UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

## Variety MV-algeber

| | |
|---|---|
| Vypracoval: | Bc. Václav Cenker |
| Vedoucí práce: | prof. RNDr. Jan Kühr, Ph.D. |
| Studijní program: | N0541A170009 – Diskrétní matematika |
| Studijní obor: | Diskrétní matematika |
| Forma Studia: | Prezenční |
| Rok obhajoby: | 2022 |

## Bibliografické identifikační údaje


| | |
|---|---|
| Autor: | Bc. Václav Cenker |
| Název práce: | Variety MV-algeber |
| Typ práce: | Diplomová práce |
| Katedra: | Katedra algebry a geometrie |
| Vedoucí práce: | prof. RNDr. Jan Kühr, Ph.D. |
| Rok obhajoby: | 2022 |
| Jazyk: | Čeština |
| Anotace: | Cílem práce je shrnout známé výsledky o varietách MV-algeber, popsat svaz podvariet variety všech MV-algeber a axiomatizovat všechny podvariety. K tomu účelu práce využívá reprezentace MV-algeber pomocí abelovských $\ell$-grup. Navíc se práce zabývá také varietou ŁBCK-algeber a svazem podvariet variety všech ŁBCK-algeber. |
| Klíčová slova: | MV-algebra, MV-řetězec, abelovská $\ell$-grupy, varieta MV-algeber, BCK-algebra, ŁBCK-algebra, univerzální algebra, vícehodnotová logika |
| Počet stran: | 73 |
| Počet příloh: | 0 |

## Bibliographical identifications

| | |
|---|---|
| Author: | Bc. Václav Cenker |
| Title: | Varieties of MV-algebras |
| Type of thesis: | Diplomová práce |
| Department: | Department of Algebra and Geometry |
| Supervisor: | prof. RNDr. Jan Kühr, Ph.D. |
| Year of presentation: | 2022 |
| Language: | Czech |
| Annotation: | The aim of the thesis is to summarize known results on varieties of MV-algebras including detailed description of the lattice of subvarieties and equational characterization of all subvarieties. For that purpose we widely use representation of MV-algebras by abelian $\ell$-groups. Part of the work is also devoted to ŁBCK-algebras and their varieties. |
| Key words: | MV-algebra, MV-chain, abelian $\ell$-group, variety of MV-algebras, BCK-algebra, ŁBCK-algebra, universal algebra, many-valued logic |
| Number of pages: | 73 |
| Number of attachments: | 0 |

## Prohlášení

Prohlašuji, že tuto diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Jana Kühra, Ph.D. a v seznamu literatury jsem uvedl všechny použité zdroje.

V Olomouci: Podpis:

## Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Janu Kührovi, Ph.D. za jeho rady, ochotu a trpělivost při vedení práce. Poděkování také patří rodině a přátelům, jejíchž podpory si vážím.

# Obsah

# Úvod

Dříve než se pustíme do samotného matematického textu, popíšeme nejprve v krátkosti historii a motivace, které stály za vznikem MV-algeber.

Původ zkratky „MV“ je z anglického výrazu *many-valued logic*, tj. vícehodnotová logika. Začátky vícehodnotové logiky se vážou ke známému jménu polského matematika J. Łukasiewicze. Jeho původním záměrem bylo zavedení tříhodnotové logiky, kde by tato třetí hodnota zastávala hodnotu pro „možné“. Łukasiewicz se tímto tématem začal zabývat v roce 1920. Podobný nápad, přidávat další pravdivostní hodnoty, ale s jinou motivací měl roku 1921 také americký matematik původem z Polska E. L. Post. V průběhu dalších let se teorie vícehodnotových logik dále rozvíjela.

Roku 1958 publikovali J. B. Rosser a A. Rose důkaz úplnosti Łukasiewiczových axiomů pro nekonečně hodnotovou výrokovou logiku (viz [16]). Pár let předtím vedl J. B. Rosser na toto téma seminář na Cornellově univerzitě v Ithace v New Yorku. Tento seminář navštěvoval také mladý matematik C. C. Chang. Napadlo ho, že by mohl úplnost Łukasiewiczovy vícehodnotové logiky dokázat přes algebraický aparát. Začal se tím intenzivně zabývat a v roce 1958 publikoval svůj známý článek *Algebraic Analysis of Many Valued Logics* . Později v krátkém vyprávění nazvaném *The Writing of the MV-algebra* C. C. Chang píše:

> *I was not familiar with formulas in Polish notationis used in their joint paper, and had difficulty following the argument on the blackboard with one long formula in Polish notation after another. In fact, I had no idea where the arguments were leading up to, as we were not given any notes beforehand.*
>
> *Just as I was about to give up on trying to follow and understand Prof. Rosser's presentations (or may be even after I had given up), it occurred to me that the approach used in the proof of completeness of the two valued propositional logic via the Boolean (Lindenbaum) algebra of equivalence classes of formulas and the Boolean maximal ideal theorem might be another way to do what Rose and Rosser did, but avoiding syntactical manipulations of formulas in Polish notation. That was the beginning of MV-algebras.*
>
> *So because of my own shortcomings in following proofs in Polish notation, MV-algebras came to be.*

Stojí také za zmínku, že úplně první, kdo dokázal úplnost Lukasiewiczovy nekonečně hodnotové výrokové logiky, byl polský matematik M. Wajsberg, a to již v roce 1935. Jeho důkaz bohužel nebyl ve své době publikován. Později se na přístup Wajsberga navázalo a vznikly tzv. Wajsbergovy algebry, zkráceně W-algebry. MV-algebry a W-algebry jsou termově ekvivalentní. Rozdíl spočívá v tom, že W-algebry používají operaci představující hodnotu implikace, zatímco MV-algebry operaci představující hodnotu disjunkce.

V současnosti je již teorie okolo MV-algeber dobře prozkoumaná. Tato práce si proto neklade za cíl přijít s něčím převratným. Cílem této práce je detailněji se seznámit s varietou MV-algeber, jejich podvarietami, se svazem podvariet a také pomocí identit charakterizovat úplně všechny variety MV-algeber, přičemž se snažíme co nejvíce využívat korespondence MV-algeber s abelovskými $\ell$-grupami a tedy i využívat známých tvrzení o abelovských $\ell$-grupách. Některá trvzení o $\ell$-grupách budeme uvádět bez důkazu. V takovém případě ale uvedeme odkaz na literaturu, která důkaz obsahuje. Kromě MV-algeber se v práci věnujeme také ŁBCK-algebrám a jejich varietám. ŁBCK-algebry jsou totiž velmi blízké MV-algebrám; přesněji řečeno ŁBCK-algebry jsou právě subredukty MV-algeber.

Téma této práce v podstatě navazuje na bakalařskou práci, a to v tom smyslu, že dále rozvíjí autorovy znalosti a schopnosti ve zkoumání struktur korespondujících s určitými (nestandardními) logikami. Bakalářská práce je věnována především BL-algebrám a ordinálním sumám (viz [3]). Platí, že každá MV-algebra je BL-algebrou. Lze proto některé vlastnosti MV-algeber najít i v bakalářské práci.

# 1. MV-algebry

Tato kapitola si klade za cíl seznámit čtenáře se základními poznatky o MV-algebrách a získat tak potřebný základ pro další kapitoly. V této kapitole čerpáme zejména z kapitoly 1 monografie [4] a z původního článku C. C. Changa [5].

## 1.1. Základní definice a trvzení

**Definice 1.1.1.** *MV-algebrou* nazveme algebru $A = (A, \oplus, \neg, 0)$ typu $(2, 1, 0)$, která splňuje následující identity:

$$x \oplus y = y \oplus x, \tag{MV1}$$
$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z, \tag{MV2}$$
$$x \oplus 0 = x, \tag{MV3}$$
$$\neg\neg x = x, \tag{MV4}$$
$$x \oplus \neg 0 = \neg 0, \tag{MV5}$$
$$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x. \tag{MV6}$$

Dále v každé MV-algebře definujeme 1 a operace $\ominus$, $\odot$ takto:

$$\begin{aligned} 1 &= \neg 0, \\ x \odot y &= \neg(\neg x \oplus \neg y), \\ x \ominus y &= x \odot \neg y = \neg(\neg x \oplus y). \end{aligned}$$

*Poznámka* 1.1.2. Uvedená definice je z [4]. Původní definice uvedená v [5] se ale liší. V typu MV-algebry je zahrnuta operace $\odot$ a konstanta 1 a v definici je také více identit. Původní definice je ovšem s touto definicí ekvivalentní, neboť $\odot$ se dá definovat termově vzhledem k $\oplus$ a $\neg$ a lze ukázat, že množina původních identit se dá zredukovat a postačí uvedené identity.

**Lemma 1.1.3.** *Nechť $A$ je MV-algebra. Pak pro každé $x$, $y$, $z \in A$ platí:*

*(1)* $x \oplus \neg x = 1$,

*(2)* $(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$,

*(3)* $x \odot y = y \odot x$,

*(4)* $x \odot 0 = 0$,

*(5)* $x \odot 1 = x$,

*(6)* $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$,

*(7)* $x \ominus 1 = 0$,

*(8)* $x \ominus 0 = x$,

*(9)* $0 \ominus x = 0$,

*(10)* $x \ominus x = 0$,

*(11)* $1 \ominus x = \neg x$.

*Důkaz.*

(1) Využitím (MV3), (MV4), (MV5) a (MV6) dostáváme:

$$x \oplus \neg x = \neg(\neg 1 \oplus \neg x) \oplus \neg x = \neg(x \oplus 1) \oplus 1 = 1.$$

(2) Jedná se přímo o identitu (MV6).

(3) Zřejmé.

(4) Díky (MV4) a (MV5) platí $x \odot 0 = \neg(\neg x \oplus 1) = 0$.

(5) Použitím (MV3) a (MV4) dostaneme $x \odot 1 = \neg(\neg x \oplus 0) = x$.

(6) Plyne z (MV6):

$$(x \odot y) \odot z = \neg((\neg x \oplus \neg y) \oplus \neg z) = \neg(\neg x \oplus (\neg y \oplus \neg z)) = x \odot (y \odot z).$$

(7) Plyne ze (4), stačí použít vztah $x \ominus 1 = x \odot 0$.

(8) Plyne z (5), neboť $x \ominus 0 = x \odot 1$.

(9) Díky (MV5) platí $0 \ominus x = \neg\neg 0 = 0$.

(10) Přímý důsledek (1), protože $x \ominus x = \neg(\neg x \oplus x) = 0$.

(11) Použitím (5) dostaneme $1 \ominus x = 1 \odot \neg x = \neg x$. □

MV-algebry lze uspořádat, a to takto:

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; \neg x \oplus y = 1.$$

Lze ukázat, že toto uspořádání je svazové a také přirozené, tj. $x \leq y$, právě když existuje $z$ tak, že $x \oplus z = y$ (viz [4], [5] případně [3]). Svazové operace lze vyjádřit následovně:

$$x \vee y = (x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x,$$
$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y).$$

**Lemma 1.1.4.** *Nechť $A$ je MV-algebra a nechť $x$, $y \in A$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

*(i)* $x \leq y$,

*(ii)* $x \odot \neg y = 0$,

*(iii)* $y = x \oplus (y \ominus x)$.

*Důkaz.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Platí $x \odot \neg y = \neg(\neg x \oplus y) = \neg 1 = 0$. (ii) $\Rightarrow$ (iii) Podle lemmatu 1.1.3 (2) je $x \oplus (y \ominus x) = y \oplus (x \ominus y)$ a $x \ominus y = x \odot \neg y = 0$. (iii) $\Rightarrow$ (i) Platí $\neg x \oplus y = \neg x \oplus x \oplus (y \ominus x) = 1 \oplus (y \ominus x) = 1$. $\square$

**Lemma 1.1.5.** *Nechť $A$ je MV-algebra. Pro každé $a \in A$ je $\neg a$ jediné řešení systému rovnic:*

$$a \oplus x = 1,$$
$$a \odot x = 0.$$

*Důkaz.* Z první rovnice máme $\neg a \leq x$ a z druhé podle lemmatu 1.1.4 máme $x \leq \neg a$. To implikuje $x = \neg a$. $\square$

Je-li uspořádání na MV-algebře lineární, pak se daná MV-algebra nazývá *MV-řetězec*.

**Lemma 1.1.6.** *Nechť $A$ je MV-řetězec. Pak pro každé $x$, $y$, $z \in A$ platí:*

*(1)* $x \oplus y < 1$ *implikuje* $x \odot y = 0$;

*(2)* $x \oplus y = x \oplus z < 1$ *implikuje* $y = z$;

*(3)* $x = x \oplus y$, *právě když* $x = 1$ *nebo* $y = 0$;

*(4)* $x \oplus y = 1$ *a* $x \oplus z < 1$, *pak* $(x \odot y) \oplus z = (x \oplus z) \odot y$.

*Důkaz.*

(1) $x \oplus y < 1$ implikuje $\neg x \nleq y$. To znamená $y < \neg x$ a podle lemmatu 1.1.4 (ii) platí $x \odot y = 0$.

(2) Podle (1) $x \oplus y = x \oplus z < 1$ implikuje $x \odot y = 0$ a $x \odot z = 0$. Dále platí:

$$\neg x \vee y = (y \ominus \neg x) \oplus \neg x = (y \odot x) \oplus \neg x = (z \odot x) \oplus \neg x = \neg x \vee z.$$

Analogicky lze ukázat, že platí $\neg x \wedge y = \neg x \wedge z$. To dohromady s předchozím implikuje $y = z$.

(3) Implikace zprava doleva je triviální. Pokud $x \oplus y = x < 1$, pak podle (2) $y = 0$ a jinak $x = 1$.

(4) Díky předpokladu, že $x \oplus y = 1$, tj. $\neg y \leq x$, platí:

$$\neg y \oplus (x \odot y) \oplus z = (\neg y \vee x) \oplus z = x \oplus z < 1,$$

a také:

$$\neg y \oplus ((x \oplus z) \odot y) = \neg y \vee (x \oplus z) = x \oplus z < 1.$$

Nyní použitím (2) dostáváme tvrzení bodu (4). □

V MV-algebrách definujeme přirozený násobek a přirozenou mocninu prvku. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ induktivně definujeme:

$$\begin{aligned} 1 \times x = x, &\quad n \times x = x \oplus (n-1) \times x, \\ x^1 = x, &\quad x^n = x \odot x^{n-1}. \end{aligned}$$

Zaveďme konvenci, že přirozený násobek $\times$ bude mít ve výrazech vždy přednost před binárními operacemi MV-algeber. Například výraz $(n \times x) \ominus y$ budeme psát zjednodušeně jako $n \times x \ominus y$.

**Lemma 1.1.7.** *Nechť $A$ je MV-algebra. Pak pro každé $x$, $y$, $z \in A$ platí:*

*(1) $x \leq y$, právě když $\neg y \leq \neg x$;*

*(2) $x \ominus y \leq x$ a $x \odot y \leq x \wedge y$;*

*(3) $x \ominus y \leq \neg y$;*

*(4) $x \leq y$ implikuje $x \oplus z \leq y \oplus z$ a $x \odot z \leq y \odot z$;*

*(5) $x \leq y$ implikuje $x \ominus z \leq y \ominus z$ a $z \ominus y \leq z \ominus x$;*

*(6) $x \leq y$ implikuje $n \times x \leq n \times y$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;*

*(7) $x \leq y$ implikuje $x^n \leq y^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;*

*(8) $x \ominus y \leq (x \ominus z) \oplus (z \ominus y)$.*

*Důkaz.*

(1) Protože platí rovnost $\neg x \oplus y = \neg x \oplus \neg\neg y$, je podle definice uspořádání tvrzení zřejmé.

(2) Platí:

$$\neg(x \ominus y) \oplus x = \neg\neg(\neg x \oplus y) \oplus x = \neg x \oplus y \oplus x = 1.$$

Takže $x \ominus y \leq x$. Druhá část tvrzení plyne z $x \ominus \neg y = x \odot y = y \odot x = y \ominus \neg x$.

(3) Podobně jako v předchozím případě platí:

$$\neg(x \ominus y) \oplus \neg y = \neg x \oplus y \oplus \neg y = 1.$$

(4) Nechť $x \leq y$, tj. $\neg x \oplus y = 1$. Pak platí:

$$\neg(x \oplus z) \oplus y \oplus z = \neg(\neg z \oplus \neg x) \oplus \neg x \oplus y = \neg(\neg z \oplus \neg x) \oplus 1 = 1.$$

Dále:

$$\neg(x \odot z) \oplus (y \odot z) = \neg x \oplus \neg z \oplus \neg(\neg y \oplus \neg z) = \neg x \oplus y \oplus \neg(z \oplus y) = \\ = 1 \oplus \neg(z \oplus y) = 1.$$

(5) Nechť $x \leq y$. Pak platí:

$$\neg(x \ominus z) \oplus (y \ominus z) = \neg x \oplus z \oplus \neg(\neg y \oplus z) = \neg x \oplus y \oplus \neg(\neg z \oplus y) = 1.$$

Dále platí:

$$\neg(z \ominus y) \oplus (z \ominus x) = \neg z \oplus y \oplus \neg(\neg z \oplus x) = \neg x \oplus y \oplus \neg(\neg x \oplus z) = 1.$$

(6) Nechť $x \leq y$. Zřejmě díky (MV6) platí:

$$n \times x \oplus n \times (\neg y \oplus x) = n \times y \oplus n \times \neg(\neg x \oplus y),$$

Protože $\neg x \oplus y = 1$, tak:

$$n \times y \oplus n \times \neg(\neg x \oplus y) = n \times y \oplus n \times 0 = n \times y.$$

Tedy platí $n \times y = n \times x \oplus n \times (\neg y \oplus x)$. Díky tomu, že uspořádání je přirozené, dostáváme požadované tvrzení.

(7) Snadno se vidí, že platí $x^n = \neg(n \times \neg x)$. Protože $x \leq y$, tak díky bodu (1) platí $\neg y \leq \neg x$. Z bodu (6) plyne, že $n \times \neg y \leq n \times \neg x$, a to opět díky bodu (1) implikuje:

$$x^n = \neg(n \times \neg x) \leq \neg(n \times \neg y) = y^n.$$

(8) Použitím lemmatu 1.1.3 (2) dostaneme:

$$\neg(x \ominus y) \oplus (x \ominus z) \oplus (z \ominus y) = \neg x \oplus (x \ominus z) \oplus (y \ominus z) \oplus z = \\ = \neg x \oplus (z \ominus x) \oplus x \oplus (y \ominus z) = 1.$$

Takže $x \ominus y \leq (x \ominus z) \oplus (z \ominus y)$. □

## 1.2. Ideály a homomorfismy

**Definice 1.2.1.** Řekněme, že $I$ je *ideál* MV-algebry $A$, jestliže $I \subseteq A$ a platí:

(i) $0 \in I$,

(ii) pokud $x \in I$, $y \in A$ a $y \leq x$, pak $y \in I$,

(iii) pokud $x, y \in I$, pak $x \oplus y \in I$.

Pokud bude $I \subset A$, pak budeme hovořit o *vlastním* ideálu $A$, a $I = \{0\}$ budeme nazývat *triviální ideál.*

Ideál $I$ MV-algebry $A$ se nazývá *maximální*, jestliže je vlastní a pro každý ideál $J \neq I$ platí, že $I \subset J$ implikuje $J = A$ . Množinu ideálů MV-algebry $A$ budeme značit $\mathrm{I}(A)$. Množina $\mathrm{I}(A)$ tvoří vzhledem k množinové inkluzi úplný svaz.

Další standardní pojmy jako je homomorfismus, jádro homomorfismu, izomorfismus, kongruence atd., budeme považovat za známé a nebudeme je zvlášť definovat. Množinu kongruencí na MV-algebře $A$ budeme značit $\mathrm{Con}(A)$. Množina $\mathrm{Con}(A)$ společně s množinovou inkluzí tvoří úplný svaz.

**Lemma 1.2.2.** *Nechť $A$, $B$ jsou MV-algebry a $h : A \to B$ homomorfismus. Pak platí:*

*(1) Pro ideál $J \in \mathrm{I}(B)$ platí $h^{-1}(J) = \{x \in A \mid h(x) \in J\} \in \mathrm{I}(A)$.*

*(2)* $\mathrm{Ker}(h) \in \mathrm{I}(A)$.

*(3) $h(x) \leq h(y)$, právě když $x \ominus y \in \mathrm{Ker}(h)$.*

*(4) $h$ je injektivní, právě když* $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$.

*Důkaz.*

(1) Nechť $J \in \mathrm{I}(B)$ a $x, y \in h^{-1}(J)$. Pak $h(x) \oplus h(y) = h(x \oplus y) \in J$, tj. $x \oplus y \in h^{-1}(J)$. Je-li $x \leq y$, $x \in A$ a $y \in h^{-1}(J)$, pak $h(x) \leq h(y) \in J$, tj. $x \in h^{-1}(J)$. Je jasné, že $0 \in h^{-1}(J)$.

(2) Speciální případ (1), kde $J = \{0\}$.

(3) Platí $0 = h(x \ominus y) = h(x) \ominus h(y)$, což je podle lemmatu 1.1.4 ekvivalentní s $h(x) \leq h(y)$.

(4) Nechť $x, y \in A$ jsou takové, že $h(x) = h(y)$. Pak $h(x \ominus y) = h(x) \ominus h(y) = 0$ a stejně tak $h(y \ominus x) = 0$. Protože $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$, tak $x \ominus y = 0 = y \ominus x$. To implikuje $\neg x \oplus y = 1$ a $\neg y \oplus x = 1$, tj. $x \leq y$ a $y \leq x$, takže $x = y$. □

**Lemma 1.2.3.** *Nechť $h: A \to B$ je surjektivní homomorfismus MV-algeber. Pak relace $x \equiv y \Leftrightarrow h(x) = h(y)$ je kongruence na $A$.*

*Důkaz.* To, že $\equiv$ je ekvivalence, je zřejmé. Platnost substitučních podmínek je z vlastností homomorfismu rovněž hned vidět. □

V dalším kroku ukážeme, že mezi kongruencemi a ideály existuje vzájemně jednoznačný vztah. Nejprve zavedeme novou operaci. Nechť $A$ je MV-algebra a $d$ je operace na $A$ definovaná takto:

$$d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x).$$

Operaci $d$ budeme nazývat *vzdálenost*.

**Lemma 1.2.4.** *Nechť $A$ je MV-algebra. Pak pro všechna $s$, $t$, $x$, $y$, $z \in A$ platí:*

*(1) $d(x, y) = 0$, právě když $x = y$,*

*(2) $d(x, y) = d(y, x)$,*

*(3) $d(x, y) = d(\neg x, \neg y)$,*

*(4) $d(x, z) \leq d(x, y) \oplus d(y, z)$,*

*(5) $d(x \oplus s, y \oplus t) \leq d(x, y) \oplus d(s, t)$.*

*Důkaz.*

(1) Implikace zprava doleva je triviální. Nechť $d(x, y) = 0$. Pak platí:

$$x = x \oplus (x \ominus y) \oplus (y \ominus x) = y \oplus (x \ominus y) \oplus (x \ominus y),$$
$$y = y \oplus (x \ominus y) \oplus (y \ominus x) = x \oplus (y \ominus x) \oplus (y \ominus x),$$

a protože je MV-algebra přirozeně uspořádáná, implikuje to $y \leq x$ a $x \leq y$.

(2) Zřejmé z definice.

(3) Stačí rozepsat definici:

$$d(x, y) = \neg(\neg x \oplus y) \oplus \neg(\neg y \oplus x) = d(\neg x, \neg y).$$

(4) Podle lemmatu 1.1.7 (8) platí:

$$x \ominus z \leq (x \ominus y) \oplus (y \ominus z), \quad z \ominus x \leq (z \ominus y) \oplus (y \ominus x).$$

Použitím (4) téhož lemmatu dostáváme požadované tvrzení.

(5) Platí $(x \oplus s) \ominus (y \oplus t) \leq (x \ominus y) \oplus (s \ominus t)$, protože:

$$\begin{aligned} &\neg((x \oplus s) \ominus (y \oplus t)) \oplus (x \ominus y) \oplus (s \ominus t) = \\ &= \neg(x \oplus s) \oplus (y \ominus x) \oplus x \oplus (t \ominus s) \oplus s = \\ &= \neg(\neg s \oplus \neg x) \oplus \neg x \oplus (y \ominus x) \oplus x \oplus (t \ominus s) = 1. \end{aligned}$$

Analogicky bychom dokázali $(y \oplus t) \ominus (x \oplus s) \leq (y \ominus x) \oplus (t \ominus s)$. To s pomocí lemmatu 1.1.7 (4) implikuje požadované tvrzení. $\square$

**Věta 1.2.5.** *Nechť $\equiv$ je kongruence na MV-algebře $A$. Pak $I = \{x \in A \mid x \equiv 0\}$ je ideál v $A$ a platí $x \equiv y$, právě když $d(x, y) \in I$.*

*Důkaz.* Nechť $\equiv$ je kongruence na $A$ a $I = \{x \in A \mid x \equiv 0\}$. Zřejmě $0 \in I$. Dále nechť $x \leq y$ a $y \in I$. Pak podle lemmatu 1.1.4 (ii) je $x \ominus y = 0 \equiv y$, což implikuje:

$$x = x \ominus (x \ominus y) \equiv x \ominus y = 0.$$

Pokud $x$, $y \in I$, pak je z definice kongruence zřejmé, že $x \oplus y \in I$.

Nechť $x \equiv y$. Pak $x \ominus y \equiv y \ominus y = 0$, stejně tak $y \ominus x \equiv 0$, a proto $d(x, y) \equiv 0$, tj. $d(x, y) \in I$. Naopak nechť $d(x, y) \in I$. Pak $d(x, y) \equiv 0$ implikuje $x \ominus y \equiv 0$ a $y \ominus x \equiv 0$, neboť $x \ominus y$, $y \ominus x \leq d(x, y)$. Platí:

$$y \equiv (x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x \equiv x. \qquad \square$$

**Věta 1.2.6.** *Nechť $I$ je ideál v MV-algebře $A$. Pak relace $\equiv_I$, kterou definujme takto $x \equiv_I y \Leftrightarrow d(x, y) \in I$, je kongruence na $A$.*

*Důkaz.* Nechť $I$ je ideál v $A$ a nechť $\equiv_I$ je relace definovaná zmíněným vztahem, dále nechť $x$, $y$, $s$, $t \in A$. Reflexivita a symetrie relace $\equiv_I$ je zřejmá z lemmatu 1.2.4 (1) a (2). Podle bodu (4) platí $d(x, z) \leq d(x, y) \oplus d(y, z)$, takže pokud $d(x, y)$, $d(y, z) \in I$, tak z vlastností ideálu vyplývá, že $d(x, z) \in I$, tj. relace $\equiv_I$ je tranzitivní. Podle bodu (3) zřejmě platí, že $x \equiv_I y$ implikuje $\neg x \equiv_I \neg y$. Nakonec použitím bodu (5) dostáváme, že pokud $d(x, y) \in I$ a zároveň $d(s, t) \in I$, tak $d(x \oplus s, y \oplus t) \in I$. Takže relace $\equiv_I$ je skutečně kongruence na $A$. $\square$

**Důsledek 1.2.7.** *Svaz ideálů* $\mathrm{I}(A)$ *je izomorfní se svazem kongruencí* $\mathrm{Con}(A)$.

*Důkaz.* Předchozí dvě věty říkají, že zobrazení $f \colon I \mapsto \equiv_I$ je bijekce. Je zřejmé, že $f$ a $f^{-1}$ jsou izotonní zobrazení. $\square$

Faktorovou algebru MV-algebry $A$ podle ideálu $I$ značíme $A/I$ a máme tím na mysli faktorovou algebru MV-algebry podle kongruence $\equiv_I$. Pro přirozený homomorfismus $\nu \colon A \to A/I$ zřejmě platí $\mathrm{Ker}(\nu) = I$ a také platí $x \equiv_I y \Leftrightarrow \nu(x) = \nu(y)$.

# 2. $\ell$-grupy a funktor $\Gamma$

V první části této kapitoly čerpáme především z [17], případně přímo z původního článku o $\ell$-grupách [2] a někdy také z [1]. V druhé části pak čerpáme z kapitoly 2 monografie [4].

## 2.1. Stručně o $\ell$-grupách

**Definice 2.1.1.** Nechť $(G, +)$ je grupa a nechť je na $G$ dáno uspořádání $\leq$. Pak strukturu $(G, \leq, +)$ nazveme *uspořádnou grupou*, jestliže pro každé $x$, $y$, $a$, $b \in G$ platí:

$$x \leq y \;\Rightarrow\; a + x + b \leq a + y + b. \tag{UG}$$

Jestliže je $(G, \leq)$ svaz, pak nazýváme $(G, +, \leq)$ *$\ell$-grupou.*

Označením $G^+$ budeme rozumět *kladný kužel* uspořádané grupy $G$, tj. $G^+ = \{x \in G \mid x \geq 0\}$. Pro každé $x$, $y \in G$ zřejmě platí:

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; y - x \in G^+.$$

To vyplývá rovnou z podmínky (UG). Jinak řečeno: uspořádání na $G$ je určeno uspořádáním na $G^+$.

V této kapitole i ve zbyktu práce se omezíme pouze na abelovské $\ell$-grupy. To proto, že je použijeme k reprezentaci MV-algeber, které jsou komutativní.

**Příklad 2.1.** Základní příklady abelovských lineárně uspořádaných grup jsou $(\mathbb{R}, \leq, +)$, $(\mathbb{Q}, \leq, +)$ a $(\mathbb{Z}, \leq, +)$, kde $\leq$ je standardní uspořádání a $+$ je standardní sčítání.

**Lemma 2.1.2.** *Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa. Pak pro každé $x$, $y$, $z \in G$ platí:*

*(1)* $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$,

*(2)* $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$,

*(3)* $x \wedge y = -(-x \vee -y)$.

Podmnožina $X$ uspořádáné množiny $P$ je *konvexní*, jestliže $x \leq p \leq y$, $x$, $y \in X$ implikuje $p \in X$. *$\ell$-podgrupou* $\ell$-grupy $G$ budeme rozumět podgrupu grupy $G$, která je zároveň podsvazem. Dále budeme také hovořit o *konvexní $\ell$-podgrupě*, což je $\ell$-podgrupa, která je konvexní. *Maximální konvexní $\ell$-podgrupa $C$* je taková konvexní $\ell$-podgrupa grupy $G$, pro kterou platí, že je-li $D \neq C$ konvexní $\ell$-podgrupa a $C \subset D$, pak $D = G$. Je jasné, že průnik konvexních $\ell$-podgrup je konvexní $\ell$-podgrupa (sjednocení nemusí). Konvexní $\ell$-podgrupy vzhledem k množinové inkluzi tvoří úplný svaz; ten budeme značit $\mathrm{C}(G)$ (viz [17, Theorem 2.2.4.]).

Nechť $G$ je $\ell$-grupa a $X$ podmnožina $G$. Označme $G(X)$ konvexní $\ell$-podgrupu generovanou množinou $X$ a označme $|x| = x \vee -x$. Dá se ukázat, že [17, Theorem 2.2.4 (b)]:

$$G(X) = \{g \in G \mid |g| \leq |x_1| + \cdots + |x_n| \text{ pro některé } x_1, \ldots, x_n \in X\}. \qquad (2.1)$$

**Lemma 2.1.3.** *Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa a nechť $a$, $b_1$, $b_2$ ..., $b_n \in G^+$ jsou takové, že $a \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Pak existují $c_1$, $c_2$, ..., $c_n \in G^+$ tak, že $c_i \leq b_i$ pro každé $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$ a $a = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.*

*Důkaz.* Nechť $a$ a $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$ jsou jak v podmínce věty. Lemma dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n > 1$. Položme $c_n = a \wedge b_n$. Pak platí:

$$b_1 + \cdots + b_{n-1} + c_n = (b_1 + \cdots + b_{n-1} + a) \wedge (b_1 + \cdots + b_{n-1} + b_n) \geq a.$$

Takže $a - c_n \leq b_1 + \cdots + b_{n-1}$. Podle indukčního předpokladu pak existují $c_1$, $c_2$, ..., $c_{n-1}$ takové, že $c_i \leq b_i$ pro každé $i$ a platí $a - c_n = c_1 + \cdots + c_{n-1}$. To implikuje $a = c_1 + \cdots + c_n$. □

**Definice 2.1.4.** Řekneme, že $\ell$-grupa je *archimedovská*, jestliže neexistují $x$, $y \in G^+ \setminus \{0\}$ takové, že $n \times x \leq y$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

*Poznámka* 2.1.5. Dá se ukázat, že každá archimedovská $\ell$-grupa je abelovská (viz [1, Theorem 2.2]).

**Příklad 2.2.** $(\mathbb{R}, \leq, +)$ a $(\mathbb{Z}, \leq, +)$ jsou archimedovské, ale $\mathbb{Z}\vec{\times}\mathbb{Z}$ není archimedovská, neboť například $n \times (0, 1) \leq (1, 0)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

**Definice 2.1.6.** Řekneme, že $\ell$-grupa $G$ je *jednoduchá*, jestliže $|G| > 1$ a jestliže má pouze triviální konvexní $\ell$-podgrupy, tj. podgrupy $G$ a $\{0\}$.

Následující větu i s důkazem lze najít např. v [17, Theorem 2.3.10].

**Věta 2.1.7.** *Nechť $G$ je $\ell$-grupa.*[1] *Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

*(i) $G$ je abelovská a jednoduchá;*

*(ii) $G$ je lineárně uspořádaná a archimedovská;*

*(iii) $G$ je izomorfní s některou $\ell$-podgrupou $(\mathbb{R}, +)$.*

**Věta 2.1.8.** *Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa, která má maximální konvexní podgrupu $H$. Je-li $G/H$ izomorfní s lineárně uspořádanou grupou $\mathbb{Z}$, pak $G$ je izomorfní s lexikografickým součinem $\mathbb{Z}\vec{\times}H$.*

[1] V souladu s poznámkou 2.1.5 nepředpokládáme, že $G$ je abelovská.

*Důkaz.* Nechť $h$ je izomorfismus $G/H \to \mathbb{Z}$, nechť $\nu$ je přirozený homomorfismus $G \to G/H$ a nechť $f = \nu \circ h$. Zřejmě $f$ je surjektivní homomorfismus, neboť je složením surjektivních homomorfismů a $\mathrm{Ker}(f) = H$.[1] Zvolme některý prvek $a \in G$ takový, že $f(a) = 1$. Jistě platí $0 < a \notin H$. Definujme zobrazení $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}\overrightarrow{\times}H$:

$$\varphi(x) = (f(x), x - f(x)a).$$

Skutečně se jedná o dobře definované zobrazení, neboť $f(x - f(x)a) = f(x) - f(x) = 0$, tj. $x - f(x)a \in H$.

Pro každé $(z, b) \in \mathbb{Z} \times H$ zřejmě existuje $x \in G$ tak, že $f(x) = z$, neboť $f$ je surjekce. Dále platí $\varphi(b + f(x)a) = (f(x), b)$, tj. $b + f(x)a \in G$ je vzor prvku $(z, b) \in \mathbb{Z} \times H$. Takže $\varphi$ je surjekce. Zbývá dokázat, že $\varphi$ je injektivní. Nechť $x$, $y \in G$, $x \neq y$. Víme, že $\varphi(x) = (f(x), x - f(x)a)$ a $\varphi(y) = (f(y), y - f(y)a)$. Pokud $f(x) \neq f(y)$, tak jistě $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Předpokládejme tedy, že $f(x) = f(y)$. Pak $\varphi(x) - \varphi(y) = (0, x - f(x)a - y + f(y)a) = (0, x - y) \neq (0, 0)$ a proto $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. $\square$

Důkaz následující věty lze najít zde [1, Theorem 6.1].

**Věta 2.1.9.** *Každou volnou abelovskou $\ell$-grupu lze vnořit do direktního součinu $\mathbb{Z}^I$ pro některou množinu $I$.*

Tato věta říká, že každá volná abelovská $\ell$-grupa je z třídy $SP(\mathbb{Z})$. Navíc obecně platí, že každá algebra ve varietě je homomorfním obrazem některé volné algebry, platí tedy:

**Důsledek 2.1.10.** *Varieta abelovských $\ell$-grup je generovaná lineárně uspořádanou grupou $\mathbb{Z}$.*

## 2.2. Funktor $\Gamma$

Nechť $(G, \leq, +)$ je abelovská $\ell$-grupa. Pro každé $u \in G$, $u > 0$ a pro každé $x$, $y \in [0, u]$ definujeme:

$$x \oplus_u y = u \wedge (x + y),$$
$$\neg_u x = u - x.$$

Budeme používat označení $\Gamma(G, u) = ([0, u], \oplus_u, \neg_u, 0)$.

**Věta 2.2.1.** $\Gamma(G, u)$ *je MV-algebra.*

[1] $f(x)$ se dá chápat jako „pořadové číslo“ třídy $x + H$.

*Důkaz.* Platnost identit (MV1)–(MV5) je jasně vidět. Přesvědčíme se i o platnosti (MV6). Pro každé $x$, $y \in [0, u]$ platí:

$$
\begin{aligned}
\neg_u(\neg_u x \oplus_u y) \oplus_u y &= \neg_u(u \wedge (u - x + y)) \oplus_u y = \\
&= u \wedge (u - (u \wedge (u - x + y)) + y) = \\
&= u \wedge ((0 \vee (x - y)) + y) = \\
&= u \wedge (y \vee x) = \\
&= x \vee y, \\
\neg_u(\neg_u y \oplus_u x) \oplus_u x &= u \wedge (u - (u \wedge (u - y + x)) + x) = \\
&= u \wedge ((0 \vee (y - x)) + x) = \\
&= u \wedge (x \vee y) = \\
&= x \vee y.
\end{aligned}
$$

□

*Poznámka* 2.2.2. Operace v MV-algebře $\Gamma(G, u)$ jsou závislé na volbě $u \in G$, proto je značíme s tímto indexem. Většinou však budeme pro přehlednost zápisu tento index vynechávat.

**Definice 2.2.3.** Nechť $G$ je $\ell$-grupa. Prvek $u \in G^+$ nazveme *silnou jedničkou*, jestliže pro každé $x \in G$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že platí $|x| \leq n \times u$.

*Unitální* $\ell$-grupu nazveme dvojici $(G, u)$, kde $u$ je silná jednička $\ell$-grupy $G$. *Homomorfismus $\ell$-grup* je zobrazení, které je grupovým homomorfismem a zároveň svazovým homomorfismem. Nechť $(G, u)$ a $(H, v)$ jsou unitální $\ell$-grupy. *Homomorfismus unitálních $\ell$-grup* (nebo jen *unitální homomorfismus*) nazýváme každé zobrazení $h\colon (G, u) \to (H, v)$, které je homomorfismem $\ell$-grup a které splňuje $h(u) = v$. Označením $\Gamma(h)$ rozumíme restrikci $h|_{[0,u]}$. Je zřejmé, že $\Gamma(h)$ je homomorfismus $\Gamma(G, u)$ do $\Gamma(H, v)$.

Nechť $\mathcal{UL}$ je kategorie, jejíž objekty jsou unitální abelovské $\ell$-grupy a jejíž morfismy jsou unitální homomorfismy. Dále nechť $\mathcal{MV}$ je kategorie MV-algeber; její objekty jsou MV-algebry a morfismy homomorfismy. Z výše uvedeného vyplývá:

**Věta 2.2.4.** $\Gamma$ *je funktor z kategorie* $\mathcal{UL}$ *do kategorie* $\mathcal{MV}$.

Pokud $u \in G$, $u \geq 0$, pak množina:

$$G(u) = \{g \in G \mid |g| \leq n \times u \text{ pro některé } n \in \mathbb{N}\}$$

je konvexní $\ell$-podgrupa generovaná prvkem $u$, přitom $u$ je zřejmě silná jednička $G(u)$. Takže $\Gamma(G, u) = \Gamma(G(u), u)$. To znamená, že kdykoliv je $A \cong \Gamma(G, u)$, pak můžeme předpokládat, že $u$ je silná jednička $G$. Kdyby totiž nebyla, použili bychom místo $G$ $\ell$-grupu $G(u)$.

**Příklad 2.3.** Uvažujme $\ell$-grupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a zvolme $u = (0, n)$, $n \geq 1$. Zřejmě $(0, n)$ není silná jednička, neboť například $(1, 1) \nleq m \times (0, n)$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Ovšem platí $G(u) \cong \mathbb{Z}$, takže $\Gamma(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (0, n)) \cong \Gamma(\mathbb{Z}, n)$.

**Věta 2.2.5.** *Nechť $(G, u)$ je unitální abelovská $\ell$-grupa a $A = \Gamma(G, u)$. Pak svaz $\mathrm{I}(A)$ je izomorfní se svazem $\mathrm{C}(G)$.*

*Důkaz.* Definujme zobrazení $\varphi\colon \mathrm{I}(A) \to \mathrm{C}(G)$ takto: $\varphi(I) = G(I)$. Ukážeme, že $\varphi$ je injektivní. Nejprve dokážeme, že $I = A \cap G(I)$ pro každé $I \in I(A)$. Jistě platí $I \subseteq A \cap G(I)$. Když $a \in A \cap G(I)$, tak pak $a \in A$ a podle (2.1) $a \leq b_1 + \cdots + b_n$ pro některé $b_1, \ldots, b_n \in I$. Z toho plyne $a \leq u \wedge (b_1 + \cdots + b_n) = b_1 \oplus \cdots \oplus b_n \in I$, a tedy $a \in I$. Tj. platí i inkluze $A \cap G(I) \subseteq I$. Protože $I = A \cap G(I)$ pro každé $I \in I(A)$, tak $I, J \in I(A)$, $I \neq J$, implikuje $\varphi(I) \neq \varphi(J)$.

Nyní dokážeme, že $\varphi$ je surjekce. Nechť $C \in \mathrm{C}(G)$. Položme $I = A \cap C$. Je-li $a, b \in I$, pak $a \oplus b = u \wedge (a + b) \in A \cap C = I$. Takže $I$ je uzavřená na $\oplus$ a pokud $b \leq a \in I$, $b \in A$ tak jistě $b \in I$, neboť $A$ i $C$ jsou konvexní. Máme tedy, že $I$ je ideál.

Dokážeme, že $\varphi(I) = G(I) = C$. Jistě platí $G(I) \subseteq C$. Nechť $x \in C$. Platí, že $x \in C$, právě když $|x| \in C^+$. Protože $u$ je silná jednička, tak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|x| \leq n \times u$. Využitím lemmatu 2.1.3 dostaneme, že existují $a_1, \ldots, a_n$ takové, že $a_i \leq u$ (tj. $a_i \in A$) pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $|x| = a_1 + \cdots + a_n$. Jistě $0 \leq a_i \leq |x| \in C$, takže $a_i \in A \cap C = I$, a proto $|x| \in G(I)$. Tj. $C \subseteq G(I)$. Tím jsme dokázali, že $\varphi$ je bijekce.

Nechť $I, J \in I(A)$. Víme, že $I = A \cap G(I)$ a $J = A \cap G(J)$. Platí-li tedy $G(I) \subseteq G(J)$, pak jistě $I \subseteq J$. Opačná implikace je zřejmá. Takže platí $I \subseteq J$, právě když $G(I) \subseteq G(J)$. Tj. $\varphi$ je izomorfismus $I(A)$ na $C(G)$, přičemž inverzní zobrazení je $\varphi^{-1}\colon C \mapsto A \cap C$. □

**Lemma 2.2.6.** *Nechť $(G, u)$ je unitální abelovská $\ell$-grupa a $J$ je její konvexní $\ell$-podgrupa. Pak $\Gamma(G/J, u + J)$ je izomorfní s $\Gamma(G, u)/(J \cap [0, u])$.*

*Důkaz.* Nechť $A = \Gamma(G, u)$ a nechť $I = J \cap [0, u]$. Zřejmě podle předchozí věty je $I$ ideál $A$. Nechť $\nu\colon G \to G/J$ je přirozený homomorfismus. Označme $h = \Gamma(\nu)$, tj. restrikce $\nu$ na $[0, u]$. Zřejmě je $h$ surjektivní homomorfismus $A\colon \Gamma(G/J, u + J)$ a zřejmě $\mathrm{Ker}(h) = I$. Podle věty o homomorfismu pak existuje izomorfismus $A/I \to \Gamma(G/J, u + J)$. □

*Poznámka* 2.2.7. Z předchozího lemmatu a předchozí věty plyne, že izomorfismus svazů $I(A)$ na $C(G)$ je takový, že zobrazuje maximální ideály MV-algebry na maximální konvexní $\ell$-podgrupy.

Jak jsme viděli, je jasné, že $\Gamma(G, u)$ je MV-algebra, přitom můžeme předpokládat, že $u$ je silná jednička $G$. Chtěli bychom dokázat, že pro každou MV-algebru existuje unitální $\ell$-grupa $G$ tak, že $\Gamma(G, u)$ je izomorfní s danou MV-algebrou.[1]

[1] To znamená, že funktor $\Gamma$ je tzv. *essentially surjective on objects.*

Připomeňme známé tvrzení, které je i součástí bakalářské práce (viz [3, Důsledek 1.14]).

**Věta 2.2.8.** *Každá BL-algebra je subdirektní součin lineárně uspořádaných BL-algeber (BL-řetězců).*

Protože každá MV-algebra je BL-algebrou, tak také platí:

**Věta 2.2.9.** *Každá MV-algebra je subdirektní součin MV-řetězců.*

Budeme postupovat tak, že nejdříve najdeme unitální $\ell$-grupu pro každý MV-řetězec. Později pak právě zmíněné věty využijeme, abychom našli unitální $\ell$-grupu pro libovolnou MV-algebru.

**Definice 2.2.10.** Nechť $A$ je MV-algebra a $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots)$ je posloupnost prvků z $A$. Řekneme, že $\boldsymbol{a}$ je *dobrá posloupnost*, jestliže pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $a_i = a_i \oplus a_{i+1}$ a existuje $n$ takové, že $a_r = 0$ pro každé $r > n$. Místo $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots)$ budeme psát stručně jen $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Označením $(1^m, a_1, \dots, a_n)$ myslíme dobrou posloupnost, která má na prvních $m$ místech prvek 1.

**Lemma 2.2.11.** *Nechť $A$ je MV-řetězec. Pak každá dobrá posloupnost v $A$ je tvaru $(1^k, a)$, kde $k \geq 0$, $a \in A \setminus \{1\}$.*

*Důkaz.* Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ je dobrá posloupnost MV-řetězce v $A$. Pak podle lemmatu 1.1.6 (3) $a_i = a_i \oplus a_{i+1}$ platí, právě když $a_i = 1$ nebo $a_{i+1} = 0$. □

Pro každé dvě dobré posloupnosti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ definujeme jejich součet $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ jako posloupnost $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots)$, kde:

$$c_i = a_i \oplus (a_{i-1} \odot b_1) \oplus (a_{i-2} \odot b_2) \oplus \cdots \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus b_i. \tag{2.2}$$

Je třeba ověřit, že toto sčítání je definované dobře, tj. ověřit, že $\boldsymbol{c}$ je opravdu dobrá posloupnost. Dále se budeme zabývat jen dobrými posloupnostmi MV-řetězců, ověření proto provede jen pro dobré posloupnosti MV-řetězců.

**Lemma 2.2.12.** *Nechť $A$ je MV-řetězec a $\boldsymbol{a} = (1^p, a)$, $\boldsymbol{b} = (1^q, b)$ jsou dobré posloupnosti prvků z $A$. Pak:*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (1^{p+q}, a \oplus b, a \odot b), \tag{2.3}$$

*a $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ je dobrá posloupnost.*

*Důkaz.* Ověření je přímočaré, stačí dosadit do (2.2). Zřejmě pro $i \leq p + q$ platí $c_i = 1$, neboť sčítanec vždy obsahuje 1. Nechť $i = p + q + 1$. Pak se sčítanec zjednoduší na $c_i = (a_p \odot b_{q+1}) \oplus (a_{p+1} \odot b_q) = b_{q+1} \oplus a_{p+1} = b \oplus a$. Je-li $i = p + q + 2$, pak se sčítanec redukuje na $c_i = a_{p+1} \odot b_{q+1}$, všechny ostatní sčítance totiž obsahují nulu. Konečně je zřejmé, že pro $i > p + q + 2$ je $c_i = 0$.

Podle lemmatu 1.1.6 (1) $a \oplus b < 1$ implikuje $a \odot b = 0$ a navíc zřejmě $a \odot b \leq a \oplus b$. Z toho plyne, že $\boldsymbol{c}$ je skutečně dobrá posloupnost. □

**Lemma 2.2.13.** *V každém MV-řetězci platí:*

*(1)* $(x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z) = (x \oplus y) \odot ((x \odot y) \oplus z)$,

*(2)* $\neg\,[(x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z)] = (\neg x \odot \neg y) \oplus ((\neg x \oplus \neg y) \odot \neg z)$,

*(3)* $(x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z) = (x \odot z) \oplus ((x \oplus z) \odot y)$,

*(4)* $x \oplus y = x \oplus z$ *a* $x \odot y = x \odot z$*, pak* $y = z$.

*Důkaz.* (1) Pokud $x \oplus y = 1$, pak se obě strany rovnosti rovnají $(x \odot y) \oplus z$. Pokud $x \oplus y < 1$, pak podle 1.1.6 (1) je $x \odot y = 0$ a rovnost platí.

(2) Díky (1) platí:

$$\begin{aligned}\neg\,[(x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z)] &= \neg\,[(x \oplus y) \odot ((x \odot y) \oplus z)] = \\ &= \neg(x \oplus y) \oplus \neg((x \odot y) \oplus z) = \\ &= (\neg x \odot \neg y) \oplus ((\neg x \oplus \neg y) \odot \neg z).\end{aligned}$$

(3) Uvažujme případy:

(a) Nechť $x \oplus y \oplus z < 1$. Pak se díky lemmatu 1.1.6 (1) obě strany rovnají nule.

(b) Nechť $\neg x \oplus \neg y \oplus \neg z < 1$. S využitím (2) lze snadno vidět, že rovnost platí stejně jako v předchozím případě.

(c) Nechť $x \oplus y \oplus z = 1$, $\neg x \oplus \neg y \oplus \neg z = 1$ a zároveň $x \oplus y = 1$, $x \oplus z < 1$. Podle lemmatu 1.1.6 (1) z $x \oplus z < 1$ plyne $x \odot z = 0$. Takže dokazovaná rovnost má tvar $(x \oplus z) \odot y = (x \odot y) \oplus z$. Platnost rovnosti plyne z bodu (4) téhož lemmatu.

Situace, kdy by místo $x \oplus y = 1$ a $x \oplus z < 1$ platilo $x \oplus z = 1$ a $x \oplus z = 1$, by se dokazovala zcela analogicky, proto ji zvlášť neuvádíme.

(d) Nechť $x \oplus y \oplus z = 1$, $\neg x \oplus \neg y \oplus \neg z = 1$ a zároveň $x \oplus y = x \oplus z = 1$. Pak má dokazovaná rovnost tento tvar $(x \odot y) \oplus z = (x \odot z) \oplus y$. Platnost této rovnosti dostaneme opakovaným využitím (MV6):

$$\begin{aligned}(x \odot z) \oplus y &= (x \odot z) \oplus y \oplus \neg(x \oplus y) = \\ &= \neg(\neg x \oplus \neg z) \oplus \neg x \oplus \neg(\neg x \oplus \neg y) = \\ &= \neg(z \oplus x) \oplus z \oplus (x \odot y) = \\ &= z \oplus (x \odot y).\end{aligned}$$

(e) Nakonec nechť platí $x \oplus y \oplus z = 1$, $\neg x \oplus \neg y \oplus \neg z = 1$ a zároveň $x \oplus y < 1$, $x \oplus z < 1$. Pak $x \odot y = x \odot z = 0$, to znamená, že $\neg x \oplus \neg y = \neg x \oplus \neg z = 1$. Využitím stejného argumentu jako v předchozím případě ale pro proměnné $\neg x$, $\neg y$, $\neg z$, dostaneme platnost rovnosti $(\neg x \odot \neg y) \oplus \neg z = (\neg x \odot \neg z) \oplus \neg y$. Z bodu (2) pak vyplývá platnost dokazované rovnosti, neboť platí:

$$\begin{aligned}\neg\left[(x \odot y) \oplus ((x \oplus y) \odot z)\right] &= (\neg x \odot \neg y) \oplus \neg z = \\ &= (\neg x \odot \neg z) \oplus \neg y = \\ &= \neg\left[(x \odot z) \oplus ((x \oplus z) \odot y)\right].\end{aligned}$$

(4) Nechť $x \oplus y = x \oplus z$ a $x \odot y = x \odot z$. To implikuje:

$$\begin{aligned}\neg x \vee y &= (y \ominus \neg x) \oplus \neg x = (y \odot x) \oplus \neg x = (z \ominus \neg x) \oplus \neg x = \\ &= \neg x \vee z, \\ \neg x \wedge y &= x \vee \neg y = (\neg y \ominus x) \oplus x = \neg(y \oplus x) \oplus x = \neg(z \oplus x) \oplus x = \\ &= \neg x \wedge z.\end{aligned}$$

Pokud $y \leq z \leq \neg x$, pak z druhé rovnosti plyne $y = z$. Pokud $y \leq \neg x \leq z$, pak z rovností plyne $y = \neg x = z$. Analogicky bychom prověřili i zbylé možností. $\square$

**Věta 2.2.14.** *Nechť $A$ je MV-řetězec a $M_A$ množina všech dobrých posloupností $A$. Pak $(M_A, +)$, kde $+$ je definované podle (2.2), je komutativní monoid, v němž platí zákon krácení.*

*Důkaz.* Komutativita je zřejmá. Nulový prvek je zřejmě posloupnost $\mathbf{0} = (0, \dots)$. Stačí ověřit asociativitu a zákon krácení. Nechť $\boldsymbol{a} = (1^p, a)$, $\boldsymbol{b} = (1^q, b)$, $\boldsymbol{c} = (1^r, c) \in M_A$. Podle lemmatu 2.2.12 platí:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} &= (1^{p+q}, a \oplus b, a \odot b) + (1^r, c) = \\ &= (1^{p+q+r}, a \oplus b \oplus c, (a \odot b) \oplus ((a \oplus b) \odot c), a \odot b \odot c), \\ \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= (1^p, a) + (1^{q+r}, b \oplus c, b \odot c) = \\ &= (1^{p+q+r}, a \oplus b \oplus c, (b \odot c) \oplus ((b \oplus c) \odot a), a \odot b \odot c),\end{aligned}$$

a rovnost $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$ platí díky bodu (3) v předchozím lemmatu.

Nyní dokážeme zákon krácení. Nechť platí $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, to je:

$$(1^{p+q}, a \oplus b, a \odot b) = (1^{p+r}, a \oplus c, a \odot c).$$

Pokud $q = r$, pak díky bodu (4) předchozího lemmatu $b = c$ a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. Zřejmě nemůže nastat $q < r - 2$ nebo $r < q - 2$. Pokud by $q = r - 2$, pak by $a \odot b = 1$, tj. $a = b = 1$, což je spor. Pokud by $q = r - 1$, pak by $a \oplus c = 0$ a $a \oplus b = 1$, což implikuje $a = c = 0$ a $b = 1$ – opět spor. Ze stejných důvodů nemůžou nastat ani situace $r = q - 2$ a $r = q - 1$. Dokázali jsme, že nutně platí $q = r$. Tudíž zákon krácení platí. $\square$

Nechť $M_A$ je monoid dobrých posloupností MV-řetězce $A$. Nechť $\boldsymbol{a} = (1^p, a)$, $\boldsymbol{b} = (1^q, b) \in M_A$. Definujeme uspořádání v $M_A$:

$$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; p < q \text{ nebo } (p = q \text{ a } a \leq b).$$

Definice je zřejmě korektní. Uspořádání na $M_A$ značíme stejně jako uspořádání na $A$, neboť bude vždy z kontextu jasné, o které uspořádání jde.

**Lemma 2.2.15.** *Nechť $A$ je MV-řetězec. Pak $(M_A, \leq, +)$ je lineárně a přirozeně uspořádáný komutativní monoid.*

*Důkaz.* Už víme, že $M_A$ je komutativní monoid. Dokážeme nejprve, že je lineárně uspořádaný. Nechť $\boldsymbol{a} = (1^p, a)$, $\boldsymbol{b} = (1^q, b) \in M_A$. Je-li $p < q$ nebo $q < p$, pak jsou zřejmě $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ srovnatelné. A je-li $p = q$, pak jistě $a \leq b$ nebo $b \leq a$, neboť $A$ je lineárně uspořádaná. V každém případě jsou $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ srovnatelné.

Nyní dokážeme, že uspořádání na $M_A$ je přirozené. Nechť $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$. Chceme najít $\boldsymbol{c} = (1^r, c) \in M_A$ tak, aby platilo $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$. Uvažujme dvě možnosti:

(1) Nechť $p \leq q$ a zároveň $a \leq b$. Položme $\boldsymbol{c} = (1^{q-p}, b \ominus a)$, pak platí:

$$\begin{aligned}(1^p, a) + (1^{q-p}, b \ominus a) &= (1^q, a \oplus (b \ominus a), a \odot (b \ominus a)) = \\ &= (1^q, a \vee b, a \odot (b \ominus a)) = \\ &= (1^q, b, 0).\end{aligned}$$

Přitom v poslední rovnosti jsme použili lemma 1.1.6 (1).

(2) Nechť $p < q$ a zároveň $a > b$. Položme $\boldsymbol{c} = (1^{q-p-1}, b \oplus \neg a)$, platí:

$$\begin{aligned}(1^p, a) + (1^{q-p-1}, b \oplus \neg a) &= (1^{q-1}, a \oplus (b \oplus \neg a), a \odot (b \oplus \neg a)) = \\ &= (1^q, \neg(\neg a \oplus (\neg b \ominus \neg a))) = \\ &= (1^q, a \wedge b) = \\ &= (1^q, b).\end{aligned}$$

V obou možnostech jsme ověřili rovnost $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ a jiné možnosti zřejmě nastat nemůžou. $\square$

$M_A$ je přirozeně uspořádaný a navíc platí, že prvek $\boldsymbol{c}$ takový, že $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$, je určen jednoznačně. Kdyby totiž existovalo $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{c}$ takové, že by platilo $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$, pak by podle zákonu krácení platilo $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$ – spor. Protože $M_A$ je řetězec, tak pro každé různé $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M_A$ existuje jediné $\boldsymbol{c}$ takové, že buď $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$, nebo $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$.

Nyní budeme chtít z lineárně uspořádaného monoidu $(M_A, \leq, +)$ zkonstruovat lineárně uspořádanou grupu. Položme $G_A = (\{+, -\} \times M_A \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \cup \{\boldsymbol{0}\}$.

Definujme operaci $\boxplus$ na $G_A$ takto:

$$\begin{aligned}(+,\boldsymbol{a}) \boxplus (+,\boldsymbol{b}) &= (+,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}),\\ (-,\boldsymbol{a}) \boxplus (-,\boldsymbol{b}) &= (-,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}),\\ (\pm,\boldsymbol{a}) \boxplus \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \boxplus (\pm,\boldsymbol{a}) &= (\pm,\boldsymbol{a}),\\ \boldsymbol{0} \boxplus \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{0},\\ (+,\boldsymbol{a}) \boxplus (-,\boldsymbol{b}) = (-,\boldsymbol{b}) \boxplus (+,\boldsymbol{a}) &= \begin{cases}\boldsymbol{0} & \text{jestliže } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},\\ (+,\boldsymbol{d}) & \text{jestliže } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d},\\ (-,\boldsymbol{d}) & \text{jestliže } \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}.\end{cases}\end{aligned}$$

Definujme relaci $\preceq$ na $G_A$ takto:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{0} \preceq \boldsymbol{0},\\ &(-,\boldsymbol{a}) \preceq \boldsymbol{0} \preceq (+,\boldsymbol{b}),\\ &(+,\boldsymbol{a}) \preceq (+,\boldsymbol{b}) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b},\\ &(-,\boldsymbol{a}) \preceq (-,\boldsymbol{b}) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

**Věta 2.2.16.** *Nechť $A$ je MV-řetězec. Pak struktura $(G_A, \preceq, \boxplus)$ je abelovská lineárně uspořádaná grupa.*

*Důkaz.* Komutativita $\boxplus$ je zřejmá, nulový prvek je $\boldsymbol{0}$. Inverzní prvek k prvku $(+,\boldsymbol{a})$ je prvek $(-,\boldsymbol{a})$. Dokážeme asociativitu. Nechť $x$, $y$, $z \in G_A$. Je třeba uvažovat několik možností. Nejprve, jsou-li $x$, $y$, $z \in G_A^+$ nebo jsou-li $x$, $y$, $z \in G_A^-$, pak je asociativita zřejmá. Asociativita je také jasně vidět, jsou-li některé prvky z $x$, $y$, $z$ nulové. Označme $L = (x \boxplus y) \boxplus z$ a $P = x \boxplus (y \boxplus z)$. Prověříme následující možnost: $x = (+,\boldsymbol{a})$, $y = (-,\boldsymbol{b})$ a $z = (+,\boldsymbol{c})$. Tu je třeba rozdělit na další možnosti:

(1) Je-li $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$, pak:

$$\begin{aligned}L &= (+,\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}),\\ P &= (+,\boldsymbol{a}) \boxplus ((-,\boldsymbol{b}) \boxplus (+,\boldsymbol{c})).\end{aligned}$$

- (a) Jestliže $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}$, pak platí $P = (+,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}) = (+,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}) = (+,\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$.
- (b) Jestliže $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}+\boldsymbol{e}$, pak platí $(-,\boldsymbol{b}) \boxplus (+,\boldsymbol{c}) = (-,\boldsymbol{f})$, kde $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}+\boldsymbol{f}$. To znamená $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}$ a platí $P = (+,\boldsymbol{a}) \boxplus (-,\boldsymbol{e}) = (+,\boldsymbol{c}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}) \boxplus (-,\boldsymbol{e}) = (+,\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$.

(2) Je-li $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}$, pak:

$$\begin{aligned}L &= (-,\boldsymbol{d}) \boxplus (+,\boldsymbol{c}),\\ P &= (+,\boldsymbol{a}) \boxplus ((-,\boldsymbol{b}) \boxplus (+,\boldsymbol{c})).\end{aligned}$$

(a) Jestliže $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{e}$, pak $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{e}$. To znamená, že $L = (+, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e})$ a $(-, \boldsymbol{b}) \boxplus (+, \boldsymbol{c}) = (+, \boldsymbol{e})$. Takže $P = (+, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e})$.

(b) Jestliže $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}$. Pak $P = (+, \boldsymbol{a}) \boxplus (-, \boldsymbol{e})$. Když by navíc platilo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}$, pak by $P = (+, \boldsymbol{f})$. Dále by platilo $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$. Tj. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{d}$ a $L = (+, \boldsymbol{f})$. Kdyby naopak platilo $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{f}$, pak by $P = (-, \boldsymbol{f})$ a $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{f}$. Tj. $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{f}$ a $L = (-, \boldsymbol{f})$.

Zbylé možnosti bychom dokázali analogicky. Pro technickou zdlouhavost jejich ověření vynecháme.

Nyní dokážeme, že $\preceq$ je uspořádaní a $(G_A, \preceq)$ je lineárně uspořádaná množina. Reflexivita a antisymetrie je zřejmá. Nechť $x$, $y$, $z \in G_A$ a nechť platí $x \preceq y$ a zároveň $y \preceq z$. Jestliže $x$, $y$, $z \in G_A^+$ nebo $x$, $y$, $z \in G_A^-$, pak jistě $x \preceq z$. Jediné další možné situace jsou: $x \in G_A^-$, $y$, $z \in G_A^+$ a $x$, $y \in G_A^-$, $z \in G_A^-$. Pro ty také očividně platí $x \preceq z$. Takže $\preceq$ je uspořádání. Protože $M_A$ je lineárně uspořádaná, je z definice $\preceq$ zřejmé, že také $(G_A, \preceq)$ je lineárně uspořádaná.

Zbývá dokázat kompatibilitu $\boxplus$ a $\preceq$, tj. podmínku (UG). Nejprve si všimneme, že v $M_A$ kompatibilita platí. Je-li $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in M_A$, $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$, pak existuje $\boldsymbol{d} \in M_A$ tak, že $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}$. Pro libovolné $\boldsymbol{c} \in M_A$ platí $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$. Nyní nechť $x$, $y$, $z \in G_A$ a nechť $x \preceq y$. Opět je třeba projít všechny možnosti. Možnost, kdy $x$, $y$, $z \in G_A^+$ a možnost, kdy $x$, $y$, $z \in G_A^-$ jsou jasné. Uvažujme případ: $x = (+, \boldsymbol{a})$, $y = (+, \boldsymbol{b})$ a $z = (-, \boldsymbol{c})$. Protože $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$, tak existuje $\boldsymbol{d} \in M_A$ takový, že $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}$. Tento případ je třeba dále rozdělit:

(1) Je-li $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}$, pak $(+, \boldsymbol{a}) \boxplus (-, \boldsymbol{c}) = (+, \boldsymbol{e})$ a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}$, což znamená $(+, \boldsymbol{b}) \boxplus (-, \boldsymbol{c}) = (+, \boldsymbol{d} + \boldsymbol{e})$. Zřejmě $(+, \boldsymbol{e}) \preceq (+, \boldsymbol{d} + \boldsymbol{e})$.

(2) Je-li $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}$, pak $(+, \boldsymbol{a}) \boxplus (-, \boldsymbol{c}) = (-, \boldsymbol{e})$. Když by $(+, \boldsymbol{b}) \boxplus (-, \boldsymbol{c}) = (+, \boldsymbol{f})$ tak, pak by jistě platilo $(-, \boldsymbol{e}) \preceq (+, \boldsymbol{f})$. Kdyby $(+, \boldsymbol{b}) \boxplus (-, \boldsymbol{c}) = (-, \boldsymbol{f})$ tak, pak by $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{f}$, což implikuje $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{f}$. Tj. $\boldsymbol{e} \geq \boldsymbol{f}$ a tedy $(-, \boldsymbol{e}) \preceq (-, \boldsymbol{f})$.

Další možnosti bychom dokázali analogicky. □

**Věta 2.2.17.** *Pro každý MV-řetězec $A$ existuje unitální abelovská lineárně uspořádaná grupa $(G_A, u)$ taková, že $A \cong \Gamma(G_A, u)$.*

*Důkaz.* Nechť $A$ je MV-řetězec. Sestrojíme $G_A$ tak, jak je uvedeno výše. Položme $u = (+, (1))$ a $B = \Gamma(G_A, u)$. Definujme zobrazení $\varphi\colon A \to B$ takto:

$$\varphi(a) = (+, (a)).$$

Jsou-li $a$, $b \in A$, $a$, $b < 1$, pak $a \odot b = 0$ a $\varphi(a \oplus b) = (+, (a \oplus b, a \odot b)) = (+, (a)) \oplus (+, (b)) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$. Pokud $a = 1$ nebo $b = 1$, pak zřejmě:

$$\begin{aligned}\varphi(a \oplus b) = \varphi(1) = (+, (1)) = ((+, (a)) \boxplus (+, (b))) \wedge (+, (1)) = \\ = (+, (a)) \oplus (+, (b)) = \varphi(a) \oplus (b).\end{aligned}$$

Platí, že $\neg\varphi(a) = (+,(1)) \boxplus (-,(a)) = (+,\boldsymbol{d})$, kde $(1) = (a) + \boldsymbol{d}$. To znamená, že $\boldsymbol{d} = (d)$ a $a \oplus d = 1$, $a \odot d = 0$, což podle lemmatu 1.1.5 implikuje $d = \neg a$. Takže $\neg\varphi(a) = (+,(\neg a)) = \varphi(\neg a)$. Ukázali jsme, že $\varphi$ je homomorfismus MV-algeber. Z definice $\varphi$ je ihned vidět, že se jedná o bijekci. Takže $\varphi$ je izomorfimus. □

Připomeňme, že naším cílem je pro libovolnou MV-algebru $A$ najít unitální $\ell$-grupu $(G,u)$ tak, aby platilo $A \cong \Gamma(G,u)$. Následující věta je pro tento účel klíčová.

**Věta 2.2.18.** *Nechť $A$ je podalgebra MV-algebry $\Gamma(G,u)$, kde $u \in G^+$ je libovolný prvek (nemusí být silnou jedničkou). Pak existuje $\ell$-podgrupa $G_A$ abelovské $\ell$-grupy $G$ taková, že $u$ je silná jednička $G_A$ a $A = \Gamma(G_A,u)$.*

*Důkaz.* Nechť $A$ je podalgebra $\Gamma(G,u)$, $u \in G^+$. Označme:

$$\begin{aligned} M_A &= \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}, \\ G_A &= \{x - y \mid x, y \in M_A\}. \end{aligned}$$

Nejprve dokážeme následující tvrzení:

(1) Je-li $x$, $y \in M_A$, $y \leq x$, pak $x - y \in M_A$.

*Důkaz.* Nechť $x$, $y \in M_A$ takové, že $y \leq x$. Pak $x = a_1 + \cdots + a_n$, $y = b_1 + \cdots + b_m$ pro některá $a_i$, $b_j \in A$. Podle lemmatu 2.1.3 existují $c_1$, …, $c_n$ takové, že $c_i \leq a_i$ a $y = c_1 + \cdots + c_n$. Pokračujme matematickou indukcí podle $m$. Pro $m = 1$ máme $y = c_1 + \cdots + c_n = b_1 \in A$. Jistě $c_i \in A$ pro každé $i$. To lze vypozorovat z důkazu lemmatu 2.1.3, neboť v druhém indukčním kroku tohoto důkazu pokládáme v našem případě $c_n = y \wedge a_n \in A$. Takže $x - y = a_1 - c_1 + a_2 - c_2 + \cdots + a_n - c_n$, kde $a_i - c_i \in A$ pro každé $i$, tudíž $x - y \in M_A$. Nechť $m > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $m - 1$. Z $y \leq x$ plyne $b_1 + b_2 + \cdots + b_{m-1} = y - b_m \leq x - b_m$. Přitom $x - b_m \in M_A$ díky prvnímu kroku indukce. Využitím indukčního předpokladu dostáváme $x - b_m - (y - b_m) \in M_A$, tj. $x - y \in M_A$.

(2) Je-li $x \in M_A$ a $b \in A$, pak $x \wedge b \in A$.

*Důkaz.* Nechť $x \in M_A$ a $b \in A$. Pak $x = a_1 + \cdots + a_n$ pro některé $a_1$, …, $a_n \in A$. Dále postupujme matematickou indukcí vzhledem k $n$. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť $n > 1$ a předpokládejme platnost tvrzení pro $n - 1$. Položme $y = a_1 + \cdots + a_{n-1}$, zřejmě $y \in M_A$, takže z indukčního předpokladu plyne $y \wedge b \in A$. Potom také $(b - (y \wedge b)) \wedge a_n \in A$ a také $(y \wedge b) \oplus [(b - (y \wedge b)) \wedge a_n] \in A$, neboť $A$ je podalgebra $\Gamma(G,u)$. Platí:

$$\begin{aligned} (y \wedge b) \oplus [(b - (y \wedge b)) \wedge a_n] &= ((y \wedge b) + [(b - (y \wedge b)) \wedge a_n]) \wedge u = \\ &= b \wedge (a_n + y) \wedge (a_n + b) \wedge u = \\ &= b \wedge x. \end{aligned}$$

(3) Je-li $x$, $y \in M_A$, pak $x \wedge y \in M_A$.

*Důkaz.* Nechť $x$, $y \in M_A$. Pak $y = a_1 + \cdots + a_n$ pro některé $a_1, \ldots, a_n \in A$. Opět použijime matematickou indukci a vzhledem k $n$. Je-li $n = 1$ pak podle (2) jistě $x \wedge y \in A \subseteq M_A$. Nechť $n > 1$ a přepokládejme platnost tvrzení pro $n-1$. Položme $z = a_1 + \cdots + a_{n-1}$. Podle indukčního předpokladu $x \wedge z \in M_A$, takže podle (1) $x - (x \wedge z) \in M_A$ a podle (2) $(x - (x \wedge z)) \wedge b_n \in A \subseteq M_A$. A proto také $(x \wedge z) + [(x - (x \wedge z)) \wedge b_n] \in M_A$, přitom platí:

$$\begin{aligned}(x \wedge z) + [(x - (x \wedge z)) \wedge b_n] &= [(x - (x \wedge z)) + (x \wedge z)] \wedge (b_n + (x \wedge z)) = \\ &= x \wedge (b_n + x) \wedge (b_n + z) = \\ &= x \wedge y.\end{aligned}$$

Nechť $z \in G^+$, tj. $z = x - y \geq 0$ pro některé $x$, $y \in M_A$. Protože $y \leq x$, tak z (1) plyne $z \in M_A$. Tj. $G^+ \subseteq M_A$. Zřejmě platí také $M_A \subseteq G_A^+$, takže $G_A^+ = M_A$. Dále pokud $x \in G_A \cap [0, u]$, tak z právě dokázaného máme $x \in M_A$, a protože $x \wedge u = x$, tak z (2) plyne $x \in A$. Máme tedy, že $G_A \cap [0, u] \subseteq A$, opačná inkluze je jasná, tudíž platí $A = G_A \cap [0, u]$. Je zřejmé, že $M_A = G_A^+$ je uspořádaný podmonoid $G^+$ a je také jasné, že $G_A$ je uspořádána grupa. Je známo (viz [17, Theorem 2.1.2 (d)]), že uspořádaná grupa je $\ell$-grupou, jestliže existuje $z \vee 0$ pro každé $z$. Nechť je tedy $z \in G_A$. Pak $z = x - y$ pro některé $x$, $y \in M_A$. Platí $z \vee 0 = (x - y) \vee 0 = x - (x \wedge y)$. Z (1) a (3) plyne, že $z \vee 0 = x - (x \wedge y) \in M_A$. Takže $G_A$ je skutečně $\ell$-podgrupa $G$. Vzhledem k rovnosti $G_A^+ = M_A$ je jasné, že $u$ musí být silnou jedničkou $G_A$ a protože $A = G_A \cap [0, u]$, tak $A = \Gamma(G_A, u)$. □

**Věta 2.2.19.** *Pro každou MV-algebru $A$ existuje unitální abelovská $\ell$-grupa $(G, u)$ taková, že $A \cong \Gamma(G, u)$.*

*Důkaz.* Nechť $A$ je libovolná MV-algebra. Pak je podle věty 2.2.9 subdirektním součinem MV-řetězců $A_i$, $i \in I$. Podle věty 2.2.17 je každá $A_i$ izomorfní s $\Gamma(G_{A_i}, u_i)$, kde $u_i$ je silná jednička $G_{A_i}$. Takže $A$ je izomorfní s podalgebrou direktního součinu $\prod_{i \in I} \Gamma(G_{A_i}, u_i)$. Direktní součin $\prod_{i \in I} \Gamma(G_{A_i}, u_i)$ je jistě izomorfní s $\Gamma(\prod_{i \in I} G_{A_i}, u)$, kde $\pi_i(u) = u_i$ pro každé $i \in I$ ($u$ nemusí být silná jednička $\prod_{i \in I} G_{A_i}$, viz příklad 2.4).[1] Takže $A$ je izomorfní s podalgebrou MV-algebry $\Gamma(\prod_{i \in I} G_{A_i}, u)$. Využitím předchozí věty získáme unitální $\ell$-grupu $(G_A, u)$, která je $\ell$-podgrupou $\prod_{i \in I} G_{A_i}$ a pro kterou platí $A \cong \Gamma(G_A, u)$. □

**Příklad 2.4.** Uvažujme direktní součin $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tj. posloupnosti reálných čísel. Silná jednička v $\mathbb{R}$ je 1, ale posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ není silná jednička v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Stačí vzít libovolnou ryze rostoucí posloupnost celých čísel a dostaneme spor s definicí silné jedničky.

[1] Kdyby byla $A$ direktním součinem, mohli bychom vzít unitální $\ell$-podgrupu $G(u)$ $\ell$-grupy $\prod_{i \in I} G_{A_i}$. Takže by pak $A \cong \Gamma(G(u), u)$, přtiom $(G(u), u)$ by byla unitální $\ell$-grupa.

Nechť $(G, u)$ je unitální abelovská $\ell$-grupa a nechť $x \in G^+$. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ induktivně definujeme:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \wedge u, & a_{i+1} &= x_i \wedge u, \\ x_1 &= x - a_1, & x_{i+1} &= x_i - a_{i+1}. \end{aligned}$$

**Věta 2.2.20.** *Nechť $A = \Gamma(G, u)$, kde $(G, u)$ je unitální abelovská $\ell$-grupa, nechť $x \in G^+$ a nechť $a_1$, $a_2$, ... jsou jak výše. Pak $(a_1, a_2, \dots)$ je dobrá posloupnost MV-algebry $A$ a $a_1 + a_2 + \dots = x$.*

*Důkaz.* Jistě $a_i \in A$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, protože $u \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$. Zřejmě platí:

$$a_i \oplus a_{i+1} = (a_i + (x_i \wedge u)) \wedge u = (a_i + x_i) \wedge (a_i + u) \wedge u = x_{i-1} \wedge u = a_i.$$

Takže $(a_1, a_2, \dots)$ je skutečně dobrá posloupnost $A$. Dále, protože $x = x_1 + a_1$, $x_1 = x_2 + a_2$ atd., tak $x = a_1 + a_2 + \dots + a_i + x_i$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Protože $u$ je silná jednička, tak platí $x \leq k \times u$ pro některé $k \in \mathbb{N}$. Nejdříve pomocí matematické indukce dokážeme, že $x_i \leq (k - i)u$ pro každé $i \in \{1, \dots, k - 1\}$.

Nechť $i = 1$. Pak platí:

$$(k - 1)u + a_1 = (k - 1)u + (x \wedge u) = ((k - 1)u + x) \wedge ku \geq x.$$

Takže $x_1 = x - a_1 \leq (k - 1)u$. Nyní nechť tvrzení platí pro $i - 1$. Pak:

$$(k - i)u + a_i = (k - i)u + (x_{i-1} \wedge u) = ((k - i)u + x_{i-1}) \wedge (k - i + 1)u \geq x_{i-1}.$$

Takže $x_i = x_{i-1} - a_i \leq (k - i)u$ a skutečně platí $x_i \leq (k - i)u$ pro každé $i \in \{1, \dots, k - 1\}$. To znamená, že platí $x_{k-1} \leq u$, což implikuje $a_k = x_{k-1}$, a tedy $a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k = x$. $\square$

Tato věta nám osvětluje, k čemu jsou obecně dobré posloupnosti dobré. Vidíme, že každý prvek $G^+$ se dá napsat jako součet některé dobré posloupnosti prvků $A = \Gamma(G, u)$, kde $(G, u)$ je unitální $\ell$-grupa. Tedy dobré posloupnosti nám přesně popisují $G^+$, a tedy také $G$.

Když bychom měli libovolnou MV-algebru $A$, šlo by pak postupovat i tak, že bychom vzali všechny dobré posloupnosti $A$ a ukázali, že tvoří uspořádaný monoid $M_A$, který je kladným kuželem některé unitální abelovské $\ell$-grupy $(G, u)$.

Dokázali, jsme že funktor $\Gamma$ je tzv. *essentially surjective on objects*. Dá se ukázat, že je také *věrný* a *úplný*.[1]. To implikuje následující větu:

**Věta 2.2.21.** *Kategorie $\mathcal{UL}$ a $\mathcal{MV}$ jsou ekvivalentní.*

[1] Věrný znamená, že je injektivní na třídě morfismů daných objektů. Úplný znamená, že je surjektivní na třídě morfismů daných objektů.

Stručně popíšeme, jak by se tato věta dokazovala. Je třeba dokázat, že funktor $\Gamma$ je věrný a úplný. Úplnost dokážeme tak, že každému homomorfismu MV-algeber $h\colon \Gamma(G_1, u_1) \to \Gamma(G_2, u_2)$ sestrojíme homomorfismus unitálních $\ell$-grup $h_l\colon (G_1, u_1) \to (G_2, u_2)$ takový, že $\Gamma(h_l) = h$. Zde můžeme postupovat podobně jako v [8, Theorem 5.3, Proposition 6.1], kde je ukázána konstrukce pro pseudo MV-algebry. Konstrukce $h_l$ by vypadala konkrétně takto: Položíme $h_l(a) = h(a)$ pro každé $a \in [0, u_1]$. Je-li $a = a_1 + \cdots + a_n$, kde $a_1, \ldots, a_n \in [0, u_1]$, pak položíme $h_l(a) = h_l(a_1) + \cdots + h_l(a_n)$. Protože ve skutečnosti každé $a \in G_1^+$ je tohoto tvaru[1], máme $h_l$ definované pro celé $G_1^+$. Dále bychom $h_l$ rozšířili na celé $G_1$ takto: $h_l(a) = h_l(a^+) - h_l(a^-)$ pro každé $a \in G_1$. Samozřejmě je potřeba ukázat, že takto definované zobrazení je dobře definované a že je skutečně homomorfismem unitálních abelovských $\ell$-grup. K tomu se využije vlastnost vycházející z lemmatu 2.1.3. Přesněji se jedná o toto tvrzení [8, Proposition 5.2]: Nechť $(G, u)$ je unitální abelovská $\ell$-grupa a nechť $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in [0, u]$ jsou takové, že platí $a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n$. Pak existují $c_{ij} \in [0, u]$ takové, že $a_i = c_{i1} + \cdots + c_{in}$ a $b_j = c_{1j} + \cdots + c_{1m}$ pro každé $i$, $j$. Navíc můžeme předpokládat, že $(c_{i+1,j} + \cdots + c_{m,j}) \wedge (c_{i,j+1} + \cdots + c_{i,n}) = 0$ pro každé $i$, $j$. Za těchto podmínek jsou $c_{ij}$ určeny jednoznačně.[2]

Věrnost je vcelku zřejmá. Když jsou $f$, $g$ homomorfismy unitálních abelovských $\ell$-grup $(G_1, u_1) \to (G_2, u_2)$ takové, že $\Gamma(f) = \Gamma(g)$, tak pak $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in [0, u_1]$. Ovšem $[0, u_1]$ je konvexní podpologrupa, která generuje $G^+$. Takže proto $f = g$.

*Poznámka* 2.2.22. Jiný důkaz věty 2.2.21 lze najít v [4, Chapter 7].

## 2.3. Základní příklady MV-řetězců

V této podkapitole pomocí funktoru $\Gamma$ definujeme některé významné MV-řetězce. V další kapitole je použijeme ke generování různých variet MV-algeber.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme množinu $\mathbb{Z}\frac{1}{n} = \{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ společně se standardním uspořádáním a standardním sčítáním. Zřejmě se jedná o abelovskou lineárně uspořádanou grupu, kde za silnou jedničku můžeme vzít 1. Označme $S_n = \Gamma\left(\mathbb{Z}\frac{1}{n}, 1\right)$; je to MV-řetězec, jehož nosičem je množina: $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Operace jsou definované takto:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \min\{x + y, 1\}, \\ \neg x &= 1 - x. \end{aligned}$$

Uvažujme unitální abelovskou lineárně uspořádanou grupu $\left(\mathbb{Z}\frac{1}{n} \vec{\times} \mathbb{Z}, (1, 0)\right)$.

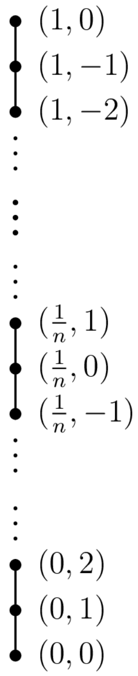
[1] Ovšem $a_1, \ldots, a_n \in [0, u_1]$ takové, že $a = a_1 + \cdots + a_n$, nejsou určeny jednoznačně.

[2] $c_{ij}$ si můžeme představit jako matici, kde součty jednotlivých řádků jsou $a_i$ a součty jednotlivých sloupců jsou $b_j$.

Označme $S_n^\omega = \Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z},(1,0))$. Operace v $S_n^\omega$ jsou definovány takto:

$$(x,m)\oplus(y,n) = \begin{cases} (x+y, m+n) & \text{jestliže } x+y<1 \text{ nebo} \\ & x+y=1 \text{ a zároveň } m+n<0, \\ (1,0) & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\neg(x,y) = (1-x,-y).$$




Obrázek 1: Hasseův diagram $S_n^\omega$.

Dalším význačným MV-řetězcem je $S_\omega$. Uvažujme unitální abelovskou lineárně uspořádanou grupu $(\mathbb{Q},1)$. Označme $S_\omega = \Gamma(\mathbb{Q},1)$. Operace v $S_\omega$ jsou definovány obdobně jako v $S_n$.

Posledním významným MV-řetězcem této podkapitoly je standardní MV-algebra. *Standardní MV-algebrou* budeme rozumět MV-algebru $\Gamma(\mathbb{R},1)$. Jedná se o MV-řetězec $([0,1],\oplus,\neg,0)$, kde $[0,1]$ je realný interval a operace $\oplus$, $\neg$ jsou definované takto:

$$x\oplus y = \min\{1, x+y\},$$
$$\neg x = 1-x.$$

Všimněme si, že $S_n$ a $S_\omega$ jsou podalgebrami standardní MV-algebry.

*Poznámka* 2.3.1. Ve standardní MV-algebře jsou operace $\ominus$, $\odot$ definované takto:

$$x \odot y = \max\{0, x + y - 1\},$$
$$x \ominus y = \max\{0, x - y\}.$$

*Poznámka* 2.3.2. Nechť $A = \Gamma(\mathbb{R}, u)$, kde $u > 0$. Pak lze ukázat, že $A$ je izomorfní se standardní MV-algerbou. Nechť $f\colon [0, u] \to [0, 1]$ je zobrazení dané předpisem $f(a) = \frac{a}{u}$. Je snadné vidět, že $f$ je izomorfismus MV-algeber.

# 3. Variety MV-algeber

V této kapitole detailně popíšeme všechny variety MV-algeber a ukážeme, že varieta všech MV-algeber, kterou budeme značit $\mathcal{MV}$, je generována standardní MV-algebrou. Hlavní zdroje této kapitoly jsou kapitoly 3 a 8 z [4], dále [15], [14] a [12].

## 3.1. Subdirektně ireducibilní MV-algebry

Už jsme zmínili, že je-li MV-algebra subdirektně ireducibilní, je nutně lineárně uspořádaná (věta 2.2.9). Nabízí se otázka, je-li to také naopak, tedy jestli platí, že každý MV-řetězec je subdirektně ireducibilní. Odpověď je záporná, jak ukážeme na následujícím příkladu.

**Příklad 3.1.** [12] Nechť $A = S_\omega = \Gamma(\mathbb{Q}, 1)$. Nechť $U$ je volný ultrafiltr nad $\mathbb{N}$, tj. $U$ obsahuje všechny kofinitní podmnožiny $\mathbb{N}$. Nechť $B = A^{\mathbb{N}}/U$. Pak $B$ je MV-řetězec, protože je ultrasoučinem MV-řetězců. Sporem ukážeme, že $B$ není subdirektně ireducibilní.

Předpokládejme, že $B$ je subdirektně ireducibilní. Potom svaz ideálů $B$ má monolit, tj. nejmenší nenulový ideál; označme ho $M$. Nechť $a/U \in M$, kde $a = (a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$, je nenulový prvek $M$. Z $a/U \neq 0/U$ plyne, že $\{i \in \mathbb{N} \mid a_i = 0\} \notin U$, a proto:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\} \in U.$$

Uvažujme prvek $b = (b_1, b_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ takový, že:

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } a_i = 0, \\ \frac{a_i}{i} & \text{jestliže } a_i \neq 0. \end{cases}$$

Zřejmě $b/U \neq 0/U$, neboť $\{i \in \mathbb{N} \mid b_i = 0\} = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i = 0\} \notin U$.

Zvolme libovolné $n \in \mathbb{N}$. Množina $\{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ je konečná, takže:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid i > n\} \in U.$$

Potom také:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid b_i \neq 0\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid i > n\} \in U.$$

Pro každé $i$ z tohoto průniku platí $b_i = \frac{a_i}{i} \neq 0$ a $i > n$, a proto $n \times b_i = \frac{na_i}{i} < a_i$. To znamená:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid b_i \neq 0\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid i > n\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid n \times b_i < a_i\},$$

a tedy:

$$\{i \in \mathbb{N} \mid n \times b_i < a_i\} \in U.$$

Takže $n \times b/U < a/U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že $a/U$ nemůže patřit do ideálu generovaného prvkem $b/U \neq 0/U$, tj. nenulový ideál generovaný $b/U$ je pod ideálem $M$, což je spor.

## 3.2. Standardní MV-algebra generuje $\mathcal{MV}$

Pro zjednodušení zápisu budeme někdy $n$-tici proměnných $x_1, \ldots, x_n$ (popřípadě $n$-tici prvků) značit jednoduše $\overline{x}$. Nejprve si uvědomme, že identita $p(\overline{x}) = q(\overline{x})$ platí v MV-algebře právě tehdy, když platí identita $(p(\overline{x}) \ominus q(\overline{x})) \oplus (q(\overline{x}) \ominus p(\overline{x})) = 0$. To plyne z lemmatu 1.2.4 (1). Můžeme proto předpokládat, že každá identita je tvaru $s(\overline{x}) = 0$, neboť každou lze takto ekvivalentně zapsat.

Nyní každému termu $t(\overline{x})$ v jazyce MV-algeber přiřadíme term $\hat{t}(\overline{x}, y)$ v jazyce $\ell$-grup, kde $y$ bude nová proměnná. Uděláme to takto:

$$\begin{aligned}
t(\overline{x}) = x \ &\Rightarrow\ \hat{t}(\overline{x}, y) = (x \vee 0) \wedge (y \vee 0),\\
t(\overline{x}) = 0 \ &\Rightarrow\ \hat{t}(\overline{x}, y) = 0,\\
t(\overline{x}) = 1 \ &\Rightarrow\ \hat{t}(\overline{x}, y) = y \vee 0,\\
t(\overline{x}) = r(\overline{x}) \oplus s(\overline{x}) \ &\Rightarrow\ \hat{t}(\overline{x}, y) = (\hat{r}(\overline{x}, y) + \hat{s}(\overline{x}, y)) \wedge (y \vee 0),\\
t(\overline{x}) = \neg s(\overline{x}) \ &\Rightarrow\ \hat{t}(\overline{x}, y) = (y \vee 0) - \hat{s}(\overline{x}, y).
\end{aligned}$$

**Příklad 3.2.** Například je-li $t(\overline{x}) = \neg(x_1 \oplus x_2)$, pak:

$$\hat{t}(\overline{x}, y) = (y \vee 0) - \Big[\big(((x_1 \vee 0) \wedge (y \vee 0)) + ((x_2 \vee 0) \wedge (y \vee 0)\big) \wedge (y \vee 0))\Big].$$

**Lemma 3.2.1.** *Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa a nechť $\hat{t}(\overline{x}, \overline{y})$ je term vzniklý výše uvedeným induktivním způsobem z termu $t(\overline{x})$. Označme $B = \Gamma(G, b \vee 0)$. Pak pro každé $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in G$ platí:*

$$\hat{t}^G(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) = t^B((a_1 \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots, (a_n \vee 0) \wedge (b \vee 0)).$$

*Důkaz.* Budeme postupovat indukcí podle složitosti termu. Nechť $\overline{a} = a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in G$.

Je-li $t(\overline{x}) = x_i$, pak $\hat{t}(x_i, y) = (x_i \vee 0) \wedge (y \vee 0)$. Takže:

$$\hat{t}^G(\overline{a}, b) = (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0) = t^B((a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0)).$$

Nechť $t(\overline{x}) = r(\overline{x}) \oplus s(\overline{x})$ a předpokládejme, že pro termy $r(\overline{x})$, $s(\overline{x})$ platí tvrzení lemmatu. Pak $\hat{t}(\overline{x}, y) = (\hat{r}(\overline{x}, y) + \hat{s}(\overline{x}, y)) \wedge (y \vee 0)$ a platí:

$$\begin{aligned}
\hat{t}^G(\overline{a}, b) &= \big[\hat{r}(\overline{a}, b) + \hat{s}(\overline{a}, b)\big] \wedge (b \vee 0) =\\
&= \big[r^B(\ldots, (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots) +\\
&\qquad\qquad s^B(\ldots, (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots)\big] \wedge (b \vee 0) =\\
&= r^B(\ldots, (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots) \oplus s^B(\ldots, (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots) =\\
&= t^B(\ldots, (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots).
\end{aligned}$$

Nyní nechť $t(\overline{x}) = \neg r(\overline{x})$ a předpokládejme, že pro $r(\overline{x})$ tvrzení platí. Pak $\hat{t}(\overline{x}, y) = (y \vee 0) - \hat{r}(\overline{x}, y)$. Takže:

$$\begin{aligned}
\hat{t}^G(\overline{a}, b) &= (b \vee 0) - \hat{r}(\overline{a}, b) = (b \vee 0) - r^B(\ldots, (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots) =\\
&= \neg r^B(\ldots, (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots) = t^B(\ldots, (a_i \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots).
\end{aligned}$$

Ještě zbývá prověřit případy $t(\overline{x}) = 0$ a $t(\overline{x}) = 1$. Je-li $t(\overline{x}) = 0$, pak $\hat{t}(\overline{x}, y) = 0$ a tvrzení zřejmě platí. Je-li $t(\overline{x}) = 1$, pak $\hat{t}(\overline{x}, y) = y \vee 0$ a $\hat{t}^G(\overline{a}, b) = b \vee 0 = t^B(1)$. □

**Lemma 3.2.2.** *Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa, $u \in G$, $u > 0$ a $A = \Gamma(G, u)$. Nesplňuje-li $A$ identitu $t(\overline{x}) = 0$, pak $G$ nesplňuje identitu $\hat{t}(\overline{x}, y) = 0$*

*Důkaz.* Nechť identita $t(\overline{x}) = 0$ neplatí v $A$. To znamená, že existují $\overline{a} = a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tak, že platí $t^A(\overline{a}) \neq 0$. Podle předchozího lemmatu máme:

$$\hat{t}^G(\overline{a}, u) = t^A((a_1 \vee 0) \wedge (u \vee 0), \ldots, (a_n \vee 0) \wedge (u \vee 0)).$$

Zřejmě $(a_i \vee 0) \wedge (u \vee 0) = a_i$ pro každé $i$. Takže:

$$\hat{t}^G(\overline{a}, u) = t^A(\overline{a}) \neq 0.$$

To znamená, že v $G$ neplatí identita $\hat{t}(\overline{x}, y) = 0$. □

**Věta 3.2.3.** *Identita platí v každé MV-algebře, právě když platí ve standardní MV-algebře.*

*Důkaz.* Implikace zleva doprava je triviální. Opačnou implikaci dokážeme pomocí její obměny. To znamená, že budeme dokazovat výrok: Jestliže identita neplatí v některé MV-algebře, pak neplatí ve standardní MV-algebře.

Nechť $A$ je libovolná MV-algebra. Nechť $t(\overline{x})$ je $n$-ární term takový, že v $A$ neplatí identita $t(\overline{x}) = 0$. Podle důsledku 2.2.19 existuje unitální abelovská $\ell$-grupa $(G, u)$ taková, že $A \cong \Gamma(G, u)$. Použitím předchozího lemmatu dostaneme, že identita $\hat{t}(\overline{x}, y) = 0$ neplatí v $G$. Protože varieta $\ell$-grup je generovaná aditivní grupou $\mathbb{Z}$ (důsledek 2.1.10), tak ani v ní neplatí identita $\hat{t}(\overline{x}, y) = 0$. To znamená, že existují $\overline{a}, b \in \mathbb{Z}$ tak, že:

$$t^{\mathbb{Z}}(\overline{a}, b) \neq 0.$$

Označme $S = \Gamma(\mathbb{Z}, b \vee 0)$. Podle lemmatu 3.2.1 platí:

$$0 \neq t^{\mathbb{Z}}(\overline{a}, b) = t^S((a_1 \vee 0) \wedge (b \vee 0), \ldots, (a_n \vee 0) \wedge (b \vee 0)).$$

Vidíme, že identita $t(\overline{x}) = 0$ neplatí ani v $S$, která je izomorfní s podalgebrou standardní MV-algebry. [1] □

**Důsledek 3.2.4.** *Varieta $\mathcal{MV}$ je generována standardní MV-algebrou.*

[1] Konkrétně: pokud $b > 0$, pak $S \cong S_b$, a pokud $b \leq 0$, pak je $S$ izomorfní s triviální algebrou.

## 3.3. Jednoduché MV-algebry

**Definice 3.3.1.** Řekněme, že MV-algebra $A$ je *jednoduchá*, jestliže $|A| > 1$ a $\{0\}$, $A$ jsou její jediné ideály. Tj. nemá žádné netriviální vlastní ideály.

**Věta 3.3.2.** *Pro každou MV-algebru $A$ je ekvivalentní:*

*(i) $A$ je jednoduchá;*

*(ii) $A$ je izomorfní s některou podalgebrou standardní MV-algebry;*

*(iii) pro každý prvek $x \in A \setminus \{0\}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \times x = 1$.*

*Důkaz.* Nejprve dokažme (i) $\Rightarrow$ (ii). Nechť $A$ je jednoduchá MV-algebra. Pak je $A$ izomorfní s $\Gamma(G, u)$ pro některou abelovskou $\ell$-grupu $G$ se silnou jedničkou $u \in G^+$. Z věty 2.2.5. plyne, že $A$ je jednoduchá, právě když $G$ je jednoduchá. Protože je $G$ jednoduchá, tak se podle věty 2.1.7 dá izomorfně vnořit do $(\mathbb{R}, +)$ se standardním lineárním uspořádáním. Takže pak $A \cong \Gamma(H, u)$, kde $H$ je některá $\ell$-podgrupa $\mathbb{R}$. Ovšem také víme, že každá $\Gamma(\mathbb{R}, u)$ je izomorfní s $\Gamma(\mathbb{R}, 1)$ (viz poznámka 2.3.2), a proto je také $\Gamma(H, u) \cong A$ izomorfní s některou podalgebrou $\Gamma(\mathbb{R}, 1)$. Implikace (ii) $\Rightarrow$ (iii) je zřejmá.

Nyní dokažme implikaci (iii) $\Rightarrow$ (i). Nechť platí (iii), ale neplatí (i). Pak existuje netriviální vlastní ideál $J$ a tedy i nenulový prvek $a \in J$. Ovšem podle (iii) existuje $n$ takové, že $n \times a = 1$, a tedy $1 \in J$. Pak ale $J = A$ – spor. $\square$

Z věty hned plyne, že $S_n$ i $S_\omega$ jsou jednoduché MV-algebry.

**Věta 3.3.3.** *MV-algebra je konečná a jednoduchá, právě když je izomorfní s $S_n$ pro některé $n \in \mathbb{N}$.*

*Důkaz.* Implikace zprava doleva je triviální. Nechť $A$ je konečná a jednoduchá. Pak je izomorfní s některou podalgebrou $S$ standardní MV-algebry. Označme $a$ atom $S$ . Pokud $a = 1$, pak zřejmě $S \cong S_1$. Nechť $a < 1$. Pak $a \leq \frac{1}{2}$, neboť $S$ je uzavřená na negaci, což je operace $1 - x$. Podle (iii) věty 3.3.2 existuje (vícero) $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n \times a = 1$. Zvolme $m = \min\{n \mid n \times a = 1\}$, tj. $m$ je jediné splňující $(m-1) \times a < 1 = m \times a$. Zřejmě $K = \{0, a, 2 \times a, \ldots, (m-1) \times a, 1\} \subseteq S$. Pokud by existoval prvek $b \in S \setminus K$, pak by pro některé $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ muselo platit $i \times a < b < (i+1) \times a$. Pro $i = m - 1$ by to znamenalo, že $(m-1) \times a < b < 1$. Aplikujeme-li na tyto nerovnosti negaci, implikuje to nerovnosti $0 < \neg b < a$, a to je spor. Pokud by $i < m - 1$, pak by platilo $0 < b - i \times a < (i+1) \times a - i \times a = a$ – další spor. Platí tedy $K = S$ a $A \cong S \cong S_m$. $\square$

## 3.4. Řád a hodnost MV-algebry

**Definice 3.4.1.** Nechť $A$ je MV-algebra. Řekneme, že nenulový prvek $x \in A$ je *řádu* $n$, jestliže $n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m \times x = 1\}$. To budeme značit $\mathrm{ord}(x) = n$. Jestliže takové $n$ neexistuje, pak řekneme, že $x$ je nekonečného řádu, a budeme psát $\mathrm{ord}(x) = \omega$. Dále definujme $\mathrm{ord}(A) = \sup\{\mathrm{ord}(x) \mid x \in A \setminus \{0\}\}$.[1]

**Lemma 3.4.2.** *Nechť $A$ je MV-řetězec. Pak pro nenulové prvky $x, y \in A$ takové, že $x < y$, platí $\mathrm{ord}(y) \leq \mathrm{ord}(x)$.*

*Důkaz.* Nechť $x$, $y$ jsou nenulové prvky $A$ a nechť $x < y$. Je-li $\mathrm{ord}(x) = \omega$, pak je tvrzení zřejmé. Je-li $\mathrm{ord}(x) = n$, pak podle lemmatu 1.1.7 platí $n \times x \leq n \times y$, a tedy $1 \leq n \times y$, tj. $n \times y = 1$. To znamená, že $\mathrm{ord}(y) \leq n = \mathrm{ord}(x)$. □

Toto lemma nám napovídá, že u MV-řetězců, které mají atom, je řád MV-algebry roven právě řádu atomu, neboť atom je nejmenší nenulový prvek.

**Příklad 3.3.**

(1) $\mathrm{ord}(S_n) = \mathrm{ord}(\frac{1}{n}) = n$.

(2) $\mathrm{ord}(S_\omega) = \omega$, neboť $\frac{1}{n} \in S_\omega$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\mathrm{ord}(\frac{1}{n}) = n$.

(3) $\mathrm{ord}(S_n^\omega) = \omega$, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $n \times (0,1) < (1,0)$.

Pro každý MV-řetězec $A$ definujme množinu:

$$\mathrm{Rad}(A) = \{x \in A \mid n \times x \leq \neg x \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}.$$

**Lemma 3.4.3.** *Nechť $A$ je MV-řetězec. Pak:*

$$\mathrm{Rad}(A) = \{x \in A \mid \mathrm{ord}(x) = \omega\} \cup \{0\}.$$

*Důkaz.* Jistě $0 \in \mathrm{Rad}(A)$, neboť $0 = n \times 0 \leq 1$. Nechť $x \neq 0$. Stačí si uvědomit, že $x \notin \mathrm{Rad}(A)$, právě když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \times x > \neg x$. To je, právě když $(n+1) \times x = 1$ a zároveň $n \times x \neq \neg x$. Kdyby platilo $(n+1) \times x = 1$ a zaroveň $n \times x = \neg x$, pak by $(n+1) \times x > \neg x$. Takže máme, že pro každé $x \neq 0$ platí $x \notin \mathrm{Rad}(A)$, právě když existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m \times x = 1$, tj. právě když $\mathrm{ord}(x) \leq m < \omega$. □

**Lemma 3.4.4.** $\mathrm{Rad}(A)$ *je maximální ideál MV-řetězce $A$.*

*Důkaz.* Podle předchozího lemmatu $0 \in \mathrm{Rad}(A)$. Nechť $x \in \mathrm{Rad}(A)$, $y \in A$, $y \leq x$. Díky lemmatu 1.1.7 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$n \times y \leq n \times x \leq \neg x \leq \neg y,$$

[1] Zde $\omega$ značí první nekonečný ordinál, takže $\omega > n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

tj. $y \in \mathrm{Rad}(A)$. Nyní nechť $x, y \in \mathrm{Rad}(A)$. Kdyby $x = 0$ nebo $y = 0$, pak by zřejmě $x \oplus y \in \mathrm{Rad}(A)$, přepokládejme tedy, že $x$, $y$ jsou nenulové. Dále, protože $A$ je MV-řetězec, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $x \leq y$. Z předchozího lemmatu plyne, že $n \times x < 1$, $n \times y < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky lemmatu 1.1.7 (6) pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí:

$$n \times (x \oplus y) = n \times x \oplus n \times y \leq 2n \times y < 1.$$

To znamená, že $x \oplus y \in \mathrm{Rad}(A)$.

Dokázali jsme, že $\mathrm{Rad}(A)$ je ideál, nyní dokážeme, že je maximální. Nechť $I \supset \mathrm{Rad}(A)$ je ideál $A$. Pak existuje $a \in I \setminus \mathrm{Rad}(A)$. Zřejmě $a \neq 0$. Z předchozího lemmatu plyne, že $\mathrm{ord}(a) < \omega$, tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \times a = 1$. Ale protože $I$ je ideál, tak $n \times a = 1 \in I$, tedy $I = A$. □

**Definice 3.4.5.** Nechť $A$ je MV-algebra. Řekneme, že $A$ má *hodnost* $m$, jestliže $m = \mathrm{ord}(A/\mathrm{Rad}(A))$. Značíme $h(A) = m$.

Použijeme-li větu 3.3.2 bod (iii), pak díky předchozím lemmatům dostaneme tyto důsledky:

**Důsledek 3.4.6.** *MV-řetězec $A$ je jednoduchý, právě když* $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$.

**Důsledek 3.4.7.** *MV-řetězec $A$ je jednoduchý, právě když* $\mathrm{ord}(A) = h(A)$.

Uvážíme-li předchozí příklady, vidíme, že MV-algebry $S_n^\omega$ nejsou jednouché.

**Věta 3.4.8.** *Nechť $A$ je MV-řetězec a platí* $\mathrm{ord}(A) = n$. *Pak $A$ je izomorfní s $S_n$.*

*Důkaz.* Nechť $\mathrm{ord}(A) = n$. Kdyby $n = 1$, tak jistě $A = \{0, 1\}$, a tedy $A \cong S_1$. Předpokládejme, že $n \geq 2$. Nechť $a \in A \setminus \{0\}$ je prvek řádu $n$. Takový prvek existuje, neboť $\{\mathrm{ord}(x) \mid x \in A \setminus \{0\}\}$ je konečná podmnožina $\mathbb{N}$ taková, že $n = \mathrm{ord}(A) = \max\{\mathrm{ord}(x) \mid x \in A \setminus \{0\}\}$. Uvědomme si, že $n \times a = 1$, ale $(n-1) \times a \neq 1$. Ukážeme, že $a$ je atom. Předpokládejme, že existuje $x \in A$ tak, že $0 < x < a$. Máme $a = a \vee x = (a \ominus x) \oplus x$. Nechť $y$ je menší z prvků $a \ominus x$, $x$. Pak $0 < y \leq x$ a také $2 \times y \leq (a \ominus x) \oplus x = a$. Protože $n \geq 2$, tak $n \leq 2(n-1)$ a máme:

$$n \times y \leq 2(n-1) \times y = (n-1) \times (2 \times y) \leq (n-1) \times a \neq 1.$$

To znamená, že $\mathrm{ord}(y) > n$ – spor. Takže skutečně platí, že prvek $a \in A \setminus \{0\}$ řádu $n$ je atom.

Ukážeme, že všechny prvky $x \in A \setminus \{0\}$ jsou tvaru $k \times a$ pro některé $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Zřejmě $1 = n \times a$ v tomto tvaru je. Předpokládejme, že $x \in A$ není v tomto tvaru, tj. existuje $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$, tak, že $k \times a < x < (k+1) \times a$. Potom platí:

$$0 < ((k+1) \times a) \ominus x < ((k+1) \times a) \ominus (k \times a) \leq a.$$

Tj. spor. Takže každý nenulový prvek MV-řetězce $A$ je tvaru $k \times a$, kde $1 \leq k \leq n$, a proto $A \cong S_n$. □

**Důsledek 3.4.9.** *Nechť $A$ je MV-řetězec. Pak $A$ má hodnost $m$, právě když $A/\mathrm{Rad}(A)$ je izomorfní s $S_m$.*

**Příklad 3.4.**

(1) $h(S_n) = n$, neboť $\mathrm{Rad}(S_n) = \{0\}$.

(2) $h(S_n^\omega) = n$, platí totiž $\mathrm{Rad}(S_n^\omega) = \{(0, z) \mid z \in \mathbb{Z}^+\}$ a $S_n^\omega/\mathrm{Rad}(S_n^\omega) \cong S_n$.

(3) $h(S_\omega) = \omega$, jelikož $\mathrm{Rad}(S_\omega) = \{0\}$, tak $\mathrm{ord}(S_\omega/\mathrm{Rad}(S_\omega)) = \mathrm{ord}(S_\omega) = \omega$.

## 3.5. Variety MV-algeber

Věta 2.2.9 říká: Každá MV-algebra je subdirektním součinem MV-řetězců. To v řeči variet znamená:

**Věta 3.5.1.** *Nechť $\mathcal{V}$ je varieta MV-algeber. Pak existuje množina MV-řetězců $\{A_i \mid i \in I\}$, kterými je tato varieta generovaná, tj. $\mathcal{V} = V(\{A_i \mid i \in I\})$.*

**Lemma 3.5.2.** *Nechť $A$ je nekonečná podalgebra standardní MV-algebry. Pak je $A$ hustá v $[0, 1]$.*

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že $\inf_A(A \setminus \{0\}) = 0$. Kdyby $\inf_A(A \setminus \{0\}) = a \neq 0$, pak by $\mathrm{ord}(a) = n$ pro některé $n \in \mathbb{N}$ a pro každý prvek $b \in A$ by platilo $\mathrm{ord}(a) = n \geq \mathrm{ord}(b)$. To by ale znamenalo, že $\mathrm{ord}(A) = n$, což podle věty 3.4.8 implikuje $A \cong S_n$. Tj. $A$ je konečná – spor. Takže $\inf_A(A \setminus \{0\}) = 0$.

Nechť $x \in (0, 1]$ a nechť $0 < \epsilon < x/2$. Protože $\inf_A(A \setminus \{0\}) = 0$, tak jistě existuje $b \in A \setminus \{0\}$ takové, že $b < \epsilon$. Nechť $m$ je nejmenší přirozené číslo takové, že $x \leq m \times b$. Zřejmě $m > 2$, protože $b < \epsilon < x/2$, a platí $x - \epsilon < (m-1) \times b < x$. Tj. $A$ je hustá podmnožina $[0, 1]$. □

**Věta 3.5.3.** *Nechť $A$ je nekonečná podalgebra standardní MV-algebry. Pak platí $V(A) = \mathcal{MV}$.*

*Důkaz.* Je jasné, že $1 - x$ a $\min\{1, x + y\}$ jsou spojité funkce. Proto je pro každý $n$-ární term $t(\overline{x})$ termová funkce $t^{[0,1]}\colon [0, 1]^n \to [0, 1]$ spojité zobrazení.

Předpokládejme, že identita $t(\overline{x}) = 0$ neplatí ve standardní MV-algebře. Tj. $t^{[0,1]}(\overline{a}) \neq 0$ pro některé $\overline{a} = a_1, \ldots, a_n \in [0, 1]$. Protože je $t^{[0,1]}$ spojité zobrazení, tak existuje otevřené okolí bodu $(a_1, \ldots, a_n) \in [0, 1]^n$, na kterém je hodnota $t^{[0,1]}$ nenulová. A protože $A$ je hustá podmnožina $[0, 1]$, tak v tomto okolí existuje bod $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$. Takže $t^A(\overline{b}) = t^{[0,1]} \neq 0$. Tj. podalgebra $A$ nesplňuje identitu $t(\overline{x}) = 0$. Víme, že $V([0, 1]) = \mathcal{MV}$, a proto $V(A) = \mathcal{MV}$. □

**Věta 3.5.4.** *Nechť $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak:*

$$V(\{S_{n_i} \mid i \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{MV}.$$

*Důkaz.* Pro každé $a \in [0,1]$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$ zřejmě existuje $k_i$, $0 < k_i \leq n_i$, takové, že $|a - \frac{k_i}{n_i}| \leq \frac{1}{n_i}$. To znamená, že pro každé otevřené okolí bodu $a \in [0,1]$ existuje $k_i$ tak, že $\frac{k_i}{n_i} \in S_{n_i}$ je v tomto okolí. Z toho dále plyne, že pro každé otevřené okolí bodu $(a_1, \dots, a_m) \in [0,1]^m$ existuje v tomto okolí bod $(b_1, \dots, b_m) \in (S_{n_j})^m$ pro vhodně zvolené $n_j$. Zbytek důkazu je analogií důkazu předchozí věty. □

**Věta 3.5.5.** *Nechť $\mathcal{V}$ je vlastní podvarieta $\mathcal{MV}$. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro každý MV-řetězec $A \in \mathcal{V}$ je $h(A) \leq m$.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že neexistuje $m$ takové, že by pro každý MV-řetězec $A \in \mathcal{V}$ platilo $h(A) \leq m$. Pak máme dvě možnosti:

(1) Existuje MV-řetězec $A \in \mathcal{V}$ takový, že $h(A) = \omega$. Potom nechť je $M$ jeho maximální ideál. Zřejmě $A/M \in \mathcal{V}$ a zároveň je $A/M$ izomorfní s nekonečnou podalgebrou standardní MV-algebry. To ale znamená, že $\mathcal{V} = \mathcal{MV}$ – spor.

(2) Hodnosti MV-řetězců jsou konečné, ale neomezené. To znamená, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje MV-řetězec $A \in \mathcal{V}$ tak, že $m < h(A) = n$. Pak ale také $A/\mathrm{Rad}(A) \cong S_n \in \mathcal{V}$. Tedy existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(n_i)_{i=0}^{\infty}$ tak, že $S_{n_i} \in \mathcal{V}$. To podle věty 3.5.4 znamená $\mathcal{V} = \mathcal{MV}$ – spor. □

**Důsledek 3.5.6.** *Nechť $A$ je MV-řetězec takový, že $h(A) = \omega$. Pak $V(A) = \mathcal{MV}$.*

To znamená, že vlastní podvariety $\mathcal{MV}$ mohou obsahovat MV-řetězce s konečnou hodností, které nejsou jednoduché. Ty je třeba prozkoumat.

**Věta 3.5.7.** *Nechť $A = \Gamma(G,u)$ je MV-řetězec takový, že platí $ord(A) = \omega$ a $h(A) = n$. Nechť $H$ je konvexní $\ell$-podgrupa $G$ generovaná množinou $Rad(A)$. Pak $A \cong \Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}H, (1,b))$ pro některé $0 < b \in Rad(A)$.*

*Důkaz.* Nejprve poznamenejme, že $\mathrm{Rad}(A) \neq \{0\}$. Kdyby totiž $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$, pak by $h(A) = \mathrm{ord}(A/\mathrm{Rad}(A)) = \omega$ – spor. Dále $\mathrm{Rad}(A)$ je maximální ideál (viz lemma 3.4.4), a proto je $H$ maximální konvexní $\ell$-podgrupa (viz poznámka 2.2.7).

Protože $A = \Gamma(G,u)$, tak podle lemmatu 2.2.6 $A/\mathrm{Rad}(A) \cong \Gamma(G/H, u+H)$. Dále $A$ má hodnost $n$, takže podle důsledku 3.4.9 platí $A/\mathrm{Rad}(A) \cong S_n$. Protože podle věty 2.2.21 je funktor $\Gamma$ ekvivalence kategorií, tak lze izomorfismus MV-algeber $S_n \cong \Gamma(G/H, u+H)$ rozšířit na izomorfismus unitálních abelovských $\ell$-grup $G/H \cong \mathbb{Z}$. Zřejmě $\mathbb{Z}\frac{1}{n} \cong \mathbb{Z}$, takže máme $G/H \cong \mathbb{Z}$.

Nyní použijeme větu 2.1.8. Ta říká, že $G \cong \mathbb{Z}\vec{\times}H$. Nechť $f\colon G \to \mathbb{Z}$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}\vec{\times}H$ jsou zobrazení stejná jako v důkazu věty 2.1.8. Ukažme, že existuje $a \in G$ takový, že $na < u$ a $f(a) = 1$. Kdyby $na = u$, pak bychom místo $a$ vybrali prvek $a - t$, kde $0 < t \in H$. Kdyby $na > u$, pak by $na = u + s$ pro některé $s \in H$ a vybrali bychom prvek $a - 2s$.

Z věty 2.1.8 plyne, že $A \cong \Gamma(\mathbb{Z}\vec{\times}H, \varphi(u))$ a $\varphi(u) = (f(u), u - f(u)a) = (n, u - na)$. Zřejmě $u - na \in H$, neboť $f(u - na) = 0$. Protože $A$ je lineárně uspořádaná a $u \notin H$, platí $\mathrm{Rad}(A) = H^+$, a proto také $u - na \in \mathrm{Rad}(A)$. □

**Lemma 3.5.8.** *Nechť $A$ je MV-řetězec takový, že ord$(A) = \omega$ a $h(A) = n$. Pak $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1,1)) \in V(A)$.*

*Důkaz.* Nechť $A$ je taková, že splňuje předpoklady věty. Pak existuje $G$ tak, že $A \cong \Gamma(G, u)$. Podle věty 3.5.7 je $A \cong \Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}H, (1, b))$, kde $H$ je je maximální konvexní podgrupa $G$ a $0 < b \in H$. Nechť $B$ je podalgebra $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}H, (1, b))$ generovaná prvkem $(\frac{1}{n}, 0)$. Zřejmě $B$ je izomorfní s $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1, 1))$. To proto, že $(1, 0) \in B$ a $\neg(1, 0) = (1, b) - (1, 0) = (0, b) \in B$, zbytek je jasný. □

**Lemma 3.5.9.** *Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ a $n \geq 1$ platí $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1, k)) \in V(S_n^\omega)$.*

*Důkaz.* Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ a $n \geq 1$ definujme zobrazení $h\colon \mathbb{Z}\frac{1}{n} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\frac{1}{n}$ takto:

$$h(x, y) = (x, ny - kxn).$$

Snadno se lze přesvědčit, že $h$ je injektivní homomorfismus $\ell$-grup, navíc $h(1, k) = (1, 0)$, a proto je $\Gamma(h)\colon \Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1, k)) \to S_n^\omega$ vnoření. □

**Věta 3.5.10.** *Nechť $A = \Gamma(G, u)$ je MV-řetězec takový, že platí ord$(A) = \omega$ a $h(A) = n$. Pak $A \in V(S_n^\omega)$.*

*Důkaz.* Nechť $A$ je MV-řetězec splňující předpoklady věty. Pak podle věty 3.5.7 je $A$ izomorfní s $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}H, (1, b))$, kde $0 < b \in \mathrm{Rad}(A)$ a $H$ maximální konvexní podgrupa $G$ generovaná $\mathrm{Rad}(A)$.

Každá abelovská $\ell$-grupa je homomorfní obraz některé volné abelovské $\ell$-grupy. Nechť tedy $F$ je volná abelovská $\ell$-grupa a $h\colon F \to H$ surjektivní homomorfismus $\ell$-grup. Potom existuje $c \in F$ takové, že $h(c) = b$. Můžeme předpokládat, že $c > 0$.[1] Definujme zobrazení:

$$g\colon \mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}F \to \mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}H$$

tak, že $g(z, f) = (z, h(f))$ pro každé $z \in \mathbb{Z}\frac{1}{n}$ a $f \in F$. Zřejmě $g$ je surjektivní homomorfismus takový, že $g(1, c) = (1, b)$, a proto je zobrazení:

$$\Gamma(g)\colon \Gamma(\mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}F, (1, c)) \to \Gamma(\mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}H, (1, b))$$

surjektivním homomorfismem MV-algeber. Podle věty 2.1.9 existuje množina $I$ taková, že $F$ se dá vnořit do direktního součinu $\mathbb{Z}^I$. Proto můžeme prvky $f \in F$ chápat jako zobrazení $f\colon I \to \mathbb{Z}$. Definujme zobrazení:

$$\varphi\colon \mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}F \to (\mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z})^I$$

[1] Kdyby $c \leq 0$, pak by platilo $0 = h(c \vee 0) = h(c) \vee 0 = b$, což není možné.

tak, že $\varphi(z, f)(i) = (z, f(i))$ pro každé $i \in I$, $f \in F$ a $z \in \mathbb{Z}\frac{1}{n}$. Zřejmě $\varphi$ je injektivní homomorfismus $\ell$-grup. Nechť $J = \{i \in I \mid c(i) \neq 0\}$. Protože $c > 0$, tak $J \neq \emptyset$ a navíc $i \in J$, právě když $c(i) > 0$. A proto $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}F, (1, c))$ je izomorfní s

$$\prod_{i \in J} \Gamma(\mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, c(i)).$$

Protože pro každé $i \in J$ je podle lemmatu 3.5.9 $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, c(i)) \in V(S_n^\omega)$, tak je také $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}F, (1, c)) \in V(S_n^\omega)$. Konečně z toho, že $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}H, (1, b))$ je homomorfním obrazem $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}F, (1, c))$, plyne $\Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}H, (1, b)) \in V(S_n^\omega)$. □

**Věta 3.5.11.** *Nechť $A$ je MV-řetězec takový, že platí ord$(A) = \omega$ a $h(A) = n$. Pak $V(A) = V(S_n^\omega)$.*

*Důkaz.* Podle lemmatu 3.5.8 a věty 3.5.10 platí:

$$V(\Gamma(\mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1, 1))) \subseteq V(A) \subseteq V(S_n^\omega).$$

Stačí tedy dokázat inkluzi:

$$V(S_n^\omega) \subseteq V(\Gamma(\mathbb{Z}\tfrac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1, 1))).$$

Nechť $\pi(\overline{x})$ je term v jazyku MV-algeber takový, že identita $\pi(\overline{x}) = 0$ neplatí v $S_n^\omega$. To znamená, že existuje $c_1, c_2, \ldots, c_k \in S_n^\omega$ takové, že:

$$\pi^{S_n^\omega}(\overline{c}) \geq (0, 1). \tag{3.1}$$

Pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujme zobrazení $f_m\colon \mathbb{Z}\frac{1}{n} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\frac{1}{n} \times \mathbb{Z}$ tak, že $f_m(v, u) = (v, mv)$ pro každé $(u, v) \in \mathbb{Z}\frac{1}{n} \times \mathbb{Z}$. Pak $f_m$ je zřejmě homomorfismus $\ell$-grup. Pro každý MV-term definujme $\sigma$ v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_k$ definujme zobrazení $g$ tak, že $g(\sigma)$ bude celkový počet symbolů $\neg$ a $\oplus$, které se vyskytují v $\sigma$.

Označme $R_n = \Gamma\left(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1, 1)\right)$. Pomocí indukce vzhledem k $g(\sigma)$ dokážeme, že pro každé $b_1, b_2, \ldots, b_k \in S_n^\omega \subseteq R_n$ platí následující nerovnosti:

$$f_m(\sigma^{S_n^\omega}(\overline{b})) - (0, g(\sigma)) \leq \sigma^{R_n}(f_m(b_1), \ldots, f_m(b_k)) \leq f_m\left(\sigma^{S_n^\omega}(\overline{b})\right) + (0, g(\sigma)). \tag{3.2}$$

Nejdříve nechť $g(\sigma) = 0$. Pak buď $\sigma = 0$, nebo $\sigma = x_i$ pro některé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Je-li $\sigma = 0$, pak je platnost nerovností zřejmá. Pokud je $\sigma = x_i$ a $b_i = (u, v)$, pak platí:

$$f_m\left(\sigma^{S_n^\omega}(\overline{b})\right) = f_m(b_i) = (u, mv) = \sigma^{R_n}(f_m(b_i)).$$

Takže nerovnosti opět platí.

Nechť $d > 0$ je přirozené číslo. Předpokládejme, že nerovnosti (3.2) platí pro všechny MV-termy $\xi$ v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_k$ takových, že $g(\xi) < d$. Nyní nechť je $\sigma(\overline{x})$ MV-term takový, že $g(\sigma) = d$. Pak máme tyto možnosti:

(1) Existuje MV-term $\tau(\overline{x})$ tak, že platí $\sigma = \neg\tau$.

(2) Existují MV-termy $\mu(\overline{x})$, $\nu(\overline{x})$ takové, že $\sigma = \mu \oplus \nu$.

Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny MV-termy jsou v jediné proměnné $b$. V případě, že by MV-termy byly ve více proměnných, byl by důkaz zcela analogický, ale méně přehledný. Čtenář si na konci důkazu může důkaz znovu projít a přesvědčit se, že myšlenka důkazu bude pro více proměnných zcela totožná.

(1) Zřejmě $g(\tau) = g(\sigma) - 1 < d$, takže podle indukčního předpokladu platí:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{R_n}(f_m(b)) = (1,1) - \tau(f_m(b)) &\leq (1,1) - f_m(\tau^{s_n^\omega}(b)) + (0, g(\tau)) = \\
&= (1,0) - f_m(\tau^{s_n^\omega}(b)) + (0, g(\tau) + 1) = \\
&= f_m(\sigma^{s_n^\omega}(b)) + (0, g(\sigma)).
\end{aligned}
$$

Tím je dokázána pravá nerovnost z (3.2). Dále také platí:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{R_n}(f_m(b)) = (1,1) - \tau(f_m(b)) &\geq (1,1) - f_m(\tau^{s_n^\omega}(b)) - (0, g(\tau)) = \\
&= (1,1) - f_m(\tau^{s_n^\omega}(b)) - (0, g(\sigma) - 1) = \\
&= (0,2) + (1,0) - f_m(\tau^{S_n^\omega}(b)) - (0, g(\sigma)) \geq \\
&\geq f_m(\sigma^{S_n^\omega}(b)) - (0, g(\sigma)).
\end{aligned}
$$

(2) Nyní uvažujme situaci $\sigma = \mu \oplus \nu$, takže $g(\sigma) = g(\mu) + g(\nu) + 1$. Podle indukčního předpokladu platí:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{R_n}(f_m(b)) &= (1,1) \wedge \left[\mu^{R_n}(f_m(b)) + \nu^{R_n}(f_m(b))\right] \leq \\
&\leq (1,1) \wedge \left[f_m(\mu^{S_n^\omega}(b)) \ + f_m(\nu^{S_n^\omega}(b)) + (0, g(\mu)) + (0, g(\nu))\right] \leq \\
&\leq (1, g(\mu) + g(\nu) + 1) \wedge \\
&\quad \wedge \left[f_m(\mu^{S_n^\omega}(b)) \ + f_m(\nu^{S_n^\omega}(b)) + (0, g(\mu)) + (0, g(\nu))\right] = \\
&= (1,0) \wedge \left[f_m(\mu^{S_n^\omega}(b)) \ + f_m(\nu^{S_n^\omega}(b))\right] + (0, g(\mu)) + (0, g(\nu)) = \\
&= f_m(\sigma^{S_n^\omega}(b)) + (0, g(\sigma)),
\end{aligned}
$$

a také:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{R_n}(f_m(b)) &= (1,1) \wedge \left[\mu^{R_n}(f_m(b)) + \nu^{R_n}(f_m(b))\right] \geq \\
&\geq (1,1) \wedge \left[f_m(\mu^{S_n^\omega}(b)) \ + f_m(\nu^{S_n^\omega}(b)) - (0, g(\mu)) - (0, g(\nu))\right] \geq \\
&\geq (1, 1 - g(\mu) - g(\nu)) \wedge \\
&\quad \wedge \left[f_m(\mu^{S_n^\omega}(b)) \ + f_m(\nu^{S_n^\omega}(b)) - (0, g(\mu)) - (0, g(\nu))\right] = \\
&= (1,1) \wedge \left[f_m(\mu^{S_n^\omega}(b)) \ + f_m(\nu^{S_n^\omega}(b))\right] - (0, g(\mu)) + (0, g(\nu)) \geq \\
&\geq (1,0) \wedge \left[f_m(\mu^{S_n^\omega}(b)) \ + f_m(\nu^{S_n^\omega}(b))\right] - (0, g(\mu)) + (0, g(\nu) + 1) = \\
&= f_m(\sigma^{S_n^\omega}(b)) - (0, g(b)).
\end{aligned}
$$

Tím jsou nerovnosti (3.2) dokázány.

Podle (3.1) a (3.2) platí:

$$(0, m - g(\pi)) \leq f_m \left(\pi^{S_n^\omega}(\overline{c})\right) - (0, g(\pi)) \leq \pi^{R_n}(f_m(c_1), \ldots, f_m(c_k))$$

Zvolíme-li $m > g(\pi)$, pak $\pi^{R_n}(\overline{c}) \geq (0,1)$. To znamená, že $R_n$ nesplňuje identitu $\pi(\overline{x}) = 0$. To znamená, že splňuje-li $R_n$ některou identitu, pak ji musí splňovat i $S_n^\omega$, tj. $V(S_n^\omega) \subseteq V(R_n)$ a tedy:

$$V(R_n) = V(A) = V(S_n^\omega).$$

□

**Věta 3.5.12.** *Nechť $I$ a $J$ jsou konečné množiny přirozených čísel. Pak platí:*

$$V(S_m) \subseteq V\big(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\}\big) \tag{3.3}$$

*právě tehdy, když existuje $n \in I \cup J$ takové, že $m$ dělí $n$.*

*Důkaz.* Existuje-li $n \in I \cup J$ takové, že $m$ dělí $n$, pak je $S_m$ podalgebra buď $S_n$, nebo $S_n^\omega$. Tím je dokázána implikace zprava doleva.

Nechť platí inkluze (3.3), dále nechť $r = \max(I \cup J)$ a nechť $t(x)$ je term:

$$t(x) = (r+1) \times [(m-1) \times \neg x \ominus x] \oplus (r+1) \times x^m \oplus x.$$

Zvolíme-li $x = \frac{m-1}{m}$, pak:

$$t^{S_m}\left(\tfrac{m-1}{m}\right) = \tfrac{m-1}{m}.$$

To znamená, že identita $t(x) = 1$ neplatí v $S_m$, a proto neplatí ani ve varietě $V(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\})$. To znamená, že existuje $i \in I$ takové, že identita neplatí v $S_i$, nebo existuje $j \in J$ takové, že indetita neplatí v $S_j^\omega$.

Předpokládejme, že identita neplatí v $S_j^\omega$. Tj. existuje $c \in S_j^\omega$ takové, že $t(c) < (1,0)$. Nejprve si všimněme, že pro $l > j$ a $x$, $y \in S_j^\omega$ platí tvrzení:

$$l \times \neg x \oplus y < (1,0) \text{ implikuje } x \in \{(1,a) \mid a \in \mathbb{Z}^-\}.$$

Nyní si uvědomme, že $(m-1) \times \neg c \ominus c = \neg\left[\neg((m-1){\times}\neg c) \oplus c\right]$. Takže $c$ musí být takové, že platí:

$$\neg((m-1){\times}\neg c) \oplus c \in \{(1,a) \mid a \in \mathbb{Z}^-\}. \tag{3.4}$$

Z $t(c) < (1,0)$ plyne, že také $(r+1) \times x^m \oplus x = (r+1) \times \neg(m \times \neg c) \oplus c < (1,0)$, a proto musí zároveň platit:

$$m{\times}\neg c \in \{(1,a) \mid a \in \mathbb{Z}^-\}. \tag{3.5}$$

Předpokládejme, že $c$ je tvaru $c = (1 - k/j, a)$, kde $k \geq 0$ je celé číslo a $a \in \mathbb{Z}^-$. Pak podle (3.4) a (3.5) musí platit:

$$(mk/j, a) \in \{(1,a) \mid a \in \mathbb{Z}^-\},$$
$$(1 - (m-1)k/j + 1 - j/k, a) \in \{(1,a) \mid a \in \mathbb{Z}^-\}.$$

To implikuje nerovnosti:

$$mk/j \geq 1,$$
$$1 - (m-1)k/j + 1 - j/k \geq 1,$$

po úpravě $mk \geq j$ a $mk \leq j$. Takže $j = mk$ a tedy $m \mid j$. Tj. $j$ je hledaný index z množiny $I \cup J$.

Pro předpoklad, že existuje $i$ takové, že identita $t(x) = 1$ neplatí v $S_i$, by důkaz vypadal úplně totožně, pouze bychom místo dvojic $(u, v)$ uvažovali prvky $u \in S_i$. □

**Důsledek 3.5.13.** *$V(S_m) \subseteq V(S_n)$ právě tehdy, když $m$ dělí $n$.*

**Věta 3.5.14.** *Nechť $I$ a $J$ jsou konečné množiny přirozených čísel. Pak platí:*

$$V(S_m^\omega) \subseteq V\big(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\}\big) \tag{3.6}$$

*právě tehdy, když existuje $n \in I \cup J$ takové, že $m$ dělí $n$.*

*Důkaz.* Existuje-li $n \in I \cup J$ takové, že $m$ dělí $n$, pak je $S_m^\omega$ podalgebra $S_n^\omega$. Tím je dokázána implikace zprava doleva.

Nechť platí inkluze (3.6), dále nechť $r = \max(I \cup J)$ a nechť $t(x, y, z)$ je term:

$$t(x, y, z) = (r + 1) \times [(m-1)\times\neg x \ominus x] \oplus (r + 1) \times x^m \oplus (r \times \neg y \oplus z) \vee y.$$

Zvolíme-li $x = (\frac{m-1}{m}, 0)$, $y = (1, -1)$ a $z = (0, 0)$, pak:

$$t^{S_m^\omega}\left(\left(\tfrac{m-1}{m}, 0\right), (1, -1), (0, 0)\right) = (1, -1).$$

Takže identita $t(x, y, z) = (1, 0)$ neplatí v $S_m^\omega$, a proto neplatí ani ve varietě $V(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\})$. To znamená, že identita buď neplatí v $S_i$ pro některé $i \in I$, nebo neplatí v $S_j^\omega$ pro některé $j \in J$.

Ukážeme, že identita $t(x, y, z) = 1$ platí v $S_i$ pro každé $i \in I$. K tomu si stačí uvědomit, že pokud se nějaký prvek sčítance rovná jedné, pak se celý sčítanec rovná jedné. Uvažujme $(r \times \neg y \oplus z) \vee y$. Pokud $\neg y > 0$, pak $r \times \neg y = 1$, protože $r \geq i$ pro každé $i$, a pokud $\neg y = 0$, pak $y = 1$. V každém případě je tento sčítanec roven 1, a proto indetita $t(x, y, z) = 1$ platí pro libovolné $i \in I$ a $x$, $y$, $z \in S_i$.

Vzhledem k dříve zmíněnému to znamená, že nutně existuje $j \in J$ takové, že identita neplatí v $S_j^\omega$. Tj. existuje $a$, $b$, $c \in S_j^\omega$ tak, že $t(a, b, c) < (1, 0)$. Použijeme-li nyní totožné argumenty jako v důkazu věty 3.5.12 dostáváme tvrzení této věty. □

**Důsledek 3.5.15.** *$V(S_m^\omega) \subseteq V(S_n^\omega)$ právě tehdy, když $m$ dělí $n$.*

Nyní máme vše připraveno pro to, abychom uvedli jednu z nejdůležitějších vět této kapitoly.

**Věta 3.5.16.** *Pro každou netriviální vlastní podvarietu $\mathcal{V} \subset \mathcal{MV}$ existují konečné množiny přirozených čísel $I$ a $J$ takové, že platí:*

$$\mathcal{V} = V\big(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\}\big)\,.$$

*Důkaz.* Podle věty 3.5.1 existuje množina $\{A_k \mid k \in K\}$ MV-řetězců, které generují $\mathcal{V}$. Pokud pro $A_k$ platí $\mathrm{ord}(A_k) = n$, pak je podle věty 3.4.8 $A_k$ izomorfní s $S_n$, takže $V(A_k) = V(S_n)$. Pokud je $A_k$ taková, že $\mathrm{ord}(A_k) = \omega$ a $h(A_k) = m$, pak podle věty 3.5.11 je $V(A_k) = V(S_m^\omega)$. Pokud by $A_k$ byla taková, že $h(A_k) = \omega$, pak by podle důsledku 3.5.6 platilo $V(A_k) = \mathcal{MV}$, to je ale spor s předpokladem. Takže pro každé $k \in K$ se $V(A_k)$ rovná buď $V(S_n)$ nebo $V(S_m^\omega)$. To znamená, že existují $I$, $J \subseteq \mathbb{N}$ takové, že $\mathcal{V} = V(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\})$. Kdyby $I$ byla nekonečná, pak by podle věty 3.5.4 platilo $\mathcal{V} = \mathcal{MV}$. To je spor. Pokud by $J$ byla nekonečná, pak, protože $S_j$ je podalgebra $S_j^\omega$ pro každé $j \in J$, by opět díky větě 3.5.4 platilo $\mathcal{V} = \mathcal{MV}$ – spor. Takže $I$ i $J$ jsou konečné. □

## 3.6. Svazy podvariet

Pro libovolnou varietu $\mathcal{V}$ zavedeme toto značení: $\Lambda(\mathcal{V})$ bude označovat svaz všech podvariet variety $\mathcal{V}$. Dále $\mathcal{T}$ bude vždy označovat triviální varietu. Je jasné, že variety MV-algeber vzhledem k množinové inkluzi tvoří úplný svaz. Věty 3.5.12 a 3.5.14 napovídají, že $\Lambda(V(S_n))$ a $\Lambda(V(S_n^\omega))$ budou souviset se svazem dělitelů čísla $n$. V této podkapitole tuto souvislost přesně popíšeme.

Nechť $D_n$ je svaz dělitelů čísla $n$ a nechť $M$ je množina všech antiřetězců ve svazu $D_n$. Pro každé dva antiřetězce $A$, $B \in M$ definujme relaci $\leq$ takto:

$$A \leq B \;\Leftrightarrow\; \forall a \in A\, \exists b \in B \colon a \mid b.$$

**Lemma 3.6.1.** *Nechť $M$ a $\leq$ jsou jak výše. Pak $(M, \leq)$ je svaz.*

*Důkaz.* Ukážeme, že $\leq$ je uspořádání. Reflexivita je zřejmá. Nechť $A$, $B \in M$, dále nechť platí $A \leq B$ a zároveň $B \leq A$. Předpokládejme $A \neq B$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že existuje $c \in A \setminus B$. Z $A \leq B$ plyne, že existuje $b$ takové, že $c \mid b$. Dále protože $B \leq A$, tak existuje $a$ takové, že $b \mid a$. Z tranzitivity dělitelnosti plyne, že pak $c \mid a$. Buď $c \neq a$, pak ale $A$ není antiřetězec – spor, nebo $c = a$, pak ale z $c = a \mid b$, $b \mid a = c$ plyne $a = b = c$, což je opět spor. Takže $A = B$, tj. $\leq$ je antisymetrická. Nechť $A \leq B$ a zároveň $B \leq C$. Z definice je jasné, že pro každé $a \in A$ existuje $c \in C$ tak, že $a \mid c$, proto $A \leq C$ a $\leq$ je tranzitivní.

Zatím máme, že $(M, \leq)$ je uspořádaná množina. Nyní ověříme, že pro každé dva antiřetězce z $M$ existuje jejich supremum a infimum. Nechť $A \in M$, označme $L_A = \bigcup_{a \in A} L(a)$, kde $L(a)$ je dolní kužel prvku $a$ ve svazu $D_n$. Takže platí:

$$L_A = \{x \in D_n \mid \exists y \in A \colon x \mid y\}.$$

Dále budeme používat $\mathrm{Max}\,(X)$ jako označení množiny všech maximálních prvků množiny $X$ ve svazu $D_n$. Nejprve ověříme, že $\mathrm{Max}\,(L_A \cap L_B)$ je infimum $A$, $B \in M$. Je zřejmé, že $\mathrm{Max}\,(L_A \cap L_B)$ je antiřetězec. Nechť $C \in M$ je takové, že $\mathrm{Max}\,(L_A \cap L_B) \leq C \leq A$, $B$. Pokud $c \in C$, pak z $C \leq A$, $B$ plyne, že existuje $a \in A$, $b \in B$ tak, že $c \mid a$ a $c \mid b$, a proto $c \in L(a) \subseteq L_A$ a $c \in L(b) \subseteq L_B$. To znamená $c \in L_A \cap L_B$, a proto $C \leq \mathrm{Max}\,(L_A \cap L_B)$, tedy $C = \mathrm{Max}\,(L_A \cap L_B)$. Takže skutečně platí $\inf(A, B) = \mathrm{Max}\,(L_A \cap L_B)$.

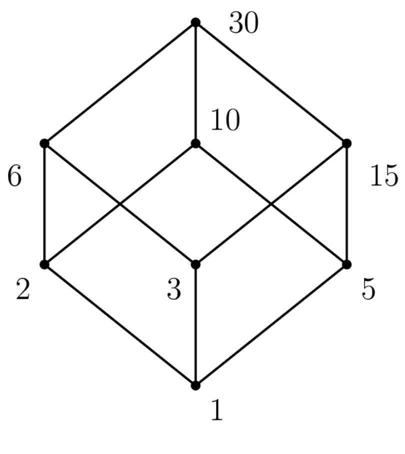
Nyní ověřme, že $\mathrm{Max}\,(L_A \cup L_B)$, je supremum $A$, $B \in M$. Opět je zřejmé, že $\mathrm{Max}\,(L_A \cup L_B)$ je antiřetězec. Nechť $C \in M$ je takové, že $A$, $B \leq C \leq \mathrm{Max}\,(L_A \cup L_B)$. Jistě platí $\mathrm{Max}\,(L_A \cup L_B) \subseteq A \cup B$. Nechť $d \in \mathrm{Max}\,(L_A \cup L_B)$. Pak $d \in A \cup B$ a z $A$, $B \leq C$ plyne, že existuje $c \in C$ takové, že $d \mid c$. Tzn. $\mathrm{Max}\,(L_A \cup L_B) \leq C$, tj. $C = \mathrm{Max}\,(L_A \cup L_B)$. Takže $\sup(A, B) = \mathrm{Max}\,(L_A \cup L_B)$. $\square$

**Věta 3.6.2.** *Svaz $M$, který vznikl výše uvedeným způsobem ze svazu $D_n$, je izomorfní se svazem $\Lambda(V(S_n))$.*

*Důkaz.* Definujme zobrazení $f \colon M \to \Lambda(V(S_n))$. Pro každé $A \in M$ nechť platí:

$$f(A) = V(\{S_a \mid a \in A\})\,.$$

zobrazení $f$ je zřejmě injektivní. Nechť $\mathcal{V} \subseteq V(S_n)$. Pak podle věty 3.5.16 existuje $I$ tak, že $\mathcal{V} = V(\{S_i \mid i \in I\})$. Dále podle věty 3.5.12 $V(S_i) \subseteq V(S_n)$, právě když




Obrázek 2: Hasseův diagram svazu $D_{30}$.

$i \mid n$, tedy $I \subset D_n$. Kdyby byly $j$, $k \in I$ takové, že $j \mid k$. Pak by opět podle věty 3.5.12 $V(S_j) \subseteq V(S_k)$ a místo množiny $I$ bychom mohli vybrat množinu $I \setminus \{j\}$, neboť by platilo $\mathcal{V} = V(\{S_i \mid i \in I\}) = V(\{S_i \mid i \in I \setminus \{j\}\})$. Můžeme tedy předpokládat, že množina $I$ je antiřetězec, tedy $I \in M$ a zřejmě $f(I) = \mathcal{V}$. Dohromady máme, že $f$ je bijekce.

Ukážeme, že $f$ je izotonní zobrazení. Nechť $A$, $B \in M$, $A \leq B$. Pak zřejmě pro každé $a$ existuje $b$ tak, že $V(S_a) \subseteq V(S_b)$ a z toho důvodu jistě také $V(\{S_a \mid a \in A\}) \subseteq V(\{S_b \mid b \in B\})$. Tj. $f$ je izotonní zobrazení.

Dále nechť $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq V(S_n)$. Pak existují množiny $I_1$, $I_2$ tak, že $\mathcal{V}_1 = V(\{S_i \mid i \in I_1\})$, $\mathcal{V}_2 = V(\{S_i \mid i \in I_2\})$. Navíc můžeme předpokládat, že $I_1$, $I_2$ jsou antiřetězce svazu $D_n$. Jistě $V(S_i) \subseteq \mathcal{V}_2$ pro každé $i \in I_1$. To podle věty 3.5.12 implikuje, že pro každé $i \in I_1$ existuje $j \in I_2$ tak, že $i \mid j$, tj. $I_1 \leq I_2$. To znamená, že $f^{-1}$ je izotonní. $\square$

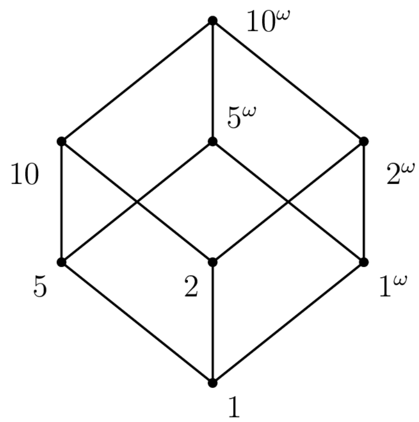
Nechť $\{1, \omega\}$ je dvouprvkový řetězec kde $1 \leq \omega$. Označme svaz $D_n^\omega = D_n \times \{1, \omega\}$. Pokud nebude hrozit nebezpečí nedorozumění, budeme prvky svazu $D_n^\omega$ zapisovat stručněji, místo $(k, 1)$ budeme psát jen $k$ a místo $(k, \omega)$ psát jen $k^\omega$. Stejně jako jsme zkonstruovali $M$ ze svazu $D_n$, zkonstruujeme svaz $M^\omega$ ze svazu $D_n^\omega$. Konkrétně $M^\omega$ bude množina antiřetězců $D_n^\omega$ a $\leq$ bude definováno takto:

$$A \leq B \;\Leftrightarrow\; \exists b \in B\colon a \leq b$$

kde $a = (a, u) \leq (b, v) = b$, právě když $a \mid b$ a $u \leq v$.

**Věta 3.6.3.** *Svaz $M^\omega$, který vznikl výše uvedeným způsobem ze svazu $D_n^\omega$, je izomorfní se svazem $\Lambda(V(S_n^\omega))$.*

*Důkaz.* Nechť $\overline{M}$ je svaz antiřetězců svazu $D_n \times \{1\}$. Je zřejmé, že $\overline{M}$ je podsvaz $M^\omega$ a že $\overline{M}$ je izomorfní se svazem $M$. Nechť $\varphi\colon \overline{M} \to M$ je izomorfismus.




Obrázek 3: Hasseův diagram svazu $D_{10}^\omega$.

Definujme zobrazení $g\colon M^\omega \to \Lambda(V(S_n^\omega))$. Pro každé $A \in M^\omega$ nechť platí:

$$g(A) = \begin{cases} f(\varphi(A)) & \text{jestliže } A \in \overline{M}, \\ V(\{S_a \mid a \in A\} \cup \{S_a^\omega \mid a^\omega \in A\}) & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $f$ je zobrazení z předchozího důkazu. Díky větám 3.5.12, 3.5.14 a protože $f$ je injektivní, je jasné, že $g$ je také injektivní.

Dokažáme, že $g$ je surjektivní. Nechť $\mathcal{V} \subset V(S_n^\omega)$. Je-li $\mathcal{V} = V(\{S_i \mid i \in I\})$, pak stejně jako v důkazu předchozí věty, můžeme předpokládat, že $I$ je antiřetězec a $I \in M \cong \overline{M} \subset M^\omega$. Takže $g(I) = \mathcal{V}$. Je-li $\mathcal{V} = V(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\})$, pak opět díky větám 3.5.12 a 3.5.14 můžeme předpokládat, že $I \times \{1\}$, $J \times \{\omega\}$ jsou antiřetězce svazu $M^\omega$. Dále víme, že $I \times \{1\} \cup J \times \{\omega\}$ je také antiřetězec svazu $M^\omega$, neboť kdyby existovalo $k \in I \times \{1\}$ takové, že $k \leq j^\omega$, pak bychom místo $I$ mohli vzít množinu $I \setminus \{k\}$ a pořád bychom měli generátory stejné variety, neboť $V(S_k) \subset V(S_j^\omega)$. Z vět 3.5.12 a 3.5.14 také plyne, že $g$ a $g^{-1}$ jsou izotonní. Takže $g$ je izomorfismus. □

**Lemma 3.6.4.** *Svaz $D_n^\omega$ je izomorfní se svazem $D_{np}$, kde $p$ je prvočíslo, které nefiguruje v rozkladu čísla $n$.*

*Důkaz.* Definujme zobrazení $f\colon D_{np} \to D_n^\omega$ takto:

$$f(a) = \begin{cases} (a, 1) & \text{pokud } p \nmid a \in A, \\ (a, \omega) & \text{pokud } p \mid a \in A. \end{cases}$$

Zobrazení je zřejmě bijektivní. Nechť $a$, $b \in D_{np}$, $a \mid b$. Pokud $p \mid a$, $b$ nebo pokud $p \nmid a$, $b$, pak jistě $f(a) \leq f(b)$. Situace, kdy $p \mid a$ a $p \nmid b$, nemůže nastat. Nechť $p \nmid a$, $p \mid b$. Pak $f(a) = (a, 1) \leq (b, \omega) = f(b)$. □

**Věta 3.6.5.** *Svaz $\Lambda(V(S_n^\omega))$ je izomorfní se svazem $\Lambda(V(S_{np}))$, kde $p$ je prvočíslo, které nefiguruje v rozkladu čísla $n$.*

*Důkaz.* Podle předchozího lemmatu jsou $D_{np}$ a $D_n^\omega$ izomorfní. Proto musí být také svaz $M$ vzniklý ze svazu $D_{np}$ izomorfní se svazem $M^\omega$ vzniklým ze svazu $D_n^\omega$. Tvrzení věty dostaneme použitím věty 3.6.2 a věty 3.6.3. □

Tato věta nám říká, že svazy podvariet variety generované nekonečnými řetězci $S_n^\omega$ se nijak neliší od svazů podvariet variety generované konečnými řetězci $S_n$.

**Lemma 3.6.6.** *$D_n$ je Booleův svaz právě tehdy, když prvočíselný rozklad čísla $n$ obsahuje prvočísla pouze v první mocnině, tj. $n = p_1 p_2 \dots p_k$, kde $p_i \neq p_j$ pro každé $i \neq j$.*

*Důkaz.* Trvzení je zřejmé. □

**Důsledek 3.6.7.** *$D_n^\omega$ je Booleův svaz právě tehdy, když $D_n$ je Booleův svaz.*

Je známo, že volné distributivní svazy lze reprezentovat jako antiřetězce některého Booleovského svazu stejným způsobem, jakým jsme reprezentovali svaz $\Lambda(V(S_n))$ pomocí antiřetězců svazu $D_n$. Navíc volný distributivní svaz má právě tolik generátorů, kolik má Booleovský svaz atomů. Dohromady s lemmatem 3.6.6 a větou 3.6.2 to implikuje následující větu.

**Věta 3.6.8.** *Je-li $D_n$ Booleův svaz, pak je $\Lambda(V(S_n))$ svaz, který je izomorfní s volným distributivním svazem o $k$ generátorech, kde $k$ je počet prvočísel v rozkladu čísla $n$.*

**Důsledek 3.6.9.** *Je-li $D_n$ Booleův svaz, pak $\Lambda(V(S_n^\omega))$ je svaz, který je izomorfní s volným distributivním svazem o $k+1$ generátorech, kde $k$ je počet prvočísel v rozkladu čísla $n$.*

**Věta 3.6.10.** *Varieta $\mathcal{MV}$ je aritmetická, tj. permutabilní a distributivní.*

*Důkaz.* Stačí dokázat, že existuje takový term $p(x,y,z)$, že platí $p(x,y,y)=x$, $p(x,x,y)=y$ a $p(x,y,x)=x$. Ukažeme že term:

$$p(x,y,z)=\big((x\odot\neg y)\oplus z\big)\wedge\big(((z\odot\neg y)\oplus x)\wedge(x\vee z)\big)$$

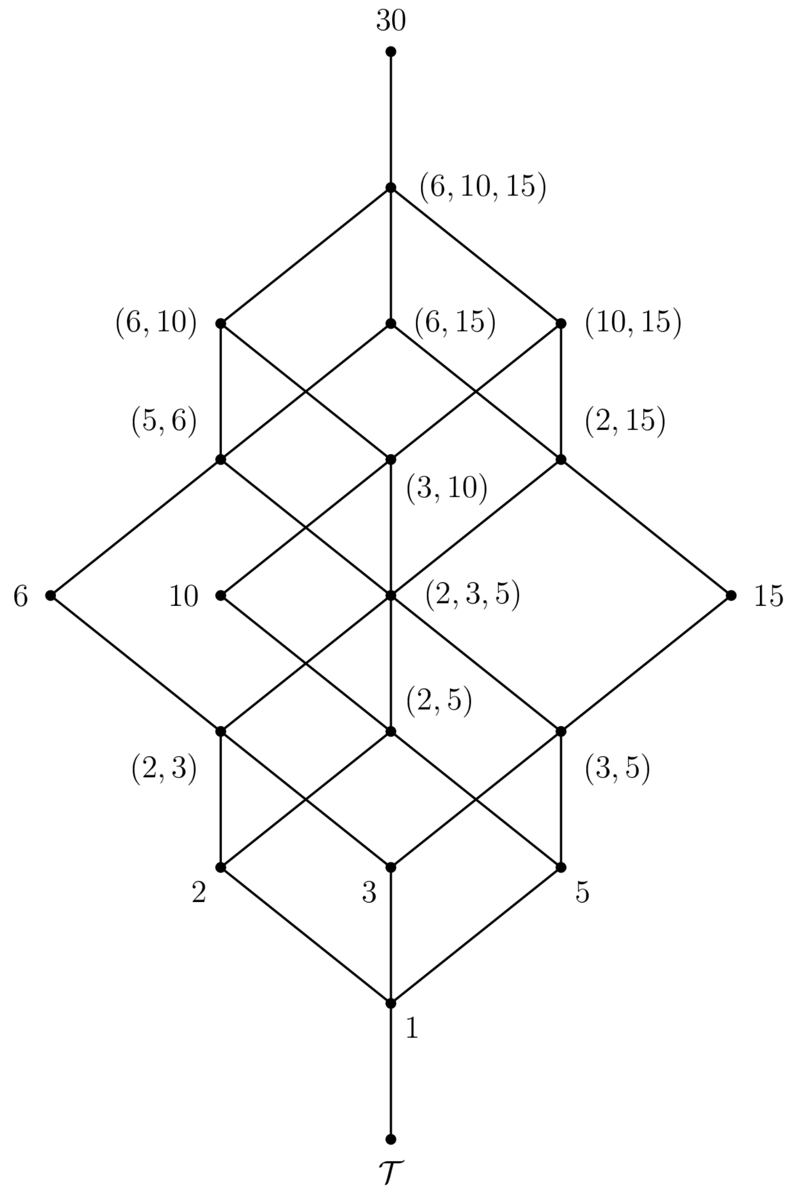
tyto podmínky splňuje. Platí:

$$\begin{aligned}
p(x,y,y)&=\big(\neg(\neg x\oplus y)\oplus y\big)\wedge\big(((y\odot\neg y)\oplus x)\wedge(x\vee y)\big)=\\
&=\big(\neg(\neg y\oplus x)\oplus x\big)\wedge\big(x\wedge(x\vee y)\big)=x,\\
p(x,x,y)&=\big((x\odot\neg x)\oplus y\big)\wedge\big((\neg(\neg y\oplus x)\oplus x)\wedge(x\vee y)\big)=\\
&=y\wedge\big((\neg(\neg x\oplus y)\oplus y)\wedge(x\vee y)\big)=y,\\
p(x,y,x)&=\big((x\odot\neg y)\oplus x\big)\wedge\big(((x\odot\neg y)\oplus x)\wedge x\big)=\\
&=\big((x\odot\neg y)\oplus x\big)\wedge x=x.
\end{aligned}$$

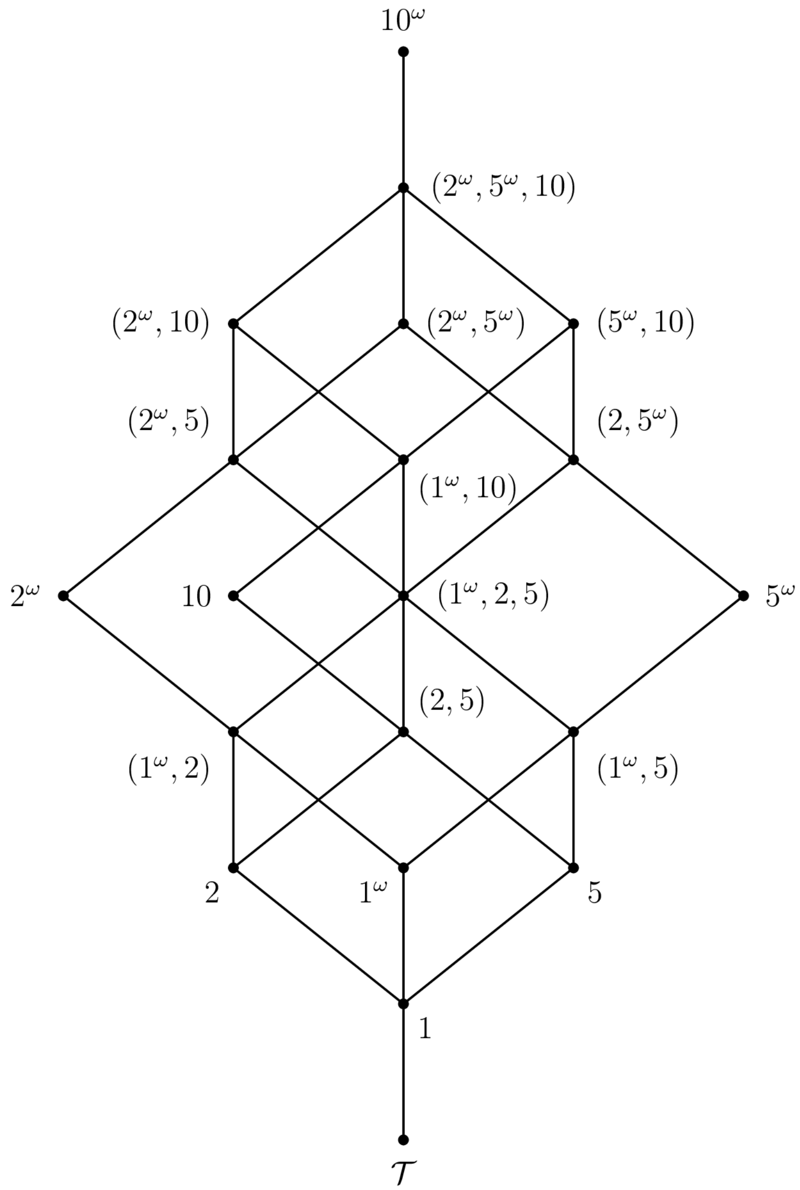
□

**Důsledek 3.6.11.** *Svaz $\Lambda(\mathcal{MV})$ je distributivní.*

*Poznámka* 3.6.12. To, že je svaz $\Lambda(\mathcal{MV})$ distributivní, bychom mohli vypozorovat už z dřívějšího tvrzení, že každá MV-algebra tvoří svaz. Platí totiž obecně toto tvrzení: Nechť $\mathcal{V}$ je varieta algeber v jejímž jazyce jsou svazové operace (nebo jsou nad tímto jazykem definovatelné) – tj. každá $A\in\mathcal{V}$ je svaz. Pak $\mathcal{V}$ je kongruenčně distributivní varieta.




Obrázek 4: Hasseův diagram svazu $\Lambda(V(S_{30}))$.




Obrázek 5: Hasseův diagram svazu $\Lambda(V(S_{10}^{\omega})$.

# 4. Axiomatizace podvariet $\mathcal{MV}$

Tato kapitola čerpá především z [7] a z kapitoly 8 z [4].

## 4.1. Axiomatizace $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{S}_n^\omega)$

V této podkapitole budeme často pracovat s přirozenými násobky a mocninami. Ukažme proto, jak přesně tyto násobky vypadají v $S_n^\omega = \Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1,0))$.

$$m \times (x,y) = \begin{cases} (mx, my) & \text{jestliže } mx < 1 \text{ nebo} \\ & mx = 1 \text{ a } x < 0, \\ (1,0) & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$(x,y)^m = \begin{cases} (mx - (m-1), my) & \text{jestliže } mx > m-1 \text{ nebo} \\ & mx = m-1 \text{ a } y > 0, \\ (0,0) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Také se bude hodit vědět, jak vypadají přirozené mocniny prvků v $S_n = \Gamma(\mathbb{Z}\frac{1}{n}, 1)$:

$$x^m = \max\{0, 1 - m \times (1-x)\} = \max\{0, m \times x - (m-1)\}.$$

Označme $\mathcal{K}(n)$ podvarietu $\mathcal{MV}$, která splňuje identitu:

$$((n+1) \times x^n)^2 = 2 \times x^{n+1}. \tag{4.1}$$

**Věta 4.1.1.** *Nechť $A$ je MV-řetězec a nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak $h(A) \leq n$, právě když $A \in \mathcal{K}(n)$.*

*Důkaz.* Nejprve dokážeme implikaci zleva doprava. Ukážeme, že $S_i^\omega \in \mathcal{K}(n)$ pro každé $1 \leq i \leq n$. Pokud je $n = 1$, pak je indentita (4.1) tvaru $(x \oplus x)^2 = x^2 \oplus x^2$. Nechť $(u,v) \in S_1^\omega$. Jestliže $u = 0$, $v \geq 0$, pak se levá i pravá strana rovná $(0,0)$, jestliže $u = 1$, $v \leq 0$, pak se levá i prává strana zřejmě rovná $(1,0)$. Dohromady $S_1^\omega \in \mathcal{K}(1)$. Nechť $n > 1$ a $1 \leq i \leq n$ a nechť $(u,v) \in S_i^\omega$. Uvažujme několik případů:

(1) Je-li $u = 1$, $v \leq 0$, pak zřejmě:

$$((n+1) \times (u,v)^n)^2 = (1,0)^2 = (1,0) = 2 \times (1,v)^{n+1}.$$

(2) Je-li $u = \frac{i-1}{i}$ a $v > 0$, pak buď $(u,v)^n = (0, nv)$ pro $i = n$, nebo $(u,v) = (0,0)$ pro $i < n$. V obou případech je ale $((n+1) \times (u,v)^n)^2 = (0,0)$. Na druhou stranu platí $(u,v)^{n+1} = (0,0)$ pro každé $1 \leq i \leq n$, takže také $2 \times (u,v)^{n+1} = (0,0)$.

(3) Nenastane ani jediná z možností (1) a (2). To znamená $(u, v) \leq (\frac{i-1}{i}, 0)$. V tomto případě využijeme vlastnosti z lemmatu 1.1.7 (7), tj. $x \leq y$ implikuje $x^n \leq y^n$. Tedy v našem případě to znamená $(u, v)^n \leq (\frac{i-1}{i}, 0)^n = (0, 0)$. To opět implikuje, že prává i levá strana (4.1) se rovná $(0, 0)$.

Máme, že $S_i^\omega \in \mathcal{K}(n)$ pro každé $1 \leq i \leq n$. Nechť $h(A) = i \leq n$. Pokud je $A$ jednoduchá, pak je $\mathrm{ord}(A) = i$, a podle věty 3.4.8 platí $A \cong S_i$. Přitom $S_i$ je podalgebra $S_i^\omega$, takže $A \in \mathcal{K}(n)$. Pokud $A$ není jednoduchá, pak je $\mathrm{ord}(A) = \omega$ a podle věty 3.5.11 platí $V(A) = V(S_i^\omega)$, a proto $A \in \mathcal{K}(n)$.

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Nechť $A \in \mathcal{K}(n)$. Stačí dokázat, že pro každé $j > n$ platí $S_j \notin \mathcal{K}(n)$. Skutečně, neboť podle věty 3.5.5 pak platí, že $h(A) \leq m$ pro některé $m \in \mathbb{N}$, a podle důsledku 3.4.9 pak platí $A/\mathrm{Rad}(A) \cong S_i$ pro některé $1 \leq i \leq m$. To společně s tím, že $A/\mathrm{Rad}(A) \in \mathcal{K}(n)$, pak implikuje $h(A) \leq n$.

Nechť tedy $S_j$ je takové, že $j > n$, a nechť $x \in S_j$. Chtěli bychom, aby platilo $(n + 1) \times x^n = 1$ a zároveň $2 \times x^{n+1} < 1$. Zřejmě $(n + 1) \times x^n = 1$ platí, právě když platí $(n + 1)(nx - (n - 1)) \geq 1$. Dále $2 \times x^{n+1} < 1$ platí, právě když platí $2(n + 1)x - 2n < 1$. Po úpravě nerovností dostaneme, že musí platit:

$$\frac{n}{n+1} \leq x < \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Nyní si uvědomme, že $x$ je tvaru $\frac{k}{j}$, kde $k \in \{0, 1, \ldots, j\}$. Hledáme tedy $k$ tak, aby byly splněny tyto nerovnosti:

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{k}{j} < \frac{2n+1}{2n+2}. \tag{4.2}$$

Je-li $n < j < 2n + 2$, pak stačí za $k$ vzít $j - 1$. Pokud je $j \geq 2n + 2$, pak existují celá čísla $q$, $r$ taková, že $j = (2n + 2)q + r$ a $q \geq 1$, $r < 2n + 2$. Zabývejme se nejprve pravou nerovností (4.2). Po vynásobení $j$ dostaneme:

$$k < (2n + 1)q + r\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Z $r < 2n+2$ plyne, že $\frac{r-1}{r} < \frac{2n+1}{2n+2}$. Takže stačí vzít $k = j-q-1 = (2n+1)q+r-1$. Levá nerovnost (4.2) je zřejmě také splněna, neboť $k > 2n$. □

**Důsledek 4.1.2.** $\mathcal{K}(n) = V(\{S_i^\omega \mid i \in \{1, \ldots, n\}\})$

Z předchozích kapitol víme, že lze vybrat ještě méně generátorů této variety. Označme:

$$\delta(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid i \text{ dělí } n\}.$$

**Důsledek 4.1.3.** $\mathcal{K}(n) = V(\{S_i^\omega \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \delta(n)\})$

Cílem této podkapitoly je najít identity pro varietu $V(S_n^\omega)$. Musíme tedy ještě k identitám $\mathcal{K}(n)$ přidat takové identity, které nebudou splněny ve všech $S_p$ (proto ani v $S_p^\omega$), kde $p \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \delta(n)$, tj. $p$ nedělí $n$, ale budou splněny v $S_n^\omega$. Pak totiž dostaneme přesně indetity axiomatizující $V(S_n^\omega)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, označme $\mathcal{K}(n,p)$ podvarietu $\mathcal{MV}$ splňující identitu:

$$(p \times x^{p-1})^{n+1} = (n+1) \times x^p, \text{ kde } 1 < p < n. \tag{4.3}$$

**Věta 4.1.4.** *Pro každé $n \geq 3$ a $1 < p < n$ je $S_n^\omega \in \mathcal{K}(n,p)$.*

*Důkaz.* Nechť $x \in S_n^\omega$. Postupujme tak, že budeme uvažovat několik případů:

(1) Předpokládejme, že $x^{p-1} = 0$. Pak $x^p = 0$ a $x$ splňuje identitu (4.3).

(2) Nyní předpokládejme, že $x = (u, v)$, $x^{p-1} > 0$ a $x^p = 0$. Pak $u < \frac{p-1}{p}$. Z toho plyne $p(p-1)u - p(p-2) < 1$, proto:

$$p \times x^{p-1} = (p(p-1)u - p(p-2), p(p-1)v) \in S_n^\omega \setminus \{(1, m) \mid m \in \mathbb{Z}^-\}.$$

To ovšem implikuje $(p \times x^{p-1})^{n+1} = 0$, neboť pro $y \in S_n^\omega$ platí $y^{n+1} > 0$, právě když $y \in \{(1, m) \mid m \in \mathbb{Z}^-\}$.

(3) Nakonec předpokládejme, že $x = (u, v)$, $x^p > 0$. Pak $u > \frac{p-1}{p} > \frac{p-2}{p-1}$, to implikuje $pu(p-1) - p(p-2) > (p-1)^2 - p(p-2) = 1$, a proto $p \times x^{p-1} = (1, 0)$. Pro druhou stranu platí $(n+1) \times x^p = (1, 0)$. □

**Věta 4.1.5.** *Pro každé $n \geq 3$ a $1 \leq q < n$ je $S_q \in \mathcal{K}(n,p)$, právě když $p$ nedělí $q$.*

*Důkaz.* Nejprve dokažme implikaci zleva doprava. Nechť $S_q \in \mathcal{K}(n,p)$ a nechť $q = kp$ pro některé $k \in \mathbb{Z}^+$, $x \in S_q \setminus \{1\}$, $x = \frac{p-1}{p}$. Pak platí:

$$\begin{aligned} p \times x^{p-1} &= p\Big((p-1)\frac{p-1}{p} - (p-2)\Big) = 1, \\ x^p &= p\frac{p-1}{p} - (p-1) = 0. \end{aligned}$$

To je spor.

Dokažme opačnou implikaci. Nechť $p$ nedělí $q$ a nechť $x \in S_q$. Uvažujme připady:

(1) Nechť $x^{p-1} = 0$. Pak jistě také $x^p = 0$ a identita (4.3) platí.

(2) Nechť $x^{p-1} > 0$ a $x^p = 0$. Pak $x \leq \frac{p-1}{p}$, a protože $p$ nedělí $q$, tak jistě $x < \frac{p-1}{p}$ a to implikuje $p \times x^{p-1} = px(p-1) - p(p-2) < (p-1)^2 - p(p-2) < 1$. To znamená, že $(p \times x^{p-1})^{n+1} = 0$.

(3) Nechť $x^{p-1} > 0$ a $x^p > 0$. Pak $x > \frac{p-1}{p}$, což implikuje $px(p-1)-p(p-2) \geq 1$, tedy $p \times x^{p-1} = 1$. Z druhé strany $x^p > 0$ a $p < n$ implikuje $(n+1) \times x^p = 1$. $\square$

**Důsledek 4.1.6.** *Pro každé $n \geq 3$ a $1 < p < n$ platí $S_p \notin \mathcal{K}(n,p)$.*

Dále označíme $\mathcal{H}(n) = \mathcal{K}(n)$ pro $n = 1$, 2 a pro každé $n \geq 3$ označíme:

$$\mathcal{H}(n) = \mathcal{K}(n) \cap \bigcap \{\mathcal{K}(n,p) \mid 1 < p < n,\, p \notin \delta(n)\}$$

**Věta 4.1.7.** *Pro každé $n \geq 3$ je $V(S_n^\omega) = \mathcal{H}(n)$.*

*Důkaz.* Z věty 4.1.1 a 4.1.4 plyne, že $V(S_n^\omega) \subseteq \mathcal{H}(n)$. Dokažme i opačnou inkluzi. Platí, že $\mathcal{H}(n)$ je vlastní podvarieta $\mathcal{MV}$, proto dle věty 3.5.16 existují množiny přirozených čísel $I$, $J$ takové, že $\mathcal{H}(n) = V(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j \mid j \in J\})$. Protože $S_n^\omega \in \mathcal{H}(n)$, tak $n \mid j$ pro některé $j \in J$. Z věty 4.1.1 víme, že $j \leq n$ pro každé $j \in J$. Proto $n = j$ pro některé $j \in J$, z čehož díky důsledku 4.1.6 plyne, že $k \mid n = j$ pro každé $k \in J$ a některé $j \in J$. To znamená, že $\mathcal{H}(n) = V(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_n^\omega\})$. Z důsledku 4.1.6 také plyne, že $S_i \in \mathcal{H}(n)$ jen tehdy, když $i \mid n$. Takže dohromady máme, že $\mathcal{H}(n) = V(S_n^\omega)$. $\square$

**Důsledek 4.1.8.** *Pro každé $n \geq 3$ je varieta $V(S_n^\omega)$ axiomatizována identitami:*

$$((n+1) \times x^n)^2 = 2 \times x^{n+1},$$
$$(p \times x^{p-1})^{n+1} = (n+1) \times x^p,$$

*kde $1 < p < n$ a $p \notin \delta(n)$.*

*Poznámka* 4.1.9. Jak vypadá axiomatizace $V(S_1^\omega)$ a $V(S_2^\omega)$ plyne už z věty 4.1.1, neboť $h(S_1^\omega) = 1$ a $S_1^\omega$ je podalgebra $S_2^\omega$. Konkrétně $V(S_1^\omega)$ je axiomatizovaná identitou:

$$(x \oplus x)^2 = x^2 \oplus x^2,$$

$V(S_2^\omega)$ je axiomatizovaná identitou:

$$(x^2 \oplus x^2 \oplus x^2)^2 = x^3 \oplus x^3.$$

**Příklad 4.1.** Varieta $V(S_6^\omega)$ je axiomatizovaná identitami:

$$(7 \times x^6)^2 = 2 \times x^7,$$
$$(4 \times x^3)^7 = 7 \times x^4,$$
$$(5 \times x^4)^7 = 7 \times x^5.$$

## 4.2. Axiomatizace $V(S_n)$

Označme $\mathcal{L}(n)$ podvarietu $\mathcal{MV}$ splňující:

$$n \times x = (n+1) \times x. \tag{4.4}$$

**Lemma 4.2.1.** *Nechť $A$ je MV-řetězec a $n \in \mathbb{N}$. Pak* $\operatorname{ord}(A) \leq n$, *právě když $A \in \mathcal{L}(n)$.*

*Důkaz.* Nejprve dokážeme implikaci zleva doprava. Nechť $\operatorname{ord}(A) = m \leq n$. Pak podle věty 3.4.8 platí $A \cong S_m$. Snadno vidíme, že $S_m$ splňuje identitu (4.4), neboť ve standardní MV-algebře $n \times \frac{1}{m} = 1$, právě když $m \leq n$.

Nyní dokažeme opačnou implikaci. Nechť $A \in \mathcal{L}(n)$. Ukážeme, že $A$ je jednoduchá. Nechť $x \in A \setminus \{0\}$. Kdyby $n \times x < 1$, pak by platilo $(n+1) \times x = (n \times x) \oplus x < 1$. Podle lemmatu 1.1.6 (2) to implikuje $x = 0$ – spor. Máme tedy, že $n \times x = 1$ pro každé $x \in A \setminus \{0\}$. Podle věty 3.3.2 to znamená, že $A$ je jednoduchá. Tj. $A$ je izomorfní s některou podalgebrou standardní MV-algebry. Z věty 3.3.3 plyne, že máme dvě možnosti:

(1) $A \cong S_m$ pro některé $m \in \mathbb{N}$.

(2) $A$ je izomorfní s nekonečnou podalgebrou standardní MV-algebry. Označme ji $S$. To podle 3.5.2 znamená, že $S$ je hustá v $[0,1]$.

V případě (1) je jasné, že musí platit $m \leq n$. Kdyby totiž $m > n$, pak by stačilo vzít prvek $\frac{1}{m} \in S_m$ a identita (4.4) by neplatila. Uvažujme případ (2), tj. $A \cong S$. Vezměme prvek $x \in S$ tak, že $0 < x < \frac{1}{n+1}$ (takový prvek existuje, protože $S$ je hustá v $[0,1]$). Pak zřemě $n \times x < (n+1) \times x < 1$ – spor. □

Podobně jako v případě axiomatizace $V(S_n^\omega)$ je potřeba nějak „vyjmout“ z $\mathcal{L}(n)$ algebry $S_p$, kde $1 < p < n$, $p \notin \delta(n)$. K tomu můžeme použít stejnou sadu identit jako v předchozím případě, tedy identity $\mathcal{K}(n,p)$, neboť $S_p \notin \mathcal{K}(n,p)$ (důsledek 4.1.6). Takže dostáváme:

**Důsledek 4.2.2.** *Pro každé $n \geq 3$ je varieta $V(S_n)$ axiomatizovaná identitami:*

$$n \times x = (n+1) \times x,$$
$$(p \times x^{p-1})^{n+1} = (n+1) \times x^p,$$

*kde $1 < p < n$ a $p \notin \delta(n)$.*

*Poznámka* 4.2.3. Varieta $V(S_1)$ je axiomatizovaná identitou:

$$x \oplus x = x.$$

Jedná se o varietu termově ekvivalentní s varietou Booleovských algeber.

Varieta $V(S_2)$ je axiomatizovaná identitou:

$$x \oplus x \oplus x = x \oplus x.$$

## 4.3. Axiomatizace libovolné podvariety

Začneme s tím, že se podíváme, jak vypadají variety generované pouze množinou nekonečných MV-řetězců $S_n^\omega$. Nechť $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ je množina přirozených čísel takových, že je splněno: $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$; $j_s$ nedělí $j_t$ pro každé $s$, $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $s \neq t$; $j_k \geq 5$, $k \geq 2$. Označme $\Sigma_0$ systém indentit:

$$((j_k + 1) \times x^{j_k})^2 = 2 \times x^{j_k+1}, \tag{4.5}$$

$$(p \times x^{p-1})^{j_k+1} = (j_k + 1) \times x^p, \tag{4.6}$$

kde $1 < p < j_k$ jsou taková, že $p \notin \delta(j_s)$ pro každé $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Dále označme $\mathcal{A}(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ varietu axiomatizovanou identitami $\Sigma_0$ a označme $\mathcal{A}(n) = \mathcal{H}(n)$, $\mathcal{A}(2, 3) = \mathcal{K}(3)$ a $\mathcal{A}(3, 4) = \mathcal{K}(4)$.

**Věta 4.3.1.** *Pro každé $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ takové, že $j_s \notin \delta(j_t)$ pro všechna $s$, $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $s \neq t$, a kde $k \geq 2$ a $j_k \geq 5$, platí:*

$$V(S_{j_1}^\omega, S_{j_2}^\omega, \ldots, S_{j_k}^\omega) = \mathcal{A}(j_1, j_2, \ldots, j_k).$$

*Důkaz.* Pro zjednodušení záspisu označme $\mathcal{A} = \mathcal{A}(j_1, j_2, \ldots, j_k)$. Nejprve dokažme inluzi $V(S_{j_1}^\omega, S_{j_2}^\omega, \ldots, S_{j_k}^\omega) \subseteq \mathcal{A}$. Podle věty 4.1.1 a věty 4.1.4 je $S_{j_k}^\omega \in \mathcal{A}$. Nechť $j < j_k$. Pak díky větám 4.1.1 a 4.1.5 a díky tomu, že $p \notin \delta(j_s)$ pro každé $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$, platí $S_j^\omega \in \mathcal{A}$. To znamená, že $V(S_{j_1}^\omega, S_{j_2}^\omega, \ldots, S_{j_k}^\omega) \subseteq \mathcal{A}(j_1, j_2, \ldots, j_k)$.

Nyní dokažme opačnou inkluzi. Podle věty 3.5.16 existují $C$, $D \subset \mathbb{N}$ takové, že $\mathcal{A} = V(\{S_c \mid c \in C\} \cup \{S_d^\omega \mid d \in D\})$. Z věty 4.1.1 plyne $c$, $d \leq j_k$ pro všechny $c \in C$, $d \in D$. Nechť $c \in C$, $d \in D$ a nechť je $1 < q < j_k$ takové, že $q \notin \delta(j_s)$ pro každé $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Pak podle důsledku 4.1.6 $S_q \notin \mathcal{A}$. To znamená, že $c$, $d$ nemohou být jiné, než takové, pro které platí $c \in \delta(j_s)$ a $d \in \delta(j_t)$ pro některé $s$, $t \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Takže $\mathcal{A} \subseteq V(S_{j_1}^\omega, S_{j_2}^\omega, \ldots, S_{j_k}^\omega)$. $\square$

**Důsledek 4.3.2.** *Varieta $V(S_{j_1}^\omega, S_{j_2}^\omega, \ldots, S_{j_k}^\omega)$ je axiomatizovaná systémem identit $\Sigma_0$.*

**Příklad 4.2.** Varieta $V(S_3^\omega, S_5^\omega, S_8^\omega)$ je axiomatizovaná identitami:

$$(9 \times x^8)^2 = 2 \times x^9,$$
$$(6 \times x^5)^9 = 9 \times x^6,$$
$$(7 \times x^6)^9 = 9 \times x^7.$$

Nyní se podíváme na variety, které mají mezi generátory také konečné MV-řetězce. Označme:

$$\Delta(i, J) = \delta(i) \setminus \bigcup_{j \in J} \delta(j).$$

Nechť $I = \{i_{1,2}, \dots, i_l\}, J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \mathbb{N}$ a nechť platí $i_1 < i_2 < \dots < i_l$, $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. Dále nechť pro každé $i$, $j \in I$, $i < j$ platí $i \notin \delta(j)$ a také nechť pro každé $i$, $j \in J$, $i < j$ platí $i \notin \delta(j)$. Navíc pokud $J \neq \emptyset$, pak ať pro každé $i \in I$ a každé $j \in J$ platí $i \notin \delta(j)$. Označme $n = \max(I \cup J)$ a označme $\Sigma_1$ systém identit:

$$((n+1) \times x^n)^2 = 2 \times x^{n+1},$$
$$(p \times x^{p-1})^{n+1} = (n+1) \times x^p,$$

kde $1 < p < n$ je takové, že $p \notin \delta(\iota)$ pro každé $\iota \in I \cup J$. Dále označme $\Sigma_2$ systém identit:

$$(n+1) \times x^q = (n+2) \times x^q,$$

kde $1 < q < n$ je takové, že $q \in \bigcup_{i \in I} \Delta(i, J)$.

Označme $\mathcal{B}$ varietu axiomatizovanou identitami $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Identity $\Sigma_1$ už známe a je jasné jakou hrají roli. Konkrétně podle věty 4.3.1 identity $\Sigma_1$ axiomatizují varietu $V(\{S_\iota^\omega \mid \iota \in I \cup J\})$. Identity $\Sigma_2$ pak „vyjmou“ ty $S_q^\omega$, pro které $q \in \bigcup_{i \in I} \Delta(i, J)$, a zanechají $S_q$.

**Věta 4.3.3.** *Nechť $\mathcal{V}$ je vlastní podvarieta $\mathcal{MV}$. Pak existují množiny $I$, $J \subset \mathbb{N}$ splňující výše uvedené podmínky a $\mathcal{V}$ je axiomatizovaná identitami $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.*

*Důkaz.* Věta 3.5.16 říká, že existují množiny $I$, $J \subset \mathbb{N}$ takové, že platí $\mathcal{V} = V(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\})$. Navíc díky větám 3.5.12 a 3.5.14 lze předpokládat, že $I = \{i_{1,2}, \dots, i_l\}$, $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ jsou takové, že $i_1 < i_2 < \dots < i_l$, $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, dále že pro každé $i$, $j \in I$, $i < j$, platí $i \notin \delta(j)$ a také pro každé $i$, $j \in J$, $i < j$ platí $i \notin \delta(j)$. Nakonec pokud $J \neq \emptyset$, pak pro každé $i \in I$ a každé $j \in J$ platí $i \notin \delta(j)$. Tj. množiny $I$, $J$ splňují předpoklady věty. Takže máme $\mathcal{V} = V(S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_l}, S_{j_1}^\omega, S_{j_2}^\omega, \dots, S_{j_k}^\omega)$.

Nejprve dokažme inkluzi $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$. Jistě $\mathcal{V} \subseteq V(\{S_\iota^\omega \mid \iota \in I \cup J\})$, neboť $S_i$ je podalgebra $S_i^\omega$ pro každé $i \in I$. Podle věty 4.3.1 $V(S_\iota^\omega \mid \iota \in I \cup J)$[1] splňuje identity $\Sigma_1$, a proto splňuje tyto identity také $\mathcal{V}$. Pro každé $i \in I$, $x \in S_i$ a $q \in \bigcup_{i \in I} \Delta(i, J)$ platí $x^q = 0$ nebo $\operatorname{ord}(x^q) \leq n$, a proto $(n+1) \times x^q = (n+2) \times x^q$. Tedy v každé $S_i$, $i \in I$, platí $\Sigma_2$. Nyní nechť $j \in J$ a $x \in S_j^\omega$. Protože $q$ nedělí $j$ a protože $x^q > 0$ platí, právě když $x = (u, v)$ a $u > \frac{q-1}{q}$, tak $x^q = 0$ nebo $\operatorname{ord}(x^q) \leq n + 1$.[2] Takže $(n+1) \times x^q = (n+2) \times x^q$ pro každé $q \in \bigcup_{i \in I} \Delta(i, J)$. Tj. každé $S_j^\omega$, $j \in J$, splňuje identity $\Sigma_2$. Tím je dokázana inkluze $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$.

[1] Věta 4.3.1 předpokládá množinu indexů, které jsou navzájem nedělitelné, ovšem může se stát, že $j \mid i$ pro některé $i \in I$, $j \in J$. Pak ale platí, že $S_j^\omega$ je podalgebra $S_i^\omega$, tj. $V(\{S_\iota^\omega \mid \iota \in I \cup J\}) = V(\{S_\iota^\omega \mid \iota \in I \cup (J \setminus \{j \in J \mid j \in \delta(i), i \in I\})\})$.

[2] Když $x \in S_n^\omega$ a $x = (\frac{1}{n}, v)$, $v < 0$ tak $\operatorname{ord}(x) = n + 1$ a pro každé $y > x$ je $\operatorname{ord}(y) \leq \operatorname{ord}(x)$.

Nyní dokažme opačnou inkluzi. Uvědomme si, že $\mathcal{B} \subseteq V(\{S_\iota^\omega \mid \iota \in I \cup J\})$, neboť, jak už bylo řečeno, tato varieta splňuje indetity $\Sigma_1$. Nechť $A$ je některý generátor variety $\mathcal{B}$. Z předešlého plyne (díky větám 3.5.12, 3.5.14), že buď $A = S_\alpha$ nebo $A = S_\beta^\omega$, kde $\alpha$, $\beta$ dělí $\iota$ pro některé $\iota \in I \cup J$. Když $A = S_\alpha$, pak je jasné, že $A \in \mathcal{V}$, protože $A$ je podalgebra některé $S_i$ nebo $S_j^\omega$. Nechť $A = S_\beta^\omega$, $\beta$ dělí $\iota \in I \cup J$, dále nechť $x \in S_\beta^\omega$, $x = (\frac{\beta-1}{\beta}, z)$, $z \in \mathbb{Z}^+$. Pak $x^\beta = (0, \beta z)$ a $(n+1) \times x^\beta \neq (n+2) \times x^\beta$. Proto $\beta \notin \bigcup_{i \in I} \Delta(i, J)$, tedy $\beta \in \bigcup_{j \in J} \delta(j)$. To znamená, že existuje $j \in J$ takové, že $\beta$ dělí $j$. Tj. $S_\beta^\omega$ je podalgebra $S_j^\omega$ a $A \in \mathcal{V}$, a proto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$. $\square$

**Příklad 4.3.** Ukážeme identity axiomatizující varietu $V(S_3, S_8, S_4^\omega)$. Zřejmě $p \in \{5, 6, 7\}$ a $q \in \{3, 8\}$. Takže identity, které tuto varietu axiomatizují, jsou:

$$
\begin{aligned}
(9 \times x^9)^2 &= 2 \times x^9, \\
(5 \times x^4)^9 &= 9 \times x^5, \\
(6 \times x^5)^9 &= 9 \times x^6, \\
(7 \times x^6)^9 &= 9 \times x^7, \\
9 \times x^3 &= 10 \times x^3, \\
9 \times x^8 &= 10 \times x^8.
\end{aligned}
$$

# 5. Variety ŁBCK-algeber

Zdroje této kapitoly jsou kapitola 5 monografie [11], [10, Lemma 1.4] a [19].

## 5.1. BCK-algebry a ŁBCK-algebry

**Definice 5.1.1.** *BCK-algebrou* nazveme algebru $B = (B, \ominus, 0)$, která splňuje následující identity a kvaziidentitu:

$$((x \ominus y) \ominus (x \ominus z)) \ominus (z \ominus y) = 0, \tag{BCK1}$$

$$(x \ominus (x \ominus y)) \ominus y = 0, \tag{BCK2}$$

$$x \ominus x = 0, \tag{BCK3}$$

$$0 \ominus x = 0, \tag{BCK4}$$

$$x \ominus y = 0 \ \& \ y \ominus x = 0 \ \Rightarrow \ x = y. \tag{BCK5}$$

Pro každé dva prvky BCK-algebry definujme relaci:

$$x \leq y \ \Leftrightarrow \ x \ominus y = 0.$$

Je jasné, že takto definovaná relace je reflexivní a antisymetrická. V následujícím lemmatu (bod (3)) dokážeme, že je také tranzitivní, tedy že je uspořádáním.

**Lemma 5.1.2.** *Nechť $B$ je BCK-algebra. Pak pro každé $x$, $y$, $z$, $w \in B$ platí:*

*(1)* $x \ominus 0 = x$*;*

*(2)* $x \leq y$ *implikuje* $z \ominus y \leq z \ominus x$*;*

*(3)* $x \leq y$ *a* $y \leq z$*, pak* $x \leq z$*;*

*(4)* $x \leq y$ *implikuje* $x \ominus z \leq y \ominus z$*;*

*(5)* $x \leq y$ *a* $z \leq w$*, pak* $x \ominus w \leq y \ominus z$*;*

*(6)* $(x \ominus y) \ominus z = (x \ominus z) \ominus y$*;*

*(7)* $((x \ominus z) \ominus (y \ominus z)) \ominus (x \ominus y) = 0$.

*Důkaz.* (1) Díky (BCK2) a (BCK3) platí $(x \ominus 0) \ominus x = (x \ominus (x \ominus x)) \ominus x = 0$. Podle (BCK2) platí $(x \ominus (x \ominus 0)) \ominus 0 = 0$, tj. $x \ominus (x \ominus 0) \leq 0$. Podle (BCK4) zřejmě $0 \leq x \ominus (x \ominus 0)$ a použitím (BCK5) dostáváme $x \ominus (x \ominus 0) = 0$, proto také $x \ominus 0 = x$.

(2) Je-li $x \ominus y = 0$, pak díky (BCK1) a (1) platí:

$$0 = ((z \ominus y) \ominus (z \ominus x)) \ominus (x \ominus y) = (z \ominus y) \ominus (z \ominus x).$$

(3) Nechť $x \leq y$ a $y \leq z$. Využitím (2) dostaneme $x \ominus z \leq x \ominus y = 0$. Protože podle (BCK4) $0 \leq x \ominus z$, tak použitím (BCK5) získáme $x \ominus z = 0$, tj. $x \leq z$.

(4) Využijeme (BCK1) a (1). Platí:

$$0 = ((x \ominus z) \ominus (x \ominus y)) \ominus (y \ominus z) = (x \ominus z) \ominus (y \ominus z).$$

(5) Podle (2) platí $x \ominus w \leq x \ominus z$ a podle (4) platí $x \ominus z \leq y \ominus z$. Takže díky (3) platí $x \ominus w \leq y \ominus z$.

(6) Vezmeme-li v (BCK1) místo $z$ term $x \ominus z$ dostaneme:

$$(x \ominus y) \ominus (x \ominus (x \ominus z)) \leq (x \ominus z) \ominus y.$$

Z (BCK2) pak plyne $x \ominus (x \ominus z) \leq z$ a z (2) pak:

$$(x \ominus y) \ominus z \leq (x \ominus y) \ominus (x \ominus (x \ominus z)),$$

takže díky (3) platí $(x \ominus y) \ominus z \leq (x \ominus z) \ominus y$. Záměnou $y$ a $z$ bychom stejným postupem získali také opačnou nerovnost a využitím (BCK5) pak požadované tvrzení.

(7) Plyne přímo z (BCK1) a (6).

□

BCK-algebry netvoří varietu. To ukážeme na příkladě:

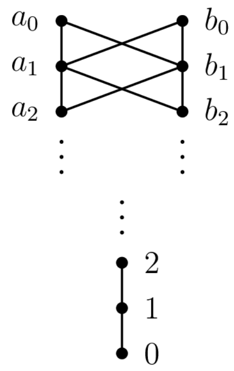
**Příklad 5.1.** [19] Uvažujme množiny $\mathbb{Z}^+$, $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$, $B = \{b_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ a nechť $U = \mathbb{Z}^+ \cup A \cup B$. Na $U$ definujeme binární operaci $\ominus$ tak, že pro každé $k$, $l$, $m \in \mathbb{Z}^+$ platí:

$$a_k \ominus a_l = b_k \ominus b_l = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } l < k, \\ l - k & \text{jestliže } l \geq k; \end{cases}$$

$$k \ominus l = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } k < l, \\ k - l & \text{jestliže } k \geq l; \end{cases}$$

$$b_k \ominus a_l = b_k \ominus b_{l+1};$$
$$a_k \ominus b_l = a_k \ominus a_{l+1};$$
$$b_k \ominus l = b_{k+l};$$
$$a_k \ominus l = a_{k+l};$$
$$k \ominus a_l = k \ominus b_l = 0.$$

Dá se ukázat, že $(U, \ominus, 0)$ je skutečně BCK-algebra (podrobně v [19]). Na obrázku 6 si můžeme prohlédnout, jak vypadá její uspořádání.




Obrázek 6: Hasseův diagram BCK-algebry $(U, \ominus, 0)$.

Nyní uvažujme ekvivalenci $\theta$, jejíchž třídy rozkladu jsou právě množiny $\mathbb{Z}^+$, $A$, $B$. Není těžké vidět, že $\theta$ je kongruencí. Ovšem faktorová algebra $(U/\theta, \ominus, \mathbb{Z}^+)$ není BCK-algebra, neboť platí $A \ominus B = \mathbb{Z}^+ = B \ominus A$, ale $A \neq B$, tj. neplatí (BCK5).

*Poznámka* 5.1.3. V předchozím příkladě si můžeme povšimnout, že $(\mathbb{Z}^+ \cup A, \ominus, 0)$ a $(\mathbb{Z}^+ \cup B, \ominus, 0)$ jsou $\{\ominus, 0\}$-redukty MV-řetězců izomorfních s $\Gamma(\mathbb{Z}\vec{\times}\mathbb{Z}, (1, 0)) = S_1^{\omega}$.

**Definice 5.1.4.** Řekneme, že BCK-algebra je *komutativní*, jestliže v ní platí identita:

$$x \ominus (x \ominus y) = y \ominus (y \ominus x). \qquad \text{(KBCK1)}$$

Označme $x \wedge y = x \ominus (x \ominus y)$. Ukážeme, že komutativní BCK-algebry tvoří dolní polosvazy. Zřejmě platí $x \wedge y \leq x$, $y$. Je-li $z \leq x$, $y$, pak dvojitým použitím lemmatu 5.1.2 (2) dostaneme $y \ominus (y \ominus z) \leq y \ominus (y \ominus x)$. To díky komutativitě implikuje $x \wedge y \geq z \ominus (z \ominus y) = z \ominus 0 = z$. Takže $x \wedge y$ je skutečně infimum $x$ a $y$.

**Věta 5.1.5.** *Algebra* $(B, \ominus, 0)$ *typu* $(2, 0)$ *je komutativní BCK-algebrou, právě když splňuje identitu (KBCK1), (BCK3) a identity:*

$$(x \ominus y) \ominus z = (x \ominus z) \ominus y, \qquad \text{(KBCK2)}$$
$$x \ominus 0 = x. \qquad \text{(KBCK3)}$$

*Důkaz.* Nechť $(B, \ominus, 0)$ je algebra splňující podmínky věty. Nejprve dokážeme (BCK5). Nechť $x \ominus y = 0$ a zároveň $y \ominus x = 0$. Pak díky (KBCK1) a (KBCK2) platí:

$$x = x \ominus 0 = x \ominus (x \ominus y) = y \ominus (y \ominus x) = y \ominus 0 = y.$$

Dále použitím (KBCK1), (KBCK2) a (BCK3) dostaneme tyto rovnosti:

$$\begin{aligned}0 \ominus x &= (x \ominus x) \ominus (x \ominus 0) = (x \ominus (x \ominus 0)) \ominus x = \\ &= (0 \ominus (0 \ominus x)) \ominus x = (0 \ominus x) \ominus (0 \ominus x) = 0,\end{aligned}$$

tj. (BCK4). Opětovným použitím (KBCK1), (KBCK2), (BCK3) a využitím právě dokázané (BCK4) dostaneme rovnosti:

$$\begin{aligned}(x \ominus (x \ominus y)) \ominus y &= (y \ominus (y \ominus x)) \ominus y = (y \ominus y) \ominus (y \ominus x) = \\ &= 0 \ominus (y \ominus x) = 0, \\ ((x \ominus y) \ominus (x \ominus z)) \ominus (z \ominus y) &= ((x \ominus (x \ominus z)) \ominus y) \ominus (z \ominus y) = \\ &= ((z \ominus (z \ominus x)) \ominus (z \ominus y)) \ominus y = \\ &= ((z \ominus (z \ominus y)) \ominus y) \ominus (z \ominus x) = \\ &= 0 \ominus (z \ominus x) = 0.\end{aligned}$$

To jsou (BCK2) a (BCK1). □

**Definice 5.1.6.** *Ohraničenou* BCK-algebrou nazveme algebru $B = (B, \ominus, 0, 1)$, pro kterou platí, že $(B, \ominus, 0)$ je BCK-algebra s největším prvek 1, tj. pro každé $x \in B$ platí:

$$x \ominus 1 = 0.$$

Je-li navíc $(B, \ominus, 0)$ komutativní, pak mluvíme o ohraničené komutativní BCK-algebře.

**Věta 5.1.7.** *Ohraničené komutativní BCK-algebry jsou termově ekvivalentní s MV-algebrami.*

*Důkaz.* Nechť $\Phi$ je zobrazení takové, že platí $\Phi\colon (A, \oplus, \neg, 0) \mapsto (A, \ominus, 0, 1)$, kde $x \ominus y = \neg(\neg x \oplus y)$ a $1 = \neg 0$. Ukážeme, že $(A, \ominus, 0, 1)$ je ohraničená komutativní BCK-algebra. (KBCK1) plyne ihned z (MV6). Z lemmatu 1.1.3 bodu (10) plyne (BCK3) a z bodu (8) téhož lemmatu plyne (KBCK3). Ukážeme, že platí (KBCK2). Platí:

$$(x \ominus y) \ominus z = \neg(\neg(x \ominus y) \oplus z) = \neg(\neg x \oplus y \oplus z) = (x \ominus z) \ominus y.$$

Dohromady podle věty 5.1.5 máme, že $(A, \ominus, 0)$ je komutativní BCK-algebra. Z (MV5) plyne, že 1 je největším prvkem této algebry. Takže $(A, \ominus, 0, 1)$ je ohraničená komutativní BCK-algebra.

Nyní nechť $\Psi$ je zobrazení takové, že $\Psi\colon (B, \ominus, 0, 1) \mapsto (B, \oplus, \neg, 0)$, kde $\neg x = 1 \ominus x$ a $x \oplus y = \neg(\neg x \ominus y)$. Ukážeme, že $(B, \oplus, \neg, 0)$ je MV-algebra. (MV3) je přesně lemma 5.1.2 bod (1). Z (KBCK1) plyne (MV4), neboť $\neg\neg x =$

$1 \ominus (1 \ominus x) = x \ominus (x \ominus 1) = x \ominus 0 = x$. Dále $\neg 0 = 1 \ominus 0 = 1$ a díky tomu, že 1 je největší prvek platí:

$$x \oplus 1 = \neg(\neg x \ominus 1) = \neg 0 = 1,$$

tj. (MV5). Nyní dokážeme (MV1). Z (BCK1) plyne $(1 \ominus x) \ominus (1 \ominus (1 \ominus y)) \leq (1 \ominus y) \ominus x$ a z (BCK2) plyne $(1 \ominus (1 \ominus y)) \leq y$. To dohromady s (2) lemmatu 5.1.2 implikuje:

$$(1 \ominus x) \ominus y \leq (1 \ominus x) \ominus (1 \ominus (1 \ominus y)),$$

tedy $(1 \ominus x) \ominus y \leq (1 \ominus y) \ominus x$. Totožným postupem při záměně $x$ za $y$ bychom také dokázali $(1 \ominus y) \ominus x \leq (1 \ominus x) \ominus y$. Opětovným využitím (2) lemmatu dostáváme:

$$x \oplus y = 1 \ominus ((1 \ominus x) \ominus y) = 1 \ominus ((1 \ominus y) \ominus x) = y \oplus x.$$

Tím je dokázáno (MV1). Pomocí (KBCK1), (6) lemmatu (5.1.2) a již dokázané (MV1) dokážeme (MV2). Platí:

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= \neg\big[\big(1 \ominus (1 \ominus ((1 \ominus x) \ominus y))\big) \ominus z\big] = \\
&= \neg\big[\big(((1 \ominus x) \ominus y) \ominus (((1 \ominus x) \ominus y) \ominus 1)\big) \ominus z\big] = \\
&= \neg\big[((1 \ominus x) \ominus y) \ominus z\big] = \\
&= \neg\big[((1 \ominus z) \ominus y) \ominus x\big] = \\
&= (z \oplus y) \oplus x = \\
&= x \oplus (y \oplus z).
\end{aligned}$$

Zbývá dokázat (MV6). Z (KBCK1) plyne $\neg x \ominus (\neg x \ominus \neg y) = \neg y \ominus (\neg y \ominus \neg x)$. Díky (2) lemmatu 5.1.2 platí:

$$\neg(\neg x \ominus (\neg x \ominus \neg y)) = \neg(\neg y \ominus (\neg y \ominus \neg x)).$$

Tj. $x \oplus \neg(x \oplus \neg y) = y \oplus \neg(y \oplus \neg x)$, což díky (MV1) implikuje (MV6). Takže $(B, \oplus, \neg, 0)$ je skutečně MV-algebra.

Nechť $A = (A, \oplus, \neg, 0)$ je MV-algebra a $\Phi(A) = (A, \ominus, 0, 1)$. Označme $\Psi(\Phi(A)) = (A, \oplus^*, \neg^*, 0^*)$. Ukážeme, že $\Psi(\Phi(A)) = A$. Zřejmě platí $0 = 0^*$. Dále platí $\neg^* x = 1 \ominus x = \neg(\neg\neg 0 \oplus x) = \neg x$ a také:

$$\begin{aligned}
x \oplus^* y &= \neg^*(\neg^* x \ominus y) = \\
&= 1 \ominus ((1 \ominus x) \ominus y) = \\
&= \neg(\neg\neg 0 \oplus \neg(\neg\neg(\neg\neg 0 \oplus x) \oplus y)) = \\
&= x \oplus y.
\end{aligned}$$

Takže $\Psi(\Phi(A)) = A$.

Nechť $B = (B, \ominus, 0, 1)$ je ohraničená komutativní BCK-algebra a $\Psi(B) = (B, \oplus, \neg, 0)$. Označme $\Phi(\Psi(B)) = (B, \ominus^*, 0^*, 1^*)$ Ukážeme, že $\Phi(\Psi(B)) = B$. Zřejmě platí $0^* = 0$ a $1^* = \neg 0 = 1 \ominus 0 = 1$. Dále platí:

$$x \ominus^* y = \neg(\neg x \oplus y) = \neg\neg(\neg\neg x \ominus y) = x \ominus y.$$

Takže $\Phi(\Psi(B)) = B$. □

**Definice 5.1.8.** Komutativní BCK-algebru $B$ nazveme *ŁBCK-algebrou.* Jestliže pro všechna $a$, $x$, $y \in B$ takové, že $a \leq x$, $y$ platí:

$$x \ominus a = y \ominus a \;\Rightarrow\; x = y. \tag{5.1}$$

Vlastnost (5.1) budeme nazývat *relativní krácení.*

**Příklad 5.2.** Nechť $A = \Gamma(G, u)$ je MV-algebra. Ukážeme, že každý interval $[0, v]$, kde $v \leq u$, je ŁBCK algebra. V každé MV-algebře platí $x \ominus y \leq x$, takže $[0, v]$ je uzavřený na $\ominus$. Podle věty 5.1.7 je komutativní BCK-algebra. Je-li $a \leq x$, $y$ a $x \ominus a = y \ominus a$. Pak z lemmatu 1.1.5 (iii) plyne $x = a \oplus (x \ominus a) = a \oplus (y \ominus a) = y$.

## 5.2. Reprezentace ŁBCK-algeber pomocí $\ell$-grup

Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa. Pro každé $x$, $y \in G^+$ definujeme:

$$x \ominus_G y = (x - y) \vee 0 = x - (x \wedge y) = (x \vee y) - y.$$

Pro každou $G_0 \subseteq G^+$, která je uzavřená na $\ominus_G$, dostáváme algebru $(G_0, \ominus_G, 0)$ typu $(2, 0)$.

**Věta 5.2.1.** *Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa. Pak pro každou $G_0 \subseteq G^+$ uzavřenou na $\ominus_G$ je $(G_0, \ominus_G, 0)$ ŁBCK-algebra.*

*Důkaz.* Je zřejmé, že $G_0$ splňuje identity (BCK3) a (KBCK3). Nechť $x$, $y$, $z \in G_0$. Pak platí:

$$\begin{aligned}
x \ominus_G (x \ominus_G y) &= x - ((x - (x \wedge y)) \wedge x) = \\
&= (x \wedge y) \vee 0 = \\
&= y - ((y - (x \wedge y)) \wedge y) = \\
&= y \ominus_G (y \ominus_G x), \\
(x \ominus_G y) \ominus_G z &= (((x - y) \vee 0) - z) \vee 0 = \\
&= (x - y - z) \vee (-z) \vee 0 = \\
&= (x - y - z) \vee 0 = \\
&= (x - z - y) \vee (-y) \vee 0 = \\
&= (x \ominus_G z) \ominus_G y.
\end{aligned}$$

Takže platí také identity (KBCK1) a (KBCK2). To znamená, že $G_0$ je komutativní BCK-algebra. Dále jestliže $a \leq x, y$ a zároveň $x \ominus_G a = y \ominus_G a$, tak to znamená $(x-a) \vee 0 = (y-a) \vee 0$ a to zřejmě implikuje $x = y$, tj. platí vlastnost relativního krácení. $\square$

U MV-algeber jsme dokázali, že se každá MV-algebra dá reprezentovat jako interval $[0, u]$ některé unitální abelovské $\ell$-grupy $(G, u)$. Následující věta nám říká, že u ŁBCK algeber je situace podobná. Důkaz následující věty lze najít v [11, Theorem 5.2.24] (nebo v původním článku [9, Theorem 5.1]).

**Věta 5.2.2.** *Pro každou ŁBCK-algebru $B$ existuje abelovská $\ell$-grupa $G$ taková, že $B$ je izomorfní s $(G_0, \ominus_G, 0)$ pro některou konvexní podmnožinu $G_0 \subseteq G^+$. Navíc $G_0$ generuje $G^+$ jako pologrupu.*

**Věta 5.2.3.** *Nechť $B$ je komutativní BCK-algebra. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

*(i) $B$ má vlastnost relativního krácení;*

*(ii) $B$ splňuje identitu $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0$;*

*(iii) $B$ splňuje identitu $(x \ominus y) \ominus (y \ominus x) = x \ominus y$.*

*Důkaz.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť $z \leq x \ominus y, y \ominus x$. Podle předchozí věty můžeme předpokládat, že $B$ je podalgebra $(G^+, \ominus_G, 0)$ pro některou abelovskou $\ell$-grupu $G$. Takže $z \leq x - (x \wedge y), y - (x \wedge y)$. To implikuje $z + (x \wedge y) \leq x \wedge y$, a proto $z = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zřejmě platí $(x \ominus y) \ominus (y \ominus x) \leq x \ominus y$. Z předpokladu pak plyne:

$$(x \ominus y) \ominus ((x \ominus y) \ominus (y \ominus x)) = (x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0.$$

To znamená $x \ominus y \leq (x \ominus y) \ominus (y \ominus x)$, takže $(x \ominus y) \ominus (y \ominus x) = x \ominus y$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $a \leq x, y$ a nechť $x \ominus a = y \ominus a$. Pak platí $x - a = y - a$, což implikuje $x = y$. $\square$

## 5.3. Varieta všech ŁBCK-algeber

Každému termu $t(\overline{x})$ v jazyce BCK-algeber přiřadíme term $\hat{t}(\overline{x})$ v jazyce $\ell$-grup následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} t(\overline{x}) = 0 &\ \Rightarrow\ \hat{t}(\overline{x}) = 0, \\ t(\overline{x}) = x_i &\ \Rightarrow\ \hat{t}(\overline{x}) = x_i \vee 0, \\ t(\overline{x}) = r(\overline{x}) \ominus s(\overline{x}) &\ \Rightarrow\ \hat{t}(\overline{x}) = (\hat{r}(\overline{x}) - \hat{s}(\overline{x})) \vee 0. \end{aligned}$$

Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa a nechť term $\hat{t}(\overline{x})$ vznikl výše uvedeným způsobem z $n$-árního termu $t(\overline{x})$. Potom zřejmě pro všechny $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_i \in G$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí:

$$\hat{t}^G(\overline{a}) = t^{G^+}(a_1 \vee 0, a_2 \vee 0, \ldots, a_n \vee 0).$$

V BCK-algebrách platí $p(\overline{x}) = q(\overline{y})$, právě když platí $p(\overline{x}) \ominus q(\overline{y}) = 0$ a zároveň $q(\overline{x}) \ominus p(\overline{y}) = 0$. Takže můžeme předpokládat, že všechny identity BCK-algeber jsou tvaru $t(\overline{x}) = 0$, neboť každou identitu v jiném tvaru lze nahradit dvěma identitami v tomto tvaru.

**Lemma 5.3.1.** *Nechť $G$ je abelovská $\ell$-grupa a $G_0 \subseteq G^+$ je ŁBCK-algebra. Nesplňuje-li ŁBCK-algebra $G_0$ identitu $t(\overline{x}) = 0$, pak $\ell$-grupa $G$ nesplňuje identitu $\hat{t}(\overline{x}) = 0$.*

*Důkaz.* Nechť indentita $t(\overline{x}) = 0$ neplatí v $G_0$. Tj. existuje $\overline{a} = a_1, \ldots, a_n \in G_0$ takové, že $t^{G_0}(\overline{a}) \neq 0$. Jistě platí:

$$\hat{t}^G(\overline{a}) = t^{G^+}(a_1 \vee 0, \ldots, a_n \vee 0) = t^{G^+}(\overline{a}) = t^{G_0}(\overline{a}) \neq 0. \qquad \square$$

V následující větě, jejím důkazu a důsledku budeme $S_n$ a $[0, 1]$ chápat jako ŁBCK-algebry.

**Věta 5.3.2.** *Identita platí v každé ŁBCK-algebře, právě když platí v $(\mathbb{Z}^+, \ominus_{\mathbb{Z}}, 0)$ a to je právě tehdy, když platí v $[0, 1]$.*

*Důkaz.* Implikace zleva doprava je triviální. Dokážeme obměnu netriviální implikace. Nechť identita $t(\overline{x}) = 0$ neplatí v některé ŁBCK-algebře $B$. Podle věty 5.2.2 je $B$ izomorfní s některou ŁBCK-algerbou $G_0 \subseteq G^+$, kde $G$ je abelovská $\ell$-grupa taková, že $G_0$ generuje $G^+$. Z předchozího lemmatu plyne, že $\hat{t}(\overline{x}) = 0$ neplatí ani v $G$. Protože varieta abelovských $\ell$-grup je generovaná $\mathbb{Z}$ (důsledek 2.1.10), tak identita $\hat{t}(\overline{x}) = 0$ neplatí ani v $\mathbb{Z}$. Tj. existuje $\overline{a} = a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ takové, že platí:

$$0 \neq \hat{t}^{\mathbb{Z}}(\overline{a}) = t^{\mathbb{Z}^+}(a_1 \vee 0, a_2 \vee 0, \ldots, a_n \vee 0).$$

Takže identita $t(\overline{x}) = 0$ neplatí ani v $(\mathbb{Z}^+, \ominus_{\mathbb{Z}}, 0)$. Položme $b = \max\{a_i \vee 0 \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Pak jistě pro každé $i$ je $a_i \vee 0 \in [0, b]$ a je zřejmé, že $[0, b] = \{0, 1, 2, \ldots, b\}$ je ohraničená ŁBCK algebra (viz příklad 5.2), která je navíc izomorfní s $S_b$. Tudíž identita $t(\overline{x}) = 0$ neplatí ani v $S_b$. Dále víme, že $S_b$ je podalgebra $[0, 1]$, takže identita neplatí ani v $[0, 1]$. $\square$

Varietu všech ŁBCK-algeber budeme značit $\mathcal{LBCK}$.

**Důsledek 5.3.3.** $\mathcal{LBCK} = V(\mathbb{Z}^+) = V([0, 1])$.

## 5.4. Subdirektně ireducibilní ŁBCK-algebry

**Definice 5.4.1.** Nechť $B$ je BCK-algebra a nechť $I \subseteq B$. Řekneme, že $I$ je *ideál* BCK-algebry $B$, jestliže platí:

(i) $0 \in I$,

(ii) pokud $x \ominus y$, $y \in I$, pak $x \in I$.

Je vidět, že je-li $x \leq y$ a $y \in I$, tak pak $x \in I$, neboť $x \ominus y = 0 \in I$.

**Lemma 5.4.2.** *Nechť $I$ je ideál BCK-algebry $B$. Pak relace $\Theta_I$ taková, že:*

$$(x, y) \in \Theta_I \quad \Leftrightarrow \quad x \ominus y \in I \ \& \ y \ominus x \in I,$$

*je kongruence na $B$.*

*Důkaz.* Reflexivita a symetrie je zřejmá. Nechť $(x, y)$, $(y, z) \in \Theta_I$. Pak podle (BCK1) platí:

$$(x \ominus z) \ominus (x \ominus z) \leq y \ominus z \in I.$$

Takže $x \ominus z \in I$ a zcela analogicky $z \ominus x \in I$. Tím jsme dokázali tranzitivitu.

Nechť $(x, y)$, $(u, v) \in \Theta_I$. Pak opět použitím (BCK1) máme:

$$(x \ominus u) \ominus (x \ominus v) \leq v \ominus u \in I,$$
$$(x \ominus v) \ominus (x \ominus u) \leq v \ominus u \in I.$$

To znamená $(x \ominus v, x \ominus u) \in \Theta_I$. Použitím lemmatu 5.1.2 (7) dostaneme, že také platí:

$$(x \ominus v) \ominus (y \ominus v) \leq x \ominus y \in I,$$
$$(y \ominus v) \ominus (x \ominus v) \leq y \ominus x \in I.$$

Takže $(x \ominus v, y \ominus v) \in \Theta_I$. Z tranzitivity pak plyne $(x \ominus u, y \ominus v) \in \Theta_I$. □

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme:

$$x \ominus 1y = x \ominus y,$$
$$x \ominus ny = (x \ominus y) \ominus (n-1)y.$$

V MV-algebrách, které jsou termově ekvivalentní s ohraničenými ŁBCK-algebrami, platí:

$$x \ominus ny = x \ominus (n \times y).$$

Ideál BCK-algebry $B$ generovaný prvkem $b \in B$ budeme značit $I(b)$.

**Lemma 5.4.3.** *Nechť $B$ je BCK-algebra a $b \in B$, pak platí:*

$$I(b) = \{x \in B \mid x \ominus nb = 0 \text{ pro některé } n \in \mathbb{N}\}.$$

*Důkaz.* Nechť $I = \{x \in B \mid x \ominus nb = 0$ pro některé $n \in \mathbb{N}\}$. Zřejmě $0,\ b \in I$. Nechť $x \ominus y \in I$ a $y \in I$. To znamená, že existují $m, n \in \mathbb{N}$ tak, že $(x \ominus y) \ominus mb = 0$ a $y \ominus nb = 0$. Z lemmatu 5.1.2 (6) plyne, že $0 = (x \ominus y) \ominus mb = (x \ominus mb) \ominus y$, tj. $x \ominus mb \leq y$. Opakovaným využitím lemmatu 5.1.2 (4) dostaneme:

$$(x \ominus mb) \ominus nb = x \ominus (m+n)b \leq y \ominus nb = 0.$$

Takže $x \ominus (m+n)b = 0$ a tedy $x \in I$. Dále chceme dokázat, že $I$ je nejmenší ideál obsahující $b$. Nechť tedy $J$ je takový ideál, že $b \in J$. Pak zřejmě je-li $x \in I$, tak $x \ominus kb = 0 \in J$ pro některé $k \in \mathbb{N}$. Protože $b \in J$, tak podle definice ideálu také $x \ominus (k-1)b \in J$. To stejným způsobem implikuje $x \ominus (k-2)b \in J$. Opakováním tohoto argumentu $k$-krát zřejmě dostaneme $x \in J$. Takže $I \subseteq J$ a $I = I(b)$. $\square$

**Věta 5.4.4.** *Nechť $B$ je komutativní BCK-algebra a nechť $x,\ y \in B$. Pak:*

$$I(x) \cap I(y) = I(x \wedge y).$$

*Důkaz.* Nechť $z \in I(x \wedge y)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $z \ominus n(x \wedge y) = 0$. Protože $x \wedge y \leq x$, tak podle lemmatu 5.1.2 (2) $z \ominus x \leq z \ominus (x \wedge y)$. Použijeme-li $n$-krát bod (4) téhož lemmatu, dostaneme $z \ominus nx \leq z \ominus n(x \wedge y) = 0$, takže $z \in I(x)$. Totožným způsobem bychom dokázali $z \in I(y)$. Dohromady tedy máme $z \in I(x) \cap I(y)$, tj. $I(x \wedge y) \subseteq I(x) \cap I(y)$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Nechť $z \in I(x) \cap I(y)$. Pak existují $m,\ n$ takové, že $z \ominus mx = 0 = z \ominus ny$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m \leq n$. Protože $z \ominus mx = 0$ implikuje $z \ominus nx$, tak stačí ověřit, že je-li $z \ominus nx = 0 = z \ominus ny$, pak existuje $k$ tak, že $z \ominus k(x \wedge y) = 0$. To dokážeme matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ máme $z \ominus x = 0 = z \ominus y$, tj. $z \leq x,\ y$ a to implikuje $z \leq x \wedge y$, takže $a \ominus (x \wedge y) = 0$. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro některé $n > 1$. Tj. $z \ominus nx = 0 = z \ominus ny$ implikuje existenci $k$ takového, že $z \ominus k(x \wedge y) = 0$. Nechť $z \ominus (n+1)x = 0 = z \ominus (n+1)y$. Pak:

$$0 = z \ominus (n+1)x = (z \ominus (n+1)x) \ominus ny = ((z \ominus nx) \ominus ny) \ominus x.$$

Taktéž máme:

$$0 = ((z \ominus nx) \ominus ny) \ominus y.$$

Takže podle prvního kroku indukce máme:

$$((z \ominus nx) \ominus ny) \ominus (x \wedge y) = 0,$$

Dále:

$$0 = ((z \ominus nx) \ominus ny) \ominus (x \wedge y) = ((z \ominus (x \wedge y)) \ominus ny) \ominus nx = \\ = (((z \ominus (x \wedge y)) \ominus ny) \ominus (n-1)x) \ominus x.$$

Z rovnosti $z \ominus (n+1)y = 0$ plyne:

$$(((z \ominus (x \wedge y)) \ominus ny) \ominus (n-1)x) \ominus y = 0.$$

Opět použijeme první krok indukce, takže:

$$((z \ominus 2(x \wedge y)) \ominus ny) \ominus (n-1)x = 0.$$

Zopakujeme-li tento postup $n$-krát, pak dostaneme:

$$(z \ominus (n+1)(x \wedge y)) \ominus ny = 0, \tag{R1}$$

a analogicky také:

$$(z \ominus (n+1)(x \wedge y)) \ominus nx = 0. \tag{R2}$$

Nyní na rovnosti (R1) a (R2) aplikujeme indukční předpoklad. To znamená, že existuje $k$ takové, že platí $(z \ominus (n+1)(x \wedge y)) \ominus k(x \wedge y) = 0$. Tedy platí $z \ominus (n+k+1)(x \wedge y) = 0$. Tím jsme dokázali, že tvrzení platí i pro $n+1$.

Dokázali jsme tedy, že $z \in I(x) \cap I(y)$ implikuje $z \in I(x \wedge y)$, a proto $I(x) \cap I(y) \subseteq I(x \wedge y)$. □

**Věta 5.4.5.** *Každá subdirketně ireducibilní ŁBCK-algebra je lineárně uspořádaná.*

*Důkaz.* Nechť $A$ je subdirektně ireducibilní, ale nechť není lineárně uspořádaná. Pak existují $x$, $y \in A$ takové, že $x \ominus y \neq 0$ a $y \ominus x \neq 0$. Podle věty 5.2.3 platí $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0$. Ovšem podle předešlé věty platí:

$$I(x \ominus y) \cap I(y \ominus x) = I((x \ominus y) \wedge (y \ominus x)) = I(0) = \{0\}.$$

Protože předpokládáme, že $A$ je subdirektně ireducibilní, musí platit $I(x \ominus y) = 0$ nebo $I(y \ominus x) = 0$, to znamená $x \ominus y = 0$ nebo $y \ominus x = 0$ – spor. □

**Věta 5.4.6.** *Nechť $B$ je lineárně uspořádaná ŁBCK. Pak existuje ultrafiltr $U$ nad množinou $B$ takový, že $B$ se dá vnořit do ultrasoučinu $\left(\prod_{b \in B}[0, b]\right)/U$.*

*Důkaz.* Označme $[b) = \{x \in B \mid b \leq x\}$. Protože platí $[b) \cap [c) = [b \vee c) \neq \emptyset$, tak $\{[b) \mid b \in B\}$ má vlastnost konečných průniků[1]. To implikuje existenci

[1] Tj. konečný soubor podmnožin množiny $\{[b) \mid b \in B\}$ má neprázdný průnik

takového ultrafiltru $U$ na $B$, že $[b) \in U$ pro každé $b \in B$.[1] Zřejmě $([0,b], \ominus, 0, b)$ je ohraničená ŁBCK-algebra. Dokážeme, že zobrazení $\varphi\colon B \to \left(\prod_{b\in B}[0,b]\right)/U$ definované:

$$\varphi\colon x \mapsto (x \wedge b \mid b \in B)/U$$

je vnoření. Nejprve dokážeme, že je injektivní. Uvědomme si, že $\varphi(x) = \varphi(y)$, právě když $\{b \in B \mid x \wedge b = y \wedge b\} \in U$. Nechť $x$, $y \in B$, $x \neq y$, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x < y$. Protože $x \wedge b = y \wedge b$, právě když $b \leq x$, tak $[0,x] = \{b \in B \mid x \wedge b = y \wedge b\}$. Dále platí $[y) \subseteq \{b \in B \mid x > b\} = \{b \in B \mid x \wedge b \neq y \wedge b\}$. Protože $[y) \in U$, tak také $\{b \in B \mid x > b\} \in U$, ovšem $B \setminus [0,x] = \{b \in B \mid x > b\}$, tudíž $[0,x] \notin U$ a to implikuje $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Nechť $x$, $y \in B$ a nechť $x \leq y$. Pak jistě $\varphi(x) \ominus \varphi(y) = \varphi(x \ominus y)$, neboť $x \ominus y = 0 = (x \wedge b) \ominus (y \wedge b)$ pro každé $b \in B$. Předpokládejme tedy, že $y < x$. Když $x \leq b$, tak $(x \wedge b) \ominus (y \wedge b) = x \ominus y$, $(x \ominus y) \wedge b = x \ominus y$. Takže $[x) \subseteq \{b \in B \mid (x \wedge b) \ominus (y \wedge b) = (x \ominus y) \wedge b\}$, a proto

$$((x \wedge b) \ominus (y \wedge b) \mid b \in B)/U = ((x \ominus y) \wedge b \mid b \in B)/U.$$

Takže $\varphi(x) \ominus \varphi(y) = \varphi(x \ominus y)$. □

## 5.5. Svaz podvariet

V této podkapitole přesně popíšeme svaz všech podvariet ŁBCK-algeber a to tak, že využijime znalosti svazu podvariet MV-algeber a zavedeme mezi těmito svazy speciální dvojici zobrazení. Jako výsledek pak dostaneme přesnou podobu svazu všech podvariet ŁBCK-algeber.

**Definice 5.5.1.** Nechť $X$, $Y$ jsou uspořádané množiny a nechť $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ jsou zobrazení. Dvojici $(f,g)$ nazveme *dvojici reziduovaných zobrazení* uspořádaných množin $X$ a $Y$, jestliže pro každé $x \in X$, $y \in Y$ platí:

$$f(x) \leq y \iff x \leq g(y).$$

**Lemma 5.5.2.** *Nechť $(f,g)$ je dvojice reziduovaných zobrazení uspořádaných množin $X$, $Y$. Pak $g \circ f$ je uzávěrový operátor na $X$ a $f \circ g$ je vnitřkový operátor na $Y$. Navíc $f(X) = (f \circ g)(Y)$ je izomorfní s $g(Y) = (g \circ f)(X)$.*

*Důkaz.* Nejprve nechť $x \in X$ a $y \in Y$. Pak z $f(x) \leq f(x)$ a $g(y) \leq g(y)$ plyne:

$$x \leq g(f(x)) = (g \circ f)(x), \quad (f \circ g)(y) = f(g(y)) \leq y.$$

Nechť $x_1$, $x_2 \in X$ a $y_1$, $y_2 \in Y$ jsou takové, že $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Pak platí $x_1 \leq x_2 \leq g(f(x_2))$ a to implikuje $f(x_1) \leq f(x_2)$. Podobně máme, že $g(f(y_1)) \leq$

[1] Obecně platí, že je-li $S$ systém podmnožin $A$, který má vlastnost konečných průniků, pak se dá $S$ rozšířit na ultrafiltr na $A$.

$y_1 \leq y_2$ implikuje $g(y_1) \leq g(y_2)$. Takže $f$ i $g$ jsou izotonní zobrazení. Ukážeme $g \circ f \circ g \circ f = g \circ f$. Jistě platí $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f \circ g \circ f)(x)$. Naopak z $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x)$ plyne $(f \circ g \circ f)(x) \leq f(x)$ a to díky izotonnosti $g$ implikuje $(g \circ f \circ g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(x)$. Analogickým postupem bychom také dokázali $f \circ g \circ f \circ g = f \circ g$. Takže máme, že $g \circ f$ je uzávěrový operátor a $f \circ g$ vnitřkový.

Protože $x \leq (g \circ f)(x)$, tak $f(x) \leq (f \circ g \circ f)(x)$ a protože platí také opačná nerovnost, tak $f(x) = (f \circ g \circ f)(x)$, podobně $g(y) = (g \circ f \circ g)(y)$. Je-li $y \in Y$ takové, že existuje $x \in X$, pro které platí $f(x) = y$, pak $(f \circ g)(y) = (f \circ g \circ f)(x) = f(x)$. Takže skutečně platí rovnost $f(X) = (f \circ g)(Y)$. Analogicky bychom dokázali i rovnost $g(Y) = (g \circ f)(X)$. Izomorfismus mezi $g(Y)$ a $f(X)$ je zobrazení $f$. Nechť $g(y_1) \leq g(y_2)$. Pak díky izotonnosti $f$ platí $(f \circ g)(y_1) \leq (f \circ g)(y_2)$. Nopak je-li $(f \circ g)(y_1) \leq (f \circ g)(y_2)$, pak $g(y_1) \leq (g \circ f \circ g)(y_2) = g(y_2)$. □

Nechť $(A, \oplus, \neg, 0)$ je MV-algebra a $(A, \ominus, 0, 1)$ termově ekvivalentní ohraničená ŁBCK-algebra. Zavedeme následující značení:

- je-li $A = (A, \oplus, \neg, 0)$, pak označíme $A^-$ ŁBCK-algebru $(A, \ominus, 0, 1)$;
- je-li $A = (A, \ominus, 0, 1)$, pak označíme $A^+$ MV-algebru $(A, \oplus, \neg, 0)$.

Dále nechť $\mathcal{K}$ je třída MV-algeber a $\mathcal{L}$ třída ŁBCK-algeber; pak označme:

$$\mathcal{K}^- = \{A^- \mid A \in \mathcal{K}\},$$
$$\mathcal{L}^+ = \{A \in \mathcal{MV} \mid A^- \in \mathcal{L}\}.$$

Definujeme zobrazení $f\colon \Lambda(\mathcal{MV}) \to \Lambda(\mathcal{LBCK})$ a $g\colon \Lambda(\mathcal{LBCK}) \to \Lambda(\mathcal{MV})$ takto:

$$f\colon \mathcal{V} \mapsto S(\mathcal{V}^-),$$
$$g\colon \mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}^+.$$

Definice je korektní. Třída ŁBCK-algeber $\mathcal{V}^-$ není obecně uzavřená na podalgebry[1], proto je třeba vzít také všechny její podalgebry.

**Lemma 5.5.3.** *Výše definovaná zobrazení $f$ a $g$ tvoří dvojici reziduovaných zobrazení svazů $\Lambda(\mathcal{MV})$ a $\Lambda(\mathcal{LBCK})$.*

*Důkaz.* Nechť $\mathcal{V} \in \Lambda(\mathcal{MV})$ a $\mathcal{W} \in \Lambda(\mathcal{LBCK})$. Chceme dokázat, že platí $S(\mathcal{V}^-) \subseteq \mathcal{W}$, pravě když $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}^+$. Nejprve dokažme implikace zleva doprava. Nechť platí $S(\mathcal{V}^-) \subseteq \mathcal{W}$ a nechť $A \in \mathcal{V}$. Pak $A^- \in \mathcal{V}^-$ a tedy jistě $A \in S(\mathcal{V}^-)$. Takže podle předpokladu $A^- \in \mathcal{W}$. To podle definice $\mathcal{W}^+$ znamená, že $A \in \mathcal{W}^+$. A proto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}^+$.

Nyní dokažme opačnou implikaci. Nechť platí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}^+$ a nechť $A \in S(\mathcal{V}^-)$. Pak existuje $B^- \in \mathcal{V}^-$ takové, že $A$ je její podalgebra a $B$ je MV-algebra. Podle definovaného značení je tedy $B = (B^-)^+ \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}^+$. Tj. $B^- \in \mathcal{W}$, takže $A \in \mathcal{W}$. □

[1] Například uvažujeme-li $\mathcal{V} = V(S_3)$, tak ŁBCK-algebra $S_2$ je podalgebra $S_3^-$, ale $S_2 \notin \mathcal{V}^-$.

**Věta 5.5.4.** *Nechť $(f, g)$ je výše definovaná dvojice reziduovaných zobrazení a nechť $\mathcal{W} \in \Lambda(\mathcal{LBCK})$. Pak platí:*

$$\mathcal{W} = (f \circ g)(\mathcal{W}) = S((\mathcal{W}^+)^-).$$

*Důkaz.* Inkluze $S((\mathcal{W}^+)^-) \subseteq \mathcal{W}$ je triviální, neboť podle definice dvojice reziduovaných zobrazení platí $S((\mathcal{W}^+)^-) \subseteq \mathcal{W}$, právě když $\mathcal{W}^+ \subseteq \mathcal{W}^+$.

Dokážeme opačnou inkluzi. Nechť $A \in \mathcal{W}$ je subdirektně ireducibilní. Pak je lineárně uspořádaná a podle věty 5.4.6 se dá vnořit do $B = \left(\prod_{a \in A}[0, a]\right)/U$ pro některý ultrafiltr $U$ nad množinou $A$. Jistě $[0, a] \in \mathcal{W}$ pro každé $a \in A$, neboť $[0, a]$ je podalgebra $A$. Proto také $B \in \mathcal{W}$. Každá ŁBCK-algebra $[0, a]$ je reduktem MV-algebry $[0, a]^+ \in \mathcal{W}^+$. Takže $B$ je reduktem $B^+ = \left(\prod_{a \in A}[0, a]^+\right)/U$ a přitom $B^+ \in \mathcal{W}$. To znamená, že $B \in (\mathcal{W}^+)^-$. Protože $A$ lze vnořit do $B$, tak máme, že $A \in S((\mathcal{W}^+)^-)$, a tedy $\mathcal{W} \subseteq S((\mathcal{W}^+)^-)$. □

Použitím lemmatu 5.5.2 dostaneme tento důsledek:

**Důsledek 5.5.5.** *Svaz $\Lambda(\mathcal{LBCK})$ je izomorfní se svazem $(g \circ f)(\Lambda(\mathcal{MV}))$.*

Chceme-li zjistit, jak vypadá svaz $\Lambda(\mathcal{LBCK})$, tak stačí najít podsvaz svazu $\Lambda(\mathcal{MV})$, jehož prvky jsou uzavřené vzhledem k operátoru $g \circ f$. Připomeňme, že každá netriviální vlastní podvarieta MV-algeber je $V\left(\{S_i \mid i \in I\} \cup \{S_j^\omega \mid j \in J\}\right)$ pro některé konečné množiny přirozených čísel $I$, $J$.

**Lemma 5.5.6.** *Nechť $\mathcal{V}$ je vlastní podvarieta $\mathcal{MV}$ taková, že $S_n^\omega \in \mathcal{V}$ pro některé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\mathcal{V}$ není uzavřená vzhledem k operátoru $g \circ f$.*

*Důkaz.* Nechť $S_n^\omega \in \mathcal{V}$. Zřejmě $\mathrm{Rad}(S_n^\omega)$ je podalgebra ŁBCK-algebry $(S_n^\omega)^-$. Takže $\mathrm{Rad}(S_n^\omega) \in S(\mathcal{V}^-)$. Ovšem $\mathrm{Rad}(S_n^\omega) = \{(0, z) \mid z \in \mathbb{Z}^+\}$ je izomorfní s ŁBCK-algerbou $\mathbb{Z}^+$,[1] tudíž podle důsledku 5.3.3 musí být $S(\mathcal{V}^-) = \mathcal{LBCK}$. Protože $\mathcal{LBCK} = V([0, 1]^-)$, tak $\mathcal{LBCK}^+ = \mathcal{MV} \neq \mathcal{V}$. □

**Lemma 5.5.7.** *Nechť $\mathcal{V} = V(\{S_i \mid i \in I\})$ je vlastní podvarieta $\mathcal{MV}$ taková, že $S_j \notin \mathcal{V}$ pro některé přirozené $j \notin I$, $j < max(I)$. Pak $\mathcal{V}$ není uzavřená vzhledem k operátoru $g \circ f$.*

*Důkaz.* Nechť $S_j \notin \mathcal{V}$. Pak $S_j \notin \mathcal{V}^-$, ovšem $S_j \in S(\mathcal{V}^-)$, protože je to jistě podalgebra $S_n^-$, kde $n = \max(I)$, a proto $S_j \in S(\mathcal{V}^-)^+$, tudíž $\mathcal{V} \subsetneq S(\mathcal{V}^-)^+$. □

**Věta 5.5.8.** *Netriviální variety MV-algeber, které jsou uzavřené vzhledem $g \circ f$, jsou právě variety $V(S_1, S_2, \ldots S_n)$, kde $n \in \mathbb{N}$.*

[1] Z kontextu by mělo být jasné, že $\mathbb{Z}^+$ zde skutečně označuje všechna nezáporná celá čísla.

*Důkaz.* Předchozí dvě lemmata vyloučila, že by mohly být uzavřené jiné variety než tvaru $V(S_1, S_2, \ldots S_n)$. Zbývá dokázat, že variety tohoto tvaru jsou uzavřené. Nechť $\mathcal{V} = V(S_1, S_2, \ldots S_n)$. Podle lemmatu 4.2.1 je $\mathcal{V}$ charakterizována identitou:

$$n \times x = (n+1) \times x. \tag{nMV}$$

Dokážeme, že tato identita je splněna v MV-algebře, právě když je splněna identita:[1]

$$x \ominus ny = x \ominus (n+1)y. \tag{nLBCK}$$

Když platí identita (nMV), pak platí:

$$x \ominus ny = \neg(\neg x \oplus n \times y) = \neg(\neg x \oplus (n+1) \times y) = x \ominus (n+1)y.$$

Naopak když platí identita (nLBCK), pak volbou $x = 1$ dostaneme:

$$\neg(n \times y) = \neg((n+1) \times y),$$

to v MV-algebře platí, právě když $n \times y = (n+1) \times y$. Je jasné, že když MV-algebra $A$ splňuje tuto identit, pak ji pak splňuje i $A^-$ a také naopak.

Nechť $A \in (g \circ f)(\mathcal{V}) = S(\mathcal{V}^-)^+$. Pak $A^- \in S(\mathcal{V}^-)$, tj. $A$ je podalgebra některé $B^- \in \mathcal{V}^-$, kde $B \in \mathcal{V}$. Takže $B$ splňuje (nLBCK). Potom ale $B^-$ musí také splňovat (nLBCK) a tudíž i $A^-$. Z toho plyne, že $A$ také splňuje (nLBCK) a to implikuje $A \in \mathcal{V}$. Tj. $(g \circ f)(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$. Opačná inkluze plyne z toho, že $g \circ f$ je uzávěrový operátor. $\square$

Jak je zmíněno v lemmatu 5.5.2, je $(f \circ g)(\Lambda(\mathcal{LBCK})) = \Lambda(\mathcal{LBCK})$ izomorfní s $(g \circ f)(\Lambda(\mathcal{MV}))$, takže platí:

**Důsledek 5.5.9.** $\Lambda(\mathcal{LBCK})$ *je izomorfní s řetězcem variet MV-algeber*

$$\mathcal{T} \subset V(S_1) \subset V(S_1, S_2) \subset \cdots \subset V(S_1, S_2, \ldots, S_n) \subset \cdots \subset \mathcal{MV}.$$

Zmiňovaným izomorfismem je zobrazení $f$ a zřejmě $f(V(S_1, S_2, \ldots, S_n)) = S(V(S_1, S_2, \ldots, S_n)^-) = V(S_n^-)$.

**Důsledek 5.5.10.** $\Lambda(\mathcal{LBCK})$ *je řetězec*

$$\mathcal{T} \subset V(S_1^-) \subset V(S_2^-) \subset \cdots \subset V(S_n^-) \subset \cdots \subset \mathcal{LBCK}.$$

**Důsledek 5.5.11.** *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je varieta* $V(S_n) \in \Lambda(\mathcal{LBCK})$ *axiomatizovaná identitou (nLBCK), tj.:*

$$x \ominus ny = x \ominus (n+1)y.$$

[1] Je to identita MV-algeber protože $\ominus$ je termově definovaná operace v jazyku MV-algeber a je to zároveň identita v jazyku ŁBCK-algeber.

# Závěr

Cíle práce, které jsme vytyčili v úvodu, jsme splnili. Popsali jsme varietu MV-algeber, její svaz podvariet a axiomatizovali všechny podvariety. V širokém měřítku jsme využívali reprezentaci MV-algeber pomocí unitálních abelovských $\ell$-grup. Ačkoliv jsme v práci nedokázali nějaké zcela nové nebo překvapivé tvrzení, tak práce není pouhým souhrnem opsaných článků a kapitol z knih na dané téma. V některých případech jsme totiž postupovali mírně odlišným způsobem, než jak je možné najít v dostupné literatuře. Příkladem je popis svazu podvariet variety ŁBCK-algeber. Důkazy vět, které jsme zcela převzali z některé literatury, jsme se snažili přepsat srozumitelnou formou s případným doplněním potřebných poznámek.

# Literatura


[1] ANDERSON, M. a FEIL, T. *Lattice-Ordered Groups: An Introduction.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1988. Reidel Texts in the Mathematical Sciences. ISBN 90-277-2643-4.

[2] BIRKHOFF, G. *Lattice-Ordered Groups.* The Annals of Mathematics. 1942, **43**(2).

[3] CENKER, V. *Lineárně uspořádané BL-algebry.* Olomouc, 2020. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci.

[4] CIGNOLI, R., D'OTTAVIANO, I. M. L. a MUNDICI, D. *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning.* Dordrecht: Springer Netherlands, 2000. Trends in Logic.

[5] CHANG, C. C. *Algebraic Analysis of Many Valued Logics.* Transactions of the American Mathematical Society. 1958, **88**(2), 467–490.

[6] CHANG, C. C. *The Writing of the MV-Algebras.* Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic. 1998, **61**(1), 3–5.

[7] DI NOLA, A. a LETTIERI, A. *Equational Characterization of All Varieties of MV-Algebras.* Journal of Algebra. 1999, **221**(2), 463–474.

[8] DVUREČENSKIJ, A. *Pseudo MV-algebras are intervals in $\ell$-groups.* Journal of the Australian Mathematical Society. 2002, **72**(3), 427–446.

[9] DVUREČENSKIJ, A. a GRAZIANO, M. G. *Commutative BCK-algebras and lattice ordered groups.* Mathematica Japonica. 1999, **49**, 159–174.

[10] DVUREČENSKIJ, A. a KÜHR, J. *On the structure of linearly ordered pseudo-BCK-algebras.* Archive for Mathematical Logic. 2009, **48**(8), 771–791.

[11] DVUREČENSKIJ, A. a PULMANNOVÁ, S. *New Trends in Quantum Structures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. Mathematics and its applications, Vol. 516. ISBN 0-7923-6471-6.

[12] GAITÁN, H. *Subdirectly irreducible MV-algebras.* Czechoslovak Mathematical Journal. 2003, **53**(3), 631–639.

[13] GISPERT, J. a MUNDICI, D. *MV-algebras: a variety for magnitudes with archimedean units.* Algebra Universalis. 2005, **53**(1), 7–43.

[14] KOMORI, Y. *Super-Łukasiewicz implicational logics.* Nagoya Mathematical Journal. 1978, **72**, 127–133.

[15] KOMORI, Y. *Super-Łukasiewicz propositional logics.* Nagoya Mathematical Journal. 1981, **84**, 119–133.

[16] ROSE, A. a ROSSER, J. B. *Fragments of Many-Valued Statement Calculi.* Transactions of the American Mathematical Society. 1958, **87**(1).

[17] STEINBERG, S. A. *Lattice-ordered Rings and Modules.* Springer-Verlag New York, 2010, s. 33–123. ISBN 978-1-4419-1721-8.

[18] WAJSBERG, M. *Beiträge zum Metaaussagenkalkül I.* Monatshefte für Mathematik und Physik. 1935, **42**(1), 221–242.

[19] WRONSKI, A. *BCK-algebras do not form a variety.* Mathematica Japonicae. 1983, **28**, 211–213.