



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY**

INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

**DELAUNAYHO TRIANGULACE A JEJÍ APLIKACE**

DELAUNAY TRIANGULATION AND ITS APPLICATIONS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Monika Kojdová

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

prof. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.

BRNO 2024



## Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav automatizace a informatiky
Student:	Monika Kojdová
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojnío inženýrství
Vedoucí práce:	<b>prof. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Delaunayho triangulace a její aplikace**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Delaunayho triangulace (DT) patří společně s Voroného diagramy mezi základní geometrické struktury počítačové geometrie. I když obě struktury jsou navzájem duální, mají své vlastní aplikační využití.

#### **Cíle bakalářské práce:**

Popsat některý z algoritmů konstrukce Delaunayho triangulace a uvést příklady využití v technických aplikacích.

#### **Seznam doporučené literatury:**

De BERG, Mark, Otfried CHEONG, Marc van KREVELD and Mark OVERMARS. Computational Geometry: Algorithms and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

OKABE, Atsuyuki, Barry BOOTS, Kokochi SUGIHARA and Sung Nok CHIU. Spatial Tessellations and Applications of Voronoi Diagrams. New York: John Wiley & Sons, , 2000.

ZELINKA, Ivan, Zuzana OPLATKOVÁ, Miloš ŠEDA, Pavel OŠMERA a František VČELAŘ. Evoluční výpočetní techniky. Principy a aplikace. Praha: BEN – technická literatura, 2009.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty



## **ABSTRAKT**

Delaunayho triangulácia je významný geometrický koncept s aplikáciami v počítačovej grafike, geografických informačných systémoch, medicíne a inžinierstve. Táto práca sa zaoberá teoretickými princípmi Delaunayho triangulácie, rôznymi algoritmami a ich aplikáciami v praxi. Skúma sa význam a potenciál Delaunayho triangulácie v digitálnom svete a navrhuje budúce smerovania výskumu.

## **ABSTRACT**

Delaunay triangulation is a significant geometric concept with applications in computer graphics, geographic information systems, medicine, and engineering. This thesis focuses on the theoretical principles of Delaunay triangulation, various algorithms, and their practical applications. The importance and potential of Delaunay triangulation in the digital world are explored, and future research directions are proposed.

## **KLÚČOVÉ SLOVÁ**

Delaunayho triangulácia, rovnostranný trojuholník, Voroného diagram, triangulácia, dualita, algoritmy

## **KEYWORDS**

Delaunay triangulation, equilateral triangle, Voronoi diagram, triangulation, duality, algorithms





ÚSTAV AUTOMATIZACE  
A INFORMATIKY



2024

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA**

KOJDOVÁ, Monika. *Delaunayho triangulace a její aplikace*. Brno, 2024. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/154092>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automatizace a informatiky. Vedoucí práce Miloš Šeda.



## **POĎAKOVANIE**

Rada by som sa poďakovala vedúcemu mojej záverečnej bakalárskej práce prof. RNDr. Ing. Milošovi Šedovi za jeho ochotu a časovú flexibilitu pri písaní záverečnej práce ako aj ľudský prístup vzhľadom na moju rodinnú situáciu. Rovnaké poďakovanie venujem mojej rodine a priateľovi za pomoc so starostlivosťou o našu dcéru počas hodín, ktoré som venovala tejto práci a podporu počas celého štúdia. Chcela by som sa poďakovať aj sama sebe, za odhodlanie, ktoré som vložila do ukončenia štúdia a verím, že sa aj naďalej budem aktívne vzdelávať. Posledné ďakujem patrí mojej dcére Elene, že ma naučila, čo je v živote naozaj dôležité.



## ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, vypracoval jsem ji samostatně pod vedením vedoucího práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury.

Jako autor uvedené práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následku porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestně právních důsledků.

V Brně dne 20. 5. 2024

.....

Monika Kojdová





# OBSAH

<b>1</b>	<b>ÚVOD.....</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>TRIANGULÁCIA.....</b>	<b>17</b>
2.1	Kritéria kvality triangulácie.....	17
2.2	Delenie triangulácií.....	18
<b>3</b>	<b>VORONÉHO DIAGRAM.....</b>	<b>19</b>
3.1	Konvexná obálka.....	20
3.2	Dualita medzi Voroného diagramom a Delaunayho trianguláciou.....	20
<b>4</b>	<b>DELAUNAYHO TRIANGULÁCIA (DT).....</b>	<b>23</b>
4.1	Jednoznačnosť Delaunayho triangulácie.....	24
4.2	Maximalizácia minimálneho uhla.....	24
<b>5</b>	<b>ALGORITMY DELAUNAYHO TRIANGULÁCIE.....</b>	<b>25</b>
5.1	Metóda lokálneho zlepšenia.....	25
5.2	Inkrementálne vkladanie.....	26
5.3	Algoritmus radiálneho zametania.....	27
5.4	Rozdeľ a Panuj.....	29
<b>6</b>	<b>APLIKOVANIE DELAUNAYHO TRIANGULÁCIE V PRAXI.....</b>	<b>31</b>
6.1	Minimálna kostra v euklidovskej rovine.....	31
6.2	Steinerov minimálny strom.....	32
6.3	Generovanie sietí.....	33
6.4	Plánovanie trás robota.....	35
6.5	Využitie v chémii.....	35
<b>7</b>	<b>ZÁVER.....</b>	<b>37</b>
	<b>ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY.....</b>	<b>39</b>
	<b>ZOZNAM OBRÁZKOV.....</b>	<b>41</b>



# 1 ÚVOD

Delaunayho triangulácia je významný geometrický koncept v oblasti počítačovej grafiky a výpočtovej geometrie. Jej základný princíp spočíva v rozdelení množiny bodov v rovine do nepravidelných trojuholníkov tak, aby bola splnená podmienka týkajúca sa kružníc opísaných okolo týchto trojuholníkov. Tento koncept, pomenovaný po ruskom matematikovi Borisovi Delaunayovi, má široké spektrum aplikácií v rôznych odvetviach, vrátane počítačovej grafiky, geografických informačných systémov, medicíny, ale aj v inžinierstve a prírodných vedách.

Cieľom tejto bakalárskej práce je poskytnúť pohľad na princípy a metódy Delaunayho triangulácie, jej vlastnosti a algoritmické implementácie. Ďalej sa práca zameriava na konkrétne aplikácie tejto triangulácie v rôznych oblastiach.

Prvá časť práce sa venuje teoretickému základu triangulácie vo všeobecnosti ako aj Delaunayho triangulácie, kde sú popísané jej definície, vlastnosti a vzťahy s inými geometrickými štruktúrami ako je Voroného diagram. Nasleduje prehľad existujúcich algoritmov na vytvorenie Delaunayho triangulácie.

Posledná časť práce sa zameriava na konkrétne aplikácie Delaunayho triangulácie v rôznych odvetviach. Sú tu uvedené príklady využitia v počítačovej grafike pre generovanie sieťových štruktúr, v geografických informačných systémoch (GIS) aj plánovanie trasy robota.

Táto bakalárska práca poskytuje komplexný prehľad o Delaunayho triangulácii a jej význame v súčasnom digitálnom svete. S nárastom počtu dát a zložitosti problémov v rôznych odvetviach je pochopenie a efektívne využívanie tohto geometrického nástroja stále dôležitejšie pre ďalší rozvoj technológií a aplikácií.

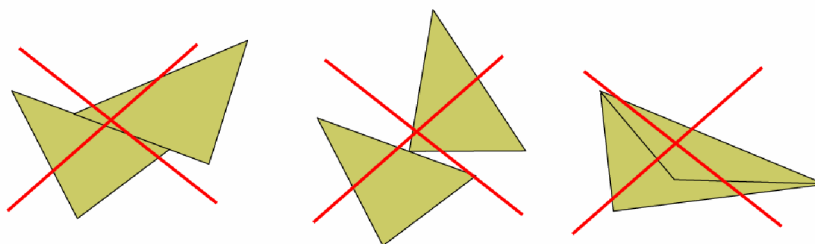


## 2 TRIANGULÁCIA

Triangulácia je kľúčovým pojmom v oblasti výpočtovej geometrie a matematickej topológie, ktorý sa používa v rôznych aplikáciách ako počítačová grafika, geografické informačné systémy (GIS), analýza dát a simulácie. Existuje niekoľko metód triangulácie, vzhľadom ku konkrétnemu problému a jeho špecifické vlastnosti. Delaunayho triangulácia je efektívna pre spojenie bodov, ale môže mať problémy s konkávnymi oblasťami, zatiaľ čo Greedy triangulácia je jednoduchšia, ale jej kvalita je nižšia. Je preto dôležité zvážiť výhody aj nevýhody danej metódy pred aplikovaním.

Definícia: Trianguláciu  $T$  nad množinou bodov  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  v rovine predstavuje také planárne rozdelenie, ktoré vytvorí súbor  $m$  trojuholníkov  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  tak, aby platilo

- ľubovoľné dva trojuholníky majú spoločnú najviac jednu hranu alebo vrchol,
- vo vnútri žiadneho trojuholníka neleží žiadny ďalší bod z  $P$ ,
- zjednotením trojuholníkov je súvislá množina v 2D, všeobecne nemusí byť konvexná a môže obsahovať diery. Diera v triangulácii je oblasť v dvojrozmernom priestore, ktorá nie je pokrytá žiadnym trojuholníkom v danej triangulácii. Formálne je možné definovať dieru v triangulácii ako spojenú množinu bodov, ktoré nie sú obsiahnuté v žiadnom trojuholníku triangulácie. Táto oblasť je teda oddelená od zvyšku priestoru, ktorý je pokrytý trojuholníkmi [1].



Obrázok 1: Vzájomná poloha trojuholníkov pre vylučujúcu trianguláciu [1]

Pre trianguláciu  $T$  nad množinou bodov  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  v rovine platia vzťahy, odvodené z Eulerovej formuly

$$m = 2n - n_{KO} + 2n_D - 2 \quad (1)$$

$$n_H = 3n - n_{KO} + 3n_D - 3 \quad (2)$$

$m$  – počet trojuholníkov

$n_H$  – počet hrán

$n_{KO}$  – počet vrcholov konvexných hrán

$n_D$  – počet dier.

### 2.1 Kritéria kvality triangulácie

Triangulačné algoritmy patria medzi najviac teoreticky rozpracované postupy. Medzi kritéria kvality patria

- jednoduchosť algoritmu a ľahká implementácia,
- možný prevod do vyšších dimenzií,
- optimálny tvar trojuholníkovej siete,
- produkcia čo najviac pravidelných trojuholníkov, blížiacich sa rovnostranným,
- malá citlivosť na singulárne prípady, kedy je nemožné trianguláciu zostrojíte alebo je triangulácia nejednoznačná [1].

Je dôležité pochopiť, že dané kritéria môžu byť jeden k druhému v kontraste. Napríklad väčšia jednoduchosť implementácie nie je v súlade s jej rýchlosťou. V praxi je výhradne používaná práve Delaunayho triangulácia, jej formálne vymedzenie bude popísané v ďalšej časti. Medzi ďalšie kritéria, ktoré je potrebné zohľadniť patrí aj triangulácia nekonvexných hrán, ide o schopnosť triangulovať aj oblasti obsahujúce diery. Ku príkladu, v mapách sú vynechávané niektoré oblasti ako budovy alebo vodné plochy.

## 2.2 Delenie triangulácií

Delenie triangulácií podľa geometrickej konštrukcie

- Greedy triangulácia,
- Delaunayho triangulácia,
- MWT (Minimum Weight triangulation),
- triangulácia s povinnými hranami,
- dátovo závislá triangulácia.

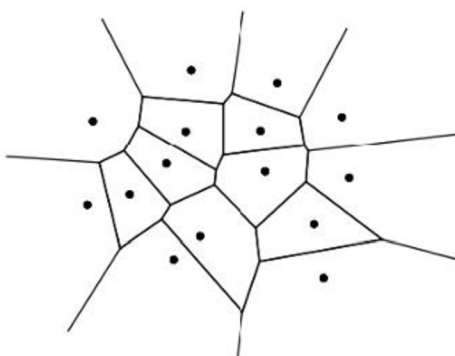
Delenie triangulácií podľa použitých kritérií

- *Lokálne optimálna triangulácia.*  
Konvexný štvoruholník tvorený 2 susednými trojuholníkmi triangulovanými optimálne vzhľadom k zadaným kritériam. Medzi tieto kritéria môže patriť minimálny alebo maximálny uhol, plocha trojuholníka, polomer vpísanej resp. opísanej kružnice alebo výška v trojuholníku. Všetky kritéria sú založené na geometrických záležitostiach.
- *Globálne optimálna triangulácia.*  
Všetky trojuholníky triangulácie sú optimálne vzhľadom k zadaným kritériam. V praxi je najviac využívaná, aj pre genetické algoritmy a Greedy trianguláciu. Minimalizuje sa celková dĺžka strán trojuholníka. Ďalšie kritériom sú predom definované povinné hrany vo vnútri triangulácie, tzv. Constrained Triangulation. Využíva sa pre lepšiu aproximáciu terénu.
- *Multikriteriálne optimalizovaná triangulácia.*  
Kombinácia viacerých lokálnych a globálnych kritérií. Nevýhodou je dlhý výpočtový čas, doposiaľ nie je známy žiaden efektívny algoritmus [2].

### 3 VORONÉHO DIAGRAM

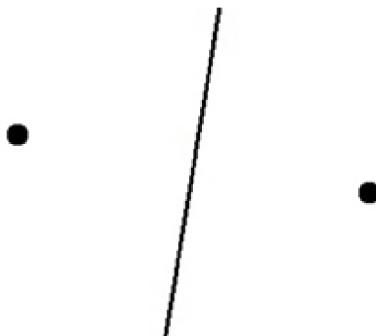
Prvýkrát bol Voroného diagram použitý v roku 1850 nemeckým matematikom Dirichtelom, avšak pomenovanie dostal až po ukrajinskom matematikovi, ktorým bol Georgy Fedoseevich Voronoi, ktorý sa zaoberal použitím v obecnej  $n$ -dimenzii.

Na množine bodov  $M$  je zostrojený Voroného diagram, s výnimkou krajných bodov je každý bod množiny  $M$  vo vnútri konvexného mnohouholníka, ktorý nazývame Voroného bunky. V skutočnosti sa aj krajné body nachádzajú v ňom, avšak majú neobmedzenú veľkosť a teda bod  $p$  je súčasťou konvexnej obálky množiny  $M$  [5].



Obrázok 2: Voroného diagram [6]

Hrany Voroného diagramu medzi susednými bunkami majú takú vlastnosť, že obidve obsahujú body  $p_i$  a  $p_j$  z množiny  $M$ , pričom každý bod na týchto hranách je rovnako vzdialený od bodov  $p_i$  a  $p_j$ . Napríklad pre dva body môžeme vizualizovať Voroného diagram, kde vznikne plocha rozdelená priamkou, známou ako bisektor [6].

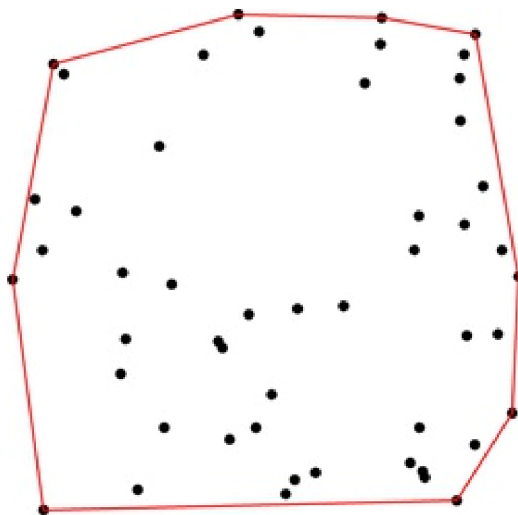


Obrázok 3: Najjednoduchší prípad Voroného diagramu [6]

Voroného diagramy majú široký vplyv v rôznych oblastiach, ako napríklad vo fyzike hviezd pri skúmaní rozloženia galaxií vo vesmíre, v robotike pri hľadaní najlepšej cesty pre robota s minimálnym počtom prekážok, v ekonomike pri simuláciách súbojov medzi firmami a ich vplyvu na dané územie. Voroného diagramy sa rovnako využívajú pri optimalizácii umiestnenia centier služieb, ako sú divadlá, školy, úrady, pri analýzach oblastí pôsobnosti a časových dojazdov integrovaných záchranných služieb. Existuje mnoho aplikácií, kde môžeme efektívne využiť Voroného diagramy na analýzu priestorového usporiadania údajov [6].

### 3.1 Konvexná obálka

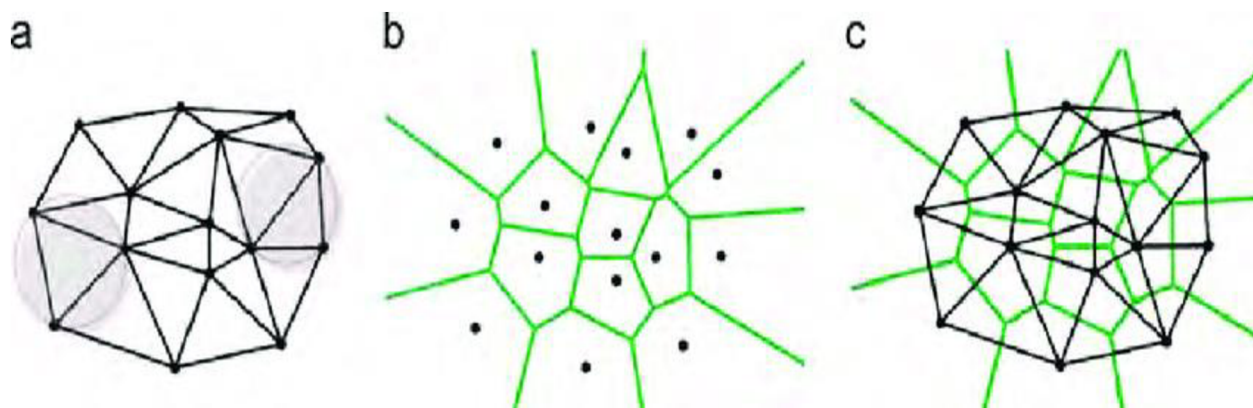
Je podmnožina bodov  $M$  roviny nazývaná konvexnou ak akákoľvek priamka určená dvojicou ľubovoľne vybratých bodov z danej podmnožiny sa nachádza celá v množine  $M$ . Je to najmenšia konvexná množina obsahujúca všetky body  $M$ . Pre konvexnú obálku konečnej množiny  $M$  bodov v rovine platí, že je to unikátny konvexný mnohoúholník, ktorého vrcholy sú body z množiny  $M$  a tento mnohoúholník obsahuje všetky body množiny  $M$  [5].



Obrázok 4: Konvexná obálka [4]

### 3.2 Dualita medzi Voroného diagramom a Delaunayho trianguláciou

Spočíva v tom, že každý Voroného vrchol je spojený so stredom kružnice v Delaunayho triangulácii, ktorá neobsahuje žiadny iný bod. Naopak, každý stred kružnice v Delaunayho triangulácii je spojený so všetkými Voroného vrcholmi, ktoré patria do príslušnej Voroného bunky. Táto dualita poskytuje užitočný nástroj na analýzu priestorového usporiadania bodov a ich vzájomných vzťahov vo výpočtových aplikáciách ako je počítačová grafika, geografické informačné systémy, alebo analýza dát [7].



Obrázok 5: a) Delaunayho triangulácia b) Voroného diagram c) Dualita VD a DT [8]



Existujú však špeciálne prípady, kedy táto dualita neplatí alebo je nejednoznačná.

- Tri alebo viac bodov, ktoré sú kolineárne, čo vedie k nekonečným polomerom opísaných kružníc.
- Štyri alebo viac bodov ležiacich na dokonalom kruhu, čo spôsobuje nejednoznačnú trianguláciu a triviálne identické stredy.
- Hrany Voroného diagramu, ktoré smerujú do nekonečna, nie sú jednoznačne definované pre konečnú množinu bodov  $P$ . Hrany smerujúce do nekonečna začínajú od stredy obvodu a sú kolmé na spoločnú hranu medzi zachovaným a ignorovaným trojuholníkom [7].



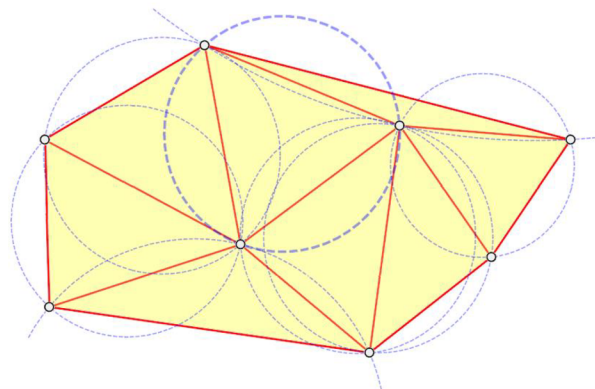
## 4 DELAUNAYHO TRIANGULÁCIA (DT)

Pojem Delaunayho triangulácia získal názov podľa matematika Borisa Delaunayho (vyslovuje sa Delone) a jeho práce z r. 1934, kde formuloval jej špecifické vlastnosti. Odvtedy získal široké využitie v analytickej geometrii a primárne sa používa na generovanie sieťového modelu povrchu alebo uzavretého priestoru, ktorý umožňuje analýzu hraničných podmienok. DT je bodová štruktúra pozostávajúca z trojuholníkov, ktoré sa nesmú prekrývať. Pri rozšírení na rovinu alebo povrch nie sú trojuholníky obmedzené na jednotnosť. V skutočnosti budú atypické Delaunayho triangulácie zahŕňať trojuholníky rôznych veľkostí a uhlov. Tieto komplexné triangulácie pokrytia však majú špecifické vlastnosti, ktoré musia dodržiavať vývojové algoritmy. Je to spôsob definovania takej siete, aby spojil konečný počet bodov v danej oblasti [3].

Ak  $P$  je množina  $n$  bodov v rovine neležiacich na priamke, tak  $k$  je počet bodov, ktoré ležia na hranici konvexného obalu bodov z množiny  $P$ . Potom platí, že každá DT má presne  $2n-2-k$  trojuholníkov a  $3n-3-k$  hrán [11].

Medzi špecifické vlastnosti DT patrí

- vo vnútri opísanej kružnice ľubovoľného trojuholníka neleží žiaden iný bod množiny  $P$ ,
- DT maximalizuje minimálny uhol, avšak neminimalizuje maximálny uhol,
- je lokálne aj globálne optimálny voči kritériu minimálneho uhlu,
- hranicou je konvexná obálka,
- výsledné trojuholníky sa v porovnaní s ostatnými trianguláciami najviac blížia rovnostranným trojuholníkom [3].

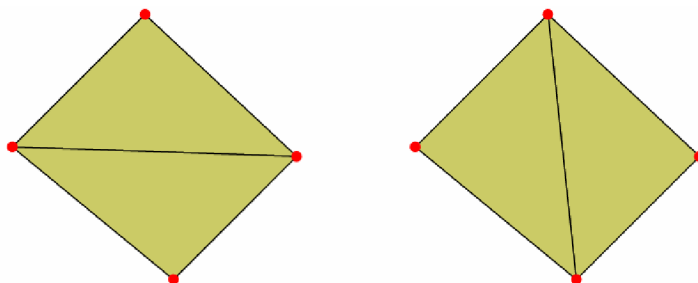


Obrázok 6: Ukážka Delaunayho triangulácie [2]

DT je najčastejšie používaná triangulácia, ktorá existuje v 2D ako aj v 3D pod pojmom Delaunayho tetrahedronizácia. Pre trianguláciu v 3D platia rovnaké podmienky ako u 2D, avšak je rozšírená o jednu dimenziu. Kritéria sa hodnotia podľa gule opísanej štvorstenu. Ak  $V$  je množina vrcholov v 3D priestore, tak DT je nad množinou bodov  $V$ , pre ktoré platí, že guľa opísaná danému štvorstenu neobsahuje žiaden ďalší bod z množiny  $V$  [10].

## 4.1 Jednoznačnost Delaunayho triangulácie

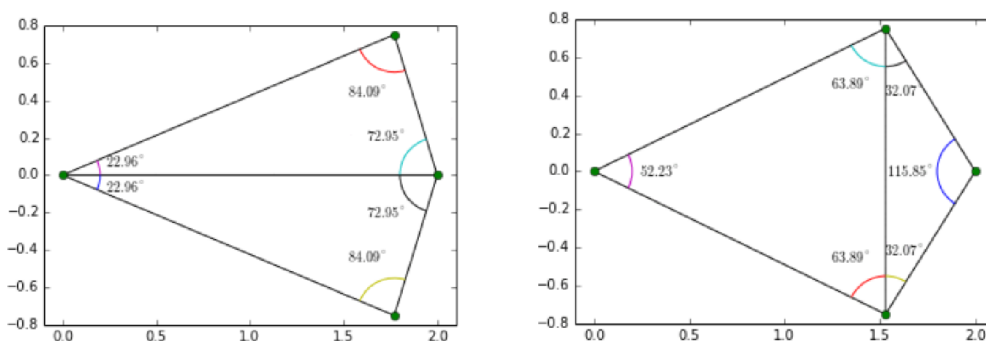
Môže nastať situácia, kedy štyri a viac bodov z  $V$  sú kocirkulárne a ležia v konvexnej obálke, vtedy Delaunayho triangulácia nie je jednoznačne určená a môže sa triangulovať ľubovoľne. Vzhľadom k posudzovanému kritériu je len jedna triangulácia optimálna [1].



Obrázok 7: Nejednoznačnosť DT [1]

## 4.2 Maximalizácia minimálneho uhla

V 2D Delaunayho triangulácia maximalizuje minimálny uhol v porovnaní s ostatnými trianguláciami. Najmenší uhol v DT je aspoň taký veľký ako najmenší uhol ktorejkoľvek inej. Nejde však nutne aj o minimalizovanie maximálneho uhla ako aj minimalizovanie dĺžky hrán [7].



Obrázok 8: Maximalizácia minimálneho uhla, nie minimalizácie dĺžky hrán [7]

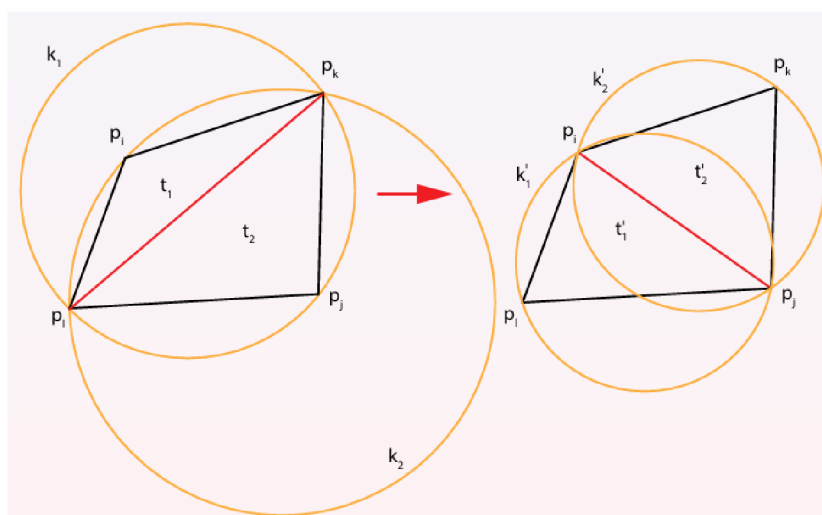
## 5 ALGORITMY DELAUNAYHO TRIANGULÁCIE

Existuje niekoľko algoritmov pre vytvorenie Delaunayho triangulácie z množiny bodov. Medzi najpoužívanejšie patria ďalej popísané algoritmy. Algoritmus je presne definovaný postup, ktorý na základe zadaných informácií vygeneruje výsledné dáta. V tomto prípade ide o Delaunayho trianguláciu, ktorá vznikne z vložených vstupných dát. Dôležitou súčasťou je aj efektívnosť konkrétneho algoritmu [10].

### 5.1 Metóda lokálneho zlepšenia

Táto metóda je veľmi ťažko dostupná pre vyššie dimenzie, preto sa využíva iba v 2D. Vychádza hlavne z ľubovoľnej triangulácie a hlavným znakom je tzv. legalizácia hrán.

Je hrana  $p_i p_k$ , ktorá je súčasťou trojuholníkov  $p_i p_k p_l$  aj trojuholníka  $p_i p_j p_k$ . Hrana  $p_i p_k$  je lokálne optimálna podľa Delaunayho kritéria práve vtedy, keď kružnica opísaná trojuholníku  $p_i p_k p_l$  neobsahuje bod  $p_j$ . Ak nie je hrana  $p_i p_k$  lokálne optimálna, potom na získanie Delaunayho triangulácie je potrebné hranu legalizovať. To je možné dosiahnuť tak, že sa vykoná zmena hrán. Táto výmena mení aj trojuholníky  $p_i p_k p_l$  a  $p_i p_j p_k$ , preto je potrebné znova overiť vzniknuté hrany  $p_i p_k$ ,  $p_k p_j$ ,  $p_j p_l$  a  $p_l p_i$ , či sú stále lokálne optimálne. Ak k tomu nedôjde, je potrebné znovu legalizovať hrany. Na začiatku sú pridávané hrany, ktoré by mohli byť nelegálne podľa Delaunayho kritéria, a pri výmene sú doň pridávané ďalšie hrany, ktoré je nutné legalizovať [6].

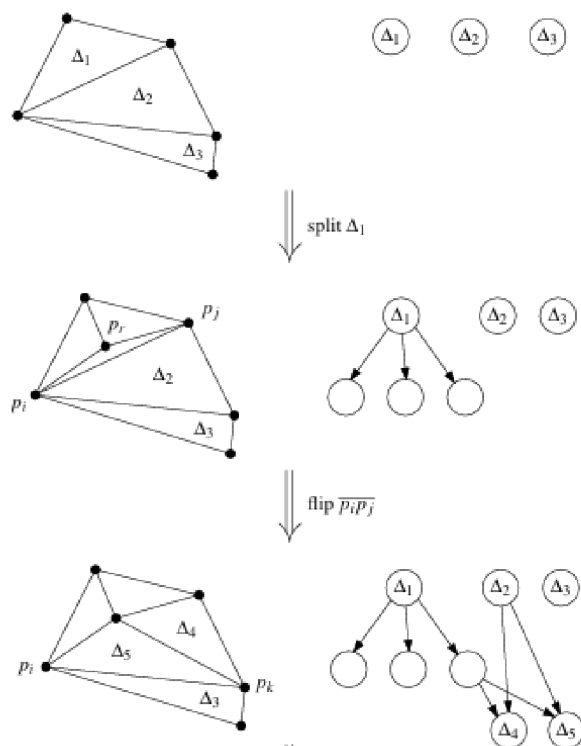


Obrázok 9: Zmena diagonály [2]

Na obrázku 9 je priblížená problematika legalizácie hrán. Ak body  $p_i p_j p_k p_l$  tvoria konvexný štvoruholník a zároveň neležia na opísanej kružnici, tak jedna z hrán  $p_i p_k$  alebo  $p_i p_j$  je nelegálna. Ide o takzvané kritérium prázdnej opísanej kružnice. Ak je daná triangulácia obálkou opísaných kružníc trojuholníka nad konečnou množinou  $P$  rôznych bodov a opísaná kružnica trojuholníka v tejto triangulácii je prázdna kružnica, tak tento trojuholník spĺňa kritérium prázdnej opísanej kružnice [9].

## 5.2 Inkrementálne vkladanie

Algoritmus inkrementálneho vkladania je online algoritmom, teda vzniká postupným pridávaním bodov a je možné do hotovej triangulácie pridávať ďalšiu množinu bodov. Predpokladaná je Delaunayho triangulácia v 2D a do ľubovoľného trojuholníka je vložený nový bod. Trojuholník sa tým rozdelí na 3 časti. V prípade ak by bol bod pridaný na hranu, potom každý trojuholník, ktorý zdieľa túto hranu, by sa rozdelil na 2 časti. Toto zaručí, že výsledok bude triangulácia, avšak nie vždy pôjde o Delaunayho trianguláciu. Pre získanie DT je nutné overiť, či pozmenený trojuholník spĺňa Delaunayho kritérium. Pre každú hranu trojuholníka, do ktorého sme nový bod vložili, vykonáme tzv. legalizáciu [12].

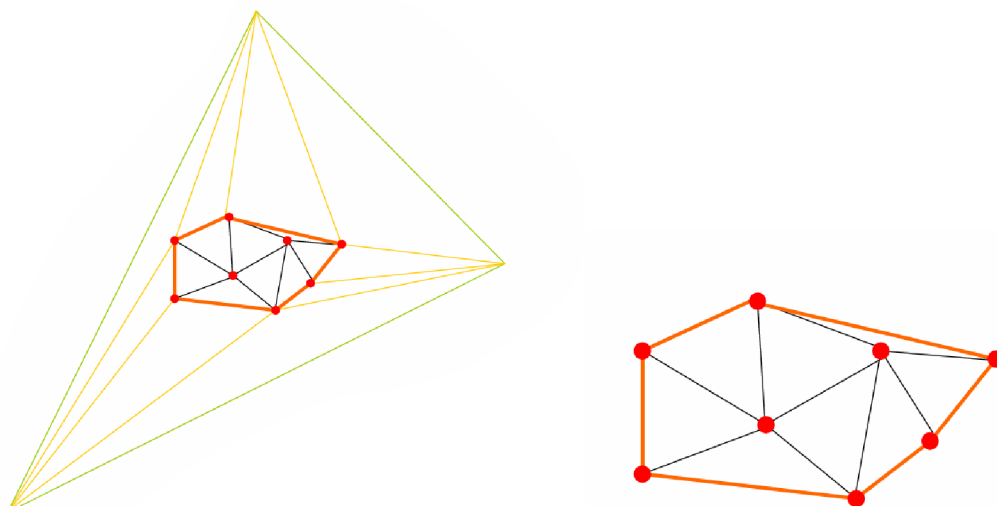


Obrázok 10: Inkrementálne vkladanie bodu [12]

Zjednodušený princíp algoritmu:

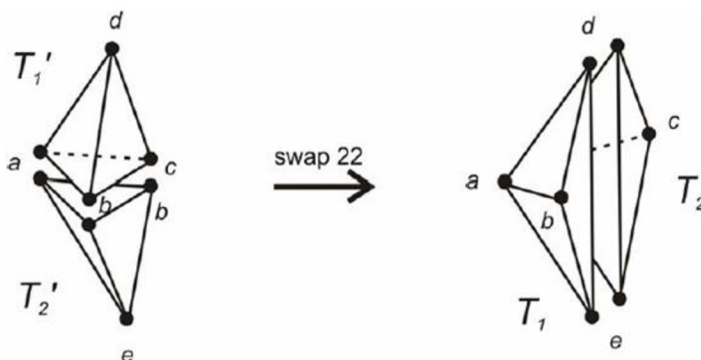
- konštrukcia dostatočne obaľujúceho trojuholníka (simplexu), ktorý obsahuje všetky body vstupnej množiny
- pridanie bodov do triangulácie
- nájdenie trojuholníka, s ktorým daný pridaný bod inciduje
- legalizácia novo vytvorenej triangulácie
- odstránenie obklopujúceho trojuholníka
- orezanie na konvexnú obálku.

Druhý až štvrtý bod sa opakuje, až pokiaľ nie sú v triangulácii všetky body [1].



Obrázok 11: Vzniknutá DT po odstránení simplexu [1]

V 3D prostredí nie je trianguláciou trojuholník, ale skôr štvoruholník alebo tetraéder. Pridanie nového bodu je v tomto prípade komplikovanejšie. Podobne ako pri 2D triangulácii, začíname vytvorením veľkého tetraédra, do ktorého postupne pridávame body. Pridávanie bodov dovnútra tetraédra prebieha podobne ako pri trojuholníkoch. Pri pridávaní bodu na stenu tetraédra je potrebné vytvoriť tri nové tetraédre, aby sa zachovala integrita štruktúry. Avšak situácia je zložitejšia, ak je bod pridaný na hranu tetraédra, kedy musíme vytvoriť dva nové tetraédre, namiesto jedného. Najzásadnejší rozdiel je v procese prehodenia hrán, pretože neexistuje len jedna možnosť prehodenia hrán a môže nastať situácia, kedy tetraédre nie je možné prehodiť vôbec [6].



Obrázok 12: Swap 22 [10]

Na obrázku 12 je tzv. prehodenie (Swap), dvoch tetrahedronov na iné dva tetrahedrony. Tento druh swapu je prevediteľný, ak sú aspoň dve strany tetrahedronov v jednej rovine a zároveň sú súčasťou danej triangulácie. Autor [10] uvádza aj iné druhy swapov 44, 32, 23, ktoré nie sú v tejto bakalárskej práci bližšie popisované.

### 5.3 Algoritmus radiálneho zametania

Technika radiálneho zametania je mocnou metódou výpočtovej geometrie, najmä pre Voroného diagramy. Na rozdiel od metódy vkladania, táto technika znižuje dimenziona-

litu problému. V podstate transformuje statický problém výpočtu Voroného diagramu v rovine na dynamický problém spravovania priesečníka diagramu so zvislou priamkou. Delaunayho triangulácia vznikne tak, že sa spoja generujúce body z oblastí, ktoré majú spoločnú hranu [13].

Fortuneho algoritmus (plane sweep algorithm) simuluje pohyb priamky cez rovinu zdola. V každom okamihu je časť diagramu pod hranou pohybu spracovávaná. Fortune v rokoch 1985 a 1987 pozoroval, že aktualizácie na priamke v pohybe je možno vykonať v čase  $O(\log n)$ , ak sa zohľadní určitá kontinuálna deformácia diagramu. Skrz túto deformáciu je možné pôvodný diagram rekonštruovať v čase  $O(n)$ . Kombinuje jednoduchosť a efektívnosť s cieľom dosiahnuť optimálne časové a priestorové obmedzenia pre rôzne typy diagramov. Táto metóda bola úspešne aplikovaná na Voroného diagramy ako aj Delaunayho triangulácie [13].

Základný princíp tohto algoritmu spočíva v postupnom pohybe tzv. zametacej priamky  $L$  rovnobežnej na niektorú stranu plátna. V angličtine výraz *sweep line*, ktorá sa pohybuje napríklad zhora nadol. Vždy keď prejde cez nejaký bod z množiny začne bunku patriacu k danému bodu aproximovať pomocou krivky kvadratického stupňa, ktorá je rovnako vzdialená od daného bodu ako od priamky. Tieto pomocné paraboly sa vyskytujú naraz vo väčšom množstve. Hrany buniek Voroného diagramu sa vytvoria tam, kde sa dve susedné paraboly pretnú. Jeho časová zložitosť pre generovanie diagramu s  $n$  bodmi je  $O(n \log n)$  [14].

---

#### Algorithm 1: Fortunov algoritmus

---

```

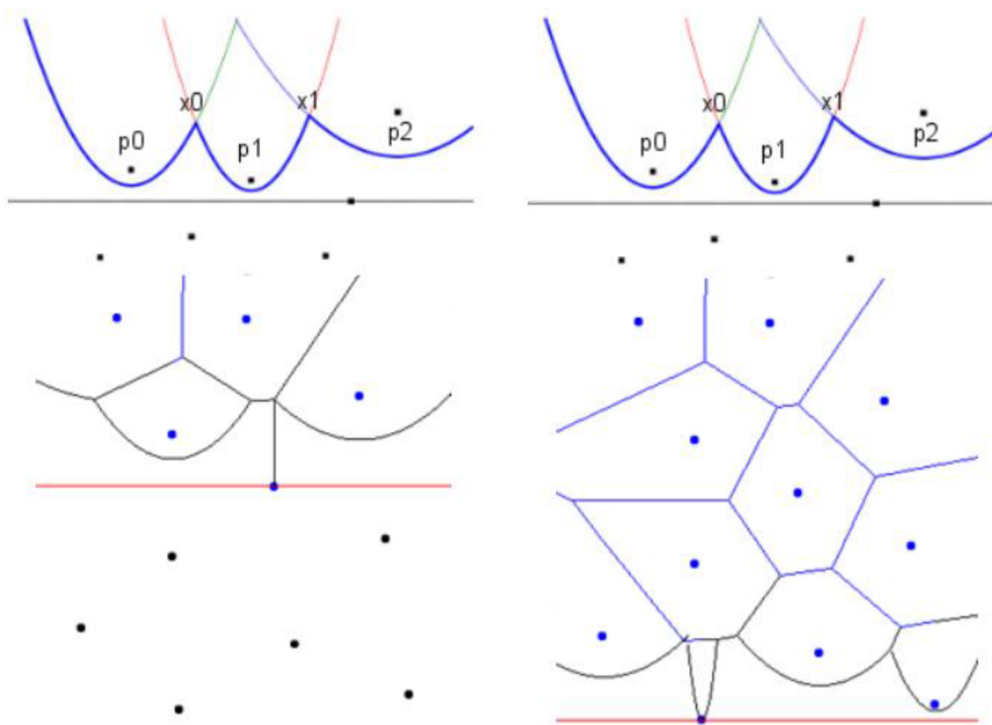
1: inicializuje sa sweepline
2: while sweepline neprešiel celé plátno do
3:   sweepline sa posunie o pixel ďalej
4:   if sweepline prejde cez bod diagramu then
5:     pridá sa do prioritného frontu udalosť typu stránka
6:   end if
7:   if krivka paraboly sa stlačí then
8:     pridá sa do prioritného frontu udalosť typu kruh
9:   end if
10: end while
11: while prioritný front nie je prázdny do
12:   vezme sa prvý prvok fronty
13:   if je to udalosť typu stránka then
14:     pridá sa parabola do beach line
15:   else
16:     na miesto zániku paraboly sa pridá vrchol diagramu
17:   end if
18: end while

```

---

Obrázok 13: Fortunov algoritmus - prevzaté z [14]





Obrázok 14: Princíp Fortunovho algoritmu [15]

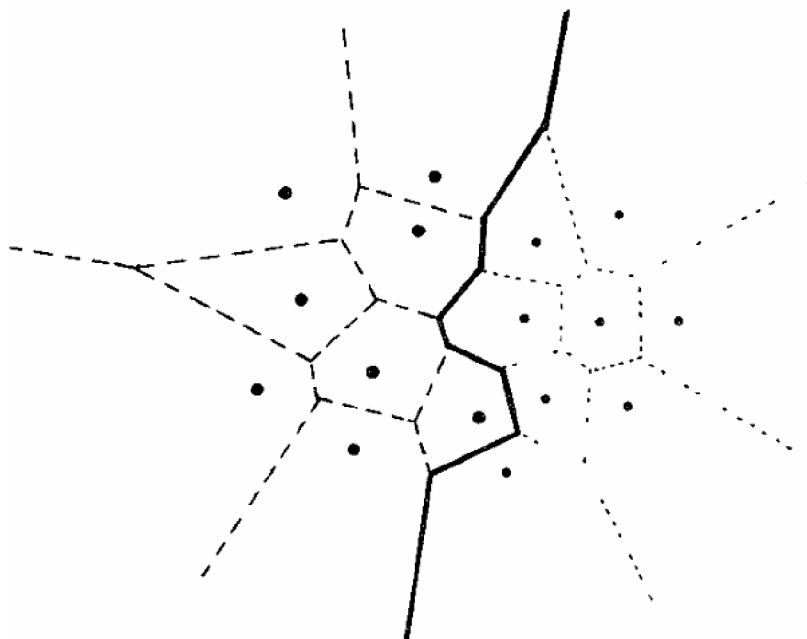
Počas vykresľovania Voroného diagramu sa môžu vyskytnúť dva typy udalostí, ktoré menia postupnosť:

- *miestna udalosť*  
Pri vstupe nového miesta sa vytvorí nová parabola. Pôvodná parabola sa rozdelí pod novou a vytvoria sa dve nové hrany vychádzajúce zo stredu. Táto udalosť nahradí postupnosť  $p_i, x_i, p_{i+1}, x_{i+1}, p_{i+2}$ , kde  $p_i$  a  $p_{i+2}$  majú ohnisko pôvodnej paraboly a  $p_{i+1}$  má ohnisko v novom mieste.
- *kružnicová udalosť*  
Keď parabola zanikne, susedné paraboly ju stlačia a vytvorí sa nová hrana. Táto udalosť nahradí postupnosť  $x_{i-1}, p_i, x_i$  novou hranou  $x_i$ . Miesto, kde parabola  $p_i$  zanikne, má rovnakú vzdialenosť od ohniska  $p_i$  ako od ohnísk oboch susedných oblúkov, čo určuje stred kružnice, preto sa nazýva kružnicová udalosť [15].

## 5.4 Rozdel' a Panuj

Jednou z široko používaných metód pre návrh rýchlych algoritmov je rozdel' a panuj, v angličtine výraz *Divide and Conquer*. Shames a Hoey [1975] zistili, že táto metóda dobre funguje pri riešení problémov v oblasti výpočtovej geometrie a najmä pri konštrukcii Voroného diagramu v rovine. Daná množina  $n$  miest je rozdelená do dvoch podmnožín pomocou vertikálnej čiary. Diagramy pre tieto podmnožiny sú vypočítané rekurzívne a následne sú zlúčené dohromady k vytvoreniu celkového diagramu. Obrázok 14 ukazuje reťazec hrán (hrubá čiara) konštruovaný počas procesu zlučovania diagramu

pre ľavé body (čiarkované) s diagramom pre pravé body (bodka). Následne spojením generujúcich bodov z oblastí, ktoré majú spoločnú hranu vznikne z Voroného diagramu Delaunayho triangulácia [13].



Obrázok 15: Algoritmus rozdeľ a panuj [13]

Zvlášť je možné zlučovať dva diagramy v  $O(n)$  čase, čo implikuje  $O(n \log n)$  algoritmus, ak je rozdeľujúci krok vykonaný vyvážene. Napriek tomuto rýchlemu prístupu sú tu určité nevýhody v implementácii: komplikovanosť, pravdepodobne vysoké chyby a náročnosť konštrukcie. Rozdelenie roviny na úzke dosky núti vrcholy definované miestami v doske pristupovať k nekonečnu. Algoritmus s očakávaným časom  $O(n)$  používajúci metódu rozdelenia a panovania na určitú podmnožinu miest bol popísaný Bentleyom [1980]. Rozdeľ a panuj je základným princípom veľkého množstva algoritmov na výpočet obecných Voronových diagramov v rovine. Ako prví ho podrobnejšie opísali Shames a Hoey. Uviedli, že ich algoritmus sa vzťahuje aj na najvzdialenejší Voroného diagram v rovine [13].

## 6 APLIKOVANIE DELAUNAYHO TRIANGULÁCIE V PRAXI

Delaunayho triangulácia je jedným z najdôležitejších geometrických konceptov s významnými aplikáciami v rôznych oblastiach. Táto kapitola bude zameraná na niektoré z najzaujímavejších aplikácií Delaunayho triangulácie v praxi a aký prínos má pre konkrétne problémy.

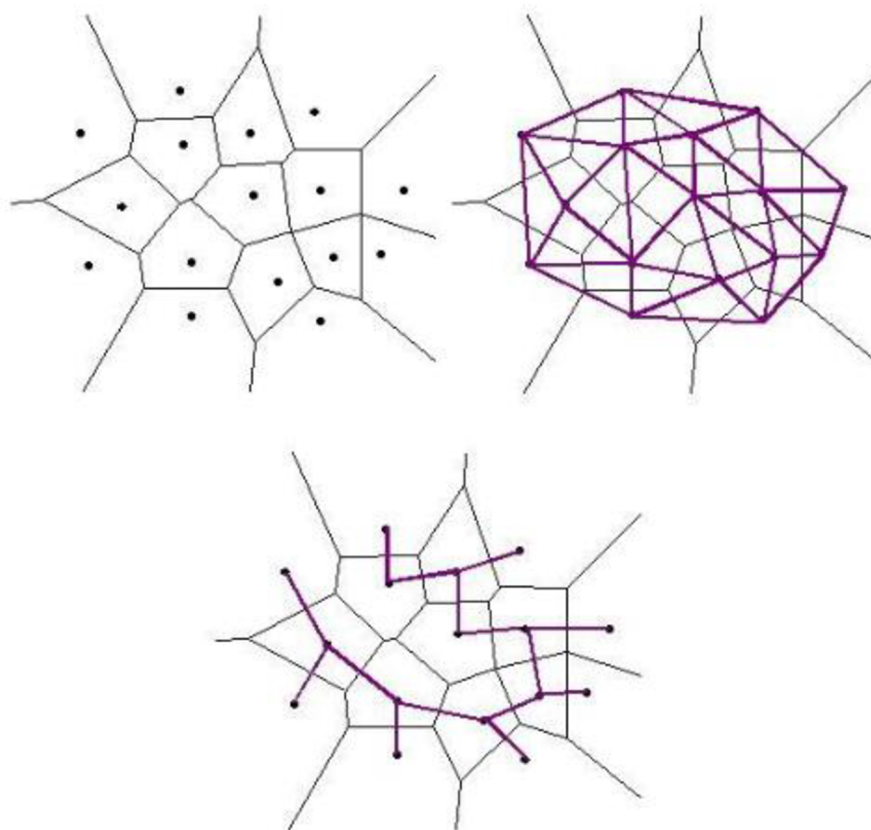
Jednou z aplikácií, ktorá stojí za zmienku, je Minimálna kostra v euklidovskej rovine. Tento problém hľadania najkratšej siete medzi bodmi, je úzko spojený s Delaunayho trianguláciou a poskytuje nám účinný spôsob na minimalizáciu dĺžky komunikačných sietí a optimalizáciu rôznych distribuovaných systémov v logistike a doručovaní. Okrem toho je tu aj generovanie sietí, ktoré sa využívajú na tvorbu máp a vyobrazenie terénu. Tieto príklady len naznačujú široké spektrum aplikácií Delaunayho triangulácie a jej dôležitosť v praktických situáciách.

### 6.1 Minimálna kostra v euklidovskej rovine

Ak  $V$  je konečná množina bodov v rovine a EMK je euklidovská minimálna kostra množiny  $V$ , potom hrany v EMK sú hranami Delaunayho triangulácie množiny  $V$ . Problém hľadania euklidovskej minimálnej kostry môžeme ľahko previesť na hľadanie minimálnej kostry v ohodnotenom grafe konštruovaním úplného grafu  $K_n$  spojením všetkých dvojíc bodov  $v_i, v_j$  z  $V$  priamkami a ohodnotením hrán euklidovskými vzdialenosťami ich koncových bodov [11].

Pretože minimálna kostra takto zkonštruovaného úplného grafu zodpovedá minimálnej kostre pre množinu bodov  $V$ , na jej nájdenie môžeme použiť niektorý zo známych algoritmov pre hľadanie minimálnej kostry grafu. Problémom je potreba skonštruovať úplný graf, čo spôsobuje vysokú zložitosť. Naopak konštrukcia EMK z Delaunayho triangulácie je časovo menej náročná a efektívnejšia [11].

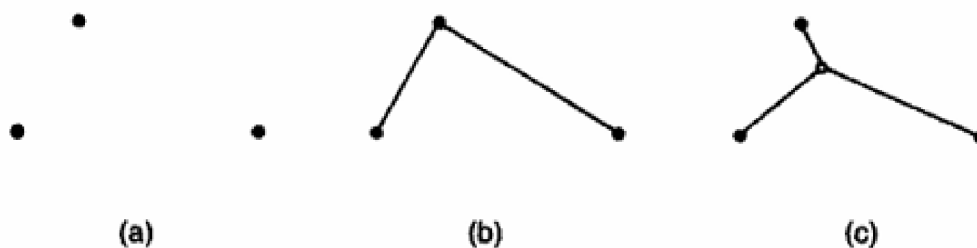
V dnešnej dobe je kladená veľká potreba tovární na mikročipy vzhľadom na rozvíjajúci sa priemysel v tomto smere tak, aby boli čo najviac efektívne a účinné. Delaunayho triangulácia môže byť v tomto prípade použitá k určeniu ideálnej polohy tovární vzhľadom k geografickému rozloženie zákazníkov. Týmto spôsobom môžu efektívne distribuovať výrobky na trh a minimalizovať náklady na dopravu. V článku [16] je uvedené, že priemerne až 80 % dodávateľov európskych firiem pôsobiacich v polovodičovom priemysle sídli mimo EÚ. EÚ prijala Akt o čipoch s cieľom zabezpečiť budúcu konkurencieschopnosť a udržať si postavenie v oblasti technológií, v prípadoch podobným situácií počas covidovej pandémie. Využitie je zastúpené aj v telekomunikačných sieťach na vytvorenie optimálnej trasy pre prenos signálov medzi bodmi v sieti, čím sa minimalizuje dĺžka káblov, náklady na prenos a čas prenosu alebo pri plánovaní trás pre dopravné siete a distribučné cesty na nájdenie najefektívnejších ciest medzi miestami dodania a distribúcie.



Obrázok 16: Konštrukcia EMK pomocou Delaunayho triangulácie [11]

## 6.2 Steinerov minimálny strom

Steinerov problém je lokalizačný optimalizačný problém línií. Pomocou Delaunayho triangulácie je možné nájsť aproximáciu Steinerovoho minimálneho stromu. Avšak nejde úplne o optimálne riešenie. Konkrétny príklad Steinerovho problému si predstavme, že na rovine sú tri továrne (Obrázok 17: a)), kde môžeme slobodne vybudovať cesty. Problémom je vytvoriť sieť ciest spájajúcich tieto továrne s minimálnou dĺžkou ciest, za predpokladu, že cesty sú priamo spojené medzi týmito továrňami. Riešenie s EMK (Obrázok 17: b)) je dané pre tri body, na ktorých sú továrne umiestnené, avšak toto riešenie nie je optimálne, ak je povolené pridať nový bod. Problémom je nájsť štvrtý bod, ktorý minimalizuje dĺžku ciest spájajúcich tieto tri (Obrázok 17: c)) [9].

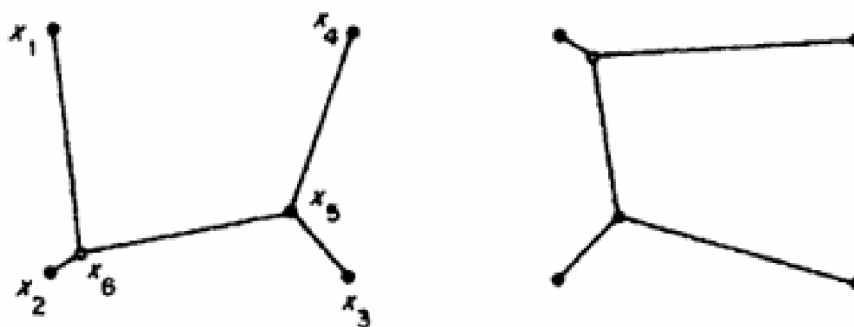


Obrázok 17: Konkrétny Steinerov problém [9]

Euklidovské Steinerove minimálne stromy majú mnoho zaujímavých vlastností. Medzi najdôležitejšie z nich patria:

- V každom bode Steinerovho stromu sa stretávajú presne tri spojenia a tri uhly ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ), ktoré tieto spojenia vytvárajú v akomkoľvek bode Steinerovho stromu, majú každú hodnotu  $120$  stupňov (t.j.  $c_i = 3$  a  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120^\circ$ ).
- Najviac tri spojenia sa stretávajú v každom bode  $P$  ( $c_i < 3$ ). Ak práve tri spojenia sa stretávajú v bode  $P$  ( $c_i = 3$ ), potom všetky uhly ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) sú  $120^\circ$ . Ak práve dve spojenia sa stretávajú v bode  $P$  ( $c_i = 2$ ), potom uhly  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  sú väčšie alebo rovné  $120^\circ$ .
- Ak  $n$  je počet zadaných bodov, tak počet *Steinerových bodov* (tzv. bodov, ktoré k zadaným pridáme, aby sa minimalizovala celková dĺžka spojenia) je najviac rovná  $n-2$  [9].

Návod na riešenie problému zobrazený na obrázku 18, spočíva v tom, že najprv sa pridá nový bod,  $x_6$ , v tesnej blízkosti  $x_2$ , následne sa spojí  $x_2$ , s  $x_6$ , maticová susednosť výslednej siete sa stane rovnakou ako tá v euklidovskom Steinerovom strome. Výsledkom je čo najkratšia cesta medzi danými bodmi [9].



Obrázok 18: Steinerov strom [9]

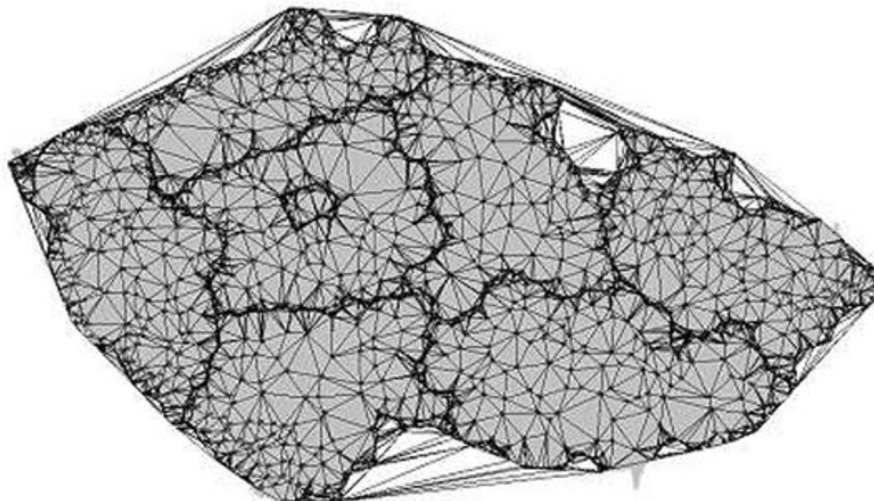
### 6.3 Generovanie sietí

Pri triangulácii množiny bodov je žiaduce, aby vytvorené trojuholníky boli čo najviac rovnostranné. Takto vytvorené trojuholníky by mali čo najlepšie lokálne reprezentovať hodnotu plochy. Ďalšou požadovanou charakteristikou triangulačného procesu je, aby bola vytvorená jednoznačná triangulácia nezávislá na počiatočnom bode alebo orientácii množiny dát. Tieto výsledky by mali byť predvídateľné a jednoducho opakovateľné. Delaunayho triangulácia tieto podmienky obecné spĺňa, aj keď existujú určité konfigurácie množiny dát (ako napríklad pravouhlá mriežka), ktoré majú lokálne nejednoznačné riešenia.

Delaunayho triangulácia je blízko príbuzná s Dirichletovým mozaikovaním množiny bodov, ktoré rozdeľuje body unikátnou množinou polygonov, známych ako Thiessenove polygóny alebo Voroného diagramy, ktoré už boli bližšie definované v predchádzajúcej kapitole [17].

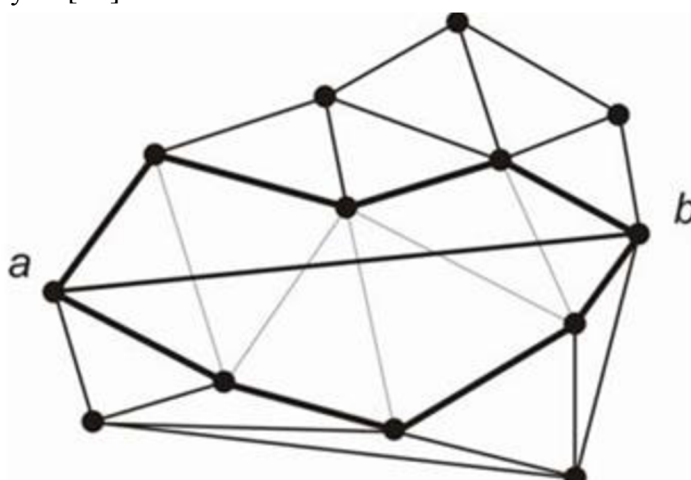


Delaunayho triangulácia má výhodu vhodne tvarovaných rovnostranných trojuholníkov. Na vstupe do triangulačného algoritmu je polygón a nie množinu bodov. Existuje triangulácia, ktorá veľmi presne kopíruje Delaunayho trianguláciu a musí byť daná množina hrán (vrstevníc), na ktorých je vykonaná triangulácia. Táto triangulácia je nazývaná Viazaná Delaunayho triangulácia, v angličtine známa pod pojmom Constrained Delaunay triangulation - CDT [17].



Obrázok 19: Trinagulácia z bodov na mape Českej republiky [17]

Možnosť vnútiť do triangulácie určité hrany má mnoho využití. Jedným z nich je napríklad triangulácia nekonvexného tvaru pri zachovaní vonkajšej nekonvexnej obálky. Delaunayova triangulácia by obsahovala aj konvexnú obálku vstupných bodov. Pri použití CDT môžeme definovať hrany obálky ako povinné. Ďalšie využitie je napríklad pri modelovaní terénu, kde je možné pomocou hrán vnútiť algoritmu aj trojuholníky, ktoré nie sú Delaunayho [10].

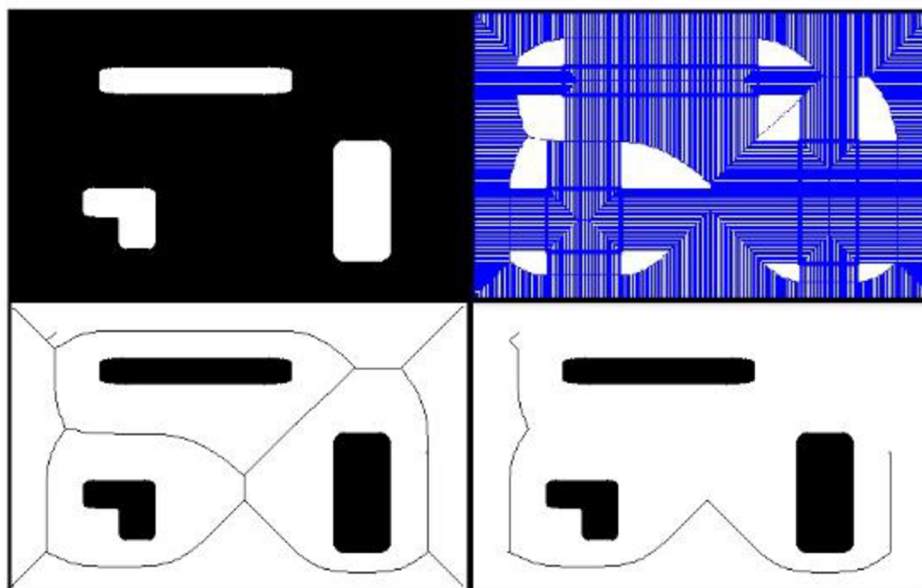


Obrázok 20: Vnútená hrana  $ab$  [10]

## 6.4 Plánovanie trás robota

Voroného diagramy sú súčasťou najvýznamnejších štruktúr pre plánovanie trás v počítačovej geometrii. Autor [18] v tejto konkrétnej práci zvolil kombináciu Voroného diagramu s použitím Delaunayho triangulácie na plánovanie trasy autonómneho robota. Pri tomto spôsobe je nevyhnutné zväžiť trasu tak, aby bola čo najďalej od prekážok. Takže v 2D priestore sú všetky body, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch bariér, považované za súčasť Voroného diagramu.

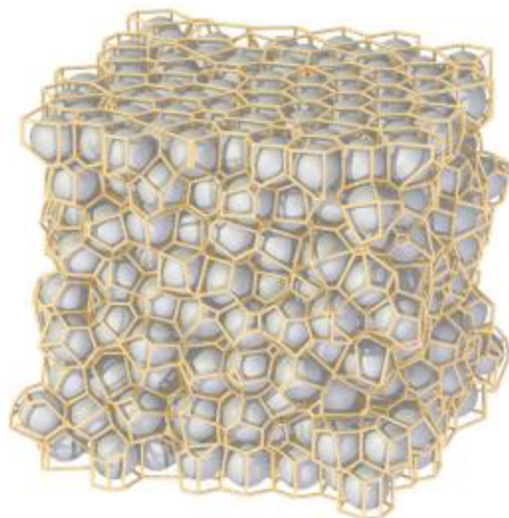
Ako prvý krok je požadovaný obraz zo súboru alebo z kamery umiestnenej v prostredí. Obraz je predspracovaný a konvertovaný na binárnu maticu. Po získaní tohto počiatočného súboru sú prekážky v prostredí označené a uložená je aj ich pozícia a rozmer. Ďalším krokom je konštrukcia Voroného diagramu. Táto funkcia dáva ako výsledok rad navigačných riešení. S Voroného diagramom a informáciami o prekážkach sa pridávajú začiatkové a cieľové body. Tieto body sú spojené pomocou euklidovskej vzdialenosti. Nakoniec musia byť určené optimálne cesty pre navigáciu. Aplikuje sa Delaunayho triangulácia na overenie navigácie robota na vzdialenosť  $r$  od prekážok. Táto vzdialenosť  $r$  sa vypočíta ako polomer kružnice, ktorá ohraničuje robota. Pre výber konečnej cesty sa používa rekurzívna metóda, ktorá porovnáva rôzne trasy pomocou euklidovskej vzdialenosti [18].



Obrázok 21: Trasa robota získaná pomocou DT a Voroného diagramu [18]

## 6.5 Využitie v chémii

Využíva sa na zobrazenie 3D modelu buniek chemických prvkov pomocou Voroného diagramu v priestore. Pre zadanú množinu generujúcich bodov  $p_1, p_2, \dots, p_n$  je generovaný Voroného diagram tak, že z každého generujúceho bodu rastie guľa, všetky s rovnakou rýchlosťou, až pokiaľ nenastane dotyk gule pre susedné generujúce body. Bunky Voroného diagramu potom budú konvexnými mnohostenmi [19].



Obrázok 22: Rast Voroného buniek [19]

V prípade potreby modelácie tvaru kryštálu niektorej konkrétnej látky, stačí poznať rozloženie atómov v danej látke. Atómy určíme ako množinu generujúcich bodov, pre ktorú sa vykreslí Voroného diagram a k nemu nájde jeho Delaunayho triangulácia, ktorá je vhodnou aproximáciou tvaru kryštálu aj na určenie štrukturálnych vlastností proteínov či konštrukcia povrchu molekúl a iné aplikácie [19].



## 7 ZÁVER

V tejto bakalárskej práci boli preskúmané základné princípy Delaunayho triangulácie a jej rozmanité aplikácie v rôznych oblastiach. Teoretický výklad umožnil lepšie porozumieť matematickým základom tejto triangulácie a jej vlastnostiam, ako aj spôsobom, ako ju efektívne implementovať pomocou uvedených algoritmov.

Aplikácie Delaunayho triangulácie sú rozšírené v mnohých odvetviach, čo umožňuje analyzovať komplexné dáta a vzťahy v priestore od počítačovej grafiky a geografických informačných systémov až po medicínu a inžinierstvo.

Napriek svojej všeobecnosti a výkonnosti existujú však aj obmedzenia Delaunayho triangulácie, ako je napríklad závislosť na rozmiestnení bodov a časová náročnosť pri veľkých dátových množinách. Budúce smerovania výskumu by sa mali zamerať na vylepšenie algoritmov pre rýchlejšie a presnejšie vytváranie triangulácie, ako aj na identifikáciu nových aplikácií.

Celkovo je Delaunayho triangulácia významným príspevkom k digitálnemu svetu a má potenciál na ďalší rozvoj a inovácie. Je dôležité pokračovať vo výskume a využívaní tejto triangulácie na riešenie komplexných problémov a prispieť tak k ďalšiemu technologickému pokroku.



## ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

- [1] SURYNKOVÁ, Petra. *Triangulace*. Online. In: Academic Webside Petra Surynková. [2009]. Dostupné z: [http://surynkova.info/dokumenty/mff/PG/-PG\\_sylabus\\_p.php](http://surynkova.info/dokumenty/mff/PG/-PG_sylabus_p.php) . [cit. 2024-04-28].
- [2] BAYER, Tomáš. *Rovinné triangulace a jejich využití*. Online. PDF. Dostupné také z: [https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/Adk/adk5\\_new.pdf](https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/Adk/adk5_new.pdf).
- [3] *Using a Delaunay Triangulation Algorithm for Mesh Generation*. Online. In: Cadence System Analysis. Dostupné z: <https://resources.system-analysis.cadence.com/computational-fluid-dynamics/msa2021-using-a-delaunay-triangulation-algorithm-for-mesh-generation> . [cit. 2024-04-28].
- [4] *Konvexný obal*. Online. In: Korešpondenčný seminár z programovania. 2018. Dostupné z: <https://www.ksp.sk/>. [cit. 2024-04-28].
- [5] LEIFER, Filip. *Delaunayho triangulace a její aplikace*. Diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brne, 2006.
- [6] NĚMEC, Pavel. *Zjemnění Delaunayovy triangulace molekulárních struktur*. Diplomová Práce. Brno Fakulta informatiky: Masarykova univerzita, 2012.
- [7] *Delaunay triangulation*. Online. In: Wikipedia: the free encyclopedia. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001, 2024. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay\\_triangulation](https://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation) . [cit. 2024-04-28].
- [8] *Duality of DT and VD*. Online. In: ResearchGate. Dostupné z: [https://www.researchgate.net/figure/a-Delaunay-triangulation-b-Voronoi-diagram-c-Duality-of-DT-and-VD\\_fig2\\_254084470](https://www.researchgate.net/figure/a-Delaunay-triangulation-b-Voronoi-diagram-c-Duality-of-DT-and-VD_fig2_254084470) . [cit. 2024-05-03].
- [9] OKABE, Atsuyuki; BOOTS, Barry; SUGINARA, Kokochi a CHIU, Sung Nok. *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*. 2nd ed. Wiley series in probability and statistics. Chichester: Wiley, c2000. ISBN 04-719-8635-6.
- [10] FUKSA Miroslav, *Delaunayova triangulace s omezením (CDT) v E2 a E3*. Plzeň, 2006. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Katedra informatiky a výpočetní techniky

- [11] ZELINKA, Ivan; OPLÁTKOVÁ, Zuzana; ŠEDA, Miloš; OŠMERA, Pavel a VČELAR, František. : *principy a aplikace*. Praha: BEN - technická literatura, 2009. ISBN 978-80-7300-218-3.
- [12] DE BERG, Mark; CHEONG, Otfried; KREVELD, Marc van a OVERMARS, Mark. *Computational geometry: algorithms and applications*. 3rd ed. Berlin: Springer, c2008. ISBN 978-3-642-09681-5.
- [13] AURENHAMMER, Franz. *ACM Computing Surveys*. Online. 3rd. New York: Association for Computing Machinery, 1991. ISBN 0360-0300. Dostupné z: [https://web.archive.org/web/20070612223013id\\_/http://web.cs.swarthmore.edu/~adanner/cs97/p345-aurenhammer.pdf](https://web.archive.org/web/20070612223013id_/http://web.cs.swarthmore.edu/~adanner/cs97/p345-aurenhammer.pdf). [cit. 2024-05-03].
- [14] ŠARAI, Tomáš. *Vizualizácia Voronoi delenia*. Online, Bakalárska práca, vedoucí doc. RNDr. Vlastislav Dohnal Ph.D. Brno: Masarykova univerzita, 2018. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/o5myk/VisualizaciaVoronoiDelenia.pdf>. [cit. 2024-04-28].
- [15] *Fortunív algoritmus a jeho implementace*. Online. In: <https://ivankuckir.blogspot.com/>. 2011. Dostupné z: <https://ivankuckir.blogspot.com/2011/03-/fortunuv-algoritmus-jeho-implementace.html>. [cit. 2024-04-28].
- [16] Akt o čípech - plán EÚ na prekonanie krízy polovodičov. Online. 2023, s. 3. Dostupné z: Európsky parlament, <https://www.europarl.europa.eu/topics/sk/article/20230210STO74502/akt-o-cipoch-plan-eu-na-prekonanie-nedostatku-polovodicov>. [cit. 2024-05-05].
- [17] Delaunayho triangulace: Triangulace. Online. In: . Dostupné z: <https://old.kgm.zcu.cz/studium/ugi/cviceni/ch08s01.html>. [cit. 2024-05-05].
- [18] FERNANDO, Martínez Santa; SARMIENTO, Martínez; HERNÁN, Fredy a EDWAR, Jacinto Gómez. *Using the delaunay triangulation and voronoi diagrams for navigation in observable environments*. Online. 2014, s. 9. ISSN 0123-921X. Dostupné z: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=257059812007>. [cit. 2024-05-14].
- [19] HOMROVÁ, Jana. *Zobecněné Voroneho diagramy*. Online. Diplomová práce. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd. 2012. Dostupné z: <https://theses.cz/id/a9kait/>. [cit. 2024-05-05].

## ZOZNAM OBRÁZKOV

Obrázok 1: Vzájomná poloha trojuholníkov pre vylučujúcu trianguláciu [1] .....	17
Obrázok 2: Voroného diagram [6] .....	19
Obrázok 3: Najjednoduchší prípad Voroného diagramu [6] .....	19
Obrázok 4: Konvexná obálka [4] .....	20
Obrázok 5: Dualita VD a DT [8] .....	20
Obrázok 6: Ukážka Delaunayho triangulácie [2] .....	23
Obrázok 7: Nejednoznačnosť DT [1] .....	24
Obrázok 8: Maximalizácia minimálneho uhla [7] .....	24
Obrázok 9: Zmena diagonály [2] .....	25
Obrázok 10: Inkrementálne vkladanie bodu [12] .....	26
Obrázok 11: Vzniknutá DT po odstránení simplexu [1] .....	27
Obrázok 12: Swap 22 [10] .....	27
Obrázok 13: Fortunov algoritmus - prevzaté z [14] .....	28
Obrázok 14: Princíp Fortunovho algoritmu [15] .....	29
Obrázok 15: Algoritmus rozdeľ a panuj [13] .....	30
Obrázok 16: Konštrukcia EMK pomocou Delaunayho triangulácie [11] .....	32
Obrázok 17: Konkrétny Steinerov problém [9] .....	32
Obrázok 18: Steinerov strom [9] .....	33
Obrázok 19: Trinagulácia z bodov na mape Českej republiky [17] .....	34
Obrázok 20: Vnútená hrana ab [10] .....	34
Obrázok 21: Trasa robota získaná pomocou DT a Voroného diagramu [18] .....	35
Obrázok 22: Rast Voroného buniek [19] .....	36