 a P3 (viz kapitola 3.2.1) na základě uvedených ověřovacích metod, které jsou v kapitole popsány.

P1: V učebnicích a pracovních sešitech matematiky se vyskytuje nestandardních aplikačních úloh málo. *Četnost NÚ.*

Ověření: dotazníkové šetření a srovnání učebnic pro páté ročníky ZŠ z hlediska NÚ.

Předpoklad P1 potvrzen.

Zdůvodnění:

Předpoklad **P1** byl potvrzen za základě dotazníkového šetření, kdy učitelé nejčastěji uvedli, že NÚ vyhledávají na internetu.

Další ověřovací metodou bylo srovnání učebnic matematiky pro 5. ročníky čtyř různých nakladatelství (Taktik, Prodos, Nová škola, H-mat). Toto srovnání jsem provedla v teoretické části práce (viz kapitola 2.6), kde jsem se především zaměřovala na tři typy NÚ z oblasti úloh řešených pomocí diofantovských rovnic, kombinatoriky a geometrie v rovině a prostoru. Tyto typy úloh byly v učebnicích zastoupeny v menší míře nebo vůbec. Z celkového srovnání zařazení NÚ v učebnicích jsem dospěla k závěru, že ve všech zkoumaných řadách učebnic se vyskytují ve větší či menší míře nestandardní slovní úlohy, kde ale jejich obtížnost často nesplňuje úroveň žáků 5. třídy, nebo nabízí žákům jednu možnost řešení a tím popírá samotný smysl nestandardních úloh, tedy motivaci žáků ke kreativitě a inovativním řešením. Z výsledků dotazníkového šetření a srovnání učebnic matematiky pro 5. ročníky lze usoudit, že je potřeba NÚ zařazovat do učebnic a prcovních sešitů ve větší míře. Tím se předpoklad **P1** potvrdil.

P2: Žáci při řešení NÚ využívají převážně naučené algoritmy v hodinách matematiky. Dílčí předpoklad DP 2: Pokud se s žáky při výuce matematiky řeší NÚ, využívají více metod řešení NÚ (tabulky, obrázky, grafy, ...). *Metody řešení NÚ.*

Ověření: vyhodnocení navrženého souboru NÚ a pozorování žáků při řešení úloh.

Předpoklad P2 potvrzen.

Dílčí předpoklad DP2 potvrzen.

Zdůvodnění:

Předpoklad **P2** byl potvrzen za základě vyhodnocení navrženého souboru NÚ, kdy se prokázalo, že žáci používají pouze naučené postupy z hodin matematiky a neuplatňují kreativitu při hledání jiných forem řešení NÚ. Tento předpoklad byl ale potvrzen vždy pouze z prvních úloh dané oblasti matematiky (úlohy řešené pomocí diofantovských rovnic, kombinatorika). Jelikož probíhala po každé splněné úloze společná konzultace a ukázka možných řešení, jevili se následující úlohy žákům již snadnější a ve svých řešeních uplatňovali více metod řešení a přístupů k nim. Prostřednictvím těchto úloh byli namotivováni ke kreativnějším metodám řešení. Nevyužívali pouze naučené běžné postupy řešení úloh a získali povědomí o jiných metodách řešení mimo standardní algoritmy. Z tohoto důvodu byl potvrzen **DP2**.

P3: Využití NÚ v hodinách matematiky nebo v rámci přípravy na přijímací zkoušky na víceletá gymnázia zlepší dovednosti, schopnosti a logické přemýšlení a uvažování u žáků 5. ročníku ZŠ. *Zlepšení matematických dovedností.*

Ověření: vyhodnocení navrženého souboru NÚ a pozorování žáků při řešení úloh.

Předpoklad P3 potvrzen.

Zdůvodnění:

Předpoklad **P3** byl ověřen formou vyhodnocení navrženého souboru NÚ a pozorováním žáků při řešení těchto úloh. Získaná data nasvědčují tomu, že žáci, kteří se aktivně zabývali řešením úloh, vykazovali pozitivní pokrok ve svých matematických dovednostech, schopnostech a logickém myšlení a uvažování. Díky variabilitě jednotlivých úloh a možnosti využití různých strategií a metod řešení žáci podpořili svoji kreativitu a inovativní uvažování, které při řešení běžných úloh nemusí využívat. Začleňování NÚ do výuky matematiky podporuje rozvoj dovedností a schopností potřebných k jejich řešení.

4 Závěrečná část

Celá práce započala mým osobním podnětem jako matky dvou dětí, které se hlásily a připravovaly na přijímací zkoušky na víceletá gymnázia. Dále mojí zkušeností z pedagogické praxe. Potvrdila se mi důležitost rozvoje matematických dovedností a schopností, nutnost procvičování a začleňování NÚ do výuky matematiky a při přípravě na náročné přijímací zkoušky na víceletá gymnázia.

Cílem práce bylo posoudit problematiku nestandardních úloh na prvním stupni základní školy. Prozkoumat a porovnat strategie a metody řešení těchto úloh využívané žáky 5. ročníku. Dále vytvořit soubor nestandardních úloh, navrhnout jejich klasifikaci a prakticky ověřit ve školním prostředí.

V teoretické části se věnuji propojení nestandardních aplikačních úloh s Rámcovým vzdělávacím programem, rozvoji klíčových kompetencí v souvislosti s NÚ, zastoupením a četností těchto úloh v učebnicích matematiky pro 5. ročník ZŠ, specifikaci kritérií přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia a v neposlední řadě matematickým soutěžím.

Závěrečná část obsahuje konkrétní příklady žákovských řešení NÚ z navrženého souboru a jejich výsledky, které poukazují na důležitost zařazování NÚ do výuky matematiky a při přípravě na přijímací zkoušky na víceletá gymnázia. Jedním z důležitých poznatků práce je zjištění, že výuka NÚ může pozitivně ovlivnit matematické dovednosti a logické myšlení žáků, vybízí žáky ke kreativitě a vyhledávání nových alternativních cest k řešení.

Navržený soubor nestandardních úloh může mimo jiné sloužit jako materiál k obohacení výuky v hodinách matematiky v pátém ročníku. Jsou v něm podrobně rozpracovány postupy možných řešení a praktický návod, jak s těmito úlohami pracovat ve výuce.

Ačkoliv se v průběhu realizace prakticko-výzkumné části občas vyskytly drobné překážky jak z mé strany, tak ze strany žáků se mnou spolupracujících na řešení souboru NÚ, velmi mě práce obohatila a přinesla cenné zkušenosti a poznatky pro moji následující pedagogickou praxi.

Seznam použité literatury

- BLAŽKOVÁ, R, MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M., *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy*. Brno: Masarykova univerzita, 1992. ISBN 80-210-0468-1.
- BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ., M., *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002. ISBN 80-210-3022-4.
- STERNBERG, R., J., *Kognitivní psychologie*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-376-5.
- STEHLÍKOVÁ, M., *Nadané dítě: jak mu pomoci ke štěstí a úspěchu*. Praha: Grada, 2018. ISBN 978-80-271-0512-0.
- HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., VONDROVÁ, N., *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. 1. [a] 2. díl. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.
- HEJNÝ, M., KUŘINA, F., *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Třetí vydání. Praha: Portál, 2015. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-262-0901-0.
- ATKINSON, R., L., *Psychologie*. Praha: Portál, 2003. ISBN 80-7178-640-3.
- VÁGNEROVÁ, M., *Vývojová psychologie I.* Praha: Karolinum, 1997. ISBN 80 7184-317-2.
- LOKŠOVÁ, I. a LOKŠA, J. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole,* Praha: Portál, 1999. Pedagogická praxe. ISBN 80-7178-205-X
- CIRJAK, M., *Zbierka divergentných ainých neštandardných úloh (Tvorivosť v matematike)*. Prešov 2000: Essox. ISBN 80-968369-0-0
- CHALOUPKOVÁ, S., *Úlohy s antisignálem pro žáky 1. stupně ZŠ*. 2009. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Hejný, Milan.
- MOKRÁ, T., *Lineární diofantické rovnice*. Brno, 2015. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky. Vedoucí práce Mgr. Vojtěch Žádník, PhD.
- BABÁKOVÁ, V., *Sbírka nestandardních typů úloh pro výuku matematiky na 1. stupni ZŠ* [online]. České Budějovice, 2007 [cit. 2023-08-17]. Dostupné z: https://theses.cz/id/n0fa17/. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce doc. PhDr. Alena Hošpesová, Ph.D.

Internetové zdroje:

- *Metodický portál RVP.CZ* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogický_lexikon/G/Gramotnost/Matematická_gramotnost
- *ČŠI, Rozvoj matematické gramotnosti na základních školách* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://www.csicr.cz/cz/Aktuality/Rozvoj-matematicke-gramotnosti-na-zakladnich-skola
- *Specifikace požadavků pro jednotnou přijímací zkoušku v přijímacím řízení na střední školy v oborech vzdělávání s maturitní zkouškou* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/specifikace-pozadavku/Specifikace_2022-2023/MASPECIFIKACEPOZADAVKU2022.pdf
- RVP ZV *2021* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/
- *Matematická olympiáda* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://www.matematickaolympiada.cz/co-je-mo
- *Matematická soutěž Klokan* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://matematickyklokan.net/index.php/o-soutezi
- *Matematická soutěž Pangea* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: (https://www.pangeasoutez.cz/o-soutezi)
- *Logická olympiáda* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://www.logickaolympiada.cz/
- *Projekt ESF OPVK č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://www.esf.kfi.zcu.cz/logika/opory/lof/prezentace/1.pdf
- *Nakladatelsví Nová škola: Matýskova matematika* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://www.matyskova-matematika.cz
- *Nakladatelství H-mat, Hejného metoda* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: https://www.h-mat.cz/hejneho-metoda
- *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání, Matematika a její aplikace, (Metodické doporučení s ilustrativními úlohami), tým autorů* [online], [vid. 15. 08. 2023]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/mpp_metodicke_komentare.pdf
- *VÚP: Nestandardní aplikační úlohy a problémy pro 1. stupeň ZŠ*, 2008 [online], [vid. 15. 08. 2023], Dostupné z:

https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/3002/nestandardni_aplikacni_ulohy_a_problemy_pro_1stupen_zs.pdf

Učebnice a pracovní sešity:

- *NOVOTNÝ, M., NOVÁK, F., Geometrie pro 5. ročník: Matýskova matematika.* Třetí vydání. Brno: Nová škola, 2019. Duhová řada. ISBN 978-80-7600-016-2.
- *NOVOTNÝ, M., NOVÁK, F., Matýskova matematika 2. díl: pro 5. ročník*. Druhé vydání. Brno: Nová škola, 2017. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-958-6.
- *NOVOTNÝ, M., NOVÁK, F., Matýskova matematika 1. díl: pro 5. ročník.* Druhé vydání. Brno: Nová škola, 2017. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-956-2.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ, J., et al. *Matematika pro 5. ročník II., pracovní sešit: Hejného metoda*. 1. vyd. Praha: H-mat, o.p.s., 2022, 52 s. ISBN 978-80-88247-32-6.
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ, J., et al. *Matematika pro 5. ročník, učenice : Hejného metoda*. 1. vyd. Praha: H-mat, o.p.s., 2022, 72 s. ISBN 978-80-88247-30-2.
- BÁRTOVÁ, M., BEĎAČOVÁ, M., FALTINOVÁ M., et al. *Hravá matematika 5: pro 5. ročník ZŠ: v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik, 2017. ISBN 978-80-7563-051-3.
- MOLNÁR, J., MIKULENKOVÁ H., *Matematika a její aplikace: 5. ročník*. Ilustroval Jindřich KANIA. Olomouc: Prodos, c2008. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-210-9.
- MOLNÁR, J., MIKULENKOVÁ H., *Matematika a její aplikace: 5. ročník*. Ilustroval Jindřich KANIA. Olomouc: Prodos, c2008. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-209-3.
- MOLNÁR, J., MIKULENKOVÁ H., *Matematika a její aplikace: 5. ročník*. Ilustroval Jindřich KANIA. Olomouc: Prodos, c2008. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-208-6.
- BRLICOVÁ, V., COHORNA, L., JIRČÍKOVÁ, M., *Koumák pro páťáky: rozšiřující pracovní sešit pro všechny páťáky, kteří chtějí víc vědět a přemýšlet ještě víc..*. Ilustroval Petr PALMA. Brno: Didaktis, [2018]. ISBN 978-80-7358-289-0.

Seznam použitých symbolů a zkratek

NÚ	nestandardní úlohy
RVP	Rámcový vzdělávací program
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program Základního vzdělávání
ŠVP	Školní vzdělávací program
ČSI	Česká školní inspekce
CERMAT	Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání
IQ	inteligenční kvocient
PISA	mezinárodní výzkum pořádaný Organizací pro hospodářskou spolupráci a rozvoj
·, x	krát
+	plus
-	mínus
=	rovná se
!	faktoriál
obr.	obrázek
např.	například
tzv.	tak zvaný
s.	strana
cm	centimetry
resp.	respektive

Seznam obrázků

Obrázek 1: Maslowova pyramida - hierarchie potřeb (https://www.mentem.cz/blog/teorie-motivace/)....25
Obrázek 2: Obrázek - Maruška a mince....53
Obrázek 3: Stromový diagram - Štafetové závody - 4 žáci (24 možností - 4 x 6 možnosti)....64
Obrázek 4: Stromový diagram - Štafetové závody - 3 žáci (6 možností - 3 x 2 možnosti)....67
Obrázek 5: Řešení zakreslením všech možností - Kód zámečku šatní skříňky (3 symboly x 9 možností = 27 možností)....69
Obrázek 6: Řešení stromovým diagramem - Kód zámečku šatní skříňky (3 symboly x 9 možností = 27 možností)....70
Obrázek 7: Řešení zakreslením všech variant (trojic) bez opakování symbolů - Kód zámečku šatní skříňky (3 symboly x 2 možnosti= 6 možností)....70
Obrázek 8: Řešení stromovým diagramem (bez opakování symbolů) - Kód zámečku šatní skříňky (3 symboly x 2 možnosti= 6 možností)....71
Obrázek 9: Podávání rukou - řešení stromovým diagramem....73
Obrázek 10: Obsah uzlového mnohoúhelníku - řešení b)....81
Obrázek 11: Obsah uzlového mnohoúhelníku - řešení a)....81
Obrázek 12: Prostorová představivost - tabulka pohledů....87
Obrázek 13: Prostorová představivost - patra....87
Obrázek 14: Prostorová představivost - pohledy....87
Obrázek 15: Podstava....88
Obrázek 16: Prostorová představivost - patra....88
Obrázek 17: Prostorová představivost - celá stavba (krychle)....88
Obrázek 18: Dotazníkové šetření - otázka č. 1....92
Obrázek 19: Dotazníkové šetření - otázka č. 2....93
Obrázek 20: Dotazníkové šetření - otázka č. 3....94
Obrázek 21: Dotazníkové šetření - otázka č. 4....95
Obrázek 22: Dotazníkové šetření - otázka č. 5....96
Obrázek 23: Dotazníkové šetření - otázka č. 6....97
Obrázek 24: Dotazníkové šetření - otázka č. 7....98
Obrázek 25: Dotazníkové šetření - otázka č. 8....99

Obrázek 26: Dotazníkové šetření - otázka č. 9...99
Obrázek 27: Řešení Sylvie - MARUŠKA A MINCE - řešení tabulkou.......................103
Obrázek 28: Řešení Sylvie - MARUŠKA A MINCE - zápis.......................................103
Obrázek 29: Řešení Sylvie - PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ - řešení tabulkou..........104
Obrázek 30: Řešení Sylvie - PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ - řešení obrázkem........104
Obrázek 31: Řešení Sylvie - DĚDEČEK A SAZENICE - řešení tabulkou..................105
Obrázek 32: Řešení Sylvie - ŠTAFETOVÉ ZÁVODY - řešení výčtem možných variant 107
Obrázek 33: Řešení Sylvie - KÓD U ŠATNÍ SKŘÍŇKY - řešení zakreslením - výčtem možností...108
Obrázek 34: Řešení Sylvie - PODÁVÁNÍ RUKOU - řešení vypsáním kombinací......109
Obrázek 35: Řešení Sylvie - PANÍ UČITELKA PARÁDNICE - řešení výčtem možných kombinací...110
Obrázek 36: Řešení Sylvie - OBSAH UZLOVÉHO MNOHOÚHELNÍKU................111
Obrázek 37: Řešení Sylvie - POVRCH KRYCHLOVÉ STAVBY..............................112
Obrázek 38: Řešení Sylvie - PROSTOROVÁ PŘEDSTAVIVOST.............................114
Obrázek 39: Ukázka žákovského řešení - MARUŠKA A MINCE...............................116
Obrázek 40: Ukázka žákovského řešení - PŮJČOVNA SKATEBOARDŮ.................116
Obrázek 41: Ukázka žákovského řešení - DĚDEČEK A SAZENICE.........................116
Obrázek 42: Ukázka žákovského řešení - PODÁVÁNÍ RUKOU................................117
Obrázek 43: Ukázka žákovského řešení - PANÍ UČITELKA PARÁDNICE...............117

Seznam tabulek

Tabulka 1: Půjčovna skateboardů..54
Tabulka 2: Půjčovna skateboardů - dílčí úloha č. 2..57
Tabulka 3: Půjčovna skateboardů - dílčí úloha č. 2..59
Tabulka 4: Dědeček a sazenice..60
Tabulka 5: Dědeček a sazenice - dílčí úloha č. 1..62
Tabulka 6: Štafetové závody...65
Tabulka 7: Štafetové závody - dílčí úloha č. 2...67
Tabulka 8: Podávání rukou - řešení tabulkou..73
Tabulka 9: Povrch krychlové stavby: viditelné stěny na stavbě - stavba č. 1.................83
Tabulka 10: Povrch krychlové stavby: viditelné stěny na stavbě - stavba č. 2................83
Tabulka 11: Povrch krychlové stavby: viditelné stěny na stavbě - stavba č. 3................83
Tabulka 12: Povrch krychlové stavby: viditelné stěny na stavbě - stavba č. 4................84
Tabulka 13: Povrch krychlové stavby: dotýkající se krychličky - stavba č. 1.................84
Tabulka 14: Povrch krychlové stavby: dotýkající se krychličky - stavba č. 2.................85
Tabulka 15: Povrch krychlové stavby: dotýkající se krychličky - stavba č. 3.................85
Tabulka 16: Povrch krychlové stavby: dotýkající se krychličky - stavba č. 4.................85

Přílohy

Příloha č. 1 Dotazník pro učitelé matematiky 5. ročníků

Příloha č. 2 Průvodní dopis k dotazníku pro učitelé matematiky 5. ročníků

Příloha č. 1 - Dotazník pro učitelé matematiky 5. ročníků

NESTANDARDNÍ ÚLOHY v matematice pro 5. ročník ZŠ

1. Kolik máte žáků ve třídě?

2. Kolik žáků se hlásí v letošním školním roce na víceletá gymnázia?

3. Využíváte nestandardní úlohy ve výuce? Pokud ano, jaké typy?
   a) ano
   b) ne
   c) výjimečně
   d) nemáme na ně v hodině čas
   e) jaké typy nestandardních úloh využíváte ....

4. Využíváte nestandardní úlohy při přípravě k přijímacím zkouškám?
   a) ano
   e) jaké typy nestandardních úloh využíváte ....
   b) ne, neřešíme nestandardní úlohy
   c) nepřipravuji děti k přijímacím zkouškám

5. Využíváte nestandardní úlohy v geometrii? Pokud ano, jaké typy?
   a) ano
   b) ne
   c) výjimečně
   d) nemáme na ně v hodině čas
   e) jaké typy nestandardních úloh využíváte ....

6. Pokud nestandardní úlohy zařazujete do výuky, jakým způsobem je s žáky řešíte?
   a) každý žák samostatně
   b) společně s celou třídou
   c) skupinová práce a potom společně konzultujeme
   d) tyto typy úloh řešíme pouze při práci s nadanými žáky

7. Umí žáci nestandardní úlohy řešit?
   a) ano, bez obtíží
   b) ano, ale s dopomocí učitele
   c) ne, ale pokusí se o jejich řešení
   d) ne, ani se nepokusí o jejich řešení

8. Jaké metody žáci při řešení nestandardních úloh využívají?
   a) pomocí zakreslení obrázku
   b) zapisováním do tabulky
   c) matematicky pomocí naučených algoritmů
   d) pokus - omyl (experimentem)
   e) jinak - jak? ....

9. Odkud čerpáte tyto typy nestandardních úloh?
   a) z učebnic a pracovních sešitů
   b) z internetu
   c) jiné zdroje ....

Příloha č. 2 - Průvodní dopis k online dotazníku pro učitelé matematiky 5. ročníků

Dobrý den,

tímto bych Vás ráda požádala o malou spolupráci. Dokončuji studium na Technické univerzitě v Liberci - učitelství prvního stupně ZŠ. Na následujícím odkazu https://forms.gle/imTeRivHx15w9cBS8 naleznete anonymní dotazník, který je součástí mé výzkumné části diplomové práce zaměřené na využívání nestandardních úloh na prvním stupni ZŠ.

Všechny informace z dotazníku jsou zcela anonymní. Bude s nimi nakládáno v souladu s etickými standardy akademické práce.

V dotazníku nikde nevyplňujete vaše jméno, e-mail, ani školu, na které učíte. Vyplněním a odesláním dotazníku udělujete souhlas se zpracováním Vašich odpovědí v anonymní podobě pro výzkumné účely mé diplomové práce.

Vyplnění celého dotazníku, který obsahuje 9 otázek, Vám zabere přibližně 3 minuty.

V případě jakýchkoliv dotazů mě můžete kontaktovat na e-mailové adrese: moni.moravcova@gmail.com.

Děkuji za Váš čas a ochotu.

Monika Moravcová