

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky



Diplomová práce

Bc. Ondřej Vlček

MATEMATIKA A JEJÍ VYUŽITÍ V GEOGRAFII

Olomouc 2016

Vedoucí diplomové práce:
Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jen uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne 22. dubna 2016

Bc. Ondřej Vlček

Poděkování

Rád bych poděkoval Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. za její čas, připomínky, cenné rady a hlavně za trpělivost během vedení mé diplomové práce.

OBSAH

ÚVOD.....	6
I. TEORETICKÁ ČÁST.....	7
1 MATEMATIKA A GEOGRAFIE V KURIKULÁRNÍCH DOKUMENTECH	7
1.1 Matematika v Rámcovém vzdělávacím programu	10
1.2 Geografie v Rámcovém vzdělávacím programu	11
2 APROXIMACE TVARU ZEMĚ	14
2.1 Způsoby aproximace tvaru Země	14
2.2 Země jako geoid.....	14
2.3 Země jako referenční elipsoid.....	15
2.4 Země jako referenční koule	17
3 ORIENTACE NA POVRCHU ZEMĚ	19
3.1 Zeměpisná síť.....	19
3.2 Zeměpisné souřadnice.....	20
3.3 Prostorové pravoúhlé souřadnice.....	21
3.4 Rovinné pravoúhlé souřadnice.....	22
3.5 Rovinné polární souřadnice	22
3.6 Stanovení vzdáleností na Zemi	23
3.7 Výpočty na kouli.....	27
4 KARTOGRAFICKÁ ZOBRAZENÍ.....	32
4.1 Kartografické zkreslení.....	33
4.2 Azimutální zobrazení	35
4.3 Válcová zobrazení.....	40
4.4 Kuželová zobrazení.....	43
5 MĚŘÍTKO MAPY.....	47
5.1 Typy měřítek.....	47
5.2 Výpočty měřítka	47
6 MĚŘENÍ ČASU	49
6.1 Určování času v minulosti	49
6.2 Určování času v současnosti	50
6.3 Časová pásma	50

7	PRÁCE S DATY	55
7.1	Demografické výpočty.....	56
7.2	Hydrologické výpočty.....	63
II.	VÝZKUMNÁ ČÁST	69
8	VÝZKUM	69
8.1	Předmět výzkumu	69
8.2	Vyhodnocení dotazníku	69
8.3	Úlohy a úspěšnost žáků při řešení.....	71
8.4	Hodnocení úspěšnosti u všech testových úloh.....	83
8.5	Hodnocení náročnosti testových úloh žáky	87
	ZÁVĚR	88

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

SEZNAM POUŽITÝCH INTERNETOVÝCH ZDROJŮ

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHY

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

SEZNAM GRAFŮ

ANOTACE

ÚVOD

Současným trendem vzdělávání žáků na českých školách je mimo jiné využívání mezipředmětových vztahů mezi jednotlivými vyučovacími předměty. Typickým příkladem je matematika a zeměpis. Při výuce zeměpisu lze často využít mezipředmětovou provázanost s matematikou a to zejména v oblasti matematického zeměpisu. Tuto provázanost lze využít u témat, jakými jsou tvar a pohyby Země, zeměpisné souřadnice, výpočet vzdáleností na Zemi, výpočty na kouli, kartografická zobrazení, měřítko mapy, měření času, práce s daty a v mnoha dalších.

Tématem mojí závěrečné diplomové práce je Matematika a její využití v geografii. Toto téma jsem si zvolil, protože jsem to považoval za logický krok, vzhledem ke svému studijnímu zaměření. Mými aprobačními předměty v rámci studia učitelství jsou matematika a zeměpis. Dalším důvodem byl postoj vyučujících didaktiku matematiky a zeměpisu, apelovat na nás, abychom dostatečně využívali mezipředmětové vztahy ve vlastní praxi.

Cílem první kapitoly je seznámit čtenáře s platnými kurikulárními dokumenty České republiky, na základě kterých probíhá vzdělávání na českých školách. První kapitola obsahuje rozdělení kurikulárních dokumentů do různých úrovní, ale také se zabývá obsahem jednotlivých dokumentů. Tato kapitola také popisuje postavení matematiky a zeměpisu v kurikulárních dokumentech.

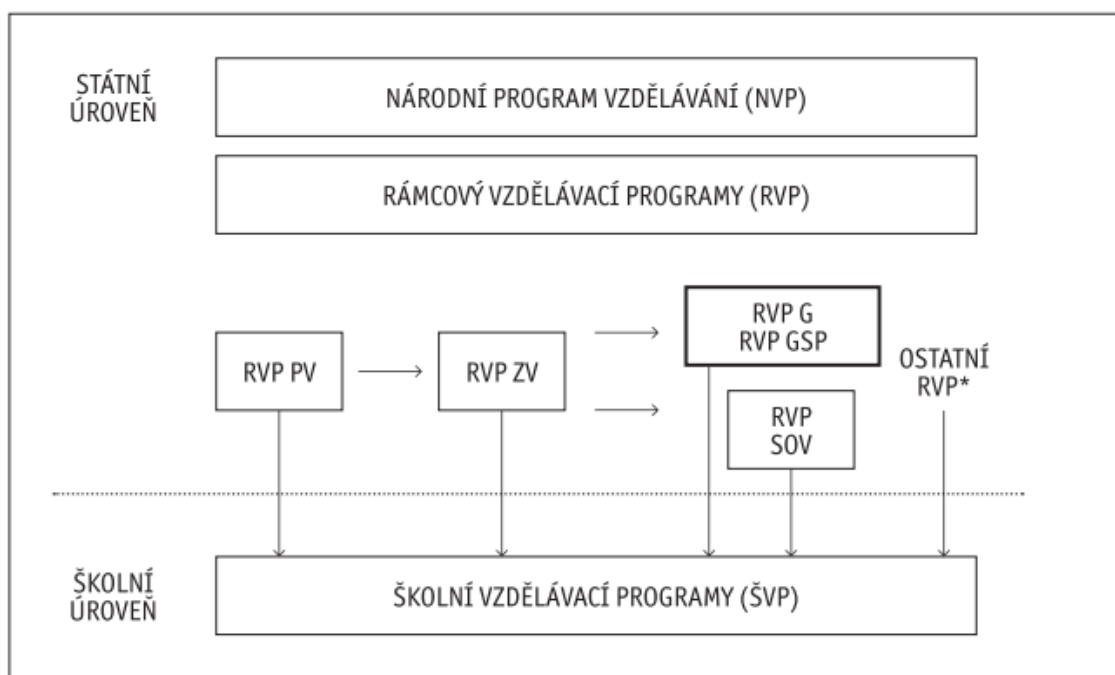
Další kapitoly obsahující teoretický základ pro řešení jednotlivých příkladů v rámci daných kapitol. Mým cílem je, aby většina kapitol obsahovala praktické příklady matematicko-zeměpisného charakteru využitelné ve vyučování zeměpisu. Tyto příklady jsou vzorově vyřešeny a opatřeny doprovodným komentářem. Cílem je využít mezipředmětovou provázanost matematiky a zeměpisu v rámci různých zeměpisných témat. Vzhledem k různé obtížnosti jednotlivých příkladů, uvádím u některých příkladů hotové vzorce a neuvádím jejich odvozování, protože odvozování složitých vzorců nebylo cílem mé práce. Jedná se zejména o příklady, které se dotýkají sférické trigonometrie, která není součástí této práce.

Ve výzkumné části je vyhodnocen výzkum, který je proveden na žácích dvou devátých tříd základní školy. Výzkum je proveden pomocí souboru testových úloh matematicko-zeměpisného charakteru. Test obsahuje úlohy na výpočet vzdálenosti na Zemi, délky rovnoběžky, měřítko, času, hustoty zalidnění a průtoku vodního toku. Dotazník je sestaven tak, aby bylo možné díky němu charakterizovat žáky. Zajímá mě mimo jiné, jak žáci hodnotí jednotlivé úlohy testu podle obtížnosti při jejich řešení.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 MATEMATIKA A GEOGRAFIE V KURIKULÁRNÍCH DOKUMENTECH

Reforma Školského zákona (561/2004 Sb.) z roku 2004 zavedla v českém školství víceúrovňový systém vzdělávacích programů řízených pomocí kurikulárních dokumentů. **Kurikulárním dokumentem** označujeme pedagogický dokument, jenž vymezuje koncepci, cíle a vzdělávací obsah dané etapy vzdělávání. Takový dokument vznikl na dvojí úrovni – státní a školní. Státní úroveň je reprezentována **Národním programem rozvoje vzdělávání v České republice** neboli Bílou knihou vydanou MŠMT v roce 2001. Jedná se o politický dokument obecného charakteru, který vznikl v 6 evropských státech – Česká republika, Slovensko, Polsko, Rakousko, Maďarsko a Bulharsko. Dále jej tvoří **Rámcový vzdělávací program (RVP)**, který vytváří Výzkumný ústav pedagogický v Praze a musí jej schválit MŠMT. Školní úroveň je tvořena **Školním vzdělávacím programem (ŠVP)**, který si vytváří každá škola samostatně s konkrétními záměry za konkrétních podmínek (KOTÁSEK, 2001, s. 6)



Obrázek 1 Systém kurikulárních dokumentů (RVP G, 2007, online)

Legenda: RVP PV – Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání; RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání a příloha Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání upravující vzdělávání žáků s lehkým mentálním postižením (RVP ZV – LMP); RVP GV – Rámcový vzdělávací

program pro gymnaziální vzdělávání; RVP SOV – Rámcové vzdělávací programy pro střední odborné vzdělávání.

* Ostatní RVP – rámcové vzdělávací programy, které kromě výše uvedených vymezuje školský zákon – Rámcový vzdělávací program pro základní umělecké vzdělávání případně další.

Národní program rozvoje vzdělávání v České republice ustanovuje hlavní zásady kurikulární politiky státu. Nalezneme zde též definované „*obecné cíle vzdělávání a obecné klíčové kompetence zaměřené především na rozvoj osobnosti, výchovu občana a přípravu na další vzdělávání či vstup do praxe. Vymezuje také obsahy vzdělávání nezbytné pro dosažení vzdělávacích cílů a požadovaných kompetencí absolventů* (MÍSAŘOVÁ, 2012, s. 12, online).“

Rámcový vzdělávací program je základní kurikulární dokument státní úrovně, který normativně stanoví obecný rámec pro jednotlivé etapy vzdělávání a je závazný pro vypracování školních vzdělávacích programů. Vydává ho MŠMT. Rámcové vzdělávací programy vznikaly postupně od roku 2001 v souladu se základními principy v Bílé knize. Od roku 2007 začínaly postupně platit jednotlivé vzdělávací programy. Dosud se v České republice vzdělávají žáci podle těchto programů:

- RVP PV – Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání;
- RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání;
- RVP ZV LMP – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání – upravující vzdělávání žáků s lehkým mentálním postižením;
- RVP ZV S – Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání základní škola speciální;
- RVP G – Rámcový vzdělávací program pro gymnázia;
- RVP GSP – Rámcový vzdělávací program pro gymnázia se sportovní přípravou;
- RVP SOV – Rámcové vzdělávací programy pro střední odborné vzdělávání.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání je rozdělen do 10 vzdělávacích oblastí. Jednotlivé vzdělávací oblasti jsou tvořeny jedním vzdělávacím oborem nebo více obsahově blízkými vzdělávacími obory:

- Jazyk a jazyková komunikace (Český jazyk a literatura, Cizí jazyk);
- Matematika a její aplikace (Matematika a její aplikace);
- Informační a komunikační technologie (Informační a komunikační technologie);
- Člověk a jeho svět (Člověk a jeho svět);

- Člověk a společnost (Dějepis, Výchova k občanství);
- Člověk a příroda (Fyzika, Chemie, Přírodopis, Zeměpis (Geografie));
- Umění a kultura (Hudební výchova, Výtvarný výchova);
- Člověk a zdraví (Výchova ke zdraví, Tělesná výchova);
- Člověk a svět práce (Člověk a svět práce);
- Doplňující vzdělávací obory (Další cizí jazyk, Dramatická výchova).

Každá vzdělávací oblast obsahuje charakteristiku vzdělávací oblasti, cílové zaměření vzdělávací oblasti a vzdělávací obsah. Charakteristika vzdělávací oblasti vyjadřuje postavení a význam vzdělávací oblasti na gymnáziu a její návaznost na koncepci oblastí v základním vzdělávání.

Klíčové kompetence představují soubor vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot, které jsou důležité pro osobní rozvoj jedince, jeho aktivní zapojení do společnosti a budoucí uplatnění v životě. Jejich výběr a pojetí vychází z toho, jaké kompetence jsou považovány za podstatné pro vzdělávání na gymnáziu. Pro lepší pochopení klíčových kompetencí a snazší práci s nimi v ŠVP jsou klíčové kompetence v RVP ZV zpracovány jednotlivě, ale v praxi se navzájem prolínají a doplňují. Na základní škole by si žák měl osvojit (RVP ZV, 2007, s. 14):

- kompetenci k učení;
- kompetenci k řešení problémů;
- kompetenci komunikativní;
- kompetenci sociální a personální;
- kompetenci občanskou;
- kompetenci pracovní.

Průřezová témata jsou nedílnou součástí Rámcových vzdělávacích programů. Realizací průřezových témat jsou naplňovány a upevňovány mezipředmětové vztahy. Průřezová témata lze realizovat jako součást vzdělávacího obsahu vyučovacích předmětů, je možné jim věnovat samostatné projekty, semináře, kurzy, besedy apod., případně je lze realizovat jako samostatný vyučovací předmět. Uvedené formy lze libovolně kombinovat. Do vzdělávání na základních školách jsou zařazena tato průřezová témata:

- Osobnostní a sociální výchova;
- Výchova demokratického občana;

- Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech;
- Multikulturní výchova;
- Environmentální výchova;
- Mediální výchova.

Školní vzdělávací program je kurikulárním dokumentem, na základě kterého probíhá výuka na jednotlivých školách. Každá škola v ČR si sestavuje ŠVP na základě příslušného RVP. Škola je povinna mít sestavený ŠVP pro každý obor vzdělávání, který se na příslušné škole vyučuje. Při vytváření ŠVP školy zejména zohledňují vzdělávací podmínky školy. ŠVP umožňuje školám a jejím pedagogům školu výrazně profilovat a tím se odlišovat od ostatních škol. Další výhodami ŠVP jsou možnosti formulace vlastních představ o podobě vzdělávání, možnosti lepší spolupráce v mezioborovém vzdělávání a umožňuje pružněji a lépe reagovat na místní podmínky, přizpůsobit vzdělávání praxi a především samotným žákům. Veškeré ŠVP musí být schváleny ředitelem školy a školskou radou, také musí být k dispozici k nahlédnutí komukoli, kdo o ně požádá. Naplnění ŠVP a jeho soulad s příslušným RVP zjišťuje a hodnotí Česká školní inspekce. Název ŠVP si školy vytváří individuálně. Spousta škol má název ŠVP shodný s názvem RVP, některé raději volí odlišné názvy s cílem zdůraznění zaměření přípravy.

1.1 Matematika v Rámcovém vzdělávacím programu

Současným trendem v matematickém vzdělávání je zaměření především na výchovu přemýšlivého člověka, který umí používat znalosti z matematiky v různých situacích občanského a profesního života. *„V hodinách matematiky vyučující cíleně motivují žáky k řešení matematických problémů; vedou žáky k matematizaci reálných situací a k posuzování věrohodnosti výsledků; rozvíjejí u žáků schopnost správně se matematicky vyjadřovat; podporují u žáků důvěru v jejich schopnosti; vychovávají žáky k vytrvalosti, kritičnosti a týmové spolupráci; budují u žáků pozitivní vztah k matematice* (NOVÁK, 2011, s. 13).“

Matematika je v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání i pro gymnázia zařazena do vzdělávací oblasti **Matematika a její aplikace**. V této vzdělávací oblasti má matematika výsadní postavení a je jediným vyučovacím předmětem, který sem spadá. Učivo je v této vzdělávací oblasti uspořádáno s cílem podpořit obsahovou integraci, chápání vztahů a mezioborových souvislostí a propojování poznatků žáků

s reálnými životními situacemi. Vyučování je založeno především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných činnostech.

„Výuka matematiky na gymnáziu rozvíjí a prohlubuje pochopení kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa, utváří kvantitativní gramotnost žáků a schopnost geometrického vhledu. Ovládnutí požadovaného matematického aparátu, elementy matematického myšlení, vytváření hypotéz a deduktivní úvahy jsou prostředkem pro nové hlubší poznání a předpokladem dalšího studia (RVP G, 2007, s. 21, online).“

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace je v RVP ZV rozdělen na 4 tematické okruhy:

- Číslo a proměnná;
- Závislosti, vztahy a práce s daty;
- Geometrie v rovině a v prostoru;
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace je v RVP G rozdělen na 5 tematických okruhů:

- Argumentace a ověřování;
- Číslo a proměnná;
- Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost;
- Závislosti a funkční vztahy;
- Geometrie.

1.2 Geografie v Rámcovém vzdělávacím programu

Zařazení geografie do vzdělávací oblasti v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání je trochu složitější. Geografie je zařazena společně s přírodopisem, fyzikou a chemií do vzdělávací oblasti **Člověk a příroda**, to však reflektuje pouze s fyzicko-geografickou složkou. Z hlediska socioekonomické složky by měla geografie být také zařazena společně se společenskými vědami a dějepisem do vzdělávací oblasti Člověk a společnost. Geografie je v RVP G zařazena do vzdělávací oblasti Člověk a příroda, což je v RVP G vysvětleno následovně: *„Vzdělávací obsah oboru Geografie je z důvodu zachování celistvosti umístěn ve vzdělávací oblasti Člověk a příroda.“*

Vzdělávací obsah v rámci zeměpisu je RVP ZV rozdělen na 7 tematických okruhů:

- Geografické informace, zdroje dat, kartografie a topografie;
- Přírodní obraz Země;
- Regiony světa;
- Společenské a hospodářské prostředí;
- Životní prostředí;
- Česká republika;
- Terénní geografická výuka, praxe a aplikace.

Vzdělávací obsah v rámci geografie je v RVP G rozdělen na 5 tematických okruhů:

- Přírodní prostředí;
- Sociální prostředí;
- Životní prostředí;
- Regiony;
- Geografické informace a terénní vyučování.

Geografie má také velice široké uplatnění v ostatních vyučovacích předmětech a oborech, zejména díky bohatému obsahu. Při realizaci **mezipředmětových vztahů** na školách má geografie bohaté využití, protože využívá množství poznatků z přírodovědných, společenských a technických předmětů. „*Předmět zeměpis úzce souvisí s ostatními předměty především ve vzdělávací oblasti Člověk a příroda* (MÍSAŘOVÁ, 2012, s. 17, online):“

- chemie: znečištění atmosféry, hydrosféry, biosféry...
- fyzika: sluneční soustava, vesmír...
- přírodopis: rozšíření živočichů a rostlin, biotopy, CHKO, národní parky...

„*Zeměpis jako obor má již ze své samotné odborné obsahové podstaty úzké mezipředmětové vazby také na celou řadu dalších předmětů z ostatních vzdělávacích oblastí* (MÍSAŘOVÁ, 2012, s. 17, online):“

- světové jazyky
- matematika: měřítko mapy, převody jednotek, práce s grafy, diagramy...
- informační a komunikační technologie: zdroj aktuálních informací a jejich zpracování, geografické informační systémy...

- dějepis: kultura národů, historie států...
- ekonomie: průmysl, zemědělství, obchod...
- občanská výchova: národ, národní identita, mezinárodní integrace a organizace, politický zeměpis (návaznost na politologii), etické a humánní rozměry jakýchkoliv problémů včetně životního prostředí nebo rozdílů bohatý vs. chudý svět, atd.
- výtvarná výchova: grafická stránka tvorby map
- tělesná výchova: práce v terénu – mapování, práce s GPS, apod.

2 APROXIMACE TVARU ZEMĚ

Povrch naší planety je velmi členitý díky jejímu dlouhému vývoji. Výrazná členitost povrchu Země je patrná jak ve směru vertikálním i horizontálním. Kontinenty a oceány rozčleňují zemský povrch v horizontálním směru.

Pevnina je ta část zemského povrchu, která není pokryta světovým oceánem. Pevnina představuje přibližně 29 % zemského povrchu. Je tvořena kontinenty, které vystupují nad oceány. Světový oceán pokrývá 71 % zemského povrchu.

Průměrná výška pevniny je 875 m, přičemž nejvyšší nadmořské výšky dosahuje Mount Everest (Chomolungma/Sagarmāthā) 8 848 m n. m. Průměrná hloubka oceánů dosahuje 3 704 m, přičemž největší hloubka změřená v Mariánském příkopu byla 10 994 m (BRÁZDIL, 1988, s. 249)

2.1 Způsoby aproximace tvaru Země

Na zemském povrchu dochází k neustálým změnám vlivem koloběhu vody v přírodě, vlivem slapových jevů, vlivem erozních procesů a dalších. Z tohoto důvodu bylo značně obtížné vyjádřit polohu zvoleného bodu na takto složité a nestálé ploše. Proto v minulosti přicházeli různí matematikové a geografové s myšlenkou tzv. idealizace zemského tělesa. Povrch idealizovaného zemského tělesa lze snadněji analyticky vyjádřit. Nejznámějšími tělesy, jimiž lze zemské těleso aproximovat, jsou geoid, rotační elipsoid, trojosý elipsoid a koule.

2.2 Země jako geoid

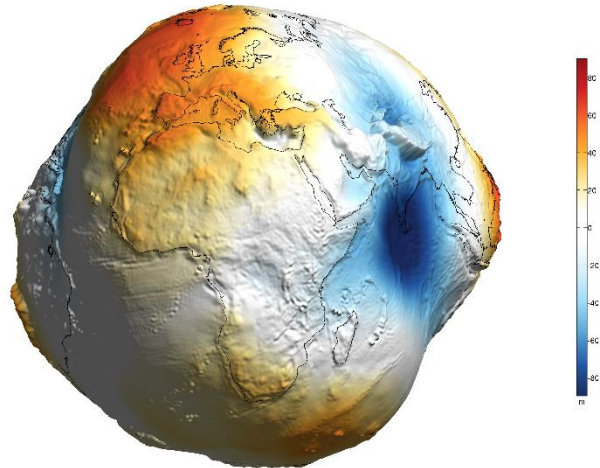
„Geoid lze definovat jako těleso, které je omezené vzhledem k atmosféře střední klidnou hladinou oceánů a moří, probíhající myšleně i pod kontinenty nebo jako ekvipotenciální plochu¹, nejtěsněji přiléhající ke střední klidné hladině oceánů a moří (BRÁZDIL, 1988, s. 250).“

Střed geoidu lze určit z jakéhokoliv místa na zemském povrchu pomocí tzv. olovnice. Spuštěním olovnice získáme tzv. tížnice, které směřují do středu geoidu a protínají se

¹ Ekvipotenciální plocha přibližně splývá se střední hladinou moří a představuje idealizovaný tvar Země. Největší převýšení geoidu nad zemským elipsoidem je 60 m, nejmenší -70 m.

v těžišti. Povrch geoidu určuje tečná rovina k povrchu geoidu v daném bodě, přičemž tížnice je na danou rovinu kolmá.

Geoid je těleso velmi složité a pro matematické řešení úloh nevhodné, z tohoto důvodu se Země idealizuje rotačním elipsoidem, který je matematicky přesně definovanou plochou.



Obrázek 2 Geoid

(Astronomický ústav AV ČR, 2016, online)

2.3 Země jako referenční elipsoid

Země jako rotační referenční elipsoid

„*Rotační referenční elipsoid* vznikne rotací elipsy kolem její vedlejší osy. Z toho plyne, že dvě rovníkové poloosy rotačního elipsoidu jsou stejně dlouhé a třetí poloosa ležící v ose rotace je kratší (VOŽENÍLEK, 2001, s. 27).“

Obecná rovnice elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

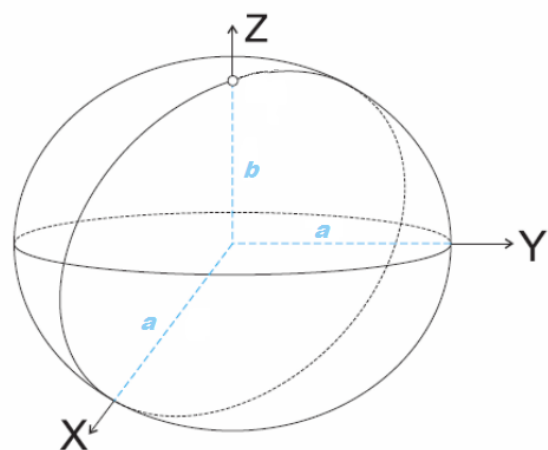
Tvar a velikost elipsoidu závisí na dvou parametrech, buďto na jeho poloosách a, b nebo na jedné poloose a excentricitě e^2 a nebo na jedné poloose a zploštění i rotačního elipsoidu.

Vyjádření rotačního elipsoidu v soustavě pravoúhlých souřadnic:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

kde x, y, z jsou pravoúhlé soustavy souřadnic

v prostoru, x, y leží v rovině rovníku, z leží v ose rotace.



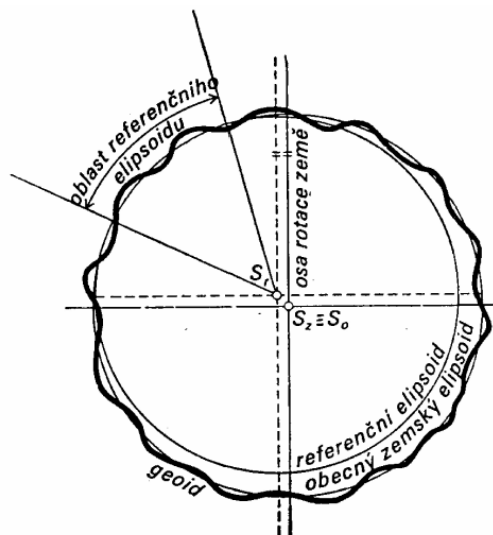
Obrázek 3 Referenční rotační elipsoid

Pro e^2 a f platí následující vztahy:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad f = \frac{a - b}{a}.$$

Obecný zemský elipsoid vznikne rotací elipsy kolem její vedlejší poloosy, která leží v ose zemské rotace, Bývá definován tak, aby jeho střed ležel ve středu Země a aby se co nejlépe přimykával ke geoidu. Zemský elipsoid nejlépe vystihuje Zemi jako celek, dále nahrazuje tvar Země v potřebné míře a dá se matematicky definovat.

V minulosti došlo k odvození řady různých zemských rotačních elipsoidů. Mezi nejznámější a nejčastěji využívané elipsoidy patří Besselův, Hayfordův, Krasovského a WGS 84.



Obrázek 4 Vztah mezi geoidem, referenčním elipsoidem a obecným zemským elipsoidem
(Geomatika, 2016, online)

Tabulka 1 Rozměry nejvyužívanějších elipsoidů (Tichý a Švec, 1965, s. 85)

Elipsoid	Besselův 1841	Hayfordův 1910	Krasovského 1940	WGS 84 1984
Velká poloosa a (m)	6 377 397	6 378 388	6 378 245	6 378 137
Vedlejší poloosa b (m)	6 356 079	6 356 912	6 356 863	6 356 752
Rozdíl $a - b$ (m)	21 318	21 476	21 382	21 385
Zploštění $i = a - \frac{b}{a}$	1 : 299,15	1 : 297	1 : 298,3	1 : 298,26
Obvod poledníkové elipsy (m)	40 003 424	40 009 152	40 008 552	40 007 890
Obvod rovníku (m)	40 070 368	40 076 594	40 075 695	40 075 017
Povrch Země (km ²)	509 950 714	510 100 934	510 083 059	510 065 605
Střední hodnota 1° zeměpisné šířky (km)	111,120	111,136	111,135	111,133

Země jako trojosý referenční elipsoid

Trojosý referenční elipsoid je nejbližší aproximací geoidu. V soustavě pravouhlých souřadnic je vyjádřen pomocí následující rovnice:

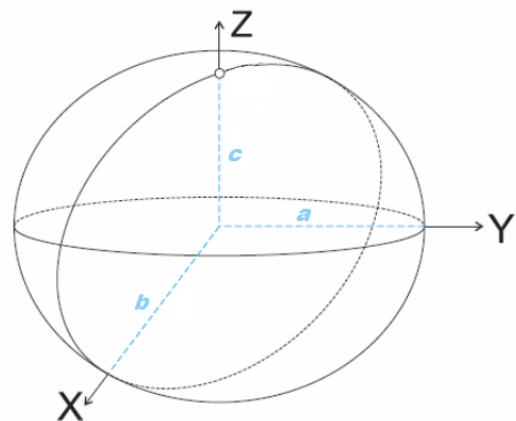
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kde a je hlavní a b je vedlejší poloosa rovníkové elipsy, a je hlavní a c je vedlejší poloosa poledníkové elipsy.

Dalšími vlastnostmi, pomocí nichž lze charakterizovat trojosý elipsoid, jsou tzv. rovníkové a pólové zploštění, které vyjadřují vztahy:

$$i_r = \frac{a-b}{a} \text{ a } i_p = \frac{a-c}{a}.$$

V trojosém elipsoidu je rovnoběžkovým i poledníkovým řezem elipsa a platí, že poledníky nemají stejnou délku a různá zploštění. Nejdelším poledníkem je poledník $+15^\circ$ a nejkratším poledník $+105^\circ$. Výpočty na troj-osém elipsoidu jsou velmi složité, a proto se v praxi užívá dvojosého elipsoidu se stejnými rozměry (TICHÝ a ŠVEC, 1965, s. 86).



Obrázek 5 Trojosý referenční elipsoid

2.4 Země jako referenční koule

Pro spousta účelů se v geografii a zejména v kartografii² nahrazuje plocha rotačního elipsoidu jednodušší plochou, a to plochou kulovou. Kulovou plochu jednoznačně určuje pouze její poloměr. Zakřivení kulové plochy je v každém jejím bodě konstantní, proto jsou prováděné výpočty podstatně jednodušší (KUSKA, 1960, s. 18). Kouli, kterou nahrazujeme rotační elipsoid, nazýváme **referenční koule**. Pro účely kartografie se poloměr r_1 koule vypočte jako průměrná hodnota tří os rotačního elipsoidu (BRÁZDIL, 1988, s. 254):

$$r_1 = \frac{2a+b}{3}.$$

² Kartografie je věda zabývající se konstrukcí a obsahem map od počátečního vyměřování až po vydání hotové produkce.

Elipsoid WGS 84 by se dal nahradit koulí o poloměru:

$$r_1 = \frac{(2 \cdot 6\,378\,137 + 6\,356\,752)}{3} \doteq 6\,371\,009 \text{ m.}$$

vypočítaného podle předešlého vzorce.

Pokud bychom chtěli, aby povrch referenční koule byl shodný s povrchem elipsoidu WGS 84, poloměr r_2 referenční koule se vypočítá jako kvadratický průměr³ všech poloos elipsoidu WGS 84:

$$r_2 = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6\,378\,137^2 + 6\,356\,752^2}{3}} \doteq 6\,371\,017 \text{ m.}$$

Poloměr koule, jejíž objem je shodný s objemem rotačního elipsoidu WGS 84, vypočítáme jako geometrický průměr⁴ všech poloos elipsoidu WGS 84:

$$r_3 = \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[3]{6\,378\,137^2 \cdot 6\,356\,752} \doteq 6\,371\,001 \text{ m.}$$

³ Kvadratický průměr je statistická veličina představující druhou odmocninu aritmetického průměru druhých mocnin daných hodnot.

$$K = \sqrt{\bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

⁴ Geometrický průměr n nezáporných čísel x_1, x_2, \dots, x_n je definován jako n -tá odmocnina jejich součinu.

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

3 ORIENTACE NA POVRCHU ZEMĚ

3.1 Zeměpisná síť

Zeměpisná síť se skládá z poledníků a rovnoběžek. Hlavní kružnicí je rovník, který vznikl jako řez roviny kolmé k ose rotace Země, také prochází středem Země a zemským povrchem. Zemský rovník je tedy nejdelší rovnoběžkou. Ostatní rovnoběžky tedy kružnice, které leží v rovinách rovnoběžných s rovinou rovníku, se zmenšují ve směru od rovníku k zemským pólům, kde se z nich stávají body. Směrem k pólům se tedy zkracuje délka rovnoběžek (TICHÝ a ŠVEC, 1970, s. 90–91).

Za nejvýznamnější zemské rovnoběžky se považují rovník (0°), obratník Raka ($23^\circ 27'$ s. š.), obratník Kozoroha ($23^\circ 27'$ j. š.), severní polární kruh ($66^\circ 33'$ s. š.), jižní polární kruh ($66^\circ 33'$ j. š.), severní pól (90° s. š.) a jižní pól (90° j. š.).



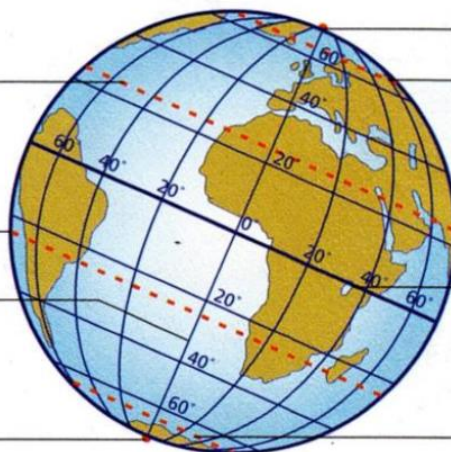
Obrázek 6 Zeměpisná síť
(DUMY.cz, 2016, online)

obratník Raka
($23,5^\circ$ severní
zeměpisné šířky)

obratník Kozoroha
($23,5^\circ$ jižní
zeměpisné šířky)

hlavní poledník (0°)

jižní pól
(90° jižní
zeměpisné šířky)



severní pól (90° severní
zeměpisné šířky)

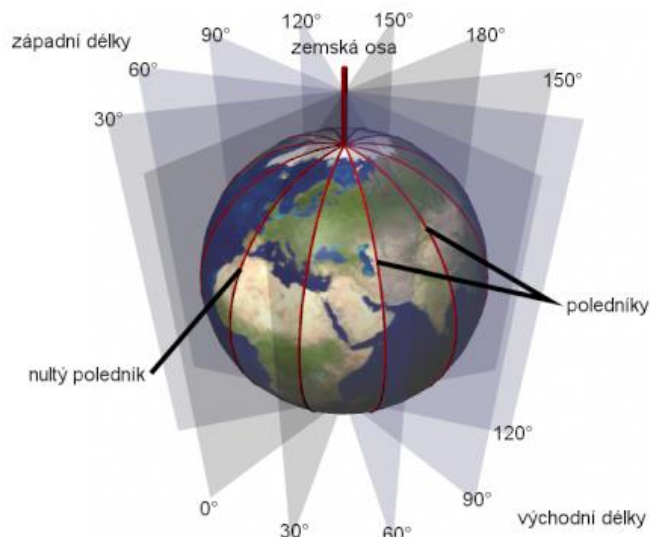
severní polární kruh
($66,5^\circ$ severní
zeměpisné šířky)

rovník (0°)

jižní polární kruh
($66,5^\circ$ jižní
zeměpisné šířky)

Obrázek 7 Hlavní poledníky a rovnoběžky
(Červený a kolektiv, 2009, s. 12)

Poledníky, vzniknou jako průniky nějaké poloroviny, která je určena zemskou osou, s povrchem Země. Je zřejmé, že poledníky kulové plochy jsou navzájem shodné půlkružnice. Poledníky mají také tu vlastnost, že jsou nejkratšími spojnicemi severního a jižního zemského pólu, vedoucími po povrchu Země. Na rozdíl od rovnoběžek mají všechny poledníky na referenční kouli stejnou délku (TICHÝ a ŠVEC, 1970, s. 90–91).



Obrázek 8 Poledníky na Zemi

(WIKIPEDIA: the free encyclopedia, 2016, online)

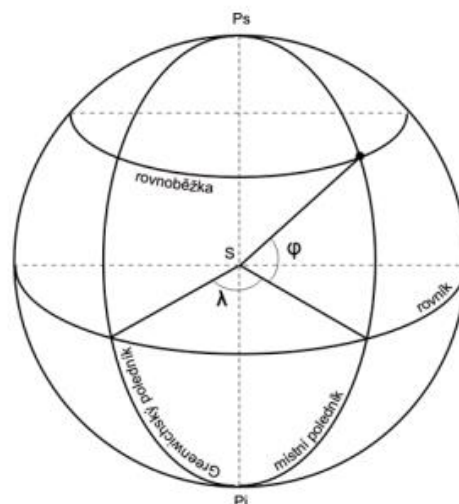
Základním (též nultým) poledníkem byl na Zemi uznán greenwichský poledník, který prochází astronomickou observatoří v Greenwichi (Londýn, Velká Británie). Poledník 180°, který je protilehlý k základnímu nultému poledníku, tvoří tzv. datovou hranici. Datová hranice je mezinárodně uznávaná hranice, při jejímž překročení se mění datum. Prochází co nejdále od civilizace a vyhýbá se kontinentům a ostrovům.

3.2 Zeměpisné souřadnice

Libovolný bod na zemském povrchu je určen zeměpisnou šířkou φ a zeměpisnou délkou λ , tj. veličinami, které potom nazýváme zeměpisnými souřadnicemi. Pro udávání polohy bodů na zemském povrchu je zapotřebí vhodné souřadnicové sítě. V geografii a kartografii se používá zeměpisná síť, v níž je poloha bodu určena dvěma sférickými polárními souřadnicemi (ČAPEK a kolektiv, 1992, s. 32).

Zeměpisnou šířku lze definovat jako úhel, který svírá normála n daného místa na zemském povrchu s rovinou zemského rovníku. Zeměpisnou šířku označujeme φ a měříme ji od rovníku k pólům. Zeměpisná šířka se udává od 0° do +90° na sever od rovníku jako severní zeměpisná šířka (kladná) a od 0° do -90° na jih od rovníku jako jižní zeměpisná šířka (záporná). V angličtině se používají zkratky N – North a S – South (BRÁZDIL, 1988, s. 70).

Zeměpisnou délku lze definovat jako úhel, který svírá rovina poledníku daného místa na zemském povrchu s rovinou základního nultého (greenwichského) poledníku. Zeměpisnou délku označujeme λ , udává se od 0° do $+180^\circ$ na východ od greenwichského poledníku (východní zeměpisná délka) a od 0° do $+180^\circ$ na západ od greenwichského poledníku (západní zeměpisná délka). V angličtině se označuje E (East) a W (West).



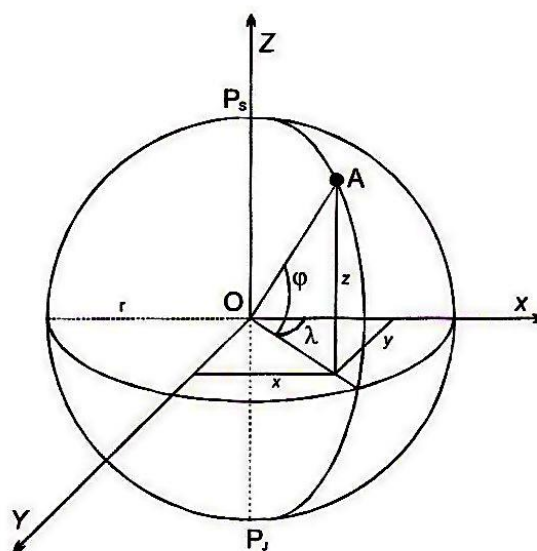
Obrázek 9 Zeměpisné souřadnice
(Mendelova univerzita v Brně, 2016, online)

3.3 Prostorové pravoúhlé souřadnice

Prostorové pravoúhlé souřadnice se definují pomocí počátku O , který leží ve středu referenční koule, pomocí osy x , která vznikne jako průsečnice roviny rovníku se základním nultým poledníkem, pomocí osy y , která leží v rovině rovníku a svírá s osou x úhel 90° a pomocí osy z , která leží v ose Země.

Rovnice udávající vztah pravoúhlých prostorových souřadnic bodu A k zeměpisným souřadnicím:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \\y &= r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \\z &= r \cdot \sin \varphi.\end{aligned}$$

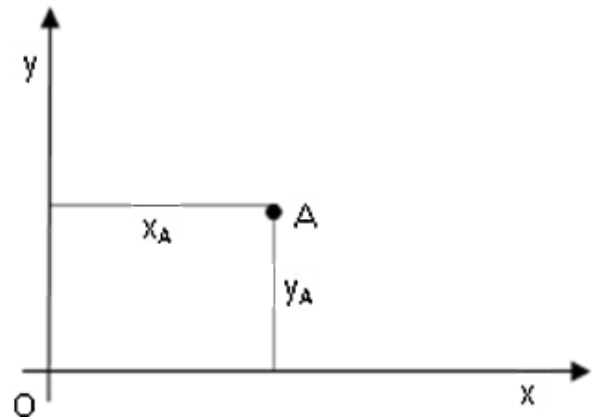


Obrázek 10 Prostorové pravoúhlé souřadnice
(VOŽENÍLEK, 2001, s. 41)

3.4 Rovinné pravoúhlé souřadnice

Pro určování polohy bodu v rovině mapy se zavádějí tzv. rovinné souřadnice. Tyto souřadnice mohou být dvojího typu a to buď pravoúhlé, nebo polární. Pravoúhlé rovinné souřadnice udávají kolmou vzdálenost bodu od souřadnicových os x a y . Tyto souřadnice jsou definovány takto:

1. počátek O – je to bod, který leží nejčastěji v průsečíku obrazů rovníku a základního nultého poledníku,
2. osa x – leží v obrazu rovníku,
3. osa y – leží v obrazu základního nultého poledníku.

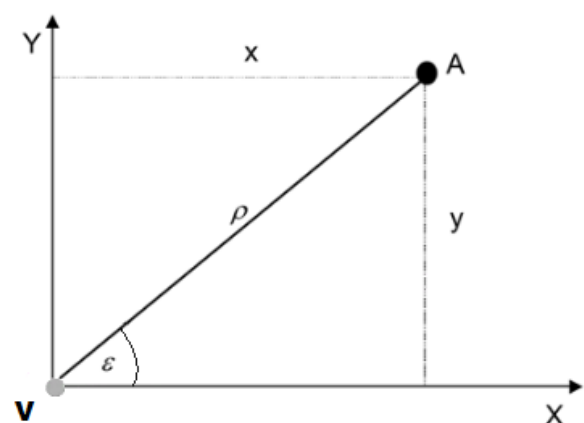


Obrázek 11 Rovinné pravoúhlé souřadnice
(Mendelova univerzita v Brně, 2016, online)

Pravoúhlé prostorové souřadnice mají své uplatnění hlavně u válcových a obecných kartografických zobrazení. U těchto zobrazení se počátek pravoúhlé rovinné souřadnicové soustavy umísťuje do středu zobrazovaného území (VOŽENÍLEK, 2001, s. 43).

3.5 Rovinné polární souřadnice

Polární souřadnice se vztahují k zeměpisnému, resp. konstrukčnímu pólu a ose y , jejíž součástí je základní nultý poledník (ČAPEK a kolektiv, 1992, s. 39). Počátkem V rovinných polárních souřadnic je nejčastěji bod dotyku referenční a zobrazovací plochy nebo obraz zemského pólu. Rovinné polární souřadnice se skládají z průvodiče ρ bodu A , který udává vzdálenost určovaného bodu A od počátku



Obrázek 12 Rovinné polární souřadnice
(Mendelova univerzita v Brně, 2016, online)

V na konstrukční ose x a z úhlu průvodiče ε (polární úhel), který udává velikost úhlu mezi osou x a průvodičem ρ (VOŽENÍLEK, 2001, s. 43).

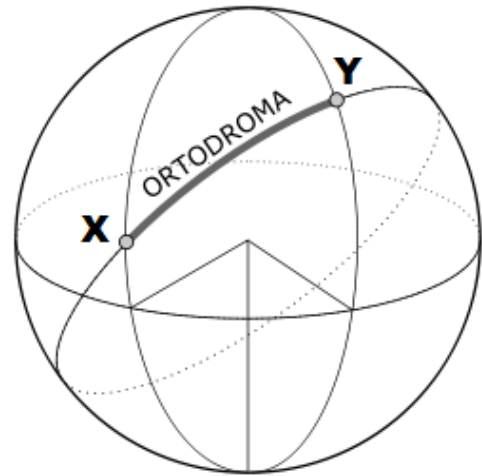
Rovinné polární souřadnice mají svoje uplatnění a využití zejména při azimutálních a kuželových zobrazeních. Pokud platí, že počátky pravoúhlých a polárních soustav jsou totožné, pak mezi nimi platí vztah:

$$x = \rho \cdot \cos \varepsilon \text{ a } y = \rho \cdot \sin \varepsilon.$$

3.6 Stanovení vzdáleností na Zemi

Ortodroma

Nejkratší spojnici dvou různých bodů na referenční ploše je kratší oblouk hlavní kružnice, nazývané též ortodroma (přímoběžka; z řeckého ortho – přímý, dromé – cesta). V gnómonické projekci se ortodroma zobrazuje jako přímka. Znalost ortodromy je důležitá pro leteckou i námořní dopravu a všude tam, kde je potřeba vypočítat případně zakreslit do mapy nejkratší vzdálenost dvou bodů – kratší z oblouků kružnice procházející dvěma body (BRÁZDIL, 1988, s. 260).



Obrázek 13 Ortodroma

(WIKIPEDIA: the free encyclopedia, 2016, online)

Pokud leží dvě místa $X [\varphi_X = 0, \lambda_X]$ a $Y [\varphi_Y = 0, \lambda_Y]$ na rovníku, redukuje se výpočet nejkratší vzdálenosti d na stanovení délky oblouku XY podle vztahu:

$$d_{XY} = 2\pi r_z \cdot \frac{\Delta\lambda}{360^\circ},$$

kde r_z je poloměr referenční koule a $\Delta\lambda = |\lambda_Y - \lambda_X|$. Analogicky je nejkratší vzdálenost pro body $X [\varphi_X, \lambda_X]$ a $Y [\varphi_Y, \lambda_Y]$ na stejném poledníku dána vztahem:

$$d_{XY} = 2\pi r_z \cdot \frac{\Delta\varphi}{360^\circ},$$

kde $\Delta\varphi = |\varphi_Y - \varphi_X|$.

Výpočet nejkratší vzdálenosti dvou bodů v obecné poloze na referenční kouli využitím sférické trigonometrie. Úlohu určení vzdálenosti mezi body X a Y , převedeme na řešení sférického trojúhelníku⁵, jehož třetí bod představuje pól P_S . Pro strany x a y platí:

$$\begin{aligned}x &= 90^\circ - \varphi_Y \\ y &= 90^\circ - \varphi_X\end{aligned}$$

Úhel γ při vrcholu P_S sevřený oběma poledníky, tj. $\gamma = \Delta\lambda = \lambda_Y - \lambda_X$. Kosinová věta⁶ pro stranu c sférického trojúhelníka:

$$\cos c = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos \gamma,$$

Po dosazení do této rovnice tedy dostáváme:

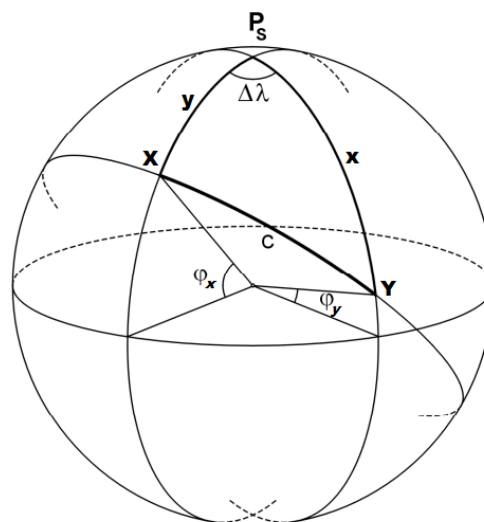
$$\cos c = \cos(90^\circ - \varphi_Y) \cdot \cos(90^\circ - \varphi_X) + \sin(90^\circ - \varphi_Y) \cdot \sin(90^\circ - \varphi_X) \cdot \cos \Delta\lambda$$

„Hodnota c udává velikost oblouku XY v míře úhlové, je tedy nutné ji převést na délku v kilometrech. Jelikož se jedná o oblouk hlavní kružnice o poloměru shodném s poloměrem referenční koule, potom platí (JUREK, 2009, s. 2):“

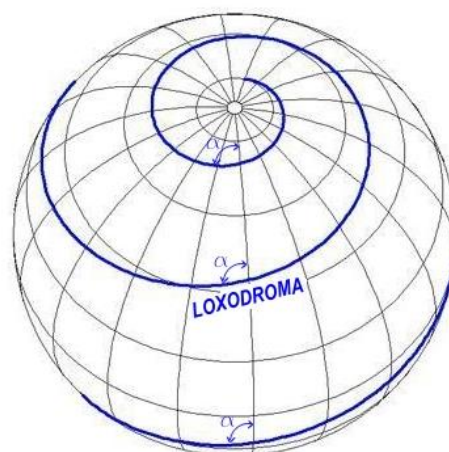
$$d_{XY} = 2\pi r_Z \cdot \frac{c}{360^\circ}.$$

Loxodroma

Loxodroma (z řeckého loxos – šikmý, dromos – cesta) je definována jako křivka na povrchu referenční plochy, která protíná všechny poledníky pod stále stejným konstantním azimutem⁷ A . Vlastnosti loxodromy se využívají zejména při navigaci v námořní a letecké dopravě. Loxodroma vytváří spirálu,



Obrázek 14 Zemský sférický trojúhelník (JUREK, 2009, online)



Obrázek 15 Loxodroma (ProfiPilot.sk, 2016, online)

⁵Sférický trojúhelník je menší část kulové plochy ohraničená oblouky tří hlavních kružnic.

⁶ Pro sférický trojúhelník ABC platí 1. kosinová věta: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$

⁷ Azimut je orientovaný úhel, který svírá směr k severu se směrem na cílový bod. Azimut je měřen po směru hodinových ručiček, nabývá hodnot od 0° do 360°

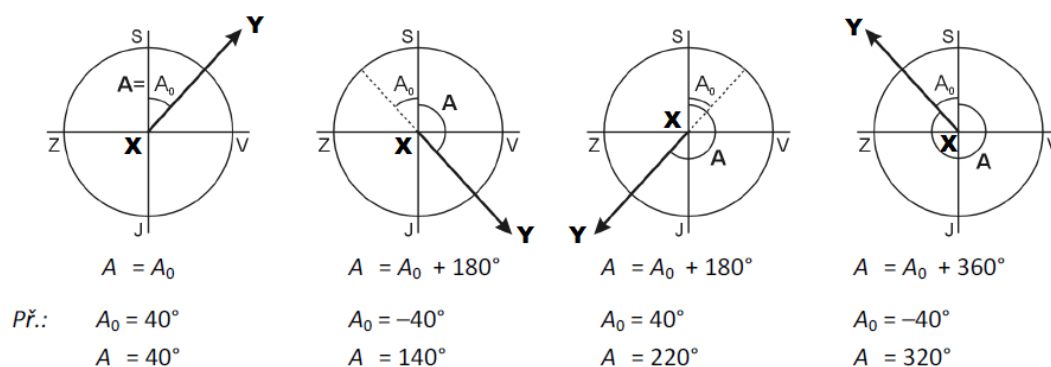
kteřá se asymptoticky přibližuje k pólům. Je-li $A = 0^\circ$, potom je loxodroma totožná s poledníkem (ortodromou) a je-li $A = 90^\circ$, přechází loxodroma v rovnoběžku.

Velikosti vzdáleností dvou bodů na referenční ploše, kterou měříme po ortodromě a loxodromě, se vždy liší. Vzdálenost měřená po loxodromě je vždy delší než vzdálenost mezi těmito body měřená po ortodromě. Ortodroma je obecně kratší než loxodroma. Na severní polokouli probíhá loxodroma jižně od ortodromy, na jižní polokouli je tomu naopak.

Výpočet azimutu loxodromy vedoucí mezi body $X [\varphi_X, \lambda_X]$ a $Y [\varphi_Y, \lambda_Y]$ na referenční kouli:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\lambda_Y - \lambda_X}{\ln \left(\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_Y + 45^\circ}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_X + 45^\circ}{2} \right)} \right)} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Z hodnoty $\operatorname{tg} A$ lze matematicky vyčíslit pouze úhel A_0 , který leží v intervalu základní periody funkce tangens $(-90^\circ; +90^\circ)$. Azimut A se měří v intervalu $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$, proto je nezbytné hodnotu A_0 opravit podle vzájemné polohy bodů X a Y do správného kvadrantu (JUREK, 2009, s. 3):



Obrázek 16 Oprava azimutu (JUREK, 2009, s. 3)

Délku loxodromy l_{XY} mezi body $X [\varphi_X, \lambda_X]$ a $Y [\varphi_Y, \lambda_Y]$ určíme z následujícího vztahu:

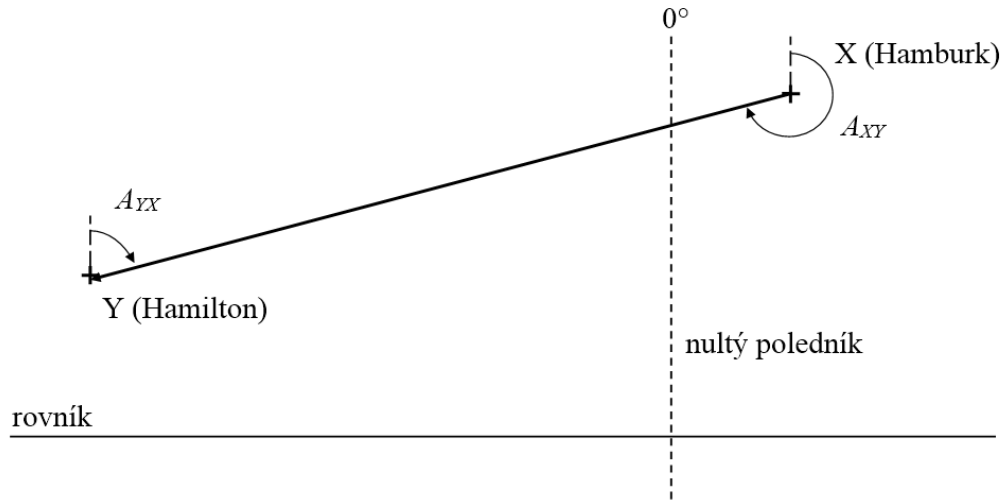
$$l_{XY} = \frac{r_Z}{\cos A} \cdot (\varphi_Y - \varphi_X) \cdot \frac{\pi}{180^\circ},$$

kde $\cos A$ je kosinus azimutu loxodromy mezi body X a Y .

Příklad:

Vypočítejte délku ortodromy, azimut a délku loxodromy mezi Hamburkem a Hamiltonem.

Hamburk $\varphi_X = 53^\circ 34'$, $\lambda_X = 10^\circ 5'$, Hamilton $\varphi_Y = 32^\circ 18'$, $\lambda_Y = 64^\circ 47'$, $r_Z = 6\,371,1$ km.

Řešení:

Obrázek 17 Vzájemná poloha Hamburku a Hamiltonu

Po dosazení do vztahu pro výpočet strany c sférického trojúhelníka dostáváme:

$$\cos c = \cos(90^\circ - 32^\circ 18') \cdot \cos(90^\circ - 53^\circ 34') + \sin(90^\circ - 32^\circ 18') \cdot \sin(90^\circ - 53^\circ 34') \cdot \cos 74^\circ 52'$$

$$\cos c = 0,560\,964$$

$$c = 55^\circ 52' 39''.$$

Délka ortodromy mezi městy Hamburk a Hamilton:

$$d_{XY} = 2\pi r_Z \cdot \frac{c}{360^\circ} = 2\pi \cdot 6\,371,1 \cdot \frac{55^\circ 52' 39''}{360^\circ} = 6\,213,4 \text{ km.}$$

Azimut A loxodromy mezi Hamburkem a Hamiltonem určíme z této rovnice:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\lambda_Y - \lambda_X}{\ln \left(\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_Y}{2} + 45^\circ \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_X}{2} + 45^\circ \right)} \right)} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{74^\circ 52'}{\ln \left(\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{32^\circ 18'}{2} + 45^\circ \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{53^\circ 34'}{2} + 45^\circ \right)} \right)} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = -2,536\,438.$$

$$A_0 = -68^\circ 58' 29''$$

Vzhledem k vzájemné poloze obou měst platí:

- a) pro azimut loxodromy z X do Y : $A_{XY} = A_0 + 180^\circ = 248^\circ 58' 59''$
- b) pro azimut loxodromy z Y do X : $A_{YX} = A_0 = 68^\circ 58' 29''$.

Délka loxodromy mezi městy Hamburk a Hamilton:

$$l_{XY} = \frac{r_z}{\cos A} \cdot (\varphi_Y - \varphi_X) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{6371,1}{\cos 248^\circ 28' 59''} \cdot (32^\circ 18' - 53^\circ 34') \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 6\,447,5 \text{ km.}$$

Rozdíl délek mezi loxodromou a ortodromou mezi Hamburkem a Hamiltonem:

$$l_{XY} - d_{XY} = 6\,447,5 - 6\,213,4 = 234,1 \text{ km.}$$

Závěr:

Loxodroma mezi Hamburkem a Hamiltonem má délku 6 447,5 km, ortodroma má délku 6 213,4 km. Azimut loxodromy z Hamburku do Hamiltonu je $248^\circ 58' 59''$ a azimut z Hamiltonu do Hamburku je $68^\circ 58' 29''$. Loxodroma je o 234,1 km delší než ortodroma mezi těmito městy.

3.7 Výpočty na kouli

Důležitým prvkem, při výpočtech týkajících se rozměrů Země, je uvědomit si, že zemské těleso nemá ani zdaleka pravidelný tvar. Proto se při výpočtech zemské těleso nahrazuje tzv. rotačním elipsoidem. Jedná se o idealizaci reálné situace, jejímž cílem je usnadnění práce při výpočtech. V geografii se využívá znalosti matematických vzorců o kouli a kružnici. V řešených příkladem budeme pracovat s tím, že Země má tvar koule a poloměr $r_z = 6\,371,1 \text{ km}$.

Délka rovníku a rovnoběžky

Vzhledem k tomu, že jsme se rozhodli povrch Země aproximovat pomocí koule, budeme využívat znalosti prostorové geometrie. Využívaná koule má na svém povrchu dva typy kružnic:

- a) Hlavní kružnice – je jakákoliv kružnice na kouli, která má největší možný obvod. Její rovina prochází středem koule. Hlavní kružnice je tedy obvodem kruhu, jehož střed je ve středu koule. Hlavní kružnice jsou např. rovník, deklinační kružnice, obzor, poledník.

- b) Vedlejší kružnice – je každá kružnice na kouli, jež není hlavní kružnicí. Příkladem jsou všechny rovnoběžky na Zemi. Poloměr každé vedlejší kružnice je menší než poloměr samotné koule.

Rovník je nejdelší rovnoběžka, pomyslná čára spojující body s nulovou zeměpisnou šířkou. Rovník je průsečnice zemského povrchu s rovinou, procházející středem Země a kolmou k zemské ose.

Poledník je pomyslná čára, vzniklá průnikem nějaké poloroviny, určené zemskou osou, a povrchu Země. Poledníky jsou také nejkratšími spojnicemi severního a jižního pólu, vedoucími po povrchu Země.

Rovnoběžka je kružnice na povrchu koule se stejnou zeměpisnou šířkou φ . Je určena rovinou procházející zvoleným bodem rovnoběžně s rovinou rovníku. Rovnoběžky se zkracují od rovníku (nejdelší rovnoběžka) směrem k pólům (bod), přičemž 60. rovnoběžka je rovna $\frac{1}{2}$ délky rovníku. Pro výpočet délky rovnoběžky lze použít vzorce:

$$l = o \cdot \cos \varphi \Rightarrow l = 2\pi r_z \cdot \cos \varphi$$

Příklad:

Vypočítejte délku zemského rovníku. ($r_z = 6\,371,1$ km)

Řešení:

Při výpočtu délky rovníku využijeme znalosti poloměru zemského tělesa. Pro výpočet použijeme vzorec pro výpočet obvodu kruhu.

$$o = 2\pi r_z = 2\pi \cdot 6\,371,1 = 40\,031,1 \text{ km.}$$

Závěr:

Délka zemského rovníku je 40 031,1 km.

Příklad:

Určete, jakou délku mají 30. a 60. rovnoběžka na zemském povrchu. ($r_z = 6\,371,1$ km)

Řešení:

K řešení dané úlohy využijeme vzorce pro výpočet délky oblouku na referenční kouli, v našem případě se potom jedná o planetu Zemi.

a) 30. rovnoběžka

$$l_{30^\circ} = 2\pi r_Z \cdot \cos \varphi = 2\pi \cdot 6\,371,1 \cdot \cos 30^\circ \doteq 34\,667,7 \text{ km.}$$

b) 60. rovnoběžka

$$l_{60^\circ} = 2\pi r_Z \cdot \cos \varphi = 2\pi \cdot 6\,371,1 \cdot \cos 60^\circ \doteq 20\,015,4 \text{ km.}$$

Závěr:

Délka 30. rovnoběžky činí 34 667,7 km, délka 60. rovnoběžky je 20 015,4 km.

Plocha pole zeměpisné sítě a objem koule

Pole zeměpisné sítě je plocha ohraničená sousedními poledníky λ_1, λ_2 a rovnoběžkami φ_1, φ_2 celých číselných hodnot. Největší plochu $P_{\max} = 12\,310 \text{ km}^2$ má pole zeměpisné sítě při $\Delta\lambda = 1^\circ, \varphi_1 = 1^\circ, \varphi_2 = 0^\circ$. Nejmenší plochu $P_{\min} = 109 \text{ km}^2$ má pole zeměpisné sítě při $\Delta\lambda = 1^\circ, \varphi_1 = 90^\circ, \varphi_2 = 89^\circ$. Vztah pro výpočet pole zeměpisné sítě byl odvozen využitím sférické trigonometrie (ČAPEK a kol., 1992, s. 34–35):

$$P = r_Z^2 \cdot \text{arc } \Delta\lambda \cdot (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2).$$

Pokud budeme uvažovat o Zemi jako o kouli, můžeme pomocí známých vztahů pro výpočet povrchu koule, objemu koule, povrchu kulového vrchlíku a dalších využit při řešení různých matematicko-geografických úloh.

Vztah pro výpočet povrchu koule:

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow S = 4\pi r_Z^2.$$

Vztah pro výpočet objemu koule:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r_Z^3.$$

Vztah pro výpočet povrchu kulového vrchlíku:

$$S = 2\pi rh \Rightarrow S = 2\pi r_Z h.$$

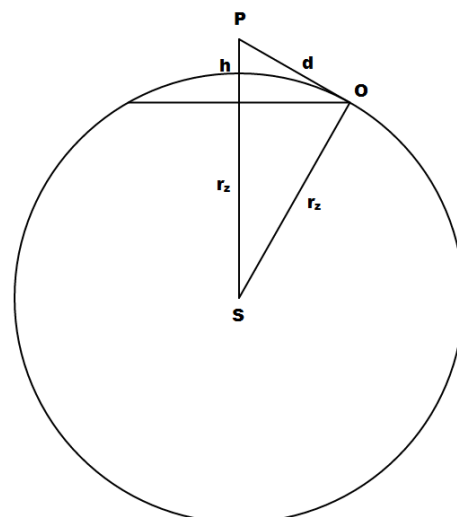
Dohlednost (d) neboli vzdálenost mezi místem pozorovatele a obzorem. Obzor je optická hraniční čára mezi viditelným povrchem planety Země a oblohou. Viditelnost obzoru je podmíněna optickými podmínkami, panujícími v daném okamžiku v místě pozorovatele.

K odvození vzorce pro výpočet vzdálenosti mezi místem pozorovatele a obzorem využijeme Pythagorovy věty, ze které vyplývá, že:

$$(r_z + h)^2 = r_z^2 + d^2,$$

tento vztah upravíme tak, abychom získali vzorec pro výpočet vzdálenosti mezi místem pozorovatele a obzorem.

$$\begin{aligned} r_z^2 + 2r_z h + h^2 &= r_z^2 + d^2 \\ d^2 &= 2r_z h + h^2 \\ d &= \sqrt{2r_z h + h^2}. \end{aligned}$$



Obrázek 18 Odvození vzdálenosti mezi pozorovatelem a obzorem

Příklad:

Vypočítejte, jaký povrch a objem má planeta Země. ($r_z = 6\,371,1$ km)

Řešení:

Při řešení úlohy využijeme vztahy pro výpočet povrchu a objemu koule.

a) Povrch Země

$$S = 4\pi r_z^2 = 4\pi \cdot 6\,371,1^2 = 510\,080\,484,1 \text{ km}^2 \doteq 510 \text{ milionů km}^2.$$

b) Objem Země

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r_z^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 6\,371,1^3 = 1,083 \cdot 10^{12} \text{ km}^3 = 1\,083 \text{ miliard km}^3.$$

Závěr:

Povrch planety Země činí 510 milionů km^2 a objem je 1 083 miliard km^3 .

Příklad:

Určete, jak velkou plochu v km^2 by viděl pozorovatel, pokud by se nacházel na vrcholu nejvyšší budovy světa Burj Khalifa (Burj Dubai) vysoké 828 m. (Výšku pozorovatele zanedbejte, $r_z = 6\,371,1$ km.)

Řešení:

Musíme si uvědomit, že určit jak velkou plochu pozorovatel vidí, vlastně znamená, určit povrch kulového vrchlíku.

$$S = 2\pi r_z \cdot h = 2\pi \cdot 6\,371,1 \cdot 0,828 \doteq 33\,145,5 \text{ km}^2$$

Závěr:

Pozorovatel, nacházející se na vrcholu nejvyšší budovy světa, vidí území o rozloze 33 145,5 km².

Příklad:

Vypočítejte, jak daleko dohlédne pozorovatel, nacházející se na střeše AZ Tower v Brně, nejvyšší budova v České republice má výšku 111 m. (Výšku pozorovatele zanedbejte, $r_z = 6\,371,1$ km.)

Řešení:

Dohlednou vzdálenost pozorovatele určíme ze vztahu pro dohlednost, který jsme si již odvodili výše v tomto textu.

$$d = \sqrt{2r_z h + h^2} = \sqrt{2 \cdot 6371,1 \cdot 0,111 + 0,111^2} \doteq 37,6 \text{ km.}$$

Závěr:

Pozorovatel, nacházející se na střeše nejvyšší budovy v České republice, dohlédne do vzdálenosti 37,6 km.

4 KARTOGRAFICKÁ ZOBRAZENÍ

„Kartografické zobrazení je způsob, který každému bodu na referenční ploše přiřadí právě jeden bod na zobrazovací ploše, Těchto způsobů bylo v dlouhém vývoji kartografie odvozeno velké množství (VOŽENÍLEK, 2001, s. 29).“ Z matematického hlediska se jedná o funkci, jejíž přesný předpis popisuje vztah mezi bodem na referenční a zobrazovací ploše.

Počtení a konstrukční metody, pomocí nichž lze vytvořit obraz zeměpisné sítě můžeme taktéž označit jako kartografická zobrazení. Metody, které k převodu z referenční plochy na zobrazovací plochu využívají promítání, se označují jako projekce.

Nejčastěji využívanou referenční plochou pro tvorbu map je v kartografii referenční plocha koule. Poloha bodu na referenční kouli je vyjádřena zeměpisnou šířkou φ a zeměpisnou délkou λ , jako zobrazovací plocha se používá rovina, plášť válce nebo plášť kužele. Na těchto zobrazovacích plochách lze polohu bodu vyjádřit pomocí pravoúhlých rovinných souřadnic x a y nebo pomocí polárních rovinných souřadnic ρ a λ .

Kartografická zobrazení se dělí podle použité zobrazovací plochy. Mapy se tedy dělí na azimutální mapy, které vznikly využitím roviny jako zobrazovací plochy, válcové mapy, jejichž zobrazovací plochou byl plášť válce. Kuželové mapy vznikly využitím pláště kužele jako zobrazovací plochy. Na konec obecné mapy, k jejichž vzniku bylo použito více zobrazovacích ploch anebo byly odvozeny pomocí matematických postupů bez použití zobrazovacích ploch.

Celkově existuje asi kolem tří stovek kartografických zobrazení, z toho asi jen 50 zobrazení je jednoduchých a kolem 250 zobrazení je obecných. Běžně se však v praxi používá pouze kolem deseti zobrazení. Zeměpisné atlasy a soubory map si vystačí s pouze 5–10 zobrazeními (ČAPEK a kol., 1992, s. 43).

Vzhledem k tomu, že povrch koule nebo elipsoidu lze obtížně rozvinout do roviny, je proto zapotřebí jej převést na povrch objektu s rozvinutelným povrchem do roviny. Při každém převádění kulové nebo elipsoidické plochy do roviny dochází ke zkreslení. Zkreslení nebývá na celé ploše mapy stejné, liší se bod od bodu v závislosti na konstrukční šířce nebo délce. Rozlišujeme zkreslení délkové, plošné a úhlové.

Klasifikace kartografických zobrazení:

1. Podle zobrazovací plochy:
 - a) Azimutální zobrazení
 - b) Válcová zobrazení
 - c) Kuželová zobrazení
2. Podle polohy konstrukční osy:
 - a) Normální poloha (Polární poloha)
 - b) Příčná poloha (Transverzální poloha)
 - c) Šikmá poloha (Obecná poloha)
3. Podle vlastnosti z hlediska zkreslení:
 - a) Plochojevná zobrazení (Ekvivalentní zobrazení)
 - b) Úhlojevná zobrazení (Konformní zobrazení)
 - c) Délkojevná zobrazení (Ekvidistantní zobrazení)
 - d) Vyrovnávací zobrazení (Kompenzační zobrazení)

4.1 Kartografické zkreslení

Většina kartografických zobrazovacích způsobů se snaží o dosažení co nejvěrnějšího obrazu zemského povrchu. Hlavním úkolem kartografických zobrazení je tedy zobrazit kulový nebo elipsoidický zemský povrch s možná co nejmenším zkreslením na geografické mapě. Jelikož nelze kulovou nebo elipsoidickou plochu rozvinout do roviny, nelze tudíž sestrojít mapu, která by zcela věrně zobrazovala nezakreslený zemský povrch (TICHÝ a ŠVEC, 1965, s. 205).

V rovině nelze tedy sestrojít mapu zachovávající plochy, úhly i délky. Tyto geometrické prvky jsou na mapách různě zkresleny. Míra zkreslení jednotlivých geometrických prvků závisí na volbě zobrazovacího způsobu. Pro úhlojevné mapy nezakreslující úhly vždy platí, že zkreslují plochy a pro plochojevné mapy nezakreslující plochy platí, že zkreslují úhly. Zobrazení, ve kterých je úhlové i plošné zkreslení sníženo na střední míru, se nazývají vyrovnávací (kompenzační). Kartografické zobrazovací způsoby se volí podle velikosti, tvaru a zeměpisné polohy zobrazovaného území, ale také třeba podle účelu mapy (VOŽENÍLEK, 2001, s. 35).

		Poloha		
		normální	příčná	obecná
Zobrazení	azimutální			
	válcové			
	kuželové			

Obrázek 19 Polohy zobrazovacích ploch

(Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2016, online)

Délkové zkreslení

Délkojevná též stejnodélková nebo ekvidistantní zobrazení nezkrslují délku určitých křivek – například poledníků. Délkové zkreslení „je poměr délkového elementu na zobrazovací ploše k jeho obrazu na referenční ploše. Délkové zkreslení je závislé nejen na poloze bodu, ze kterého délkový element vychází, ale i na jeho směru (VOŽENÍLEK, 2001, s. 35).“ Délkové zkreslení se zjišťuje ve dvou směrech – ve směru poledníkovém (k_p) a ve směru rovnoběžkovém (k_r).

Plošné zkreslení

Plochojevná též stejnoplochá nebo ekvivalentní zobrazení zachovávají poměry ploch, silně však zkreslují úhly. Plošné zkreslení „je poměr plošného elementu na zobrazovací ploše k jeho obrazu na referenční ploše. Je dáno vztahem obsah elipsy (kruhu) v mapě : obsah kruhu na referenční ploše“ (VOŽENÍLEK, 2001, s. 35). Určuje ho součin délkových zkreslení v poledníkovém a rovníkovém směru. Plochojevná zobrazení se používají ke tvorbě map, u nichž se klade důraz na vzájemnou srovnatelnost jednotlivých území.

Úhlové zkreslení

Úhlojevná též stejnoúhlá nebo konformní zobrazení věrně zachycují úhly, ale silně zkreslují plochy. Úhlové zkreslení „je definováno jako rozdíl velikosti úhlu na zobrazovací ploše a jeho obrazu na referenční ploše. Maximální zkreslení nastává pro čtyři základní směrníky, tzn. pro každý kvadrant elipsy zkreslení (VOŽENÍLEK, 2001, s. 35).“ Úhlojevná zobrazení se používají ke tvorbě topografických map, námořních a leteckých navigačních map.

4.2 Azimutální zobrazení

Do souboru azimutálních zobrazovacích metod patří všechna zobrazení na rovinu, která se většinou dotýká glóbu v zeměpisném pólu, některém bodě rovníku anebo některém jiném bodě. Důvod, proč se tato zobrazení nazývají azimutální je ten, že velikost úhlů neboli azimutů (λ) mezi jednotlivými poledníky zůstává v obrazu (mapě) zachována (TICHÝ a ŠVEC, 1965, s. 209).

Využití najdou azimutální zobrazení zejména při tvorbě map, které zobrazují území bez výrazného směrového protažení. Dnes se azimutální zobrazení značně využívají

v normální poloze pro tvorbu map polárních oblastí, v poloze příčné pro mapy polokouli a Afriky a v poloze šikmé pro mapy většiny světadílů a jejich částí (ČAPEK a kol., 1992, s. 44–45).

Základními znaky azimutálního zobrazení v normální poloze jsou:

1. Obrazy zeměpisných poledníků jsou polopřímky tvořící svazek, který vychází z obrazu pólu, tj. ze středu mapy. Úhly λ' mezi obrazy poledníků v mapě mají stejnou velikost jako úhly λ mezi poledníky na glóbu. Zobrazovací rovnice pro obrazy poledníků je stejná u všech azimutálních způsobů:

$$\lambda' = \lambda.$$

2. Obrazy zeměpisných rovnoběžek tvoří soustředné kružnice se středem v obrazu pólu. Poloměry kružnice mění svou velikost v závislosti na vlastnostech jednotlivých zobrazení. Proměnnou veličinou je pólová vzdálenost δ těchto kružnic (rovnoběžek).
3. Obrazy poledníku a rovnoběžek se vzájemně protínají pod úhlem 90° , proto zůstává v mapě zachována pravoúhlost souřadné soustavy glóbu.

Gnómonická projekce

Při gnómonické projekci se povrch glóbu promítá z jeho středu na tečnou rovinu, čili gnómonickou projekci můžeme definovat jako středový průmět glóbu z jeho středu na tečnou rovinu. S tímto typem promítání povrchu glóbu přišel v 7. století př. n. l. Thalés z Milétu⁸.

„Poledníky a všechny hlavní kružnice z glóbu se zobrazují ve všech polohách jako přímky, zeměpisné rovnoběžky jako kuželosečky (ČAPEK a kol., 1992, s. 48).“ Dále také platí, že se rychle zvětšují vzájemné vzdálenosti soustředných obrazů rovnoběžek ve směru od středu mapy k obrazu rovníku, který leží v nekonečnu. Proto tedy nelze v gnómonické projekci sestavit mapu celé polokoule. Významnou vlastností gnómonické projekce je zjištění, že obrazy hlavních kružnic glóbu při jakékoliv poloze tečné roviny jsou přímky.

⁸ Thalés z Milétu (okolo 624 př. n. l. Milétoš – okolo 548 př. n. l.) byl řecký filozof, astronom, matematik a politik, jeden ze sedmi mudrců (podle antické tradice patří mezi sedm mudrců sedm myslitelů, jimiž začínají dějiny řecké filozofie a kultury)

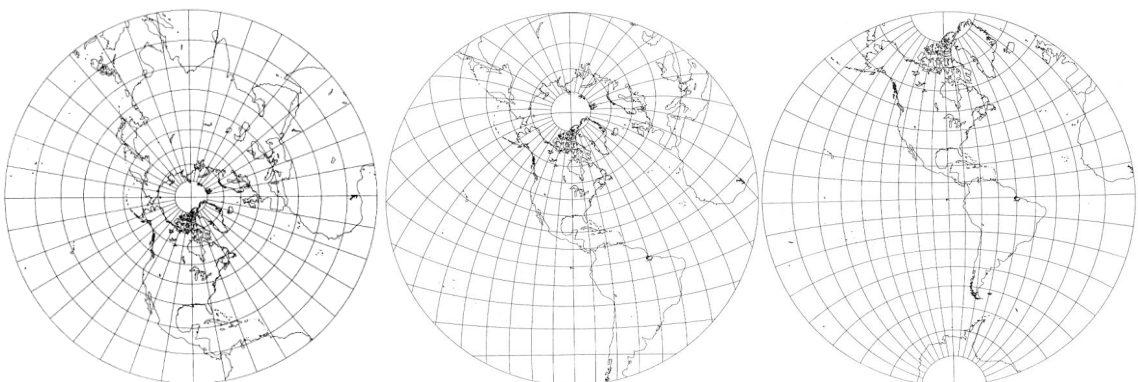


Obrázek 20 Gnomonická projekce v poloze normální, šikmé a příčné
(Geomatika, 2016, online)

Stereografická projekce

Stereografická projekce je definována jako středový průmět glóbu na tečnou rovinu z bodu na jeho povrchu protilehlého k dotykovému bodu tečné roviny. Navržena byla ve 2. století př. n. l. Hipparchosem z Níkaie⁹.

Jedná se o úhlojevné zobrazení, ve kterém se všechny kružnice zobrazují znovu jako kružnice (přímkové obrazy hlavních kružnic procházejících dotykovým bodem jsou zvláštními případy, kdy je poloměr nekonečně velký). Obrazy zeměpisné sítě v příčné a šikmé poloze vytvářejí kružnice (ČAPEK a kol., 1992, s. 47). S rostoucí pólovou vzdáleností se postupně zvětšuje vzdálenost mezi jednotlivými obrazy rovnoběžek. Pomocí stereografické projekce nelze zobrazit celý svět. Lze zobrazit rovník, jehož poloměr má dvojnásobnou velikosti oproti poloměru Země. Stereografická projekce v poloze normální se využívá k zobrazení polárních krajín a pro mapy severní a jižní polokoule (TICHÝ a ŠVEC, 1965, s. 215).



Obrázek 21 Stereografická projekce v poloze normální, šikmé a příčné
(Geomatika, 2016, online)

⁹ Hipparchos z Níkaie (asi 190 př. n. l. – asi 125 př. n. l.) byl řecký učenec, matematik, astronom a zastánce geocentrického modelu Sluneční soustavy

Ortografická projekce

Ortografickou projekci lze definovat následovně – jedná se o pravouhlý průmět glóbu na tečnou rovinu z bodu, jenž leží v nekonečnu. Jako první použil ortografickou projekci pravděpodobně Apollónios z Pergy¹⁰ ve 3. století př. n. l.

Zeměpisné poledníky se v příčné poloze zobrazují jako elipsy, zeměpisné rovnoběžky potom jako rovnoběžné přímky. V poloze šikmé se jak poledníky, tak i rovnoběžky zobrazují jako elipsy. Pro ortografickou projekci je typická rychle se zmenšující vzájemná vzdálenost obrazů rovnoběžek od středu mapy k okrajům.

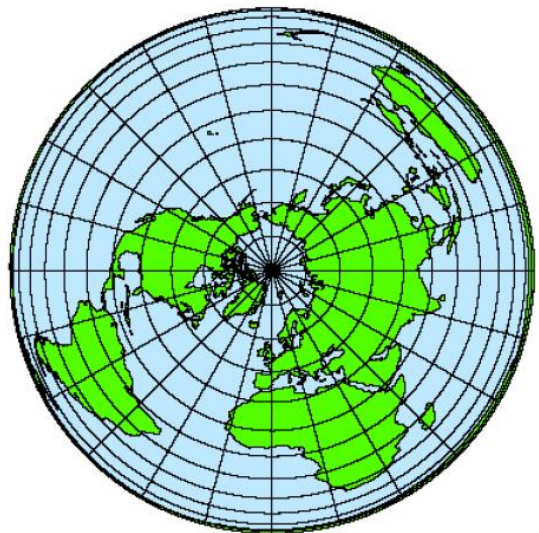
Ortografické promítání není ani úhlojevné ani plochojevné, většinou se využívá pro zobrazování území s menšími rozlohami nebo v astronomii pro zobrazení Měsíce a jiných vesmírných těles.



Obrázek 22 Ortografická projekce v poloze normální, šikmé a příčné
(Geomatika, 2016, online)

Lambertovo azimutální zobrazení

Kartografické zobrazení navržené v roce 1772 autorem mnoha dalších typů zobrazení, Johannem Heinrichem Lambertem¹¹. Azimutální zobrazení plní požadavek plochojevnosti mapy, tzn., že nedochází ke zkreslení obrazu povrchu glóbu v mapě. Obrazy Poledníků a rovnoběžek mají v obecné a příčné poloze tvary složitých křivek.



Obrázek 23 Lambertovo azimutální zobrazení
(Bayer, 2016, online)

¹⁰ Apollónios z Pergy (262 př. n. l. – 190 př. n. l.) byl starověký řecký matematik a astronom

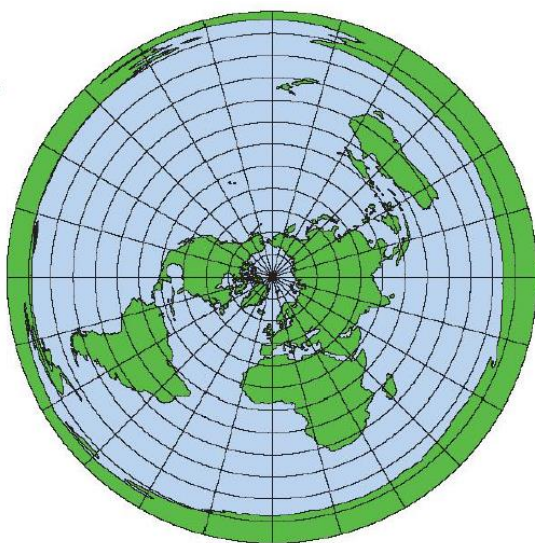
¹¹ Johann Heinrich Lambert (26. srpen 1728, Mylhúzy – 25. září 1777, Berlín) byl švýcarský matematik, fyzik, astronom a filozof

Charakteristickou vlastností Lambertova zobrazení jsou mírně se zmenšující vzájemné vzdálenosti mezi jednotlivými obrazy rovnoběžek ve směru od středu k okrajům mapy.

Využitím Lambertova zobrazení je možné zobrazit povrch celé Země, ale používají se spíše k zobrazení polokoulí, u kterých nedochází ke značnému zkreslení obrazů. Plochojevnost tohoto zobrazení je hlavním důvodem častého použití tohoto zobrazení v geografických mapách. Ve školních atlasech světa se nachází více než 15 % map vzniklých pomocí Lambertova zobrazení.

Postelovo zobrazení

Zobrazení, jež nese název podle Guillaumea Postela¹², člověka který jej poprvé použil v roce 1581 i když ne jako první v historii. Jde o nejnadhěji zkonstruovatelné azimutální zobrazení, které je délkojevné podle poledníků. Obrazy zeměpisné sítě v jiných polohách než normálních tvoří složité křivky. V normální poloze jsou obrazy rovnoběžek soustředné kružnice se středem obrazu v pólu. Odlišnost od ostatních azimutálních zobrazení tkví ve vzájemných vzdálenostech obrazů rovnoběžek, které zůstávají podél přímkového obrazu (1992, s. 46).



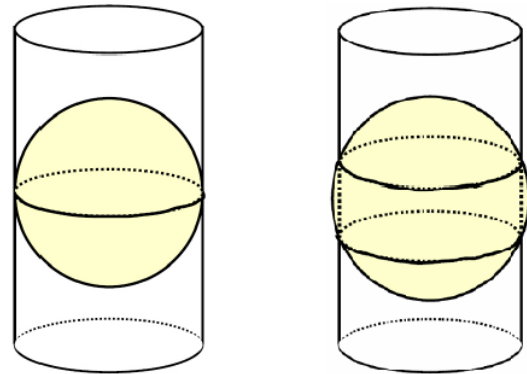
Obrázek 24 Postelovo zobrazení
(Bayer, 2016, online)

Postelovo zobrazení není úhlojevné ani plochojevné, ale je vyrovnávací, protože tlumí úhlová i plošná zkreslení (TICHÝ a ŠVEC, 1965, s. 221–223). Umožňuje zobrazit celou Zemi a své využití najde při konstrukci leteckých a atlasových map.

¹² Guillaume Postel (25. března 1510 – 6. 9. 1581) byl francouzský lingvista, astronom, diplomat, profesor, a nábožensky všestranný člověk

4.3 Válcová zobrazení

Do této skupiny patří všechna zobrazení, která vznikají zobrazením glóbu na plášť válce. Tento válec může být buďto tečný nebo sečný. Tečný válec je ovinut podél některé hlavní kružnice, sečný válec protíná glóbus ve dvou vzájemně paralelních kružnicích. *V normální poloze je dotykovou kružnicí rovník, v příčné poloze některý poledník, v šikmé poloze kterákoli jiná hlavní kružnice* (ČAPEK a kol., 1992, s. 52). V příčné a šikmé poloze vytvářejí obrazy zeměpisné sítě složité křivky.



Obrázek 25 Tečný a sečný válec
(Bayer, 2016, online)

Znaky válcových zobrazení v poloze normální:

1. Zeměpisná síť je tvořena soustavou rovnoběžných a na sebe navzájem kolmých přímek. V obraze zůstává zachována pravoúhlost zeměpisné sítě.
2. Obrazy poledníků vytvářejí rovnoběžné úsečky s osou y . Všechny poledníky mají stejnou velikost a stejné vzájemné rozestupy. Přímkový obraz rovníku a středního (nultého) poledníku považujeme za osy x y pravoúhlé soustavy souřadnic.
3. Obrazy rovnoběžek tvoří rovnoběžné úsečky s osou x . Vzdálenosti mezi jednotlivými rovnoběžkami se mění v závislosti na vlastnostech jednotlivých zobrazení. Proměnnou veličinou je v tomto případě zeměpisná šířka φ .

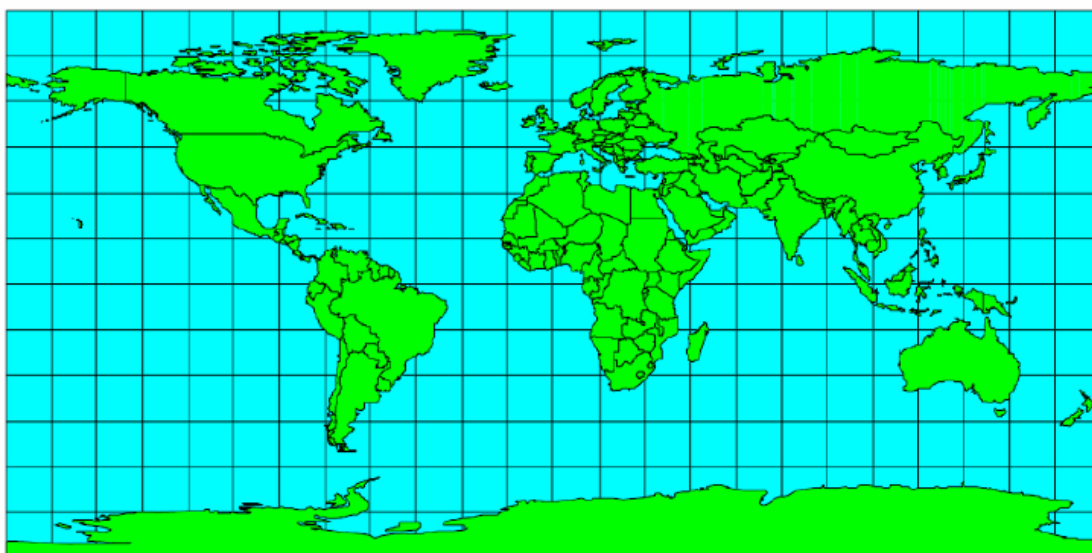
V minulosti se válcová zobrazení využívala hojně pro tvorbu map světa. Později se tento zobrazovací způsob začal méně využívat kvůli značnému zkreslení map. V současné době vznikají pomocí válcového zobrazení hlavně mapy námořní mapy a mapy časových pásem. Válcová zobrazovací metoda v poloze šikmé se využívá velmi vzácně, typickým příkladem užití této metody je mapa Severní a Jižní Ameriky na jednom listu (ČAPEK a kol., 1992, s. 52).

Čtvercové zobrazení (Marinovo zobrazení)

Čtvercové válcové zobrazení použil už Archimédés ze Syrakus¹³ ve 3. stol. př. n. l. Toto zobrazení bylo známé také Marinovi z Tyru¹⁴ ve 2. stol. n. l., proto se také často používá název Marinovo zobrazení.

Obrazy poledníků a rovnoběžek jsou na sebe navzájem kolmé úsečky. Typickými vlastnostmi tohoto zobrazení jsou délkojevnost podél poledníků a velké zkreslení v oblastech kolem pólů. Čtvercové zobrazení lze snadno rozpoznat podle čtvercového tvaru polí zeměpisné sítě.

Mapa vzniklá čtvercovým zobrazením není úhlojevná ani plochojevná. Takto vzniklá mapa je mapou kompenzační (vyrovnávací). V českých zemích byly v 19. století pomocí čtvercového zobrazení vytvořeny katastrální mapy.



Obrázek 26 Čtvercové (Marinovo) zobrazení (Bayer, 2016, online)

Lambertovo válcové zobrazení

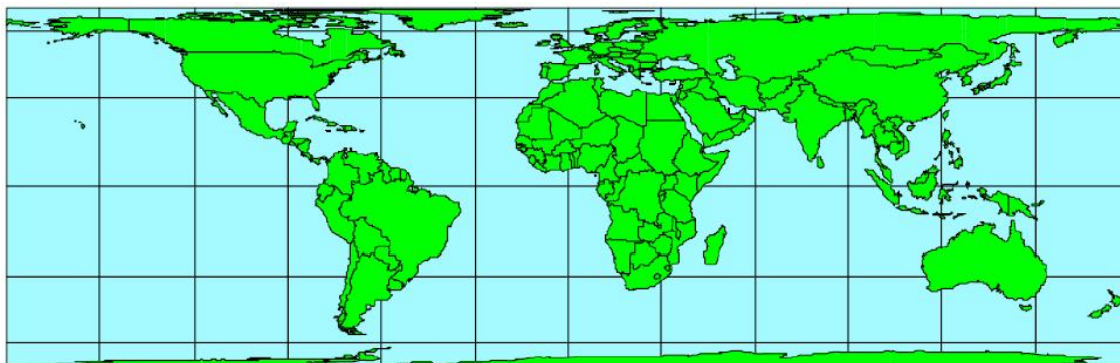
Zobrazení vznikající pravoúhlým promítáním povrchu glóbu na plášť válce z nekonečně vzdáleného bodu. Jedná se o plochojevné zobrazení, které je v oblasti rovníku délkojevné. Charakteristickým rysem Lambertova válcového zobrazení jsou zmenšující se vzdálenosti obrazů jednotlivých rovnoběžek směrem od rovníku k pólům.

Původní typ tohoto zobrazení se v současnosti nepoužívá, protože zmenšující se vzdálenosti mezi obrazy rovnoběžek směrem k pólům způsobují velké úhlové zkreslení

¹³ Archimédés ze Syrakus, (287 př. n. l. – 212 př. n. l. Syrakusy) byl řecký matematik, fyzik, filozof, vynálezce a astronom.

¹⁴ Marinus z Tyru (70 n. l. – 130 n. l.) byl řecký geograf, kartograf a matematik.

v polárních oblastech. Mapy vzniklé pomocí tohoto zobrazení se vyznačují obdélníkovým tvarem.



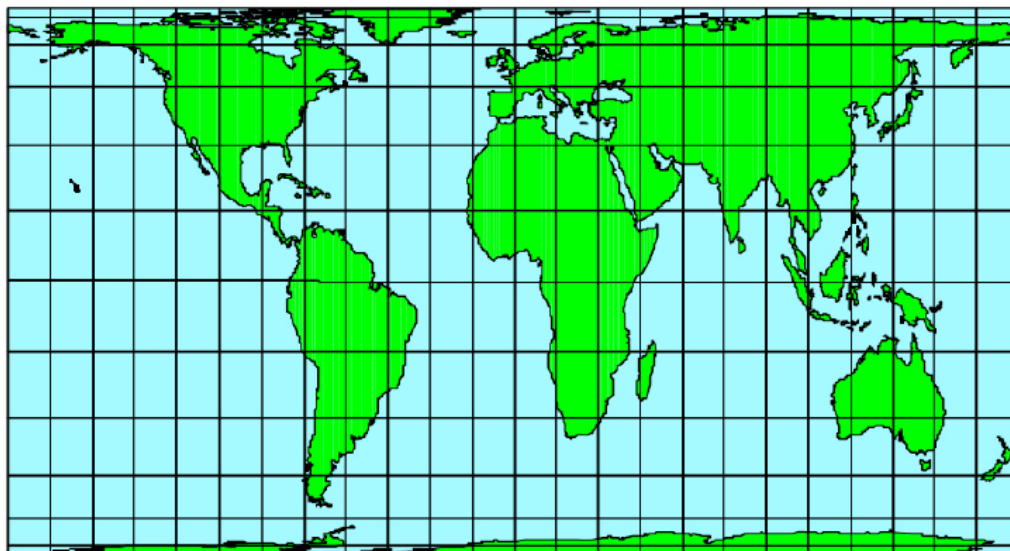
Obrázek 27 Lambertovo válcové zobrazení (Bayer, 2016, online)

Behrmanovo zobrazení

Behrmannovo zobrazení je plochojevné válcové kartografické zobrazení. Jeho autorem je německý geograf Walter Behrmann¹⁵, který ho publikoval v roce 1909. Vzniklo počtení úpravou Lambertova válcového zobrazení, kdy se obrazy rovnoběžek $\cos \varphi$ -krát zkrátí

a obrazy poledníků $\frac{1}{\cos \varphi}$ -krát prodlouží (ČAPEK a kol., 1992, s. 54). Úhlové zkreslení

Behrmannova zobrazení je menší než u Lambertova zobrazení. Nejmenší úhlové zkreslení nastává u obrazů rovnoběžek o zeměpisné šířce $\pm 30^\circ$.



Obrázek 28 Behrmanovo zobrazení (Bayer, 2016, online)

¹⁵ Walter Emmerich Behrmann (22. května 1882, Oldenburg – 3. května 1955, Berlín) byl německý geograf.

Mercatorovo zobrazení

„Mercatorovo zobrazení není projekce, protože obraz geografické sítě nevznikne promítáním, ale konstrukcí na základě výpočtů (TICHÝ a ŠVEC, 1965, s. 228).“ Jedná se o jediné úhlojevné válcové zobrazení. Poprvé bylo použito Gerhardem Mercatorem¹⁶ v roce 1569. Vzniklo pro potřeby námořní a letecké dopravy.



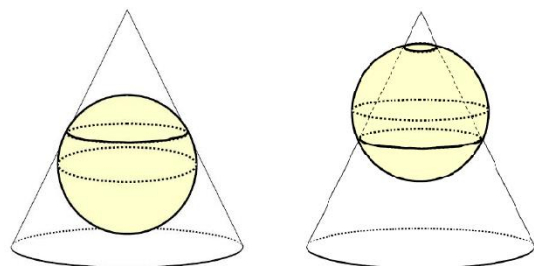
Obrázek 29 Mercatorovo zobrazení
(Bayer, 2016, online)

Obrazy poledníků jsou nekonečně dlouhými rovnoběžnými přímkami. Vzájemné vzdálenosti obrazů rovnoběžek se od rovníku k pólům neustále zvětšují, obrazy geografických pólů, $\varphi = \pm 90^\circ$, unikají do nekonečna. Z tohoto důvodu se mapa vzniklá Mercatorovým zobrazením nejeví jako obdélník, nýbrž jako rovinný pás bez ohraničení dole a nahoře. Jedinou zachovanou čarou je přímkový obraz rovníku.

Mapy vytvořené prostřednictvím Mercatorova zobrazení jsou typické velkým plošným a délkovým zkreslením hlavně v polárních oblastech. Využití nalézají tyto mapy v geodézii a námořní dopravě.

4.4 Kuželová zobrazení

Vzniká zobrazením geografické sítě glóbu na tečný nebo sečný kužel. Plášť kužele má s glóblem potom jednu nebo dvě vzájemně soustředné dotykové kružnice. Poloha pláště kužele se odvíjí od umístění, velikosti a tvaru zobrazovaného území. Osa kužele prochází středem glóbu v každé poloze.



Obrázek 30 Tečný a sečný kužel
(Bayer, 2016, online)

Kuželová zobrazení nacházejí svoje uplatnění především při tvorbě map, které zobrazují části světadílů a menších území ve středních zeměpisných šířkách. Ve skutečnosti se prakticky nepoužívá zobrazení v poloze příčné, v šikmé poloze jsou obrazy poledníků a

¹⁶ Gerhard Mercator (5. března 1512 Rupelmonde – 2. prosince 1594 Duisburg) byl vlámský kartograf a matematik německého původu.

rovnoběžek složité křivky. Poloha obecná se používá pro tvorbu map protáhlých území podél vedlejších kružnic (Československo, Japonsko).

Znaky kuželových zobrazení v poloze normální:

1. Obrazy zeměpisných poledníků jsou úsečky mající stejnou velikost a sbíhající se v obraze vrcholu kužele. Vzájemné úhly λ' , tj. rozestupy mezi jednotlivými obrazy zeměpisných poledníků, jsou vždy menší než úhly λ mezi jednotlivými poledníky na glóbu. „*Touto vlastností se kuželová zobrazení liší od zobrazení azimutálních, u nichž jsou, jak známo, vzájemné úhly mezi poledníkovými obrazy věrně zachovány* (TICHÝ a ŠVEC, 1965, s. 235).“
2. Obrazy zeměpisných rovnoběžek tvoří části soustředných kružnic se středem v počátku souřadné soustavy. Roviny soustředných kružnic jsou kolmé k ose kužele. Poloměry částí soustředných kružnic se mění v závislosti na způsobu zobrazení a vzdálenosti od pólu δ . U tečného kužele se zobrazí střední (dotyková) rovnoběžka délkově a ostatní se prodlužují, u sečného kužele jsou nezkresleny dvě sečné rovnoběžky (obrazy rovnoběžek mezi nimi jsou proti skutečnosti zkráceny, obrazy rovnoběžek mezi pólem a sečnou rovnoběžkou jsou zvětšeny).
3. Obrazy poledníků a rovnoběžek jsou k sobě navzájem kolmé, tzn., že souřadná soustava je pravoúhlá i v obraze.

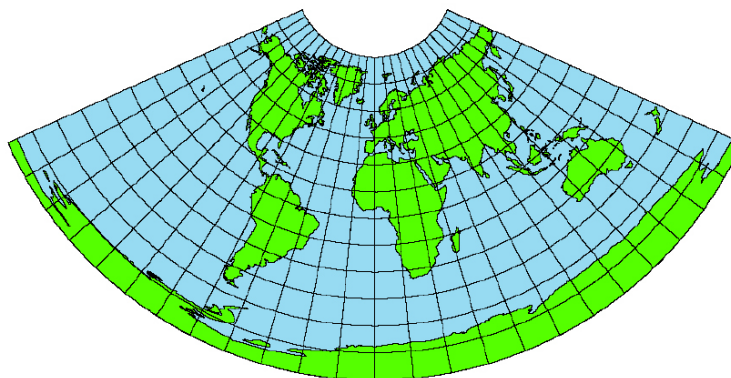
Pomocí kuželových zobrazovacích metod se dobře zobrazují území podél dotykové rovnoběžky u tečného kužele (u sečného kužele jsou to území podél sečných rovnoběžek). Nejčastěji používanými kuželovými zobrazeními jsou Ptolemaiovo, Lambertovo, Gaussovo, Delisleovo a Albersovo. Všechno jsou to zobrazení, žádné z nich není projekcí (ČAPEK a kol., 1992, s. 58).

Ptolemaiovo zobrazení

Ptolemaiovo zobrazení na tečný kužel poprvé použil Klaudios Ptolemaios¹⁷ v 1. století př. n. l. Je to vyrovnávací délkově zobrazení, které zachovává velikosti obrazů poledníků. Poledníky se zobrazují jako úsečky o délkách poledníkových oblouků na glóbu a rovnoběžky se zobrazují jako kruhové oblouky. Dokonce i obrazem pólů je část kružnice. Zkreslení přibývá rychleji k pólu než k rovníku.

¹⁷ Klaudios Ptolemaios (asi 85 – asi 165, Alexandrie) byl řecký geograf, matematik, astronom a astrolog, který žil a pracoval v egyptské Alexandrii.

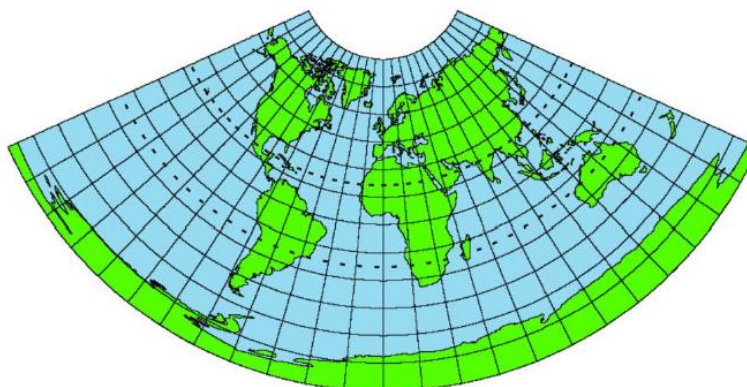
Kvůli jeho jednoduchosti se využívá ze všech zobrazení nejčastěji. Více než 40 % map ve školních atlasech světa bylo vytvořeno užitím Ptolemaiova zobrazení.



Obrázek 31 Ptolemaiovo zobrazení (Bayer, 2016, online)

Delisleovo zobrazení

Delisleovo zobrazení zavedl Joseph-Nicolas de l'Isle¹⁸ (zjednodušeně Delisle) v roce 1745. Jedná se o vyrovnávací zobrazení, které je délkojevné podle obrazů poledníků, čili vzdálenosti mezi rovnoběžkami jsou stejné. Délkově jsou zachovány dvě rovnoběžky φ_1 a φ_2 . Ve srovnání s Ptolemaiovým zobrazením, zkresluje méně plochy a úhly.

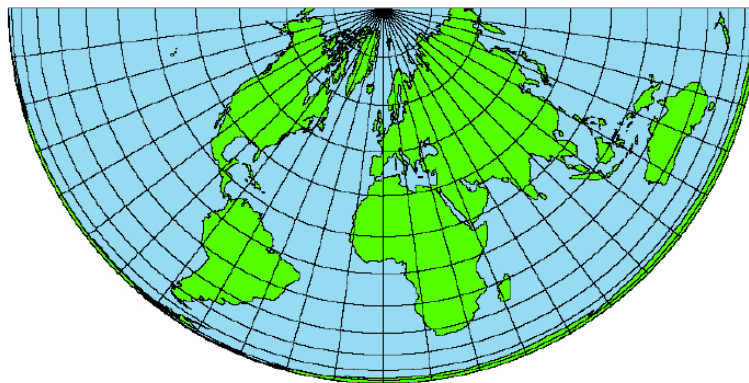


Obrázek 32 Delisleovo zobrazení (Bayer, 2016, online)

Lambertovo kuželové zobrazení

Plochojevné zobrazení, které se kvůli velkému úhlovému zkreslení téměř nepoužívá. Vzdálenosti mezi obrazy jednotlivých rovnoběžek se ve směru od pólu k rovníku zmenšují. Obrazy poledníků tvoří svazek úseček sbíhajících se v obrazu pólu. Obrazy rovnoběžek se zobrazují jako kruhové oblouky.

¹⁸ Joseph-Nicolas de l'Isle (4. dubna 1688 – 11. září 1768) byl francouzský astronom a kartograf.

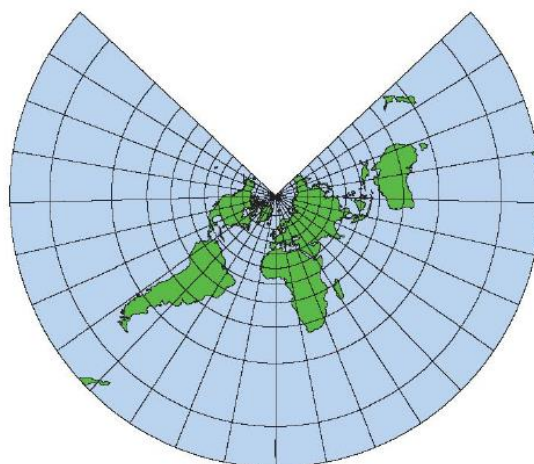


Obrázek 33 Lambertovo kuželové zobrazení (Bayer, 2016, online)

Gaussovo zobrazení

Gaussovo zobrazení bylo poprvé použito Johannem Karlem Friedrichem Gaussem¹⁹ v roce 1822. Vzhledem k tomu, že ho už o 50 let dříve použil J. H. Lambert bývá někdy označováno jako Lambertovo. Základní vlastností je úhlojevnost s jedinou délkově zachovanou rovnoběžkou, která je současně rovnoběžkou dotykovou.

Pro své široké využití se používá zejména při tvorbě geodetických a leteckých map. Gaussovo zobrazení v šikmé poloze se nazývá Křovákovo zobrazení. Toto zobrazení bylo použito při tvorbě podrobných topografických map našeho území. Pomocí Gaussova zobrazení byla vytvořena Mezinárodní letecká (aeronavigační) mapa 1:1 000 000 nebo Mezinárodní mapa světa 1:1 000 000.



Obrázek 34 Gaussovo zobrazení
(Bayer, 2016, online)

¹⁹ Johann Carl Friedrich Gauss (30. dubna 1777, Braunschweig – 23. února 1855, Göttingen) byl slavný německý matematik a fyzik.

5 MĚŘÍTKO MAPY

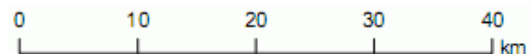
Často se setkáme s definicí měřítka jako poměr vzdálenosti na mapě ke vzdálenosti skutečné. Tato definice je ovšem nepřesná. Daleko vhodnější je definovat měřítko mapy tak, že udává poměr zmenšení délky měřené na mapě k délce ve skutečnosti. Potom měřítko mapy 1:1 000 znamená, že např. délce 1 cm na mapě odpovídá 1 000 cm, tj. 10 m ve skutečnosti.

Problémy s měřítkem mapy přímo souvisí s tím, že Země není placatá ale kulatá. Povrch koule nejsme schopni převést do roviny takovým způsobem, aby nedocházelo k žádnému zkreslení. Při převodu mapy z povrchu koule do roviny tudíž vždy dojde k nějakému zkreslení vzdáleností.

5.1 Typy měřítek

Mezi nejpoužívanější typy měřítek, které slouží k vyjádření měřítek na mapách, patří měřítka číselná a grafická.

- číselné měřítko – např. 1:500 000,
- grafické měřítko.



Obrázek 35 Grafické měřítko (WIKIPEDIA: the free encyclopedia, 2016, online)

Podle podrobnosti zobrazení se mapy dělí do tří skupin:

- mapy velkých měřítek – měřítka do 1:200 000,
- mapy středních měřítek – 1:200 000 až 1:1 000 000,
- mapy malých měřítek – měřítka od 1:1 000 000.

5.2 Výpočty měřítka

Příklad:

Vzdálenost, kterou musí ujet Dominik s kamarády ujet na kole je na mapě 19 cm a ve skutečnosti měří 82,5 km. Jaké je měřítko použité mapy?

Řešení:

Ze zadání úlohy vyplývá, že 20 cm na mapě odpovídá 82,5 km ve skutečnosti. Tento vztah zapíšeme jako poměr 20:8 250 000. Po zkrácení dostaneme výsledný poměr 1:412 500.

Závěr:

Použité měřítko mapy je 1:412 500.

Příklad:

Jaká je skutečná vzdálenost dvou vesnic na mapě o měřítku 1:100 000, jestliže jsou od sebe vzdálené 4 cm.

Řešení:

V této úloze máme mapu s měřítkem 1:100 000, což znamená, že 1 cm na mapě = 100 000 cm ve skutečnosti = 1 km ve skutečnosti. Z toho vyplývá, že 4 cm na mapě = $4 \cdot 1 \text{ km} = 4 \text{ km}$ ve skutečnosti.

Závěr:

Skutečná vzdálenost dvou vesnic na mapě o měřítku 1:100 000, které jsou od sebe vzdálené 4 cm, je 4 km.

Příklad:

Z Olomouce do Vyškova pojedí pan Tichý trasu dlouhou 40 km. Jak dlouhá bude silnice na mapě s měřítkem 1:550 000?

Řešení:

Z měřítka 1:550 000 vyplývá, že skutečná vzdálenost 550 00 cm = 5,5 km je vyjádřena na mapě vzdáleností 1 cm. Vzdálenost na mapě, která odpovídá 40 km, se vypočítá jako podíl $40 : 5,5 \doteq 7,3 \text{ cm}$.

Závěr:

Vzdálenost trasy z Olomouce do Vyškova na mapě odpovídá 7,3 km.

Příklad:

Pozemek má na mapě v měřítku 1:25 000 plochu 16 cm². Jaká je jeho plocha ve skutečnosti? Výsledek vyjádřete v hektarech.

Řešení:

Z měřítka mapy určíme, že 1 cm na mapě odpovídá 25 000 cm ve skutečnosti = 250 m ve skutečnosti. Z toho potom vyplývá, že 1 cm² na mapě odpovídá $250 \cdot 250 = 62\,500 \text{ m}^2$ ve skutečnosti. Potom tedy 16 cm² na mapě odpovídá $16 \cdot 62\,500 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$ ve skutečnosti. Výsledek převedeme na hektary: $1\,000\,000 \text{ m}^2 = 100 \text{ ha}$.

Závěr:

Skutečná plocha pozemku je 100 hektarů.

6 MĚŘENÍ ČASU

Lidstvo se měřením času zabývá od dob dávno minulých. Potřeba určovat a měřit čas vznikla už velice dávno a v současnosti se stala nezbytnou součástí života. V dávných dobách se čas určoval za pomoci nebeských těles. První představy o čase získalo lidstvo pomocí střídání dne a noci, střídáním ročních období, změnami fází Měsíce, atd. Čas ve dne se vždy řídil podle Slunce, měsíc se určoval pomocí fází měsíce a rok se určoval pomocí zdánlivého pohybu Slunce po obloze během roku. Základní jednotkou časomíry je den – doba jedné otáčky Země kolem vlastní osy.

6.1 Určování času v minulosti

Gnómon

Ve starověku se určovala délka dne za pomoci tzv. gnómonu. Praotec slunečních hodin neboli gnómon je svislý obelisk vrhající stín a sloužící k měření času. Délka stínu obelisku závisí na výšce Slunce nad obzorem. Nejmenší délka stínu označovala průchod Slunce místním poledníkem, což v praxi znamenalo pravé poledne. Nejznámější gnómon se nachází v Egyptě, odkud pocházejí patrně ty nejstarší gnómony vůbec. Později se však zjistilo, že délka stínu se během roku ve stejnou dobu mění kvůli změnám deklinace²⁰ Slunce a tudíž bylo určování času gnómonem nepřesné. Zjistilo se, že je lepší využít směr stínu místo jeho délku a tak byl gnómon nahrazen měrnou tyčí postavenou rovnoběžně s osou rotace. Ta se stala základní součástí ke vzniku tzv. slunečních hodin (TICHÝ a ŠVEC, 1965, s. 70–71).

Sluneční hodiny

Základem slunečních hodin je měrná tyč tzv. polos rovnoběžný s osou zemské rotace. Polos vrhá stín směrem na číselník slunečních hodin, který se nachází ve stínové rovině. Tato rovina může být v různých polohách v závislosti na typu slunečních hodin. Rovníkové sluneční hodiny mají stínovou rovinu rovnoběžnou s rovinou rovníku, horizontální sluneční hodiny mají stínovou rovinu vodorovnou a vertikální sluneční hodiny mají stínovou rovinu svislou. Stín vzniklý polosem se pohybuje od západu na východ a udává na číselníku slunečních hodin čas. Pomocí slunečních hodin se určuje tzv. místní pravý sluneční čas.

²⁰ Deklinace je úhel, který svírá spojnice středu Slunce se středem Země (čili směr slunečních paprsků) s rovinou zemského rovníku.

6.2 Určování času v současnosti

Atomové hodiny

V současné době se k měření přesného času používají tzv. atomové hodiny. Jedná se dosud nejpřesnější zkonstruované hodiny založené na principu kmitání atomů nebo molekul určitých látek. Využitím atomových hodin lze kontrolovat nerovnoměrnou rotaci Země. Atomové hodiny udávají atomový čas. Jejich chod se změní o 1 sekundu za 1 000 let. První atomové hodiny byly zkonstruovány v roce 1946 ve Spojených státech amerických.

6.3 Časová pásma

Všechna místa na planetě Zemi mají vlastní tzv. místní čas. V minulosti bylo základem občanské časomíry pravé Slunce. Pravý sluneční čas udávaly a měřily sluneční hodiny. Na počátku 19. století byl zaveden tzv. střední sluneční čas, který byl upraven pomocí časové rovnice a lišil se od pravého slunečního času. S příchodem průmyslové revoluce došlo také k rozvoji železnice a ukázalo se, že není praktické, aby každá stanice měla svůj vlastní místní čas a z tohoto důvodu byl zaveden železniční čas. Většinou železniční čas odpovídal času hlavního města nebo času jiného významného města nacházejícího se na trase železnice. Časem se však ukázala nepraktičnost zavedení železničního času a to zejména v USA a v Evropě (v USA bylo 53 různých železničních časů a v Evropě se časy lišily o zlomek dne). Kvůli těmto okolnostem byl v roce 1884 na mezinárodní konferenci ve Washingtonu zaveden systém pásmových časů (BRÁZDIL, 1988, s. 102).

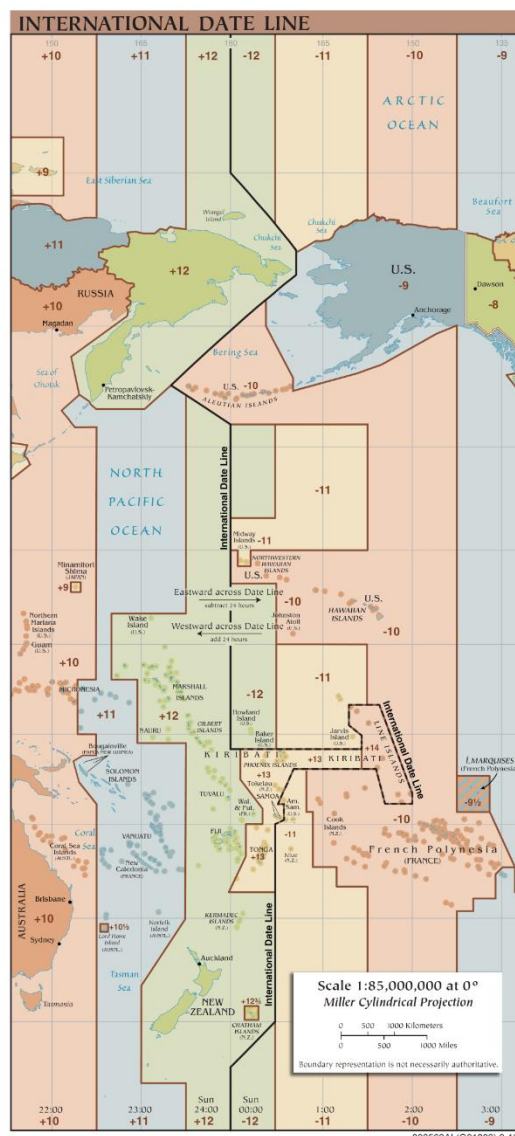
Časové pásmo je oblast, která zachovává jednotný čas pro právní, obchodní a společenské účely. Časová pásma mají tendenci následovat hranice zemí a jejich částí. Po konferenci ve Washingtonu byla Země rozdělena na 24 sférických dvojúhelníků²¹, tedy časových (poledníkových) pásem o šířce 15°. V celém časovém pásmu platí místní střední sluneční čas poledníku, který je středem pásma. Hlavními poledníky byly označeny poledníky 0°, 15°, 30° až 180°. Greenwichský poledník se stal středním poledníkem základního časového pásma. V praxi to tedy znamená, že každých 15° je časový rozdíl jedné hodiny. Časová pásma mají označení -12, -11, -10, ..., 0, ..., +10, +11, +12 a zároveň hodinový rozdíl od základního pásma. Každé pásmo se rozkládá 7,5° na východ a 7,5° na západ od středního poledníku každého pásma. V pásmu, jehož středním poledníkem je

²¹ Sférický dvojúhelník je část kulové plochy ohraničená dvěma hlavními polokružnicemi.

Greenwichský poledník, platí tzv. světový čas UT (Universal Time). UTC (Universal Time Coordinated) koordinovaný světový čas definován na základě mezinárodního atomového času upravován v pravidelných intervalech skokem o 1 sekundu tak, aby se od času UT1 nelišil o více než 0,7 sekundy. Pásmový čas UTC+1 se řídí podle 15. poledníku východně od Greenwiche a nazývá se středoevropský čas (SEČ). Tímto časem se řídí všechna místa v tomto pásmu včetně České republiky.

Velké světové státy jako USA nebo Rusko využívají několika časových pásem (pevninské USA – 5 časových pásem, celkem 9 časových pásem, Rusko – 11 časových pásem). Některé státy se neřídí pásmovým časem, nýbrž časem jiného poledníku procházejícího jejich územím. Smluvený čas je většinou čas sousedního východního pásma, jehož typickým příkladem je zavádění letního času (SELČ) v některých evropských zemích.

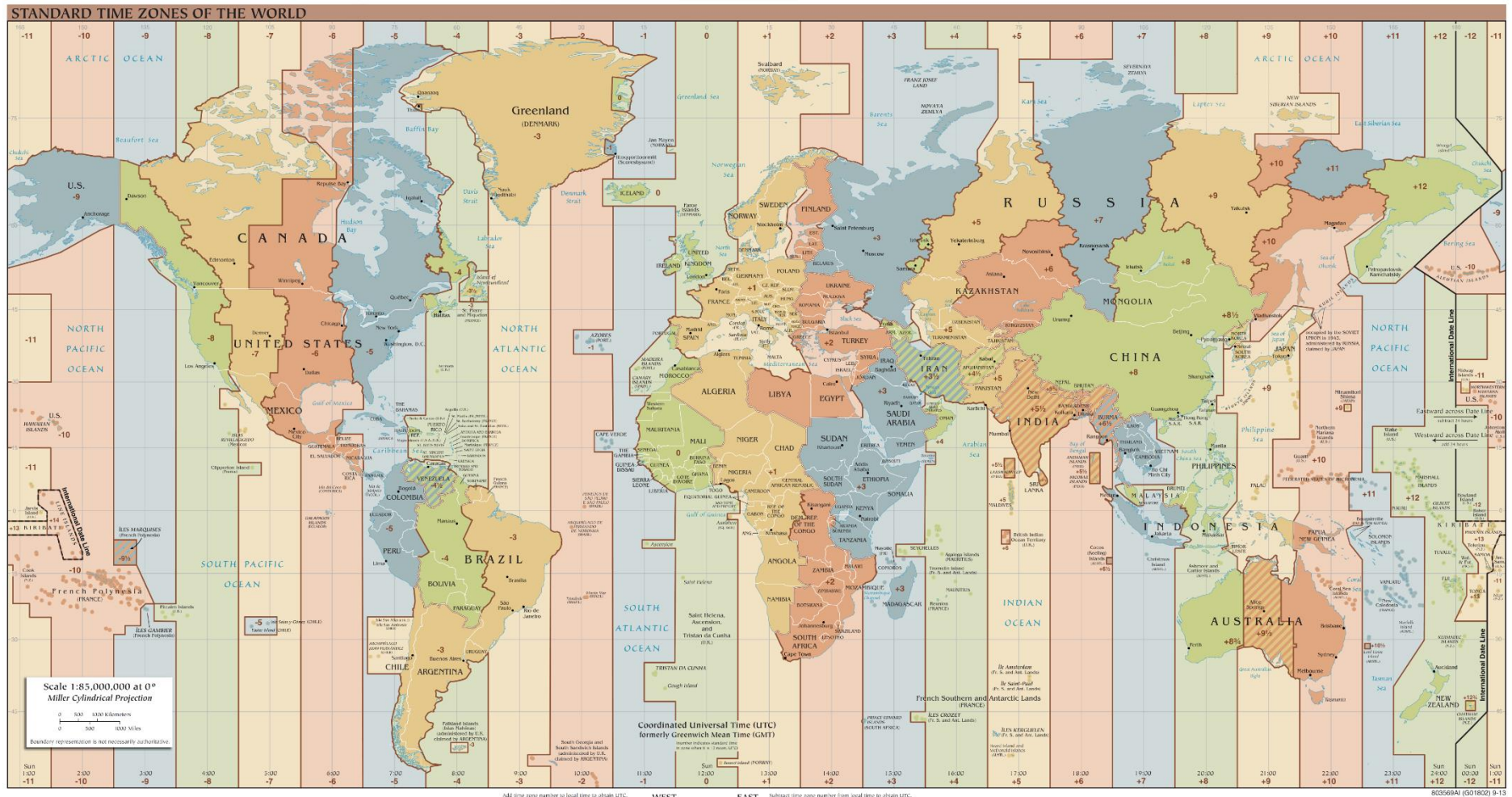
Datová hranice (datová mez) je mezinárodní stanovená hranice, při jejímž překročení je třeba změnit datum. Probíhá přibližně podél 180. poledníku s nejrůznějšími odchylkami na mí-stech, kde datová hranice protíná pevninu. Při cestě východním směrem (od Asie do Ameriky) budeme o den vpředu, při cestě západním směrem (od Ameriky do Asie) budeme o den pozadu.



Obrázek 36 Mezinárodní datová hranice (WIKIPEDIA: the free encyclopedia, 2016, online)

Tabulka 2 Vztah mezi zeměpisnou délkou a místním časem (JUREK, 2009, s. 1)

Údaj v úhlové míře	Údaj v čase
360°	24 hodin
15°	1 hodina
1°	4 minuty
1'	4 sekundy



Obrázek 37 Mapa časových pásem (Handshake, 2016, online)

Příklad:

Vypočítejte rozdíl místních časů a teoretický rozdíl pásmových časů mezi Qitem ($\varphi_Q = 0^\circ 13' \text{ j. š.}$, $\lambda_Q = 78^\circ 30' \text{ z. d.}$) a Stockholmem ($\varphi_S = 59^\circ 29' \text{ s. š.}$, $\lambda_S = 18^\circ 7' \text{ v. d.}$). Výsledek teoretického rozdílu pásmových časů porovnejte se skutečným rozdílem pásmových časů pro daná místa (k porovnání využijte mapu času pásem).

Řešení:

Nejprve vypočítáme rozdíl místních časů mezi Qitem a Stockholmem:

$$\Delta\lambda = \lambda_S - \lambda_Q = +18^\circ 7' - (-78^\circ 30') = 96^\circ 37',$$

poté převedeme údaje v úhlové míře na údaje časové:

$$\Delta\lambda = 96^\circ 37' \sim \Delta t = 96^\circ \cdot 4[\text{min}/^\circ] + 37 \cdot 4[\text{sek}'] = 384^{\text{min}} 148^{\text{s}} = 6^{\text{h}} 26^{\text{min}} 28^{\text{s}}.$$

Dále máme vypočítat rozdíl pásmových časů mezi Qitem a Stockholmem, nejprve si však určíme, ke kterému středovému poledníku tato města náleží:

$$\lambda_Q = -78^\circ 30' \rightarrow \lambda_{pQ} = -75^\circ$$

$$\lambda_S = +18^\circ 7' \rightarrow \lambda_{pS} = +15^\circ,$$

teď určíme rozdíl zeměpisných délek příslušných středových poledníků a následně převedeme na časový údaj:

$$\Delta\lambda_p = \lambda_{pS} - \lambda_{pQ} = +15^\circ - (-75^\circ) = 90^\circ \sim \Delta t = 90^\circ \cdot 4[\text{min}/^\circ] = 360^{\text{min}} = 6^{\text{h}}.$$

Závěr:

Quito používá pásmový čas UTC-5, Stockholm používá pásmový čas UTC+1, skutečný rozdíl pásmových časů je proto 6 hodin, který se shoduje s teoretickým časem.

Příklad:

Vypočítejte, v kolik hodin vyjde Slunce v nejzápadnějším místě České republiky (Krásná – $\varphi_K = 50^\circ 15' \text{ s. š.}$, $\lambda_K = 12^\circ 5' \text{ v. d.}$), jestliže v nejvýchodnějším místě České republiky (Bukovec – $\varphi_B = 49^\circ 33' \text{ s. š.}$, $\lambda_B = 18^\circ 51' \text{ v. d.}$) vyjde Slunce v 4:42:00 hod.

Řešení:

Toto je úloha, ve které musíme určit rozdíl místních časů mezi dvěma místy v České republice, proto nejprve určíme rozdíl zeměpisných délek obou míst:

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_K = 18^\circ 51' - 12^\circ 5' = 6^\circ 46',$$

budeme pokračovat tím, že údaje v úhlové míře převedeme na časový údaj:

$$\Delta\lambda = 6^\circ 46' \sim \Delta t = 6^\circ \cdot 4[\text{min}/^\circ] + 46 \cdot 4[\text{sek}'] = 24^{\text{min}} 184^{\text{s}} = 27^{\text{min}} 4^{\text{s}}.$$

Na konec musíme určit, kolik hodin bude v Krásné:

$$t_K = t_B + \Delta t = 4^{\text{h}} 42^{\text{min}} + 27^{\text{min}} 4^{\text{s}} = 5^{\text{h}} 9^{\text{min}} 4^{\text{s}}.$$

Závěr:

Slunce v nejzápadnějším místě České republiky, v obci Krásná, vyjde v 5:09:04 místního času.

Příklad:

V pátek dopoledne v 10:00 hodin se rozhodnete zavolat svému kamarádovi, který je dovolené na Havajských ostrovech. Určete, jaký bude na Havajských ostrovech den a kolik bude hodin (k řešení využij mapu časových pásem).

Řešení:

Pomocí mapy časových pásem zjistíme, že Česká republika patří do časového pásma UTC+1 a Havajské ostrovy do časového pásma UTC-10. To znamená pásmový rozdíl 11 časových pásem odpovídajících 11 hodinám. Jelikož Havajské ostrovy leží západně od Greenwiche, proto čas odečítáme a dostáváme se přes půlnoc a mění se den z pátku na čtvrtek, 23:00 místního času.

Závěr:

Na Havajských ostrovech bude čtvrtek a hodiny budou ukazovat 23:00 místního času.

7 PRÁCE S DATY

Matematika se v posledních letech stala mezi žáky a studenty základních středních škol obávaným předmětem. Statistika a práce s daty patří mezi jedny z nejméně oblíbených součástí matematiky. Práce s daty a statistickými údaji se však často vyskytuje také v hodinách zeměpisu. Znalosti širšího geografického kontextu umožňují žákům a studentům snazší interpretaci dat a statistických údajů.

Hustota zalidnění

Nejčastěji používaným ukazatelem rozmístění obyvatelstva je **hustota zalidnění**. Je to významná strukturní charakteristika území, která poskytuje možnost jak pro prostorové, tak i časové srovnání rozmístění obyvatelstva (MARYÁŠ a VYSTOUPIL, s. 32, 2006, online).

Obecná hustota určuje počet obyvatel připadajících na jednotku plochy, určuje se ze dvou nejčastěji dostupných údajů o každé populaci, z počtu obyvatel O a z plochy území P :

$$h = \frac{O}{P}$$

Příklad:

Určete hustotu zalidnění v České republice při posledních dvou sčítáních lidu, tj. v roce 2001 a v roce 2011.

Řešení:

- a) Počet obyvatel ČR v roce 2001: $O_{2001} = 10\,206\,436$ (ČSÚ, 2001, online)

Rozloha ČR: $P = 78\,866 \text{ km}^2$

$$h_{2001} = \frac{O_{2001}}{P} = \frac{10\,206\,436}{78\,866} \doteq 129 \text{ obyvatel/km}^2.$$

- b) Počet obyvatel ČR v roce 2011: $O_{2011} = 10\,532\,770$ (ČSÚ, 2011, online)

Rozloha ČR: $P = 78\,866 \text{ km}^2$

$$h_{2011} = \frac{O_{2011}}{P} = \frac{10\,532\,770}{78\,866} \doteq 134 \text{ obyvatel/km}^2.$$

Závěr:

Hustota zalidnění v České republice se v letech 2001–2011 zvýšila ze 129 obyvatel/km² na 134 obyvatel/km², čili o 5 obyvatel/km².

Příklad:

Jaká byla v roce 2015 celková hustota obyvatelstva skupiny V4? (V této úloze chápeme území států V4 jako jeden uzemní celek.)

Řešení:

- a) Počet obyvatel České rep.: 10 644 842 (The World Factbook, 2015, online)
Rozloha České republiky: 78 866 km²
- b) Počet obyvatel Polska: 38 562 189 (The World Factbook, 2015, online)
Rozloha Polska: 312 685 km²
- c) Počet obyvatel Maďarska: 9 897 541 (The World Factbook, 2015, online)
Rozloha Maďarska: 93 028 km²
- d) Počet obyvatel Slovenska: 5 445 027 (The World Factbook, 2015, online)
Rozloha Slovenska: 49 035 km²

$$h_{V4} = \frac{O_{CZE} + O_{POL} + O_{HUN} + O_{SVK}}{P_{CZE} + P_{POL} + P_{HUN} + P_{SVK}} = \frac{10\,644\,842 + 38\,562\,189 + 9\,897\,541 + 5\,445\,027}{78\,866 + 312\,685 + 93\,028 + 49\,035}$$
$$h_{V4} = \frac{64\,549\,599}{533\,617} \doteq 121 \text{ obyvatel/km}^2$$

Závěr:

Hustota obyvatelstva v roce 2015 na území V4 byla 121 obyvatel/km².

7.1 Demografické výpočty

Demografie (démós – lid, graféin – psát, popisovat) je věda, která studuje proces reprodukce lidských populací. Objektem studia demografie je výzkum reprodukce lidských populací, čili se zabývá demografické procesy probíhající na obyvatelstvu. Demografickými procesy jsou např. úmrtnost, porodnost, úhrnná plodnost, potratovost, přirozený přírůstek, sňatečnost, rozvodovost, migrace a další.

Základním zdrojem demografických dat v České republice je Český statistický úřad. Vydává různé ročenky (České republiky, krajů, tematické ročenky, životního prostředí, demografie), řadu různě zaměřených statistických publikací (NOVOTNÁ a kol., 2014, s. 21)

Úmrtnost

Úmrtnost neboli mortalita je demografický proces, jehož základním ukazatelem je hrubá míra úmrtnosti, která vyjadřuje počet zemřelých na 1 000 obyvatel. Vypočítá se tedy podle vztahu:

$$hmú = \frac{M}{S} \cdot 1\,000,$$

kde M je počet zemřelých na daném území a S je střední stav obyvatelstva ve sledovaném období (střední stav obyvatelstva se nejčastěji počítá jako aritmetický průměr počtu obyvatel na začátku a na konci sledovaného období v sledovaném regionu).

Příklad:

Vypočítejte hrubou míru úmrtnosti v České republice za rok 2014.

Řešení:

$$hmú_{2014} = \frac{105\,665}{10\,524\,783} \cdot 1\,000 = 10,04 \text{ ‰}$$

Závěr:

Hrubá míra úmrtnosti v České republice měla v roce 2014 hodnotu 10,04 ‰.

Porodnost

Porodnost neboli natalita je demografický proces, jehož základním ukazatelem je hrubá míra celkové porodnosti, která vyjadřuje počet narozených na 1 000 obyvatel. Vypočítá se tedy podle vztahu:

$$hmp = \frac{N}{S} \cdot 1\,000,$$

kde N je počet zemřelých na daném území a S je střední stav obyvatelstva ve sledovaném období.

Příklad:

Určete hodnotu hrubé míry porodnosti v Olomouckém kraji za rok 2010.

Řešení:

$$hmp_{2010} = \frac{6\,922}{641\,661} \cdot 1\,000 = 10,79 \text{ ‰}$$

Závěr:

V roce 2010 byla hrubá míra porodnosti v Olomouckém kraji 10,79 ‰.

Potratovost

Potratovost je demografický proces vztahující se k základním procesům lidské reprodukce – k porodnosti i úmrtnosti. Základním ukazatelem je hrubá míra potratovosti určená vztahem:

$$hmpo = \frac{A}{S} \cdot 1\,000,$$

kde A je počet potratů a S je střední stav obyvatelstva ve sledovaném období.

Příklad:

Vypočítejte hrubou míru potratovosti v okrese Prostějov za rok 2011 a 2013.

Řešení:

a) Počet potratů v okrese Prostějov v roce 2011: 329

Střední stav obyvatelstva okresu Prostějov v roce 2011: 109 606

$$hmpo_{2011} = \frac{329}{109\,606} \cdot 1\,000 = 3 \text{ ‰.}$$

b) Počet potratů v okrese Prostějov v roce 2013: 367

Střední stav obyvatelstva okresu Prostějov v roce 2013: 109 306

$$hmpo_{2013} = \frac{367}{109\,306} \cdot 1\,000 = 3,36 \text{ ‰.}$$

Závěr:

Hrubá míra potratovosti dosahovala v okrese Prostějov hodnoty 3 ‰ v roce 2011 a hodnoty 3,36 ‰ v roce 2013.

Sňatečnost

„Sňatečnost je společenský jev, který sám o sobě není přímou součástí produkčního procesu. Podmiňuje však do značné míry porodnost, proto se řadí k jevům přirozené reprodukce (HALÁS a kol., 2012, s. 41).“ Základním ukazatelem sňatečnosti je hrubá míra sňatečnosti určená vztahem:

$$hms = \frac{Sn}{S} \cdot 1\,000,$$

kde Sn je počet uskutečněných sňatků a S je střední stav obyvatelstva ve sledovaném období.

Příklad:

Vytvořte graf zobrazující hodnoty hrubé míry sňatečnosti v České republice a v jednotlivých krajích za rok 2014.

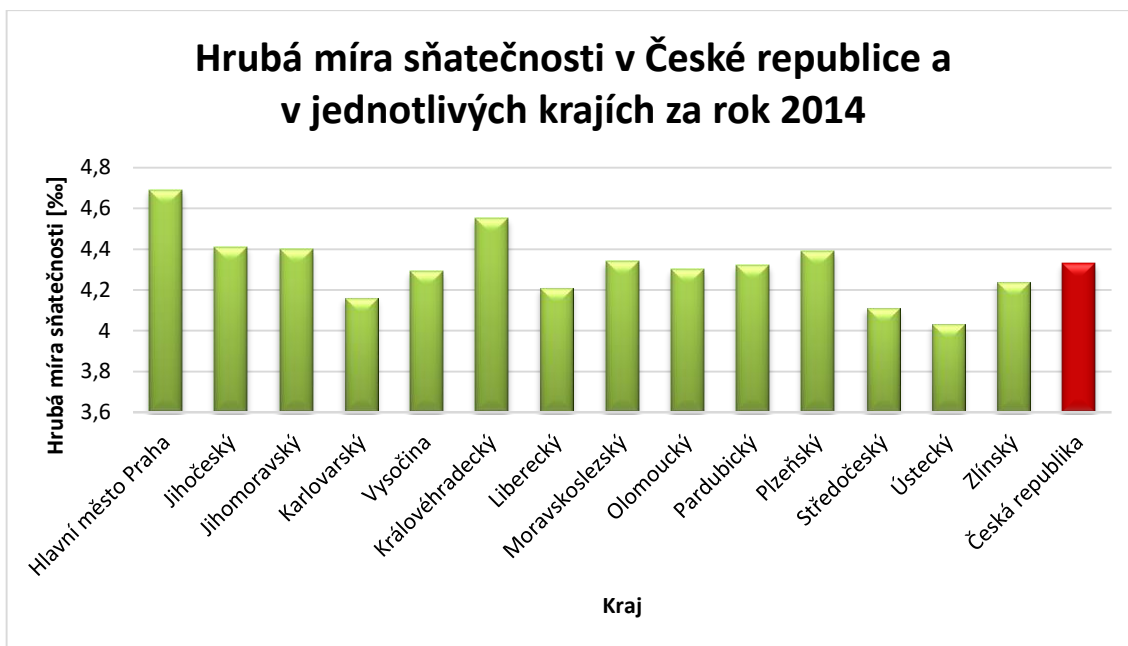
Řešení:

Nejprve vyhledáme potřebná data o počtu sňatků v České republice ve veřejné databázi Českého statistického úřadu a potom vypočítáme hrubou míru sňatečnosti z následujícího vztahu a sestavíme graf:

$$hms = \frac{Sn}{S} \cdot 1\,000,$$

Tabulka 3 Střední stav obyvatelstva, počet sňatků, hrubá míra sňatečnosti (Český statistický úřad, 2014, online)

Kraj	Střední stav obyvatelstva	Počet sňatků	Hrubá míra sňatečnosti [‰]
Hlavní město Praha	1 251 075	5 862	4,69
Jihočeský	636 911	2 806	4,41
Jihomoravský	1 170 678	5 153	4,40
Karlovarský	299 880	1 249	4,16
Vysočina	510 006	2 188	4,29
Královéhradecký	551 730	2 508	4,55
Liberecký	438 813	1 849	4,21
Moravskoslezský	1 219 722	5 289	4,34
Olomoucký	636 109	2 737	4,30
Pardubický	516 109	2 232	4,32
Plzeňský	573 993	2 519	4,39
Středočeský	1 309 139	5 376	4,11
Ústecký	824 789	3 325	4,03
Zlínský	585 829	2 482	4,24
Česká republika	10 524 783	45 575	4,33



Graf 1 Hrubá míra v České republice a v jednotlivých krajích za rok 2014

Závěr:

Z grafu je patrné, že hodnoty hrubé míry sňatečnosti v jednotlivých krajích České republiky se pohybují mezi 4,03 a 4,69. Hrubá míra sňatečnosti České republiky za rok 2014 byla 4,33, nejvyšší hodnota byla v Hlavním městě Praha a nejnižší hodnota v Ústeckém kraji.

Rozvodovost

„**Rozvodem** nazýváme právní (zákonné) zrušení manželství. Rozvodovost má výrazně negativní vliv na reprodukci obyvatelstva a rovněž působí negativně na výchovu dětí (HALÁS a kol. 2012, s. 42).“ Ukazatelem rozvodovosti je hrubá míra rozvodovosti určená vztahem:

$$hmro = \frac{R}{S} \cdot 1\,000,$$

kde R je počet rozvodů a S je střední stav obyvatelstva ve sledovaném období.

Příklad:

Vypočítejte a porovnejte hodnoty hrubé míry rozvodovosti v Hlavním městě Praha a v Jihomoravském kraji za rok 2012.

Řešení:

- a) Počet rozvodů v Hlavním městě Praha v roce 2012: 329

Střední stav obyvatelstva Hlavního města Prahy v roce 2012: 1 096 006

$$hmro_{HMP(2012)} = \frac{2\,788}{1\,243\,695} \cdot 1\,000 = 2,24 \text{ ‰}$$

- b) Počet rozvodů v Jihomoravském kraji v roce 2012: 329

Střední stav obyvatelstva Jihomoravského kraje v roce 2012: 1 167 142

$$hmro_{JK(2012)} = \frac{3\,673}{1\,167\,142} \cdot 1\,000 = 3,15 \text{ ‰}$$

Závěr:

Hrubá míra rozvodovosti za rok 2012, byla vyšší v Jihomoravském kraji než v Hlavním městě Praha a to o necelé jedno promile.

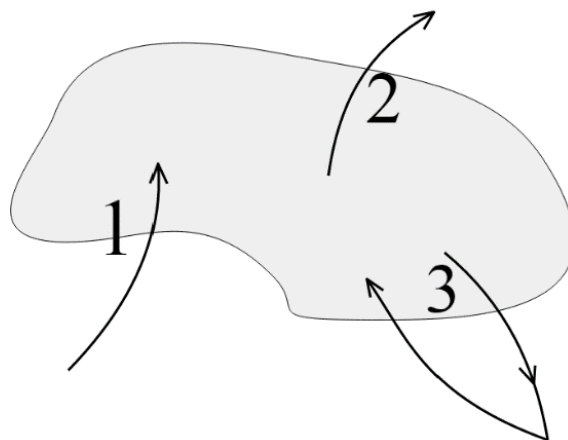
Migrace

Migrace je pohyb obyvatelstva z jedné oblasti do druhé s úmyslem se v nové oblasti dočasně či trvale usadit. Migrační pohyby se vždy vztahují k určitým oblastem. Podle orientace migračních pohybů rozlišujeme imigrace, emigraci a reemigraci.

Imigrace je změna místa pobytu směrem na území jiného než domovského státu, imigrace je procesem, při němž se na území států usídlují cizinci.

Emigrace je změna místa pobytu směrem z území domovského státu, emigrace je procesem, při němž obyvatelé opouštějí své domovské státy s cílem usídlit se v zahraničí.

Reemigrace je stav, kdy nejprve dojde k emigraci a posléze k návratu obyvatelstva na území státu, které opustilo.



Obrázek 38 Migrační pohyby, 1 – imigrace, 2 – emigrace, 3 – reemigrace

(WIKIPEDIA: the free encyclopedia, 2016, online)

Typickým demografickým ukazatelem migrace je tzv. **migrační saldo**, které vyjadřuje rozdíl mezi počtem přistěhovalých (imigrantů) a počtem vystěhovalých (emigrantů) na určitém území. Migrační saldo lze vypočítat pomocí tohoto vztahu:

$$ms = I - E.$$

Pro porovnatelnost se migrační saldo neuvádí v absolutních číslech, ale v přepočtu na 1 000 obyvatel středního stavu, takže jako hrubá míra migrace. Hrubá míra migrace je dána vztahem:

$$hmm = \frac{I - E}{S} \cdot 1\,000.$$

Příklad:

Vytvořte tabulku s hodnotami hrubé míry migrace a sestrojte graf vývoje hrubé míry migrace v České republice za období 2004–2014.

Řešení:

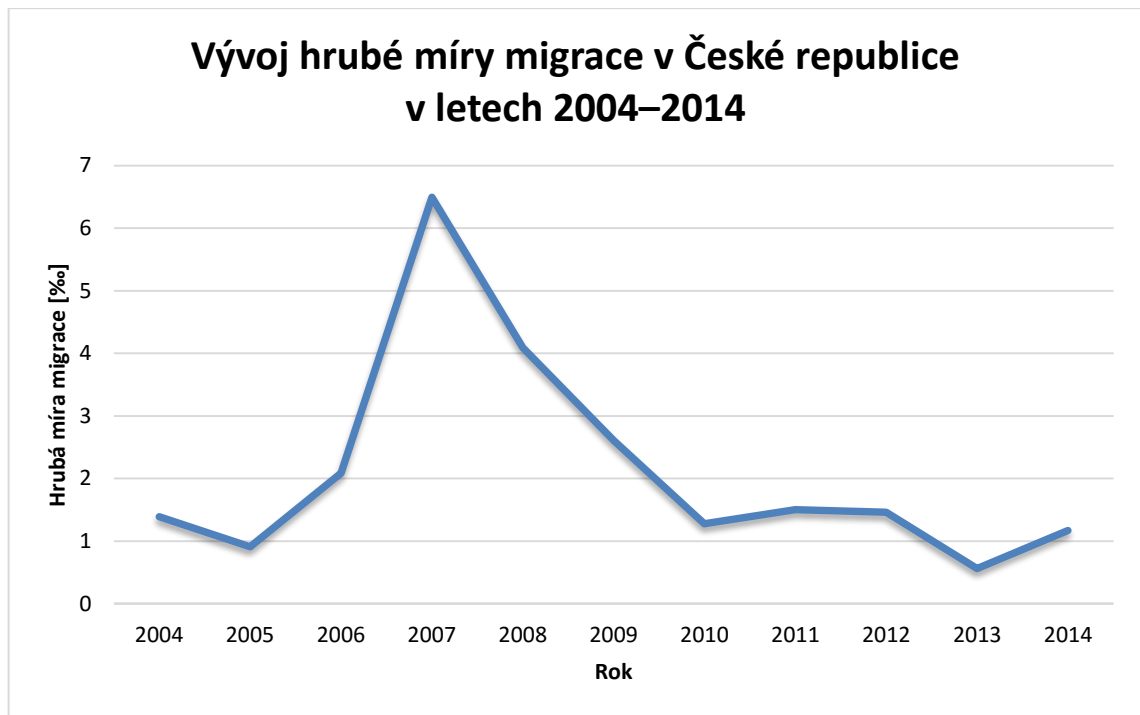
K sestavení tabulky využijeme statistická data o přistěhovalých a vystěhovalých osobách na stránkách Českého statistického úřadu. Hrubou míru migrace vypočítáme z již známého vztahu:

$$hmm = \frac{I - E}{S} \cdot 1\,000.$$

Tabulka 4 Počet vystěhovalých, přistěhovalých osob a hrubá míra migrace v letech 2004–2014 (Český statistický úřad, 2014, online)

Rok	Střední stav obyvatelstva	Počet přistěhovalých osob	Počet vystěhovalých osob	Hrubá míra migrace [%]
2004	10 206 923	10 687	9 124	1,39
2005	10 234 092	9 494	8 466	0,91
2006	10 266 646	10 217	7 857	2,09
2007	10 322 689	16 883	9 509	6,50
2008	10 429 692	12 327	7 649	4,09
2009	10 491 492	10 392	7 394	2,61
2010	10 517 247	9 503	8 031	1,28
2011	10 496 672	8 658	6 910	1,50
2012	10 509 286	9 472	7 765	1,46
2013	10 510 719	9 308	8 654	0,56
2014	10 524 783	10 050	8 678	1,17

Na základě takto sestavené tabulky můžeme vytvořit graf popisující vývoj hrubé míry migrace v České republice v letech 2004–2014.



Graf 2 Vývoj hrubé míry migrace v České republice v letech 2004–2014

Závěr:

Z grafu jasně vyplývá, že v roce 2007 dosahovala hodnota hrubé míry migrace vysoké hodnoty vlivem silné imigrace do České republiky. V dalších letech tato hodnota klesala k průměrné hodnotě pohybující se mezi 1–2 %.

7.2 Hydrologické výpočty

Délka vodního toku (L)

Délka vodního toku se obvykle uvádí v kilometrech a jedná se o délku střednice půdorysného obrazu koryta vodního toku. Délka vodního toku se v čase mění v souvislosti s vývojem koryta, případně regulačními úpravami (HYDRO.upol.cz, 2009, online).

Plocha povodí (S_p)

Plocha povodí je plocha půdorysného průmětu povodí do vodorovné roviny (Ředinová aj., 2009, s. 11).

Povodí je území, ze kterého je veškerá voda odváděna do jedné řeky. Uvádí se v km^2 .

Spád vodního toku (ΔH)

Spád vodního toku je charakteristickým prvkem vodního toku, který udává výšková rozdíl mezi nejvyšším a nejnižším bodem vodního toku, čili mezi pramenem vodního toku a jeho ústím. Spád vodního toku se nejčastěji vyjadřuje v metrech.

Pramen vodního toku je místo na zemském povrchu, kde dochází k přirozenému a soustředěnému vývěru podzemní vody na zemský povrch.

Ústí je část vodního toku, kde se vodní tok vlévá do vodního toku vyššího řádu či do vodní nádrže, moře nebo oceánu.

Pro výpočet spádu vodního toku se využívá následující vztah:

$$\Delta H = H_2 - H_1,$$

kde H_1 je nadmořská výška ústí a H_2 nadmořská výška pramene vodního toku (nebo soutoku vodních toků).

Příklad:

Vypočítejte nadmořskou výšku pramene řeky Moravy, jestliže od pramene po místo, kde se řeka Morava vlévá do Dunaje nedaleko zříceniny slovenského hradu Děvín, je spád řeky 1 246 m.

Řešení:

Nadmořská výška ústí řeky Moravy: 134 m n. m.

Spád řeky Moravy: 1 246 m.

$$\Delta H = H_2 - H_1$$

$$H_2 = \Delta H + H_1 = 1\,246 + 134 = 1\,380 \text{ m n. m.}$$

Závěr:

Pramen řeky Moravy se nachází na úpatí Králického Sněžníku v katastrálním území obce Dolní Morava v nadmořské výšce 1 380 m n. m.

Sklon vodního toku (I)

Sklon vodního toku je veličina, jež nám vyjadřuje poměr spádu vodního toku k délce sledovaného území. Čím větší výškový rozdíl mezi pramenem a ústím musí vodní tok překonat, tím větší bude hodnota jeho sklonu. S rostoucí délkou vodního toku se však snižuje. Sklon vodního toku vyjadřujeme v procentech nebo v promilích.

Pro výpočet sklonu vodního toku se využívá následující vztah:

$$I = \frac{\Delta H}{L} \cdot 100 \text{ nebo } I = \frac{\Delta H}{L} \cdot 1\,000,$$

kde ΔH je spád vodního toku a L je délka vodního toku.

Příklad:

Vypočítejte sklon řeky Berounky po soutoku Mže a Radbuzy v Plzni, v nadmořské výšce 299 m n. m., po soutok s řekou Vltavou nedaleko Modřan u Prahy v nadmořské výšce 188 m n. m., jestliže její délka činí 139 km.

Řešení:

Nejprve si vypočítáme spád řeky Berounky na daném území:

$$\Delta H = H_2 - H_1 = 299 - 188 = 111 \text{ m.}$$

Ted' když známe spád řeky Berounky na daném, využijeme vzorce pro výpočet sklonu vodního toku a určíme její sklon:

$$I = \frac{\Delta H}{L} \cdot 100 = \frac{111}{139\,000} \cdot 100 \doteq 0,799 \% \text{ nebo } I = \frac{\Delta H}{L} \cdot 100 = \frac{111}{139\,000} \cdot 1000 \doteq 0,079 \text{ ‰.}$$

Závěr:

Spád řeky Berounky od soutoku řek Mže a Radbuzy po ústí do řeky Vltavy je 0,799 % nebo 0,079 ‰.

Průtok vodního toku (Q)

Průtok vodního toku udává množství (objem) vody, která proteče průtočným profilem vodního toku za jednotku času. Průtok vodního toku vyjadřujeme v $m^3 \cdot s^{-1}$ nebo v $l \cdot s^{-1}$.

Průtočný profil vodního toku je část příčného řezu korytem vodního toku, kterým protéká voda.

Způsob výpočtu průtoku vodního toku je upraven pomocí tohoto vztahu:

$$Q = v \cdot S,$$

kde v je průměrná rychlost proudění vodního toku a S je obsah průtočného profilu vodního toku.

Příklad:

Určete šířku koryta řeky u hladiny ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku, jestliže výška hladiny dosahuje 240 cm, průtok je $450 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, rychlost toku je $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a šířka koryta řeky u dna je 55 m.

Řešení:

Nejprve budeme muset upravit vztah pro výpočet průtoku vodního toku:

$$Q = v \cdot S,$$

jelikož koryto vodního toku má tvar rovnoramenného lichoběžníku, dosadí za S vztah pro výpočet obsahu rovnoramenného lichoběžníku:

$$Q = v \cdot \frac{(a + c) \cdot h}{2},$$

z této rovnice si vyjádříme a :

$$a = \frac{2Q}{vh} - c,$$

do následujícího vztahu již můžeme dosadit hodnoty ze zadání a příklad dořešit.

$$a = \frac{2 \cdot 450}{3 \cdot 2,4} - 55 = 70 \text{ m}.$$

Závěr:

Šířka koryta řeky je u vodní hladiny 70 m.

Hustota říční sítě (r)

Hustota říční sítě udává, celkovou délku vodních toků na jednotku plochy zvoleného území, většinou povodí (Pavelková Chmelová, Frajer, 2012, s. 27). Hustota říční sítě se vyjadřuje v $\text{km} \cdot \text{km}^{-2}$.

Vzorec pro výpočet hustoty říční sítě:

$$r = \frac{\sum L}{P},$$

kde $\sum L$ je součet délek všech vodních toků a P je plocha povodí.

Pokud bychom chtěli využít slovní formulace pro slovní označení hustoty říční sítě, můžeme využít následující tabulky:

Tabulka 5 Označení hustoty říční sítě (Pavelková Chmelová, Frajer, 2012, s. 28, online)

Hustota říční sítě r (km/km ²)	Slovní označení hustoty říční sítě
menší než 0,3	velmi nízká
0,31 – 0,5	nízká
0,51 – 0,7	střední
0,71 – 1,1	vysoká
větší než 1,1	velmi vysoká

Příklad:

Vypočítejte hustotu říční sítě vodního toku, pokud plocha zájmového území má tvar obdélníka o rozměrech 20 m a 40 m. Délky jednotlivých toků jsou 18 km, 53 km, 37 km, 68 km, a 25 km. Na závěr ohodnoťte výsledek slovně.

Řešení:

Tento příklad vyřešíme pomocí vzorce pro výpočet hustoty říční sítě, nejprve potřebujeme určit celkovou délku všech vodních toků na zájmovém území a dále potom plochu povodí.

Součet délek všech vodních toků:

$$\sum L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = 18 + 53 + 37 + 68 + 24 = 200 \text{ km},$$

plocha povodí:

$$P = a \cdot b = 20 \cdot 40 = 800 \text{ km}^2,$$

hustota říční sítě:

$$r = \frac{\sum L}{P} = \frac{200}{800} = 0,25 \text{ km} \cdot \text{km}^{-2}.$$

Závěr:

Hustota říční sítě vodního toků na daném zájmovém území činí 0,25 km · km⁻², což značí velmi nízkou hustotu říční sítě.

Specifický odtok (q)

Specifický odtok udává množství vody odtékající za jednotku času z jednotky plochy povodí. Hodnota specifického odtoku bývá ovlivněna jednak srážkami a jednak geologicko-geomorfologickými podmínkami (ZEMEPIS.COM, 2016, online). Specifický odtok se udává v $l \cdot s^{-1} \cdot \text{km}^2$. Vzorec pro výpočet specifického odtoku:

$$q = \frac{Q}{S_p},$$

kde Q je průtok vodního toku a S_p je plocha povodí.

Příklad:

Vypočítej plochu povodí říčky Hloučely, má-li specifický odtok $4,5 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{km}^2$ a její průměrný průtok pod vodní nádrží Plumlov je $0,58 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení:

Ze vztahu pro výpočet specifického odtoku si vyjádříme plochu povodí S_p :

$$q = \frac{Q}{S_p} \Rightarrow S_p = \frac{Q}{q},$$

do tohoto vztahu dosadíme hodnoty ze zadání a vypočítáme plochu povodí:

$$S_p = \frac{Q}{q} = \frac{580}{4,5} \doteq 129 \text{ km}^2.$$

Závěr:

Říčka Hloučela má plochu povodí o velikosti 129 km^2 .

II. VÝZKUMNÁ ČÁST

8 VÝZKUM

8.1 Předmět výzkumu

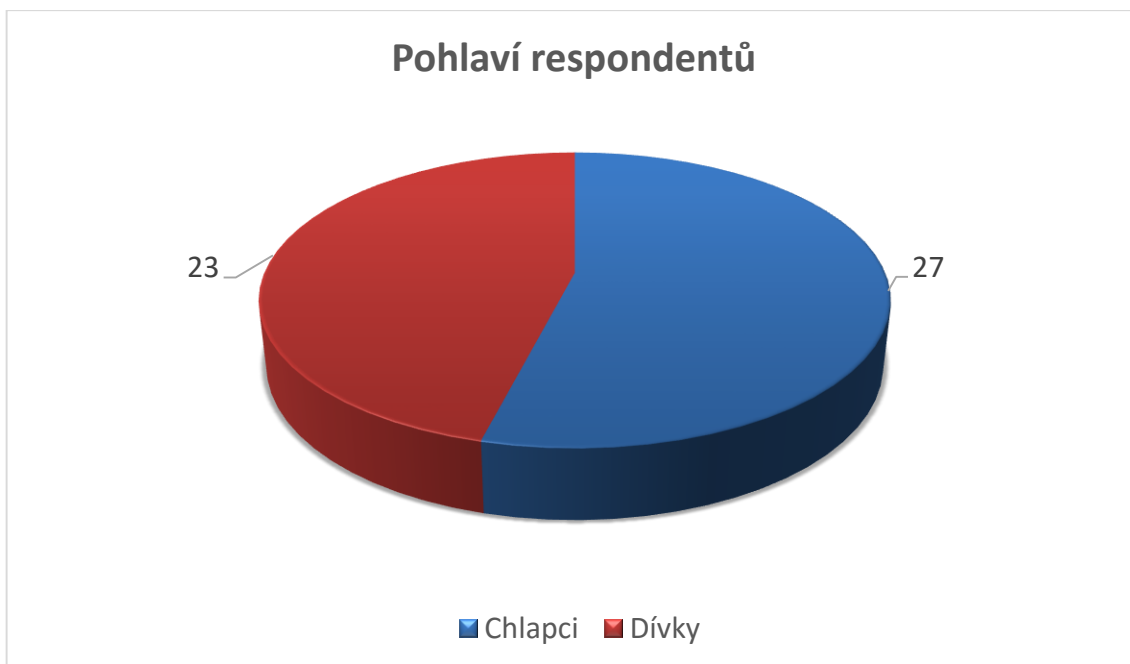
Tato diplomová práce zahrnuje výzkum, který je zaměřený na ověření schopností žáků devátého ročníku základní školy aplikovat svoje matematické znalosti a schopnosti v rámci mezipředmětových vztahů mezi matematikou a zeměpisem. Výzkum matematických znalostí a schopností byl proveden na vzorku 50 respondentů (50 žáků ve dvou 9. ročnících základní školy)

Žáci vypracovali test, který obsahoval 6 úloh matematicko-zeměpisného charakteru, Společně s testem obdrželi krátký dotazník. Na vypracování souboru 6 testových úloh společně s krátkým dotazníkem měli žáci každé třídy 1 vyučovací hodinu čili 45 minut. V dotazníku se nacházeli otázky, pomocí kterých bylo možné charakterizovat jednotlivé žáky. Také měli zhodnotit obtížnost jednotlivých úloh na základě vlastního úsudku. Úlohy byly hodnoceny na základě správného postupu a výsledku.

Hlavními zkoumanými ukazateli byla úspěšnost žáků při řešení jednotlivých úloh a také úspěšnost žáků při řešení úloh v závislosti na poslední obdržené známce z matematiky na pololetním vysvědčení. Dalšími zkoumanými ukazateli byla celková úspěšnost všech žáků při řešení úloh zeměpisného charakteru s výrazným využitím matematických znalostí a schopností. Každá úloha se liší náročností řešení. Úlohy byly voleny každá s jinou obtížností. Součástí průzkumu je výpočet zjišťující, zda úspěšnost při řešení úloh souvisí s pololetní známkou z matematiky.

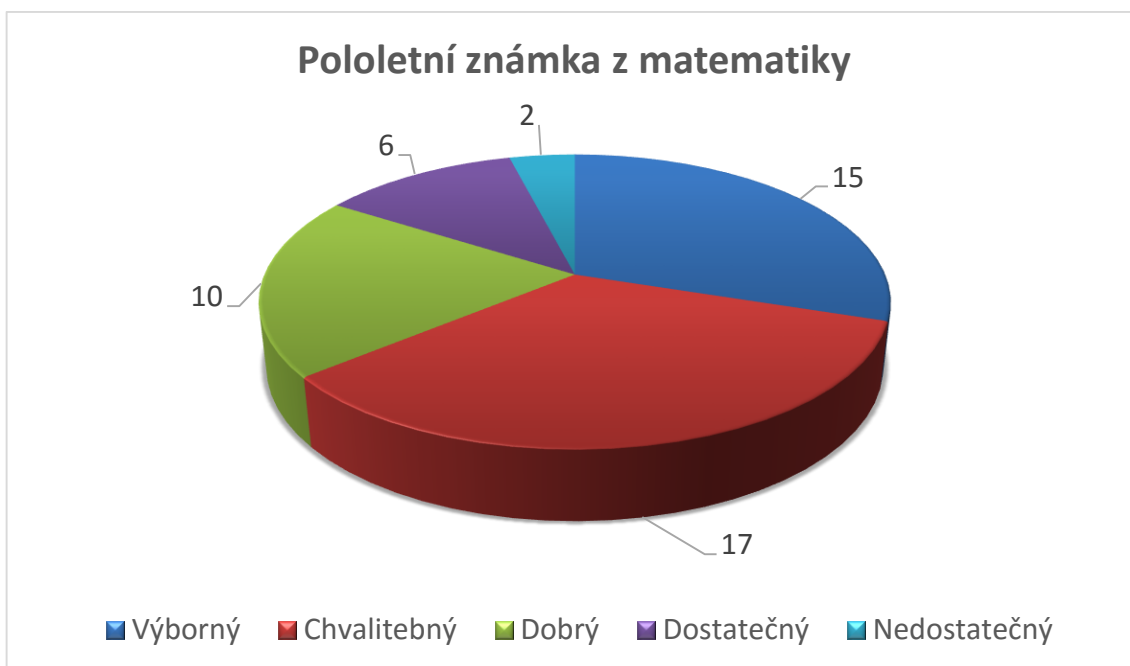
8.2 Vyhodnocení dotazníku

Dotazníkové šetření obsahovalo otázku na pohlaví respondentů, dále otázku na pololetní známku z matematiky na posledním vysvědčení. Zkoumaný vzorek respondentů byl složen z celkem 50 žáků devátého ročníku základní školy, z nichž bylo 27 chlapců a 23 dívek (viz Graf 3).



Graf 3 Pohlaví respondentů

Žáci ze zkoumaného vzorku respondentů uvedli v dotazníku, že v 15 případech obdrželi známku výborný, v 17 případech známku chvalitebný, v 10 případech známku dobrý, v 6 případech známku dostatečný a známku nedostatečnou obdrželi 2 respondenti (viz Graf 4).



Graf 4 Pololetní známka z matematiky na vysvědčení

8.3 Úlohy a úspěšnost žáků při řešení

Tato část obsahuje kompletní zadání jednotlivých testových úloh, které byly předloženy žákům devátých tříd k vypracování. Také obsahuje vzorová řešení jednotlivých úloh, včetně komentáře. Pod každou úlohou jsou zpracované grafy týkající se celkové úspěšnosti při řešení úlohy a také úspěšnost řešitelů v závislosti na jejich pololetní známce z matematiky.

Úloha č. 1:

Quito, hlavní město Ekvádoru a Kampala, hlavní město Ugandy, leží na rovníku. Zeměpisná délka Quita je 79° z. d., zeměpisná délka Kampaly je 33° v. d. Jaká je vzdálenost těchto měst (měřeno vzdušnou čarou po rovníku)? Dolož výpočtem.

Řešení:

Při řešení této úlohy je třeba využít zeměpisné znalosti orientace na Zemi a matematickou znalost pro výpočet obvodu kruhu. Poté je třeba propojit vzájemně zeměpisné a matematické úvahy a určit vztah mezi zeměpisnou délkou a vzdáleností.

Nejprve určíme rozdíl zeměpisných délek mezi oběma městy:

$$\Delta\lambda = \lambda_K - \lambda_Q = 33^\circ - (-79^\circ) = 112^\circ.$$

Jelikož obě města leží na rovníku, tak vypočítáme jeho délku pomocí vzorce pro výpočet obvodu kruhu:

$$o_R = 2\pi r_Z = 2 \cdot \pi \cdot 6\,371,1 \doteq 40\,031 \text{ km.}$$

Když už známe délku rovníku, můžeme určit, jaké vzdálenosti odpovídá 1° zeměpisné délky:

$$1^\circ \sim \frac{o_R}{360^\circ} = \frac{40\,031}{360^\circ} \doteq 111 \text{ km.}$$

Výslednou vzdálenost mezi Quitem a Kampalou vypočítáme takto:

$$d = 112 \cdot 111 = 12\,432 \text{ km.}$$

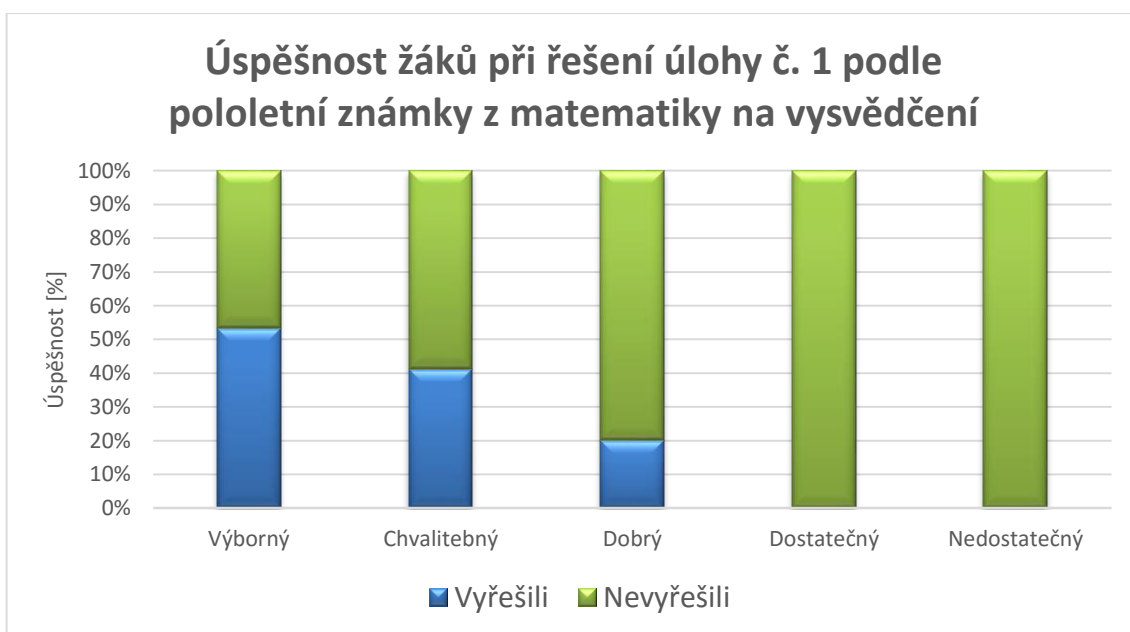
V tomto příkladu byla hodnocena zejména správnost postupů a řešení a ne pouze správný výsledek. Úspěšnost žáků při jeho řešení je znázorněna v Grafu 5.



Graf 5 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 1

Z Grafu 5 je jasně viditelné, že úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 1 nebyla příliš velká. Úlohu vyřešila pouhá třetina z celkového počtu 50 respondentů. Převážná většina respondentů tuto úlohu vůbec nevyřešila. Z těch co ji vyřešili, byl větší počet těch, co ji vyřešili, ale nesprávně. Tato úloha byla žáky hodnocena jako vůbec nejtěžší ze všech předložených úloh.

Graf 6 uvádí úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 1 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení.



Graf 6 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 1 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení

Z Grafu 6 je jasné patrné, že žáci s lepšími známkami řešili úlohu č. 1 z daleko vyšší úspěšností než žáci s horší známkou. Úloha č. 1 byla výrazněji matematicky postavená a zahrnovala využití znalostí úhlů a obvodu kruhu.

Úloha č. 2:

Která významná rovnoběžka má délku 36 710 km. Dolož výpočtem.

Řešení:

Řešení úlohy č. 2 je založené na dosazení do vzorce pro výpočet délky rovnoběžky, který měli žáci k dispozici přímo v zadání a následné upravení rovnice společně s vyjádřením úhlu. Na závěr využijeme znalosti ze zeměpisu o zeměpisných šířkách významných rovnoběžek.

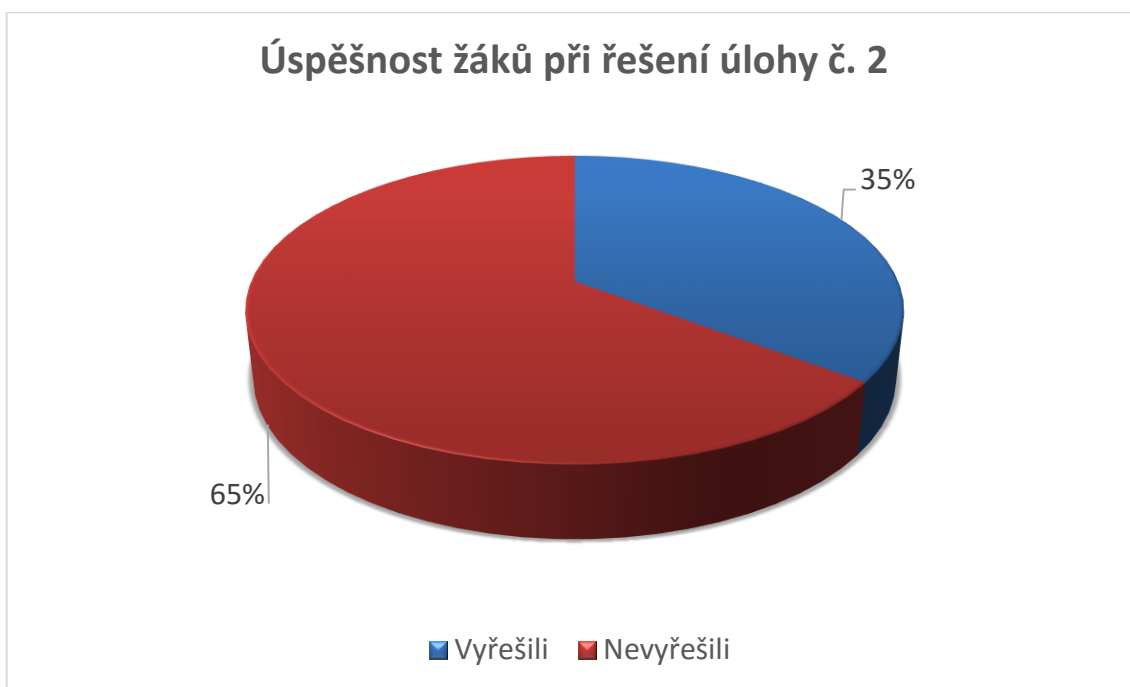
Do vzorce pro výpočet délky rovnoběžky dosadíme známé hodnoty, rovnici upravíme a pokusíme se vyjádřit úhel φ :

$$\begin{aligned}l &= 2\pi r_z \cdot \cos \varphi \\ \cos \varphi &= \frac{l}{2\pi r_z} \\ \cos \varphi &= \frac{36\,711}{2 \cdot \pi \cdot 6\,371,1} \\ \cos \varphi &= 0,917 \\ \varphi &\doteq 23^\circ 30' .\end{aligned}$$

Úhel $\varphi \doteq 23^\circ 30'$ nám určuje, že se jedná o jeden ze zemských obratníků. Vzhledem k tomu, že žáci měli na výběr pouze obratník Raka, proto správnou odpovědí nemohl být obratník Kozoroha.

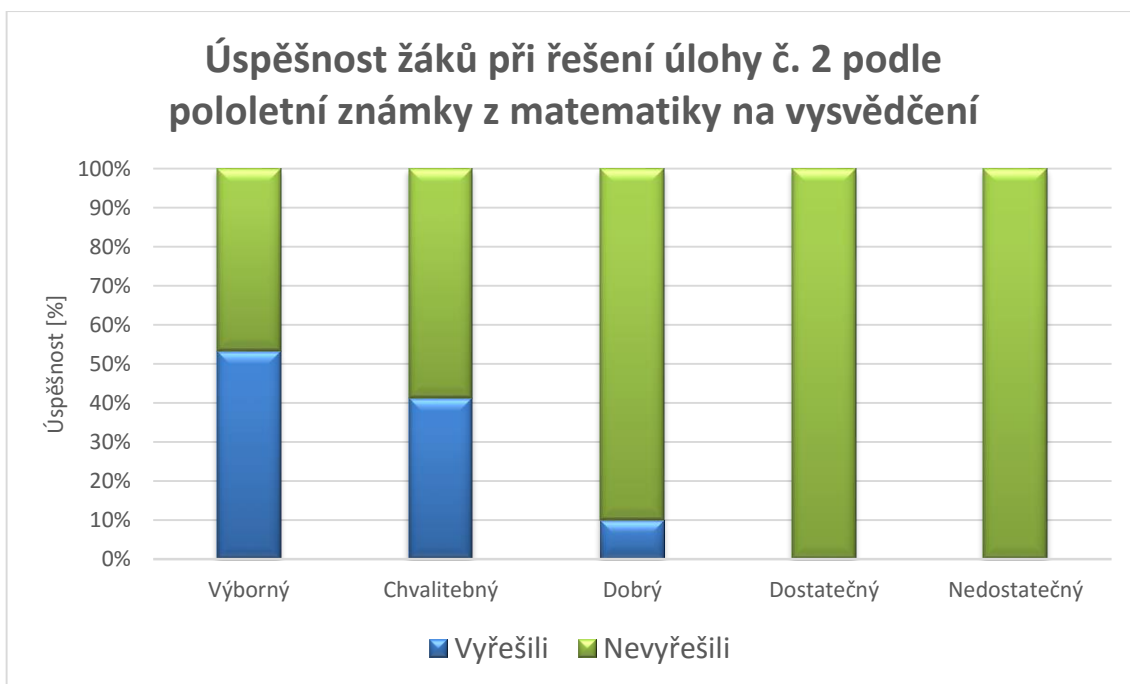
Úloha č. 2 vyžadovala při jejím řešení využití předloženého vzorce pro výpočet délky rovnoběžky. Žáci museli v podstatě pouze dosadit do předloženého vzorce a následně upravit vzniklou rovnici tak, aby vyjádřili kosinus úhlu. Největším problémem bylo z kosinu vyjádřit hledaný úhel.

Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 2 znázorňuje Graf 7.



Graf 7 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 2

Z Grafu 7 je patrné, že úloha by se úspěšností při řešení dala srovnat s úlohou č. 1. Úlohu dokázalo vyřešit pouhých 35 % žáků. Většina žáků vůbec nebyla schopna upravit rovnici a dosadit do ní zadané údaje a pracovat s goniometrickými funkcemi.



Graf 8 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 2 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení

U této úlohy se opět potvrdilo, podobně jako u první úlohy, že při jejím řešení uspěli spíše žáci s výbornou nebo chvalitebnou známkou na pololetním vysvědčení. Žáci s dostatečnou a nedostatečnou známkou neuspěli při pokusu vyřešit úlohu č. 2.

Úloha č. 3:

Na plánu města v měřítku 1 : 2 000 má obdélníkový městský plavecký bazén rozměry 25 × 16 mm. Jaké jsou skutečné rozměry bazénu v metrech? Dolož výpočtem.

Řešení:

Úlohy založené na práci s měřítkem lze označit za ty, ve kterých najdeme výraznou mezipředmětovou provázanost obou vyučovacích předmětů. V matematice se žáci s měřítkem poprvé setkávají, když probírají učivo týkající se poměru, v zeměpise se měřítko probírá v učivu týkajícím se map a jejich tvorby.

Při řešení úloh na práci s měřítkem je důležité si uvědomit, co to samotné měřítko vlastně je. Měřítko je poměr zmenšení délky měřené na mapě k délce ve skutečnosti, takže v našem konkrétním případě nám udává, že 1 cm na mapě odpovídá 2 000 cm ve skutečnosti. Pokud máme určit skutečné rozměry bazénu, musíme každý rozměr bazénu vynásobit 2 000, nejprve však rozměry bazénu na mapě převedeme z milimetrů na centimetry:

$$25 \times 16 \text{ mm} = 2,5 \times 1,6 \text{ cm.}$$

Rozměry bazénu vynásobíme 2 000, abychom získaly jeho skutečné rozměry:

$$2,5 \cdot 2\,000 = 5\,000 \text{ cm}$$

$$1,6 \cdot 2\,000 = 3\,200 \text{ cm.}$$

Výsledné rozměry máme mít v metrech, takže musíme převést:

$$5\,000 \text{ cm} = 50 \text{ m}$$

$$3\,200 \text{ cm} = 32 \text{ m.}$$

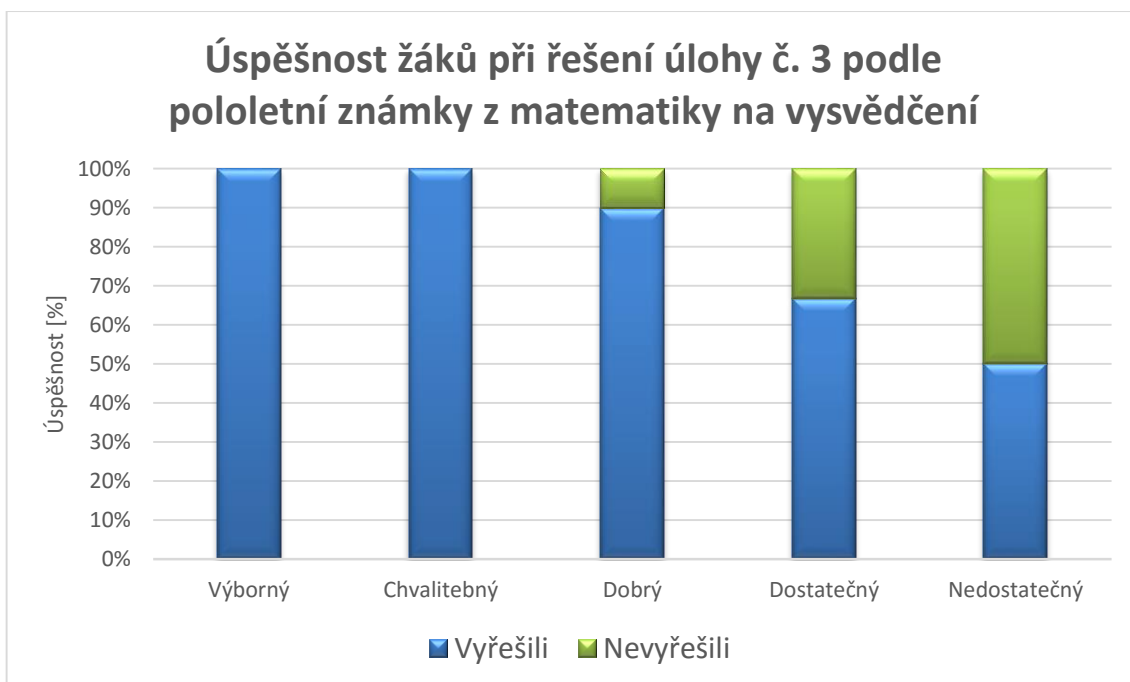
Skutečné rozměry bazénu jsou 50×32 m.

Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 3 znázorňuje Graf 9. Svým charakterem se jednalo o nejtýpichtější příklad, který propojuje matematiku a zeměpis. Úlohy na práci s měřítkem a na jeho výpočet jsou běžné jak v matematice, tak i v zeměpise.



Graf 9 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 3

Skutečnost, že se jedná o běžnou úlohu, která se řeší i v matematice se projevila na úspěšnosti při jejím řešení. Úlohu vyřešilo 92 % procent žáků bez výrazných potíží. Zbýlých 8 % tvořili žáci, kteří buďto vůbec netušili jak úlohu řešit nebo se o její řešení nejspíš vůbec nepokusili. Úloha č. 3 měla nejvyšší úspěšnost řešení ze všech úloh.



Graf 10 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 3 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení

Jak vyplývá z Grafu 10, úspěšnost žáků s výbornou nebo chvalitebnou známkou z matematiky na pololetním vysvědčení, dosáhla 100 %. Vysoce byli i žáci se známkou dobrý. V této úloze uspěli i žáci se známkou dostatečný, jejichž úspěšnost byla asi 67 %. Ze dvou žáků, kteří obdrželi nedostatečnou pololetní známku z matematiky, vyřešil úlohu jeden z nich.

Úloha č. 4:

Vypočítejte, v kolik hodin vyjde Slunce v Praze (zeměpisná délka: $14^{\circ}25'$ v. d.), jestliže v Olomouci (zeměpisná délka: $17^{\circ}15'$ v. d.) vyjde Slunce v 6:05:00 hod.

Řešení:

Tato úloha v sobě skloubí zeměpisné znalosti orientace na Zemi spolu s matematickými schopnostmi přiřadit hodnotám úhlové míry hodnoty časové. Žáci si musejí nejprve uvědomit, že Slunce putuje po obloze od východu na západ, čili je jasné, že Slunce vyjde v Praze o něco později než v Olomouci, protože Praha leží západněji. Nejprve musejí žáci určit rozdíl zeměpisných délek mezi oběma městy a získanou hodnotu v úhlové míře vyjádřit v čase, tím zjistí, o jaký časový úsek vyjde Slunce v Praze později než v Olomouci.

Prvním krokem při řešení je určení rozdílu zeměpisných délek mezi oběma městy:

$$\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda_p = 17^{\circ}15' - 14^{\circ}25' = 2^{\circ}50'.$$

Dalším krokem je převedení údaje v úhlové míře na údaj časový, k tomu využijeme tabulku, kterou nalezneme v zadání:

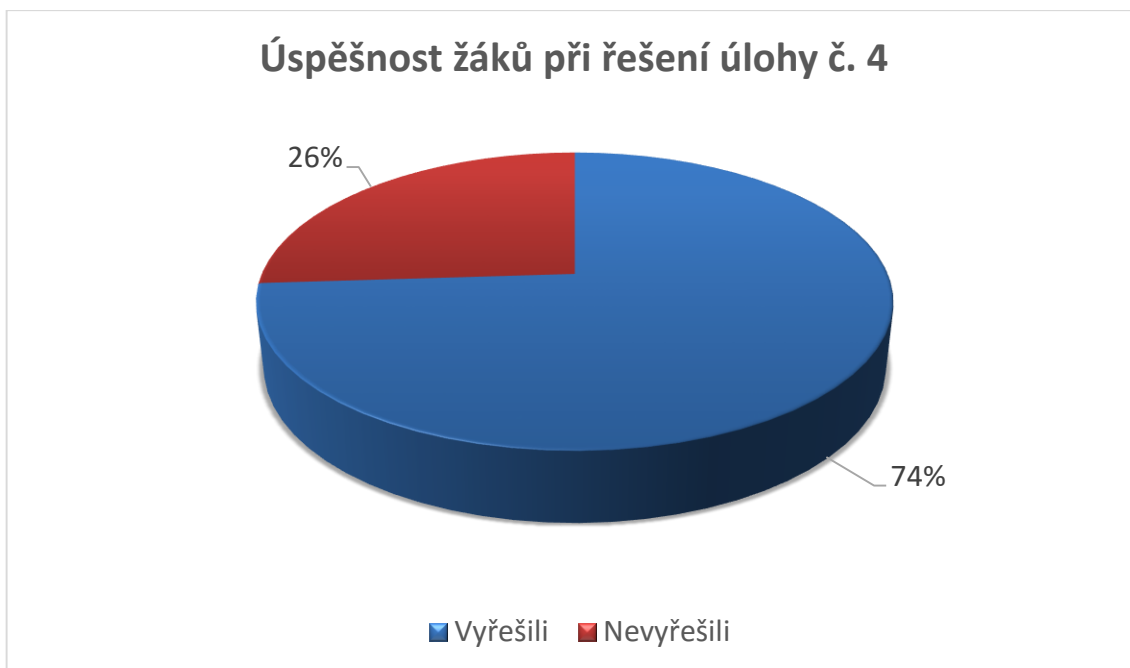
$$\Delta\lambda = 2^{\circ}50' \sim \Delta t = 2^{\circ} \cdot 4[\text{min}/^{\circ}] + 50 \cdot 4[\text{sek}/'] = 8^{\text{min}} 200^{\text{s}} = 11^{\text{min}} 20^{\text{s}}.$$

Závěrečným krokem je to, že k času východu Slunce v Olomouci přičteme časový údaj, který udává, o jaký čas později vyjde Slunce v Praze:

$$t_p = t_o + \Delta t = 6^{\text{h}} 5^{\text{min}} + 11^{\text{min}} 20^{\text{s}} = 6^{\text{h}} 16^{\text{min}} 20^{\text{s}}.$$

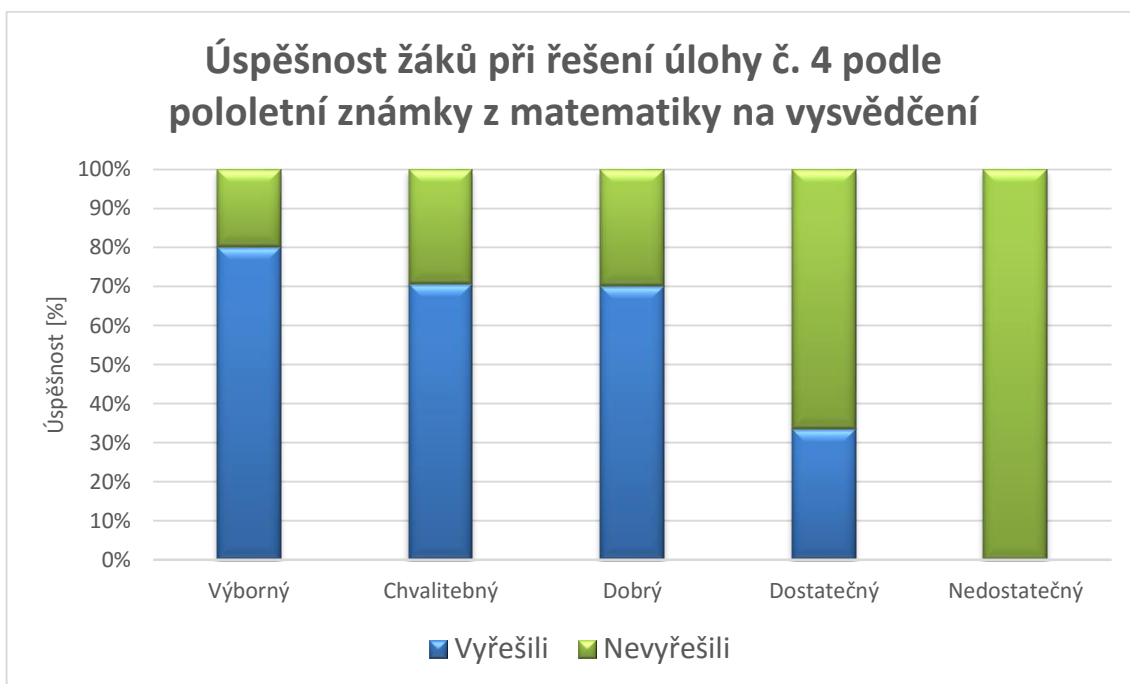
V Praze vyjde Slunce v 6:16:20 hodin, což je o 11 minut a 20 sekund později než v Olomouci.

Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 4 je znázorněna v Grafu 11. Při řešení žáci pracovali s úhly, které na závěr museli převést pomocí tabulky v zadání na časový údaj.



Graf 11 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 4

Úlohu č. 4 vyřešilo 74 % žáků. Lze to považovat za velmi vysokou úspěšnost s ohledem na to, že se nejednalo o úlohu zcela běžnou pro žáky základní školy. Většina z 26 % žáků, kteří úlohu nevyřešili, ji nevyřešili z důvodu, že mají problémy při počítání se stupni a minutami v úhlové míře a někteří žáci měli problémy s převody časových jednotek.



Graf 12 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 4 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení

Podle Grafu 12 nebyl velký rozdíl v úspěšnosti při řešení úlohy č. 4 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení mezi žáky se známkou výborný, chvalitebný a dobrý. Procentuální úspěšnost těchto žáků se pohybovala mezi 70–80 %. Problémy nastaly až u žáků se známkou dostatečný a nedostatečný. Dostatečnou známku mělo 33 % žáků, kteří úlohu č. 4 vyřešili. Žádný z žáků s nedostatečnou pololetní známkou z matematiky úlohu nevyřešil, což odpovídá náročnosti, protože se jednalo o jednu z obtížnějších úloh na řešení.

Úloha č. 5:

Vypočítejte hustotu zalidnění České republiky, byl-li dne 31. prosince 2015 počet obyvatel ČR 10 553 843. Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

Řešení:

Další z mnoha úloh, ve kterých je nutné propojit schopnosti matematické a zeměpisné. K určení vztahu pro výpočet hustoty mohou žáci využít toho, že vědí, v jakých jednotkách se hustota zalidnění udává, a sice v obyvatelích/km². Ze zeměpisného hlediska musí použít znalost rozlohy ČR.

Hustota zalidnění se udává v obyvatelích/km², proto vzorec pro výpočet vypadá následovně:

$$h = \frac{O}{P},$$

O je počet obyvatel ČR, který jak víme ze zadání byl 10 553 843 a P je plocha (rozloha) území ČR, která je 78 866 km². Když víme všechny potřebné a hodnoty a známe vzorec pro výpočet, můžeme do něj dosadit a vypočítat hustotu zalidnění ČR ke dni 31. prosinec 2015:

$$h_{CR} = \frac{10\,553\,843}{78\,866} \doteq 134 \text{ obyvatel/km}^2.$$

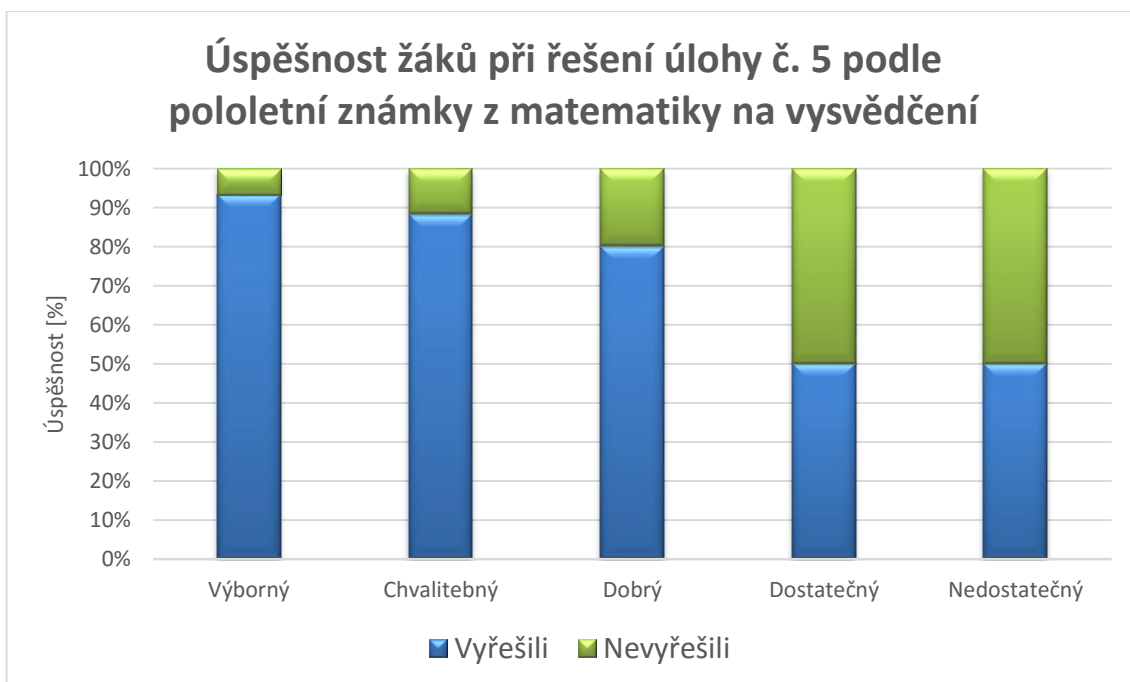
Ke dni 31. prosinec 2015 činila hodnota hustoty zalidnění České republiky 134 obyvatel na km².

Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 5 je znázorněna v Grafu 13. Úloha č. 5 měla nižší obtížnost. Žáci pracovali s daty ze zadání a rozlohou ČR, kterou museli vědět. Úkolem bylo matematickým výpočtem určit statistickou charakteristiku ČR.



Graf 13 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 5

Pokud vezmeme v potaz náročnost úlohy č. 5, potom dojdeme k závěru, že úspěšnost řešení 88 % je celkem logická. Úloha to nebyla náročná, jak z matematického hlediska, tak ze zeměpisného. Těch 12 % žáků, kteří úlohu nevyřešili, se potýkali s problémem neznalosti rozlohy ČR, pouze jeden žák použil zcela špatný výpočet.



Graf 14 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 5 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení

Žáci se známkami výborný, chvalitebný a dobrý se pohybovali v procentuální úspěšnosti řešitelnosti mezi 80–93 %. Žáci se známkami dostatečný a nedostatečný dosáhli v této úloze stejné 50 % úspěšnosti.

Úloha č. 6:

Vypočítejte průtok řeky Moravy v Olomouci, je-li rychlost toku 1 m/s a průtočný profil koryta má tvar rovnoramenného lichoběžníku s délkou delší základny 10 m a délkou ramene 5 m. Hloubka řeky je 400 cm.

Řešení:

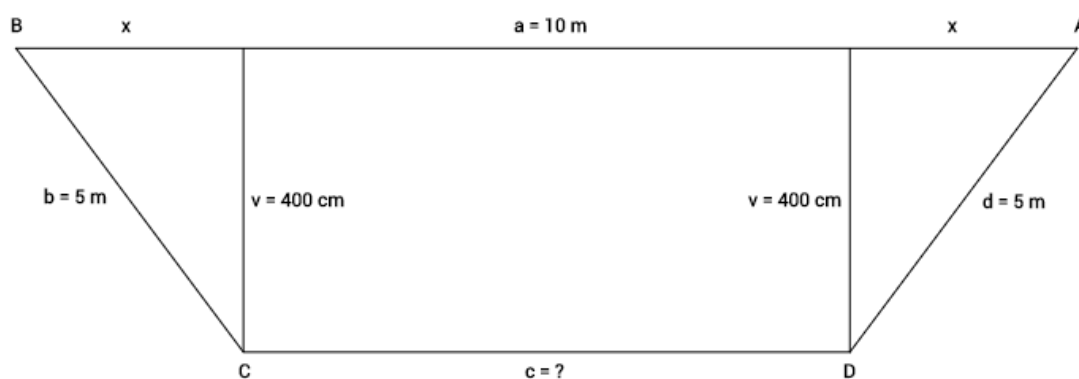
Úloha č. 6 je daleko více matematická než zeměpisná, přesto velice dobře propojuje oba předměty. Žáci mají určit průtok řeky Moravy pomocí vzorce pro výpočet průtoku vodního toku, který mají k dispozici v zadání. Problémem je, že neznají obsah průtočného profilu koryta. Ten má tvar rovnoramenného lichoběžníku, což mohou využít k výpočtu jeho obsahu. Brzy však zjistí, že neznají obě základny, tudíž chybějící základnu musí vypočítat pomocí Pythagorovy věty o odvěsně. Jakmile zjistí všechny potřebné údaje, stačí pouze dosadit do vzorce a vypočítat průtok.

Vzorec pro výpočet průtoku vodního toku vypadá následovně:

$$Q = v \cdot S,$$

S je obsah průtočného profilu koryta, který však neznáme a musíme ho nějak vypočítat. Víme ovšem, že má tvar lichoběžníku, takže se pokusíme vypočítat obsah lichoběžníku.

$$S = \frac{(a + c)}{2} \cdot v,$$



Obrázek 39 Průtočný profil koryta řeky ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku

Problémem je, že nevíme velikost kratší základny lichoběžníku, tu můžeme ale určit, využitím Pythagorovy věty o odvěsně:

$$x^2 = 5^2 - 4^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ m.}$$

Ted' už můžeme vypočítat velikost základny c lichoběžníku:

$$c = 10 - 2x = 10 - 6 = 3 \text{ m.}$$

Následně vypočítáme obsah lichoběžníku (průtočného profilu koryta):

$$S = \frac{(a+c)}{2} \cdot v = \frac{(10+4)}{2} \cdot 4 = 28 \text{ m}^2.$$

Nakonec dosadíme do vzorce pro průtok a určíme ho:

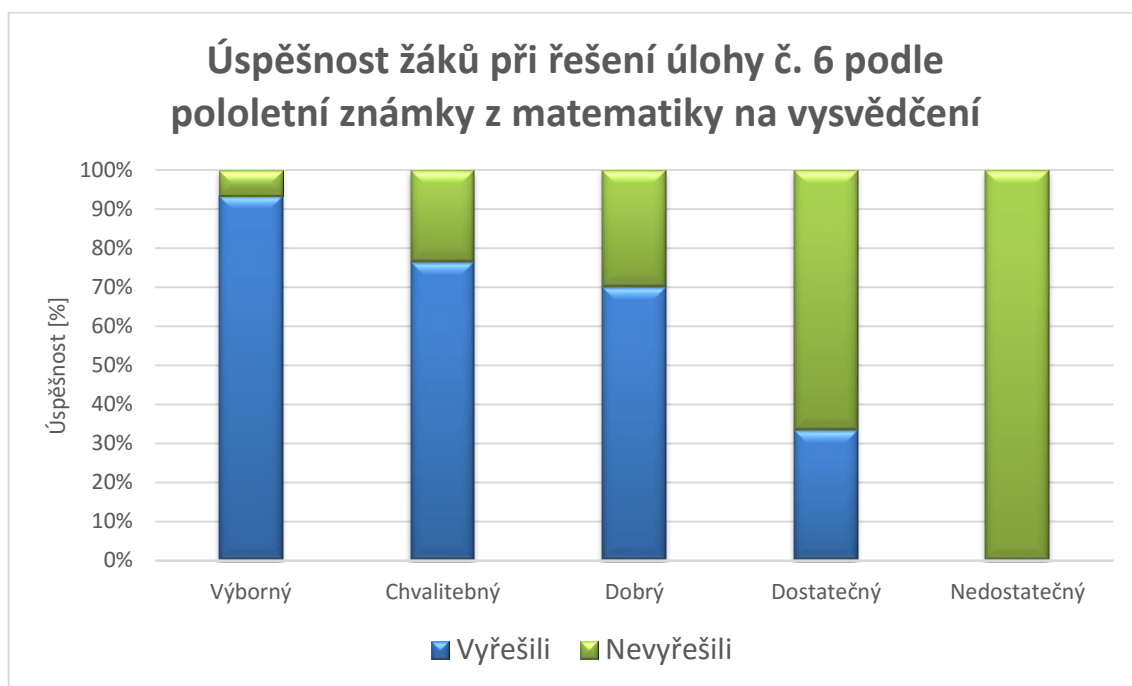
$$Q = v \cdot S = 1 \cdot 28 = 28 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 5 je znázorněna v Grafu 15. Úloha č. 5 byla typem úlohy, ve které je naprosto nezbytná znalost matematiky, za účelem výpočtu zeměpisné charakteristiky vodního toku.



Graf 15 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 6

Jak vyplývá z Grafu 15, tak úlohu vyřešilo 62 % žáků. Úloha č. 6 byla středně matematicky obtížná, takže 62 % odpovídá náročnosti úlohy. Těch 38 % žáků, kteří úlohu nevyřešili, měli problémy zejména s určením chybějících rozměrů lichoběžníku. Nejčastější chybou byla záměna hodnot, protože v úloze se dvakrát objevilo označení v , jednou označovalo rychlost proudění vodního toku a v druhém případě jím byla označena výška rovnoramenného lichoběžníku. Spousta chyb vyplývala z nepozornosti žáků při řešení úloh.

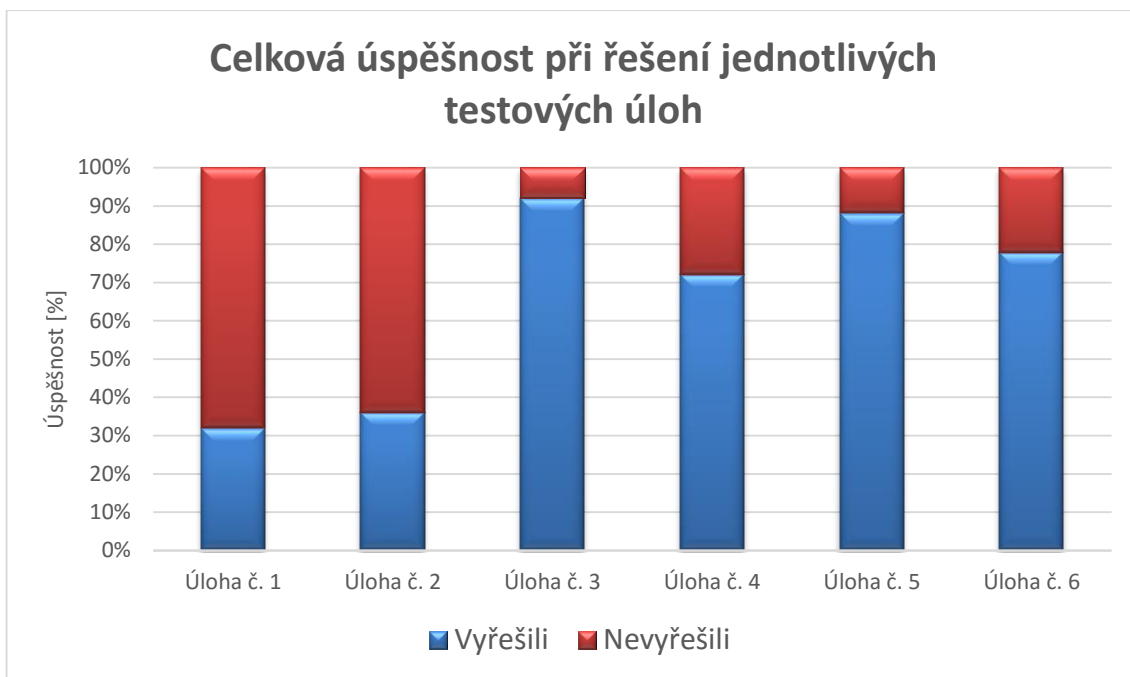


Graf 16 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 6 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení

Můžeme říci, že úspěšnost při řešení úlohy č. 6 v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení klesá poměrně pravidelně. Nejvyšší úspěšnosti dosáhli žáci se známkami výborný, chvalitebný a dobrý. Počet těchto studentů přesáhl 50 %. Výraznější pokles nastal od známky dostatečný. Lze tedy usuzovat, že úspěšnost studentů při řešení úlohy č. 6 odrážela jejich pololetní známka z matematiky na vysvědčení.

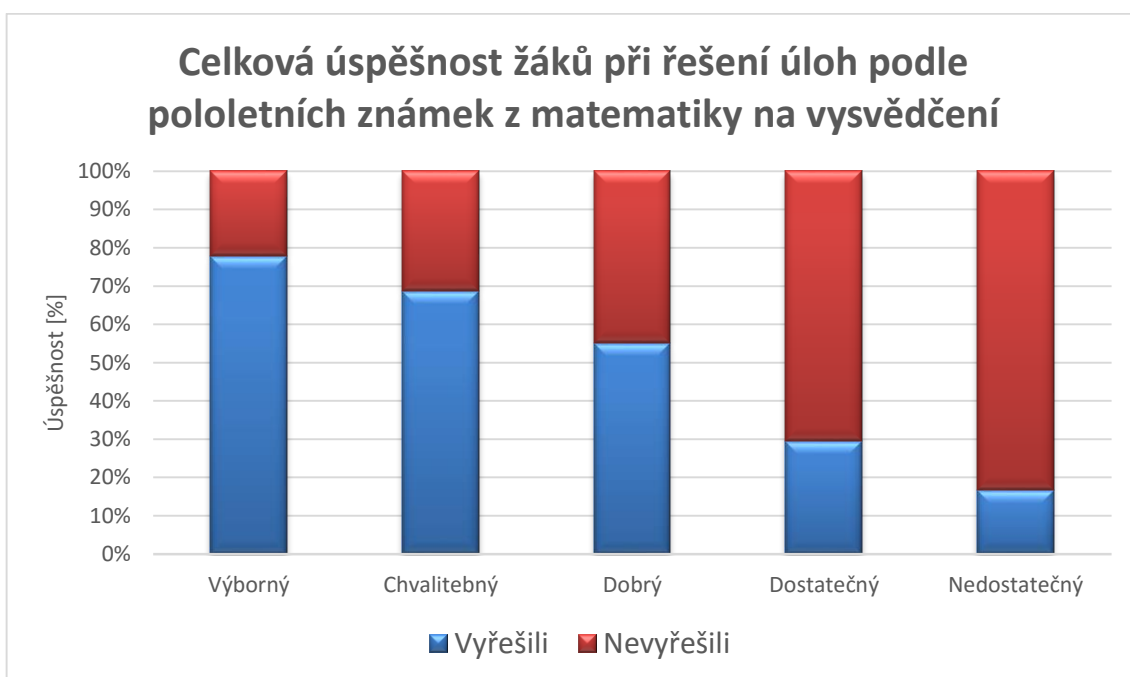
8.4 Hodnocení úspěšnosti u všech testových úloh

Celkovou úspěšnost při řešení jednotlivých testových úloh znázorňuje Graf 17. Můžeme říci, že hodnoty v grafu jsou dostatečně vypovídající o náročnosti jednotlivých úloh.



Graf 17 Celková úspěšnost při řešení jednotlivých úloh

Hodnoty v Grafu 17 odpovídají hodnotám, které jsme očekávali. Úlohy č. 1 a č. 2 byly úlohami s vyšší náročností, což se také projevilo ve výsledcích. Úspěšnost jejich řešení nepřesáhla 40 %. Úlohy č. 4 a č. 6 měly střední obtížnost. Úspěšnost jejich řešení se pohybovala okolo 70 %. Nejnížší obtížnost měly úlohy č. 3 a č. 5, jejichž úspěšnost řešení se pohybovala okolo 90 %.



Graf 18 Celková úspěšnost žáků při řešení úloh v závislosti na pololetní známce z matematiky na vysvědčení

Celková průměrná úspěšnost žáků při řešení jednotlivých testových úloh klesala plynule v závislosti na jejich pololetní známce z matematiky na vysvědčení. Můžeme tedy s největší pravděpodobností konstatovat, že úspěšnost řešení jednotlivých úloh odráží úspěšnost žáků během školního roku.

V následující části budeme zjišťovat, jestli existuje rozdíl mezi úspěšností při řešení úloh žáky, který souvisí s jejich pololetní známkou z matematiky. Budeme výsledky žáků porovnávat tak, že je rozdělíme do dvou skupin. První skupinu budou tvořit žáci se známkou výborný a chvalitebný, druhou skupinu vytvoří žáci se známkou dobrý, dostatečný a nedostatečný. Pokusíme se nalézt statisticky významný rozdíl mezi oběma zmíněnými skupinami.

Statistickou metodou, kterou využijeme k výpočtu, bude Pearsonův chí-kvadrát test neboli test dobré shody. „*Test dobré shody používáme obecně k testování shody četností, ale můžeme ho použít i k otestování shody rozdělení četností u znaků kvantitativních, a to metodou porovnání distribuční funkce sledované spojité náhodné veličiny s distribuční funkcí normovaného normálního rozdělení. χ^2 test dobré shody je založen na posouzení rozdílu mezi skutečnými (empirickými) četnostmi výskytu hodnot ve výběrovém souboru a očekávanými (teoretickými) četnostmi, odpovídajícími příslušnému předpokládanému rozdělení pravděpodobností* (BEDÁŇOVÁ, 2012, online).“

Veškeré výpočty v rámci χ^2 testu dobré shody byly provedeny využitím webové aplikace vytvořené v roce 2011, která byla součástí semestrálního projektu z předmětu aplikovaná statistika v rámci studia na Univerzitě Hradec Králové. Tuto aplikaci nalezneme na internetové adrese: <http://www.milankabrt.cz/testNezavislosti/index.php>.

Stanovení hypotéz:

H_0 – Žáci s výbornou a chvalitebnou známkou z matematiky na pololetním vysvědčení nemají vyšší úspěšnost při řešení matematicko-zeměpisných úloh než žáci s dobrou, dostatečnou a nedostatečnou známkou z matematiky.

H_1 – Žáci s výbornou a chvalitebnou známkou z matematiky na pololetním vysvědčení mají vyšší úspěšnost při řešení matematicko-zeměpisných úloh než žáci s dobrou, dostatečnou a nedostatečnou známkou z matematiky.

Hladina významnosti $\alpha = 0,05$

Vytvoříme kontingenční tabulku skutečných relativních četností. Kontingenční tabulka bude obsahovat hodnoty udávající počet žáků s výbornou nebo chvalitebnou známkou, kteří vyřešili/nevyřešili alespoň 4 úlohy a hodnoty udávající počet žáků s dobrou, dostatečnou nebo nedostatečnou známkou, kteří vyřešili/nevyřešili alespoň 4 úlohy.

Tabulka 6 Kontingenční tabulka skutečných relativních četností

	Počet žáků s výbornou nebo chvalitebnou známkou	Počet žáků s dobrou, dostatečnou nebo nedostatečnou známkou	$n_{.j}$
Vyřešili alespoň 4 úlohy	22	10	32
Nevyřešili alespoň 4 úlohy	7	11	18
$n_{i.}$	29	21	50

Tabulka 7 Očekávané četnosti výskytu jednotlivých variant

	Počet žáků s výbornou nebo chvalitebnou známkou	Počet žáků s dobrou, dostatečnou nebo nedostatečnou známkou	$n_{.j}$
Vyřešili alespoň 4 úlohy	18,56	13,44	32
Nevyřešili alespoň 4 úlohy	10,44	7,56	18
$n_{i.}$	29	21	50

Testové kritérium:

$$G = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n_{ij} - n'_{ij})^2}{n'_{ij}},$$

po dosazení do vzorce vychází testové kritérium:

$$G = 4,217.$$

Kritická hodnota:

$$\chi_{(1-\alpha); df} = 3,841$$

Rozhodnutí:

Na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu (H_0) o nezávislosti jednotlivých znaků zamítáme a přijímáme hypotézu (H_1), která nám říká, že zde určitá závislost existuje. Žáci s lepší známkou z matematiky jsou schopni lépe řešit úlohy matematicko-zeměpisného charakteru. Tito žáci dovedou mnohem lépe využít svých matematických znalostí a schopností při řešení úloh matematického zeměpisu.

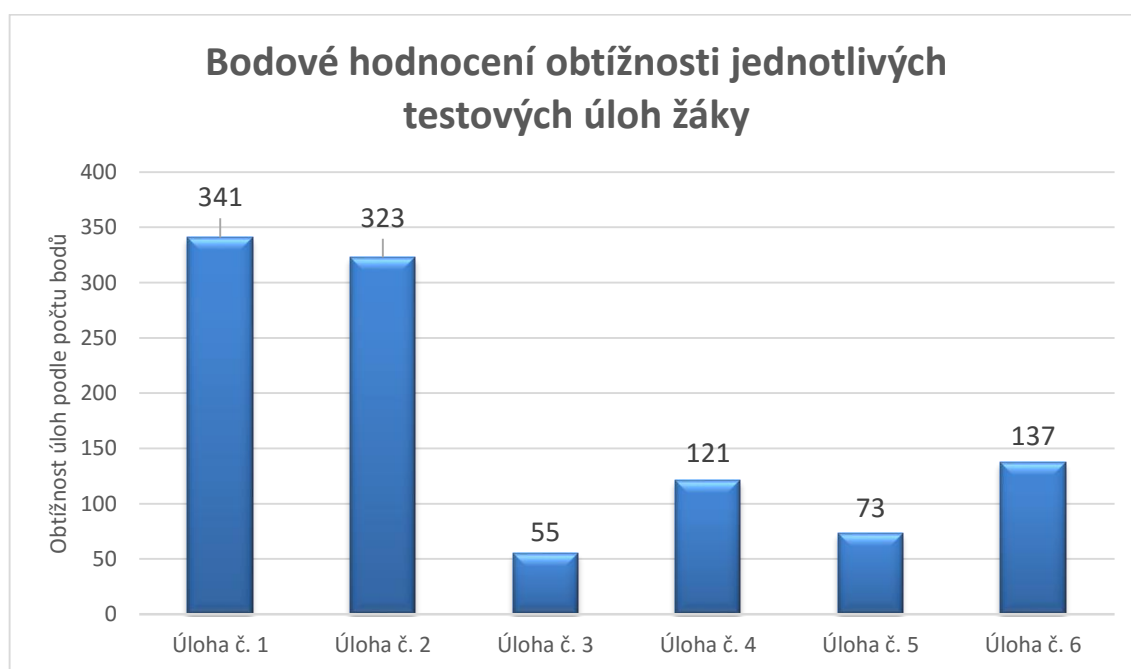
8.5 Hodnocení náročnosti testových úloh žáky

Součástí dotazníku pro žáky bylo, aby podle vlastního názoru bodově ohodnotili jednotlivé testové úlohy podle jejich obtížnosti. Každou úlohu měli ohodnotit příslušným bodovým ohodnocením. Celkově každý žák rozdělil 21 bodů, 6 bodů – nejobtížnější úloha,..., 1 bod – nejsnazší úloha.

Následující tabulka zobrazuje počty bodů, které obdrželi jednotlivé úlohy:

Tabulka 8 Bodové hodnocení obtížnosti jednotlivých úloh

	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4	Úloha č. 5	Úloha č. 6
Počet bodů	341	323	55	121	73	137



Graf 19 Bodové hodnocení obtížnosti jednotlivých testových úloh žáky

Jak můžeme vidět v Grafu 19, žáci považovali za nejobtížnější úlohu č. 1 a těsně za ní úlohu č. 2. To odpovídá faktu, že se jednalo o nejobtížnější úlohy, které měly nejnížší procento úspěšných řešitelů. Jako nejsnazší se žáků jevila úloha č. 3. Důvodem, proč byla úloha č. 3 považována za nejsnazší, byla nejspíše skutečnost, že se jednalo o jednu z nejtypičtějších matematicko-zeměpisných úloh, s jakou se žáci mohou setkat. Vlastní hodnocení žáků odpovídá jejich úspěšnosti při řešení zadaných úloh.

ZÁVĚR

Mezipředmětové vztahy mezi jednotlivými vyučovacími předměty a jejich rozvíjení jsou v současném vzdělávání žáků aktuálním tématem. V této práci jsme se soustředili na mezipředmětové vztahy mezi matematikou a zeměpisem. Tyto vzájemné vztahy existují v obou směrech, ovšem v zeměpise využijeme matematiku mnohem více než zeměpis v matematice. Z tohoto důvodu jsme se pokusili vytvořit teoretický základ spolu se vzorově vyřešenými příklady, které se dají využít v hodinách matematicko-zeměpisného charakteru.

V úvodní kapitole jsme se zabývali vzdělávacími programy, podle kterých probíhá výuka v českých školách. Dále jsme popsali postavení matematiky a zeměpisu v Rámcovém vzdělávacím programu.

V druhé až sedmé kapitole jsme vytvořili teoretický podklad pro řešení různých úloh matematicko-zeměpisného charakteru. Tyto kapitoly obsahují množství nejrůznějších příkladů, které jsme vyřešili a opatřili doprovodným komentářem. Úlohy lze vnímat jako sbírku příkladů, které mohou použít učitelé zejména zeměpisu, ale také žáci při učení. V každé úloze jsme se snažili vše názorně a srozumitelně vyřešit. Složitější vzorce a výpočty jsme neodvozovali z důvodu jejich náročnosti, a protože příklady mají sloužit i méně matematicky zdatným jedincům.

V závěrečné kapitole jsme provedli výzkum, ve kterém bylo naším cílem ověřit, zda mají žáci s lepšími známkami z matematiky na vysvědčení, předpoklad mít vyšší úspěšnost při řešení matematicko-zeměpisných úloh. Také jsme provedli krátké dotazníkové šetření s cílem získání charakteristik jednotlivých žáků. Od žáků jsme v rámci zpětné vazby chtěli jejich hodnocení náročnosti testových úloh.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] BALADA, Jan. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Dotisk 1. vyd. V Praze: Výzkumný ústav pedagogický, 2006. ISBN 80-87000-02-1.
- [2] BRÁZDIL, Rudolf. Úvod do studia planety Země. Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství).
- [3] ČAPEK, Richard, Ludvík MUCHA a Miroslav MIKŠOVSKÝ. *Geografická kartografie*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 8004251536.
- [4] ČERVENÝ, Pavel. Zeměpis 6: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia. 2. aktualiz. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-915-5.
- [5] KOTÁSEK, Jiří (ed.). *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice: Bílá kniha*. Praha: Tauris, 2001. ISBN 80-211-0372-8.
- [6] KUSKA, František. *Matematická kartografia*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1960. Edícia teoretickej literatúry (Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry).
- [7] NOVÁK, Bohumil. *Vybrané partie z didaktiky matematiky*. 1. vydání. Olomouc, 2011.
- [8] TICHÝ, Otakar a Rudolf ŠVEC. *Matematický zeměpis a kartografie: učebnice pro pedagogické fakulty*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965. Vysokoškolské učebnice (Slovenské pedagogické nakladateľstvo).
- [9] VOŽENÍLEK, Vít. *Aplikovaná kartografie I.: tematické mapy*. 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. ISBN 80-244-0270-X.

SEZNAM POUŽITÝCH INTERNETOVÝCH ZDROJŮ

- [1] *Astronomický ústav AV ČR* [online]. 2016 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://www.asu.cas.cz/>
- [2] BALADA, Jan. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, c2007 [cit. 2016-04-20]. ISBN 978-80-87000-11-3. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/10427_1_1/
- [3] BAYER, Tomáš. *Zobrazení* [online]. [cit. 2016-04-05]. Dostupné z: https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/Mmk/4_zobrazeni.pdf
- [4] BEDÁŇOVÁ, Iveta. *Biostatistika* [online]. Brno, 2012 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z: <http://cit.vfu.cz/statpotr/POTR/Teorie/Predn3/chi2test.htm>
- [5] *Český statistický úřad* [online]. 2016 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/>
- [6] *DUMY.CZ* [online]. 2012 [cit. 2016-04-19]. Dostupné z: <https://www.dumy.cz/>
- [7] *Geomatika: Katedra geomatiky, Fakulty aplikovaných věd, Západočeské univerzity v Plzni* [online]. 2016 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://gis.zcu.cz/>
- [8] HALÁS, Marián, Šárka BRYCHTOVÁ a Miloš FŇUKAL. *Základy humánní geografie 1: Geografie obyvatelstva* [online]. Olomouc, 2012 [cit. 2016-03-30]. Dostupné z: <http://distgeo.upol.cz/uploads/vyuka/skripta-halas-akol-1.pdf>
- [9] Handshake. *Standart time zones of the world* [online]. 2016 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z: <http://joinhandshake.com/img/posts/time-zones.png>
- [10] *HYDRO.upol.cz: Vybrané kapitoly z hydrologie* [online]. 2009 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://hydro.upol.cz/>
- [11] JUREK, Martin. *Planetární geografie: Místní a pásmový čas* [online]. Olomouc, 2009 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: http://geography.upol.cz/soubory/lide/jurek/PLG/cviceni/PLG_2009_Samostatny_ukol_2.pdf
- [12] JUREK, Martin. *Planetární geografie: Vzdálenosti na Zemi* [online]. Olomouc, 2009 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: http://geography.upol.cz/soubory/lide/jurek/PLG/cviceni/PLG_2009_Samostatny_ukol_5.pdf

- [13] KÁBRT, Milan. *Test chí-kvadrát nezávislosti v kontingenční tabulce* [online]. Hradec Králové, 2012 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z: <http://www.milankabrt.cz/testNezavislosti/index.php>
- [14] MARYÁŠ, Jaroslav a Jiří VYSTOUPIL. *Ekonomická geografie* [online]. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: https://is.muni.cz/www/206961/DSO-Ekonomicka_geografie-pracovni_text.pdf
- [15] *Mendelova univerzita v Brně* [online]. 2016 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://mendelu.cz/>
- [16] MÍSAŘOVÁ, Darina. *Kapitoly z didaktiky geografie* [online]. 1. vydání. Olomouc, 2012 [cit. 2016-04-09]. Dostupné z: <http://distgeo.upol.cz/uploads/vyuka/skripta-misarova.pdf>
- [17] NOVOTNÁ, Marie a kol., *Modul: Geografie – teoretický a metodologický základ* [online]. 1. vydání. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2014 [cit. 2016-03-30]. ISBN 978-80-261-0463-6. Dostupné z: https://www.zcu.cz/pracoviste/vyd/online/Modul_Teoreticky_a_metodologicky_zaklad_2.pdf
- [18] PAVELKOVÁ CHMELOVÁ, Renata a Jindřich FRAJER. *Základy hydrologie* [online]. 1. vydání. Olomouc, 2012 [cit. 2016-04-01]. Dostupné z: <http://geography.upol.cz/soubory/studium/DS-GVS/Opora-DHYDR.pdf>
- [19] *ProfiPilot.sk* [online]. 2016 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://www.profpilot.sk/>
- [20] The World Factbook. *Central Intelligence Agency* [online]. 2015 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/>
- [21] *Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava* [online]. 2016 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://www.vsb.cz/cs/>
- [22] *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2016 [cit. 2016-04-18]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- [23] *ZEMEPIS.COM: Geografický portál* [online]. 2016 [cit. 2016-04-20]. Dostupné z: <http://www.zemepis.com/>

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

SYMBOL	VÝZNAM
MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
RVP	Rámcový vzdělávací program
ŠVP	Školní vzdělávací program
WGS 84	World Geodetic System 1984
f	ohnisková vzdálenost
e	excentricita (výstřednost)
i	zploštění
λ	zeměpisná délka
φ	zeměpisná šířka
O	počátek soustavy souřadnic
ρ	průvodič bodu
ε	polární úhel
d	vzdálenost dvou bodů, dohledná vzdálenost
A	azimut
r_z	poloměr Země ve tvaru koule
l	délka rovnoběžky
UT	Universal Time
UTC	Universal Time Coordinated
SEČ	Středoevropský čas
SELČ	Středoevropský letní čas
S	střední stav obyvatelstva
$hmú$	hrubá míra úmrtnosti
hmp	hrubá míra porodnosti
$hmpo$	hrubá míra potratovosti
hms	hrubá míra sňatečnosti
$hmro$	hrubá míra rozvodovosti
ms	migrační saldo
hmm	hrubá míra migrace
L	délka vodního toku
S_p	plocha povodí

SYMBOL**VÝZNAM**

ΔH	spád vodního toku
I	sklon vodního toku
Q	průtok vodního toku
q	specifický odtok
r	hustota říční sítě

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1 – Soubor testových úlohy pro žáky

Příloha 2 – Dotazník pro žáky

PŘÍLOHY

Příloha 1 – Soubor testových úloh pro žáky

SOUBOR TESTOVÝCH ÚLOH PRO ŽÁKY GYMNÁZIA

POKYNY

Planetu Zemi považujte při Vašich výpočtech za kouli o poloměru $r_z = 6371,1$ km. Veškeré výpočty zaznamenejte na tento papír. Při výpočtech můžete použít kalkulačku a přiložené pomůcky.

POMŮCKY PŘI VÝPOČTECH

Obvod kruhu: $o = 2\pi r$

Délka rovnoběžky: $l = 2\pi r_z \cdot \cos \varphi$

Rozloha ČR: 78 866 km²

Průtok vodního toku: $Q = v \cdot S$

v – rychlost proudění vodního toku

S – obsah průtočného profilu koryta

Vztah zeměpisné délky k času:

Údaj v úhlové míře	Údaj v čase
360°	24 hodin
15°	1 hodina
1°	4 minuty
1'	4 sekundy

1) Quito, hlavní město Ekvádoru a Kampala, hlavní město Ugandy, leží na rovníku. Zeměpisná délka Quita je 79° z. d., zeměpisná délka Kampaly je 33° v. d. Jaká je vzdálenost těchto měst (měřeno vzdušnou čarou po rovníku)? Dolož výpočtem.

A) 10 625 km

B) 12 432 km

C) 15 936 km

2) Která významná rovnoběžka má délku 36 710 km. Dolož výpočtem.

A) obratník Raka

B) rovník

C) severní polární kruh

3) Na plánu města v měřítku 1 : 2 000 má obdélníkový městský plavecký bazén rozměry 25×16 mm. Jaké jsou skutečné rozměry bazénu v metrech? Dolož výpočtem.

A) 25×16 m

B) 40×20 m

C) 50×32 m

4) Vypočítejte, v kolik hodin vyjde Slunce v Praze (zeměpisná délka: $14^{\circ}25'$ v. d.), jestliže v Olomouci (zeměpisná délka: $17^{\circ}15'$ v. d.) vyjde Slunce v 6:05:00 hod.

A) 6:05:00 hod.

B) 6:16:20 hod

C) 6:20:45 hod.

5) Vypočítejte hustotu zalidnění České republiky, byl-li dne 31. prosince 2015 počet obyvatel ČR 10 553 843. Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

A) 132 obyvatel/km²

B) 134 obyvatel/km²

C) 136 obyvatel/km²

6) Vypočítejte průtok řeky Moravy v Olomouci, je-li rychlost toku 1 m/s a průtočný profil koryta má tvar rovnoramenného lichoběžníku s délkou delší základny 10 m a délkou ramene 5 m. Hloubka řeky je 400 cm.

A) 28 m³/s

B) 32 m³/s

C) 36 m³/s

Příloha – Dotazník pro žáky

Milý studente,

rád bych Vás požádal o vyplnění krátkého dotazníku, který se vztahuje k Vám a k testovým úlohám, které jste řešili. Vyplňte prosím tento dotazník pravdivě.

Děkuji.

Ondřej Vlček

1) Jaké je tvoje pohlaví:

- a) Chlapec
- b) Dívka

2) Kterou třídu navštěvuješ:

- a) 9. A
- b) 9. B

3) Jakou známku jsi dostal(a) na posledním pololetním vysvědčení z matematiky:

- a) Výbornou
- b) Chvalitebnou
- c) Dobrou
- d) Dostatečnou
- e) Nedostatečnou

4) Pokus se bodově ohodnotit jednotlivé úlohy, které jsi řešil(a), podle jejich obtížnosti na stupnici od 1 do 6 bodů. Nejobtížnější úloha – 6 bodů, nejsnazší úloha – 1 bod.

	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4	Úloha č. 5	Úloha č. 6
Počet bodů						

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1 Systém kurikulárních dokumentů.....	7
Obrázek 2 Geoid	15
Obrázek 3 Referenční rotační elipsoid.....	15
Obrázek 4 Vztah mezi geoidem, ref. elipsoidem a obecným zemským elipsoidem	16
Obrázek 5 Trojosý referenční elipsoid.....	17
Obrázek 6 Zeměpisná síť	19
Obrázek 7 Hlavní poledníky a rovnoběžky	19
Obrázek 8 Poledníky na Zemi	20
Obrázek 9 Zeměpisné souřadnice	21
Obrázek 10 Prostorové pravoúhlé souřadnice	21
Obrázek 11 Rovinné pravoúhlé souřadnice	22
Obrázek 12 Rovinné polární souřadnice.....	22
Obrázek 13 Ortodroma	23
Obrázek 14 Zemský sférický trojúhelník.....	24
Obrázek 15 Loxodroma	24
Obrázek 17 Oprava azimutu	25
Obrázek 18 Vzájemná poloha Hamburku a Hamiltonu.....	26
Obrázek 19 Odvození vzdálenosti mezi pozorovatelem a obzorem.....	30
Obrázek 20 Polohy zobrazovacích ploch.....	34
Obrázek 21 Gnómonická projekce v poloze normální, šikmé a příčné	37
Obrázek 22 Stereografická projekce v poloze normální, šikmé a příčné	37
Obrázek 23 Ortografická projekce v poloze normální, šikmé a příčné	38
Obrázek 24 Lambertovo azimutální zobrazení.....	38
Obrázek 25 Postelovo zobrazení.....	39
Obrázek 26 Tečný a sečný válec.....	40
Obrázek 27 Čtvercové (Marinovo) zobrazení	41
Obrázek 28 Lambertovo válcové zobrazení	42
Obrázek 29 Behrmanovo zobrazení.....	42
Obrázek 30 Mercatorovo zobrazení.....	43
Obrázek 31 Tečný a sečný kužel	43
Obrázek 32 Ptolemaiovo zobrazení	45
Obrázek 33 Delisleovo zobrazení	45

Obrázek 34 Lambertovo kuželové zobrazení	46
Obrázek 35 Gaussovo zobrazení.....	46
Obrázek 36 Grafické měřítko	47
Obrázek 37 Mezinárodní datová hranice	51
Obrázek 38 Mapa časových pásem.....	52
Obrázek 39 Migrační pohyby	61
Obrázek 40 Průtočný profil koryta řeky ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku	81

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1 Rozměry nejvyžívanějších elipsoidů	16
Tabulka 2 Vztah mezi zeměpisnou délkou a místním časem	51
Tabulka 3 Střední stav obyvatelstva, počet sňatků, hrubá míra sňatečnosti.....	59
Tabulka 4 Počet vystěhovalých, přistěhovalých osob a hrubá míra migrace	62
Tabulka 5 Označení hustoty říční sítě.....	67
Tabulka 6 Kontingenční tabulka skutečných relativních četností	86
Tabulka 7 Očekávané četnosti výskytu jednotlivých variant	86
Tabulka 8 Bodové hodnocení obtížnosti jednotlivých úloh	87

SEZNAM GRAFŮ

Graf 1 Hrubá míra v České republice a v jednotlivých krajích za rok 2014	60
Graf 2 Vývoj hrubé míry migrace v České republice v letech 2004–2014	63
Graf 3 Pohlaví respondentů	70
Graf 4 Pololetní známka z matematiky na vysvědčení.....	70
Graf 5 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 1	72
Graf 6 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 1 v závislosti na známce z matematiky	72
Graf 7 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 2	74
Graf 8 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 2 v závislosti na známce z matematiky	74
Graf 9 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 3	76
Graf 10 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 3 v závislosti na známce z matematiky	76
Graf 11 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 4	78
Graf 12 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 4 v závislosti na známce z matematiky	78
Graf 13 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 5	80
Graf 14 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 5 v závislosti na známce z matematiky	80
Graf 15 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 6	82
Graf 16 Úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 6 v závislosti na známce z matematiky	83
Graf 17 Celková úspěšnost při řešení jednotlivých úloh	84
Graf 18 Celková úspěšnost žáků při řešení úloh v závislosti na známce z matematiky	84
Graf 19 Bodové hodnocení obtížnosti jednotlivých testových úloh žáky	87

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Ondřej Vlček
Katedra:	Katedra matematiky Pedagogické fakulty UP
Vedoucí práce	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2016

Název práce:	Matematika a její využití v geografii
Název v angličtině:	Mathematics and its applications in geography
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá mezipředmětovou provázaností matematiky a geografie. První kapitola se věnuje postavení matematiky a geografie v systému kurikulárních dokumentů České republiky. V dalších kapitolách je teoretický základ pro řešení úloh matematicko-geografického charakteru společně s jejich vzorovým řešením. Poslední kapitola obsahuje výzkum úspěšnosti řešení úloh geografického charakteru s matematickým podtextem.
Klíčová slova:	Matematika, geografie, mezipředmětové vztahy, tvar Země, geoid, elipsoid, koule, souřadnice, kartografická zobrazení, měřítko, měření času, práce s daty.
Anotace v angličtině:	The thesis deals with the cross-curricular linking of mathematics and geography. The first chapter deals with the role of mathematics and geography in the system of curricular documents of the Czech Republic. The subsequent chapters contain theoretical fundamentals of solving problems of mathematical-geographic character alongside with example solutions. The last chapter includes the study of the success of solving problems of the geographical character with a mathematical subtext.
Klíčová slova v angličtině:	Mathematics, geography, interdisciplinary relations, the shape of the Earth, geoid, ellipsoid, sphere, coordinates, cartographical mappings, scale, time measurement, data processing.
Přílohy vázané v práci:	2 přílohy
Rozsah práce:	102 stran
Jazyk práce:	Český jazyk