Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

STRATEGIE ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH V PRŮBĚHU STUDIA NA ZŠ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Radka ŠTĚPÁNKOVÁ

České Budějovice, duben 2011

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 25. dubna 2011 ………………………………

podpis

Na tomto místě děkuji vedoucí mé diplomové práce RNDr. Heleně Binterové, PhD. za odborné vedení mé práce, za cenné rady, připomínky a podněty.

Děkuji také základní škole, na které jsem mohla provést experiment.

Anotace

Hlavním cílem mé diplomové práce je zkoumání a popis strategií žákovských řešení slovních úloh na druhém stupni základní školy.

Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V první části jsou popsány typy slovních úloh v průběhu základní školy, žákovské a učitelské strategie. Dále jsou zde vysvětleny pojmy algoritmus a didaktický kontrakt. Nechybí ani vlastní porovnání učebnic, které se využívají na druhém stupni základní školy.

Teoretickou část tvoří experiment, který byl proveden na druhém stupni jedné základní školy ve dvou paralelních třídách. V experimentu byly zadány tři typově shodné testy na slovní úlohy. Podle výsledků je posuzováno zlepšení žáků, využívání různých strategií, ale i vliv algoritmů a didaktického kontraktu.

V závěru jsou shrnuty výsledky a poznatky z experimentu.

Annotation

The main aim of my thesis is the investigation and description of students' strategies for solving word problems at basic schools.

The thesis is divided into theoretical and practical part. The first part describes the types of word problems at the basic school, pupils’ and teaching strategies. There are also explained meaning of terms algorithms and didactic contract. There is also own confrontation of textbooks which are used at secondary schools.

The theoretical part is formed the experiment that was performed at the second stage of a basic school in two parallel classes. In the experiment there were entered three types of identical tests for solving word problems. There is judged pupils’ improvement, using different strategies and effect of algorithms and didactic contract.

In conclusion there are summarized results and knowledge from the experiment.

Obsah

1 Úvod ... 7
2 Slovní úlohy ... 8
2.1 Co je to slovní úloha ... 8
2.2 Historie slovních úloh ... 8
2.3 Důležitost slovních úloh ... 10
2.4 Náročnost slovních úloh ... 11
2.5 Poznámky k řešení slovních úloh ... 11
2.6 Slovní úlohy na prvním stupni základní školy ... 12
2.6.1 Druhy slovních úloh ... 12
2.6.2 Fáze řešení slovních úloh pni ... 13
2.6.3 Cíle zařazování slovních úloh na prvním stupni ZŠ ... 13
2.7 Slovní úlohy na druhém stupni základní školy ... 14
2.7.1 Druhy slovních úloh ... 14
2.7.2 Fáze řešení slovních úloh ... 15
2.7.3 Cíle zařazování slovních úloh na druhém stupni ZŠ ... 16
3 Strategie ... 17
3.1 Strategie řešení ... 17
3.1.1 Převod slovní úlohy na matematickou úlohu ... 17
3.1.2 Strategie řešení slovních úloh ... 18
3.1.3 Možnosti jak dojít k výsledku slovní úlohy ... 20
3.1.4 Metody řešení rovnic ... 21
3.1.5 Způsoby řešení slovních úloh ... 22
3.2 Didaktický kontrakt ... 22
3.3 Strategie učitele ... 23
3.3.1 Styly vyučování ... 23
3.3.2 Strategie práce učitele ... 24
3.3.3 Přístupy k vyučování ... 25
3.4 Algoritmus ... 26
3.5 Formalismus ... 28
4 Učebnice matematiky ... 30

5 Experiment ... 33
5.1 Cíl ... 33
5.2 Postup pro zadání testů ... 33
5.2.1 Škola ... 34
5.2.2 Třídy a žáci ... 34
5.2.3 Učitel ... 34
5.2.4 Učebnice využívané ve třídách 8.I. a 8.II. ... 35
5.3 Zadání testů ... 36
5.4 Hodnocení testu ... 38
5.5 TIMSS 2007 ... 39
5.6 Hypotézy ... 41
5.7 Diagnostika slovních úloh ... 42
6 Statistika ... 52
6.1 Testování hypotéz ... 52
6.2 Parametrické testy ... 53
6.2.1 Párový *t* test ... 53
6.2.2 Dvouvýběrový *t* test ... 55
6.3 Porovnání výsledků řešení příkladů mezi jednotlivými testy ... 57
6.3.1 Párový *t* test ... 58
6.4 Porovnání výsledků řešení příkladů mezi jednotlivými třídami ... 65
6.4.1 Dvouvýběrový *t* test ... 67
6.5 Výsledky hypotéz ... 69
7 Závěr ... 71
8 Literatura ... 72
9 Přílohy ... 74

1 Úvod

Jako téma své diplomové práce jsem zvolila strategie řešení slovních úloh v průběhu ZŠ. Mým cílem bylo provést experiment na základní škole, ve kterém jsem zjišťovala žákovské strategie řešení slovních úloh na druhém stupni základní školy. Pro experiment byly vytvořeny tři testy s typově shodnými úlohami. Testy byly zadány s půlročními intervaly, přičemž druhý test byl zadán v době, kdy se žáci tuto látku učili.

Zaměřila jsem se především na slovní úlohy, které jsou obvykle řešeny pomocí lineárních rovnic. Většina takových úloh lze ovšem řešit také jiným způsobem. Takové úlohy jsou dodnes označovány jako slovní úlohy o pohybu nebo o společné práci, přestože moderní učebnice tyto výrazy již nevyužívají.

Toto téma jsem zvolila proto, že slovní úlohy patří k důležité části matematiky nejen z důvodu aplikace matematických poznatků, ale také z důvodu aplikace slovních úloh v reálném životě. Dalším podnětem byl také fakt, že jsem vždy patřila k řešitelům slovních úloh, kteří preferují vlastní strategie před využitím řešení pomocí vzorového příkladu. Proto mě zajímalo, zda mají žákovské strategie v dnešní škole své místo.

2 Slovní úlohy

2.1 Co je to slovní úloha

Úlohy, ve kterých je závislost mezi danými a hledanými čísly vyjádřena slovní formulací, nazýváme slovními úlohami.

Ve slovních úlohách je třeba na základě vhodné úvahy zjistit, jaké početní operace musíme s danými čísly provést, abychom našli čísla, která máme vypočítat. Úlohy, kde jsou početní operace předepsané, nezahrnujeme mezi slovní úlohy (Šedivý 1991, s. 117)

2.2 Historie slovních úloh

Slovní úlohy byly známé již před 4000 lety ve starověkém Babylóně. Zápis řešení slovních úloh byl ale rozdílný od dnešní doby – pouze slovní. Vytváření algebraické symboliky trvalo velmi dlouho. Ještě Diofantos, který žil ve 3. století našeho letopočtu, zapisoval svá řešení slovních úloh, kterými se zabýval celý život, pouze pomocí slov. Až v 16. století se začala používat k označení známých a neznámých veličin čísla. Zápis pomocí čísel zavedl francouzský matematik Francois Viete.

Slovní úlohy vznikaly z potřeb člověka. Pokud se podíváme na takzvané slovní úlohy o pohybu (konkrétně o setkání dvou těles), jejich stáří je asi 1000 let. Vznikly z požadavků astronomie. Cílem bylo zjištění setkání dvou těles, jež astronom pozoroval dalekohledem, a znal jejich rychlost i vzdálenost mezi nimi. Již ve starých indických učebnicích se můžeme setkat se vzorcem, který sčítá rychlosti těles při pohybu proti sobě, a naopak odečítá při pohybu za sebou. (Müllerová 1991)

Newton ve své učebnici algebry Obecná aritmetika ukázal překlad úlohy do jazyka algebry například na tomto příkladu:

V běžném jazyce	V řeči algebry
Obchodník měl jistou částku peněz	x
Za první rok utratil 100 liber	$x - 100$
Ke zbývající částce přidal jednu její třetinu	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
Během dalšího roku utratil 100 liber	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
A zvětšil částku o jednu její třetinu	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
Během třetího roku opět utratil 100 liber	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
Potom ke zbytku přidal jednu jeho třetinu	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
Nyní měl obchodník dvakrát více peněz než na začátku	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

K určení původní částky, kterou měl obchodník k dispozici, stačí vyřešit poslední rovnici. (Perel'man 1985, s. 30 - 31)

To, že slovní úlohy využívá i dnešní školská matematika, svědčí o jejich významu. S jednoduchými slovními úlohami se začíná již v první třídě a žáka vyprovázejí různě obtížné úlohy až do deváté třídy. Jsou zařazovány především pro převedení teoretických poznatků do praktického života. V tom spočívá jejich nenahraditelnost.

2.3 Důležitost slovních úloh

- Slovní úloha znamená převedení matematiky z teorie do praxe. Přesto, že jsou slovní úlohy v porovnání s běžným životem poněkud upravené a zjednodušené, pomáhají žákům pochopit důležitost matematiky v jejich budoucím životě.
- Při řešení slovních úloh je podpořen rozvoj schopnosti vybírat podstatné informace, zvyšuje se čtenářská gramotnost. Čtenářská gramotnost znamená nejen umět číst a psát, ale také porozumění psanému textu, používat ho, získávat z něj informace a interpretovat je. (Grecmanová 2007)
- Řešení slovních úloh vede žáky k uvědomělému, hlubokému a pevnému osvojení vědomostí, dovedností a návyků, podporuje samostatnost myšlení. (Květoň 2010)
- Pomáhají rozvíjet schopnosti žáků aktivovat matematické znalosti a dovednosti i v situacích, které nejsou matematické.
- Žáci díky slovním úlohám lépe rozumí pojmům, metodám a výsledkům.
- Učí žáka pracovat tvořivě a rozvíjí heuristické postupy. (Novotná 2004)

2.4 Náročnost slovních úloh

- Mnoho žáků, ale také učitelů, považuje slovní úlohy za obtížné
- Problémy z pohledu žáka definuje Novotná (2004) takto:
  - Nerozumí kontextu
  - Nedokáže získat potřebné informace z textu (souvisí s délkou textu, použitým jazykem apod.)
  - Dokáže získat informace, ale neumí najít vhodný matematický model k vyřešení slovní úlohy
- Problémy z pohledu učitele definuje Novotná (2004) tímto způsobem:
  - Nedokáže rozlišit překážky, které brání žákovi ve správném řešení slovních úloh
  - Neumí vhodně přeformulovat otázku tak, aby žák lépe porozuměl úloze a dokázal ji vyřešit
- Problémy vycházející z vlastní slovní úlohy (Šedivý 1990)
  - Úloha má více než jedno řešení, někdy i nekonečně mnoho
  - V textu slovní úlohy je zadáno více informací, než žák k řešení potřebuje – hovoříme o tzv. přezadané slovní úloze
  - Jazyk slovní úlohy – přiměřený věku

2.5 Poznámky k řešení slovních úloh

Šedivý (1990) uvádí shrnující poznámky k řešení slovních úloh, které jsou důležité pro učitele i pro žáky

1. Slovní úlohy je třeba zařazovat do všech vhodných témat a do všech fází vyučovacího procesu.
2. Řešení slovních úloh nesmí být opřeno o poznatky naučené zpaměti bez porozumění. Úlohy je třeba řešit na základě analýzy vztahů mezi jevy zadanými a hledanými.

3. Úlohy mají vycházet ze skutečných situací, být reálné.
4. Údaje musí být srozumitelné, nové pojmy a neznámé vztahy je třeba vysvětlit
5. V úlohách se nesmí vyskytovat mnohoznačnost.
6. Není nezbytně nutné, aby úloha obsahovala veškeré potřebné údaje, pokud tyto údaje zná žák zpaměti nebo je lze někde vyhledat (tabulky, internet a další). Takové úlohy podporují analytický přístup k řešení úloh. Ze stejného důvodu jsou do úloh někdy naopak zařazeny informace nadbytečné. Žáci i v tomto případě musí před řešením analyzovat zadané údaje.
7. K řešení úlohy patří také zkouška, která kontroluje numerickou hodnotu výsledku, analýzu vztahů, ale i reálnost výsledku.
8. Nedílnou součástí by měla být slovní odpověď, která následuje až po provedení zkoušky. Slovní odpověď může učiteli ukázat, že žáci úlohu správně nepochopili, a to přesto, že numerický výsledek je správný.

2.6 Slovní úlohy na prvním stupni základní školy

Na prvním stupni žáci řeší jednoduché slovní úlohy. Úlohu označíme jako jednoduchou, jestliže nám k vyřešení stačí provést pouze jeden početní výkon (sčítání, odčítání, násobení, dělení).

2.6.1 Druhy slovních úloh

Žáci řeší tyto čtyři druhy jednoduchých slovních úloh

- Aditivní úlohy 1. typu
  - Řeší se pomocí sčítání nebo odčítání
  - Matematizace se opírá o sjednocení dvou disjunktních množin - máme dvě množiny disjunktní a třetí množina je jejich sjednocením
  - Tyto slovní úlohy řeší žáci již v první třídě

- Aditivní úlohy 2. typu
  - Řeší se pomocí sčítání nebo odčítání
  - Východiskem matematizace je porovnávání množin, množiny jsou vázány vztahem o několik více nebo o několik méně
- Multiplikativní úlohy 1. typu
  - Řeší se pomocí násobení nebo dělení
  - Multiplikativní úlohy 1. typu na násobení = úlohy na vytváření skupin po několika
  - Multiplikativní úlohy 1. typu na dělení = úlohy o rozdělování na konkrétní počet částí
- Multiplikativní úlohy 2. typu
  - Řeší se pomocí násobení nebo dělení
  - Tento typ úloh je vázán vztahem několikrát více nebo několikrát méně

2.6.2 Fáze řešení slovních úloh jsou shodné na prvním i druhém stupni

Porozumění textu → Rozbor → Matematizace reálné situace → Řešení matematické úlohy → Ověření správnosti zkouškou → Slovní odpověď

2.6.3 Cíle zařazování slovních úloh na prvním stupni ZŠ

- Aplikační

Praktické využití matematických poznatků v reálném životě

- Motivační

Vzbuzení zájmu o řešení slovních úloh, nalezení smyslu v řešení, formování vztahu k učení, matematice i jiným oblastem lidského života

- Nácvik řešení problému

Uvědomění si, jaké údaje jsou známé, zjištění, jak je třeba postupovat, aby byl nalezen výsledek – zvolit správnou strategii

- Hlubší pochopení matematických poznatků

Pochopení vazeb mezi matematickými poznatky a vyvozování vztahů

Takto popisuje slovní úlohy na 1. stupni základní školy Matějů (2005).

2.7 Slovní úlohy na druhém stupni základní školy

Na druhém stupni žáci řeší složené slovní úlohy. To znamená, že k řešení musí využít více než jednu početní operaci.

2.7.1 Druhy slovních úloh

Setkáváme se s několika kategoriemi slovních úloh.

Jedním z možných členění je

- Slovní úlohy řešené pomocí rovnic
- Slovní úlohy řešené pomocí soustavy rovnic

Jiné dělení je podle povahy slovní úlohy. V moderních učebnicích se s tímto rozdělením již obvykle nesetkáme, vzorové úlohy ale stále odpovídají tomuto dělení a většina učitelů matematiky tuto terminologii stále používá.

- O pohybu
- O společné práce
- Směsi a roztoky
- Obecné slovní úlohy

2.7.2 Fáze řešení slovních úloh

Aby žák vyřešil slovní úlohu, obvykle se udává 6 fází, kterými by měl žák projít. Někdy se první a druhá fáze slučuje do jedné.

1. Porozumění textu
2. Rozbor
3. Matematizace reálné situace
4. Řešení matematické úlohy (měl by předcházet odhad výsledku, který je někdy začleněn jako další z fází)
5. Ověření správnosti zkouškou
6. Slovní odpověď

1. Porozumění textu

Poté, co si žák přečte zadání slovní úlohy, musí vědět, co se od něj požaduje. To znamená, že musí pochopit předmět otázky a vyčíst zadané údaje. Důležité také je, aby žák rozuměl číselným údajům (50 ha = padesát hektarů). Je třeba, aby žáci rozlišili údaje, které jsou k vyřešení důležité, a údaje, které jsou v úloze nadbytečné. Neméně podstatná je délka textu, srozumitelnost textu k věku žáka a také zajímavost textu.

2. Rozbor

V této části musí být zvláště pozorní; je nutné najít vztah mezi zadanými údaji a mezi tím, co je zadáno. Žák se musí také zamyslet, zda podobný příklad již řešil. Pokud ano, měl by si vybavit postup řešení, případně nějaký vzoreček na vyřešení úlohy. V rozboru by neměl chybět ani obrázek zobrazující vztahy mezi vyjádřenými údaji. Mnoha žákům pomůže grafický rozbor lépe pochopit zadanou situaci. Některé úlohy lze pomocí obrázku vyřešit nebo aspoň provést odhad.

3. Matematizace slovní úlohy

Matematizace znamená převedení textu do matematického vyjádření. Důležité je zvolit správně neznámou a zapsat jí pomocí symbolů. Podle neznámé následně vyjádřit ostatní údaje.

4. Řešení matematické úlohy

Této části by měl na základě rozboru nebo obrázku předcházet odhad. Odhad by měl být proveden aspoň v řádech pro předběžnou kontrolu výsledku.

Některé slovní úlohy lze řešit pouhým úsudkem, jiné aritmetickým řešením.

Obvykle se ve škole řeší slovní úlohy pomocí rovnice. Sestavenou rovnici pak žáci řeší pomocí algoritmů. Žáci však často neumí řešit složitější rovnice (například pokud se v rovnici vyskytují zlomky nebo závorky). V této části se také vyskytují početní chyby z nepozornosti.

5. Ověření správnosti zkouškou

Zkouškou kontrolujeme nejen správnost vyřešení rovnice (nebo jiného postupu, pokud neřešili úlohu rovnicí), ale také správnost vzhledem k zadání. Výsledek by měli žáci porovnávat i s rozborem, obrázkem nebo odhadem.

6. Slovní odpověď

Každé slovní úloze náleží i slovní odpověď. V úloze je důležitá – žák musí vědět, jaký výsledek je odpovědí a co přesně spočítal. Je především věcí učitele, aby od žáků vyžadoval psát slovní odpověď.

Toto rozdělení uvádí ve své práci Štiková (2005)

2.7.3 Cíle zařazování slovních úloh na druhém stupni ZŠ

Jsou shodné jako na prvním stupni, jsou to tedy tyto cíle:

- Aplikační
- Motivační
- Nácvik řešení problému
- Hlubší pochopení matematických poznatků

3 Strategie

3.1 Strategie řešení

3.1.1 Převod slovní úlohy na matematickou úlohu

Podle Šedivého (1990) lze slovní úlohu převést na matematickou dvěma základními postupy - syntetickým a analytickým. Ty se dále dělí.

- Syntetický postup

V syntetickém postupu vycházíme z čísel, které jsou zadané v podmínce. Vybereme dvě z nich a vytvoříme jednoduchou úlohu. K výsledku vybereme další číslo a opět složíme jednoduchou úlohu. Z výsledků a dalších čísel vhodně sestavujeme další jednoduché úlohy, dokud nedojdeme k odpovědi na zadanou otázku

Tento postup se provádí buď aritmeticky, nebo graficky.

Aritmetický postup znamená řešení pomocí čísel, vycházíme tedy ze zadaných čísel a počítáme další číselné charakteristiky, dokud nedojdeme k hledané odpovědi.

Při grafickém řešení vyjádříme vztahy mezi veličinami pomocí zadaných čísel, souřadnicové soustavy nebo množinových diagramů.

- Analytický postup

V analytickém způsobu řešení vycházíme z otázky slovní úlohy. Zjistíme, které číslo máme vypočítat, a podle toho uskutečníme takovou operaci, která nás vede k odpovědi na danou otázku.

Při tomto postupu označíme hledaná čísla pomocí písmen (například x, y) a sestavíme rovnici, případně soustavu rovnic. Může se jednat o rovnici lineární, kvadratickou, i o rovnici vyššího stupně, případně o nerovnici.

- Analyticko – syntetický postup

Poslední postup vzniká kombinací dvou předchozích postupů.

3.1.2 Strategie řešení slovních úloh

Strategie = plán činnosti

Původně se slovo strategie používalo pouze ve významu vojenském – nauka o válce a jejím vedení.

Dnes se slovo strategie používá v různých souvislostech, jako plán k dosahování úspěchu. Ve školním prostředí se setkáváme například se strategií učení, strategií řešení úloh a podobně.

Strategie nemusí být promyšlená, člověk si dokonce nemusí ani uvědomovat, že nějakou strategii používá. Případně nemusí vědět o tom, zda používá právě tuto, nebo jinou strategii.

Strategie může vznikat až během řešení problému.

3.1.2.1 Základní rozdělení řešitelských strategií v matematice

Hejný (2001) rozděluje strategie tímto způsobem:

- Standardní (výpočtová) strategie
- Investigativní (průzkumná) strategie

Při řešení standardní strategií víme od začátku, jak budeme postupovat. Takové úlohy nevyžadují žádný důvtip. Úlohy, které řešíme standardní strategií, se nazývají cvičení.

Jestliže úlohu řešíme investigativní strategií, není nám známá cesta k řešení, řešení takové úlohy vyžaduje důvtip. Znamená to, že v takové úloze musíme bádat, zkoumat, vyšetřovat nebo hledat. Úlohu, kterou řešíme investigativní metodou, nazýváme problémem.

Obvykle mimo toto dělení patří strategie pokus – omyl, někdy se řadí mezi investigativní strategie.

- Pokud jde o pokusy zcela náhodné, postup do dalších kroků není promyšlený, hovoříme o strategii pokus – omyl
- Jestliže na základě pokusu dojdeme ke špatnému výsledku a další krok podle toho upravíme, jedná se o strategii pokus – oprava (korekce)
- Úlohy, které jsou zcela promyšlené, u kterých provedeme odhad, z něhož zjistíme chybu a podle toho upravíme výpočet, vychází také ze strategie pokus – omyl – výpočet

3.1.2.2 Heuristické strategie

- Heuristika – z řeckého heuréka = objevil jsem
- Tyto strategie podporují objevování, pátrání, hledání
- Motivují a pomáhají k osvojení potřebných vědomostí
- Podněcují samostatné a tvořivé myšlení
- Podle Maňáka (2003) rozlišujeme tyto fáze řešení problému:

1. Identifikace problému
2. Analýza problémové situace
3. Vytvoření hypotéz, domněnek a návrhů řešení
4. Verifikace hypotéz, vlastní řešení problému
5. Při neúspěšném řešení návrat k dřívějším fázím

- Hromas (1986) ve své práci uvádí tento postup při řešení slovních úloh heuristickou strategií:

1. Analýza a pochopení úlohy
   1.1. Sestrojení obrázku, pokud to lze
   1.2. Prozkoumání speciálních případů (prošetření mezních případů, zvolení speciálních hodnot, postupné dosazení čísel)

1.3. Zjednodušení slovní úlohy, pokud je to možné
2. Návrh a plánování řešení
   2.1. Postupné plánování
   2.2. Odůvodnění postupu v každém kroku
3. Postup při těžkých úlohách
   3.1. Sledování ekvivalentního problému (nahrazení problému ekvivalentním, nahrazení podmínek, spojování dílčích částí úlohy, pomocné prvky)
   3.2. Prostudování lehce pozměněné úlohy
   3.3. Prostudování silněji pozměněné úlohy (například vyřešením problému s podobnou formou a podmínkami)
4. Zkouška správnosti
   4.1. Ověření, zda výsledek odpovídá ve všech zadaných podmínkách
   4.2. Ověření, zda řešení vyhovuje obecnému textu

3.1.3 Možnosti jak dojít k výsledku slovní úlohy

Podle Kuřiny (1989) máme při řešení slovních úloh dvě možnosti, jak dojít k výsledku.

1. Provedení experimentu v realitě – tento přístup je však často nemožný, případně velmi drahý a pro matematiku nepříliš významný.
2. Modelování úlohy tak, abychom získali požadované odpovědi – obvyklý přístup. Model má přesvědčivě vyjadřovat reálnou situaci. V podstatě překládá text do jazyka, který umožňuje snáze řešit danou úlohu. Modely se dále dělí na typy, z nichž je možné uvést tři patrně nejdůležitější.
   a. Činnostní modely – například množina oblázků, počitadlo, kuličky, tyčinky,…. Tyto modely reprezentují nějakou množinu ze zadání slovní úlohy. Činnostní model má důležitou roli především na prvním stupni.
   b. Ikonické modely – obrázky, schémata, názorné vyjádření textu s minimem použitých slov.
   c. Symbolické modely – rovnice, soustavy rovnic, nerovnice, popis reálné situace pomocí symbolů, které byly v matematice zavedeny.

3.1.4 Metody řešení rovnic

Hejný (1990) uvádí čtyři metody řešení rovnic, které se využívají také při řešení slovních úloh.

1. Pokus – omyl

Tato metoda je velmi významná za předpokladu, že žák postupuje systematicky s cílem najít další dílčí výsledky – například půlením intervalu. Pokud žák přijde na výsledek náhodou, bez systému, nepodporuje tato metoda matematické myšlení.

2. Tabulková metoda

Jedná se o technicky vylepšenou metodu pokus – omyl, která je však zároveň kvalitativně vyšší. Umožňuje žákům řešit i náročnější úlohy. Žák si pro tuto metodu musí ovšem osvojit návyky systematické práce.

3. Záměrná předmětná manipulace

Pro tuto metodu je typická práce s modely. Práce s předmětnými modely představuje mnoho kreslení – využívá se například kreslení vah, kdy každá miska představuje jednu stranu rovnice. Cílem je, aby žáci pochopili a aktivně si osvojili tyto zásady – rovnice se nezmění, jestliže na obou stranách rovnice provedeme stejnou změnu; řešení rovnice znamená uskutečnění série takových změn, která povede k rovnosti „neznámá = známá“.

4. Kalkul

Tato metoda znamená přechod od modelu k symbolice. Při této metodě již musí žák chápat obě zásady řešení rovnic. Symbolika urychluje a zjednodušuje proces řešení rovnic, na druhé straně bývá častým zdrojem chyb kvůli nedostatečně promyšleným úpravám.

3.1.5 Způsoby řešení slovních úloh

Tyto metody žáci využívají tedy nejen k řešení rovnic, ale i k řešení slovních úloh. Hejný (2001, s. 196) však mimo to uvádí dva nejčastější způsoby řešení slovních úloh.

1. Řešení úsudkem - situaci v tomto případě analyzujeme od konce. Nejprve zkusíme odhadnout výsledek, pokud odhad není hledaným výsledkem, upravujeme odhad, dokud nedojdeme k výsledku.
2. Řešení aritmetickým modelováním – hledaný výraz označíme neznámou a číselně modelujeme text úlohy.

Řešení úsudkem bývá často kratší a srozumitelnější, ale řešitel neví, zda nalezl všechny výsledky.

3.2 Didaktický kontrakt

Brousseau definoval v 80. letech 20. století kontrakt takto:

Kontrakt znamená soubor konkrétních postojů, které žák očekává od svého učitele, a soubor konkrétních postojů, které učitel očekává od žáka.

Kontrakt není všeobecná pedagogická dohoda, ale jsou to nepsaná pravidla jednání, která si v určitém momentě vyučování vytvoří žák a učitel. Znamená to, že žák i učitel má určité povinnosti vůči druhé straně. Kontrakt, který se zdá být pro obě strany spojující, se dá vyjádřit jednoduchým způsobem – učitel musí učit a žák se musí učit. Předpis je jednoduchý, obsahuje však vážný paradox přenesení – učitel má hovořit na žáka, který ale nemůže rozumět, protože se musí učit.

K vysvětlení pojmu kontrakt může posloužit tento příklad:

Učitel vysvětluje žákům algoritmus pro rychlejší výpočet rozdílu dvou čísel

328	→ +3	331	→ +50	381
<u>-47</u>	→ +3	<u>-50</u>	→ +50	<u>-100</u>
281		281		281

O několik týdnů později měli řešit tyto příklady:

a) 875 – 379 =
b) 964 – 853 =
c) 999 – 111 =

84% žáků aplikovalo na příklad c) zmíněný algoritmus místo možnosti nalezení rozdílu rovnou. Žáci tedy reagovali podle toho, co předpokládali, že učitel očekává. Tyto závěry zveřejnil ve své práci Sarrazy (2005).

Při kontraktu žáci uplatňují pravidla stanovená učitelem a to i ve velmi jednoduchých cvičeních, kde tato pravidla není třeba využívat. Žáci jsou přesvědčeni, že pravidla daná učitelem platí vždy a musejí se používat. Žákovská usnesení jsou díky tomu mechanická, chybí tvůrčí řešení a úlohy se stanou někdy komplikovanější. (Bagni 1996)

3.3 Strategie učitele

3.3.1 Styly vyučování

Je publikováno mnoho stylů vyučování. Ve vztahu ke kontraktu je vybráno toto rozdělení, které je popsáno v práci Sarrazy (2005).

Vnímavost žáků ke kontraktu ovlivňuje klima ve třídě. Můžeme definovat tři styly vyučování, které ovlivňují klima a tím i vnímavost ke kontraktu.

1. „Devolving“ – převedení. Tento styl znamená to, co můžeme nazvat aktivní pedagogikou. Učitel vyžaduje, aby žáci byli aktivní. Hodiny jsou velmi proměnlivé, využívá se skupinová práce, žáci reagují spontánně, úlohy jsou komplexní.

2. „Institutionalisation“ – institucionalizovaný styl. Tento styl můžeme nazvat jako klasický. Hodiny mají stejné schéma – „ukázka → zapamatování → naučení“; toto schéma je v podstatě pravidlem. Učitelé, kteří vyučují tímto stylem, představí jeden

způsob řešení typizovaného příkladu a následně žákům ukazují příklady s narůstající náročností. Příležitostně zve učitel žáky k tabuli, aby se přesvědčil, zda dávají pozor a ověřil jejich vědomosti. V takových hodinách žáci nereagují spontánně, učitel vyžaduje pevný řád a snaží se eliminovat cokoliv neobvyklého ve svých hodinách.

Tyto dva styly jsou extrémní, poslední, třetí styl je přechodem mezi těmito styly.

3. „Intermediary“ - prostřední styl. Tento styl znamená přechod mezi extrémními směry, jimiž jsou „devolving“ a „institutionalisation“ styly. Žáci mají možnost v tomto stylu více diskutovat než v institucionalizovaném stylu. Přesto je prostřední styl bližší institucionalizovanému stylu.

Vnímavost podle stylu vyučování můžeme ukázat na následující pseudomultiplikativní úloze:

Šnek v údolí se rozhodne vylézt. Jestliže víte, že potřebuje 6 dní na to, aby vylezl z údolí, kolik dní potřebují tři šneci, aby vylezli z tohoto údolí?

48% žáků, u kterých výuka probíhala devolving stylem, označili sami sebe jako řešitele, kteří vytvořili odpověď bez počítání

30% žáků, jež měli výuku vedenu intermediary stylem, označili sami sebe jako řešitele, kteří vytvořili odpověď bez počítání

Pouze 17% žáků, u kterých výuka probíhala Institutionalisation stylem, označili sami sebe jako řešitele, kteří vytvořili odpověď bez počítání

3.3.2 Strategie práce učitele

Hejný (1990) popisuje dva základní typy přístupové strategie:

1. Postojová strategie učitele

Při této strategii učitel postupuje v interakci se žákem tímto způsobem – nejprve etiketuje žáky nálepkami (usilovně pracující, drzý a jiné); následně, na základě vlastních zkušeností a podle názoru kolegů, si buduje systém návodů, jak v jednotlivých situacích jednat. Učitel realizuje svůj pedagogický program mocenskými prostředky, nátlaky. Jeho postoje jsou obvykle velmi subjektivní a neměnné.

2. Dialogická strategie učitele

Charakteristickými rysy dialogické strategie jsou sladěná motivace, vzájemný dialog mezi učitelem a žákem a společná radost učitele i žáka. Při této strategii učitel neposuzuje žákovo chování vztahovačně, ale hledá příčinu jeho chování. Učitel také bere na vědomí citovou a rozumovou úroveň žáka.

3.3.3 Přístupy k vyučování

Přístupy k vyučování dělíme podle Novotné (2004) na tyto dva základní

- Konstruktivistické vyučování
- Transmisivní vyučování

Konstruktivistické vyučování vede žáky k aktivnímu myšlení, na základě něho konstruují své poznání sami. Důraz je kladen na rozvoj osobnosti. Výuka často probíhá ve skupinách, kde žáci komunikují mezi sebou, sdělují si své poznatky a posuzují své výsledky i výsledky druhých. Samozřejmostí je také otevřená komunikace mezi učitelem a žákem. Učitel se snaží nepředkládat žákům hotové poznatky, ale ukazuje jim cestu k vlastnímu poznání.

Při transmisivním vyučování se klade důraz především na výkon. Žák není veden k aktivnímu poznávání, ale k pouhému pasivnímu přijímání a ukládání vědomostí do paměti bez propojení s předchozími znalostmi. Učitel předkládá typové úlohy, na kterých ukazuje možné řešení, takové úlohy jsou následně procvičovány a později jsou z nich žáci zkoušeni.

3.4 Algoritmus

Přesný předpis, kterému se lze naučit; podle něho se v určitém pořadí vykonává soustava operací vedoucích k vyřešení všech úloh daného typu, například sčítání, násobení, odmocňování i řešení složitějších problémů.

(Hartl 1993, s. 37)

Předpis určující postup akcí při řešení určitého úkolu, který je možno popsat konečným textem. Algoritmus je schopen přetvářet prvky určité vstupní množiny (vstupní objekty) v objekty výstupní. Průběh algoritmu, jak na sebe jednotlivé akce navazují, je jednoznačně určen až předepsáním všech vstupních objektů. Například algoritmus pro stanovení největšího společného dělitele dvou celých kladných čísel: Menší číslo odečteme od většího a menšence nahradíme rozdílem; postup stále opakujeme a ukončíme tehdy, když jedno z čísel se rovná nule; druhé číslo je pak výstupním objektem, totiž největší společný dělitel obou výchozích čísel. Vstupní množina tohoto algoritmu je množina všech dvojic různých celých čísel. (Sedláček 1981, s. 10 - 11)

Algoritmus můžeme popsat také jako konečné pořadí určitých kroků, kde žádná instrukce není dvojznačná. Po provedení konkrétních kroků je vždy dosaženo správného výsledku, pokud se řešitel nedopustí chyby. (Albertson 1988)

Algoritmus je postup, kdy krok za krokem dosahujeme určitého cíle v konečném čase. Často je to jen několik kroků, které se opakují dokola, dokud je to nutné.

Mezi základní algoritmy, se kterými se setkáváme na základní škole, patří sčítání, odčítání, násobení a dělení. Tyto algoritmy jsou nejznámější, existují ale mnohé jiné.

Postavení algoritmů ve škole se mění díky dostupnosti počítačů a kalkulaček. Dnes osnovy kladou důraz na matematické myšlení, řešení problémů a odhad. Algoritmy mají ale stále důležitou roli ve školní výuce.

Výuka pomocí algoritmů je označována jako tradiční výuka. Dalším důvodem, proč se dnes částečně upouští od této tradiční výuky je fakt, že velké procento žáků nedokáže algoritmy správně používat.

Nepřesná přesvědčení o algoritmech a tradiční výuce matematiky

- Každý příklad má pouze jeden způsob řešení
- Každý příklad se vyřeší do deseti minut, jinak nelze vyřešit vůbec
- Matematika je pouze o memorování poznatků
- Rychlost a přesnost jsou důležitější než porozumění

Algoritmy mají naopak pomoci vidět smysluplnost matematiky a dát porozumění vztahům, algoritmy by měly pomáhat stavět matematiku.

Algoritmy mohou být pro stejný typ úlohy ve dvou odlišných zemích rozdílné. Například odečítaní se učí jinak děti v Evropě a jinak děti v USA. Některé algoritmy, které se využívaly před mnoha staletími, používáme dodnes; jiné jsme nahradili novějšími algoritmy. To vysvětluje, že představa o jediném způsobu řešení je lehce zpochybnitelná. (*Algorithms in Everyday Mathematics*)

Algoritmické myšlení má tyto rysy

- Diskrétnost
- Determinismus
- Rezultativnost
- Hromadnost
- Diskrétnost

Proces postupné konstrukce hodnot v diskrétním čase, na začátku jsou zadány výchozí údaje, v každém následném časovém úseku se získává systém hodnot použitím určitého postupu systému hodnot, které jsou k dispozici z předcházejícího časového úseku.

- Determinismus

Systém hodnot, získaný v jakémkoliv časovém úseku, kromě počátečního, je určen jednoznačně systémem hodnot, získaných v předcházejících časových úsecích; tato metoda činnosti musí být sdělitelná jiné osobě nebo stroji ve formě konečného počtu pokynů a musí to být proces, který může být v libovolné době a libovolným člověkem opakován se stejným úspěchem.

- Rezultativnost

Proces použitý k řešení úlohy daného typu se po konečném počtu kroků zastaví a po zastavení dá hledaný výsledek.

- Hromadnost

Použitý proces neslouží k řešení pouze jedné slovní úlohy, ale k řešení celé třídy úloh, výchozí údaje se mohou měnit.

(Luhan 1990, s. 48-49)

3.5 Formalismus

Hejný (2001) popisuje formalismus takto:

Formalismus vede člověka k povrchnímu pohledu bez hlubšího pochopení.

Formální poznání = soubor izolovaných paměťových údajů, kde každý údaj představuje hotový poznatek.

- Takové poznatky jsou přijímány bez většího zpracování. Formální poznání využíváme při řešení standardních úloh, v životě je však obvykle nevyužijeme.
- Vede k deformaci vědomostí

Matematické způsobilosti – formalismus utlumuje některé intelektuální způsobilosti – například schopnost analyzovat, hierarchizovat jevy podle důležitosti, tvořit hypotézy nebo argumentovat.

Formalismus se projevuje nejen v matematice, ale i v běžném životě, kde žáci ztrácí sebevědomí (sám nestačím na pochopení náročných vztahů), spoléhá na rozhodnutí druhých. Hovoříme o nákaze formalismem nebo také o bacilu formalismu. To znamená, že učitel nedá žákovi dostatečný prostor, aby si udělal představu sám.

Podstatou zdravého rozvoje matematických znalostí je posloupnost

Motivace → modely (nejprve modely separované, poté následují modely univerzální) → poznatek

Pokud není tato posloupnost dodržena, dochází u žáka k chorobě formalismu.

Formalismus lze odstranit doplněním chybějící zkušenosti.

Diagnostikovat formální poznání můžeme tehdy, když se žák dostane do nestandardní situace. Pokud ji nedokáže vyřešit, bude se pravděpodobně jednat o chorobu formalismu. Nestandardní situace jsou například řešení nestandardní úlohy, nalezení chyby v úvaze, objasnění některých pojmů nebo aplikace vzorce v praxi.

4 Učebnice matematiky

Učebnice matematiky jsou dalším zdrojem, který může ovlivnit výuku slovních úloh na ZŠ. V každé knize je výklad slovních úloh podán trochu odlišně, což může ovlivnit učitelovu výuku a následně i žákovské řešení.

V učebnicích matematiky by neměly chybět ukázkové příklady se všemi fázemi řešení slovní úlohy, a to i grafické znázornění a odhad. Ukázkové úlohy by měly zahrnovat různé typy slovních úloh, případně by se měla objevit různá řešení, pokud je to možné.

K rozboru učebnic jsou vybrány tři, podle kterých se dnes ve školách vyučuje asi nejčastěji. Slovní úlohy se probírají zejména v osmé třídě, proto jsou zvoleny právě učebnice pro osmý ročník.

- Molnár, J. a kol. (2000): *Matematika 8,* Olomouc: Prodos
- Odvárko, O., Kadleček, J. (2000): *Matematika 8. r. - 2. díl - Lineární rovnice; základy statistiky,* Praha: Prometheus.
- Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P. (2009): *Matematika 8 – Aritmetika Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*, Plzeň: Fraus.

- Molnár, J. a kol. (2000): *Matematika 8,* Olomouc: Prodos.

V této knize je slovním úlohám věnována jedna kapitola, která následuje po lineárních rovnicích. Vyřešeno je jedenáct ukázkových příkladů. Každá úloha je řešená pomocí rovnice, obvykle je před rovnicí napsán i rozbor, po výpočtu je provedena zkouška a nechybí ani slovní odpověď. Některé příklady jsou doplněny o grafický rozbor (slovní úlohy o pohybu).

V ukázkových úlohách naopak chybí odhad výsledku, což je škoda, protože příklady jsou rozepsány jinak velmi podrobně. Na druhou stranu tato učebnice obsahuje příklad, který v ostatních učebnicích zařazen není – je jím úloha, která nemá řešení. Ukázat žákům, že ne každá úloha musí mít řešení je velmi podstatné. Děti by se s takovým příkladem měly setkat, protože jinak jim často nepřijde nic zvláštního na výsledné odpovědi, která nemůže nastat (např. odpověď tatínek koupil ⅜ vejce). V této učebnici jako v jediné nejsou zařazeny úlohy o společné práci. Rovnice se zlomky, a tudíž i úlohy o společné práci, jsou zařazeny až v učebnici pro 9. ročník.

- Odvárko, O., Kadleček, J. (2000): *Matematika 8. r. - 2. díl -Lineární rovnice; základy statistiky*, Praha: Prometheus.

Do řešení slovních úloh nás v této kapitole zasvětí kapitola Rovnice kolem nás. I v této knize nalezneme řadu řešených příkladů na různé typy slovních úloh. V ukázkách nechybí rozbor, rovnice a její řešení, poté následuje zkouška a slovní odpověď. U několika úloh je pro větší názornost proveden i rozbor pomocí obrázku. Mnohým žákům jednoduchý obrázek pomůže lépe si představit situaci. Obrázky jsou uvedeny nejen u úloh o pohybu, ale také u ukázkového příkladu na společnou práci.

Bohužel i v této knize chybí v ukázkách odhad výsledku a nevyskytuje se zde žádný příklad, který by neměl řešení. Nenalezneme zde ani příklad na směsi. Oproti ostatním učebnicím ale kniha obsahuje základní pravidla pro řešení slovních úloh pomocí rovnic s jednou neznámou.

- Přečíst text
- Zvolit neznámou
- Vyjádřit ostatní veličiny pomocí neznámé
- Sestavit rovnici
- Provést zkoušku
- Napsat odpověď

V podkapitole Výpočet neznámé ze vzorce nechybí ani dvě různá řešení téže úlohy, což u žáků může podporovat rozvoj vlastních strategií řešení slovních úloh.

- Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P. (2009): *Matematika 8 – Aritmetika, Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*, Plzeň: Fraus

Tato kniha nám opět nabízí řešené příklady na různé typy slovních úloh. Řešení každého příkladu je rozděleno do částí - Co víme?, Co chceme spočítat?, Rovnice a její řešení, Odpověď a nechybí ani Zkouška. K většině příkladů jsou přiřazeny i obrázky, které rozebírají danou úlohu názorně. Tato učebnice jako jediná obsahuje také odhad výsledku, a to konkrétně u příkladu na společnou práci.

Kniha také připouští, že téměř každá úloha lze řešit více způsoby, proto jsou u jednoho příkladu uvedena dokonce tři možná řešení. Nalezneme zde i odkaz na počítačový program Slovní úlohy, kde si žáci mohou úlohy procvičit interaktivním způsobem.

V učebnici nechybí řešení žádného typu slovních úloh- jsou zde vyřešeny příklady o pohybu, o společné práci, na směsi i obecné. Ukázkový příklad na úlohu, která nemá řešení, není uveden.

5 Experiment

5.1 Cíl

Cílem experimentu bylo zjištění, zda jsou žáci schopni najít vlastní způsob řešení a úlohy podle toho vyřešit. Dále nás zajímalo, jestli se změní postup řešení poté, co se ve škole naučí algoritmy pro řešení slovních úloh pomocí rovnic. Sledovali jsme také, zda dojde ke změně výsledků a způsobu řešení půl roku poté, co se žáci učili slovní úlohy řešit. K tomuto experimentu jsme použili písemné práce na slovní úlohy.

5.2 Postup pro zadání testů

Písemné práce na slovní úlohy byly zadány ve dvou paralelních třídách. Tyto písemné práce řešili žáci jedné základní školy a obě třídy vyučovala stejná učitelka. V jednom případě se jednalo o třídu sportovní, v druhém o třídu, která nemá speciální zaměření.

Tyto práce žáci řešili celkem třikrát a to v půlročních intervalech. Každá práce obsahovala pět příkladů, které byly ve všech testech typově shodné, došlo pouze k mírným úpravám v zadání, aby žáci neřešili tři shodné testy.

První test byl zadán v době, kdy se žáci ještě neučili lineární rovnice a tudíž ani slovní úlohy, v našem případě to znamenalo v prvním pololetí 8. třídy. Druhý test žáci vypracovali těsně poté, co probrali lineární rovnice a slovní úlohy, tedy v druhém pololetí 8. třídy. Třetí test, který žáci psali v prvním pololetí 9. třídy, byl zadán půl roku poté, co se žáci ve škole učili postup, jak řešit rovnice a slovní úlohy.

Na vypracování testu měli žáci vždy celou vyučovací hodinu. Každý žák pracoval samostatně, k dispozici bylo pouze zadání, papír a psací potřeby. Kalkulačky, tabulky, sešity, ani učebnice nebyly povoleny. Během testu žákům nebylo zodpovídáno na případné dotazy k zadání.

Všechny tři testy byly žákům zadávány v dopoledních hodinách – 2. nebo 3. vyučovací hodinu. Byla dána přednost dnům v týdnu, které nejsou začáteční ani koncové – tedy úterý nebo středa.

5.2.1 Škola

Experiment byl proveden na městské základní škole se sportovním zaměřením, kterou navštěvuje přibližně 900 žáků.

5.2.2 Třídy a žáci

Test byl proveden ve dvou paralelních třídách 8.I. (později 9.I.) a ve třídě 8.II. (později 9.II.). Třída 8.I. (resp. 9.I.) je třídou sportovní, 8.II. (resp. 9.II.) nemá speciální zaměření.

Po rozhovoru s učiteli, kteří v této třídě vyučují, byla třída 8.II. (resp. 9.II.) označena za třídu s lepšími výsledky. Sportovní třída byla označena také jako méně aktivní a snaživá.

Žáci z obou tříd jsou zvyklí řešit úlohy podle ukázkového příkladu, který řeší učitelka na tabuli, podle svého vlastního řešení obvykle nepostupují. K procvičování a samostudiu žáci používají především své poznámky v sešitech, učebnice nevyužívají ani v hodinách, proto se z nich neučí ani při samostatné práci.

5.2.3 Učitel

Ve třídě 8.I. (později 9.I.) i ve třídě 8.II. (později 9.II.) vyučovala matematiku stejná učitelka. V obou třídách tedy byly podmínky týkající se vyučujícího shodné.

Přístupová strategie učitelky lze označit spíše jako postojová strategie učitele než jako dialogická. Ani v jedné ze tříd není tato vyučující třídní učitelkou, proto má k žákům spíše formální přístup, hodiny mají přesná pravidla a vzájemný dialog se žáky zde není příliš obvyklý.

Styl vyučování učitelky matematiky lze označit jako „Institutionalisation“ – institucionalizovaný styl. Sama vyučující označuje svou výuku za transmisivní, z mého pozorování i podle odpovědí kolegů učitelů bych ji také zařadila do této skupiny. Její hodiny mají dané jasné schéma - „ukázka → zapamatování → naučení“. Učebnice nejsou při hodinách příliš využívány, žáci z nich dostávají pouze samostatná cvičení pro opakování doma. Příklady, které učitelka používá jako vzorové příklady, případně jako příklady k procvičování, hledá v učebnicích, na internetových portálech, v některých případech úlohu vymyslí sama. Žákům je zadání příkladů obvykle diktováno a příklady jsou řešeny na tabuli, v případě opakování řeší žáci úlohy do sešitů a poté na tabuli, učebnice nejsou v těchto fázích vůbec využity. Vzorové příklady na tabuli řeší učitelka pouze jedním způsobem, tento způsob řešení následně aplikuje i na další úlohy k procvičování. Do fáze, kdy je řešen vzorový příklad, se žáci obvykle nezapojují vůbec, při procvičování pak většina z nich řeší úlohy podle vzorového příkladu.

5.2.4 Učebnice využívané ve třídách 8.I. a 8.II.

Žáci mají k dispozici tyto dvě učebnice

- Odvárko, O., Kadleček, J. (2000): *Matematika 8. r. - 2. díl - Lineární rovnice; základy statistiky,* Praha: Prometheus.
- Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P. (2009): *Matematika 8 – Aritmetika Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*, Plzeň: Fraus.

Tyto učebnice nabízejí mnoho řešených i neřešených příkladů. Navíc obě učebnice ukazují různé způsoby, jak řešit slovní úlohy. Dvě učebnice znamenají dva poněkud odlišné přístupy k řešení slovních úloh a používání obou zároveň může žákům „rozšířit matematické obzory“ a inspirovat je k dalším způsobům řešení slovních úloh.

Přes výše zmíněné výhody využívání obou učebnic, učitelka podle učebnic nevyučuje, příklady k procvičování obvykle čerpá z jiných zdrojů a na řešené příklady v učebnicích žáci upozorňováni nejsou. Žáci tedy učebnice používají nanejvýš při domácích úkolech, kdy je zadání příkladů napsáno v některé z nich.

5.3 Zadání testů

1. test

1. *Délka zahrady obdélníkového tvaru je o 5 m kratší než dvojnásobek její šířky. Obvod zahrady je 98 m. Jakou má zahrada plochu?*
2. *Dva kamarádi se rozhodli jít na chatu. První zvolil trasu, která byla o 5 km kratší, ale zato byla strmější, a tak šel rychlostí 3 km/h. Druhý šel 15 km, ale lepší cestou, tudíž šel rychlostí 5 km/h. Který kamarád byl u chaty první?*
3. *Vzdálenost dvou míst je 200 km. Z Adamova vyjelo v 7:00 nákladní auto průměrnou rychlostí 40 km/h. V 9:00 mu vyjelo naproti z Bedřichova osobní auto pohybující se průměrnou rychlostí 80 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od Adamova se obě vozidla setkají?*
4. *Pan Omáčka si v restauraci objednal 2 dcl 100% pomerančového džusu. Číšník nevěděl, že pan Omáčka je kontrolor, a přidal do džusu vodu. Pan Omáčka při kontrole zjistil, že džus je pouze 80%. Jaké množství vody číšník do sklenice nalil?*
5. *První zedník by omítl zeď za 6 hodin. Druhý, zručnější, by ji omítl za 4 hodiny. Za jak dlouho by ji omítli společně?*

Poznámka: U čtvrté úlohy bylo v zadání místo zkratky dl užito označení dcl. Žáci jsou na toto označení zvyklí, učitelka ho při výuce využívá, a proto bylo použito i v tomto testu.

2. test

1. *Obdélníková náves má obvod 60 m. Délka návsi je o 9 m kratší než dvojnásobek její šířky. Jakou má náves plochu?*

2. *Děti si daly závod na koloběžkách. Milan jel lepší cestou, která měřila 16 km, ale jel rychlostí 8 km/h. Pavel zvolil cestu strmější, ale o 3 km kratší. Jel rychlostí 6 km/h. Kdo byl v cíli první?*

3. *Lenka a Klára se chtějí sejít. Lenka vyšla z Adamova v 7:00 a šla rychlostí 4 km/h. Klára zaspala, a tak vyjela z Bedřichova v 9:00 na kolečkových bruslích rychlostí 8 km/h. Vzdálenost Adamova a Bedřichova je 20 km. Za jak dlouho a jak daleko od Adamova se dívky setkají?*

4. *Jana nemá ráda příliš sladký džus. Proto si objednala 70% džus a řekla, ať číšník doplní 100% džus sodovkou. Kolik ml vody a kolik džusu přinesl číšník ve 200 ml sklenici?*

5. *Zahradní jezírko se naplní prvním přítokem za 5 hodin, druhým přítokem za 3 hodiny. Za jak dlouho se jezírko naplní, jestliže se jezírko napouští pomocí obou přítoků?*

3. test

1. *Parkoviště tvaru obdélníku má obvod 100m. Délka parkoviště je o 6 m kratší než trojnásobek její šířky. Jakou má parkoviště plochu?*

2. *Karel se vsadil s Petrem, že na kole přijede domů první, i když pojede delší trasu. Karel ujel 20 km nenáročnou cestou, proto jel rychlostí o 5 km/h vyšší, než Petr. Petr jel trasu o 7 km kratší, průměrnou rychlostí 14 km/h. Kdo vyhrál sázku?*

3. *Vzdálenost Albrechtic a Bašty je 400 km. Z Albrechtic vyjelo auto v 8:00 rychlostí 100 km/h. O 60 minut později mu vyjelo z Bašty naproti nákladní auto průměrnou rychlostí 50 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od Albrechtic se obě vozidla potkají?*

4. *Pan Světlík si objednal v restauraci 300 ml 100% jablečného džusu. Číšník byl nepoctivý a přidal do džusu vodu. Pan Světlík, který byl kontrolor, zjistil, že je džus pouze 80%. Kolik ml vody přilil číšník do sklenice?*
5. *První kopáč by vykopal jámu sám za 4 hodiny. Brigádník by jámu vykopal sám za 6 hodin. Za jak dlouho by jámu vykopali společně?*

5.4 Hodnocení testu

Každá úloha testu byla hodnocena zvlášť. Za správné řešení byli žáci ohodnoceni dvěma body. Pokud při řešení žáci udělali chybu, ale základní myšlenka byla správná, dostali jeden bod.

Nebylo bodováno rozdílně, zda žáci k řešení využili vlastní strategii, nebo využili jeden z algoritmů, které zavedla učitelka. Tyto postupy řešení budeme v dalším testu označovat jako algoritmus pro řešení slovních úloh o pohybu (zkratka ALS1) a algoritmus pro řešení slovních úloh o společné práci (zkratka ALS2).

Jedinou výjimkou v hodnocení byla pátá úloha. Výsledek bez chyby byl v tomto případě hodnocen třemi body, správný odhad dvěma body a za výsledek se správnou myšlenkou, ale nějakou chybou v řešení, žáci dostali jeden bod. K tomuto hodnocení bylo přistoupeno z důvodu, že žáci v prvním testu neznali algoritmus pro řešení slovních úloh o společné práci, který učitelka zavedla až před druhým testem. Bez tohoto algoritmu mohli dojít pouze ke správnému odhadu, ne však k přesnému výsledku. Ostatní úlohy bylo možné zcela vyřešit i bez využití algoritmů k řešení slovních úloh.

Všechny tři testy byly hodnoceny tímto způsobem.

5.5 TIMSS 2007

TIMSS je mezinárodní výzkum, který poskytuje informace, jež mohou pomoci zvýšit úroveň žáků v matematice a přírodních vědách. V roce 2007 testování probíhalo od března do května ve 4. a 8. ročnících základní školy a v odpovídající třídě víceletého gymnázia. Testováno bylo více než 9000 českých žáků.

Dvě úlohy z výzkumu TIMSS 2007 (obr. 1, obr. 2) jsou typově podobné úlohám z testů, které řešili žáci v našem experimentu. Úloha na obr. 1 je typově podobná s 1. úlohou v našich testech. Dle výsledků TIMSS lze tedy předpokládat, že úloha bude při řešení pomocí rovnic náročná a vyřeší ji málo žáků. Na obr. 2 je úloha podobná 4. v našich testech.

Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napiš postup výpočtu.

Obsah: rovnice, vzorce a funkce
Cíl úlohy: řešení úloh pomocí rovnic, vzorců a funkcí
Dovednost: uvažování
Obtížnost: úroveň 4

Kód	Odpověď
	Správná odpověď
10	10 zedů a uvedeny rovnice. Rovnice by měly obsahovat písmena jako proměnné, např. $2y + 3x = 17$.
11	10 zedů a uveden jiný postup, např. pero = tužka + 1.
	Nesprávná odpověď
70	10 zedů bez uvedení postupu.
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním).
	Bez odpovědi
99	Prázdné

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	10	11	70	79	99
Četnost [%]	6,4	18,2	3,6	42,6	29,2

Obr. 1 – Úloha z TIMSS – rovnice (převzato z Tomášek 2009, s. 47 – 48)

Slitina je vyrobena ze zlata a stříbra v poměru 1 gram zlata na 4 gramy stříbra.
Kolik gramů stříbra je ve 40 gramech této slitiny?

A) 8 gramů
B) 10 gramů
C) 30 gramů
D) 32 gramů

Obsah: poměr, úměrnost a procenta
Cíl úlohy: řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti
Dovednost: používání znalostí
Obtížnost: úroveň 4

Správná odpověď: D

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	14,4	43,5	12,8	26,9

Obr. 2 – Úloha z TIMSS – procenta (převzato z Tomášek 2009, s. 31)

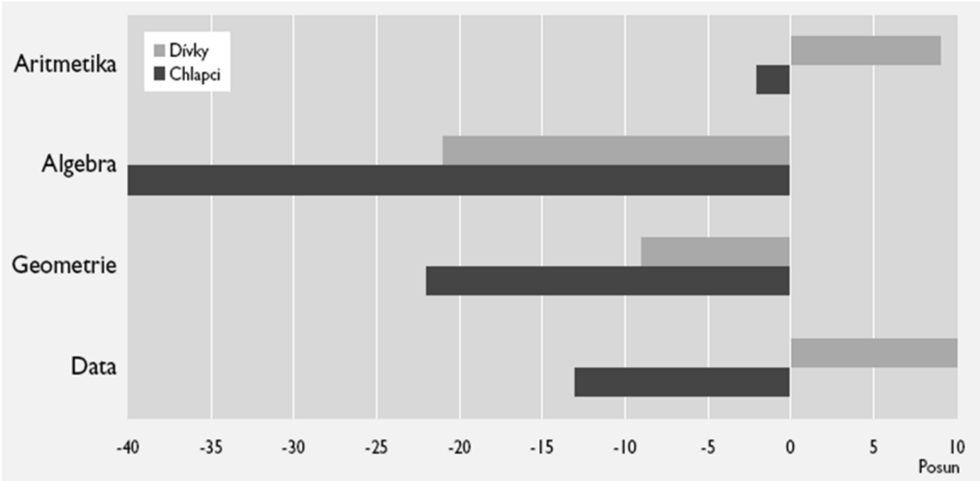
Při mezinárodním porovnání výsledků českých žáků v TIMSS nás zajímají především data z algebry. Zde je podle obr. 3 patrné, že výsledky v této oblasti jsou v Česku pod průměrem.

Země	Oblast učiva			
	Čísla	Algebra	Geometrie	Data
Korejská republika	583	596	587	580
Japonsko	551	559	573	573
Maďarsko	517	503	508	524
Anglie	510	492	510	547
Litva	506	483	507	523
Rusko	507	518	510	487
USA	510	501	480	531
Česká republika	**511**	**484**	**498**	**512**
Slovinsko	502	488	499	511
Arménie	492	532	493	427
Švédsko	507	456	472	526
Austrálie	503	471	487	525
Skotsko	489	467	485	516
Norsko	488	425	459	505
Srbsko	478	500	486	458
Malta	496	473	495	487
Itálie	478	460	490	491
Kypr	464	468	458	464
Ukrajina	460	464	467	458
Bulharsko	458	476	468	440
Rumunsko	457	478	466	429
Bosna a Hercegovina	451	475	451	437
Turecko	429	440	411	445
Gruzie	421	421	409	373

Výsledek je statisticky významně lepší než průměr škály TIMSS
Výsledek se statisticky významně neliší od průměru škály TIMSS
Výsledek je statisticky významně horší než průměr škály TIMSS

Obr. 3 – Výsledky v evropských zemích a v zemích OECD (převzato z Tomášek 2008, s. 11)

TIMSS nám také nabízí porovnání výsledků z výzkumu v roce 1999 a 2007. Podle obr. 4 můžeme vidět výrazné zhoršení českých žáků právě v algebře.



Obr. 4 – Posun ve znalostech žáků od roku 1999 do roku 2007 (převzato z Tomášek 2008, s. 11)

5.6 Hypotézy

Na základě informací o výukovém prostředí, přečtené literatuře a výzkumu TIMSS 2007 jsou zformulovány tyto hypotézy.

1. Mezi prvním a druhým testem dojde ke zlepšení ve všech úlohách.
2. Zlepšení budeme pozorovat také v úlohách mezi prvním a třetím testem.
3. V druhém a třetím testu se výsledky žáků nezhorší.
4. Při porovnání tříd bude mít lepší výsledky třída bez speciálního zaměření, která je označována za lepší, případně dosáhnou obě třídy srovnatelných výsledků.
5. Z daných pozorování se domnívám, že lze diagnostikovat didaktický kontrakt.

5.7 Diagnostika slovních úloh

Vzhledem k tomu, že ve všech třech testech jsou typově shodné úlohy, diagnostika bude provedena pro typově shodné příklady ze všech tří testů společně (označení: 1. test – a., 2. test – b., 3. test – c.).

1. příklad

a. *Délka zahrady obdélníkového tvaru je o 5 m kratší než dvojnásobek její šířky. Obvod zahrady je 98 m. Jakou má zahrada plochu?*

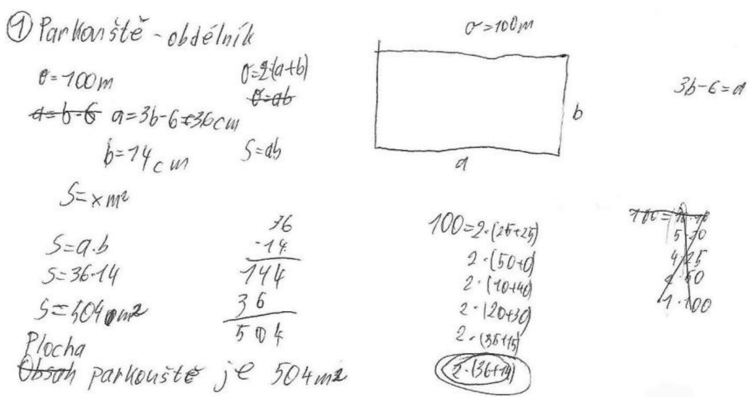
b. *Obdélníková náves má obvod 60 m. Délka návsi je o 9 m kratší než dvojnásobek její šířky. Jakou má náves plochu?*

c. *Parkoviště tvaru obdélníku má obvod 100 m. Délka parkoviště je o 6 m kratší než trojnásobek její šířky. Jakou má parkoviště plochu?*

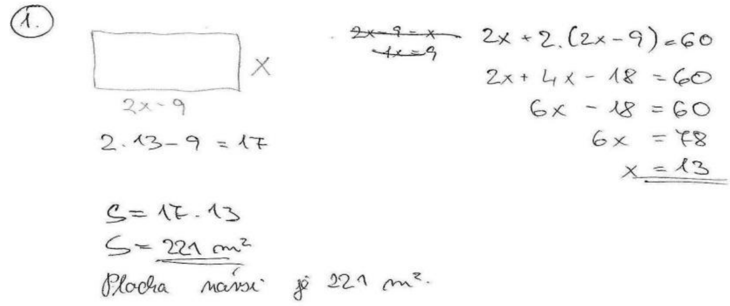
Tyto slovní úlohy žáci převáděli na matematickou úlohu syntetickým postupem (obvykle v 1. a 3. testu) nebo analyticko-syntetickým způsobem (obvykle v 2. testu).

K řešení úlohy žáci využívali investigativní strategii a pokus – omyl, u druhého testu pak lze v řešení nalézt také standardní (výpočtovou) strategii. Z dalšího pohledu žáci řešili úlohu pomocí modelování – konkrétně podle symbolických modelů. Žáci využívali v této úloze tři různé metody řešení rovnic – 1. pokus – omyl, 2. tabulková metoda, 3. kalkul (pouze ve 2. testu).

První úlohu lze označit jako nejnáročnější ze všech úloh a to ve všech třech testech. Vyřešilo ji nejméně žáků, přičemž v prvním testu nebyl úspěšný nikdo. Pro tento typ úloh se žáci neučili žádný algoritmus. K výpočtu žáci využívali vzorce pro obsah a obvod obdélníku, metodu pokus – omyl (obr. 1), i řešení pomocí rovnic (obr. 2).

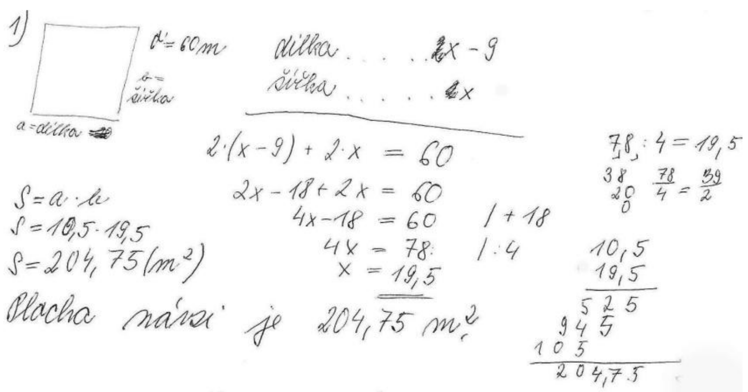


Obr. 1 – Řešení žáka pomocí metody pokus omyl



Obr. 2 – Řešení žáka pomocí rovnice

Mnoho žáků se o řešení tohoto příkladu vůbec nepokusilo, u ostatních příkladů bylo vynechání zcela výjimečné. Pokud žáci příklad počítali a nedošli ke správnému výsledku, obvykle udělali chybu v doplnění do vzorce pro obvod nebo ve vyjádření délky a šířky (obr. 3).



Obr. 3 – Řešení žáka s chybou ve vyjádření délky

2. příklad

a. *Dva kamarádi se rozhodli jít na chatu. První zvolil trasu, která byla o 5 km kratší, ale zato byla strmější, a tak šel rychlostí 3 km/h. Druhý šel 15 km, ale lepší cestou, tudíž šel rychlostí 5 km/h. Který kamarád byl u chaty první?*

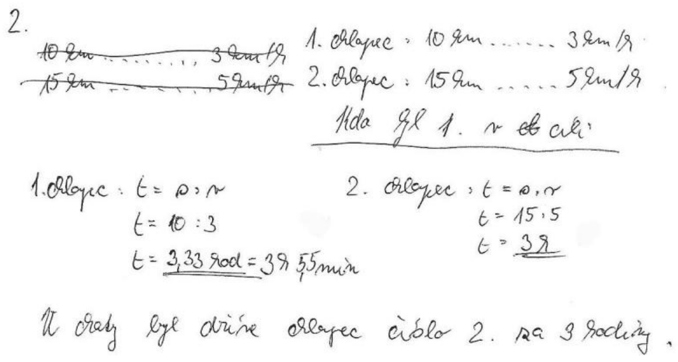
b. *Děti si daly závod na koloběžkách. Milan jel lepší cestou, která měřila 16 km, ale jel rychlostí 8 km/h. Pavel zvolil cestu strmější, ale o 3 km kratší. Jel rychlostí 6 km/h. Kdo byl v cíli první?*

c. *Karel se vsadil s Petrem, že na kole přijede domů první, i když pojede delší trasu. Karel ujel 20 km nenáročnou cestou, proto jel rychlostí o 5 km/h vyšší než Petr. Petr jel trasu o 7 km kratší, průměrnou rychlostí 14 km/h. Kdo vyhrál sázku?*

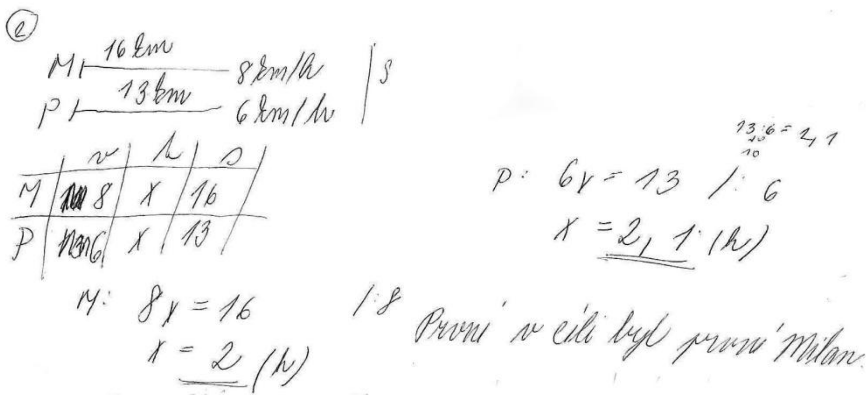
Převod této slovní úlohy na matematickou úlohu žáci prováděli analytickým postupem ve všech třech testech.

K řešení úlohy žáci využívali standardní (výpočtovou) strategii. Z dalšího pohledu žáci řešili úlohu pomocí modelování – konkrétně podle symbolických modelů. Žáci využívali v této úloze pouze jedinou metodu řešení rovnic, a to kalkul.

Druhá úloha byla pro žáky podle počtu správných odpovědí spolu se čtvrtým příkladem nejjednodušší, ve všech testech žáci dosahovali srovnatelných výsledků. Žáci znali pro úlohu tohoto typu algoritmus již od prvního testu. Algoritmus byl zaveden ve fyzice – vzorec *dráha = rychlost · čas* (obr. 4). Tento algoritmus žáci obvykle využívali v prvním a třetím testu. V druhém testu žáci pro výpočet využívali jiný algoritmus, který se naučili v hodinách matematiky, a to algoritmus pro řešení slovních úloh o pohybu (obr. 5).

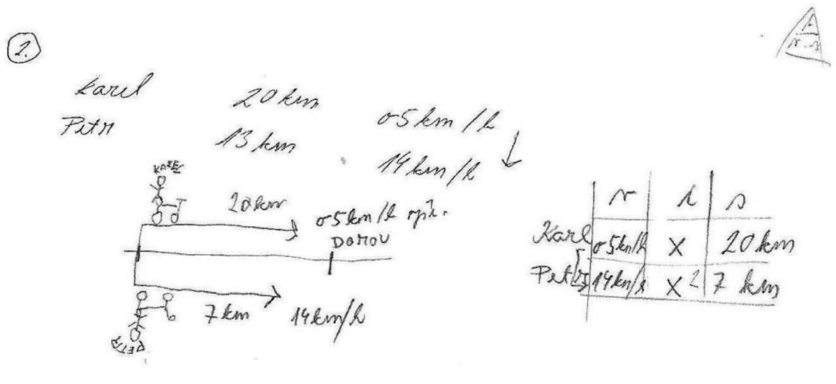


Obr. 4 – Řešení žáka pomocí vzorce známého z fyziky



Obr. 5 – Řešení žáka pomocí algoritmu pro řešení slovních úloh

Pokud se v této úloze vyskytovaly chyby, obvykle se jednalo o chyby z nepozornosti, špatného dosazení do vzorce. V případě třetího testu byly časté chyby ve využití algoritmu pro řešení slovních úloh o pohybu, který si žáci pamatovali jen částečně a nedovedli příklad dovést do konce (obr. 6).



Obr. 6 – Pouze částečné řešení žáka, který nevěděl, jak postupovat dál

3. příklad

a. *Vzdálenost dvou míst je 200 km. Z Adamova vyjelo v 7:00 nákladní auto průměrnou rychlostí 40 km/h. V 9:00 mu vyjelo naproti z Bedřichova osobní auto pohybující se průměrnou rychlostí 80 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od Adamova se obě vozidla setkají?*

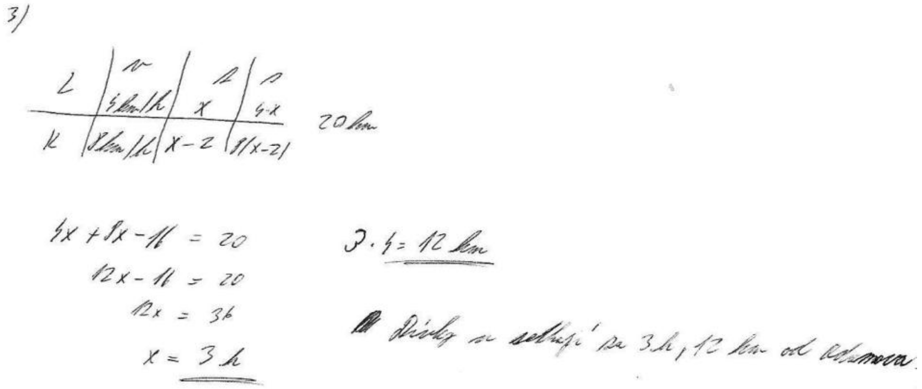
b. *Lenka a Klára se chtějí sejít. Lenka vyšla z Adamova v 7:00 a šla rychlostí 4 km/h. Klára zaspala, a tak vyjela z Bedřichova v 9:00 na kolečkových bruslích rychlostí 8 km/h. Vzdálenost Adamova a Bedřichova je 20 km. Za jak dlouho a jak daleko od Adamova se dívky setkají?*

c. *Lenka a Klára se chtějí sejít. Lenka vyšla z Adamova v 7:00 a šla rychlostí 4 km/h. Klára zaspala, a tak vyjela z Bedřichova v 9:00 na kolečkových bruslích rychlostí 8 km/h. Vzdálenost Adamova a Bedřichova je 20 km. Za jak dlouho a jak daleko od Adamova se dívky setkají?*

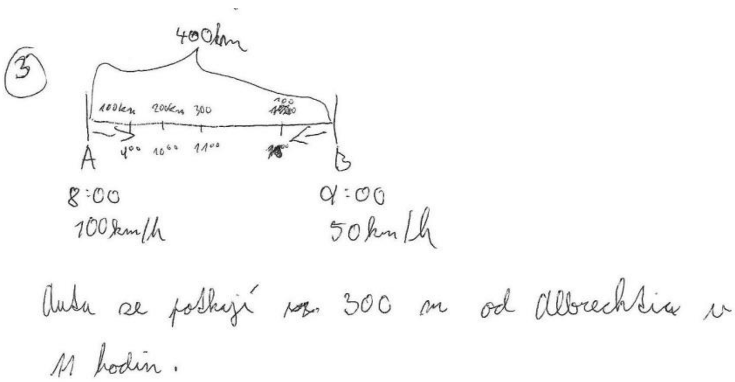
Žáci převáděli třetí slovní úlohu na matematickou syntetickým způsobem v prvním a třetím testu, kdy obvykle použili grafické řešení. V druhém testu úlohu žáci řešili analyticky.

V této úloze žáci využívali k řešení investigativní strategii a strategii pokus – omyl v prvním a třetím testu. V druhém testu pak k výpočtu využívali standardní strategii. Úloha byla řešena pomocí symbolických modelů ve druhém testu a pomocí ikonických modelů v ostatních dvou testech. V druhém testu, ve kterém byla úloha řešena pomocí rovnic, žáci řešili rovnici metodou kalkulu.

Třetí úloha se podle počtu správných odpovědí řadí spíše k těm obtížnějším, obzvlášť v prvním a třetím testu. Algoritmus pro řešení tohoto typu slovních úloh se žáci naučili až před psaním druhého testu. Řešení pomocí algoritmu se vyskytuje pouze ve druhém testu (obr. 7). Bez tohoto algoritmu jsou slovní úlohy tohoto typu řešitelné například schematickým obrázkem (obr. 8) nebo strategií pokus – omyl – výpočet.

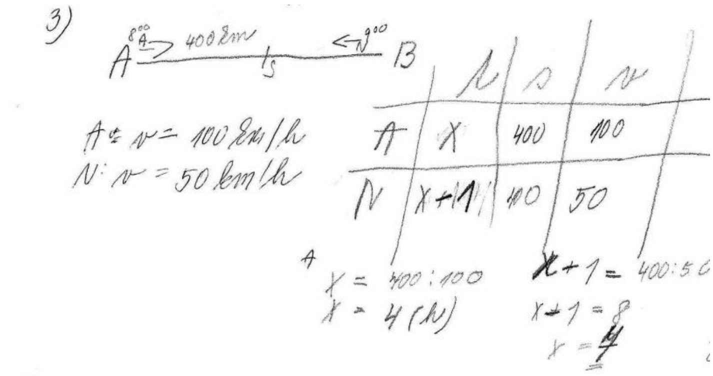


Obr. 7 – Řešení žáka pomocí algoritmu pro řešení sloních úloh



Obr. 8 – Žákovské řešení pomocí schematického obrázku

Chyby v řešení, které se vyskytovaly ve třetí úloze, byly způsobeny nepochopením algoritmu (obr. 9). Byl zde zcela patrný formalismus, kdy žáci aplikovali algoritmus bez hlubšího pochopení a úlohu nedokázali analyzovat.



Obr. 9 – Chybné žákovské řešení pomocí algoritmu pro řešení slovních úloh

4. příklad

a. *Pan Omáčka si v restauraci objednal 2 dl 100% pomerančového džusu. Číšník nevěděl, že pan Omáčka je kontrolor, a přidal do džusu vodu. Pan Omáčka při kontrole zjistil, že džus je pouze 80%. Jaké množství vody číšník do sklenice nalil?*

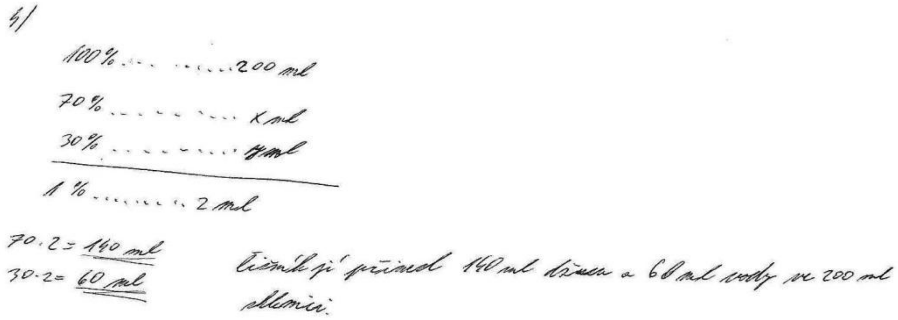
b. *Jana nemá ráda příliš sladký džus. Proto si objednala 70% džus a řekla, ať číšník doplní 100% džus sodovkou. Kolik ml vody a kolik džusu přinesl číšník ve 200 ml sklenici?*

c. *Pan Světlík si objednal v restauraci 300 ml 100% jablečného džusu. Číšník byl nepoctivý a přidal do džusu vodu. Pan Světlík, který byl kontrolor, zjistil, že je džus pouze 80%. Kolik ml vody přilil číšník do sklenice?*

Čtvrtou slovní úlohu žáci převáděli na matematickou ve všech třech testech shodně, a to analytickým postupem.

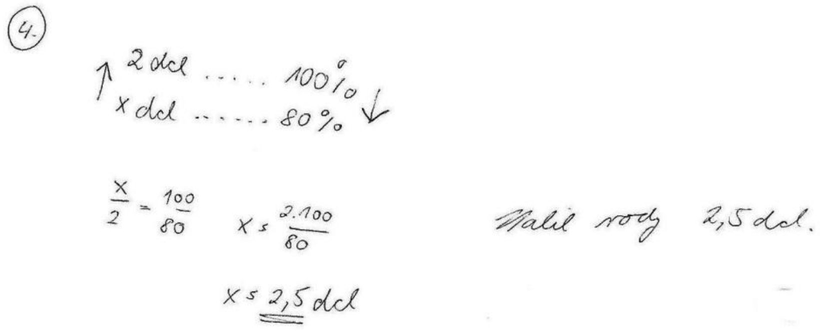
Žáci řešili úlohy pomocí standardní (výpočtové) strategie. K výpočtu žáci opět využívali metodu symbolických modelů.

Jak již bylo poznamenáno výše, čtvrtá úloha byla podle výsledků spolu s druhou úlohou pro žáky nejjednodušší. Tuto slovní úlohu žáci řešili buď pomocí trojčlenky, nebo pomocí výpočtu přes jedno procento. Algoritmy pro řešení úloh s procenty žáci znali již z dřívější doby, často si však nebyli jisti s řešením pomocí trojčlenky, proto mnoho žáků volilo raději způsob výpočtu přes jedno procento (obr. 10). Způsob výpočtu přes jedno procento (a v některých případech také využití obrázku) žákům usnadňoval pochopit vztah mezi procenty a množstvím nápojů.



Obr. 10 – Žákovské řešení pomocí výpočtu přes jedno procento

V této úloze se vyskytovaly především chyby z nepozornosti, případně ze záměny přímé a nepřímé úměrnosti (obr. 11). Některým žákům činil problém rozbor úlohy.



Obr. 11 – Chybné řešení, kde žák zaměnil přímou a nepřímou úměrnost

5. příklad

a. *První zedník by omítl zeď za 6 hodin. Druhý, zručnější, by ji omítl za 4 hodiny. Za jak dlouho by ji omítli společně?*

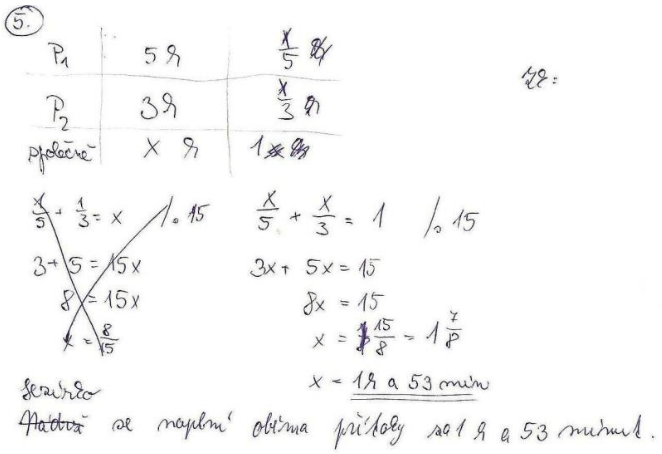
b. *Zahradní jezírko se naplní prvním přítokem za 5 hodin, druhým přítokem za 3 hodiny. Za jak dlouho se jezírko naplní, jestliže se jezírko napouští pomocí obou přítoků?*

c. *První kopáč by vykopal jámu sám za 4 hodiny. Brigádník by jámu vykopal sám za 6 hodin. Za jak dlouho by jámu vykopali společně?*

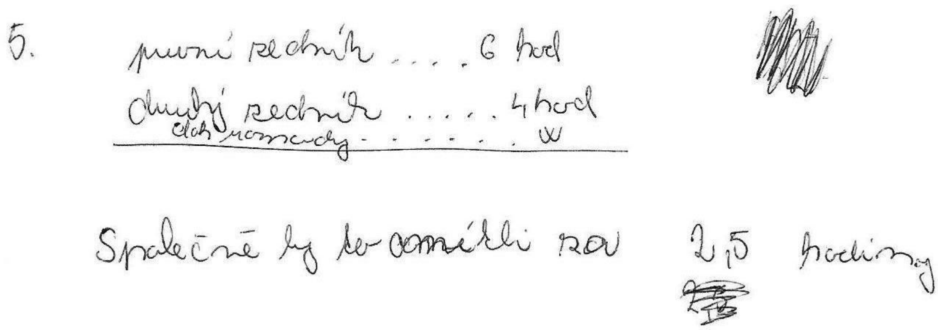
Poslední slovní úlohu žáci převáděli na matematickou úlohu pomocí aritmetického syntetického postupu v prvním a třetím testu. V druhém testu žáci využívali analytický postup.

Investigativní strategii žáci používali při řešení úlohy v prvním a třetím testu. U tohoto příkladu lze v prvním testu nalézt prvky heuristické strategie. V druhém testu pak žáci volili standardní strategii. Úlohu žáci řešili i v tomto případě modelováním. V druhém testu, kdy úlohu řešili pomocí rovnic, rovnici řešili kalkulem.

Pátá úloha byla hodnocena dvěma body za správný odhad a třemi body za přesný výsledek. Žáci se učili algoritmus pro řešení slovních úloh o společné práci až po napsání prvního testu. Vzhledem k tomu, že tato úloha lze vyřešit pouze pomocí algoritmu (obr. 12), v prvním testu žáci řešili úlohu úsudkem, kterým získali odhad (obr. 13), ne však přesný výsledek. V druhém testu pak žáci úlohu řešili pouze aritmetickým modelováním. Ve třetím testu se žáci pokoušeli o obě metody, ale nikdo nedospěl ani ke správnému odhadu, ani k přesnému výsledku pomocí výpočtu. Tuto úlohu lze tedy označit jako poměrně obtížnou (především v době, kdy žáci ještě neznají algoritmus, případně ho již zapomněli).

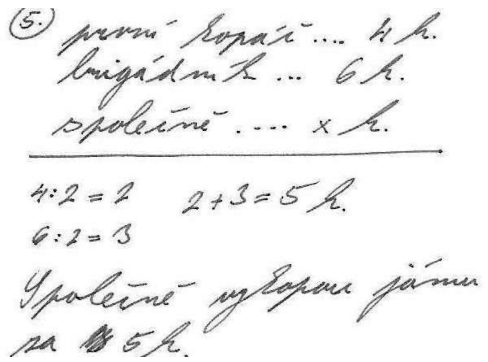


Obr. 12 – Žákovské řešení pomocí algoritmu pro řešení slovních úloh o společné práci



Obr. 13 – Správný žákovský odhad provedený úsudkem

Chyby se v této úloze vyskytovaly jak v odhadu (obr. 14), tak i ve výpočtu. Ve výpočtu byly způsobeny formalismem, v odhadu většina žáků nedokázala dovést správně uchopenou úvahu až do konce – v závěru nevydělili výsledek dvěma, tudíž získali průměrný čas, ale ne čas společný.



Obr. 14 – Odhad, ve kterém byla úvaha ukončena předčasně

Různé strategie jsou shrnuty v tabulce (tab. 1), kde je vyjádřen počet žáků, kteří danou strategii k výpočtu použili.

Poslední sloupec, ale také porovnání sloupců ALS1 a ALS2 se sloupci Pokus – omyl, Schematický obrázek a Odhad, nám poukazují na didaktický kontrakt. U třetího a pátého příkladu v druhém testu je také patrný formalismus – jak lze vyčíst z posledního sloupce, někteří žáci použili nabídnutý algoritmus, ale neuměli ho správně aplikovat.

	ALS1	ALS2	Vzorec z fyziky	Vzorec pro obsah + řešení rovnicí	Trojčlenka + řešení přes 1%	Pokus - omyl	Schematický obrázek	Odhad	Částečný odhad nebo výpočet	ALS1 (2) s chybou
1. test										
1. příklad	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
2. příklad	0	0	**26**	0	0	0	0	0	0	0
3. příklad	0	0	0	0	0	**2**	**3**	0	0	0
4. příklad	0	0	0	0	**14**	0	0	0	**12**	0
5. příklad	0	0	0	0	0	0	0	**2**	**3**	0
2. test										
1. příklad	0	0	0	**5**	0	**1**	0	0	0	0
2. příklad	**7**	0	**18**	0	0	0	0	0	**1**	0
3. příklad	**18**	0	0	0	0	0	0	0	0	**13**
4. příklad	0	0	0	0	**24**	0	0	0	**3**	0
5. příklad	0	**24**	0	0	0	0	0	0	**1**	**6**
3. test										
1. příklad	0	0	0	0	0	**3**	0	0	**2**	0
2. příklad	0	0	**21**	0	0	0	0	0	0	**3**
3. příklad	0	0	0	0	0	**1**	**5**	0	**1**	**15**
4. příklad	0	0	0	0	**27**	0	0	0	**1**	0
5. příklad	0	0	0	0	0	0	0	0	**9**	**5**

Tab. 1 – Zastoupení strategií v žákovských řešeních slovních úloh

Pozn. Ukázky celých testů jsou uvedeny v příloze.

6 Statistika

6.1 Testování hypotéz

Předpoklady se ve vědeckém výzkumu obvykle vyjadřují ve tvaru hypotéz. Statistická hypotéza je takové tvrzení, jež se týká pravděpodobnostního rozdělení, eventuálně parametrů náhodné veličiny.

Při testování statistických hypotéz vždy porovnáváme dvě hypotézy. Testovanou hypotézu, kterou nazýváme nulovou hypotézou a značíme H_0, proti alternativní hypotéze, kterou značíme H_1. Vycházíme z následující úvahy:

- Předpokládáme, že hypotéza H_0 platí.
- Připravíme náhodným pokusem, na základě jehož výsledku budeme hypotézu ověřovat.
- Stanovíme si hladinu spolehlivosti α tj. míru rizika toho, že hypotézu H_0 neoprávněně zamítneme, ačkoliv platí. Obvykle se volí $\alpha = 0{,}05$ nebo $\alpha = 0{,}01$.
- V oboru možných hodnot použité náhodné veličiny určíme kritický obor, tj. oblast, do níž za platnosti H_0 padne výsledek veličiny s pravděpodobností α.
- Pokud hodnota náhodné veličiny padne do kritického oboru, hypotézu H_0 zamítáme, neboť nastal jev, který by za platnosti H_0 měl jen velmi malou pravděpodobnost.

Výsledkem testu je rozhodnutí o hypotéze H_0. Přijetí hypotézy H_0 znamená, že ji považujeme za možnou. Zamítnutí hypotézy H_0 znamená přijetí hypotézy H_1.

6.2 Parametrické testy

6.2.1 Párový *t* test

Slouží k testování odlišnosti středních hodnot složek náhodných vektorů v náhodném výběru (Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), …., (Y_n, Z_n) z normálního rozdělení. Na základě rozdílu středních hodnot párový *t* test porovnává, zda je rozdíl statisticky průkazný nebo ne. Vzhledem k tomu, že se jedná o parametrický test, uvádí se obvykle v literatuře minimální počet objektů $N = 30$, což je v našem případě splněno.

Hypotézu H_0 zamítneme na hladině α, platí-li

$$|T| = \left|\frac{(\bar{X} - \Delta)\sqrt{n}}{S}\right| \geq t_{n-1}(\alpha)$$

Kde:

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - Z_i)$ … výběrový průměr

$(Y_1, Z_1),\ (Y_2, Z_2),\ \dots, (Y_n, Z_n)$ … náhodný výběr dvourozměrného rozdělení

$X_i = Y_i - Z_i$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - n\bar{X}^2)$ … výběrový rozptyl

$t_{n-1}(\alpha)$ … kritická hodnota

α … hladina testu, dané číslo z intervalu (0,1)

$\Delta = \mu_1 - \mu_2$

$\mu_1 = EY, \mu_2 = EZ$ … střední hodnoty

Řešený příklad – 1. úloha, porovnání 1. a 2. testu

Žák	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
1. test	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2. test	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rozdíl	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Žák	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.
1. test	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2. test	2	0	0	2	0	0	0	0	2	2	0	0	2	0	0	2
Rozdíl	-1	0	0	-2	0	0	0	0	-2	-2	0	0	-2	0	0	-2

$n = 30$

$\Delta = 0$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - Z_i)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{31} \cdot (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 1 + 0 + 0 \\ - 2 + 0 + 0 + 0 + 0 - 2 - 2 + 0 + 0 - 2 + 0 + 0 - 2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{31} \cdot (-11) = -0{,}3548$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum\nolimits_{i=1}^{n} (X_i^2 - n\bar{X}^2)$$

$$S^2 = \frac{1}{30} (21 - 31 \cdot (-0{,}3548)^2) = 0{,}5699$$

$S = 0{,}7549$

$$T = \frac{(\bar{X} - \Delta)\sqrt{n}}{S}$$

$$T = \frac{-0{,}3548}{0{,}7549} \cdot \sqrt{31} = -2{,}1670$$

$t_{30}(0{,}05) = 2{,}042$ …hodnota ze statistických tabulek

$T < t_{30}(0{,}05) \rightarrow$ na základě uvedených dat hypotézu H_0 nezamítáme

6.2.2 Dvouvýběrový *t* test

Slouží k porovnávání středních hodnot nezávislých náhodných výběrů z normálního rozdělení. Není nutné, aby oba soubory měly stejný počet prvků (tzv. v různých třídách může být různý počet žáků).

Hypotézu H_0 zamítneme na hladině α, platí-li

$$|T| = \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}} . \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} \right| \geq t_{n+m-2}(\alpha)$$

Kde:

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ … výběrový průměr

$\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$ … výběrový průměr

$\left.\begin{matrix} X_1, X_2, \dots, X_n \\ Y_1, Y_2, \dots, Y_m \end{matrix}\right\}$ … dva nezávislé náhodné výběry

n… rozsah náhodného výběru $X_1, X_2, \dots, X_n$

m… rozsah náhodného výběru $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$

$$\left.\begin{matrix} {S_X}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \\ {S_Y}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2 \end{matrix}\right.$$ … výběrový rozptyl

$t_{n+m-2}(\alpha)$ … kritická hodnota

α … hladina testu, dané číslo z intervalu (0,1)

$\Delta = \mu_1 - \mu_2$

$\mu_1 = EY, \mu_2 = EZ$ … střední hodnoty

Řešený příklad – 1. test, porovnání 2. příkladu

Žáci	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	průměr
Třída 8.I.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		2
Třída 8.II.	2	0	0	2	2	0	2	2	2	2	0	2	2	0	2	2	1,375

$n = 15, m = 16$

$\Delta = 0$

$\bar{X} = 2$

$\bar{Y} = 1{,}375$

$$S_X{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$S_X{}^2 = \frac{1}{15-1}\sum_{i=1}^{15}(X_i - 2)^2 = \frac{1}{14}\cdot 0$$

$$S_X{}^2 = 0$$

$$S_Y{}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$$

$$S_Y{}^2 = \frac{1}{16-1}\sum_{i=1}^{16}(Y_i - 1{,}375)^2 = \frac{1}{15}\cdot 13{,}75$$

$$S_Y{}^2 = 0{,}9167$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

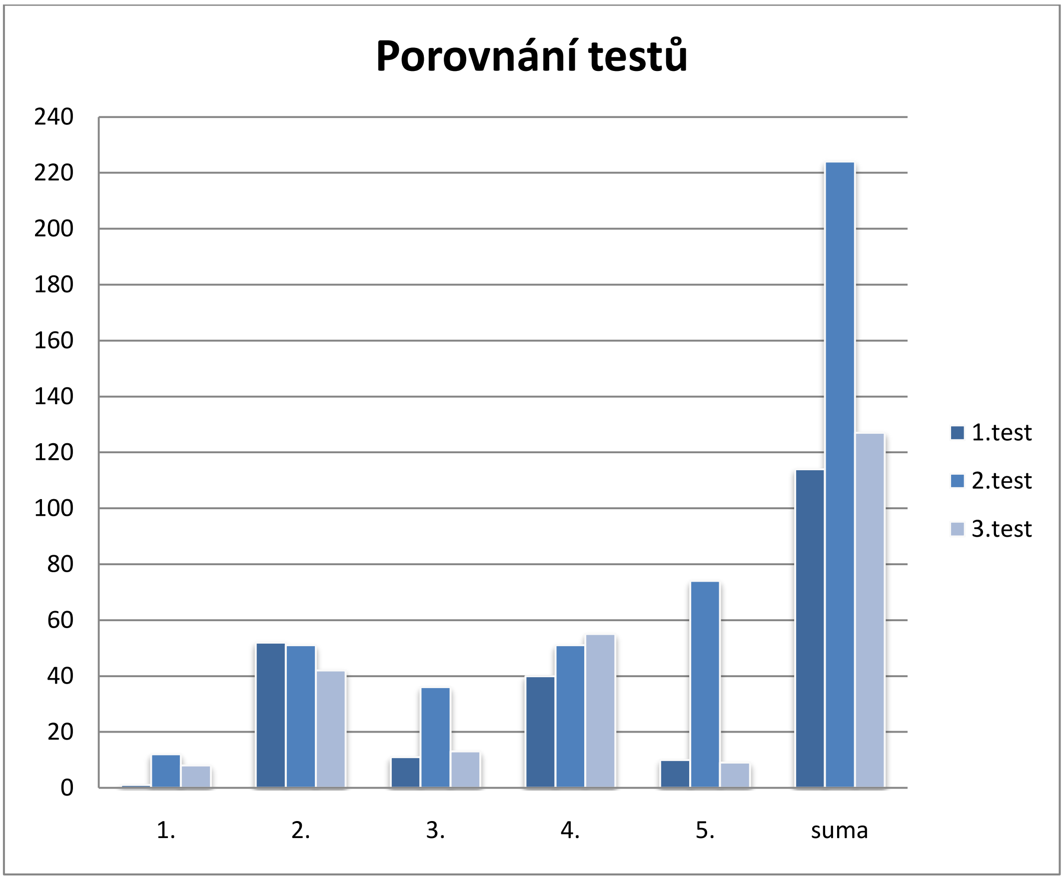
$$T = \frac{2 - 1{,}375 - 0}{\sqrt{14\cdot 0 + 15\cdot 0{,}9167}} \cdot \sqrt{\frac{15\cdot 16\cdot 29}{31}}$$

$$T = 2{,}525$$

$T_{29}(0{,}05) = 2{,}045$

$T > t_{29}(0{,}05) \rightarrow$ na základě uvedených dat hypotézu H_0 nezamítáme

6.3 Porovnání výsledků řešení příkladů mezi jednotlivými testy



Graf, který vychází z tab. 1, 2, 3, porovnává výsledky v jednotlivých testech. Ukazuje nám, že žáci dosáhli celkově nejlepších výsledků v druhém testu. V prvním testu měli výsledky naopak nejhorší. Výsledky ve třetím testu byly sice horší než ve druhém testu, v porovnání s prvním testem je však patrné zlepšení.

Pokud se podíváme na každou úlohu zvlášť, výsledky budou odpovídat jen v některých úlohách.

Řešení první úlohy odpovídá celkovému porovnání testů – nejlepší výsledky jsou u druhého testu, ve třetím testu je patrné zlepšení v porovnání s prvním.

Druhá úloha má zajímavý výsledek - výsledky jsou srovnatelné v prvním a druhém testu. K propadu však dochází u třetího testu, kde jsou výsledky nejhorší.

Třetí úloha nám opět potvrzuje celkový výsledek, rozdíl mezi prvním a třetím testem není výrazný, ale je také patrný.

Ve čtvrté úloze vidíme mírnou vzestupnou tendenci od prvního ke třetímu testu. Rozdíl mezi druhým a třetím testem není příliš výrazný.

Poslední úloha, pátá, nám ukazuje opět nejlepší výsledky v druhém testu. Výsledky v prvním a třetím testu jsou ale srovnatelné.

Podle grafu tedy předpokládáme, že žáci byli nejlepší v době, kdy se učili řešit slovní úlohy pomocí algoritmů, tedy v druhém testu. V prvním testu, kde tyto algoritmy neznali, byly výsledky nejhorší. Výsledky ve třetím testu, který žáci dostali půl roku po probírání látky, byly porovnatelně lepší než v prvním testu, ale projevilo se zhoršení díky zapomínání algoritmů, které žáci pravidelně nepoužívali.

Tento předpoklad jsme potvrzovali (vyvraceli) párovým *t* testem.

6.3.1 Párový *t* test

Hypotéza: Výsledky žákovských řešení jsou stejné nebo lepší Kritické hodnoty

$t_{30}(0,05) = 2,042$

$t_{30}(0,01) = 2,75$

6.3.1.1 Porovnání 1. a 2. testu

1. příklad

T= -2,617

$T \leq t_{30}(0,05)$

Hodnota vypovídá o zlepšení žáků mezi prvním a druhým testem. Tento příklad se ukazuje jako těžký, v druhém testu ho vypočítalo jen 6 žáků, proto není zlepšení výrazné, naučené algoritmy nebyly použitelné pro tento typ slovní úlohy.

2. příklad

T=0,171

$T \leq t_{30}(0,05)$

Zlepšení v tomto příkladu není znatelné, výsledky zůstaly na stejné úrovni.

Pokud bychom výsledky zkoumali podrobněji, zjistili bychom, že v prvním testu žáci řešili úlohu pomocí vzorce *dráha* = *rychlost* · *čas*, který znají z fyziky. V druhém testu často použili naučený algoritmus pro řešení slovních úloh o pohybu.

Oba testy vyřešilo více než 80% žáků, což ukazuje, že tento typ úlohy je snadný a více způsobů řešení vede ke správnému výsledku.

3. příklad

T= -3,519

$T \leq t_{30}(0,05)$

Data vypovídají o zlepšení žáků při řešení příkladu v druhém testu.

Tento příklad nelze řešit pomocí vzorce *dráha* = *rychlost* · *čas*, pokud žáci dokázali úlohu v prvním testu vyřešit, museli k tomu nalézt vlastní strategii (obvykle úlohu řešili pomocí obrázku).

V druhém testu všichni žáci upustili od vlastních strategií a úlohu řešili pomocí naučeného algoritmu.

4. příklad

T= -2,078

$T \leq t_{30}(0{,}05)$

Ve čtvrté úloze nám hodnoty ukazují, že se žáci mírně zlepšili.

Jedná se ovšem o úlohu poměrně jednoduchou, kterou v prvním ani ve druhém testu žáci neřešili pomocí algoritmů, které se učili pro řešení slovních úloh.

Zlepšení lze předpokládat z důvodu, že žáci v této době řešili slovní úlohy, a proto byli naučeni je číst a museli se naučit lépe porozumět textu.

5. příklad

T= -8,915

$T \leq t_{30}(0{,}05)$

V páté úloze hodnota vypovídá o největším zlepšení žáků.

Tato slovní úloha v podstatě nelze řešit jinak, než pomocí naučeného algoritmu. Žáci mohou provést odhad velmi blízký výsledku, ale přesný výsledek získají pouze za použití algoritmu.

Žáci v prvním testu dostávali body pouze za odhad (ne plný počet). V druhém testu se odhady nevyskytovaly a žáci tedy dostávali body za výpočet pomocí algoritmu.

Suma

T= -6,517

$T \leq t_{30}(0,05)$

Data, která porovnávají celkově první a druhý test, vypovídají o zlepšení žáků v řešení úloh. To znamená, že se žáci zlepšili v době, kdy se učili řešit slovní úlohy pomocí algoritmů.

Tento výsledek se očekával, některé úlohy se bez algoritmů v podstatě nedají vyřešit.

6.3.1.2 Porovnání 1. a 3. testu

1. příklad

T= -2,244

$T \leq t_{30}(0,05)$

Data nám naznačují zlepšení žáků v této úloze. Vzhledem k velmi malému počtu správně vyřešených úloh (4) ale nelze hovořit o výrazné změně v řešení úlohy.

2. příklad

T= 1,976

$T \leq t_{30}(0,05)$

Stejně jako v dalších dvou porovnáních této úlohy nám data ukazují, že žáci zůstali na stejné úrovni. V prvním a třetím testu však volili pro výpočet stejnou strategii.

3. příklad

T= -0,421

$T \leq t_{30}(0,05)$

Ani v tomto případě data nevypovídají o změně výsledků při řešení příkladů.

Pokud žáci příklad neřešili pomocí algoritmů, museli vymyslet vlastní strategii. Vzhledem k tomu, že si žáci na algoritmus ve třetím testu nevzpomněli, v prvním testu ho ještě neuměli, vypočítali příklad obrázkem nebo strategií pokus omyl v obou testech.

4. příklad

T= -2,706

$T \leq t_{30}(0,05)$

V této úloze lze podle dat hovořit o jediném výraznějším zlepšení žáků ve třetím testu. Příklad se však nepočítal pomocí algoritmu, u žáků došlo spíše ke zlepšení čtenářské gramotnosti, a tudíž se ve třetím testu již nevyskytovalo tolik chyb z nepřesného pochopení úlohy.

5. příklad

T=0,296

$T \leq t_{30}(0,05)$

Hodnota nám opět nevypovídá o změně počtu správných řešení mezi testy. Ve třetím testu se sice žáci snažili o výpočet pomocí algoritmu, nikdo však neuspěl, a tak stejně jako v prvním testu byli žáci ohodnoceni pouze za odhad výsledku.

Suma

T = -1,295

$T \leq t_{30}(0,05)$

V porovnání těchto dvou testů je z dat vidět nepatrné zlepšení žáků mezi prvním a třetím testem.

Žáci se často vraceli ke svým vlastním strategiím, zároveň měli možnost využívat naučené algoritmy, což se však nedělo.

Zlepšení lze vysvětlit především tím, že se žáci čtením mnoha zadání slovních úloh naučili lépe rozumět textu a tudíž neměli takový problém s rozborem.

6.3.1.3 Porovnání 2. a 3. testu

1. příklad

T= 0,849

$T \leq t_{30}(0,05)$

Tento výsledek nevypovídá ani o zlepšení, ani o zhoršení žáků při řešení tohoto příkladu. V obou testech vyřešilo úlohu jen málo žáků (méně než 20%), což svědčí o obtížnosti tohoto příkladu.

2. příklad

T= 1,247

$T \leq t_{30}(0,05)$

I tento výsledek nám ukazuje, že v řešení úlohy byli žáci podobně úspěšní. Tento příklad vyřešilo mnoho žáků, příklad byl poměrně snadný. V druhém a třetím testu žáci řešili úlohu rozdílným způsobem.

3. příklad

T= 3,268

$T > t_{30}(0,05)$

Hypotéza byla na hladině 0,05 vyvrácena, proto přistoupíme ještě k porovnání výsledku na hladině 0,01

T= 3,285

$T > t_{30}(0,01)$

I na hladině 0,01 nám data vypovídají o zhoršení žáků v této úloze.

Tento typ úlohy patřil bez užití algoritmu ke složitějším, přesto ho někteří žáci dokázali vyřešit jiným způsobem. Ve třetím testu tento příklad nikdo nevyřešil pomocí algoritmu pro řešení slovních úloh o pohybu.

4. příklad

T= -1,000

$T \leq t_{30}(0,05)$

Čtvrtý příklad patřil mezi jednodušší, a to se potvrdilo i ve vysokém počtu správně vyřešených úloh. Data nám ukazují, že nedošlo ke zhoršení.

5. příklad

T= 9,356

$T > t_{30}(0,05)$

V tomto případě byla hypotéza na hladině 0,05 také vyvrácena, proto opět přistoupíme k porovnání výsledku na hladině 0,01.

T= 9,841

$T > t_{30}(0,01)$

Na hladině 0,01 se hypotéza také nepotvrdila. Z dat je zřejmé, že se žáci v této úloze velmi zhoršili; zhoršení je zde nejpatrnější ze všech příkladů.

Na výrazném zhoršení žáků v této úloze má zásluhu především to, že žáci zapomněli naučený algoritmus. A to buď zcela, nebo si řešení pamatovali pouze rámcově, ale nedokázali řešení dotáhnout do konce. Ani jeden žák si ve třetím testu na algoritmus nevzpomněl.

Suma

T=5,924

$T > t_{30}(0,05)$

I v celkovém porovnání druhého a třetího testu byla hypotéza na hladině 0,05 vyvrácena, opět tedy přistoupíme k porovnání výsledku na hladině 0,01.

T=5,924

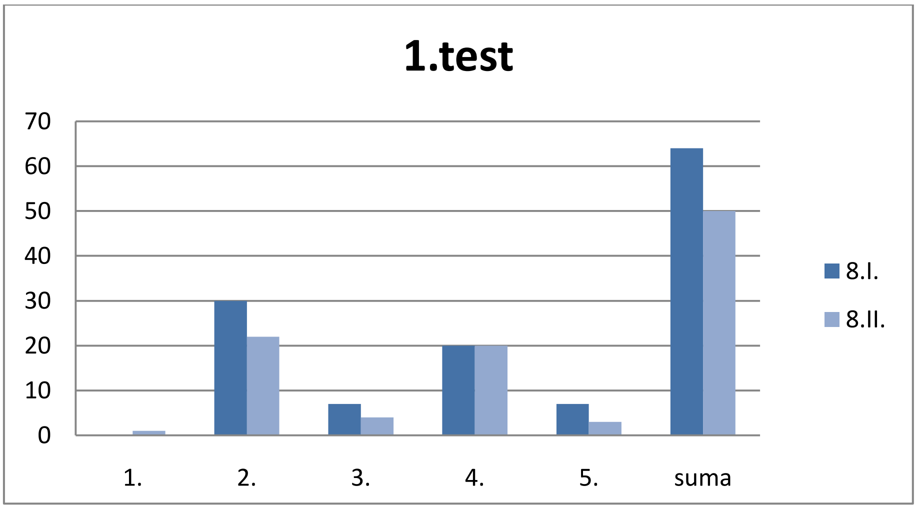
$T > t_{30}(0{,}01)$

Také na hladině 0,01 data vypovídají o tom, že se žáci mezi 2. a 3. testem zhoršili.

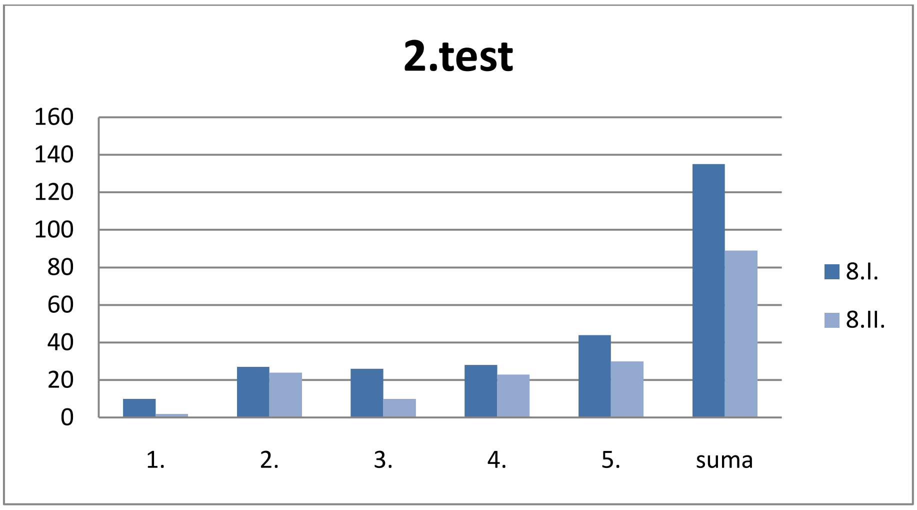
Pokud se podíváme detailněji na testy, zjistíme, že se většina žáků pokusila používat algoritmy, ale nedokázala si na ně vzpomenout.

6.4 Porovnání výsledků řešení příkladů mezi jednotlivými třídami

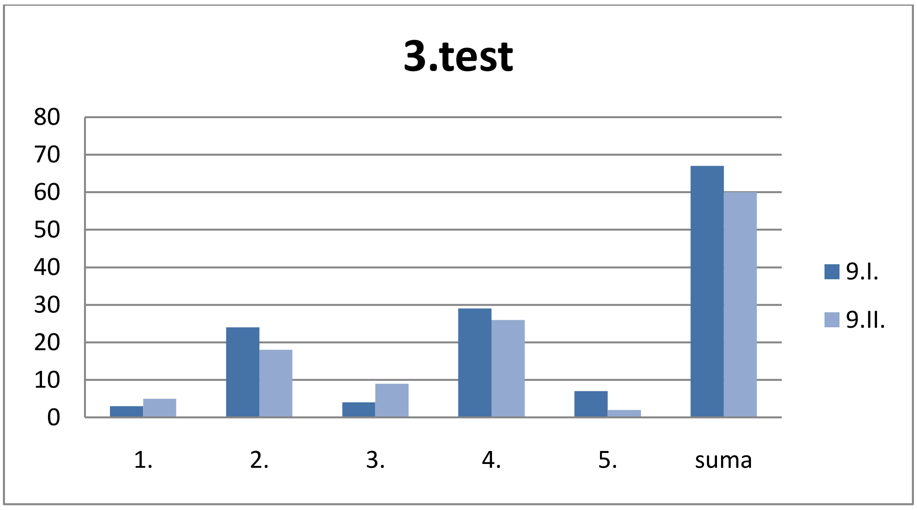
Ve třech následujících grafech, které vycházejí z tab. 4 a tab. 5, porovnáváme dvě třídy s různým počtem žáků – 15 a 16. Tyto hodnoty jsou ale velmi blízko u sebe, proto lze grafické znázornění i porovnání provést.



Graf porovnávající výsledky třídy 8.I. a 8.II. v 1. testu ukazuje celkově lepší výsledky ve třídě 8.I. V 1. příkladu má 8.I. nulový výsledek, 8.II. má výsledek pouze o jeden bod lepší (zároveň má ale o jednoho žáka víc). V ostatních příkladech má třída 8.I. výsledky buď lepší, nebo srovnatelné.



Druhý graf porovnávající výsledky třídy 8.I. a 8.II. ve 2. testu opět ukazuje celkově lepší výsledky ve třídě 8.I. V tomto případě je třída 8.I. lepší ve všech pěti úlohách.



Třetí graf, který porovnává výsledky třídy 9.I. a 9.II. ve 3. testu (v předchozích dvou testech to byly třídy 8.I. a 8.II.), i tentokrát ukazuje celkově lepší výsledky ve třídě 9.I. Pokud se podíváme na každou úlohu zvlášť, v první a třetí úloze je mírně lepší třída

9.II., ale v prvním příkladu se jedná o rozdíl jednoho správného řešení, přičemž je v této třídě o jednoho žáka víc. V ostatních třech úlohách má více správných výsledků 9.I.

Podle grafů předpokládáme, že má třída 8.I. (ve třetím testu 9.I.) lepší výsledky ve všech třech testech.

Tento předpoklad nám potvrdí, nebo naopak vyvrátí dvouvýběrový *t* test na porovnání výsledků třídy 8.I. (ve třetím testu 9.I.) a 8.II. (ve třetím testu 9.II.).

6.4.1 Dvouvýběrový *t* test

Hypotéza: Obě třídy mají srovnatelné výsledky

Kritické hodnoty

$t_{29}(0{,}05)=2{,}045$

$t_{29}(0{,}01)=2{,}756$

6.4.1.1 Porovnání 1. testu

1. příklad	**2. příklad**	**3. příklad**	**4. příklad**	**5. příklad**	**suma**
T= -0,97	T= 2,53	T= 0,79	T= 0,31	T= 1,31	T= 1,93
$T\leq t_{29}(0{,}05)$	$T> t_{29}(0{,}05)$	$T\leq t_{29}(0{,}05)$	$T\leq t_{29}(0{,}05)$	$T\leq t_{29}(0{,}05)$	$T\leq t_{29}(0{,}05)$

Z hodnot dvouvýběrového *t* testu pro 1. test je patrné, že kritická hodnota byla překročena pouze v jednom příkladu, a to v druhém. U ostatních příkladů, ani v celkovém porovnání, nebyla kritická hodnota překročena, což znamená, že v ostatních úlohách nelze říct, že by jedna ze tříd byla úspěšnější. Pouze u druhého příkladu je hodnota překročena, což znamená, že třída 8.I. byla úspěšnější v této úloze. Tento příklad žáci v 1. testu řešili pomocí vzorce *dráha = rychlost · čas*, což znamená pomocí naučeného algoritmu. V 8.I. měli žáci tento algoritmus lépe osvojený.

6.4.1.2 Porovnání 2. testu

1. příklad	**2. příklad**	**3. příklad**	**4. příklad**	**5. příklad**	**suma**
T= 1,96	T= 1,11	T= 3,65	T= 1,74	T= 2,69	T= 4,09
$T \leq t_{29}(0,05)$	$T \leq t_{29}(0,05)$	$T > t_{29}(0,05)$	$T \leq t_{29}(0,05)$	$T > t_{29}(0,05)$	$T > t_{29}(0,05)$

Hodnoty u dvouvýběrového *t* testu pro 2. test překročily kritickou hodnotu u dvou příkladů a v celkovém porovnání. Hodnoty byly překročeny u 3. a 5. příkladu. Tyto příklady žáci v 2. testu řešili pomocí algoritmu pro řešení slovních úloh o pohybu a úloh o společné práci. To znamená, že si žáci třídy 8.I. osvojili tyto algoritmy lépe, než v 8.II. Ve zbylých třech úlohách jsou výsledky žáků obou tříd srovnatelné, tyto úlohy byly pro žáky buď snadno řešitelné – 2. a 4. příklad, nebo naopak příliš obtížné – 1. příklad.

6.4.1.3 Porovnání 3. testu

1. příklad	**2. příklad**	**3. příklad**	**4. příklad**	**5. příklad**	**suma**
T= -0,49	T= 1,41	T= -1,02	T= 1,41	T= 2,19	T= 1,10
$T \leq t_{29}(0,05)$	$T \leq t_{29}(0,05)$	$T \leq t_{29}(0,05)$	$T \leq t_{29}(0,05)$	$T > t_{29}(0,05)$	$T \leq t_{29}(0,05)$

Při porovnání příkladů třetího testu překročila pouze jedna hodnota kritickou hodnotu. Hodnota byla mírně překročena v 5. úloze, kde žáci třídy 9.I. provedli více odhadů než v 9.II., ale v žádné z tříd nikdo z žáků příklad nevypočítal. V tomto případě tedy lze říct, že výsledky obou tříd, 9.I. i 9.II., byly ve třetím testu srovnatelné.

Z porovnání hodnot mezi třídami je patrné, že obě třídy měly podobné výsledky kromě některých příkladů. Příklady, ve kterých vynikala jedna třída nad druhou, byly ty, které žáci v daném testu řešili pomocí naučeného algoritmu. Využívali jak naučené algoritmy z matematiky – na řešení slovních úloh o pohybu nebo o společné práci, nebo z fyziky – řešení pomocí vzorce *dráha = rychlost · čas*.

Lepších výsledků dosáhla třída 8.I., což je třída sportovní. Dá se tedy usuzovat, že sportovní třída je zvyklá díky svému zaměření se více připravovat. Proto v době, kdy se žáci algoritmy učili, dosáhla tato třída lepších výsledků. V ostatních případech měly obě třídy znalosti srovnatelné.

6.5 Výsledky hypotéz

1. Mezi prvním a druhým testem dojde ke zlepšení ve všech úlohách.

Tato hypotéza se nepotvrdila.

Ke zlepšení nedošlo ve druhé úloze, ve čtvrté úloze se bylo zlepšení jen nepatrné. U ostatních úloh lze hovořit o zlepšení.

2. Zlepšení budeme pozorovat také v úlohách mezi prvním a třetím testem.

Tato hypotéza se nepotvrdila.

K výraznějšímu zlepšení došlo pouze u čtvrté úlohy, u první úlohy se jedná pouze o nepatrné zlepšení. V ostatních úlohách se zlepšení neprojevilo.

3. V druhém a třetím testu se výsledky žáků nezhorší.

Tato hypotéza se nepotvrdila.

Ve třetí a páté úloze došlo k výraznému zhoršení mezi druhým a třetím testem. Také celkové porovnání testů nám poukazuje na zhoršení. Ostatní tři úlohy mají srovnatelné výsledky mezi oběma testy.

4. Při porovnání tříd bude mít lepší výsledky třída bez speciálního zaměření, která je označována za lepší, případně dosáhnou obě třídy srovnatelných výsledků.

Tato hypotéza se nepotvrdila.

V žádném z testů nebyla třída bez speciálního zaměření lepší. Pouze ve třetím testu měly obě třídy ve všech úlohách srovnatelné výsledky. V druhém testu byla celkově lepší sportovní třída, což se potvrdilo ve dvou úlohách. V prvním testu měla sportovní třída lepší výsledky pouze ve druhé úloze, která byla řešena pomocí algoritmu.

5. Z daných pozorování se domnívám, že lze diagnostikovat didaktický kontrakt.

Tato hypotéza se potvrdila.

Jak již bylo uvedeno výše, při kontraktu žáci uplatňují pravidla stanovená učitelem a to i ve velmi jednoduchých cvičeních, kde tato pravidla není třeba využívat. Tento jev je patrný ve druhém a ve třetím testu. Ve druhém testu řešilo druhou úlohu 7 žáků pouze pomocí ALS1 a většina žáků, která příklad vypočítala pomocí vzorce, začala úlohu řešit pomocí algoritmu ALS1. Ve třetím testu lze znaky didaktického kontraktu nalézt ve třech úlohách, a to u druhé, třetí a páté úlohy. V těchto úlohách se mnoho žáků pokusilo použít ALS1 nebo ALS2, ke správnému výsledku ale touto metodou nedošli, protože si na algoritmus již nevzpomněli. Pouze malá část řešila tyto úlohy vlastní strategií, většina se nedokázala vrátit ke svému vlastnímu řešení, které používali v prvním testu.

7 Závěr

V mé diplomové práci jsem se zabývala strategiemi slovních úloh na základní škole. Byly zde řešeny jak strategie žákovské, tak strategie, které při výuce využívá učitel. Výsledky, které vyšly z experimentu, nám ukazují mnoho zajímavých výsledků.

Jedním z poznatků je, že někteří žáci jsou schopni řešit slovní úlohy i bez předem předloženého algoritmu pro řešení. Je tedy třeba se zamyslet, zda není vhodné dát takovým žákům v hodinách matematiky prostor, aby i dalším žákům (možná i učitelům) dali podnět k přemýšlení nad slovní úlohou i z jiného pohledu, než nabízí učebnice a vyučující.

Dalším závěrem je, že učitel má významný podíl na tom, jakou strategii žák zvolí. Hovoříme zde o didaktickém kontraktu. V experimentu se potvrdilo, že žáci mění své vlastní strategie na takové, které jim učitel nabídne. To platí nejen v době, kdy látku probírají, ale i v pozdější době se jen málo žáků vrací k původnímu řešení.

Posledním důležitým poznatkem je zjištění, že učitelé hodnotí výsledky ve třídě subjektivně. Několik vyučujících, se kterými jsem vedla rozhovor o třídách, mi potvrdilo, že lepší výsledky očekávají od třídy bez specializace. Nikdo z nich, ani učitelka matematiky, nepředpokládal, že by měla sportovní třída výsledky srovnatelné nebo dokonce lepší. Experiment nám však ukázal, že výsledky byly srovnatelné a v některých úlohách byli žáci sportovní třídy lepší.

8 Literatura

Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P. (2009): *Matematika 8 – Aritmetika Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*, Plzeň: Fraus.

Grecmanová, H., Urbanovská, E. (2007): *Aktivizační metody ve výuce, prostředek ŠVP*, Olomouc: Hanex.

Hartl, P. (1993): *Psychologický slovník,* Praha: Budka, str. 37

Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, Bratislava: SPN, 1990.

Hejný, M., Michalcová, A. (2001): *Skúmanie matematického riešiteľského postupu,* Bratislava: Metodické centrum v Bratislavě.

Hromas, J. (1986): *Strategie řešení obtížných matematických úloh*, České Budějovice: Pedagogická fakulta.

Kuřina, F. (1989): *Umění vidět v matematice*, Praha: SPN.

Květoň, P. a kol. (2010): *Metodika výuky matematiky na 2. stupni základních škol a středních školách z pohledu pedagogické praxe – náměty pro začínajícího učitele*, Ostrava: Ostravská univerzita.

Luhan, E. (1990): *Didaktika matematiky I.*, České Budějovice: Pedagogická fakulta, str. 48 – 49.

Maňák, J., Švec, V. (2003): *Výukové metody,* Brno: Paido.

Matějů, M. (2005): *Strategie řešení slovních úloh v matematickém vyučování na 1. stupni ZŠ*, České Budějovice: Pedagogická fakulta.

Molnár, J. a kol. (2000): *Matematika 8*, Olomouc: Prodos.

Mrkvička, T., Petrášková, V. (2006): *Úvod do statistiky*, České Budějovice: Jihočeská univerzita.

Müllerová, J. a kol. (1990): Matematika 7 pro 7. Ročník základní školy, II.díl, Praha: Prometheus.

Novotná, J. (2004): Zpracování informací při řešení slovních úloh. In Hejný, M. a kol.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Praha: Univerzita Karlova.

Odvárko, O., Kadleček, J. (2000): *Matematika 8. r. - 2. díl - Lineární rovnice; základy statistiky*, Praha: Prometheus.

Pere l`man, J.I. (1985): Zajímavá algebra, Praha: SNTL.

Šedivý, O., Križalkovič, K. (1990): *Didaktika matematiky pre štúdium učitel'stva 1. stupňa ZŠ*, Bratislava: SPN.

Sarrazy, B., Novotná, J. (2005): Didactical contract: Theoretical frame for the analysis of phenomena of teaching mathematics. In Novotná, J.: *SEMT 05 : International Symposium Elementary Maths Teaching*. 1. vyd. Prague : Charles University, Faculty of Education.

Sedláček, J. a kol (1981): *Slovník školské matematiky*, Praha: SPN, str. 10 – 11.

Štiková, K. (2005): *Návrh pracovních listů pro výuku vybraných typů slovních úloh s podporou počítače*, České Budějovice: Pedagogická fakulta.

Tomášek, V. a kol. (2008): *Výzkum TIMSS 2007, Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?*, Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

Tomášek, V. a kol. (2009): *Výzkum TIMSS 2007, Úlohy z matematiky pro 8. ročník*, Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

Internetové zdroje:

Albertson, M. O., Hutchinson, J.P. (1988): *Discrete mathematics with algorithms*. http://www.macalester.edu/~hutchinson/book/alberts.pdf

Bagni, G. T. (1996): *Irrational inequalities: learning and didactical contract*. In Gagatsis, A., Rogers, L.: *Didactics and History of Mathematics*, Bologna: Nucleo di ricerca in didattica della matematica. http://www.syllogismos.it/education/Irrational.pdf

Algorithms in Everyday Mathematics. http://everydaymath.uchicago.edu/about/research/algorithms.pdf

9 Přílohy

Žáci	Slovní úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	suma
1.		0	2	0	1	0	3
2.		0	0	0	2	0	2
3.		0	0	0	1	0	1
4.		0	2	2	1	0	5
5.		0	2	0	0	0	2
6.		0	0	0	1	0	1
7.		0	2	0	1	0	3
8.		0	2	0	1	0	3
9.		0	2	0	1	2	5
10.		0	2	0	2	0	4
11.		0	0	0	2	0	2
12.		0	2	0	0	0	2
13.		0	2	0	2	0	4
14.		0	0	0	1	0	1
15.		0	2	0	2	1	5
16.		1	2	2	2	0	7
17.		0	2	2	2	0	6
18.		0	2	0	2	1	5
19.		0	2	1	2	1	6
20.		0	2	0	0	1	3
21.		0	2	0	2	1	5
22.		0	2	0	2	0	4
23.		0	2	0	1	0	3
24.		0	2	0	0	0	2
25.		0	2	2	2	0	6
26.		0	2	0	2	0	4
27.		0	2	0	1	1	4
28.		0	2	0	1	0	3
29.		0	2	0	2	0	4
30.		0	2	0	0	0	2
31.		0	2	2	1	2	7
celkem		1	52	11	40	10	114

Tab. 1 - Hodnocení řešení v prvním testu

Žáci	Slovní úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	suma
1.		0	0	0	0	0	0
2.		0	2	0	2	3	7
3.		0	2	0	1	3	6
4.		0	2	2	2	0	6
5.		0	0	0	2	3	5
6.		0	0	0	2	3	5
7.		0	2	0	0	0	2
8.		0	2	0	0	0	2
9.		0	2	2	0	3	7
10.		0	2	0	2	0	4
11.		0	2	2	2	3	9
12.		0	2	0	2	3	7
13.		0	2	2	2	3	9
14.		0	2	2	2	3	9
15.		0	0	0	2	0	2
16.		2	2	0	2	3	9
17.		0	2	0	1	3	6
18.		0	2	2	2	3	9
19.		2	2	0	2	3	9
20.		0	2	2	2	2	8
21.		0	2	2	2	3	9
22.		0	0	2	2	3	7
23.		0	2	2	2	3	9
24.		2	2	2	2	3	11
25.		2	2	2	2	3	11
26.		0	2	2	2	3	9
27.		0	2	2	1	3	8
28.		2	2	2	2	3	11
29.		0	2	2	2	3	9
30.		0	1	2	2	3	8
31.		2	2	2	2	3	11
celkem		12	51	36	51	74	224

Tab. 2 - Hodnocení řešení v druhém testu

Žáci	Slovní úlohy	1.	2.	3.	4.	5.	suma
1.		0	2	0	0	0	2
2.		0	0	0	0	0	0
3.		1	0	0	2	0	3
4.		0	2	0	2	0	4
5.		0	2	0	2	0	4
6.		0	2	0	2	0	4
7.		0	2	0	2	0	4
8.		0	2	0	0	0	2
9.		0	0	0	2	1	3
10.		0	2	0	2	0	4
11.		2	0	2	2	0	6
12.		0	0	0	2	0	2
13.		0	0	2	2	0	4
14.		0	0	2	2	0	4
15.		0	2	1	2	1	6
16.		2	2	2	2	0	8
17.		1	2	2	2	0	7
18.		0	2	0	2	0	4
19.		0	2	0	2	1	5
20.		0	0	0	2	1	3
21.		0	2	0	2	0	4
22.		0	0	0	2	0	2
23.		0	2	0	2	1	5
24.		0	2	0	2	1	5
25.		0	2	0	2	0	4
26.		0	0	0	1	0	1
27.		0	2	0	2	1	5
28.		0	2	0	2	0	4
29.		0	2	0	2	1	5
30.		0	2	0	2	1	5
31.		2	2	2	2	0	8
celkem		8	42	13	55	9	127

test	1. test						2. test						3. test					
žáci	1.	2.	3.	4.	5.	suma	1.	2.	3.	4.	5.	suma	1.	2.	3.	4.	5.	suma
1.	0	2	2	2	0	6	0	2	0	1	3	6	1	2	2	2	0	7
2.	0	2	0	2	1	5	0	2	2	2	3	9	0	2	0	2	0	4
3.	0	2	1	2	1	6	2	2	0	2	3	9	0	2	0	2	1	5
4.	0	2	0	0	1	3	0	2	2	2	2	8	0	0	0	2	1	3
5.	0	2	0	2	1	5	0	2	2	2	3	9	0	2	0	2	0	4
6.	0	2	0	2	0	4	0	0	2	2	3	7	0	0	0	2	0	2
7.	0	2	0	1	0	3	0	2	2	2	3	9	0	2	0	2	1	5
8.	0	2	0	0	0	2	2	2	2	2	3	11	0	2	0	2	1	5
9.	0	2	2	2	0	6	2	2	2	2	3	11	0	2	0	2	0	4
10.	0	2	0	2	0	4	0	2	2	2	3	9	0	0	0	1	0	1
11.	0	2	0	1	1	4	0	2	2	1	3	8	0	2	0	2	1	5
12.	0	2	0	1	0	3	2	2	2	2	3	11	0	2	0	2	0	4
13.	0	2	0	2	0	4	0	2	2	2	3	9	0	2	0	2	1	5
14.	0	2	0	0	0	2	0	1	2	2	3	8	0	2	0	2	1	5
15.	0	2	2	1	2	7	2	2	2	2	3	11	2	2	2	2	0	8
celkem	**0**	**30**	**7**	**20**	**7**	**64**	**10**	**27**	**26**	**28**	**44**	**135**	**3**	**24**	**4**	**29**	**7**	**67**

Tab. 3 - Hodnocení řešení ve třetím testu

Tab. 4 - Hodnocení řešení ve třídě 8.I. (ve 3. testu 9.I.)

test	1. test						2. test						3. test					
žáci	1.	2.	3.	4.	5.	suma	1.	2.	3.	4.	5.	suma	1.	2.	3.	4.	5.	suma
1.	0	2	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2
2.	0	0	0	2	0	2	0	2	0	2	3	7	0	0	0	0	0	0
3.	0	0	0	1	0	1	0	2	0	1	3	6	1	0	0	2	0	3
4.	0	2	2	1	0	5	0	2	2	2	0	6	0	2	0	2	0	4
5.	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2	3	5	0	2	0	2	0	4
6.	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2	3	5	0	2	0	2	0	4
7.	0	2	0	1	0	3	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	0	4
8.	0	2	0	1	0	3	0	2	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2
9.	0	2	0	1	2	5	0	2	2	0	3	7	0	0	0	2	1	3
10.	0	2	0	2	0	4	0	2	0	2	0	4	0	2	0	2	0	4
11.	0	0	0	2	0	2	0	2	2	2	3	9	2	0	2	2	0	6
12.	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	3	7	0	0	0	2	0	2
13.	0	2	0	2	0	4	0	2	2	2	3	9	0	0	2	2	0	4
14.	0	0	0	1	0	1	0	2	2	2	3	9	0	0	2	2	0	4
15.	0	2	0	2	1	5	0	0	0	2	0	2	0	2	1	2	1	6
16.	1	2	2	2	0	7	2	2	0	2	3	9	2	2	2	2	0	8
celkem	**1**	**22**	**4**	**20**	**3**	**50**	**2**	**24**	**10**	**23**	**30**	**89**	**5**	**18**	**9**	**26**	**2**	**60**

Tab. 5 - Hodnocení řešení ve třídě 8.II. (ve 3. testu 9.II.)

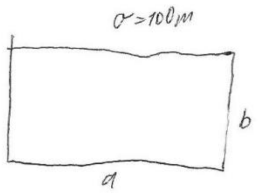
Ukázky žákovských řešení testů:

① Parkoviště - obdélník

$o = 100\,m$ $\quad o = 2(a+b)$ $\quad \cancel{o = ab}$

$\cancel{a = b-6}$ $\quad a = 3b - 6 = 36\,cm$

$b = 14\,cm$ $\quad S = ab$



$3b - 6 = a$

$S = x\,m^2$

$S = a \cdot b$

$S = 36 \cdot 14$

$S = 504\,m^2$

$36 \cdot 14$: 144, 36, 504

$100 = 2 \cdot (25+25)$

$2 \cdot (50+0)$

$2 \cdot (10+40)$

$2 \cdot (20+30)$

$2 \cdot (35+15)$

$2 \cdot (36+14)$

$\cancel{100 = 10 \cdot 10}$, $5 \cdot 20$, $4 \cdot 25$, $2 \cdot 50$, $1 \cdot 100$

Plocha ~~Obsah~~ parkoviště je $504\,m^2$

② sázka

Karel $s_1 = 20\,km$ $\quad v_1 = 19\,km/h$

Petr $s_2 = 13\,km$ $\quad v_2 = 14\,\frac{km}{h}$

$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{20}{19} = 1{,}05\,h$

$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{13}{14} = 0{,}92\,h$

$1{,}05\,h > 0{,}92\,h$

Petr vyhrál sázku.

$20 : 19 = 1{,}05$; 100; 5

$13 : 14 = 0{,}92$; 130; 40; 12

③ Albrechtice - Bašta 400 km

8:00 auto (a) z Albrechtic $v = 100\,km/h$

9:00 náklaďák (n) z Bašty $v = 50\,km/h$

Za jak dlouho a jak daleko od Alb. se potkají?

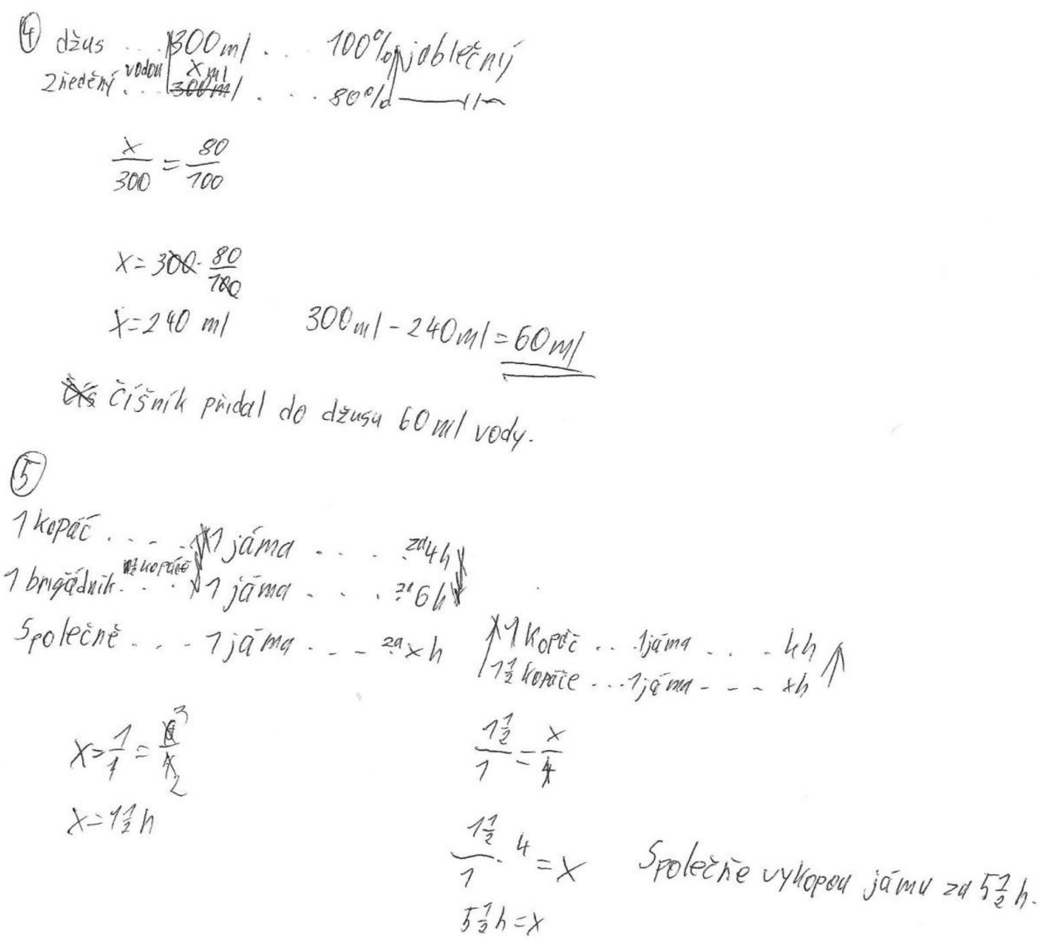
8:00 . . . a . . . 0 km

9:00 . . . a . . . 100 km $\quad$ 9:00 . . . n . . . 0 km

10:00 . . . a . . . 200 km $\quad$ 10:00 . . . n . . . 50 km

11:00 . . . a . . . 300 km $\quad$ 11:00 . . . n . . . 100 km

Potkají se za 2 h, 300 km od Albrechtic.


④ džus ... 300 ml ... 100% jablečný
zředěný vodou ... ~~300 ml~~ x ml ... 80% — " —

$\frac{x}{300} = \frac{80}{100}$

$x = 300 \cdot \frac{80}{100}$

$x = 240$ ml   300 ml − 240 ml = 60 ml

Číšník přidal do džusu 60 ml vody.

⑤

1 kopáč ... 1 jáma ... za 4 h
1 brigádník (1½ kopáče) ... 1 jáma ... za 6 h
Společně ... 1 jáma ... za x h

1 kopáč .. 1 jáma ... 4 h
1½ kopáče ... 1 jáma ... x h

$x = \frac{1}{1} = \frac{6}{4}$

$x = 1\frac{1}{2}$ h

$\frac{1\frac{1}{2}}{1} = \frac{x}{4}$

$\frac{1\frac{1}{2}}{1} \cdot 4 = x$

$5\frac{1}{2}$ h $= x$

Společně vykopou jámu za $5\frac{1}{2}$ h.

Obr. 1 – Ukázkový test číslo jedna

~~1. 0 60 cm~~

$\cancel{x = 9 - (2x)}$

$x = 9 - 2x$

$\cancel{3x = 9}$

$\cancel{x = 3}$

2.

	v	t	s
M	$8 \frac{km}{h}$	x h	16 km
P	$6 \frac{km}{h}$	x h	13 km

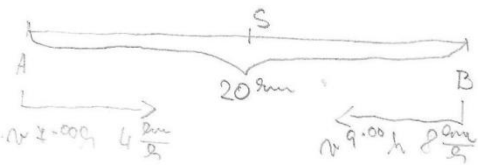
$t = s : v$ $\quad$ $t = s : v$

$t = 16 : 8$ $\quad$ $t = 13 : 6$

$t = \underline{2\ h}$ $\quad$ $t = \underline{2{,}16\ h \doteq 2{,}2\ h}$

Milan byl v cíli první.

3.



	v	t	s
L	$4 \frac{km}{h}$	x h	4x
K	$8 \frac{km}{h}$	x - 2 h	8.(x-2)

$\cancel{Zk: 4 \cdot 4 = 16\ km}$

$\cancel{8 \cdot (4-2) = 16\ km}$

$\cancel{4x = 8 \cdot (x-2)}$ $\quad 4x + 8 \cdot (x-2) = 20$

$\cancel{4x = 8x - 16}$ $\quad 4x + 8x - 16 = 20$

$\cancel{4x = 16}$ $\quad 12x = 36$

$\cancel{x = 4\ h}$ $\quad x = 3$

Zk: $4 \cdot 3 = 12$

$8 \cdot (3-2) = 8$

Setkají se za 3 h 12 km od Adamova.

(4.)

100% .... 200 ml
70% .... x ml

$x = \frac{70}{100} \cdot 200$

$x = \frac{14000}{100}$

$x = 140$ ml

Čistič přinesl 140 ml obrusu a 60 ml vody.

(5.)

P_1	5 h	$\frac{x}{5}$
P_2	3 h	$\frac{x}{3}$ h
společně	x h	1

$\frac{x}{5} + \frac{1}{3} = x \quad / \cdot 15$

$3 + 5 = 15x$

$8 = 15x$

$x = \frac{8}{15}$

$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 1 \quad / \cdot 15$

$3x + 5x = 15$

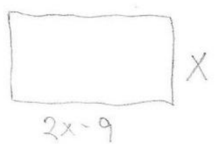
$8x = 15$

$x = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

$x = 1$ h a 53 min

~~Nádrž~~ Jezírko se naplní oběma přítoky za 1 h a 53 minut.

(1.)



$2x + 2.(2x-9) = 60$

$2x + 4x - 18 = 60$

$6x - 18 = 60$

$6x = 78$

$x = 13$

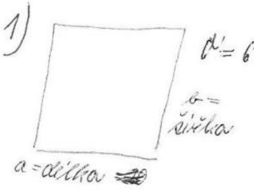
$2 \cdot 13 - 9 = 17$

$S = 17 \cdot 13$

$S = 221$ m^2

Plocha návsi je 221 m^2.

Obr. 2 – Ukázkový test číslo dva

1) 

o = 60 m

délka . . . . . x − 9
šířka x

$$2\cdot(x-9)+2\cdot x = 60$$
$$2x-18+2x = 60$$
$$4x-18 = 60 \quad /+18$$
$$4x = 78 \quad /:4$$
$$x = \underline{\underline{19{,}5}}$$

$78 : 4 = 19{,}5$

$\frac{78}{4} = \frac{39}{2}$

$S = a\cdot b$

$S = 10{,}5\cdot 19{,}5$

$S = 204{,}75\,(m^2)$

$10{,}5 \cdot 19{,}5 = 204{,}75$

Plocha návsí je $204{,}75\ m^2$.

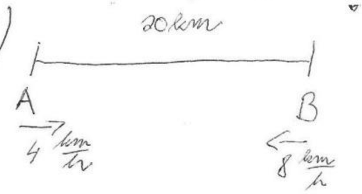
2)

	v	t	s
Milan	$8\ \frac{km}{h}$	x	16 km
Pavel	$6\ \frac{km}{h}$	x	13 km

$$8x = 16 \quad /:8$$
$$x = \underline{\underline{2}}\ (h)$$

$$6x = 13 \quad /:6$$
$$x = \underline{\underline{2{,}1}}\ (h)$$

V cíli byl první Milan.

3) 

	v	t	s
Zinka	$4\ \frac{km}{h}$	x	4x
Klára	$8\ \frac{km}{h}$	x − 2	8(x − 2)

$4x + 8(x-2) = 20$

$4x + 8x - 16 = 20$

$12x - 16 = 20 \quad / + 16$

$12x = 36 \quad / : 12$

$x = 3$

Holky se setkají za 3 h, 12 km od Adamova.

4)

200 ..... 100 %

x ..... 70 %

$\frac{x}{200} = \frac{70}{100}$

$x = 140$ ml   Číšník přinese 140 ml džusu a 60 ml vody.

5)

		za 1 h	za x h
1. přítok	5 h	$\frac{1}{5}$	$\frac{x}{5}$
2. přítok	3 h	$\frac{1}{3}$	$\frac{x}{3}$
současně	x		1

$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 1 \quad / \cdot 15$

$3x + 5x = 15$

$8x = 15 \quad / : 8$

$x = \frac{15}{8}$

$x = 1\frac{7}{8}$ (h)

$60 : 8 = 7{,}5$

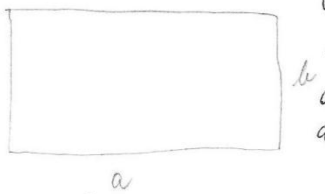
$40 \cdot 7$

$52{,}5$

Jezírko se naplní za 1 h a 52,5 s.

Obr. 3 – Ukázkový test číslo tři

1.



$O = 98\ m$

$S = x\ m^2$

$a = 98 : 4$

$a = 24,5\ m$

$b = (98 : 4) : 2$

$b = 12,25$

$S = a \cdot b$

$S = 24,5 \cdot 12,25$

$S = \underline{\underline{300,125\ m^2}}$

Obsah zahrady je 300, 125 m².

2.

~~10 km .... 3 km/h~~

~~15 km .... 5 km/h~~

1. chlapec : 10 km ...... 3 km/h

2. chlapec : 15 km ..... 5 km/h

Kdo byl 1. v ~~cí~~ cíli

1. chlapec : $t = s : v$

$t = 10 : 3$

$t = \underline{\underline{3,33\ hod}} = 3h\ 5,5\ min$

2. chlapec : $t = s : v$

$t = 15 : 5$

$t = \underline{3h}$

V cíli byl dříve chlapec číslo 2. za 3 hodiny.

~~2 dcl ...... 100%~~

~~2 dcl ...... 80%~~

3. vzdálenost dvou míst 200 km

nákl. auto ...... 40 km/h (x_1)

osobní auto ..... 80 km/h (x_2)

za jak dlouho se setkají x (h)

~~kde se setkají y (km)~~ kde se setkají y (km)

nákl. auto:

$x_1 = 200 : 40$

$x_1 = 5h$

$5 + 7 = 12$

osobní auto:

$x_2 = 200 : 80$

$x_2 = 2,5\ h$

$2,5 + 9 = 11,5$

$y = 200 : 30$

$y = \underline{6,66\ km}$

Setkají se 6,66 km za Adamovem a 193,34 km před Bedřichovem.

$x = 12 - 11,5$

$x = \underline{\underline{0,5h}} = 30\ min$ Vzdálenost vyjde dříve osobní auto o 30 minut.

4.

100% ...... pomerančový džus (2dcl)

80% ..... pom. džus s vodou (2dcl)

Jaké množství vody x bylo přidáno

x = 100 - 80

x = 20

x = 2 : 20

x = 0,1 dcl = 10ml

Bylo přidáno 10 ml vody.

5.

~~Ad~~ 1. zedník ...... za 6 h

2. zedník .... za 4 h

společně ..... za x h

x = 6 : 4

x = 1,5 h = 1h 30 min

Společně by jej omítli za 1 h a 30 min.

Obr. 4 – Ukázkový test číslo čtyři

(1)

náves: o = 60 m

N: 

o = 60 m

délka .... (x . 2) - 9 | 23 . 2 - 9 = 37
šířka .... x | 23 = 60 m

23 : 2 = 11,5 (m)
37 : 2 = 18,5 (m)

$(x \cdot 2) - 9 + x = 60$

$3x - 9 = 60 \quad / + 9$

$3x = 69 \quad / : 3$

$x = \underline{\underline{23}}\ (m)$

11,5
18,5
575
920
115
212,75

23
37
161
69
851

S = 11,5 . 18,5
S = 212,75 (m²)

~~S = 23 . 37~~
~~S = 851 (m²)~~

(2)

M: 16 km, 8 km/h
P: 13 km, 6 km/h

S

~~Plocha~~ Plocha návsi je 212,75 m².

	v	t	s
M	8	x	16
P	6	x	13

13 : 6 = 2,1

P: $6x = 13 \quad / : 6$

$x = \underline{\underline{2,1}}\ (h)$

M: $8x = 16 \quad / : 8$

$x = \underline{\underline{2}}\ (h)$

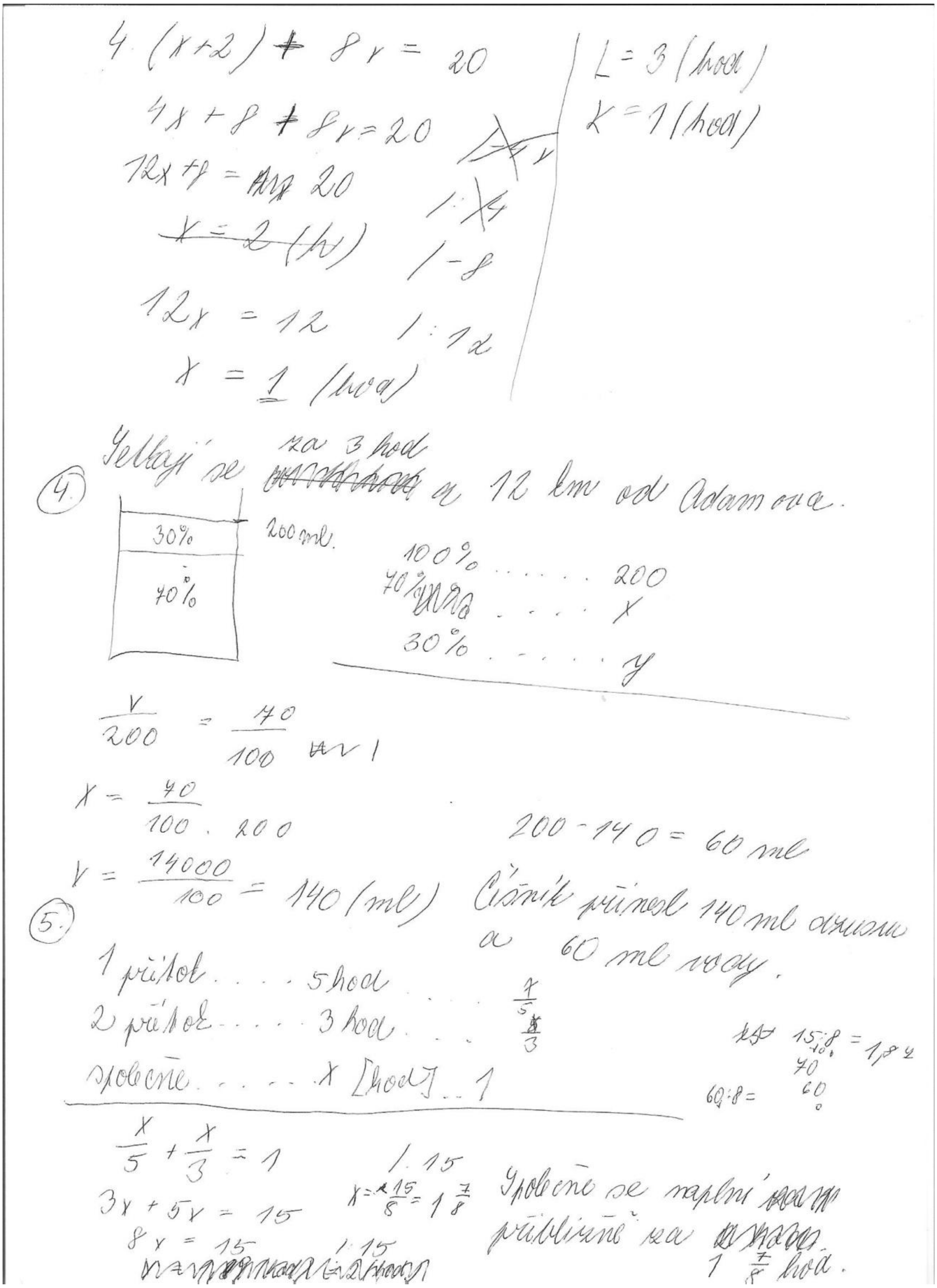
První v cíli byl první Milan.

(3)

9^{00} 20 km 9^{00}

L → 4 km/h S 8 km/h ← B

	v	t	s	
L	4	x + 2	4 . (x + 2)	12 km
K	8	x	8x	8 . 1 = 8



$4\cdot(x+2) + 8x = 20$

$4x + 8 + 8x = 20$

$12x + 8 = 20$ $/-8$

~~$x = 2\ (h)$~~

$12x = 12$ $/:12$

$x = \underline{1}\ (hod)$

$L = 3\ (hod)$

$K = 1\ (hod)$

Setkají se za 3 hod a 12 km od Adamova.

(4.)

30 %

70 %

200 ml

100 % 200

70 % x

30 % ...... y

$\frac{x}{200} = \frac{70}{100}$

$x = \frac{70}{100}\cdot 200$

$x = \frac{14000}{100} = 140\ (ml)$

$200 - 140 = 60\ ml$

Číšník přinesl 140 ml džusu a 60 ml vody.

(5.)

1 přítok .... 5 hod ..... $\frac{1}{5}$

2 přítok .... 3 hod ..... $\frac{1}{3}$

společně ..... x [hod] .. 1

$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 1$ $/\cdot 15$

$3x + 5x = 15$

$8x = 15$

$x = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

$15 : 8 = 1{,}87$

Společně se naplní přibližně za $1\frac{7}{8}$ hod.

Obr. 5 – Ukázkový test číslo pět

1.

$\sigma = 100\,m.$ délka .... o 6 m kratší než šířky trojnásobek

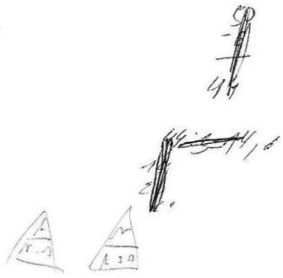
š   d- $3 \cdot š - 6 = d$

$\sigma = 2 \cdot (a+b)$

$\sigma = 100$

$100 : 2 = 50$

$100 = 2 \cdot 50$

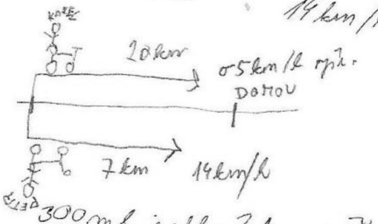


2.

Karel   20 km

Petr   13 km   o 5 km/h

14 km/h



	v	t	s
Karel	o 5 km/h	X	20 km
Petr	14 km/h	X^2	7 km

4.

300 ml jablečného džusu

100 % ..... 300 ml

80 % ..... x ml

20 % .....

$\frac{80}{100} = \frac{x}{300}$ $x = \frac{80 \cdot 300}{100}$ $x = \underline{\underline{240\,ml}}$

80 % .... 240 ml

20 % ... x ml

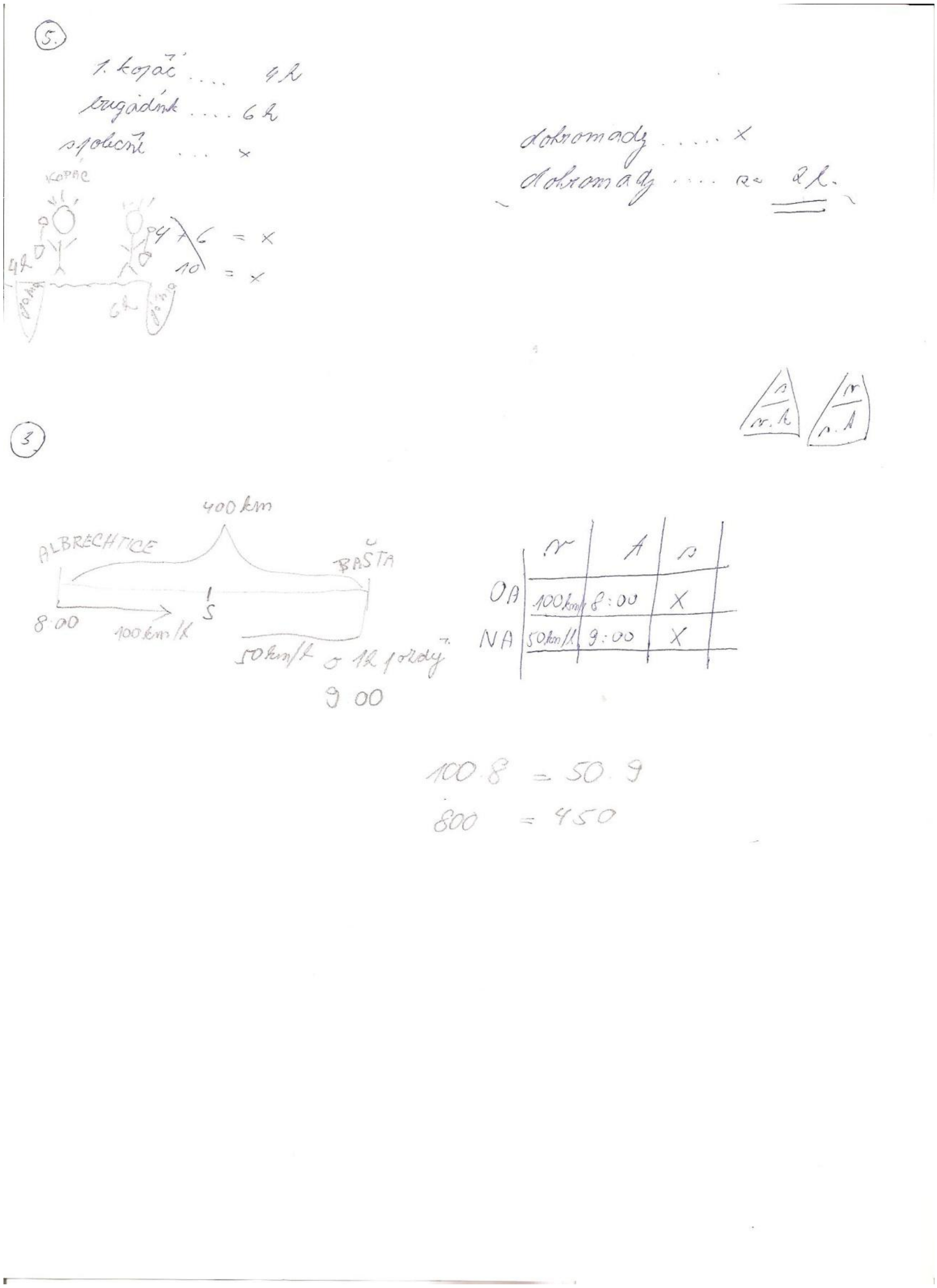
$\frac{20}{80} = \frac{x}{240}$ $x = \frac{20 \cdot 240}{80}$ $x = \frac{480}{8}$

$x = \underline{\underline{60\,ml}}$

24
20
00
48

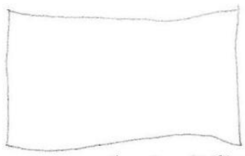
$480 : 8 = 60$

Číšník přilil 60 ml vody do sklenice



Obr. 6 – Ukázkový test číslo šest

1



$O = 100\ m$

délka ..... ~~(3·x) − 6~~ $3x - 6$ ..... $(26{,}5 \cdot 3) - 6 = 73{,}5\ m$

šířka ..... x ..... $26{,}5\ m$

Obvod ..... $100\ m$ ..... $100\ m$

$x = 13{,}25$

$a = 36{,}75$

$3x - 6 + x = 100$

~~$3 \cdot 2x = 100$~~

$4x - 6 = 100$

$4x = 106$

$x = 26{,}5\ m$

$S = a \cdot x$

$S = 36{,}75 \cdot 13{,}25$

$S = \underline{486{,}94\ m^2}$

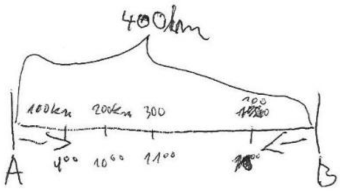
Plocha parkoviště je $486{,}94\ m^2$.

2 Karel ..... 20 km ..... o 5 km/h vyšší ... 19 km/h

Petr .... 13 km ..... 14 km/h

Sázku vyhrál Petr.

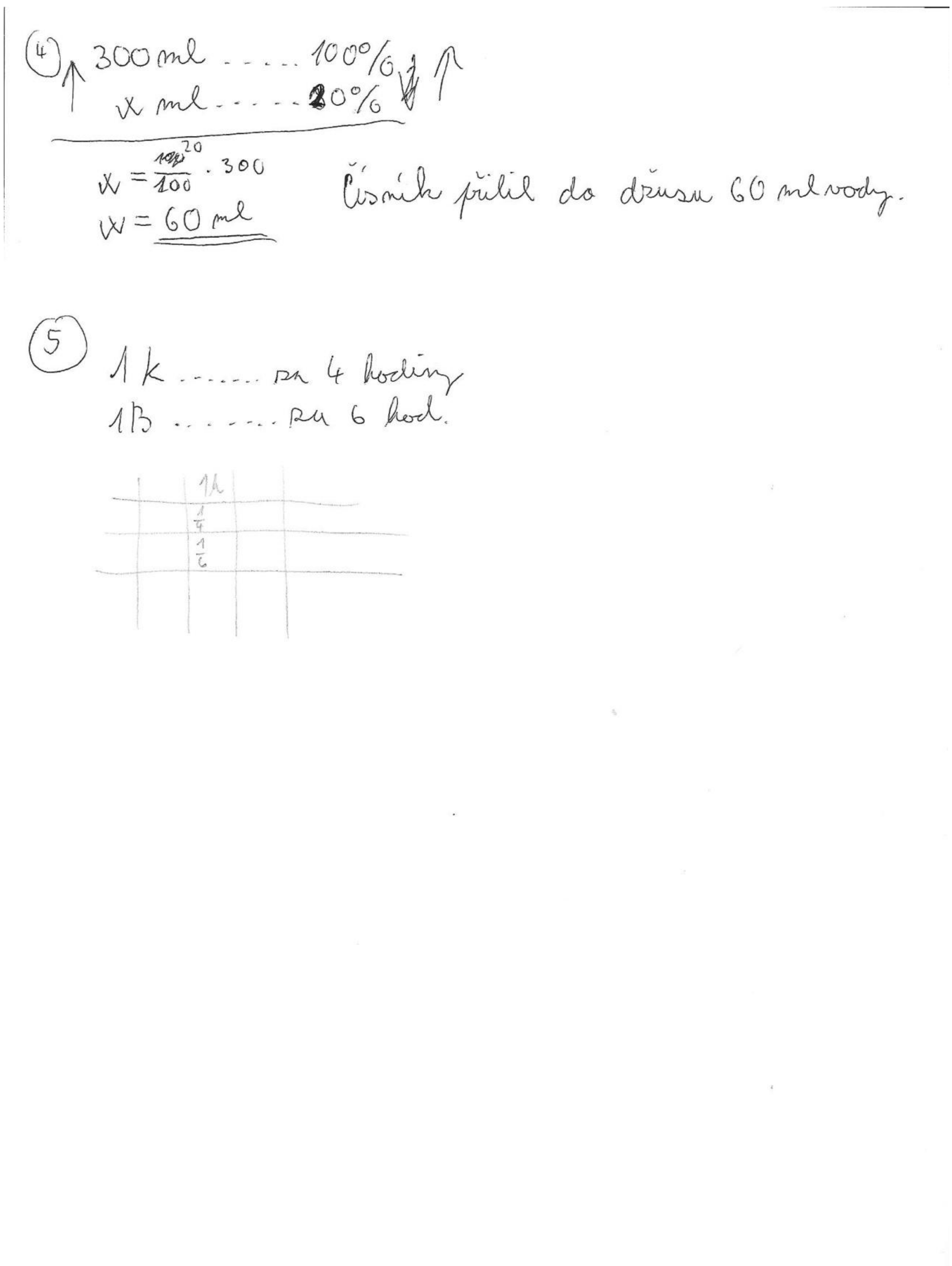
3



8:00
100 km/h

9:00
50 km/h

Auta se potkají ~~ro~~ 300 m od Albrechtic v 11 hodin.



(4) 300 ml ..... 100 %
x ml ..... 20 %

$x = \frac{\cancel{100}^{20}}{100} \cdot 300$

$x = 60$ ml

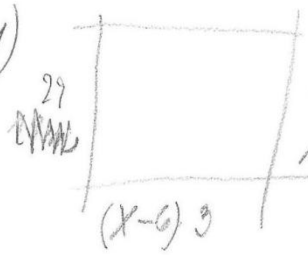
Číšník přilil do džusu 60 ml vody.

(5) 1 k ...... za 4 hodiny
1 B .... za 6 hod.

	1h
	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{6}$

Obr. 7 – Ukázkový test číslo sedm

1)



$o = 100\,m$

$(x-6)\cdot 3 = x$

$3x - 18 = x \quad /-3x$

$-18 = -2x \quad /:-2$

$x = \underline{9}\ (m)$

$9 \cdot 3 = 29$

29
29
21
21

100

50 m

$100 : 3 = 38$

2) K . . . . . . 20 km . . . 5 km/h
P . . . . . . 13 km . . . 14 km/h

$13 : 14 = 0{,}9$

K: $t = s : v$
$t = 20 : 5$
$t = \underline{4}$ (hod)

P: $t = 13 : 14$
$t = 0{,}9\ (h)$ $\frac{9}{10} = \underline{54}$ (min)

Peter pojede rychlejši. Víťazom vyhral Peter.

3)

A: $v = 100\ km/h$
N: $v = 50\ km/h$

	t	s	v
A	x	400	100
N	x + 1	400	50

A
$x = 400 : 100$
$x = 4\ (h)$

$x + 1 = 400 : 50$
$x + 1 = 8$
$x = \underline{7}$

4)

300 ml . . . . . 100 %

x ml . . . . 20 %

x = 60 (ml)

Čišník přilil do sklenice 60 ml vody.

5)

1 kopáč . . . . 4 hod

brig. . . . . . . 6 hod

společně . . . . . x (hod)

6+4

$\cancel{\frac{x}{10} =}$

x = 10 : 2

x = 5 (h)

Obr. 8 – Ukázkový test číslo osm

(2.)

1. o 5 km kratší $\xrightarrow{10km}$ 3km/h
2. 15 km 5km/h
první byl .... x kamarád

98:2=49
18

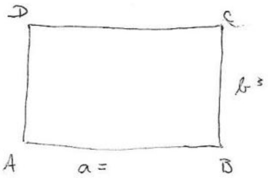
$$\begin{array}{r} 98 \\ \cdot 2 \\ \hline 196 \end{array}$$

~~První byl u chaty 2. kamarád~~ . . .

15:5 = 3
10:3 = 3,3

U chaty byl první druhý kamarád.

(1.)



$o = 98m$
plocha = x cm²

$o = 2.(a+x)$
$S = a.b$

$o = 2.(a+b)$
$98 = 2.(a+b)$
~~98=~~
$98 = 2.(49)$

(5)

1\. redník ... 6 h.
2\. -//- ..... 4 h.
společně ..... x h.
2 ~~3~~ ~~z~~ ~~p~~ re. ..... 10 h.

$\frac{2}{2} = \frac{x}{10}$ $x = \frac{2 \cdot 10}{2}$

$x = \underline{\underline{10\ h}}$

930 : 50 = 2,5
166 : 100 = 1,...
200 : 80 = 2,5
4

(4.)

2 dcl ..... 100 %
x dcl ..... 80 %

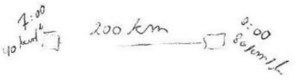
$\frac{x}{2} = \frac{100}{80}$ $x = \frac{2 \cdot 100}{80}$

$x = \underline{\underline{2{,}5}}\ dcl$

Nalil vody 2,5 dcl.

(3.)

v 7:00 ..... 40 km/h
v 9:00 ..... 80 km/h
za .... x h.
daleko ..... y km.



Obr. 9 – Ukázkový test číslo devět

[redacted]

1) [redacted]

$o = 2 \cdot (a+b)$

$o = 2 \cdot (25{,}5 + 4{,}5)$

$o = 60\ m$

$S = a \cdot b$

$S = 25{,}5 \cdot 4{,}5$

$S = 114{,}75\ m^2$

Náves má plochu 114, 75 m².

[redacted]

2) [redacted]

	v	t	s	
M	8 km/h	x	8x	16 km
P	6 km/h	x	6 · x	13 km

$6x = 13$

$x = \frac{13}{6}$

$x = 2\frac{1}{6}\ h$

$8x = 16$

$x = \frac{16}{8}$

$x = 2\ h$

V cíli byl první Milan.

3)

	v	t	s	
L	4 km/h	x	4 · x	20 km
K	8 km/h	x − 2	8(x − 2)	

$4x + 8x - 16 = 20$

$12x - 16 = 20$

$12x = 36$

$x = 3\ h$

$3 \cdot 4 = 12\ km$

Dívky se setkají za 3 h, 12 km od Adamova.

4)

100 % .... 200 ml

70 % .... x ml

30 % .... y ml

1 % .... 2 ml

$70 \cdot 2 = 140\ ml$

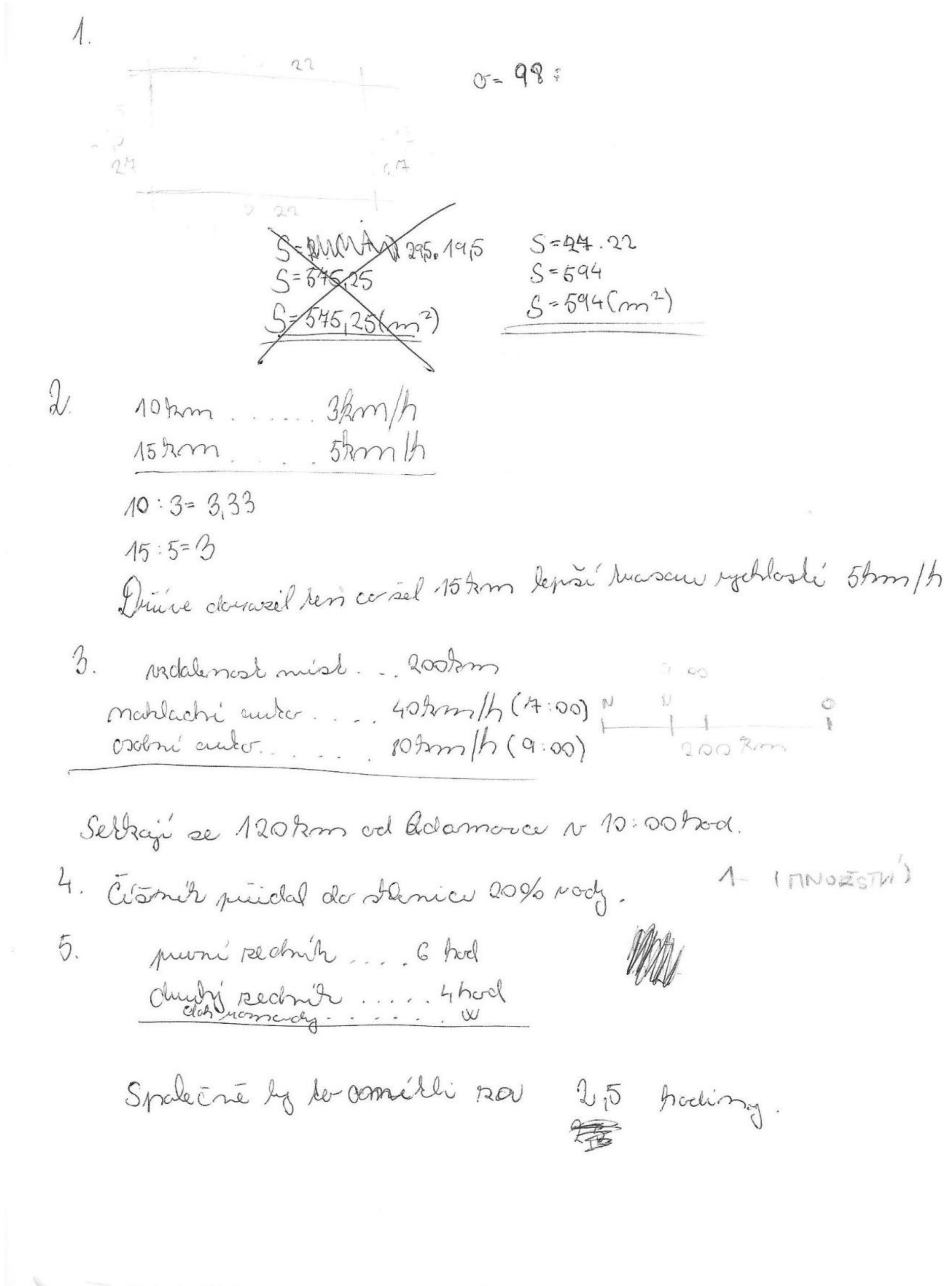
$30 \cdot 2 = 60\ ml$

Číšník jí přinesl 140 ml džusu a 60 ml vody ve 200 ml sklenici.

5)

		za 1 h
P_1	5 h	$\frac{1}{5}$
P_2	3 h	$\frac{1}{3}$
celkem	x h	x

Obr. 10 – Ukázkový test číslo deset



1.

o = 98 ?

~~S = 295 . 19,5~~
~~S = 575,25~~
~~S = 575,25 (m²)~~

S = 27 . 22
S = 594
S = 594 (m²)

2. 10 km ...... 3 km/h
15 km ..... 5 km/h

10 : 3 = 3,33
15 : 5 = 3

Dříve dorazil ten co šel 15 km lepší [illegible] rychlostí 5 km/h

3. vzdálenost míst ... 200 km
nákladní auto .... 40 km/h (7:00)
osobní auto ..... 80 km/h (9:00)

Setkají se 120 km od Adamovce v 10:00 hod.

4. Číšník přidal do sklenice 20% vody. 1 – (MNOŽSTVÍ)

5. první zedník .... 6 hod
druhý zedník ..... 4 hod
dohromady x

Společně by to zvládli za 2,5 hodiny.

Obr. 11 – Ukázkový test číslo jedenáct