Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Soustavy lineárních rovnic – sbírka úloh

Bakalářská práce

Autor: Michaela Fejglová

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce : RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Oponent: doc. RNDr. Jaroslav Seibert, CSc.

Hradec Králové 2024

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Michaela Fejglová**
Studium:	S21MA010BP
Studijní program:	B0114A170006 Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání, Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Název bakalářské práce:	**Soustavy lineárních rovnic-sbírka úloh**
Název bakalářské práce AJ:	Systems of Linear Equations-Collection of Problems

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Cílem práce je vytvořit přehled různých metod řešení soustav lineárních rovnic, zkoumat podmínky jejich řešitelnosti a dále pak sestavit sbírku, která bude obsahovat vzorově vyřešené úlohy i neřešené úlohy s výsledky.

Bečvář, J. Lineární algebra. Praha, 2000

Bican, L.: Lineární algebra a geometrie. Praha 2000

Blažek, J. a kol.: Algebra a teoretická aritmetika. Praha 1983

Zadávající pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.
Oponent:	doc. RNDr. Jaroslav Seibert, CSc.
Datum zadání závěrečné práce:	8.11.2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

Hradec Králové dne 10. 4. 2024 Michaela Fejglová

Poděkování

Děkuji své vedoucí bakalářské práce RNDr. Jitce Kühnové, Ph.D. za pomoc, odborné konzultace a trpělivost. Poděkování patří i mému rodinnému zázemí, za podporu a pochopení.

Anotace

FEJGLOVÁ, M., Soustava linéárních rovnic – sbírka úloh. Hradec Králové, 2024. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D., 52 s.

Bakalářská práce se zaměřuje na různé metody řešení soustav lineárních rovnic. V práci je popsáno několik metod řešení i se vzorově vyřešenými úlohami. Objevují se zde i příklady s parametry, kde je nutné prověřit podmínky jejich řešitelnosti. V závěrečné části se nacházejí neřešené úlohy soustav lineárních rovnic i s výsledky.

Klíčová slova

Soustava lineárních rovnic, matice, diterminant, metody řešení, příklady

Annotation

FEJGLOVÁ, M., Systems of Linear Equations – Collection of Problems. Hradec Králové, 2024. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Bachelor Supervisor RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D., 52 p.

The bachelor thesis focuses on different methods of solving systems of linear equations. Several methods of solution are described in the thesis as well as with sample solved problems. There are also examples with parameters, where it is necessary to check the conditions of their solvability. In the final part there are unsolved problems of systems of linear equations with their results.

Keywords

Systems of linear equations, matrix, determinant, solution methods, examples

Obsah

Úvod

Bakalářské práce se zabývá soustavami lineárních rovnic. Tuto problematiku jsem si vybrala, protože jsem si chtěla zopakovat, prohloubit a srovnat vědomosti z této oblasti matematiky.
Cílem bakalářské práce bylo vytvořit sbírku úloh zaměřenou na soustavy lineárních rovnic, která by mohla sloužit jako pomocný materiál pro učitele a jejich studenty při výuce tohoto tématu. V práci se zaměřuji na základní teorii související se soustavami lineárních rovnic a na různé metody jejich řešení. Mezi metodami můžeme nalézt například Gaussovu eliminační metodu či Cramerovo pravidlo. V samotné sbírce úloh jsou jak řešené, tak neřešené příklady. Řešené příklady jsou zde na všechny popsané metody a další typové příklady, které se ve sbírce nacházejí. Na konci jsou i výsledky k neřešeným příkladům.
Poněvadž je práce tvořená jako sbírka úloh, tak se zde neobjevují žádné důkazy vět. Číslování ve sbírce je dvojího druhu. Postupně jsou číslované příklady řešené a zvlášť příklady neřešené. Řešení všech úloh jsou autorská. Zadání jsou částečně převzatá a částečně autorská. U převzatých zadání je vždy označený zdroj, ze kterého jsem soustavu lineárních rovnic převzala.

Kapitola 1

Základní pojmy

V celé práci předpokládáme znalosti z teorie vektorových prostorů, matic a determinantů. V této kapitole jsou shrnuty ty pojmy z teorie matic a determinantů, které budeme potřebovat k řešení soustav lineárních rovnic. Konkrétně v této části práce je čerpáno převážně ze zdrojů [2], [3], [5], [10].

1.1 Matice

Definice 1.1. Nechť T je pole, $m, n \in \mathbb{N}$.Obdélníkové schéma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prvků z pole T nazýváme *maticí typu (m,n)*, resp. $m \times n$, nad polem T.

Poznámka:

• Aritmetický vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in T^n, i = 1, \dots, m$, nazýváme *i-tým řádkem* matice **A** a aritmetický vektor $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in T^m, j = 1, \dots, n$, nazýváme *j-tým sloupcem* matice **A**.

• Matici **A** typu (m, n) nad polem T lze stručně zapisovat ve tvaru $\mathbf{A} = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$, resp. pouze ve tvaru $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

• O prvcích $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ matice **A** typu (m, n), kde $k = min(m, n)$, říkáme, že leží v *hlavní diagonále*, nebo že tvoří hlavní diagonálu matice **A**.

• Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m,n) taková, že $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1,2,\ldots,m$ a $j = 1,2,\ldots,n$, se nazývá *nulová matice.*

• *Opačnou maticí* k matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m,n) nad polem T budeme rozumět matici $-\mathbf{A} = (-a_{ij})$ stejného typu.

• Matice $\mathbf{A}$ typu (n,n) se nazývá *čtvercová matice řádu n.*

• Čtvercová matice řádu n taková, že $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $i,j = 1,2,\ldots,n$, se nazývá *diagonální.*

• Diagonální matice $\mathbf{E} = (e_{ij})$ řádu n taková, že $e_{ii} = 1$ pro každé $i = 1,2,\ldots,n$, se nazývá *jednotková matice řádu n.*

• *Horní*, resp. *dolní*, *trojúhelníkovou maticí* rozumíme čtvercovou matici řádu n takovou, že pro každé $i,j = 1,\ldots,n$, $i > j$, resp. $i < j$, je $a_{ij} = 0$.

• Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m,n) nad polem T se nazývá matice ve *schodovitém tvaru*, resp. *odstupňovaná*, jestliže pro její prvky platí:

(a) Je-li $m > 1$, pak $a_{21} = 0$.

(b) Jestliže pro nějaké $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ a $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ je

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{ik} = 0,$$

potom je též

$$a_{i+1,1} = a_{i+1,2} = \cdots = a_{i+1,k+1} = 0.$$

V matici ve schodovitém tvaru tedy každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předcházející (pokud tento existuje). Podmínka (a) říká, že druhý řádek (pokud existuje) začíná alespoň jednou nulou; třetí řádek tedy začíná alespoň dvěma nulami a obecně i-tý řádek alespoň $(i-1)$ nulami.

• Matice $\mathbf{A}$ se nazývá *redukovaná matice ve schodovitém tvaru*, jestliže platí:

(a) každý nenulový řádek leží nad libovolným nulovým řádkem

(b) vedoucí prvek (tj. první nenulový prvek řádku) "vyššího"řádku leží více vlevo než vedoucí prvek libovolného "nižšího"řádku

(c) vedoucí prvek každého řádku je roven 1

(d) ve sloupci, ve kterém se nachází vedoucí prvek libovolného řádku, jsou všechny ostatní prvky rovny nule.

• Matice $\mathbf{A}$ se nazývá *bloková*, jestliže ji lze pomocí vodorovných a svislých čar rozdělit na tzv. *bloky* neboli *dílčí matice.*

Definice 1.2. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) nad polem T. *Transponovanou maticí* k matici **A** rozumíme matici

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

typu (n, m) nad polem T.

Poznámka: Transponovaná matice $\mathbf{A}^T$ vznikne záměnou řádků matice **A** za její sloupce a obráceně.

Definice 1.3. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ jsou matice typu (m, n) nad polem T, nechť $k \in T$ je libovolný prvek.
Součtem těchto dvou matic budeme rozumět matici $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$ typu (m, n), která má na místě ij součet prvků stojících v maticích **A** a **B** na místě ij.
k-*násobkem* matice **A** budeme rozumět matici $\mathbf{D} = k\mathbf{A} = (ka_{ij})$ typu (m, n), která má na místě ij k-násobek prvku, který v matici **A** stojí na místě ij.

Definice 1.4. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, p) a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matice typu (p, n) nad polem T.
Součinem těchto dvou matic (v tomto pořadí) rozumíme matici $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, typu (m, n) nad polem T, která má na místě ij součet součinů odpovídajících prvků i-tého řádku matice **A** a j-tého sloupce matice **B**.

Poznámka: Obecně neplatí komutativní zákon pro násobení matic.

Věta 1.1. *Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou matice nad polem T odpovídajících typů tak, aby níže uvedené součty a součiny byly definované. Pak platí:*
(1) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$
(2) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
(3) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
(4) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} \wedge (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{CA}$

(5) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

(6) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$

(7) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$*, kde* $\boldsymbol{E}$ *je jednotková matice odpovídajícího řádu.*

Definice 1.5. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) nad polem T. *Elementárními řádkovými*, resp. *sloupcovými úpravami*, matice $\mathbf{A}$ rozumíme:

(1) Vzájemnou výměnu dvou řádků, resp. sloupců, matice.

(2) Vynásobení libovolného řádku, resp. sloupce, matice nenulovým prvkem z pole T.

(3) Přičtení k libovolnému řádku, resp. sloupci, jakékoli lineární kombinace ostatních řádků, resp. sloupců.

Definice 1.6. Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice typu (m, n) nad polem T. O matici $\mathbf{B}$, která vznikla z matice $\mathbf{A}$ elementárními úpravami, říkáme, že je *ekvivalentní*. Píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Definice 1.7. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n) nad polem T. *Hodnost* $h(\mathbf{A})$ je rovna dimenzi vektorového prostoru generovaného řádky, resp. sloupci, matice $\mathbf{A}$ jako vektory z prostoru T^n, resp. T^m. Číslo $h(\mathbf{A})$ je tedy rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků, resp. sloupců, matice $\mathbf{A}$.

Věta 1.2. *Pro každou matici* $\boldsymbol{A}$ *nad polem* T *platí, že* $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}')$.

Věta 1.3. *Provádění řádkových a sloupcových elementárních úprav nemění hodnost matice.*

Věta 1.4. *Každá matice je řádkově ekvivalentní s nějakou maticí ve schodovitém tvaru.*

Věta 1.5. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Poznámka: Pomocí posledních třech vět můžeme nyní poměrně jednoduše zjišťovat hodnost dané matice $\mathbf{A}$. Matici nejdříve převedeme pomocí elementárních úprav na schodovitý tvar, ve kterém pak jen spočítáme počet nenulových řádků. Tato hodnota je rovna hodnoti matice $\mathbf{A}$.

Definice 1.8. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad polem T. *Inverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$ budeme rozumět matici $\mathbf{A}^{-1}$, pro kterou platí:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Matice $\mathbf{A}$, ke které inverzní matice existuje, se nazývá *invertibilní*.

Definice 1.9. Čtvercová matice řádu n se nazývá *regulární maticí*, právě když je její hodnost rovna n.
Čtvercová matice, která není regulární, se nazývá *singulární matice*.

Věta 1.6. *Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n nad polem T. Pak k matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní, právě když je matice $\mathbf{A}$ regulární. Přitom i matice $\mathbf{A}^{-1}$ je regulární.*

1.2 Determinanty

Definice 1.10. Buď

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

čtvercová matice řádu n nad polem T. *Determinantem matice* $\mathbf{A}$ rozumíme prvek

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\Pi \in S_n} zn\Pi \cdot a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n}$$

pole T, kde sčítáme přes všechny permutace

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Determinant matice $\mathbf{A}$ budeme též značit symbolem $|\mathbf{A}|$ nebo píšeme

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 1.7. ***(Základní vlastnosti determinantů)***

Nechť $\boldsymbol{A}$ *je čtvercová matice řádu n nad polem T. Pak platí:*

(1) $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^T$

(2) Determinant matice, která má nulový sloupec (řádek), je roven nule.

(3) Determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu všech prvků na její hlavní diagonále.

(4) Vynásobíme-li nějaký sloupec (řádek) matice $\boldsymbol{A}$ *prvkem* $c \in T$*, je determinant vzniklé matice roven* $c \cdot \det \boldsymbol{A}$.

(5) Determinant matice, která má dva stejné sloupce (řádky), je roven nule.

(6) Přičteme-li k nějakému sloupci (řádku) matice $\boldsymbol{A}$ *c-násobek nějakého jiného sloupce (řádku), kde* $c \in T$, $c \neq 0$*, je determinant vzniklé matice roven determinantu matice* $\boldsymbol{A}$.

(7) Prohodíme-li v matici $\boldsymbol{A}$ *dva sloupce (řádky), je determinant vzniklé matice roven* $-\det \boldsymbol{A}$.

Věta 1.8. ***(Laplaceova věta o rozvoji determinantu)***

Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice řádu n nad polem T,* $1 \leq i \leq n$*. Pak platí:*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \boldsymbol{A}_{ij}, \tag{1.1}$$

kde $\boldsymbol{A}_{ij}$ *je matice řádu n-1, která vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.*

Poznámka: Rovnost (1.1) uvedená v předchozí větě vyjadřuje rozvoj determinantu podle j-tého sloupce. Prvek $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$ se často nazývá *algebraický doplněk determinantu* $\det \mathbf{A}$ příslušející prvku a_{ij}.

Věta 1.9. *Nechť* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice řádu n nad polem T. Je-li matice* $\boldsymbol{A}$ *regulární, pak*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{\det \boldsymbol{A}},$$

kde

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá adjugovaná matice k matici $\boldsymbol{A}$.

Kapitola 2

Soustavy lineárních rovnic

V této části práce je čerpáno převážně ze zdrojů [1], [3], [5], [10].

Definice 2.1. Nechť T je libovolné pole. *Lineární rovnicí* o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad polem T, rozumíme formuli tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in T$.

Definice 2.2. Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých nad polem T rozumíme soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n &= b_2\\
\vdots\qquad\qquad\qquad&\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{2.1}$$

kde $a_{ij}, b_i, x_j,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$, jsou prvky z pole T. Matice

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

typu (m, n) se nazývá *matice soustavy* (2.1), matice

$$\mathbf{A}' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

typu $(m, n+1)$ se nazývá *rozšířená matice* soustavy (2.1).

Vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in T^m$ se nazývá *sloupec pravých stran.*

Poznámka:

Označíme-li

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matici typu $(n, 1)$ tvořenou neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$ a

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matici typu $(m, 1)$ tvořenou pravými stranami $b_1, b_2, \dots, b_m$, pak můžeme soustavu (2.1) zapsat stručněji maticovou rovnicí, resp. v maticovém tvaru:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

Definice 2.3. Nechť je dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad polem T. Vektor $\mathbf{u} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in T^n$ takový, že jeho dosazením do soustavy za neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ je splněno všech m rovností, se nazývá *řešením soustavy*, tj. platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}^T = \mathbf{B}$.

Poznámka:

Jestliže soustava (2.1) má alespoň jedno řešení, nazývá se *řešitelná.* V opačném případě říkáme, že daná soustava nemá řešení, resp. *není řešitelná.*

Definice 2.4. Nechť jsou dány dvě soustavy rovnic o n neznámých nad polem T. Tyto dvě soustavy se nazývají *ekvivalentní soustavy*, jestliže množiny jejich řešení si jsou rovny. Jakákoliv úprava dané soustavy lineárních rovnic, po které vznikne ekvivalentní soustava, se nazývá *ekvivalentní úprava* dané soustavy lineárních rovnic.

Poznámka:

Ekvivalentními úpravami soustavy lineárních rovnic rozumíme:

(1) vzájemnou výměnu libovolných rovnic

(2) vynásobení libovolné rovnice nenulovým prvkem z pole T

(3) přičtení lineární kombinace rovnic k určité rovnici soustavy

(4) vynechání nebo přidání rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic.

Věta 2.1. ***(Frobeniova věta)***

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad polem T je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice této soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Poznámka:

Frobeniova věta je jednoduchým kriteriem řešitelnosti soustav lineárních rovnic, ovšem v případě řešitelné soustavy neříká nic o počtu řešení ani o tom, jak všechna řešení vypadají.

Důsledek: Soustava lineárních rovnic o n neznámých má:

• právě jedno řešení, právě tehdy když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = n$

• nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech, právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') < n$ (T je nekonečné pole)

• konečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech, právě když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') < n$ (T je konečné pole)

• žádné řešení, právě když $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}')$

Definice 2.5. Soustava lineárních rovnic (2.1) se nazývá *homogenní* právě tehdy, když sloupec pravých stran je roven nulovému vektoru, tj. $\mathbf{b} = \mathbf{o}$. V opačném případě, tj. existuje-li alespoň jeden prvek $b_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, pak se soustava nazývá *nehomogenní* soustavu lineárních rovnic.

Poznámka: Protože rozšířená matice $\mathbf{A}'$ homogenní soustavy vznikla z matice soustavy $\mathbf{A}$ přidáním sloupce skládajícího se ze samých nul, je zřejmé $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}')$, a tedy (podle Frobeniovy věty) homogenní soustava je vždy řešitelná. Uspořádaná

n-tice $(0, 0, \ldots, 0)$ je zřejmě vždy řešením homogenní soustavy. Toto řešení se nazývá *nulové řešení*, resp. *triviální řešení*. Ostatní řešení se nazývají *nenulové*, resp. *netriviální řešení*.

Věta 2.2. *Nechť je dána homogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých s maticí soustavy $\boldsymbol{A}$. Potom:*
(1) soustava má pouze nulové řešení, právě když $h(\boldsymbol{A}) = n$
(2) soustava má alespoň jedno nenulové řešení, právě když $h(\boldsymbol{A}) < n$.

Věta 2.3. *Nechť hodnost matice $\boldsymbol{A}$ soustavy m homogenních rovnic o n neznámých je h. Množina V všech řešení této soustavy je podprostor vektorového prostoru T^n a dimenze prostoru V je $n - h$.*

Poznámka: Předchozí Věta v podstatě říká, že homogenní soustavou lineárních rovnic o n neznámých je určen jistý podprostor vektorového prostoru T^n. Toto tvrzení lze i obrátit, jak ukazuje následující Věta.

Věta 2.4. *Nechť V je libovolný podprostor vektorového prostoru T^n. Pak existuje homogenní soustava lineárních rovnic o n neznámých nad polem T, jejíž množina řešení je rovna V.*

Věta 2.5. *Nechť je dána řešitelná nehomogenní soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad polem T. Nechť vektor $\boldsymbol{r_0}$ je libovolné řešení této soustavy a nechť V je množina všech řešení homogenní soustavy, která vznikne z dané nehomogenní soustavy nahrazením sloupcového vektoru pravých stran nulovým vektorem. Potom množina*

$$X = \{\boldsymbol{r} \in T^n; (\exists \boldsymbol{w} \in V) : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{w}\}$$

je množina všech řešení dané nehomogenní soustavy.

Poznámka:
(1) Množina všech řešení nehomogenní soustavy není vektorovým prostorem. Tato množina totiž neobsahuje nulový vektor, jenž je nutně prvkem každého vektorového prostoru.
(2) Každé řešení dané nehomogenní soustavy dostaneme jako součet jednoho pevného řešení nehomogenní soustavy, tzv. *partikulárního řešení* a nějakého řešení příslušné homogenní soustavy.

(3) Báze vektorového prostoru V všech řešení příslušné homogenní soustavy lineárních rovnic k nehomogenní soustavě lineárních rovnic se nazývá *fundamentální systém* dané nehomogenní soustavy.

Kapitola 3

Metody řešení soustav lineárních rovnic

V této kapitole je uvedeno několik základních metod řešení soustav lineárních rovnic. V této části práce je převážně čerpáno ze zdrojů [1], [12].

3.1 Gaussova eliminační metoda

Nechť je dána soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.1}$$

m lineárních rovnic o n neznámých nad polem T.

(1) Předpokládejme, že prvek $a_{11} \neq 0$.

Ekvivalentními úpravami převedeme soustavu (3.1) na novou soustavu tak, že neznámá x_1 bude vystupovat s nenulovým koeficientem pouze v první rovnici a to takto:

Postupně vynásobíme první rovnici prvkem $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ a přičteme ji k i-té rovnici pro

$i = 2, 3, \ldots, m$. Dostaneme soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
&\vdots \\
a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Soustava (3.2) má stejnou množinu řešení jako soustava (3.1). Může nastat případ, kdy se v soustavě objeví rovnice, jejíž všechny koeficienty na levé straně jsou rovny 0.

• Pokud je i pravá strana rovna 0, tj. rovnice má tvar

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0,$$

pak je řešením této rovnice *libovolná* n-tice prvků z pole T. Tuto rovnici můžeme vynechat, aniž bychom změnili množinu řešení soustavy (3.2).

• Pokud je však pravá strana této rovnice různá od nuly, tj. rovnice má tvar

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b'_i, b'_i \neq 0,$$

žádná n-tice prvků z pole T není řešením této rovnice, tudíž ani soustavy (3.2) a ani soustavy (3.1).

Pak soustava (3.2), a tedy ani soustava (3.1) nemá řešení.

(2) Soustavu lineárních rovnic (3.2) upravujeme analogicky.

První rovnici ponecháme a pomocí druhé rovnice vyloučíme neznámou x_2 ze všech rovnic kromě první a druhé.

(3) Za vhodných předpokladů takto postupujeme dál a pokud je soustava řešitelná. Dostaneme tak soustavu ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1s}x_s + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
c_{22}x_2 + \cdots + c_{2s}x_s + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
&\vdots \\
c_{ss}x_s + \cdots + c_{sn}x_n &= d_s,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

která má s rovnic, kde $1 \leq s \leq m, s \leq n$ a koeficienty $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{ss} \neq 0$. Počet rovnic je tedy nejvýše takový, jako je počet rovnic v soustavě (3.1) a zároveň je menší nebo roven počtu neznámých v této soustavě.

Potom:

(a) má soustava *jediné řešení*, je-li $s = n$. Z poslední rovnice určíme x_n, tj. $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Po dosazení do předposlední rovnice dostáváme hodnotu x_{n-1} a takto pokračujeme dál, až dostaneme řešení soustavy (3.3), a tedy i soustavy (3.1).

(b) má soustava *nekonečně mnoho řešení*, je-li $s < n$. V tomto případě (opět postupným dosazováním jako v případě (a) ze soustavy (3.3)) vyjádříme jistých s neznámých pomocí zbývajících $(n - s)$ neznámých, které nazýváme *volné neznámé*. Dosazujeme-li za volné neznámé libovolné prvky z pole T, dostáváme pak jednotlivá konkrétní řešení soustavy (3.3), a tedy i soustavy (3.1).

Poznámka: Jestliže je pole T konečné, potom má soustava (3.1) v případě $s < n$ konečně mnoho řešení.

3.2 Gauss-Jordanova eliminační metoda

Při ekvivalentních úpravách se nemusíme zastavit u schodovitého tvaru matice. Pokud budeme v úpravách pokračovat, lze matici soustavy převést na redukovanou matici ve schodovitém tvaru. Řešení je poté hned viditelné ve sloupci pravých stran matice. Tato metoda řešení soustav lineárních rovnic se nazývá *Gauss-Jordanova eliminační metoda*.

3.3 Řešení soustavy s regulární maticí pomocí inverzní matice

Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých a k ní odpovídající regulární čtvercová matice soustavy řádu n. Soustavu lze zapsat maticovou rovnicí ve tvaru $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Protože je matice $\mathbf{A}$ regulární, existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$. Vynásobením rovnice zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

3.4 Cramerovo pravidlo

Věta 3.1. ***(Cramerovo pravidlo)***
Nechť je dána soustava n lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

o n-neznámých nad polem T a nechť determinant matice soustavy $\boldsymbol{A}$ je nenulový $(\det \boldsymbol{A} \neq 0)$.
Pak má tato soustava právě jedno řešení $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T^n$, přičemž platí

$$x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}}, i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde

$$\det \boldsymbol{A}_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Determinant $\boldsymbol{A}_i$ vznikne z determinantu matice $\boldsymbol{A}$ nahrazením jeho i-tého sloupce sloupcem pravých stran dané soustavy rovnic.)

Poznámka:

Pokud je $\det \mathbf{A} = 0$, mohou nastat dva případy:

• $\det \mathbf{A}_i \neq 0$ pro alespoň jedno $i = 1, 2, \ldots, n$, pak nemá soustava lineárních rovnic řešení

• $\det \mathbf{A}_i = 0$ pro všechny $i = 1, 2, \ldots, n$, pak má soustava lineárních rovnic nekonečně mnoho řešení

Kapitola 4

Sbírka úloh

4.1 Příklady

Příklad 1: Pomocí Frobeniovy věty určete, zda je následující soustava lineárních rovnic řešitelná.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 - x_2 + 15x_3 - 5x_4 &= 1 \qquad [12] \end{aligned}$$

Řešení: Nejdříve napíšeme rozšířenou matici soustavy a následně ji převedeme elementárními řádkovými úpravami na matici ve schodovitém tvaru.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 9 & -1 & 15 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 15 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & -19 & 24 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & -13 \\ 0 & 0 & 24 & -24 & -37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Z poslední matice vidíme, že hodnost matice soustavy $\mathbf{A}$ je rovna třem a hodnost rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}'$ je rovna čtyřem. Hodnosti se nerovnají, tudíž tato soustava **nemá řešení**.

Příklad 2: Pomocí Frobeniovy věty určete, zda je následující soustava lineárních rovnic řešitelná. Pokud ano, tak určete její řešení.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \qquad [8] \end{aligned}$$

Řešení: Budeme postupovat stejně, jako v předešlém příkladě. Tedy nejdříve napíšeme rozšířenou matici soustavy a následně ji převedeme elementárními řádkovými úpravami na matici ve schodovitém tvaru.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & -18 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Z poslední matice již opět můžeme určit hodnosti obou matic. Tedy hodnost matice $\mathbf{A}$ soustavy je rovna třem a hodnost rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}'$ je rovna také třem. Hodnosti se rovnají, tudíž tato soustava je **řešitelná**.
Z poslední matice tedy můžeme určit i řešení této soustavy lineárních rovnic.
$5x_3 = 0$, tedy $x_3 = 0$
$-11x_2 = 11 + 18x_3$, po dosazení za x_3 dostaneme vztah $-11x_2 = 11$ a z něho plyne $x_2 = -1$
$3x_1 = 1 - 5x_2 - 6x_3$, po dosazení máme vztah $3x_1 = 1 + 5$, ze kterého dostaneme $x_1 = 2$
Řešením soustavy je tedy uspořádaná trojice $(2, -1, 0)$.

(1) Určete řešitelnost soustav lineárních rovnic pomocí Frobeniovy věty. Pokud je soustava řešitelná, určete její řešení.

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3 \qquad [13] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \qquad [12] \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1 \qquad [13] \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1 \qquad [13] \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_4 &= -1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 10x_4 &= -5 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 &= -7 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 &= -6 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -4 \qquad [8] \end{aligned}$$

(2) Řešte následující homogenní soustavy lineárních rovnic.

a)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 18x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \qquad [8] \end{aligned}$$

b)

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \qquad [12]$$

c)

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$
$$x_1 - 2x_3 + 7x_4 = 0$$
$$3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \qquad [1]$$

d)

$$x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$
$$-4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \qquad [1]$$

e)

$$x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0$$
$$2x_1 + 11x_2 + 15x_3 - 14x_4 - 2x_5 = 0$$
$$-x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0$$
$$-x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 + 28x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 0$$

Příklad 3: Vypočítejte soustavu lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2. \qquad [13]$$

Řešení: Napíšeme rozšířenou matici této soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Poznámka:

• Pokud se v j-tém sloupci (upravené) matice nenachází vedoucí prvek žádného řádku, tak za volnou neznámou obvykle volíme neznámou x_j.

• Pokud se v j-tém sloupci nachází vedoucí prvek nějakého řádku, tak neznámou x_j vyjádříme pomocí nějaké volné neznámé.

Dostáváme soustavu rovnic, v níž budou tři volné neznámé. Zvolíme-li za volné neznámé například neznámé x_5, x_4, x_3, pak lehce vyjádříme neznámé x_1, x_2 takto:

$x_2 = -1 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5$

$x_1 = -5x_3 + 4x_4 - 3x_5$

$x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$

Soustava rovnic má tedy nekonečně mnoho řešení tvaru

$(-5x_3 + 4x_4 - 3x_5, -1 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5, x_3, x_4, x_5)$.

(3) Vypočítejte následující soustavy lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody.

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 17 \\ 6x_1 + 7x_2 + 18x_3 &= 38 \\ -2x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 43 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 - 9x_2 + 7x_3 - x_4 + 3x_5 &= 7 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 7 \qquad [14] \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 &= 11 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 - 5x_4 - 2x_5 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 &= 5 \qquad [15] \end{aligned}$$

(4) Užitím Gaussovy eliminační metody najděte pro soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

a) všechna řešení

b) řešení pro $x_2 = 1$. [6]

Příklad 4: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic Gauss-Jordanovou eliminační metodou.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 &= 16 \qquad [12] \end{aligned}$$

Řešení: Napíšeme si rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na redukovanou matici ve schodovitém tvaru.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & -3 \\ 7 & -3 & 1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 49 & 49 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Z matice je nyní hned vidět, že jednotlivé hodnoty neznámých jsou $x_1 = 3$, $x_2 = 2, x_3 = 1$. Řešením soustavy je tedy uspořádaná trojice $(3, 2, 1)$.

(5) Vypočítejte následující soustavy lineárních rovnic pomocí Gauss-Jordanovy eliminační metody.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \qquad [1] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 &= 15 \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -8 \\ x_1 - 6x_2 &= -7 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 &= 13 \qquad [8] \end{aligned}$$

Příklad 5: Pomocí inverzní matice řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 6 \qquad [8] \end{aligned}$$

Řešení: Soustavu lineárních rovnic lze napsat ve tvaru $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Protože $\det \mathbf{A} = 60 \neq 0$, je matice $\mathbf{A}$ regulární, a tedy k ní existuje matice inverzní $\mathbf{A}^{-1}$. Inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ vypočítáme Gauss-Jordanovou metodou.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 5 & -8 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 15 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right)$$

Tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Řešení $\mathbf{X}$ soustavy určíme tak, že maticovou rovnici vynásobíme zleva inverzní maticí. Dostaneme rovnici ve tvaru $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Tedy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{15} \\ \frac{6}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice $(0,8; 0,5)$.

(6) Pomocí inverzní matice řešte soustavu lineárních rovnic:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \qquad [13] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ -x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \qquad [12] \end{aligned}$$

(7) Určete sloupcový vektor $\mathbf{X}$ řešení soustavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ lineárních rovnic pomocí inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [8]$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [14]$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Příklad 6: Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte následující soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 &= 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -4 \qquad [1] \end{aligned}$$

Řešení: Nejdříve vypočítáme determinant matice soustavy. Determinant si vždy nejprve upravíme podle Věty 1.7. tak, abychom ho mohli rozvést pomocí Laplaceovy věty.

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -9 & 11 & 11 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} -31 & 22 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -31 & 22 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot [-31 - (5 \cdot 22)] = -423$$

Protože je determinant této soustavy nenulový, podle Věty 3.1. má soustava jediné řešení. Toto řešení vypočítáme pomocí vzorce

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, i = 1, 2, 3, 4.$$

$$det\mathbf{A_1} = \begin{vmatrix} -32 & -4 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 7 & 9 \\ 11 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 14 & 5 \\ 25 & 0 & 10 & 10 \\ 11 & 1 & 3 & 1 \\ 18 & 0 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 14 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \\ 18 & 7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 114 & 63 & 0 \\ 23 & 9 & 0 \\ 18 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 114 & 63 \\ 23 & 9 \end{vmatrix} = -2115$$

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{-2115}{-423} = 5$$

$$det\mathbf{A_2} = \begin{vmatrix} -1 & -32 & 2 & 1 \\ 2 & 14 & 7 & 9 \\ -1 & 11 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -32 & 2 & 1 \\ 0 & -50 & 11 & 11 \\ 0 & 43 & 1 & 0 \\ 0 & -36 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -50 & 11 & 11 \\ 43 & 1 & 0 \\ -12 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} -182 & 22 & 0 \\ 43 & 1 & 0 \\ -12 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -182 & 22 \\ 43 & 1 \end{vmatrix} = -3384$$

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{-3384}{-423} = 8$$

$$det\mathbf{A_3} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -32 & 1 \\ 2 & -1 & 14 & 9 \\ -1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -32 & 1 \\ 0 & -9 & -50 & 11 \\ 0 & 5 & 43 & 0 \\ 0 & -6 & -36 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -9 & -50 & 11 \\ 5 & 43 & 0 \\ -2 & -12 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} -31 & -182 & 0 \\ 5 & 43 & 0 \\ -2 & -12 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -31 & -182 \\ 5 & 43 \end{vmatrix} = -1269$$

$$x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{-1269}{-423} = 3$$

$$det\mathbf{A_4} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & -32 \\ 2 & -1 & 7 & 14 \\ -1 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & -32 \\ 0 & -9 & 11 & -50 \\ 0 & 5 & 1 & 43 \\ 0 & -6 & 3 & -36 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -9 & 11 & -50 \\ 5 & 1 & 43 \\ -2 & 1 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 0 & 82 \\ 7 & 0 & 55 \\ -2 & 1 & -12 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 82 \\ 7 & 55 \end{vmatrix} = 423$$

$$x_4 = \frac{\det \mathbf{A}_4}{\det \mathbf{A}} = \frac{423}{-423} = -1$$

Tedy daná soustava má jedno řešení a to uspořádanou čtveřici $(5, 8, 3, -1)$.

(8) Určete řešení soustavy rovnic Cramerovým pravidlem.

a)

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \qquad [15]$$

b)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -4 \qquad [5]$$

c)

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 0$$
$$7x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1$$
$$6x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 3x_4 = 1$$
$$2x_1 - 13x_2 + 40x_3 - 16x_4 = 13 \qquad [12]$$

Příklad 7: Řešte následující soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (1-2i)x_1 + (1+2i)x_2 &= 3+2i \\ 5x_1 - (22+9i)x_2 &= -39-18i. \end{aligned}$$

Řešení: Napíšeme rozšířenou maticí soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2i & 1+2i & 3+2i \\ 5 & -(22+9i) & -(39+18i) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-2i & 1+2i & 3+2i \\ 0 & 45-25i & 90-50i \end{array}\right)$$

Z posledního řádku vyjádříme neznámou x_2:

$$x_2 = \frac{90-50i}{45-25i} = \frac{2(45-25i)}{45-25i} = 2$$

Z prvního řádku vyjádříme neznámou x_1:

$$(1-2i)x_1 = 3+2i-2-4i = 1-2i$$

$$x_1 = 1$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice $(1, 2)$.

(9) Řešte zadané soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{C}$: [11]

a)

$$\begin{aligned} (1-2i)x_1 + (2+3i)x_2 &= 8+5i \\ (1-4i)x_1 + (1+2i)x_2 &= 5-2i \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (1-i)x_1 + (1+i)x_2 + (1+i)x_3 &= 0 \\ (1+3i)x_1 + (1-i)x_2 + (-1+i)x_3 &= 0 \\ (1+i)x_1 + x_2 + ix_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (1+i)x_1 + (1-i)x_2 + (1+i)x_3 &= 1 \\ x_1 + (1+i)x_2 + ix_3 &= 1 \\ (1-i)x_1 + (1+3i)x_2 + (-1+i)x_3 &= 0 \\ (2+i)x_1 + (-1-i)x_2 + x_3 &= 1-i \end{aligned}$$

Příklad 8: Nad polem $\mathbb{Z}_5$ řešte následující soustavu lineárních rovnic:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$$

Řešení: Nejprve zapíšeme rozšířenou matici soustavy a upravíme ji pomocí elementárních úprav na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Poslední řádek v matice má tvar $x_3 = -1 = 4$. Z prostředního řádku lze vyjádřit neznámá x_2:

$$3x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 8 = -4 = 6$$
$$x_2 = 2$$

Z prvního řádku dostáváme

$$x_1 = 1 + 8 - 6 = 3$$

Řešením soustavy rovnic v $\mathbb{Z}_5$ je uspořádaná trojice $(3, 2, 4)$.

Příklad 9: Udejte příklad soustavy lineárních rovnic nad $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, která má právě tři řešení.

Řešení: Soustava může být např. tvořena dvěma rovnicemi o třech neznámých, to znamená, že jedna z neznámých bude volnou neznámou. Tato soustava může být ve tvaru

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Napíšeme si rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na redukovanou matici ve schodovitém tvaru.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dostáváme soustavu rovnic, v níž bude jedna volná neznámá. Zvolíme-li za volnou neznámou neznámou x_3, pak vidíme, že:

$x_1 = 0$

$x_2 = -x_3 = 2x_3$

$x_3 \in \mathbb{Z}_3$

Řešení soustavy má tvar $(0, -x_3, x_3)$. Za neznámou x_3 postupně dosadíme prvky z pole $\mathbb{Z}_3$ a dostaneme právě tři řešení dané soustavy: $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$.

(10) Udejte příklad soustavy lineárních rovnic, která má:

a) právě tři řešení

b) právě dvě řešení

c) právě šest řešení

Příklad 10: Řešte soustavu lineárních rovnic

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + ax_2 + x_3 = a$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = a^2$$

v závislosti na reálném parametru $a \in \mathbb{R}$.

Řešení: Nejdříve napíšeme rozšířenou maticí soustavy a převedeme ji na schodovitý tvar. V tomto případě si prohodíme rovnice tak, aby byl parametr a u neznámé x_1 na posledním řádku matice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1+a-a^2-a^3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a^3+a^2-a-1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 0 & (a+2)(a-1) & (a+1)^2(a-1) \end{array}\right)$$

Podle Frobeniovy věty platí, že:

• $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = 3$, právě když $(a+2)(a-1) \neq 0 \Leftrightarrow (a+2) \neq 0 \wedge (a-1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2 \wedge a \neq 1$ ... právě jedno řešení

• $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') < 3$, právě když $(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ ... nekonečně mnoho řešení

• $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}')$, právě když $(a+2)(a-1) = 0 \wedge (a+1)^2(a-1) \neq 0 \Leftrightarrow a = -2$ ... neexistuje řešení

(1) Nechť $a \neq -2 \wedge a \neq 1$. Pak

$$(a+2)(a-1)x_3 = (a+1)^2(a-1)$$
$$x_3 = \tfrac{(a+1)^2}{a+2}$$

$$(1-a)x_2 + (a-1)x_3 = a^2 - a$$
$$(1-a)x_2 = a(a-1) - \tfrac{(a-1)(a+1)^2}{a+2}$$
$$x_2 = \tfrac{(a+1)^2}{a+2} - a = \tfrac{a^2+2a+1-a^2-2a}{a+2} = \tfrac{1}{a+2}$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = a^2$$
$$x_1 = a^2 - \tfrac{1}{a+2} - \tfrac{a(a+1)^2}{a+2} = \tfrac{a^3+2a^2-1-a^3-2a^2-a}{a+2} = -\tfrac{1+a}{a+2}$$

V tomto případě je řešením uspořádaná trojice $(-\tfrac{1+a}{a+2}, \tfrac{1}{a+2}, \tfrac{(a+1)^2}{a+2})$. Záleží tedy pouze na výběru hodnoty parametru a.

(2) Nechť $a = 1$. Pak poslední dva řádky matice mají tvar

$$0 = 0$$

$$(1-a)x_2 + (a-1)x_3 = a^2 - a$$
$$0 = 0.$$

Z prvního řádku matice dostáváme

$$x_1 + x_2 + ax_3 = a^2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 = 1 - x_2 - x_3.$$

Neznámé x_2, x_3 volíme za volné neznámé. Potom řešením soustavy je v tomto případě uspořádaná trojice $(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3)$.

Příklad 11: Vyřešte následující lineární soustavu rovnic s parametrem $p \in \mathbb{R}$ pomocí Cramerova pravidla.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + px_2 + x_3 &= 1 \\ px_1 + x_2 + x_3 &= 1 \qquad [8] \end{aligned}$$

Řešení: Nejdříve vypočítáme potřebné determinanty. V tomto případě to budou čtyři determinanty.

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-1 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & p-1 \\ p-1 & 0 \end{vmatrix} = -(p-1)^2$$

$$det\mathbf{A_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$det\mathbf{A_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ p & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Poznámka: Lze využít Větu 1.7., kde se v bodě (5) říká, že pokud má determinant dva sloupce (řádky) stejné, tak je roven nule. Tedy výpočet determinantů matic $\mathbf{A_1}$ a $\mathbf{A_2}$ je zbytečný!

$$det\mathbf{A_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{vmatrix} = det\mathbf{A} = -(p-1)^2$$

Diskuze řešení:

• $det\mathbf{A} = -(p-1)^2 = 0$, tj. $p = 1$. Podle Poznámky za Větou 3.1. má tedy daná soustava nekonečně mnoho řešení.

Dostaneme tři rovnice, které jsou totožné, a tedy z nich můžeme ponechat pouze jednu. Ta má tvar:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Volíme řešení v závislosti na neznámých x_2 a x_3, které označíme za volné neznámé. Řešením je tedy uspořádaná trojice $(1 - x_2 - x_3.x_2, x_3), x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

• $det\mathbf{A} = -(p-1)^2 \neq 0$, tj. $p \neq 1$. Podle Věty 3.1. existuje právě jedno řešení.

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{\det A_1}{\det A} = \tfrac{0}{-(p-1)^2} = 0 \\ x_2 &= \tfrac{\det A_2}{\det A} = \tfrac{0}{-(p-1)^2} = 0 \\ x_3 &= \tfrac{\det A_3}{\det A} = \tfrac{-(p-1)^2}{-(p-1)^2} = 1 \end{aligned}$$

Řešením je uspořádaná trojice $(0, 0, 1)$.

(11) Určete řešení soustav lineárních rovnic v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

a)

$$\begin{aligned} px_1 + 3x_2 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} px_1 - 4x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - px_3 &= 0 \qquad [4] \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} px_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + px_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + px_3 &= 1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}-px_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2\\ x_1 - px_2 + x_3 + x_4 &= 2\\ x_1 + x_2 - px_3 + x_4 &= 2\\ x_1 + x_2 + x_3 - px_4 &= 2 \qquad [8]\end{aligned}$$

Příklad 12: Zjistěte, zda jsou vektory $\mathbf{a} = (1,2,3)$, $\mathbf{b} = (2,2,1)$, $\mathbf{c} = (3,-1,4)$, $\mathbf{d} = (4,2,-1)$ lineárně závislé či nezávislé v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Hledáme $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$ tak, aby platil vztah $r_1\mathbf{a} + r_2\mathbf{b} + r_3\mathbf{c} + r_4\mathbf{d} = \mathbf{o}$, tj. $r_1(1,2,3) + r_2(2,2,1) + r_3(3,-1,4) + r_4(4,2,-1) = (0,0,0)$. Dostáváme tedy soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}r_1 + 2r_2 + 5r_3 + 4r_4 &= 0\\ 2r_1 + 2r_2 - r_3 + 2r_4 &= 0\\ 3r_1 + r_2 + 4r_3 - r_4 &= 0,\end{aligned}$$

kterou řešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -7 & -6 & 0\\ 0 & -5 & -5 & -13 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 25 & 4 & 0\end{array}\right)$$

Soustava má méně rovnic než neznámých, tedy má nekonečně mnoho řešení. Mezi řešení je i řešení nenulové, a proto jsou vektory lineárně závislé.

Poznámka: Čtyři vektory v $\mathbb{R}^3$ jsou vždy lineárně závislé.

(12) Zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé vektory:

a) $\mathbf{a} = (1,2,3)$, $\mathbf{b} = (-2,-3,1)$, $\mathbf{c} = (1,2,-2)$

b) $\mathbf{a} = (1,1,-3)$, $\mathbf{b} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}-2, -3\sqrt{2}-3)$, $\mathbf{c} = (2,4,-3)$

c) $\mathbf{a} = (1,4,7)$, $\mathbf{b} = (1,1,1)$, $\mathbf{c} = (4,-2,-3)$

(13) Určete $k \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ byly lineárně nezávislé.

a) $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (2,k,3)$, $\mathbf{w} = (1,4,6)$

b) $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (3,k,6)$, $\mathbf{w} = (6,8,6)$

c) $\mathbf{u} = (1,3,2)$, $\mathbf{v} = (3,2,8)$, $\mathbf{w} = (8,1,k)$

(14) Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Stanovte koeficienty lineární kombinace:

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{u}_2 = (1,1,-1),\ \mathbf{u}_3 = (1,-1,1),\ \mathbf{v} = (2,-1,1) \qquad [13]$$

(15) Najděte všechny hodnoty $k \in \mathbb{R}$ tak, že vektor $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, jestliže

a) $\mathbf{u}_1 = (2,3,5)$, $\mathbf{u}_2 = (3,7,8)$, $\mathbf{u}_3 = (1,-6,1)$, $\mathbf{v} = (7,-2,k)$

b) $\mathbf{u}_1 = (2,3,7)$, $\mathbf{u}_2 = (3,2,5)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,2)$, $\mathbf{v} = (9,7,k)$

c) $\mathbf{u}_1 = (3,2,6)$, $\mathbf{u}_2 = (7,3,9)$, $\mathbf{u}_3 = (10,2,6)$, $\mathbf{v} = (k,4,10)$

(16) Rozhodněte, zda zadané vektory tvoří bázi vektorového prostoru V, je-li

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}_1 = (2,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-3,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (5,4,3)$ [11]

b) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{u}_1 = (1,2,3,4)$, $\mathbf{u}_2 = (3,2,8,1)$, $\mathbf{u}_3 = (2,1,3,4)$, $\mathbf{u}_4 = (5,4,5,2)$

Příklad 13: Určete souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in V$ vzhledem k bázi B, jestliže $\mathbf{v} = (1,-1,0)$, $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,2),(2,1,1),(-1,2,1)\}$. [13]

Řešení: Souřadnicemi vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi B rozumíme uspořádanou n-tici $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, takovou, že platí

$$\mathbf{v} = (1,-1,0) = x_1(1,1,2) + x_2(2,1,1) + x_3(-1,2,1).$$

Tedy

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Tuto soustavu řešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right)$$

Z poslední matice můžeme určit řešení soustavy rovnic.

$$x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = 2 - 2 = 0$$

$$x_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Souřadnicemi vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bázi B je uspořádaná trojice $\{\mathbf{v}\}_B = (\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3})$.

(17) Nalezněte souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in V$ vzhledem k bázi B, jestliže $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$, $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(2, 1, 2), (-3, 0, 1), (5, 4, 3)\}$.

Příklad 14: Určete všechny hodnoty parametrů $a \in \mathbb{R}$, pro které vektory
$\mathbf{u}_1 = (2, 0, 2a)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 7a, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (a - 2, 3, -2)$
tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Aby vektory tvořily bázi vektorového prostoru, tak musejí být lineárně nezávislé. Tedy z rovnosti

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{o},$$

musí plynout, že $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Daný vztah lze přepsat do následující homogenní soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + (a-2)x_3 &= 0 \\ 7ax_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2ax_1 - 2x_3 &= 0, \end{aligned}$$

kterou pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešíme.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a-2 & 0 \\ 0 & 7a & 3 & 0 \\ 2a & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a-2 & 0 \\ 0 & 7a & 3 & 0 \\ 0 & -a & -a^2+2a-2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a-2 & 0 \\ 0 & 7a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7a^2-14a+11 & 0 \end{array}\right)$$

Podle Věty 2.2. má homogenní soustava nulové řešení, právě když hodnost matice $\mathbf{A}$ soustavy je rovna třem. Výraz $7a^2 - 14a + 11$ je různý od nuly pro každé $a \in \mathbb{R}$

$(D = 196 - 308 = -112 < 0)$.
Z druhého řádku matice je zřejmé, že její hodnost je rovna třem, právě když $a \neq 0$. Vektory u_1, u_2 a u_3 tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ pro $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(18) Určete všechny hodnoty parametrů $a \in \mathbb{R}$, pro které zadané vektory tvoří bázi vektorového prostoru V.
a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}_1 = (a, a)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1)$ [8]
b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}_1 = (2, 3, a)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 4, 2a)$, $\mathbf{u}_3 = (5, 8, 1 + 2a)$ [11]
c) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}_1 = (1, 0, a)$, $\mathbf{u}_2 = (1, a, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (a - 1, 1, 1)$ [8]

Příklad 15: Nalezněte bázi a dimenzi vektorového prostoru V všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0$$
$$5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0$$
$$3x_1 + 14x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \qquad [11]$$

Řešení: Příklad budeme řešit pomocí Věty 2.3. Nejdříve soustavu upravíme pomocí Gaussovy eliminační metody na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & -3 & 9 & 0 \\ 3 & 14 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 13 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 13 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 13 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Za volné neznámé si zvolíme neznámé x_2, x_4 a pomocí těchto volných neznámých určíme ihned z poslední matice i zbylé neznámé:

$$x_3 = 3x_4 - 13x_2$$
$$3x_1 = -x_2 + 6x_4 - 26x_2 - 6x_4 = -27x_2$$
$$x_1 = -9x_2$$

Řešením dané soustavy je tedy uspořádaná čtveřice $(-9x_2, x_2, 3x_4 - 13x_2, x_4)$,
$x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.
Hodnost matice soustavy je $h = 2$, počet neznámých je $n = 4$, tedy
$\dim V = 4 - 2 = 2$, což je právě počet volných neznámých. Pokud je dimenze vektorového prostoru V rovna dvěma, tak potom existují dva vektory báze.

Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, které tvoří bázi prostoru V, získáme, když za neznámé x_2, x_4 zvolíme například:

- $x_2 = 0,\ x_4 = 1$, tj. $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 3, 1)$
- $x_2 = 1,\ x_4 = 0$, tj. $\mathbf{u}_2 = (-9, 1, -13, 0)$.

Tedy $V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ a bází prostoru V je množina $\{(0, 0, 3, 1), (-9, 1, -13, 0)\}$.

(19) Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru V všech řešení homogenní soustavy rovnic:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \qquad [8] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0 \qquad [15] \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 14x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 9x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 20x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 15x_5 &= 0 \qquad [11] \end{aligned}$$

Příklad 16: Nalezněte soustavu homogenních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejíž množina řešení je rovna podprostoru V vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$, kde $V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ a
$\mathbf{u}_1 = (2, -4, 5, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (3, -6, 4, 2)$, $\mathbf{u}_3 = (4, -8, 17, 11)$. [7]
Řešení: Nejprve vytvoříme homogenní soustavu tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých, kde koeficienty u neznámých jsou složky vektorů dané báze. Dále najdeme bázi vektorového prostoru všech řešení této soustavy. Složky vektorů nové báze pak budou tvořit koeficienty u neznámých v hledané soustavě.
Nejprve tedy řešíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Pak

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right),$$

odtud zvolíme x_2, x_3 za volné neznámé a pomocí těchto volných neznámých určíme z poslední matice i zbylé neznámé:

$$\begin{aligned} 5x_4 &= -7x_3 \\ x_4 &= -\frac{7}{5}x_3 \\ 2x_1 = 4x_2 - 5x_3 + \frac{21}{5}x_3 &= 4x_2 + \frac{4}{5}x_3 \\ x_1 &= 2x_2 + \frac{2}{5}x_3. \end{aligned}$$

Řešením dané soustavy je tedy uspořádaná čtveřice $(2x_2 + \frac{2}{5}x_3, x_2, x_3, -\frac{7}{5}x_3)$.
Báze podprostoru řešení této soustavy je například

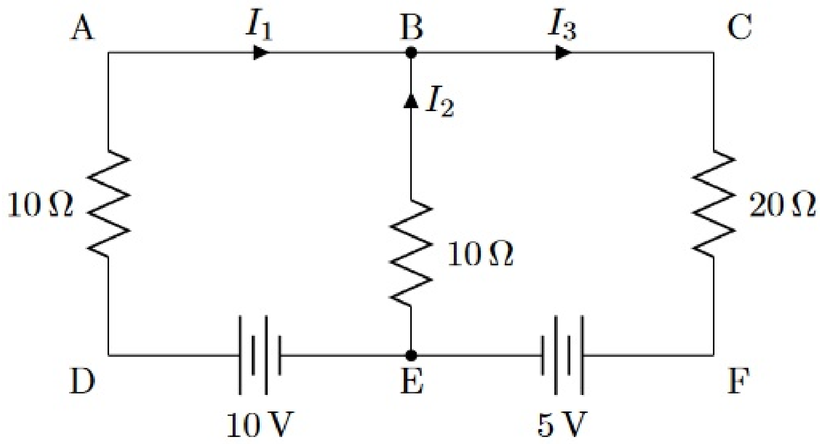
$$\mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (2, 0, 5, -7).$$

Hledaná soustava lineárních rovnic je pak například:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_3 - 7x_4 &= 0. \end{aligned}$$

(20) Nalezněte soustavu homogenních rovnic nad $\mathbb{R}$, jejíž množina řešení je rovna podprostoru V vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$, kde $V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ a $\mathbf{u}_1 = (3, 1, 1, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3, 5, 6)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 8, 14, 14)$.

(21) Uvažujme elektrický obvod jak je vyznačený na obrázku



Chceme-li určit hodnoty elektrických proudů I_1, I_2, I_3, tak využijeme fyzikální zákony:

(1) *Ohmův zákon*: Napětí je rovno součinu proudu a odporu: $U = IR$.

(2) *Kirchhoffův zákon o proudu*: Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.

(3) *Kirchhoffův zákon o napětí*: Součet napětí ve smyčce je roven nule. [9]

Z Kirchhoffova zákona o proudu lze vytvořit rovnici k uzlu B. Kirchhoffův zákon o napětí (spolu s Ohmovým zákonem) pro smyčku DABE a smyčku EBCF vytvoří další dvě rovnice. Tyto tři rovnice dávají dohromady soustavu třech rovnic o třech neznámých.

(22) Ze známých zatěžovacích odporů a svorkových napětí určete výpočtem elektromotorické napětí fotočlánku U_E a jeho vnitřní odpor R_i.

Za odpory R_Z a R_V dosaďte hodnoty: $R_Z = 10k\Omega$, $R_V = 100k\Omega$.

K výpočtu U_E a R_i použijte následující vztahy

$$U_E = R_i J_1 + U_1;\ U_1 = R_V J_1$$
$$U_E = R_i J_2 + U_2;\ U_2 = \tfrac{R_V R_Z}{R_V + R_Z} J_2$$

$l[cm]$	$E[lx]$	$U_1[mV]$	$U_2[mV]$	$J_1[\mu A]$	$J_2[\mu A]$	$U_E[V]$	$R_i[\Omega]$
7	6410	460	460				
12	2020	390	380				
30	324	260	220				

Tabulka 4.1: Zadané hodnoty

Vypočtené hodnoty doplňte do tabulky.

4.2 Výsledky

(1)

a) $h(\mathbf{A}) = 2$, $h(\mathbf{A}') = 3 => $ soustava nemá řešení

b) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = 3 => (2, 3, 5)$

c) $h(\mathbf{A}) = 2$, $h(\mathbf{A}') = 3 => $ soustava nemá řešení

d) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = 2 => (\frac{3}{2}s - \frac{3}{2}t, 1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, s, t),\ s, t \in \mathbb{R}$

e) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}') = 4 => (1, -4, 0, 2)$

(2)

a) $(2x_3, 4x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}$; b) $(\frac{13}{7}x_3, \frac{2}{7}x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}$; c) $(0, 0, 0, 0)$; d) $(\frac{7}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4, -3x_3 + 2x_4, x_3, x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; e) $(0, 0, 0, 0, 0)$

(3)

a) $(2, -4, 3)$; b) $(3x_2 + 5x_4 - 8x_5, x_2, 1 - 2x_4 + 3x_5, x_4, x_5), x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$; c) soustava nemá řešení

(4)

a) $(1 + x_2, x_2, -1 + 3x_2, 0), x_2 \in \mathbb{R}$; b) $(2, 1, 2, 0)$

(5)

a) $(3, 1, 2)$; b) $(5, 2, 1)$; c) $(1, 1, 1, 1)$

(6)

a) $(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$; b) $(3, 1, -1)$; c) $(1, 2, 1, 3)$

(7)

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{-17}{7} & \frac{8}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{40} & \frac{1}{10} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(8)

a) $(2, -2, 3)$; b) $(-1, -1, 0, 1)$; c) $(1, 1, 1, 1)$

(9)

a) $(2, 3)$; b) $((1+i)x_2, x_2, (-2+i)x_2), x_2 \in \mathbb{C}$; c) soustava nemá řešení

(10)

a) nad $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

x_2 ... volná neznámá, řešení $(0, x_2, -2x_2)$

$x_2 = 0 : (0, 0, 0)$; $x_2 = 1 : (0, 1, 1)$; $x_2 = 2 : (0, 2, 2)$

b) nad $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$

$$x_1 + x_2 = 0$$

x_2 ... volná neznámá, řešení $(-x_2, x_2)$

$x_2 = 0 : (0, 0)$; $x_2 = 1 : (1, 1)$

c) soustava neexistuje

(11)

a) žádné řešení pro $2p+3=0$, jedno řešení v závislosti na parametru p pro $2p+3 \neq 0$ ve tvaru $(-\frac{7}{2p+3}, \frac{5p+4}{2p+3})$
b) jedno řešení pro $p \neq 2$ a $p \neq \frac{1}{6}$ tvaru $(0,0,0)$, pro $p=2$ nekonečně mnoho řešení tvaru $(3x_2, x_2, 2x_2)$, pro $p = \frac{1}{6}$ nekonečně mnoho řešení tvaru $(\frac{2}{5}x_3, -\frac{7}{30}x_3, x_3)$
c) soustava nemá řešení pro $p = -2$, nekonečně mnoho řešení pro $p = 1$ tvaru $(1 - x_2 - x_3, x_2, x_3)$, právě jedno řešení pro $p \neq -2$ a $p \neq 1$ tvaru $(\frac{1}{p+2}, \frac{1}{p+2}, \frac{1}{p+2})$
d) pro $p = 3$ soustava nemá řešení, nekonečně mnoho řešení pro $p = -1$ tvaru $(2 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4), x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, jediné řešení pro $p \neq 3$ a $p \neq -1$ tvaru $(-\frac{2}{p-3}, -\frac{2}{p-3}, -\frac{2}{p-3}, -\frac{2}{p-3})$

(12)

a) $(0,0,0)$ => vektory jsou lineárně nezávislé
b) $((-2-\sqrt{2})x_3, x_3, x_3)$ => soustava má nekonečně mnoho řešení, tedy i nenulové, a proto jsou vektory lineárně závislé
c) $(0,0,0)$ => vektory jsou lineárně nezávislé

(13)

a) vektory jsou LN pro $k \in \mathbb{R} - \{2, \frac{13}{5}\}$; b) LN pro libovolné $k \in \mathbb{R}$; c) LN pro $k \in \mathbb{R} - \{\frac{55}{2}\}$

(14)

$v = 0x_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \frac{3}{2}\mathbf{u}_3$, koeficienty lineární kombinace jsou $r_1 = 0, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{3}{2}$

(15)

a)$k = 15$; b) pro libovolné $k \in \mathbb{R}$; c) soustava nemá řešení pro žádné $k \in \mathbb{R}$

(16)

a) vektory jsou LN, tudíž tvoří bázi vektorového prostoru; b) LN vektory, které tedy tvoří bázi

(17)

$\{\mathbf{x}\}_B = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

(18)

a) $a \in \mathbb{R} - \{0\}$; b) $a \in \mathbb{R}$; c) $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$

(19)

a) $\dim V = 1$, báze je např. $(\frac{13}{2}, 1, \frac{7}{2})$

b) $\dim V = 0$, báze neexistuje

c) $\dim V = 2$, báze je např. $(1, 2, 1, -4, 0), (2, 0, 0, -\frac{12}{5}, 1)$

d) $\dim V = 3$, báze je např. $(3, 0, 9, 0, 1), (-8, 0, -10, 1, 0), (0, 1, 3, 0, 0)$

(20)

Řešením soustavy je uspořádaná čtveřice $(\frac{2}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4, -\frac{13}{7}x_3 - \frac{10}{7}x_4, x_3, x_4)$.

Báze podprostoru řešení této soustavy je například

$\mathbf{u}_1 = (-6, -10, 0, 7), \mathbf{u}_2 = (2, -13, 7, 0)$.

Hledaná soustava lineárních rovnic je pak například:

$$-6x_1 - 10x_2 + 7x_4 = 0$$

$$2x_1 - 13x_2 + 7x_3 = 0.$$

(21)

$l\ [cm]$	$J_1\ [\mu A]$	$J_2\ [\mu A]$	$U_E\ [V]$	$R_i\ [\Omega]$
7	4,6	50,6	0,46	0,00
12	3,9	41,8	0,39	263,85
30	2,6	24,2	0,26	1851,85

(22)

Kirchhoffův zákon o proudu: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Kirchhoffův zákon o napětí pro smyčku DABE: $10I_1 - 10I_2 = 10$

Kirchhoffův zákon o napětí pro smyčku EBCF: $10I_2 + 20I_3 = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 20 & 5 \end{array}\right)$$

Řešení: $I_1 = 0,7A, I_2 = -0,3A, I_3 = 0,4A$

Závěr

V rámci této bakalářské práce jsem se zabývala problematikou soustav lineárních rovnic a vytvořením sbírky úloh, která by mohla sloužit jako pomocný materiál pro studenty a učitele matematiky při výkladu tohoto tématu. Využití je možné například pro střední školy s rozšířenou výukou matematiky, do hodin volitelných seminářů matematiky nebo pro studenty vysokých škol, kteří skládají zkoušku z matematiky.

Cílem práce bylo vytvořit přehled několika metod řešení soustav lineárních rovnic, zkoumat jejich řešitelnost a vytvořit sbírku úloh, ve které se nacházejí jak řešené, tak neřešené příklady s výsledky.

V závěru sbírky se objevují i úlohy praktické, jejichž řešení vede na výpočet soustavy lineárních rovnic.

Při psaní bakalářské práce jsem využila a prohloubila své znalosti z vysoké školy a psaní v programu LATEX.

Literatura

[1] Anton, Howard a Busby Robert C.. *Contemporary linear algebra*. Hoboken, NJ: Wiley, 2003. ISBN 978-0-471-16362-6.

[2] Bečvář, Jindřich. *Lineární algebra*. Praha: Matfyzpress, 2000. ISBN 80-85863-61-8.

[3] Bican, Ladislav. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

[4] Bican, Ladislav. *Lineární algebra*. Vyd. 1. Praha: SNTL, 1979.

[5] Blažek, Jaroslav; Calda, Emil; Koman, Milan a Kussová, Blanka. *Algebra a teoretická aritmetika 1*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1983. ISBN 14-514-83.

[6] Dostál, Zdeněk. *Lineární algebra*. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 2012.

[7] Emanovský, Petr a Kühr, Jan. *Cvičení z algebry pro 1. ročník I*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2007. ISBN 978-80-244-1833-9.

[8] Gavalcová, Tatiana. *Sbírka úloh z matematiky 2*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2013. ISBN 978-80-7435-269-0.

[9] Hladík, Milan. *Lineární algebra (nejen) pro informatiky*. Praha: Matfyzpress, 2019. ISBN 978-80-7378-392-1.

[10] Horák, Pavel. *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

[11] Horák, Pavel. *Sbírka příkladů ze základů matematiky a lineární algebry*. Brno: Masarykova univerzita, 2003.

[12] Jirásek, František; Kriegelstein, Eduard a Tichý, Zdeněk. *Sbírka řešených příkladů z matematiky I: Logika a množiny, lineární a vektorová algebra, analytická geometrie, posloupnosti a řady, diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné*. Třetí. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1987. ISBN 04-010-87.

[13] Kaňka, Miloš. *Sbírka řešených příkladů z matematiky: pro studenty vysokých škol*. Praha: Ekopress, 2009. ISBN 978-80-86929-53-8.

[14] Lipschutz, Seymour. *3000 solved problems in linear algebra*. New York: McGraw-Hill, 1988. Schaum's solved problems series. ISBN 0-07-038023-6.

[15] Palumbíny, Daniel. *Algebra 1 (Lineárna algebra)*. Nitra: UKF, 1997. ISBN 978-80-8094-104-8.