



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV FYZIKÁLNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

INSTITUTE OF PHYSICAL ENGINEERING

**FRAUNHOFEROVA DIFRAKCE NA SOUSTAVĚ  
IDENTICKÝCH A STEJNĚ ORIENTOVANÝCH OBJEKTŮ**

FRAUNHOFER DIFFRACTION BY IDENTICAL OBJECTS OF THE SAME ORIENTATION

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

David Prokop

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

prof. RNDr. Jiří Komrska, CSc.

BRNO 2017





# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav fyzikálního inženýrství  
Student: **David Prokop**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Fyzikální inženýrství a nanotechnologie  
Vedoucí práce: **prof. RNDr. Jiří Komrška, CSc.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Fraunhoferova difrakce na soustavě identických a stejně orientovaných objektů**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Fraunhoferova difrakce na identických objektech je východiskem mnoha difrakčních metod studia struktur. Difrakční jevy tohoto typu jsou velmi rozmanitého vzhledu. Mají však několik obecných vlastností, jichž se nevyužívá při interpretaci konkrétních difraktogramů. Úkolem práce je využít těchto obecných vlastností, a to zejména k interpretaci difraktogramů od náhodně rozmístěných identických a stejně orientovaných objektů.

### **Cíle bakalářské práce:**

Vyjděte z obecných vlastností difrakce tohoto typu a zabývejte se

A. Fraunhoferovou difrakcí na identických objektech rozmístěných podél přímky (a) rovnoměrně, (b) náhodně, (c) s náhodnými odchylkami od pravidelného uspořádání. Pokuste se stanovit z difrakčního obrazce míru odchylek od rovnoměrného uspořádání.

B. Zabývejte se Fraunhoferovou difrakcí na objektech náhodně rozmístěných v rovině. Difrakční obrazec je tvořen drobnými skvrnkami. Vyšetřete, zda velikost a tvar těchto skvrnek závisí na počtu objektů a na tvaru rovinné oblasti, v němž jsou objekty rozmístěny.

### **Seznam literatury:**

STONE J. M.: Radiation and Optics. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1963, kap. 7.

LIPSON S. G., LIPSON H., and TANNHAUSER D. S.: Optical Physics. Cambridge University Press 1995, kap. 8.

SOMMERFELD A.: Optics. Academic Press, Inc., New York 1954, §§ 32, 33.

KOMRSKA J.: Fourierovské metody v teorii difrakce a ve strukturní analýze. Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2007, kap. 9, 13, 16, 17.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Tomáš Šikola, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Bakalářská práce pojednává o Fraunhoferově difrakci na soustavě identických a stejně orientovaných objektů. Práce se zabývá popisem Fraunhoferovy difrakce nejprve pro tři různá rozmístění otvorů podél přímky. V další části je promítnut problém náhodně rozmístěných otvorů podél přímky do rovinné oblasti. Výsledkem práce je stanovení odchylek od pravidelného rozmístění otvorů. Součástí práce je popis experimentu Fraunhoferovy difrakce. V závěru práce jsou umístěny snímky difrakčních jevů, které výsledky modelu náhodně rozmístěných otvorů ilustrují.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Fraunhoferova difrakce, Fourierova transformace, funkce propustnosti, konvoluce, mřížka.

## **ABSTRACT**

The bachelor's thesis deals with Fraunhofer diffraction by identical objects of the same orientation. Main objective of my thesis is description of Fraunhofer diffraction for three different arrangements of holes along a straight line. In next part, the problem of random distribution of holes along straight line is set into plane. The outcome of my thesis is determination of deviations from regular array of holes. Next part of my thesis includes a description of Fraunhofer diffraction experiment. In final part of my thesis are pictures of diffraction phenomena, to illustrate results obtained from model of random distribution of holes.

## **KEYWORDS**

Fraunhofer diffraction, Fourier transform, transfer function, convolution, lattice.

PROKOP, David *Fraunhoferova difrakce na soustavě identických a stejně orientovaných objektů*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav fyzikálního inženýrství, 2017. 48 s. Vedoucí práce prof. RNDr. Jiří Komrška, CSc.



## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Fraunhoferova difrakce na soustavě identických a stejně orientovaných objektů“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

Brno .....

.....

(podpis autora)

## Poděkování

Děkuji svému vedoucímu prof. RNDr. Jiřímu Komrskovi, CSc. za časté konzultace a příkladné vedení bakalářské práce. Dále děkuji Bc. Tomáši Axmanovi za výrobu difrakčních masek použitých v experimentu. Ing. Zbyňku Dostálovi Ph.D. děkuji za pomoc v počátcích experimentální části práce a za cenné připomínky. V neposlední řadě děkuji rodičům a rodině za podporu během celého mého studia.

David Prokop

# OBSAH

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Difrakce</b>	<b>3</b>
1.1 Fourierova transformace . . . . .	4
1.2 Fraunhoferova difrakce . . . . .	5
1.3 Fraunhoferova difrakce jako Fourierova transformace vlnové funkce v rovině stínítka . . . . .	6
<b>2 Fourierova transformace funkce charakterizující identické objekty</b>	<b>7</b>
2.1 Teoretický model . . . . .	7
2.2 Obecné vlastnosti součtu $S(\vec{X}; n)$ . . . . .	8
2.3 Model lineární mřížky s pravidelně rozmístěnými otvory . . . . .	9
2.4 Model lineární mřížky s náhodně rozmístěnými otvory . . . . .	11
2.5 Model lineární mřížky „kvaziperiodicky“ rozmístěných otvorů . . . . .	14
<b>3 Náhodně rozmístěné objekty v rovině</b>	<b>21</b>
3.1 Teoretický model . . . . .	23
3.1.1 Čtvercový model . . . . .	23
3.1.2 Kruhový model . . . . .	26
<b>4 Experimentální část</b>	<b>31</b>
4.1 Experiment . . . . .	31
4.2 Provedení experimentu . . . . .	32
4.3 Obrazová část . . . . .	33
<b>5 Závěr</b>	<b>39</b>
<b>Literatura</b>	<b>41</b>
<b>Dodatky</b>	<b>43</b>
Dodatek A - Grafy čtvercového modelu . . . . .	43
Dodatek B - Grafy kruhového modelu . . . . .	46





# ÚVOD

Fraunhoferova difrakce je východiskem mnoha difrakčních metod studia struktur. Difrakční jevy jsou obvykle rozmanitého vzhledu. Mají však několik společných obecných vlastností, jichž se obvykle nevyužívá. Úkolem práce je využít těchto obecných vlastností k interpretaci difraktogramů vznikajících od pravidelně, ale zejména od náhodně rozmístěných otvorů.

Práce je rozdělena do čtyř hlavních částí. Na začátku je podána definice pojmu difrakce, společně s rozdělením difrakčních jevů. Dále je zde vysvětlen matematický popis Fraunhoferovy difrakce, který je neodmyslitelně spojen s Fourierovou transformací. Druhá část je zaměřena na rozmístění otvorů podél přímky. Zvláštní pozornost je zde věnována modelu rozmístění otvorů, kdy otvory jsou vychylovány ze svých poloh při pravidelném rozmístění. Ve třetí části je představen model náhodně rozmístěných otvorů v rovinné oblasti společně se souvislostí s problematikou náhodné procházky. Poslední část se zabývá experimentální realizací Fraunhoferovy difrakce. Vše je doplněno snímky difrakčních jevů, které ilustrují výsledky obdržené v předchozí části.



# 1 DIFRAKCE

Za zakladatele difrakce je považován F. M. Grimaldi, který pojem difrakce vymezil takto: „*Světlo se šíří nebo proniká nejen přímo, lomem nebo odrazem, nýbrž někdy ještě jakýmsi čtvrtým způsobem, difrakcí.*“ [1], kap. 2. Difrakce vychází z latinského slova *dis*, vyjadřujícího opak, negaci a *frangere* s významem lámat. Českým ekvivalentem slova difrakce je ohyb vlnění. Difrakce světla bývá mnohdy považována za zvláštní úkaz při šíření světla. Ve skutečnosti se jedná o nejjednodušší a nejpřirozenější pohled na šíření světla kolem neprůhledných překážek. S difrakcí se lidé setkávali od nepaměti, ať už se jednalo o ohyb vln na vodní hladině, či ohyb zvukových vln nebo v případě vln světelných při něčem tak prostém, jako je ohyb světla na řase oka.

Jak již bylo zmíněno, jedním z prvních průkopníků v oblasti difrakce byl F. M. Grimaldi, jenž podal jakýsi kvalitativní popis tohoto fenoménu. Ovšem kvantitativní popis byl dodán až v 19. století A. J. Fresnelem, který nejprve pozměnil Huygensův princip, do kterého vložil požadavek na interferenci sekundárních vln, kdy mimo jiné také specifikoval fázi a amplitudu sekundárních vln. Matematická podoba Huygensova – Fresnelova principu je uvedena např. v [1], kap. 3.2(6). Nejvýznamnějším rysem difrakce je „ohýbání“ dopadajících vln kolem předmětů, vytvořených z materiálu, který by ve formě neomezeného prostředí byl zcela neprůhledný. Obdobným způsobem jsou rozptylovány vlny procházející průhledným otvorem na všechny strany. Překážce v průhledném prostředí nebo otvoru v neprůhledném předmětu říkáme difrakční centrum. Ačkoliv ohyb vytváří nové jevy, není to spojeno s žádnými novými fyzikálními procesy. Všechny pozorované jevy jsou způsobeny vynucenými kmity difrakčních center s frekvencí vlny. Dochází k vytváření nových vln kmity těchto částí a složením nových vln s dopadající vlnou, které vytváří výslednou difraktovanou vlnu [2].

Pro kvalitativní popis vzniku difrakčního jevu je vhodné pozorovat difrakci z mikroskopického hlediska, kdy je zkoumána vzájemná interakce mezi vlnou a materiálem na který vlna dopadá. Více např. v [3], kap. 6.

Difrakční jevy lze rozdělit několika způsoby: nejprve např. podle toho, zda difrakce probíhá pouze jednou, či vícekrát:

- **Kinematická teorie** – u kinematické teorie se předpokládá, že difrakce příliš „neovlivní“ primární záření a že nastává pouze jednorázově.
- **Dynamická teorie** – zohledňuje zeslabení primární vlny v důsledku difrakce a jedná se o difrakci záření už difraktovaného.

Další dělení difrakčních jevů je podle toho, jakým proměnným odpovídá rozložení intenzity v difrakčním obrazci:

- **Fraunhoferova difrakce** – rozložení intenzity je funkcí směru.
- **Fresnelova difrakce** – rozložení intenzity je funkcí polohy.

Následující kapitoly se věnují výhradně Fraunhoferově difrakci a jejímu matematickému popisu, jež je svázán s Fourierovou transformací.

## 1.1 Fourierova transformace

V této kapitole bude podána obecná definice Fourierovy transformace společně s významem jednotlivých konstant. Dále zde uvedeme souvislost mezi volbou těchto konstant s realizací Fourierovy transformace v jednotlivých vědních oblastech. Fourierovu transformaci a inverzní Fourierovu transformaci definujeme ve tvaru (viz [4], 1.1(1), 1.1(2)),

$$F(\vec{X}) = \text{FT} \{f(\vec{x})\} = A^N \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) \exp(-ik\vec{x} \cdot \vec{X}) d^N \vec{x}, \quad (1.1)$$

$$f(\vec{x}) = \text{FT}^{-1} \{F(\vec{X})\} = B^N \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{X}) \exp(ik\vec{x} \cdot \vec{X}) d^N \vec{X}, \quad (1.2)$$

kdy předpokládáme, že funkce  $f(\vec{x})$ ,  $F(\vec{X})$  jsou absolutně integrovatelné po částech hladké komplexní funkce reálných proměnných  $\vec{x}$ ,  $\vec{X} \in E_N$ , s případnými body nespojitosti pouze v bodech na množině míry nula v  $E_N$ . Jedná se o podmínku postačující, nikoliv nutnou, nutná podmínka existence Fourierova integrálu není známa. Ve volbě konstant  $A, B, k$  ve Fourierově transformaci existuje určitá „volnost“, konstanty jsou pouze svázány podmínkou

$$AB = \frac{|k|}{2\pi}, \quad (1.3)$$

vyplývající z fundamentální věty o Fourierově transformaci, která říká, že v případě existence Fourierova integrálu v bodech spojitosti funkce  $f(\vec{x})$  platí

$$f(\vec{x}) = \text{FT} \{ \text{FT}^{-1} \{f(\vec{x})\} \} = \text{FT}^{-1} \{ \text{FT} \{f(\vec{x})\} \}. \quad (1.4)$$

V bodech nespojitosti funkce  $f(\vec{x})$  dává aplikace Fourierovy transformace a inverzní Fourierovy transformace střední hodnotu funkce  $f(\vec{x})$  v infinitezimálním okolí bodu nespojitosti [4], kap. 1.1. Teď tedy už k samotné volbě konstant  $A, B, k$ . V různých vědních oblastech se tyto konstanty definují různě, jako příklad bych zde uvedl jednu z možných voleb používanou například v matematice. Kde volíme  $A = B = 1$ ,

$k = 2\pi$ . Více o volbě konstant ve Fourierově transformaci se lze dočíst například v [4], kap. 1.1. Jelikož se tato práce zabývá aplikací Fourierovy transformace v optice, uchýlíme se k volbě  $A = \frac{1}{\lambda}, B = 1, k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Pak inverzní Fourierova transformace představuje rozklad funkce propustnosti do tzv. jádra Fourierovy transformace (viz [4], kap. 2.2.2).

## 1.2 Fraunhoferova difrakce

O Fraunhoferově difrakci se často mluví jako o Fourierově transformaci funkce propustnosti. O tom, za jakých podmínek tomu tak skutečně je, se lze dočíst například v [5]. Zde bych zmínil alespoň význam funkce propustnosti a její souvislost s Fourierovou transformací. Při optické difrakci se setkáváme s objekty, které lze považovat za dvourozměrné, např. fotografické filmy, clony, či difrakční mřížky. Předpokládejme, že tyto objekty jsou alespoň v nějaké oblasti transparentní pro nějaký typ vlnění. Nechť toto vlnění charakterizuje určitá vlnová funkce (označme si ji jako  $\psi_0(x, y)$ ). Po průchodu objektem získá vlnová funkce tvar:  $\psi(x, y)$ , pak podíl (viz [4], kap. 2.2.1)

$$t(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{\psi_0(x, y)}, \quad (1.5)$$

za předpokladů uvedených například v [4], kap. 2.2.1, nazveme funkcí propustnosti daného objektu. Funkce propustnosti, je tedy obecně komplexní funkcí, pro praxi jsou nejdůležitější tyto 2 případy:

- Amplitudové objekty – funkce propustnosti je ve tvaru

$$t(x, y) = \tau(x, y) \exp(i\epsilon_0), \quad (1.6)$$

kde  $\tau(x, y)$  je reálná funkce a  $\epsilon_0$  je reálná konstanta. V praxi amplitudové objekty jsou realizovány například jako otvory v nepropustném stínítku, kdy otvory jsou reprezentovány tzv. charakteristickou funkcí otvorů, která je rovna jedné v místě otvoru a je rovna nule v nepropustných částech stínítka.

- Fázové objekty – mají v propustných částech stínítka funkci propustnosti ve tvaru

$$t(x, y) = \tau \exp(i\epsilon(x, y)), \quad (1.7)$$

kde  $\tau$  je reálná konstanta a  $\epsilon(x, y)$  je reálná funkce polohy. V nepropustných částech stínítka je  $t(x, y)$  rovna nule. Příkladem mohou být ideálně propustné optické elementy – nejčastěji čočka, která absorbuje světlo nepatrně, zatímco fázi ovlivňuje významně.

### 1.3 Fraunhoferova difrakce jako Fourierova transformace vlnové funkce v rovině stínítka

V dalším bude podán vztah mezi amplitudou difraktovaného vlnění a funkcí propustnosti.

Nahlédnutím do [4], kap. 2.2.2(10), lze vidět, že funkce propustnosti (1.5) vyjadřuje rozklad této funkce do tzv. jádra Fourierovy transformace, tedy vyjádření prostřednictvím superpozice rovinných a evanescentních vln.

Amplitudu  $t(x, y)$  difraktovaného vlnění ve směru  $(X, Y, \sqrt{1 - X^2 - Y^2})$  vyjadřuje difrakční integrál, jehož odvození je provedeno dvěma způsoby. Nejprve z Huygensova – Fresnelova principu a podruhé pomocí teorie systémů, kdy na Fraunhoferovu difrakci lze nahlížet jako na přenos lineárním systémem (viz [1], kap. 7).

Superpoziční integrál nabývá tvaru

$$t(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} T(X, Y) \exp(ik(xX + yY)) dXdY = FT^{-1}\{T(X, Y)\}. \quad (1.8)$$

Vztah mezi funkcí propustnosti  $t(x, y)$  a amplitudou  $T(X, Y)$  směrového rozkladu difraktovaného vlnění nabývá tvaru inverzní Fourierovy transformace. Užitím definice Fourierovy transformace viz (1.1), resp. (1.2), při volbě konstant  $A = \frac{1}{\lambda}$ ,  $B = 1$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , inverzní Fourierova transformace k (1.8) získá tvar

$$T(X, Y) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} t(x, y) \exp(-ik(xX + yY)) dx dy = FT\{t(x, y)\}, \quad (1.9)$$

což je hledaný vztah mezi funkcí propustnosti a amplitudou difraktovaného vlnění. Meze platnosti výše uvedených vztahů, jsou dány podmínkami, které určuje tzv. optická difrakce, o jejíž platnosti se lze dočíst například v [5].

## 2 FOURIEROVA TRANSFORMACE FUNKCE CHARAKTERIZUJÍCÍ IDENTICKÉ OBJEKTY

Tato kapitola se věnuje popisu Fourierovy transformace identických stejně orientovaných objektů, které jsou od sebe vzájemně posunuty. Výsledky této teorie mají mnohá uplatnění, jako příklad zde uvedu difrakci na krystalech, kdy krystal je obvykle tvořen identickými stejně orientovanými objekty. Pomocí difrakce na krystalech pak usuzujeme na jejich strukturu.

Bohužel přechod z 1D nebo 2D do 3D není přímočarý, neboť teorie dosud diskutovaná byla popsána jako řešení tzv. okrajového problému, kdy vlna dopadající na difrakční masku se chovala dle Huygensova – Fresnelova principu. Nyní, když je maska třídímenzionální, může nastat situace předefinování okrajových podmínek a difrakční obrazec nevznikne. Ukazuje se, že pouze Fourierova transformace samotná nepopisuje difrakční obrazec, ale, že je nutné dodat další podmínku. Vznikající konstrukcí tzv. Ewaldovy sféry (viz [4], kap. 18) popisující směry hlavních difrakčních maxim, která nám určí jaké části Fourierovy transformace přispívají k difrakčnímu obrazci (viz [6], kap. 8.4).

Modely dále představené jsou prováděny na tzv. Diracových distribucích, (def. např. v [4], Dodatek A), kdy budeme uvažovat tzv. bodové otvory.

Výsledný difrakční obrazec pak odpovídá co do vzhledu difrakci na krystalu, což je možné, pouze díky vlastnostem Fourierovy transformace. Jednou z takových vlastností je linearita a přímým důsledkem linearity je tzv. Babinetův princip (viz [4], kap. 3), vypovídající o difrakci na objektech, které jsou vzájemně komplementární. Pak vzhled difrakčního obrazce na kruhovém otvoru a na terčíku je identický, vyjma oblasti primárního směru.

### 2.1 Teoretický model

Fourierova transformace funkce  $f(\vec{x})$ , se značí  $F(\vec{X})$ . Východiskem bude Fourierova transformace posunutého objektu, tedy

$$\text{FT} \{f(\vec{x} - \vec{x}^0)\} = \exp(-ik\vec{X} \cdot \vec{x}^0)F(\vec{X}), \quad (2.1)$$

o pravdivosti tohoto tvrzení se lze přesvědčit přímým výpočtem, který je uveden v [4], kap. 9.1. Dále se budeme zajímat o Fourierovu transformaci funkce charakterizující identické stejně orientované objekty, které jsou od sebe pouze posunuty o polohový vektor  $\vec{x}^j$ . Následně pak tato funkce bude vyjádřena díky linearitě Fou-

rierovy transformace, ve tvaru konvoluce

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n f_0(\vec{x} - \vec{x}^j) = f_0(\vec{x}) * \sum_{j=1}^n \delta(\vec{x} - \vec{x}^j). \quad (2.2)$$

Poté byla provedena Fourierova transformace konvoluce těchto dvou funkcí. O tom, že Fourierova transformace konvoluce je úměrná součinu Fourierových obrazů daných funkcí s konstantou úměrnosti  $\frac{1}{A^N}$  se lze přesvědčit v [4], kap. 7.3. Výsledná funkce nabývá pak tvaru

$$FT \{f(\vec{x})\} = FT \{f_0(\vec{x})\} \sum_{j=1}^n \exp(-ik\vec{X} \cdot \vec{x}^j). \quad (2.3)$$

Fourierova transformace funkce představující soubor identických stejně orientovaných objektů je součinem dvou funkcí  $F(\vec{X})$ , která je Fourierovou transformací jednoho jediného z identických objektů a druhá – součet fázorů, který ale závisí pouze na vzájemné poloze objektů a nikoliv na jejich vlastnostech [4], kap. 9.2. A právě tyto vlastnosti budou dále předmětem zkoumání.

## 2.2 Obecné vlastnosti součtu $S(\vec{X}; n)$

Tyto obecné vlastnosti, kterých se obvykle nevyužívá při interpretaci difrakčních jevů, představují někdy to jediné, co lze s určitostí tvrdit o této součtové funkci. Zkoušet najít nějaké závislosti v chování této funkce může být velmi obtížné, protože chování této funkce bývá dosti nahodilé. Proto si tyto vlastnosti zde postupně uvedeme a budeme se zabývat jejich významem. Důkaz těchto vlastností a jejich rozbor je důkladně proveden v [4], kap. 9.3.

$$\max |S(\vec{X}; n)| = S(\vec{0}; n) = n, \quad (2.4)$$

$$\nabla_{\vec{X}} |S(\vec{X} = \vec{0}; n)| = \vec{0}, \quad (2.5)$$

$$\langle |S(\vec{X}; n)|^2 \rangle = n, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \langle S(\vec{X}; n) \rangle &= 0, \quad \vec{x}^j \neq \vec{0}, \quad j = 1, \dots, n, \\ &= 1, \quad \vec{x}^j = \vec{0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vlastnost (2.4) říká, že modul funkce  $S(\vec{X}; n)$ , je ohraničenou funkcí a nabývá své maximální hodnoty, která je rovna  $n$ , v bodě  $\vec{X} = 0$ . Z vlastnosti (2.4) dále vyplývá, že nehledě na tvar výrazu pro polohu otvorů  $x^j$ , je velikost centrálního píku intenzity



vždy rovna  $n^2$ . Tento pík jako první rozpoznal Rayleigh v [7], viz [8]. Dále u (2.5) vidíme, že počátek je stacionárním bodem modulu. Dále následuje (2.6) určující střední hodnotu kvadrátu modulu součtové funkce. Poslední (2.7) vypovídá o střední hodnotě součtové funkce, která je rovna 0 pro  $\vec{x}^j \neq \vec{0}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , a je rovna 1 pokud pro některé  $j$  platí, že  $\vec{x}^j = \vec{0}$ . V následujících kapitolách se budeme zabývat tvarem součtové funkce  $S(\vec{X}; n)$  pro různá rozložení otvorů podél přímky.

## 2.3 Model lineární mřížky s pravidelně rozmístěnými otvory

Polohu jednotlivých otvorů v případě pravidelně rozmístěných otvorů charakterizuje výraz

$$x^j = -\frac{l}{2} + \frac{j-1}{n-1} \cdot l \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.8)$$

kdy  $l$  určuje délkové rozměry mřížky. Mřížkou rozumíme oblast ve které jsou rozmístěny otvory, kde  $n$  – počet otvorů.

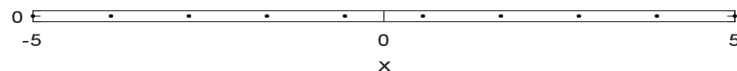
Dosažením tohoto rozmístění do součtové funkce,  $S(X, n)$ , dostáváme

$$\begin{aligned} S(X, n) &= \sum_{j=1}^n \exp(-ikXx^j) = \sum_{j=1}^n \exp(-ikXl[-\frac{1}{2} + \frac{j-1}{n-1}]) = \\ &= \exp(ikx\frac{l}{2}) \cdot \frac{1 - \exp(-ikXl\frac{n}{n-1})}{1 - \exp(-ikXl\frac{1}{n-1})}, \end{aligned}$$

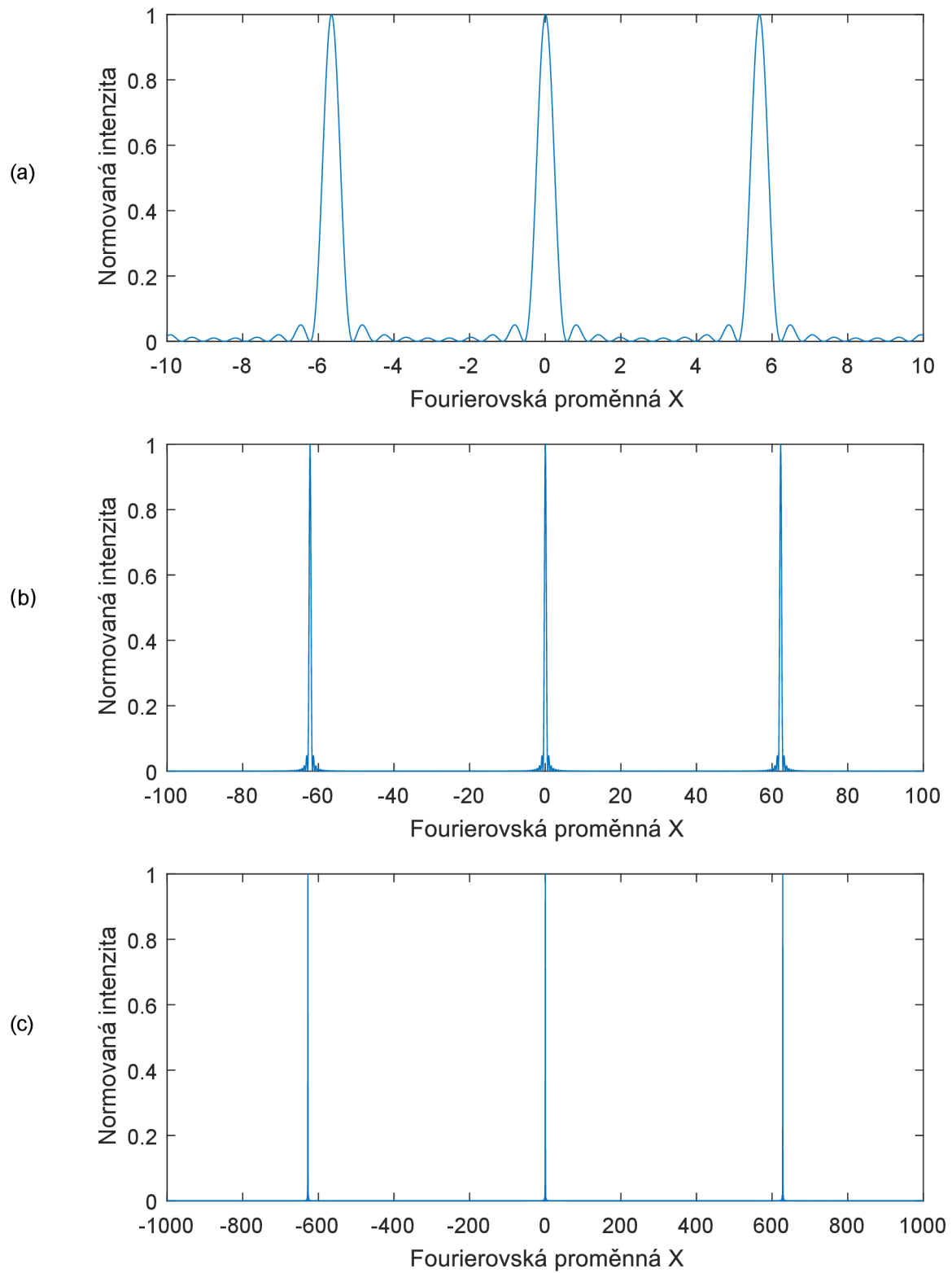
a pro hodnotu normované intenzity dostáváme

$$\frac{1}{n^2} |S(X, n)|^2 = \frac{1}{n^2} \frac{\sin^2\left(\frac{knXl}{2(n-1)}\right)}{\sin^2\left(\frac{kXl}{2(n-1)}\right)}, \quad (2.9)$$

kde faktor  $\frac{1}{n^2}$  byl zvolen kvůli normování hodnot jednotlivých hlavních maxim k hodnotě 1. Další vlastností funkce  $S(\vec{X}, n)$  v případě pravidelného rozložení otvorů je, že pro  $n \rightarrow \infty$  dostáváme sérii  $\delta$ -funkcí, pouze v recipročním škálování. Dále s postupně narůstajícím počtem otvorů  $n$ , narůstá i počet vedlejších maxim a to vždy jako  $n - 2$ .



Obr. 2.1: Ilustrativní model mřížky pro  $n = 10$  s pravidelně rozmístěnými otvory.



Obr. 2.2: Vykreslení funkce (2.9) pro: (a) 10 otvorů, (b) 100 otvorů, (c) 1 000 otvorů.

## 2.4 Model lineární mřížky s náhodně rozmístěnými otvory

V této kapitole bude pojednáno o rozmístění otvorů, které je zcela náhodné. Cílem bylo zachovat stejnou délku mřížky pouze s tím rozdílem, že polohu jednotlivých otvorů budeme generovat prostřednictvím generátoru náhodných čísel  $\epsilon^j$ , kde všem číslům byla přidělena stejná pravděpodobnost výskytu a  $\epsilon^j \in \langle -1; 1 \rangle$ . Polohu jednotlivých otvorů charakterizuje výraz

$$x^j = -\frac{l}{2}\epsilon^j, \quad (2.10)$$

pokud dosadíme tento výraz do součtové funkce  $S(X, n)$  obdržíme

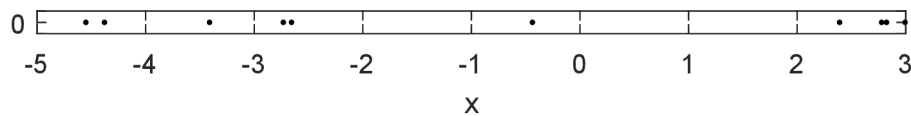
$$S(X, n) = \sum_{j=1}^n \exp(-ikXx^j) = \sum_{j=1}^n \exp(ikX\frac{l}{2}\epsilon^j),$$

a pro hodnotu normované intenzity ke střední hodnotě dostáváme

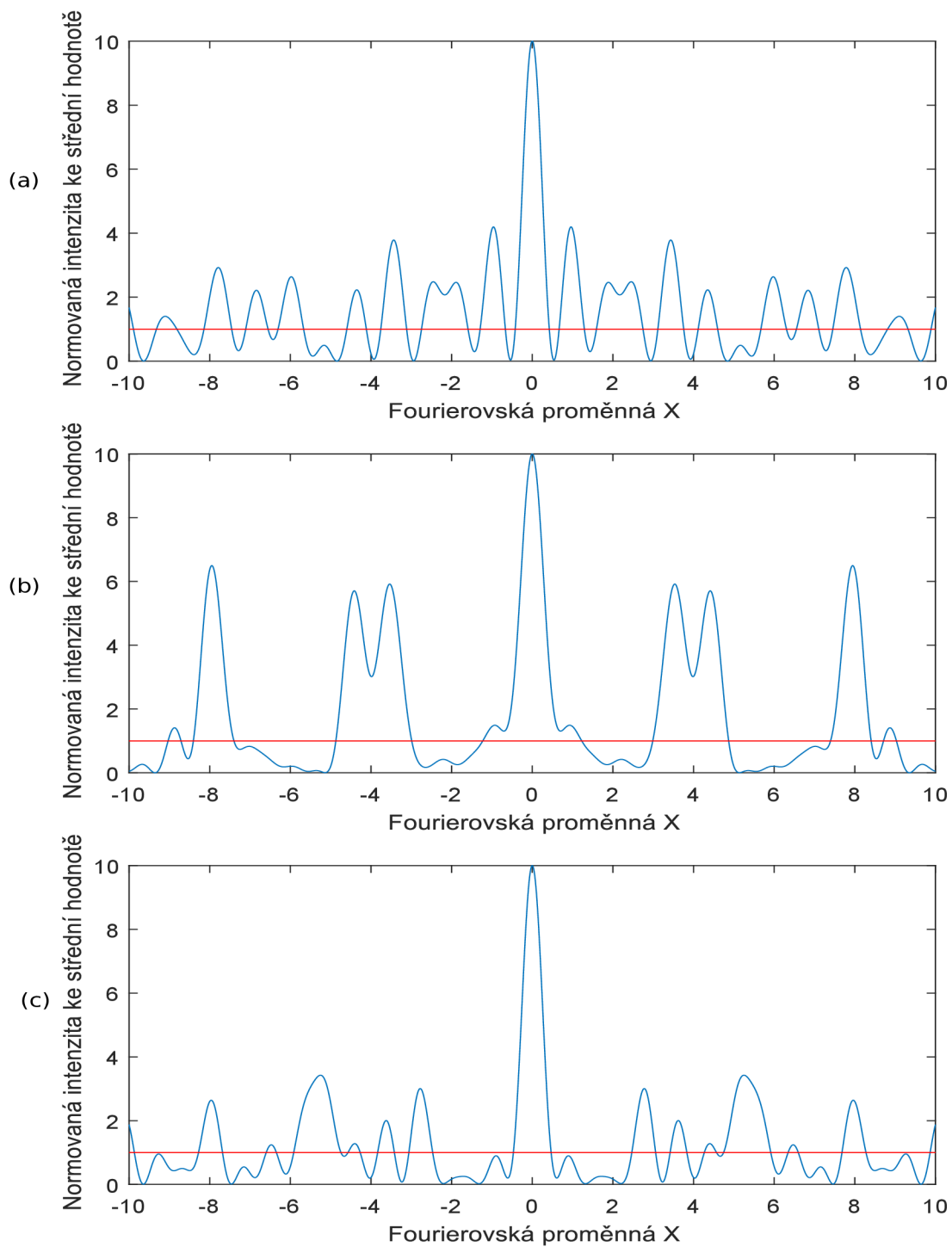
$$\frac{1}{n} |S(X, n)|^2 = \frac{1}{n} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^n \cos(kX\frac{l}{2}\epsilon^j) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^n \sin(kX\frac{l}{2}\epsilon^j) \right]^2 \right\}, \quad (2.11)$$

kde faktor  $\frac{1}{n}$  byl zvolen kvůli normování střední hodnoty k hodnotě 1.

Dále se zaměříme na vliv počtu otvorů na šířku píků, kde byla postupně měřena délka těchto úseků pro různý počet otvorů a pro různé série náhodných čísel  $\epsilon_j$ . Grafy viz níže byly vykresleny v rámci jedné série náhodně generovaných čísel. Výsledné vyhodnocení bylo provedeno pro tři série náhodných čísel.

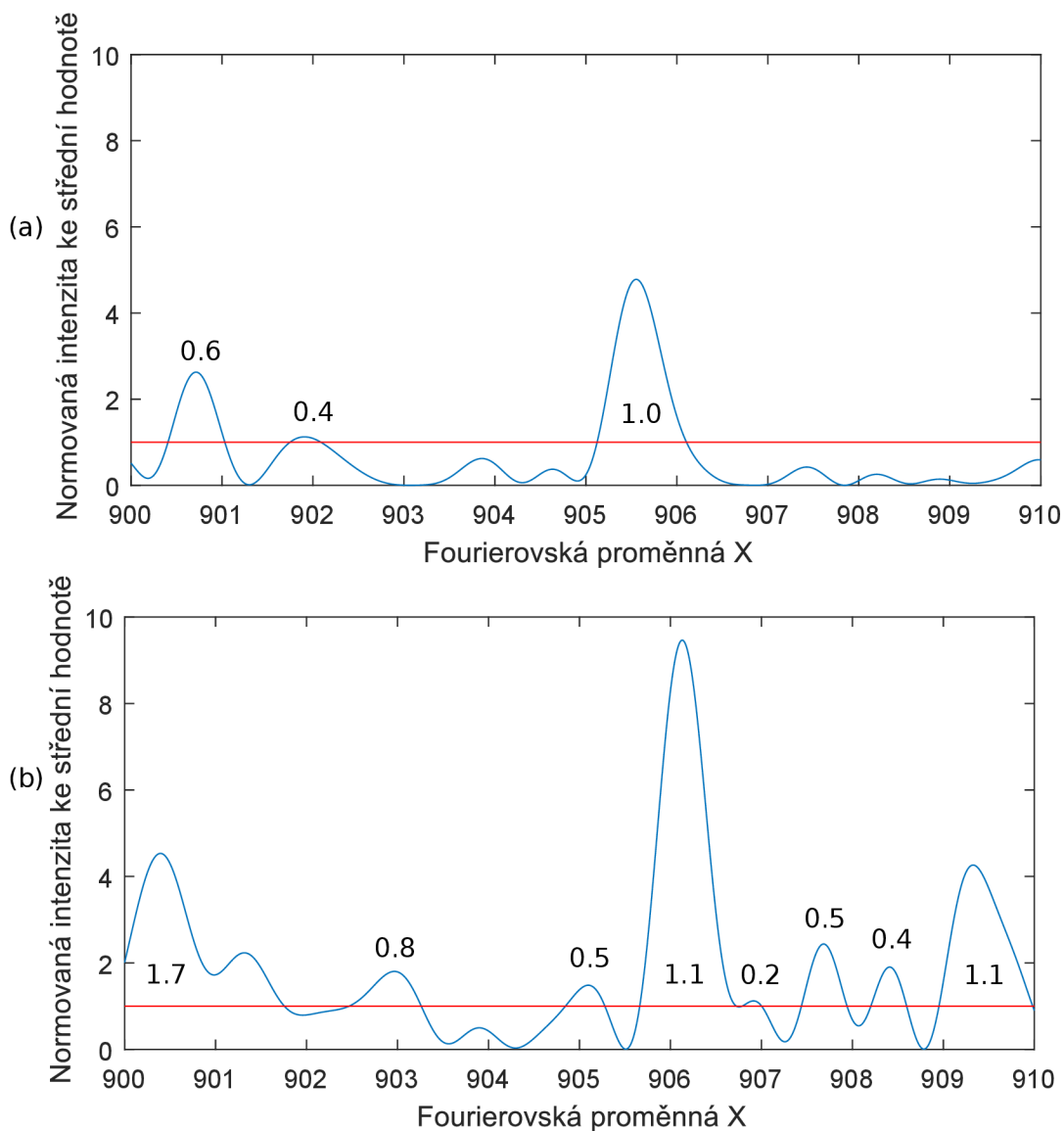


Obr. 2.3: Ilustrativní model mřížky pro  $n = 10$  s náhodně rozmístěnými otvory.

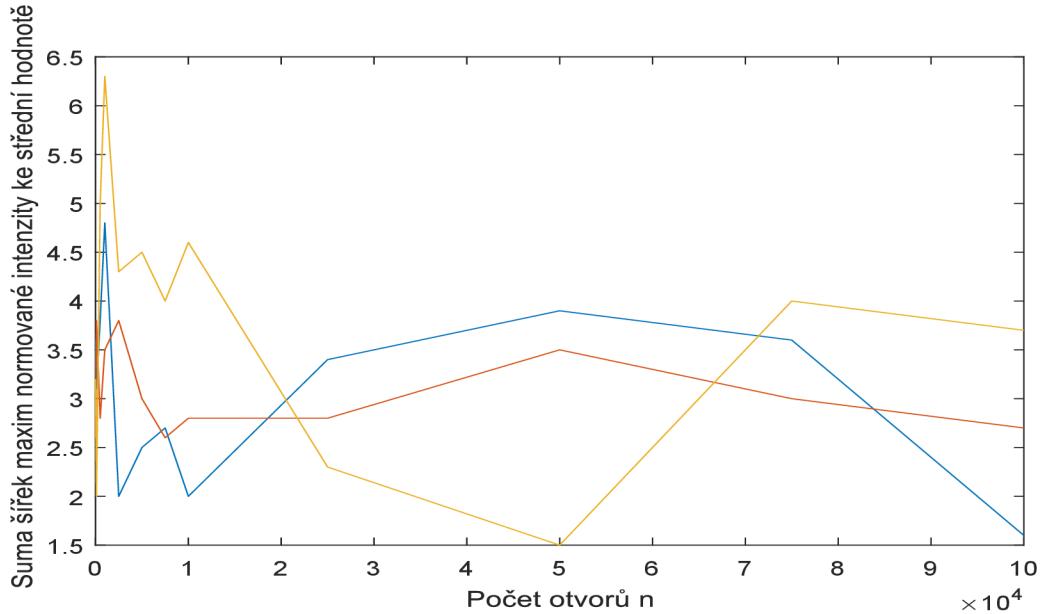


Obr. 2.4: Vykreslení funkce (2.11) pro deset otvorů, pro tři náhodné na sobě nezávislé výběry náhodných čísel  $\epsilon_j$ , červená linie zvýrazňuje střední hodnotu výrazu (2.11), která je rovna 1. (a) 1. série, (b) 2. série, (c) 3. série.

Při analýze šířky píků, byla zkoumána náhodně zvolená oblast ve Fourierově prostoru, o délce deseti blíže nespecifikovaných jednotek. Délka tohoto úseku byla zvolena tak, aby číselně odpovídala rozměrům oblasti, ve které byly rozmístěny otvory.



Obr. 2.5: Vykreslení funkce (2.11) v rámci jedné série náhodných čísel, s označenými šířkami maxim přesahující střední hodnotu, vyznačenou červenou linií. (a)  $n = 100$ , (b)  $n = 10\,000$ .



Obr. 2.6: Závislost součtu šířek píků přesahující střední hodnotu pro různý počet otvorů pro tři náhodné na sobě nezávislé výběry náhodných čísel  $\epsilon_j$ .

Z obr. (2.6) lze vidět, že dané závislosti si v bodech odpovídající určitému počtu otvorů neodpovídají a jsou nekorelované. Počet otvorů tedy není signifikantním faktorem zodpovědným za šířku píků.

## 2.5 Model lineární mřížky „kvaziperiodicky“ rozmístěných otvorů

Po provedení kvantifikace pravidelného a zcela náhodného rozmístění otvorů, by mohlo být zajímavé zkoumat „něco mezi“. K tomu bylo využito představy, kdy otvory byly situovány do pozice jako u pravidelného rozmístění, pouze s tím rozdílem, že z této polohy byly vychylovány o náhodné číslo  $\epsilon^j$ . Míru tohoto odchýlení reprezentuje hodnota proměnné  $\delta$ , kdy  $\delta \in \langle 0; 0.5 \rangle$ . Polohu jednotlivých otvorů charakterizuje výraz

$$x^j = -\frac{l}{2} + \frac{j-1}{n-1} \cdot l + \frac{l\delta}{n-1} \cdot \epsilon^j, \quad (2.12)$$

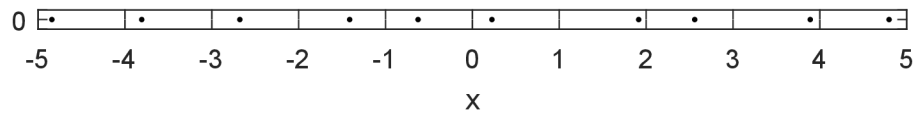
dosazením do součtové funkce  $S(X, n)$  dostáváme

$$S(X, n) = \sum_{j=1}^n \exp(-ikXx^j) = \sum_{j=1}^n \exp\left(-ikX\left(-\frac{l}{2} + \frac{j-1}{n-1} \cdot l + \frac{l\delta}{n-1} \cdot \epsilon^j\right)\right),$$

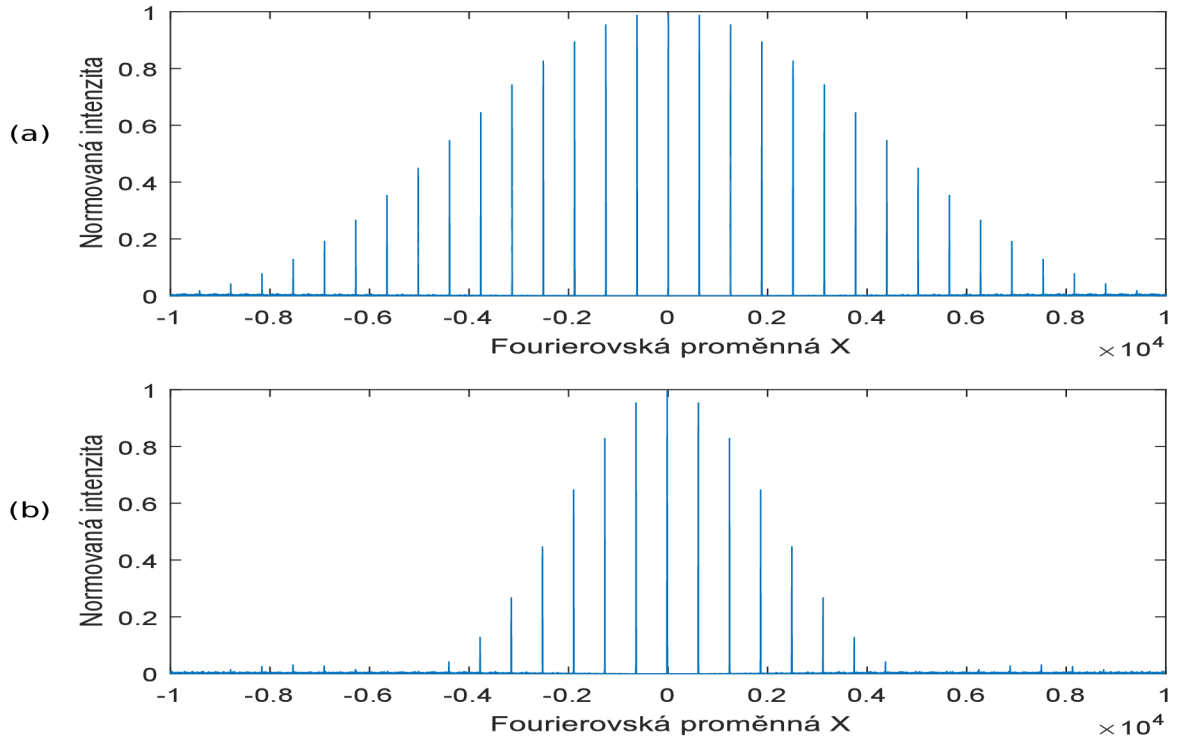
a pro hodnotu normované intenzity

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} |S(X, n)|^2 = \frac{1}{n^2} & \left[ \sum_{j=1}^n \cos \left( kXl \left( \frac{j-1}{n-1} + \frac{\delta}{n-1} \epsilon^j \right) \right) \right]^2 + \\ & + \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n \sin \left( kXl \left( \frac{j-1}{n-1} + \frac{\delta}{n-1} \epsilon^j \right) \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

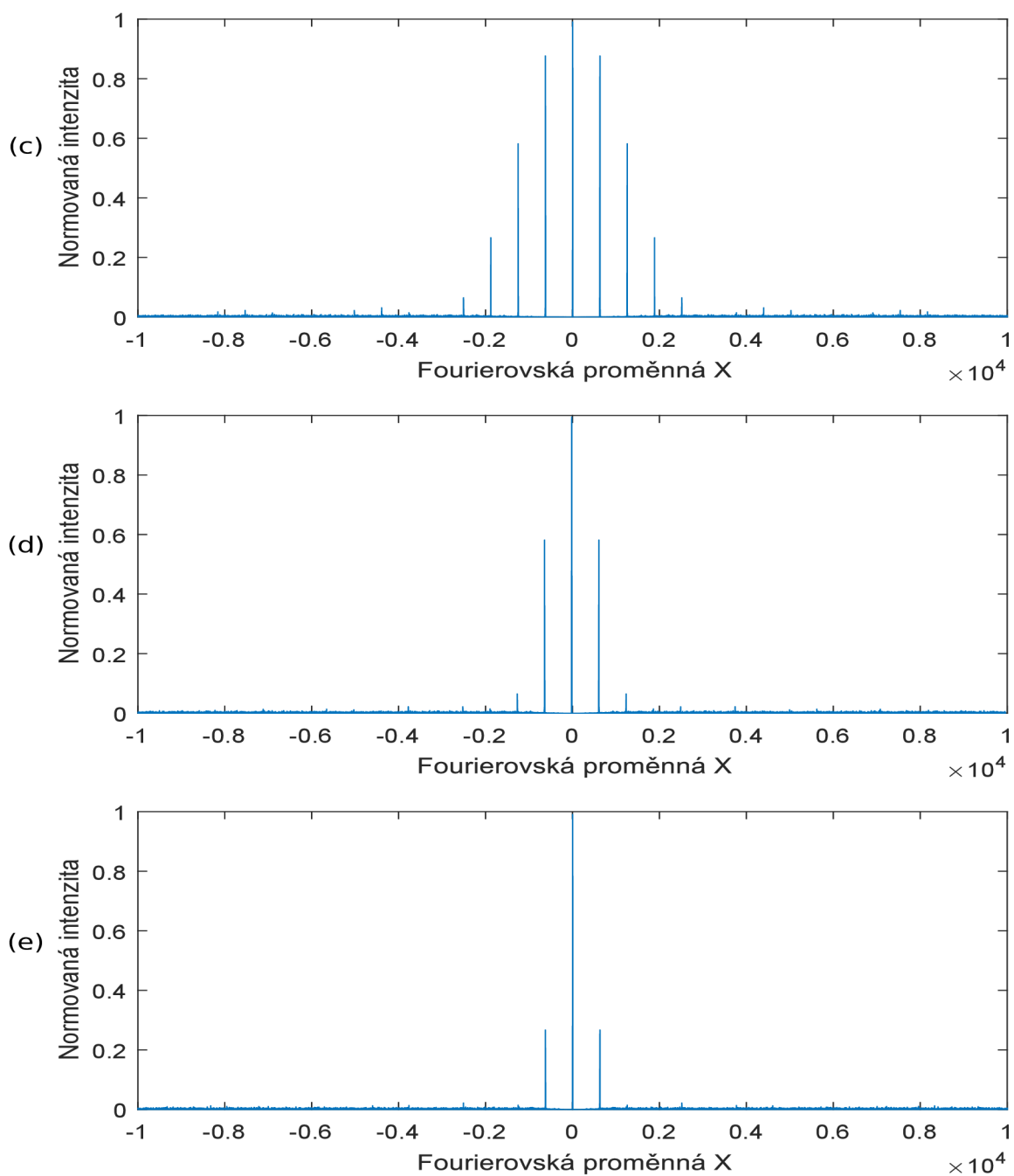
kde faktor  $\frac{1}{n^2}$  byl zvolen kvůli normování centrálního maxima k hodnotě 1.



Obr. 2.7: Ilustrativní model mřížky pro  $n = 10$  s odchylkami otvorů z mřížkových poloh pro  $\delta = 0.3$ .

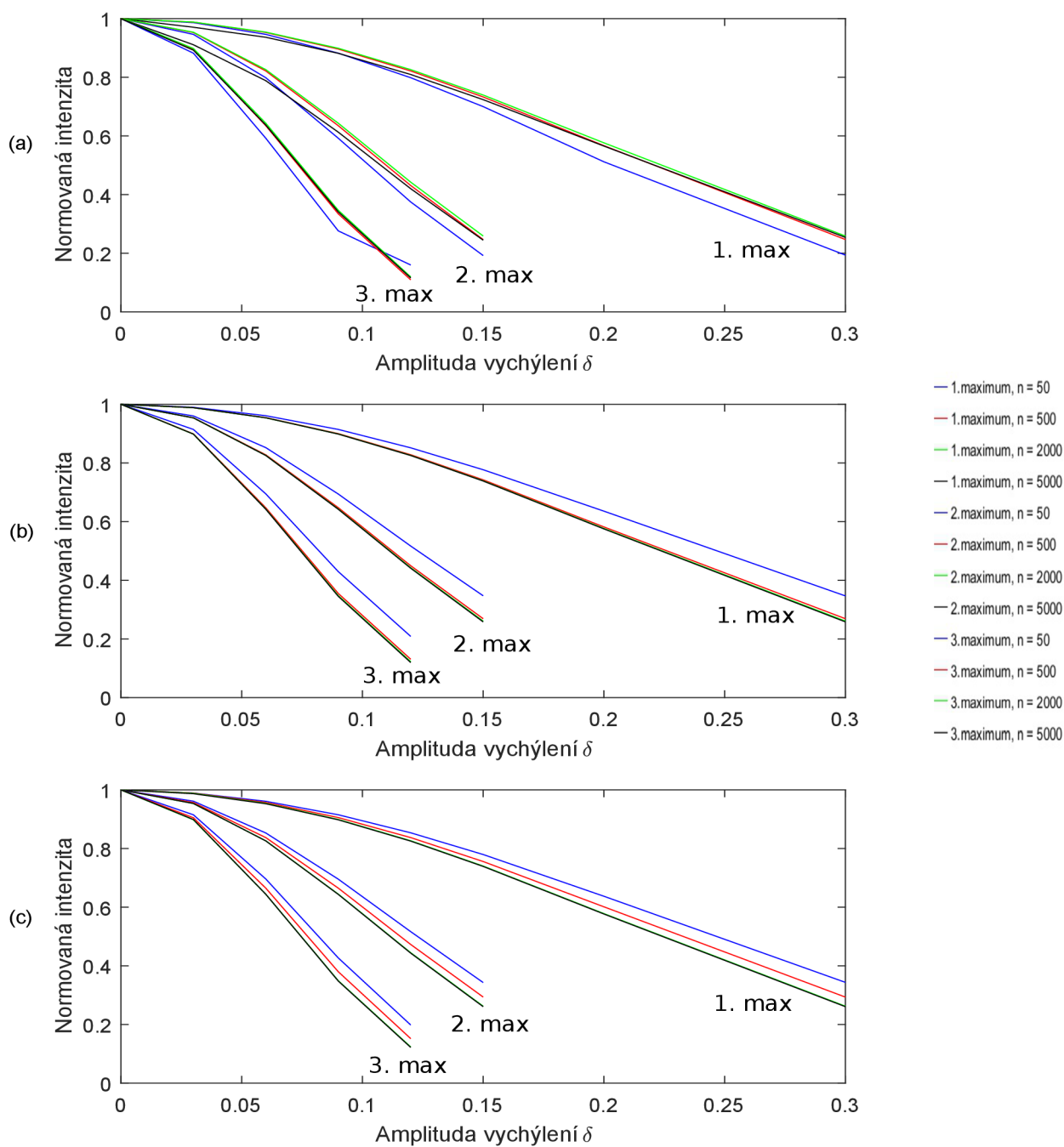


Obr. 2.8: Vykreslení funkce (2.13) pro 1 000 otvorů, pro různé hodnoty  $\delta$ . (a)  $\delta = 0.03$ , (b)  $\delta = 0.06$ .



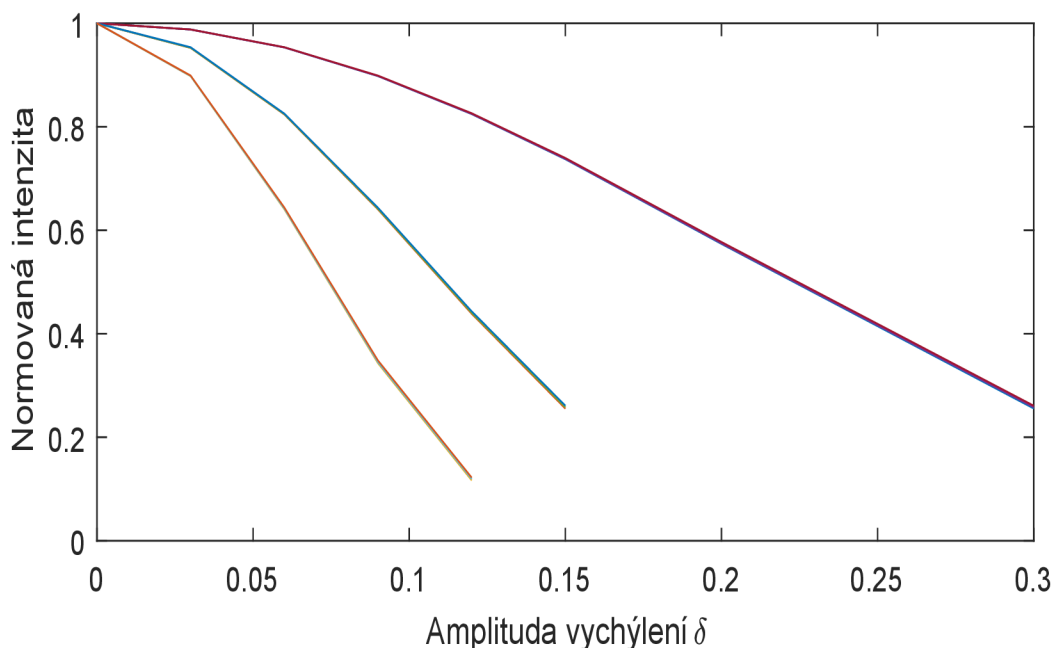
Obr. 2.9: Vykreslení funkce (2.13) pro 1 000 otvorů, pro různé hodnoty  $\delta$ . (a)  $\delta = 0.1$ , (b)  $\delta = 0.2$ , (c)  $\delta = 0.3$ .





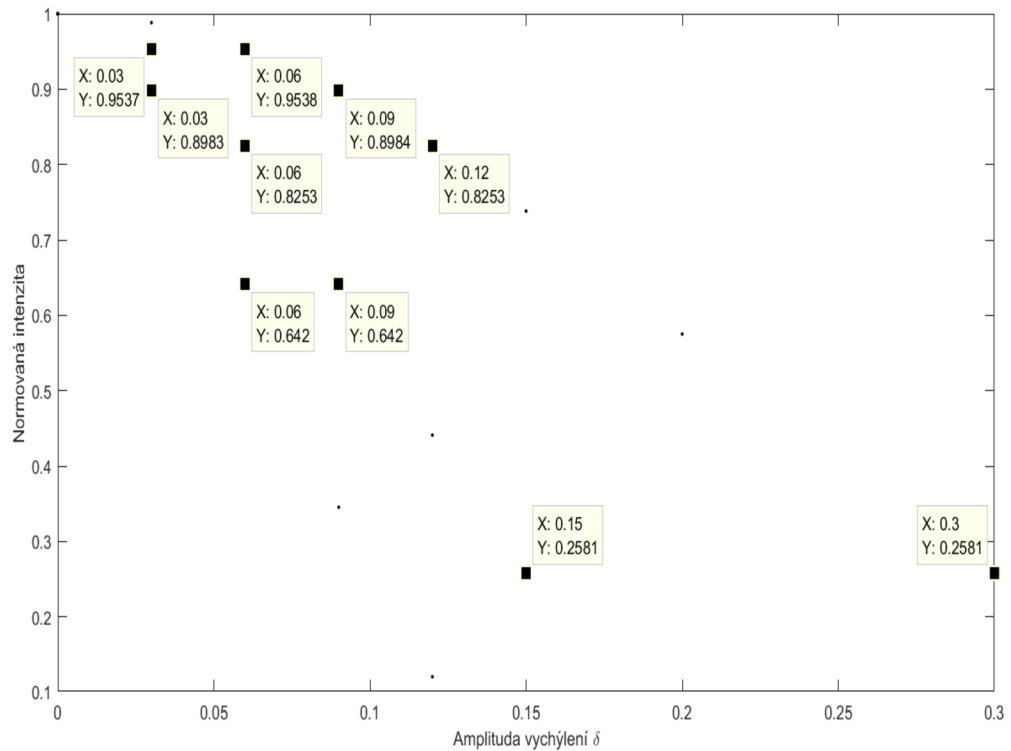
Obr. 2.10: Vykreslení funkce (2.13) pro různý počet otvorů  $n$  a různé hodnoty  $\delta$ , v rámci tří na sobě nezávislých sérií náhodných čísel  $\epsilon_j$ , kde byla zaznamenávána velikost jednotlivých maxim. U druhého a třetího maxima pro větší hodnoty  $\delta$  nebylo možné jednoznačně určit, zda se jednalo o pík, či šum. (a) 1. série, (b) 2. série, (c) 3. série.

Z obr. (2.10) bylo vypořováváno, že v případě malého počtu otvorů dochází k odchýlení od hodnoty určené statisticky významnějším souborem. S narůstajícím počtem otvorů  $n$  se tyto odchylky snižují – viz zelená a černá křivka, které jsou v rámci daného maxima téměř identické. Tyto odchylky lze vysvětlit tak, že v případě malého počtu otvorů se jedná o malý statistický soubor.



Obr. 2.11: Vykreslení závislosti velikosti tří nejbližších maxim pro všechny tři série náhodných čísel na amplitudě vychýlení  $\delta$ . Pro  $n = 5\,000$ . Získané hodnoty byly proloženy lomenou čarou za účelem zvýšení přehlednosti, pořadí maxim je stejné jako na obr. (2.10).

Vidíme, že tyto závislosti jsou pro daný řád maxima téměř identické. Jedná se tedy o obecnou zákonitost, kdy hodnota maxim píků pro určitou hodnotu  $\delta$  nezáleží na hodnotě  $\epsilon_j$ . V dalším tedy bude vykreslena závislost v rámci jedné série náhodných čísel. Počet otvorů  $n$  bude 5 000, volíme tak proto, že v případě tohoto počtu otvorů je soubor dostatečně statisticky významný. A také proto, že pro tento počet otvorů byl získán nejpřesnější výsledek.



Obr. 2.12: Vykreslení závislosti velikosti tří nejblížeších maxim v rámci jedné série náhodných čísel na amplitudě vychýlení  $\delta$ . Pro  $n = 5\,000$ . Vyznačeny jsou pouze body, které potvrzují platnost vztahu (2.14).

Závislost velikosti píků normované intenzity na amplitudě vychýlení  $\delta$  není náhodná, z obr. (2.12) lze vidět, že existují určité hodnoty  $\delta$ , pro které jsou hodnoty normované intenzity v různých řádech maxim sobě rovny. Z toho lze usoudit, že pokud chceme zjistit hodnotu normované intenzity „libovolného“ maxima, postupujeme takto

$$I_m\left(\frac{n}{m}\delta\right) = I_n(\delta), \quad (2.14)$$

kde  $I_m$  je intenzita píku, kterou chceme zjistit. Pak  $m, n$  jsou řady maxim každého z píků a platí  $n < m$ ,  $\delta$  má význam viz kap. 2.5. Daný vztah platí pro případ  $n < m$ . V případě, že tomu tak není a chceme zjistit hodnotu intenzity píku řádu nižšího než je nám známá hodnota intenzity píku vyššího řádu, pouze provedeme výměnu  $n \rightarrow m$  v rovnici (2.14). Daný vztah ovšem platí pouze za předpokladu, kdy maxima nejsou utlumena vlivem vysoké hodnoty  $\delta$ .



### 3 NÁHODNĚ ROZMÍSTĚNÉ OBJEKTY V ROVINĚ

Po vyšetření chování součtové funkce  $S(X, n)$  promítneme tento problém do rovinné oblasti. Případ náhodně rozmístěných otvorů v rovině je jednou z verzí tzv. „náhodné procházky“. Literatury zabývající se problematikou náhodné procházky v různých oblastech je obrovské množství, (viz např. [9], kap. 7, [10], nebo [11]). Uvažujme náhodné rozložení velkého počtu objektů v rovině, s těmito dvěma omezeními:

1. Žádné dva objekty nejsou příliš blízko u sebe, aby došlo k vzájemnému překryvu jejich apertur.
2. Žádné dva objekty nejsou příliš daleko od sebe, aby byla splněna podmínka Fraunhoferovy difrakce.

Podmínka (1) je splněna bezpodmínečně, neboť objekty uvažujeme jako bodové.

Podmínka (2) je splněna za předpokladu  $N_f \ll 1$ , kde  $N_f$  je Fresnelovo číslo definované vztahem

$$N_f = \frac{a^2}{\lambda z}, \quad (3.1)$$

kde  $a$  je poloměr kružnice zahrnující oblasti, kde má difrakční stínítko nenulové hodnoty funkce propustnosti,  $\lambda$  je vlnová délka dopadající vlny a  $z$  je vzdálenost difrakčního stínítka od roviny pozorování, (viz [1], 3.6(13)).

K tomuto problému bude nejprve přistupováno z hlediska statistické fyziky. Jak již bylo zmíněno v kap. 2.1 difrakce na identických stejně orientovaných objektech má vzhled, jako kdyby se jednalo o difrakci na jednom z objektů a faktorem který je dán geometrickým uspořádáním objektů.

V dalším uvažujme „velké“ množství náhodně rozmístěných objektů v rovinné oblasti, kde náhodně generovaná čísla mají uniformní rozdělení pravděpodobnosti.

Lze ukázat, že pro případ, kdy  $n \rightarrow \infty$ , lze rozložení intenzity vzniklé od náhodně rozmístěných objektů popsat statistikou (3.2), viz ([12], kap. 2.2).

Hustota pravděpodobnosti  $P_\rho$  detekce intenzity záření prošlého difrakčním stínítkem v oblasti o poloměru  $\rho$ , je dána Bernoulliho formulí [3], [13].

$$P_\rho = \frac{2}{n} \rho e^{-\frac{\rho^2}{n}}. \quad (3.2)$$

V dalším bylo využito získané hustoty pravděpodobnosti k vyjádření očekávané hodnoty intenzity

$$\langle |S(X, Y, n)|^2 \rangle = \int_0^\infty \rho^2 P_\rho d\rho = \frac{2}{n} \int_0^\infty \rho^3 e^{-\frac{\rho^2}{n}} d\rho = n. \quad (3.3)$$

Získaný výsledek ovšem neříká, že když je  $n$  „velké“ tak v případě jedné náhodné kombinace rozložení otvorů bude očekávaná hodnota intenzity rovna  $n$ , ale že v případě velkého počtu pokusů, kdy rozmístění otvorů jsou v každém pokusu na sobě nezávislá, tak výsledná hodnota očekávané hodnoty intenzity bude mít tendenci blížit se k  $n$ , [11].

Což je velmi důležitý výsledek, který říká, že mimo primární směr, ve kterém  $|S(0, 0, n)|^2 = n^2$ , je výsledný difrakční obrazec, vzniklý na náhodně uspořádaných objektech stejný jako  $n$  – násobek difrakce na objektu jediném. Tedy při pozorování obdržíme intenzitu, která s odchylkami bude odpovídat  $n$ . Zbývá zjistit, zda tato odchýlení jsou srovnatelná s hodnotami očekávané hodnoty. Pro tyto účely zde uvedeme hodnotu směrodatné odchylky  $\Delta(|S(X, Y, n)|^2)$

$$\Delta(|S(X, Y, n)|^2) = n. \quad (3.4)$$

Vidíme, že tato odchýlení od očekávané hodnoty jsou srovnatelná se samotnou hodnotou očekávané hodnoty bez ohledu na to, jak velké je  $n$  (viz [3], kap. 7.16).

Získané výsledky lze také interpretovat tak, že v blízkosti primárního směru, tedy když difrakční úhly jsou malé, je záření z apertur zcela korelováno. Naproti tomu daleko od primárního směru je naopak zcela nekorelováno. Pro přechodnou oblast nabývá  $|S(X, Y, n)|^2$  hodnot mezi 0 a  $n^2$ , a záření je tzv. částečně korelované. Jedná se tedy o jakousi kombinaci pravidelnosti a úplné náhody (viz [3], kap. 7.16).

Získané výsledky jsou aplikovatelné i pro případ náhodně rozmístěných otvorů ve čtvercové oblasti, dokonce je lze použít na zobecnění pro případ obecné dimenze prostoru [11].

Ze vztahu (2.3) vyplývá, že vzniklý difrakční obrazec je tvořen součinem Fourierovy transformace jediného z objektů a faktoru, který je dán pouze geometrickým uspořádáním objektů, což se do vzhledu difrakčního obrazce v případě náhodně rozmístěných otvorů promítne jako zrnitý obraz difrakce na jednom objektu. Tato zrnitost nachází jistou analogii v osvětlení drsného povrchu vysoce koherentním světlem. Pak vlny rozptýlené od opticky drsného povrchu nemají pouze náhodnou hodnotu fáze, ale i náhodnou hodnotu amplitudy. Interference těchto „defázovaných“ ale koherentních sekundárních vln dává vzniknout výslednému „granulovanému“ obrazci intenzity, což nejprve bylo považováno za nežádoucí, až do okamžiku, kdy bylo objeveno, že tyto *speckle* mohou nést informaci o drsnosti povrchu [14].

## 3.1 Teoretický model

Při vytváření modelu byl využit výsledek získaný v kap. 2.1, kdy v případě 2D, nabývá vztah (2.3) tvaru

$$FT \{f(x, y)\} = FT \{f_0(x, y)\} \sum_{j=1}^n \exp(-ik[x^j X + y^j Y]), \quad (3.5)$$

kde polohy otvorů  $x^j, y^j$  jsou zcela náhodné pouze s rozměrovým omezením daným velikostí modelované mřížky. Dále byly vytvořeny dva různé modely, které se lišily tvarem difrakční mřížky, tedy čtvercový a kruhový model. V případě čtvercového modelu byly body na mřížce rozmístěny náhodně do čtvercové oblasti o délce strany  $l$ , u kruhového modelu byly otvory rozmístěny náhodně do kruhové oblasti o poloměru  $\frac{l}{2}$ . S přihlédnutím ke tvaru funkce  $S(X, Y, n)$ , viz vztah (3.5), nabývá výraz pro hodnotu normované intenzity ke střední hodnotě tvaru

$$\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2 = \frac{1}{n} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^n \cos(kx^j X + ky^j Y) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^n \sin(kx^j X + ky^j Y) \right]^2 \right\},$$

kde faktor  $\frac{1}{n}$  byl zvolen kvůli normování střední hodnoty k hodnotě 1. Velikost vykreslovací oblasti byla stejná jako v kap. 2.4.

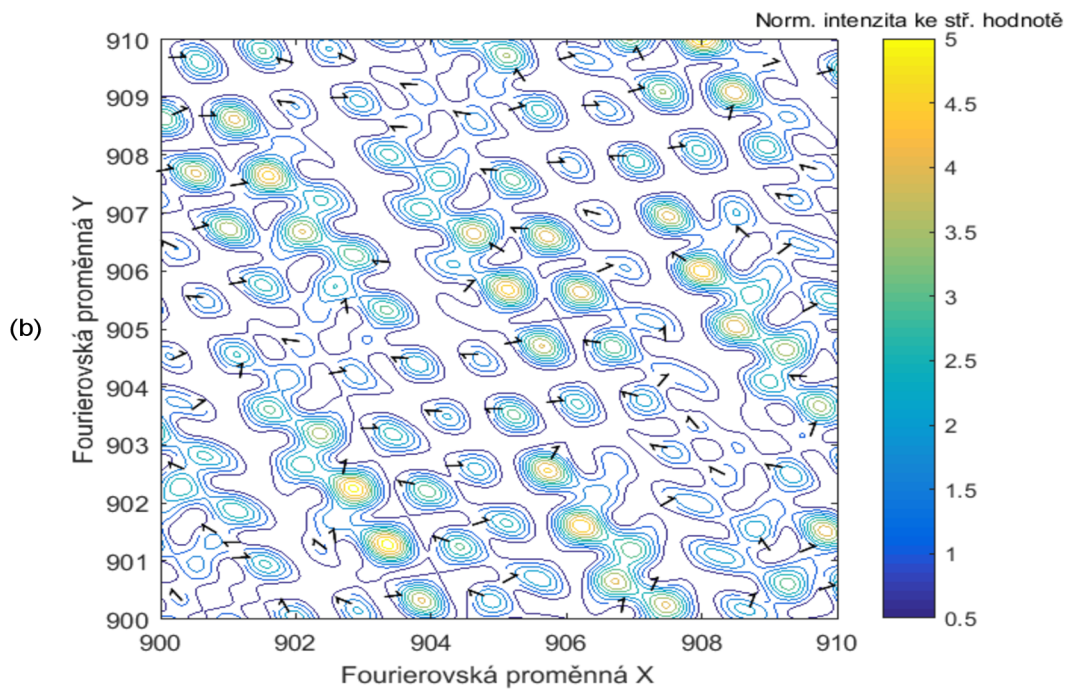
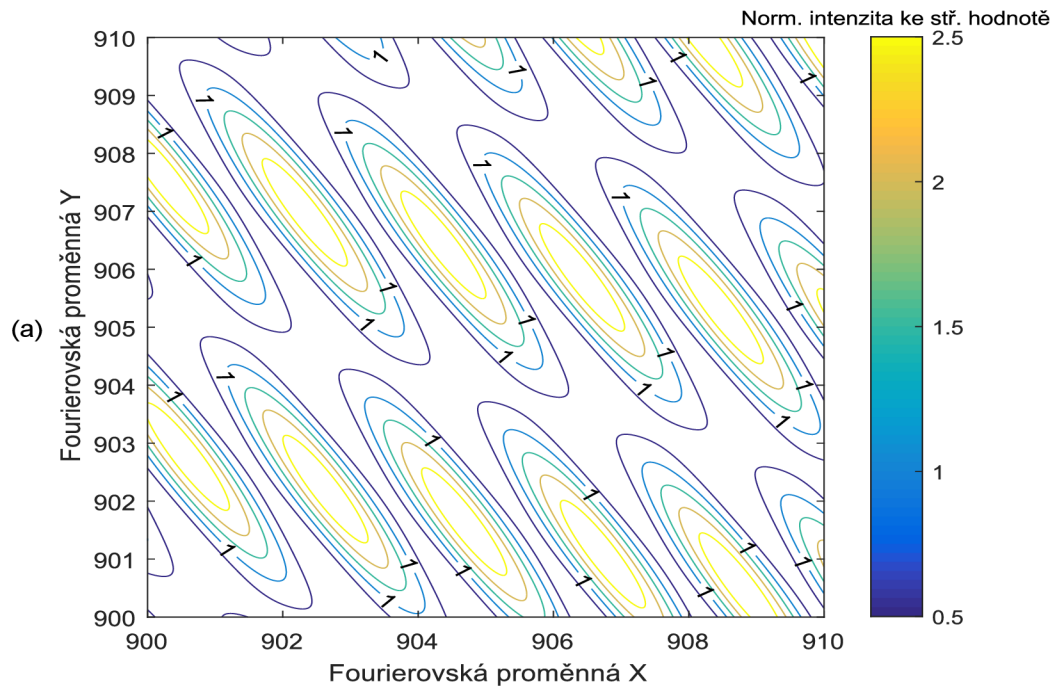
### 3.1.1 Čtvercový model

Polohu jednotlivých otvorů ve čtvercové oblasti o délce strany  $l$  charakterizuje výraz

$$\begin{aligned} x^j &= l \cdot \epsilon_{j,1}, \\ y^j &= l \cdot \epsilon_{j,2}, \end{aligned}$$

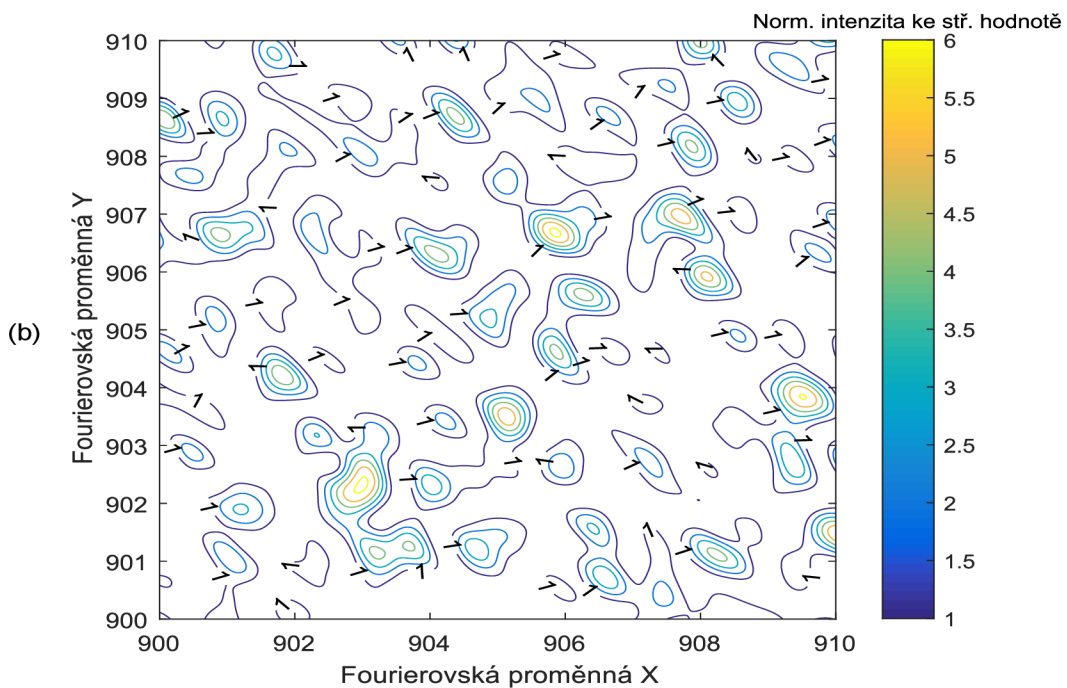
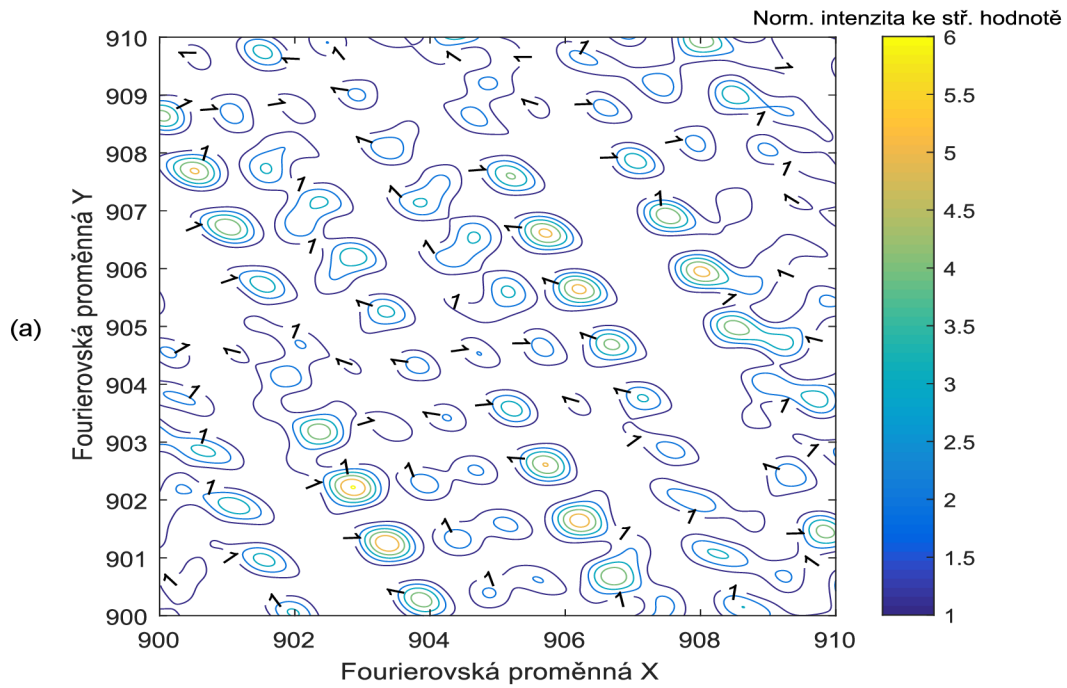
kde  $\epsilon_{j_1}, \epsilon_{j_2} \in \langle -1; 1 \rangle$  jsou náhodně generovaná čísla.





Obr. 3.1: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory ve čtvercové oblasti o délce strany deseti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 3$ , (b)  $n = 6$ .





Obr. 3.2: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory ve čtvercové oblasti o délce strany deseti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 7$ , (b)  $n = 14$ .

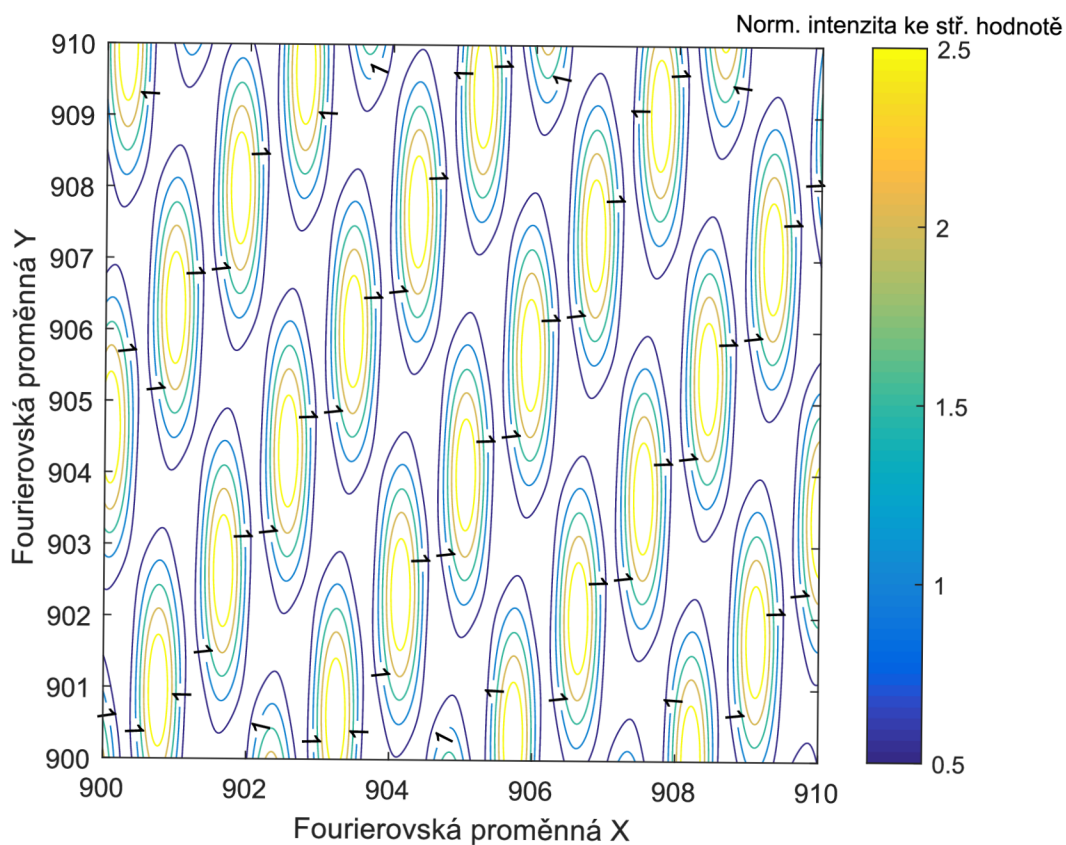
### 3.1.2 Kruhový model

Polohu jednotlivých otvorů v kruhové oblasti o poloměru  $r = \frac{l}{2}$  charakterizuje výraz

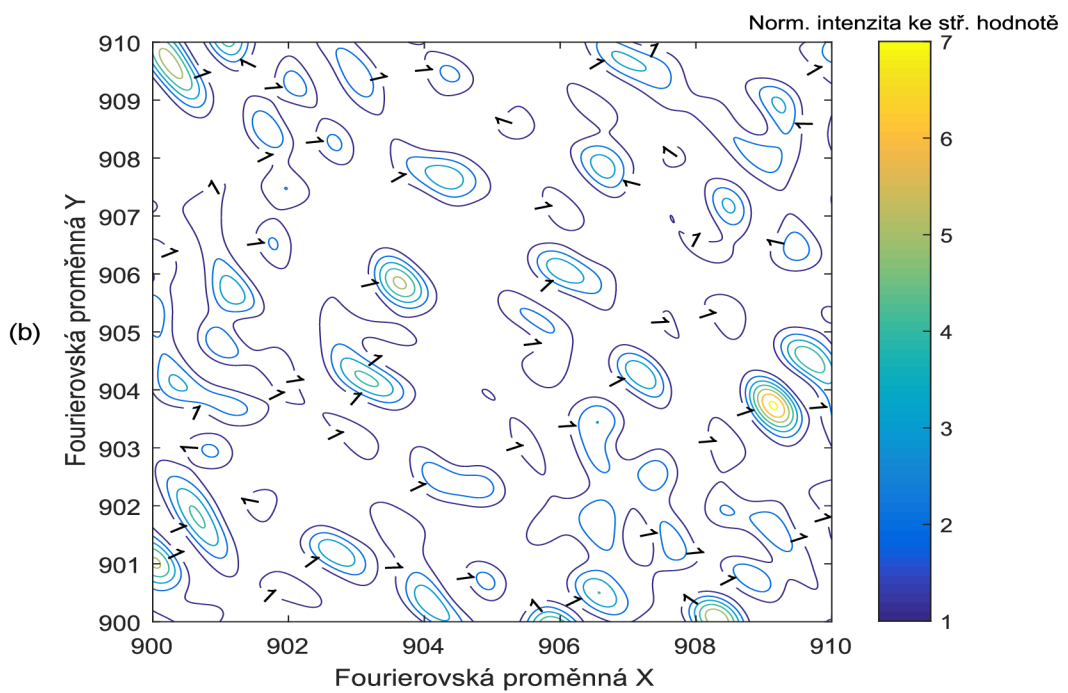
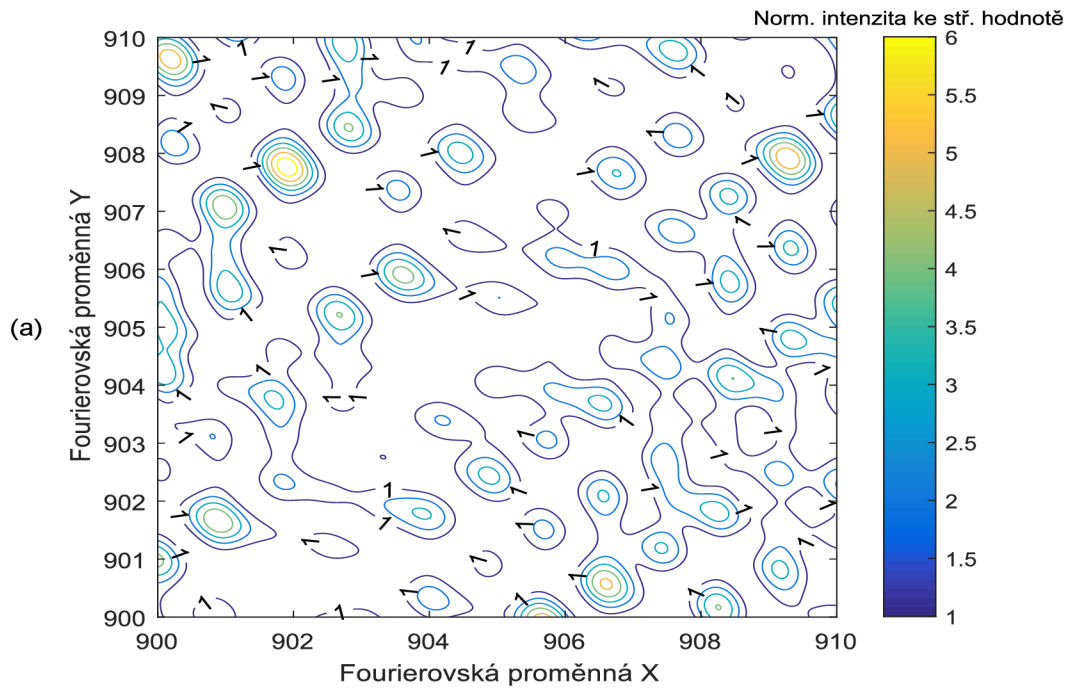
$$x^j = r \cdot \sqrt{\epsilon_{j,1}} \cdot \cos(2\pi \cdot \epsilon_{j,2}),$$

$$y^j = r \cdot \sqrt{\epsilon_{j,1}} \cdot \sin(2\pi \cdot \epsilon_{j,2}),$$

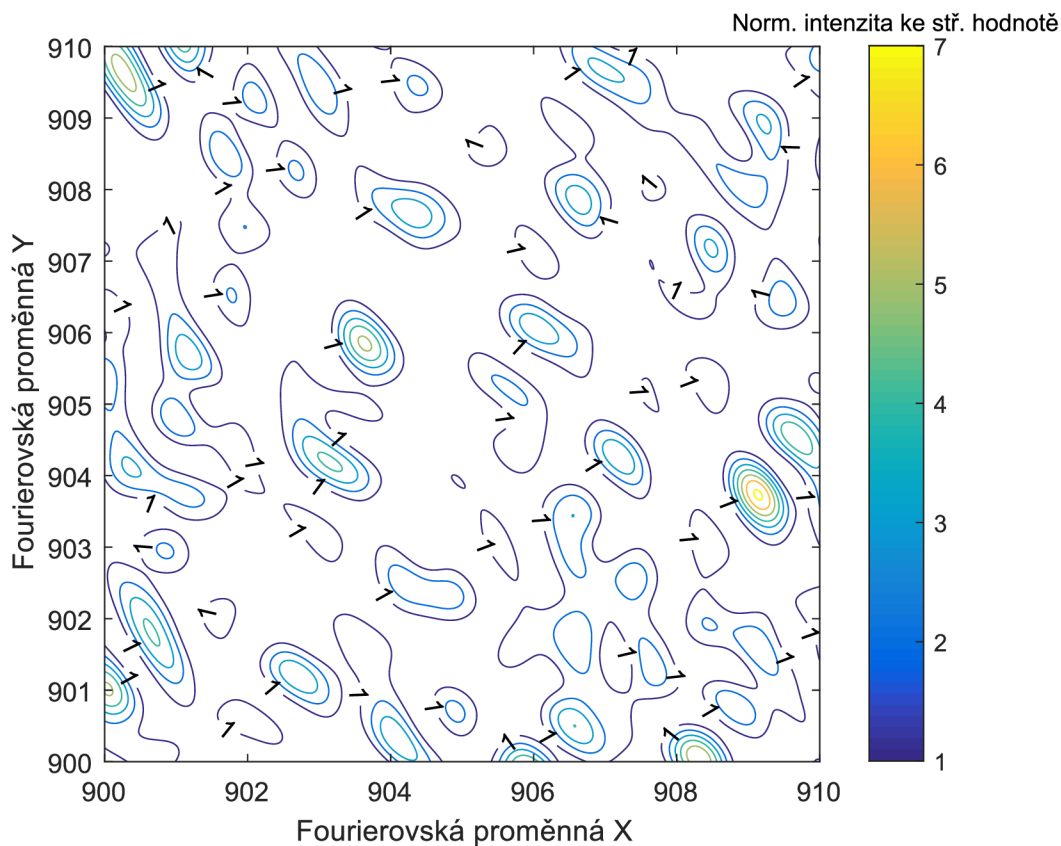
kde  $\epsilon_{j,1}, \epsilon_{j,2} \in \langle 0; 1 \rangle$  jsou náhodně generovaná čísla.



Obr. 3.3: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory v kruhové oblasti o poloměru pěti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů.  $n = 3$ .

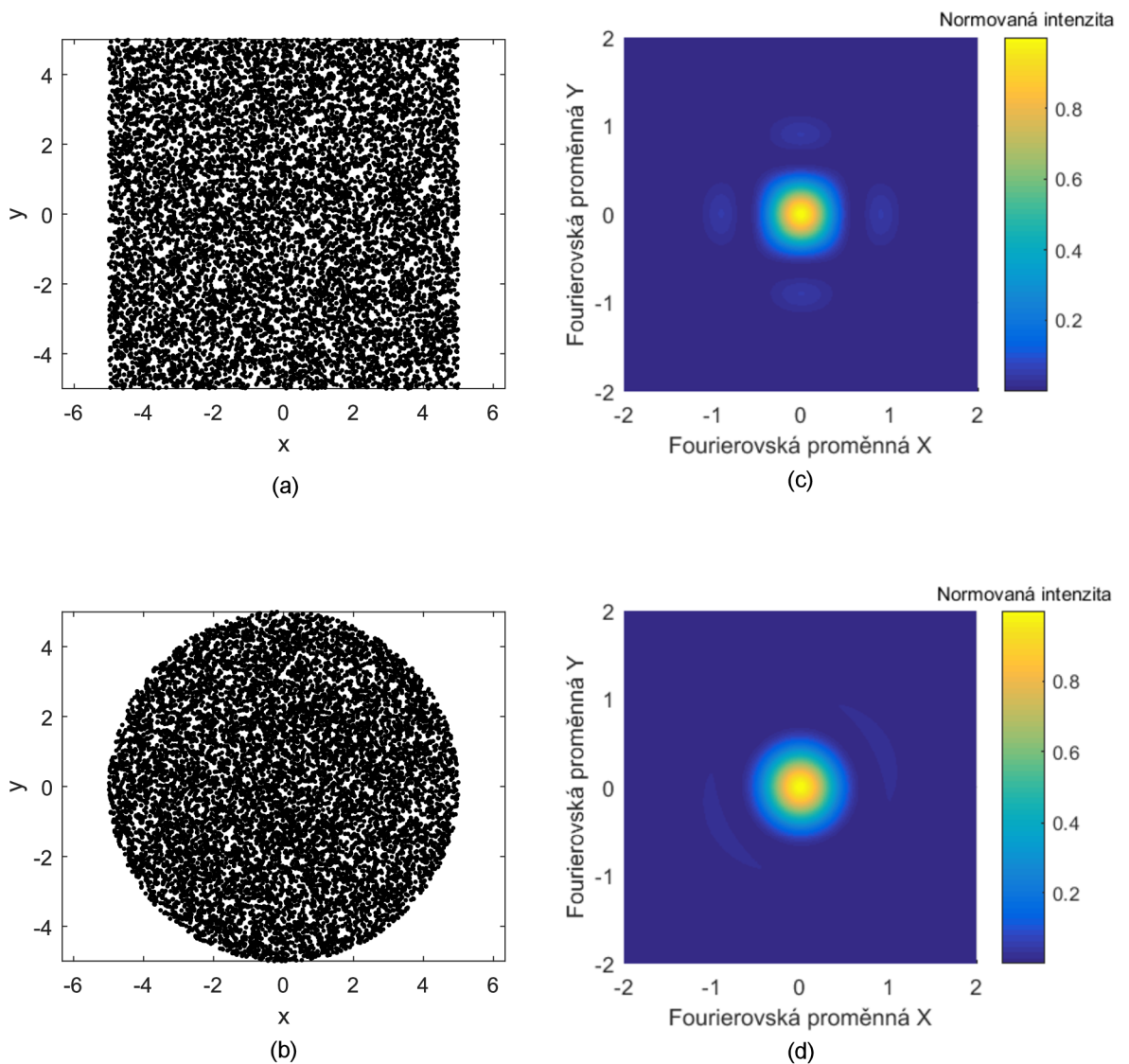


Obr. 3.4: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory v kruhové oblasti o poloměru pěti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 6$ , (b)  $n = 7$ .



Obr. 3.5: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory v kruhové oblasti o poloměru pěti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána.  $n = 14$ .

Z výsledků modelů získaných v kap. (3.1.1), resp. (3.1.2) vidíme, že pro malé hodnoty  $n$  převládá vliv počtu otvorů nad vlivem uspořádání. Tedy zpočátku lze vidět v obrazcích určitou pravidelnost, která se postupně „rozpadá“ až do okamžiku, kdy soubor nabude statistické významnosti. Pak začne převládat vliv uspořádání nad počtem otvorů a počet otvorů  $n$  nebude signifikantním faktorem zodpovědným za vzhled obrazců. Vidíme ale také to, že tvar modelované oblasti nemá vliv na velikost, či tvar „fleků“ ve vzniklém obrazci. Tvar modelované oblasti se projeví pouze co do vzhledu centrálního píku, který odpovídá difrakci na mřížce jako celku, tedy na čtverci, resp. kruhu.



Obr. 3.6: (a) Mřížka pro 10 000 náhodně rozmístěných otvorů ve čtvercové oblasti o délce strany deseti jednotek, (b) mřížka pro 10 000 náhodně rozmístěných otvorů v kruhové oblasti o poloměru pěti jednotek, (c), (d) vzhled centrálního píku normované intenzity  $\frac{1}{n^2} |S(X, Y, n)|^2$ .



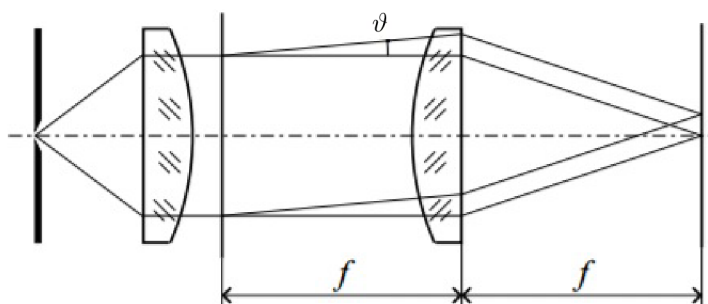


## 4 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

V této kapitole bude blíže podána experimentální realizace Fraunhoferovy difrakce, společně s prokázáním souhlasu teorie a experimentu.

### 4.1 Experiment

Výsledkem Fraunhoferovy difrakce je rozložení intenzity jako funkce směru. Jednotlivým difrakčním směrům pak odpovídají body nevlastní roviny. To znamená, že difrakční obrazec lze pozorovat v  $\infty$ . V praxi lze difrakční obrazce pozorovat i v konečné vzdálenosti, ale ohybové jevy mohou mít příliš velkou plochu, což bývá dosti nepraktické pro detekci. Proto bylo využito optických vlastností spojných čoček, která provede fokusaci obrazů nevlastní roviny do své obrazové ohniskové roviny (viz [1], kap. 2.4).



Obr. 4.1: Experimentální uspořádání, při němž rozložení intenzity ve Fraunhoferově difrakčním obrazci odpovídá čtverci modulu Fourierovy transformace funkce propustnosti objektu, převzato z [4].

V kap. 2.1 bylo ukázáno, jak vypadá Fourierova transformace posunutého objektu. Jelikož se při Fraunhoferově difrakci zajímáme pouze o intenzitu záření, dostáváme (viz [4], kap. 9.1(3)).

$$|FT \{f(\vec{x})\}|^2 = |FT \{f(\vec{x} - \vec{x}^0)\}|^2. \quad (4.1)$$

Posunutí objektu nemá vliv na rozložení intenzity difrakčního obrazce a jeho vzhled se tedy nemění, což je důležitý výsledek který říká, že v prostoru mezi kolimující a fokusující čočkou nemusíme objekt nějak centrovat vzhledem k optické ose. Také to umožňuje poznat, kdy se jedná o Fraunhoferovu difrakci. Pohybem objektu v rámci kolimovaného svazku světla, aniž objekt byl nakloněn či natočen, v případě, že se difrakční obrazec nemění, jedná se o Fraunhoferovu difrakci (viz [4], kap. 9.1).

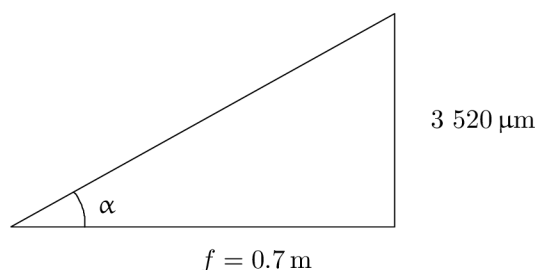
## 4.2 Provedení experimentu

Snímky difrakčních jevů byly pořízeny na optické lavici na Ústavu fyzikálního inženýrství VUT v Brně. Jako záznamové medium byla použita kamera Imaging Source DFK 51AU02, připojená prostřednictvím USB portu k počítači a výsledný snímek byl zobrazen v programu IC Capture.

Ze zdroje záření, představovaného He – Ne laserem o vlnové délce  $\lambda = 632 \text{ nm}$  a výkonu  $P = 15 \text{ mW}$ , vychází koherentní svazek. Ten pro účely rovnoměrného osvětlení difrakčního stínítka byl „roztážen“ prostřednictvím prostorového filtru. Hlavním důvodem proč umístíme do experimentální sestavy prostorový filtr je, že umožňuje odstranit vady, které zhoršují vnitřní strukturu svazku. Obvykle se jedná o vady způsobené např. nečistotami ulpěnými na optických prvcích, či mechanickými vadami na skle optických prvků. Tyto vady se ve spektru prostorových frekvencí vyskytují ve vysokofrekvenční oblasti. Pak vhodným filtrem typu dolní propust jsme schopni tyto frekvence odstranit a propustit jen frekvence odpovídající intenzitě svazku. Z prostorového filtru pak vychází kulová vlna, která dále dopadá na spojnou čočku o ohniskové vzdálenosti  $f = 0.7 \text{ m}$ . Po průchodu čočkou, která slouží jako kolimátor svazku dopadá na difrakční stínítko kolimovaný svazek. Fraunhoferova difrakce byla pozorována prostřednictvím spojné čočky o  $f = 0.7 \text{ m}$ . Do ohniskové roviny čočky byla umístěna kamera a zaznamenán difrakční obrazec. Při experimentování byly výsledné snímky značně přexponované, pro tyto účely byly použity polarizační filtry, které zvýšily expoziční dobu. Ze znalostí parametrů kamery bylo určeno měřítko difrakčních jevů. Rozlišení kamery bylo  $1\,600 \times 1\,200$  pixelů. Velikost jednoho pixelu byla  $4.4 \mu\text{m}$ . Pak velikost úhlu  $\alpha$  viz obr. (4.2) byla stanovena jako

$$\tan \alpha = \frac{1 \text{ Rozlišení} \cdot \text{Velikost pixelu}}{2 f},$$

kde  $f$  je ohnisková vzdálenost čočky.

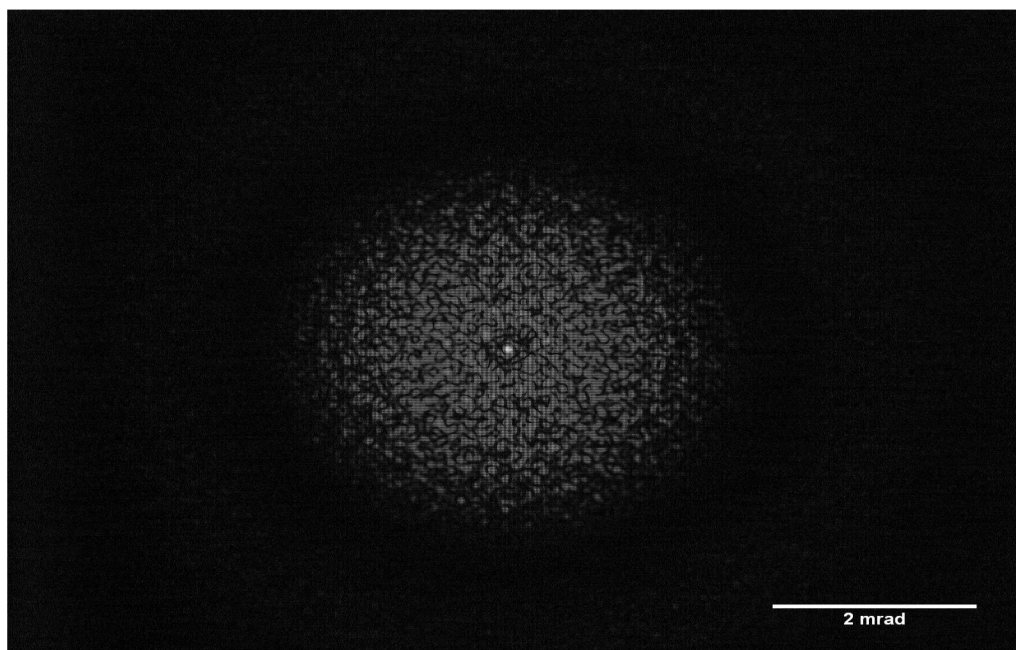


Obr. 4.2: Princip výpočtu měřítka.



### 4.3 Obrazová část

(a)

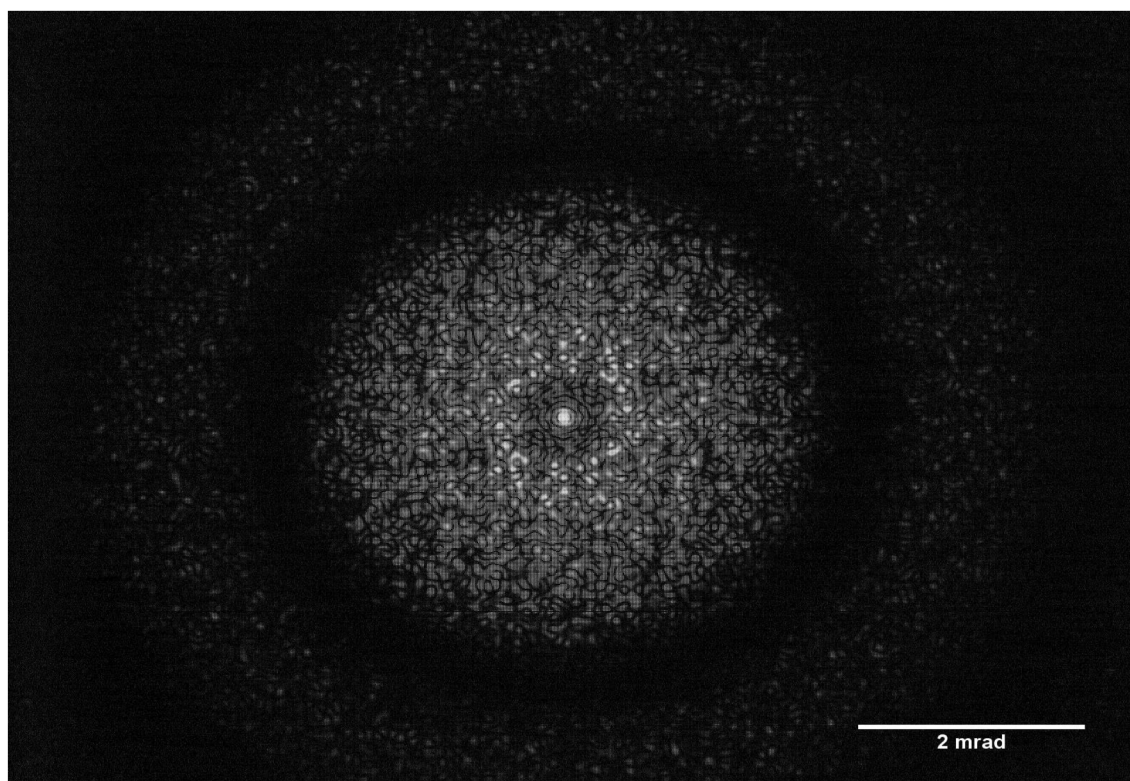


(b)



Obr. 4.3: (a) Fraunhoferova difrakce na 25 náhodně rozmístěných otvorech, (b) difrakční maska. Poloměr masky  $R = 1.5$  cm, poloměr oblasti ve které byly rozmístěny otvory  $R' = 0.6$  cm, poloměr každého kruhového otvoru  $r = 0.15$  mm.

(a)

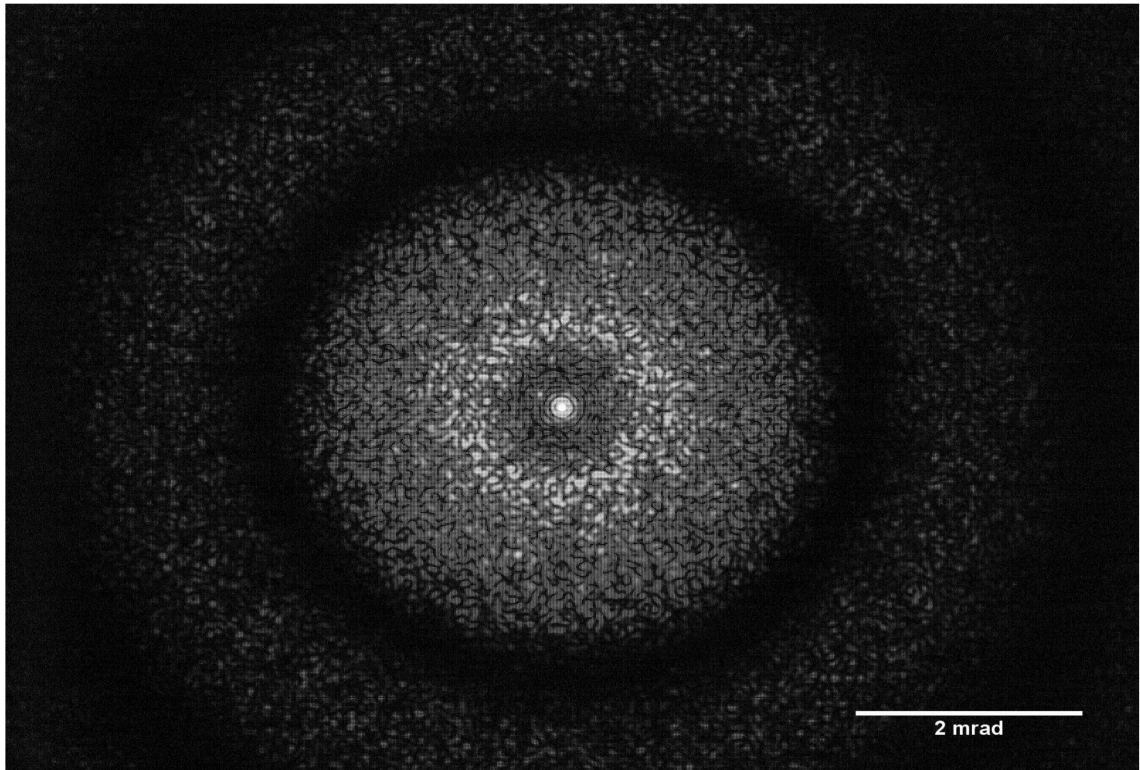


(b)

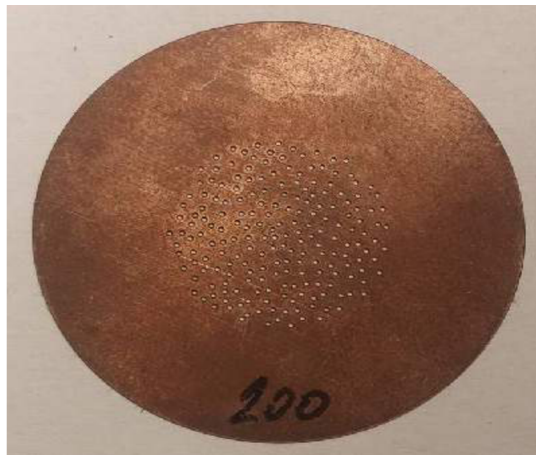


Obr. 4.4: (a) Fraunhoferova difrakce na 50 náhodně rozmístěných symetrických dvojicích otvorů, (b) difrakční maska. Poloměr masky  $R = 1.5$  cm, poloměr oblasti ve které byly rozmístěny otvory  $R' = 0.7$  cm, poloměr každého kruhového otvoru  $r = 0.15$  mm.

(a)



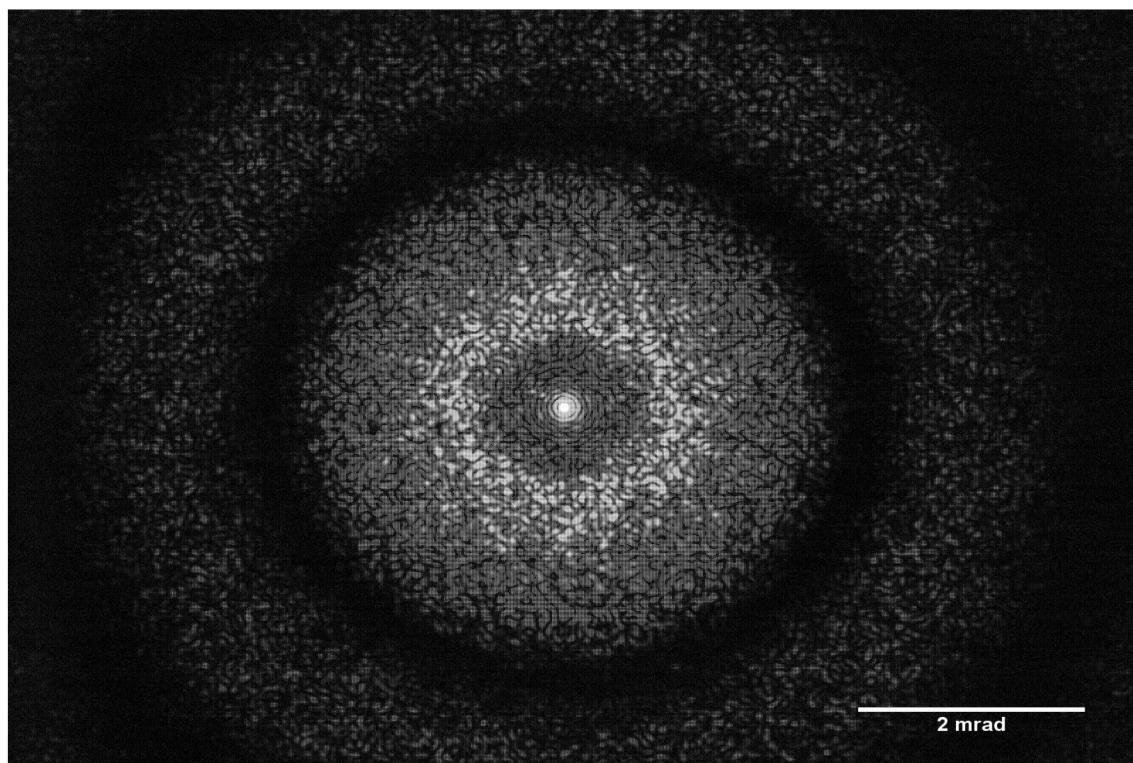
(b)



Obr. 4.5: (a) Fraunhoferova difrakce na 200 náhodně rozmístěných otvorech, (b) difrakční maska. Poloměr masky  $R = 1.5$  cm, poloměr oblasti ve které byly rozmístěny otvory  $R' = 0.7$  cm, poloměr každého kruhového otvoru  $r = 0.15$  mm.



(a)

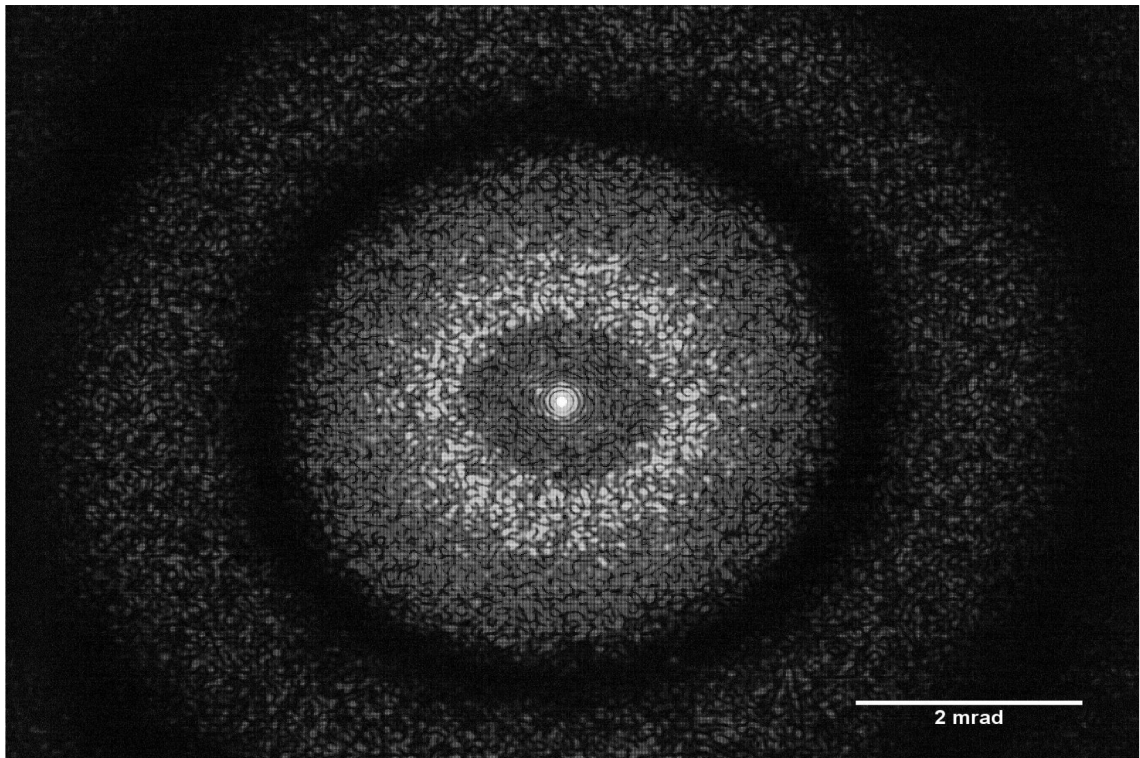


(b)



Obr. 4.6: (a) Fraunhoferova difrakce na 300 náhodně rozmístěných otvorech, (b) difrakční maska. Poloměr masky  $R = 1.5$  cm, poloměr oblasti ve které byly rozmístěny otvory  $R' = 0.7$  cm, poloměr každého kruhového otvoru  $r = 0.15$  mm.

(a)



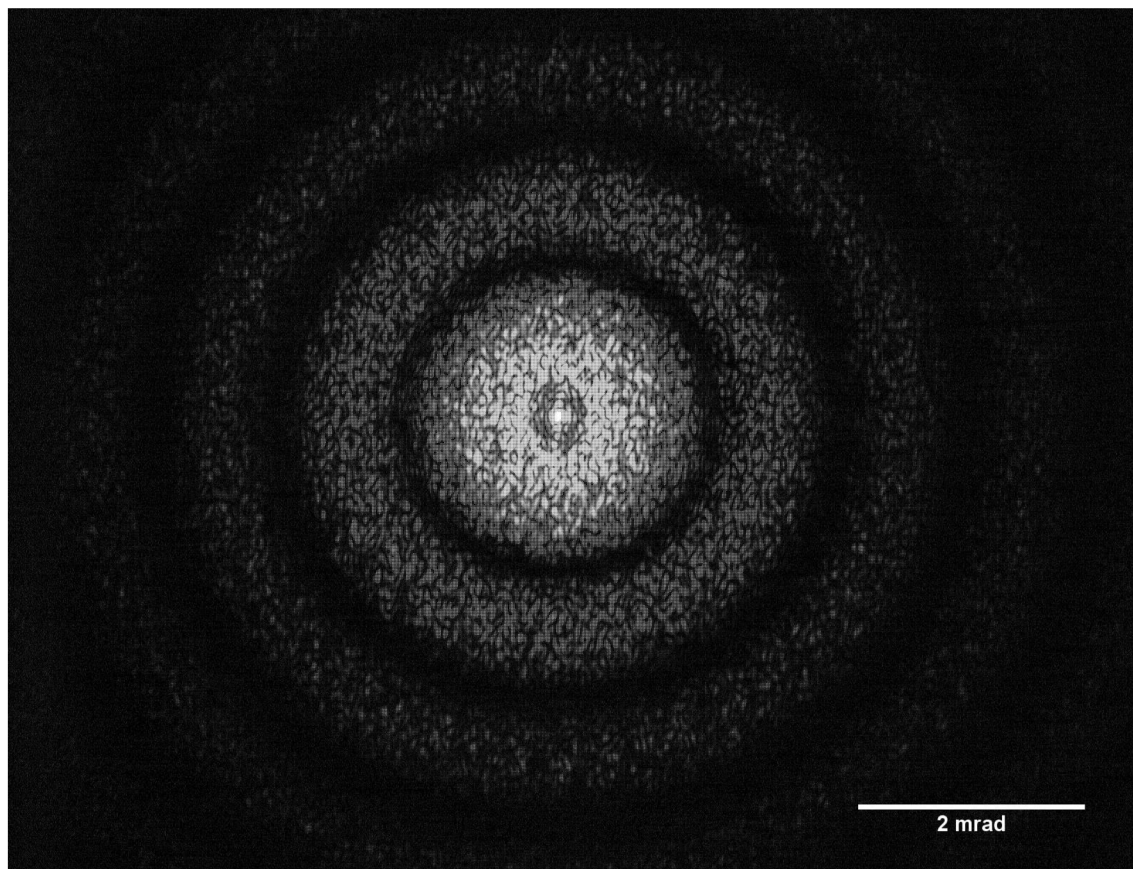
(b)



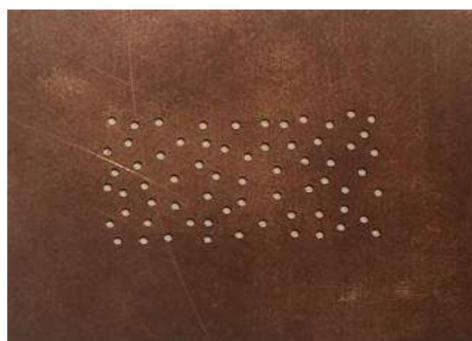
Obr. 4.7: (a) Fraunhoferova difrakce na 400 náhodně rozmístěných otvorech, (b) difrakční maska. Poloměr masky  $R = 1.5$  cm, poloměr oblasti ve které byly rozmístěny otvory  $R' = 0.7$  cm, poloměr každého kruhového otvoru  $r = 0.15$  mm.



(a)



(b)



Obr. 4.8: (a) Fraunhoferova difrakce na 70 náhodně rozmístěných otvorech, (b) difrakční maska. Rozměry masky 3.5 cm a 2.5 cm. Rozměry oblasti ve které byly rozmístěny otvory 2 cm a 1 cm, poloměr každého kruhového otvoru  $r = 0.3$  mm.

## 5 ZÁVĚR

V bakalářské práci byla nejprve podána definice pojmu difrakce. Dále byla vysvětlena souvislost Fraunhoferovy difrakce s Fourierovou transformací. V dalším byly představeny modely pravidelně a náhodně rozmístěných otvorů. Z výsledků získaných v kap. 2.4 je prokázána nezávislost vlivu počtu náhodně rozmístěných otvorů na vzhledu difrakčního obrazce, což bylo prokázáno na třech na sobě nezávislých výběrech náhodných čísel. Jedním z ústředních bodů práce bylo stanovení odchylek od pravidelného rozmístění otvorů. Vypozorovaná závislost je přinejmenším velmi překvapivá a její popis je uveden v kap. 2.5. V dalším byl zkoumán případ náhodně rozmístěných otvorů v rovinné oblasti. Společně s vlivem počtu otvorů, případně s vlivem tvaru rovinné oblasti na vzhled difrakčních obrazců. Vliv tvaru oblasti ve které rozmísťujeme otvory byl zkoumán na modelu náhodně rozmístěných otvorů ve čtvercové a kruhové oblasti. Obě tyto závislosti se prokázaly být negativní. V experimentální části byla představena experimentální realizace Fraunhoferovy difrakce. V obrazové části byly umístěny snímky Fraunhoferovy difrakce na náhodně rozmístěných otvorech. Tyto snímky slouží jako potvrzení výsledků získaných v předchozích částech. V dodatku byly umístěny další grafy jednotlivých modelů.





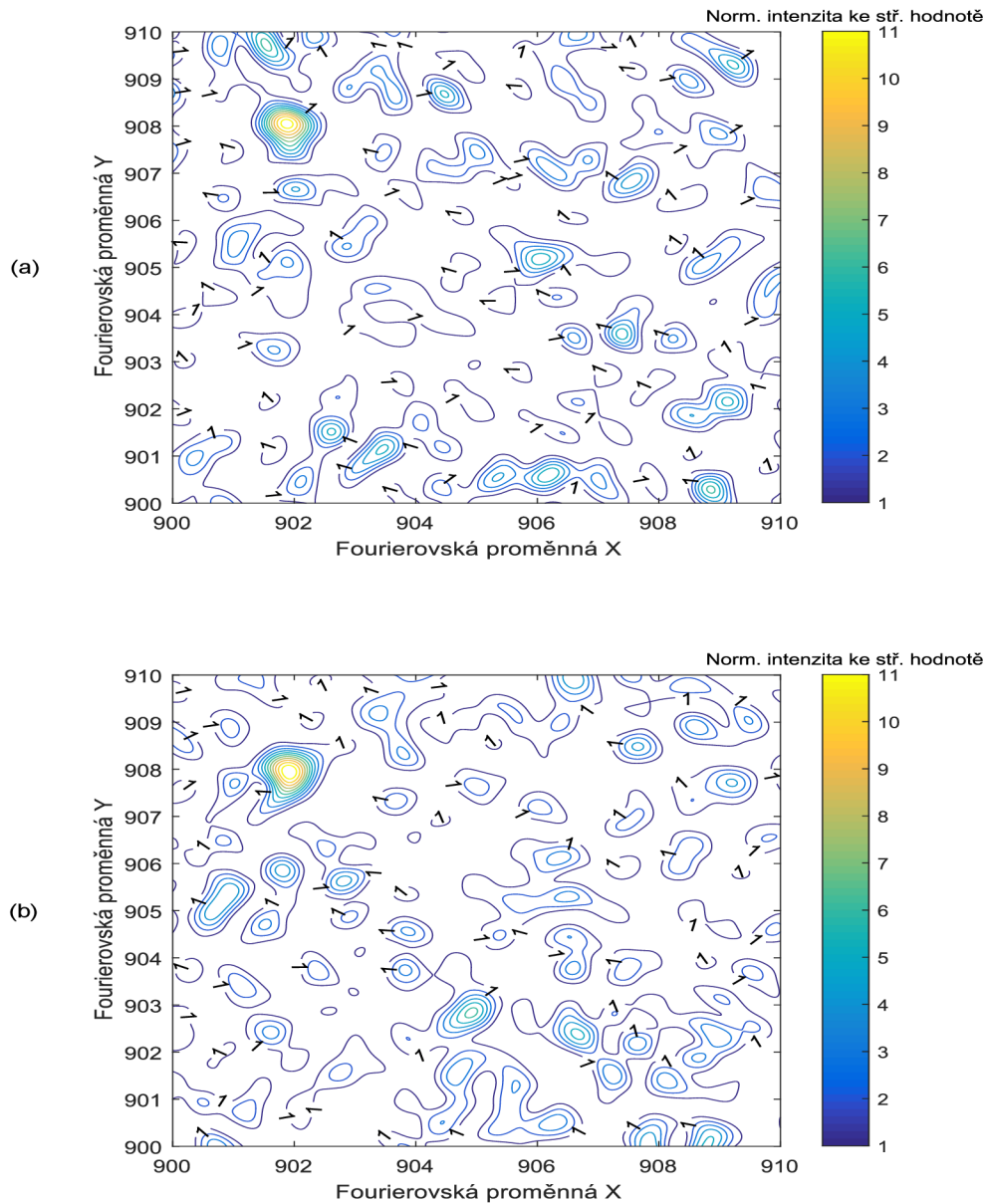
## LITERATURA

- [1] KOMRSKA, Jiří. Vlnová optika: část Difrakce světla: přednášky pro 4. ročník oborů "Fyzikální inženýrství" a "Přesná mechanika a optika" na FSI VUT v Brně. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2822-8.
- [2] MAIN, Iain G. Kmity a vlny ve fyzice: celostátní vysokoškolská příručka pro stud. matematicko-fyzikálních a přírodovědeckých fakult, skupiny stud. oborů matematicko-fyzikální vědy. Praha: Academia, 1990, s. 298-299. ISBN 8020002723.
- [3] STONE, John M. Radiation and optics: an introduction to the classical theory. New York: McGraw-Hill, 1963.
- [4] KOMRSKA, Jiří. Fourierovské metody v teorii difrakce a ve strukturní analýze: přednášky pro 3. ročník oboru "Fyzikální inženýrství" a 4. ročník oboru "Přesná mechanika a optika" na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3532-2.
- [5] KOMRSKA, Jiří. Proč Fourierova transformace dobře popisuje Fraunhoferovu difrakci. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie [online]. 1984 (Volume 29, No. 6), 321-338 [cit. 2017-04-18]. Dostupné z: <http://dml.cz/dmlcz/138849>.
- [6] LIPSON, Stephen G, Henry LIPSON a David Stefan TANNHAUSER. Optical Physics. 3. vyd. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 495 s. ISBN 0521436311.
- [7] RAYLEIGH, Lord. On the light emitted from a random distribution of luminous sources. Philosophical Magazine Series 6 [online]. 1918, 36(216), 429-449 [cit. 2017-04-18]. DOI: 10.1080/14786441208635852. ISSN 19415982. Dostupné z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786441208635852>.
- [8] TALBOT, J H. Fraunhofer diffraction pattern of a random distribution of identical apertures in a plane screen. Proceedings of the Physical Society [online]. 1966, 89(4), 1043-1053 [cit. 2017-04-18]. DOI: 10.1088/0370-1328/89/4/327. ISSN 03701328. Dostupné z: <http://stacks.iop.org/0370-1328/89>.
- [9] KENNARD, Earle H.: "Kinetic Theory of Gases", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1938, s. 267-272.
- [10] CHANDRASEKHAR, S. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. Reviews of Modern Physics [online]. 4301, 15(1), 1-89 [cit. 2017-04-18]. DOI: 10.1103/RevModPhys.15.1. ISSN 00346861. Dostupné z: <https://facultystaff.richmond.edu>

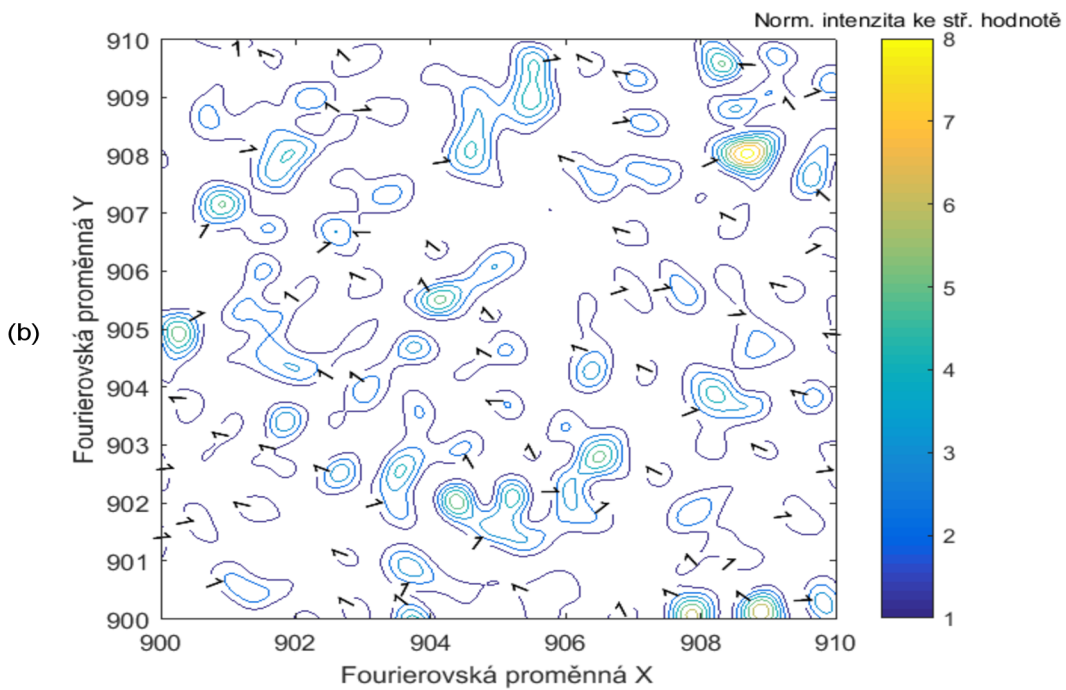
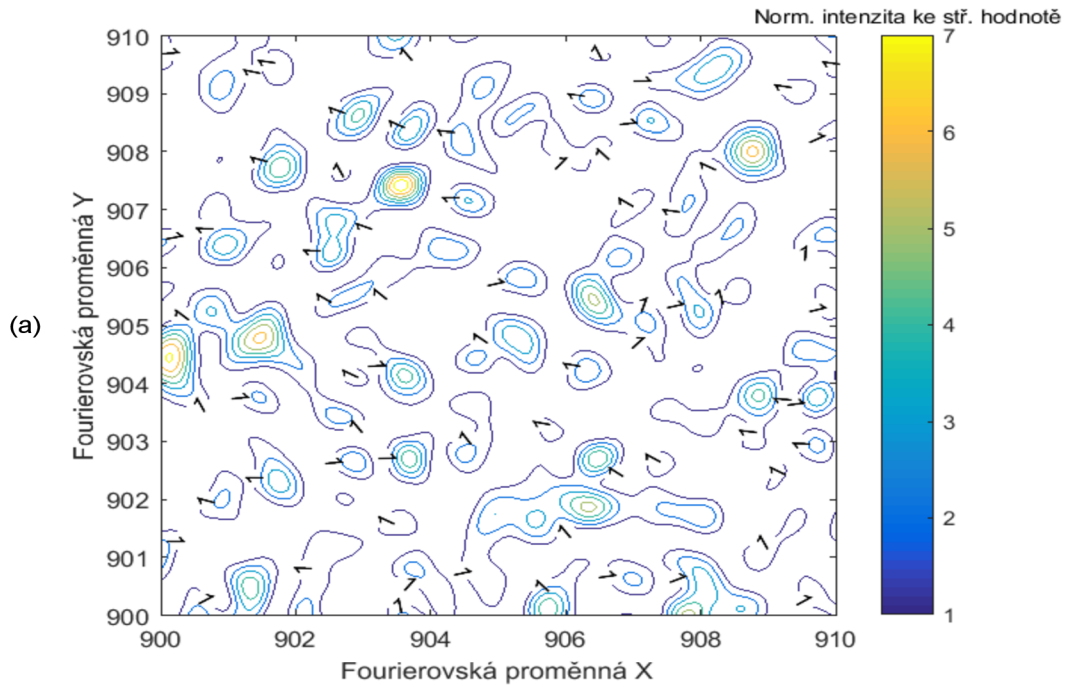
- [11] RAYLEIGH, John William Strutt. The Theory of Sound I. 2nd Edition Revised and Enlarged. New York: Dover Publications, 1945, s. 35-42. ISBN 0486602923.
- [12] GOODMAN, Joseph W. Speckle phenomena in optics: theory and applications. 1. Englewood, Colo.: Roberts and Co., c2007. ISBN 0974707791.
- [13] STRUTT, J. (2009). On James Bernoulli's Theorem in Probabilities. In Scientific Papers (Cambridge Library Collection - Mathematics, pp. 370-375). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511703997.048.
- [14] TIZIANI, H. J. Speckle metrology [online]. 1. New York: Academic Press, 1978, s. 5-9 [cit. 2017-05-02]. ISBN 0122413601. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com>

# DODATKY

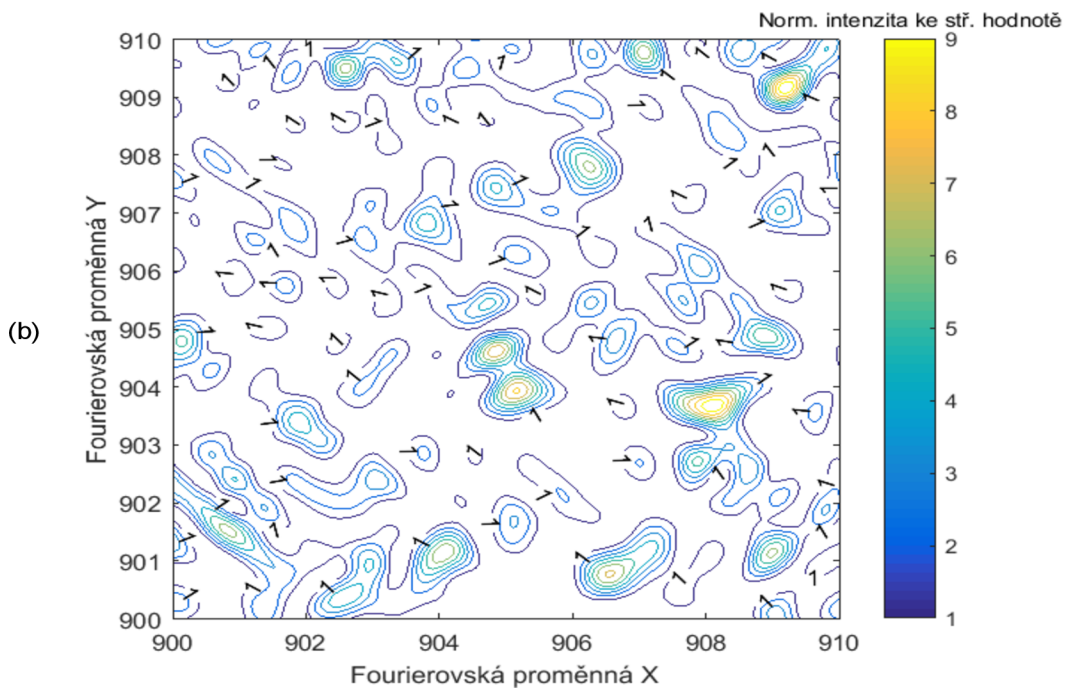
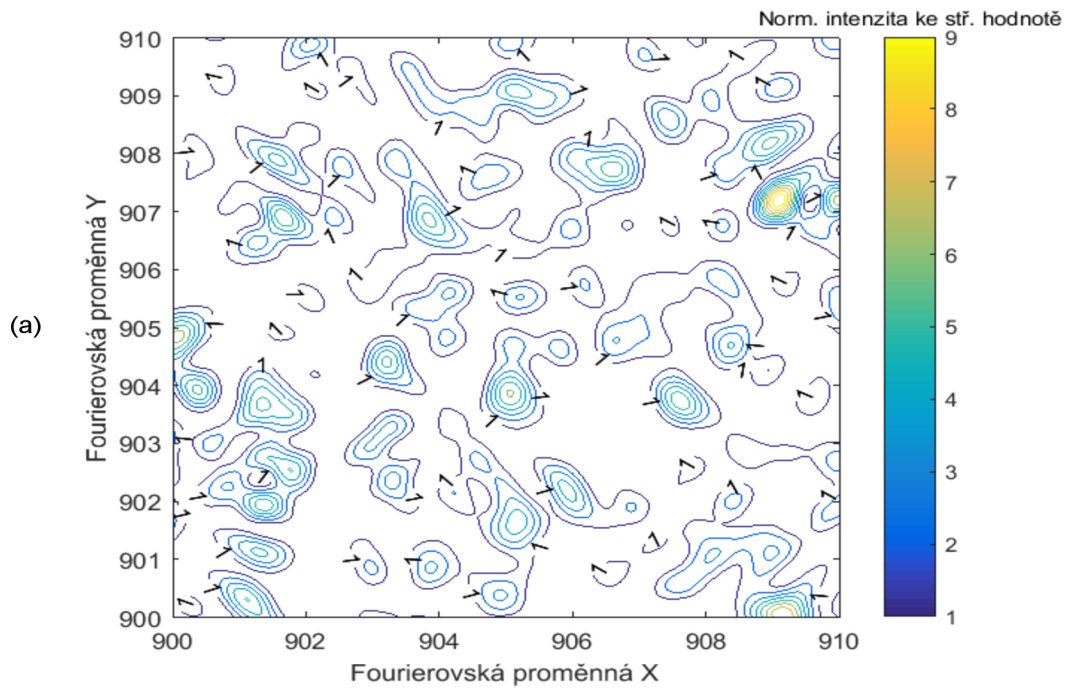
## Dodatek A - Grafy čtvercového modelu



Obr. A.1: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory ve čtvercové oblasti o délce strany deseti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 158$ , (b)  $n = 357$ .

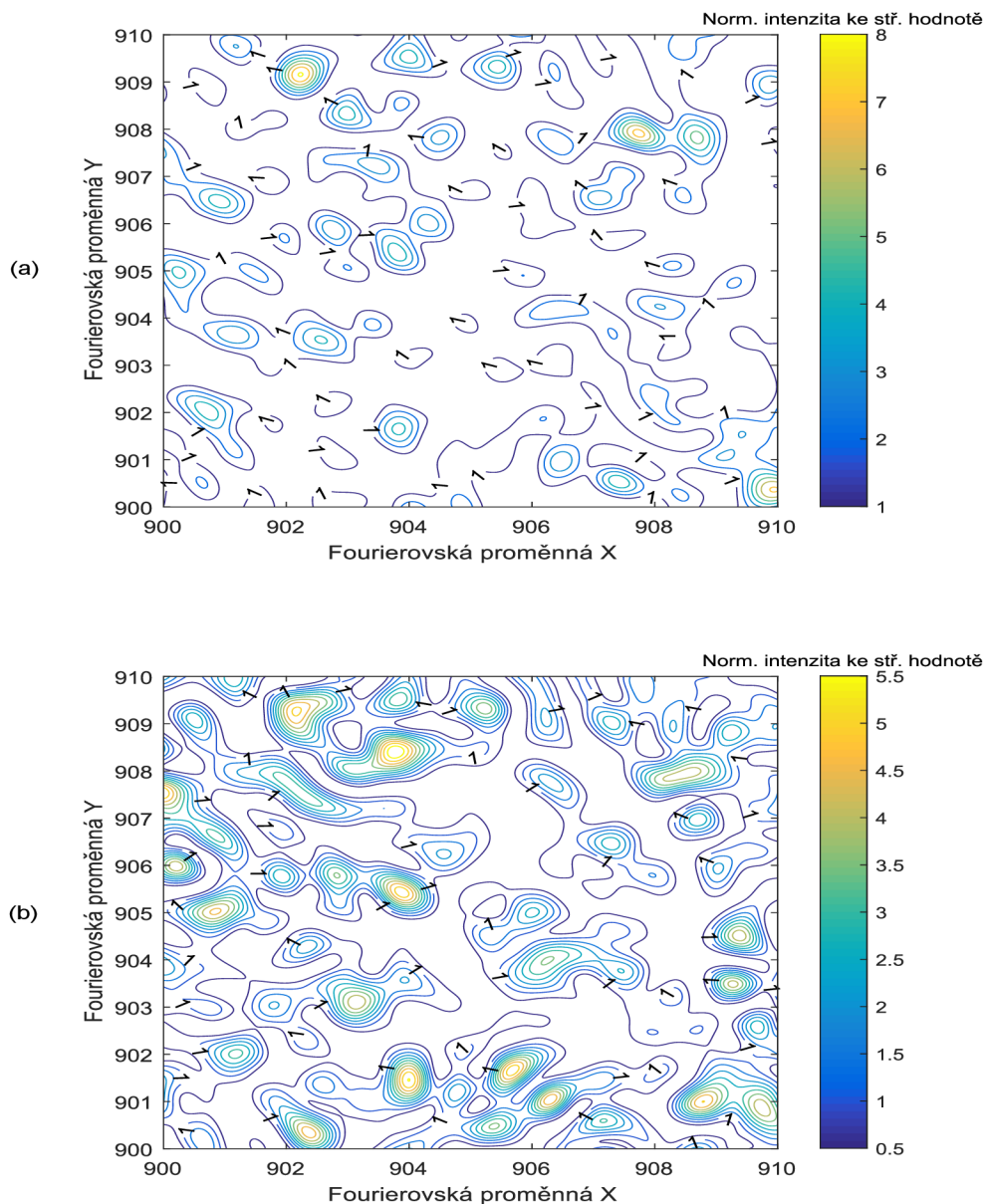


Obr. A.2: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory ve čtvercové oblasti o délce strany deseti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 1\,500$ , (b)  $n = 5\,000$ .



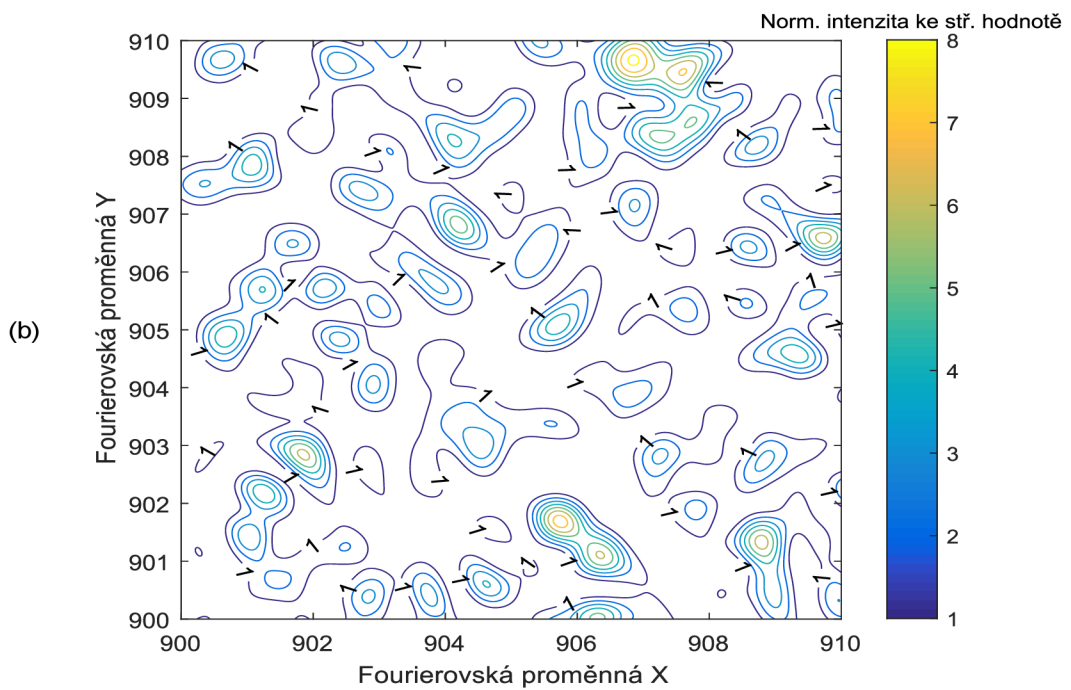
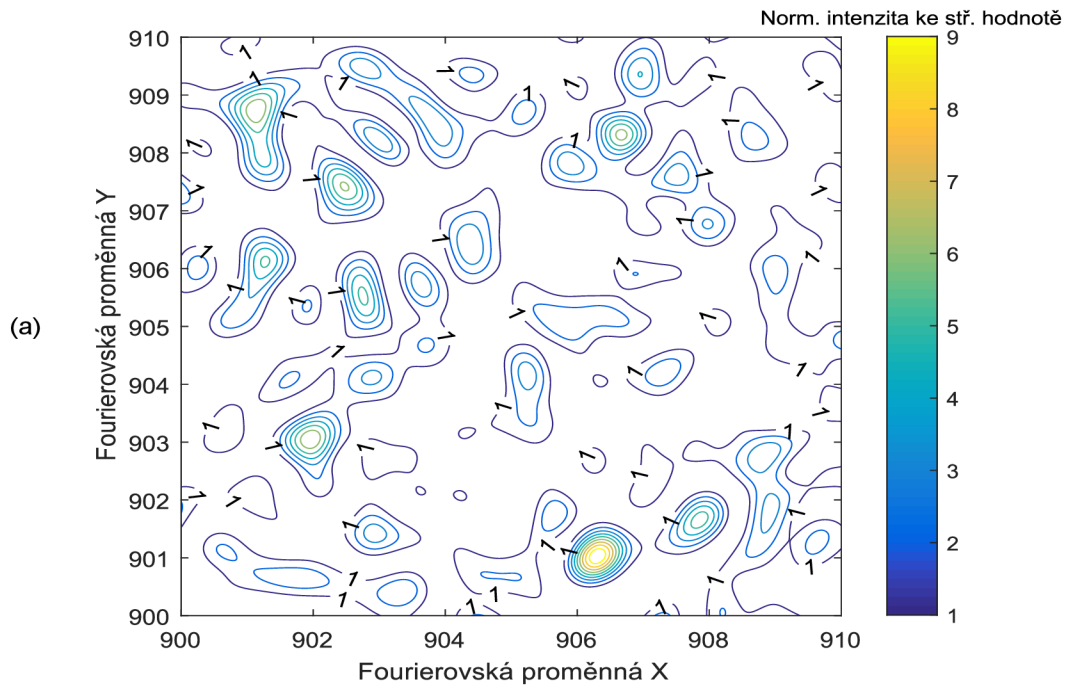
Obr. A.3: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory ve čtvercové oblasti o délce strany deseti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 20\,000$ , (b)  $n = 50\,000$ .

## Dodatek B - Grafy kruhového modelu

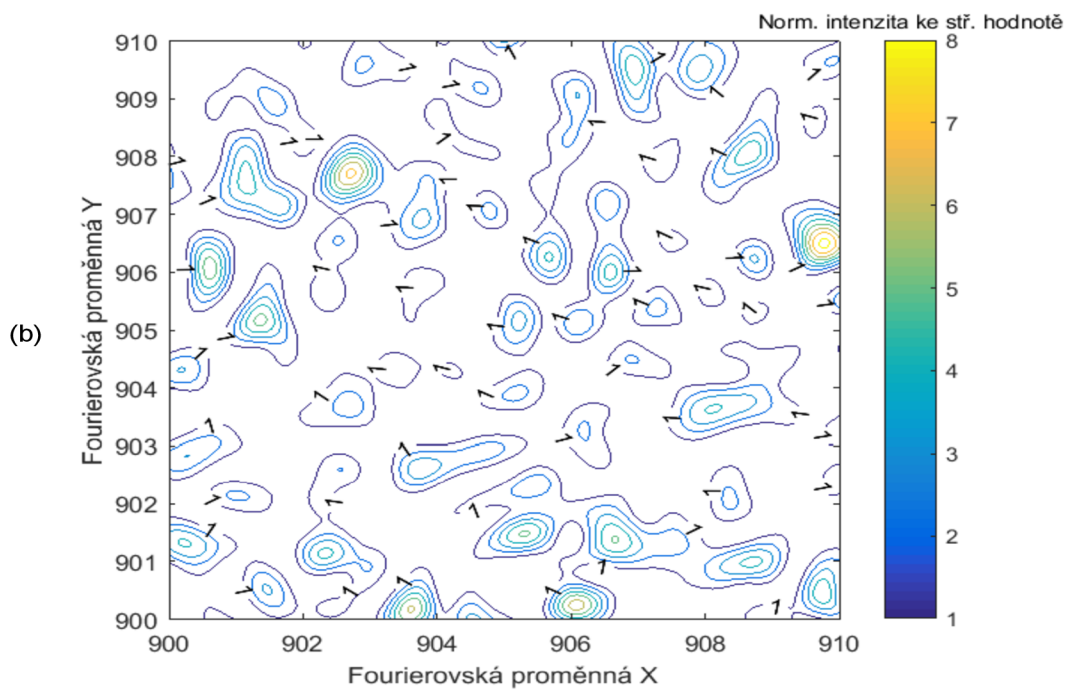
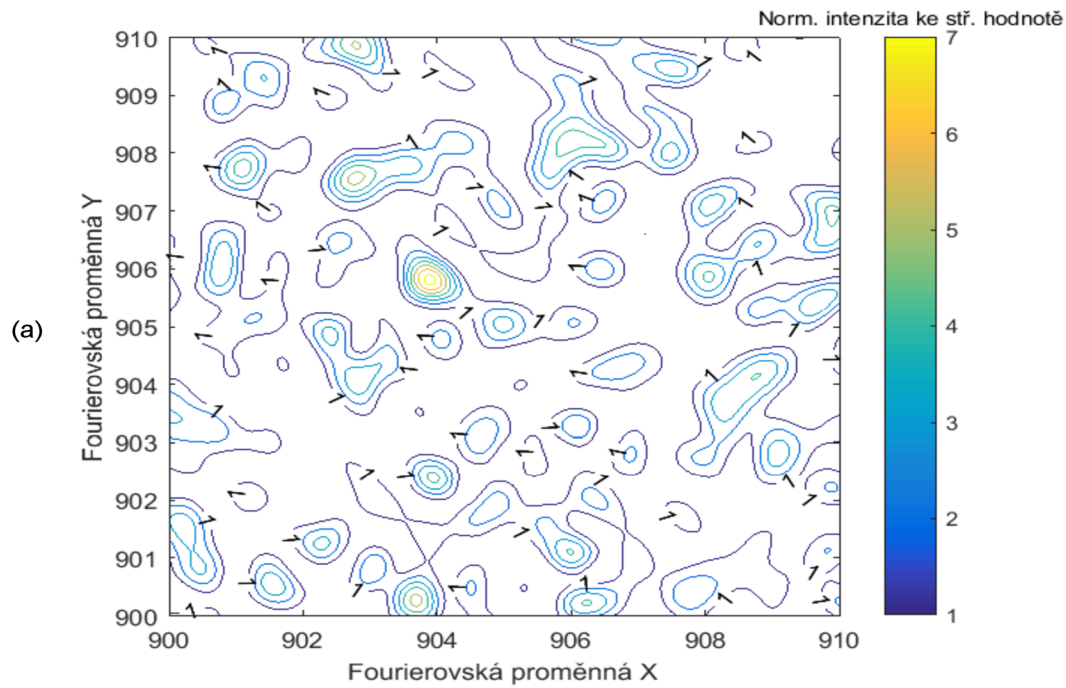


Obr. B.1: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory v kruhové oblasti o poloměru pěti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 158$ , (b)  $n = 357$ .





Obr. B.2: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory v kruhové oblasti o poloměru pěti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 1\,500$ , (b)  $n = 5\,000$ .



Obr. B.3: Vykreslení funkce  $\frac{1}{n} |S(X, Y, n)|^2$  pro náhodně rozmístěné otvory v kruhové oblasti o poloměru pěti jednotek a vyznačená hodnota izofoty 1, jejíž velikost byla zkoumána postupně pro různý počet otvorů. (a)  $n = 20\,000$ , (b)  $n = 50\,000$ .



