



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**PROBLEMATIKA STŘEŽENÍ CÍLE - MATEMATICKÉ  
MODELY A JEJICH ANALÝZA**

THE TARGET GUARDING PROBLEM - MATHEMATICAL MODELS AND THEIR ANALYSIS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Robin Stloukal**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**prof. RNDr. Jan Čermák, CSc.**

**BRNO 2024**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Robin Stloukal**  
Studijní program: Matematické inženýrství  
Studijní obor: bez specializace  
Vedoucí práce: **prof. RNDr. Jan Čermák, CSc.**  
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Problematika střežení cíle – matematické modely a jejich analýza

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Problém střežení cíle byl poprvé formulován R. Isaacsem v jeho klasické monografii o diferenciálních hrách. Podstatou problému jsou dva stejně rychlí hráči, z nichž první se snaží dosáhnout cílovou oblast (v klasické formulaci je nepohyblivá), a druhý se tomuto dosažení snaží zabránit. Posléze se v literatuře objevily složitější varianty této úlohy, zohledňující případné různé rychlosti obou hráčů, pohybující se cílovou oblast apod.

### Cíle bakalářské práce:

1. Uvedení základů teorie diferenciálních her a sestavení matematických modelů problému střežení cíle.
2. Analýza těchto modelů a nalezení optimálních strategií zúčastněných hráčů.
3. Grafická a numerická podpora získaných výsledků.

### Seznam doporučené literatury:

NAHIN, P. J. The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton. New Jersey: Princeton University Press, 2007.

ISAACS, R. Differential Games: A Mathematical Theory with Application to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. John Wiley and Sons, Inc. 1965.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou střežení cíle. Práce obsahuje formulace jednotlivých úloh a diskutuje různé aspekty problematiky. Hledá možné strategie pro obránce a nalézá křivky, po kterých se pohybuje. Důraz je kladen na analýzu nalezených křivek, numerickou a grafickou podporu.

## **Abstract**

This bachelor's thesis deals with The target guarding problem. The thesis contains the formulation of the given tasks and discusses various aspects of these problems. Possible strategies for defender are searched for, and corresponding trajectories are found. Emphasis is put on analysis of these trajectories, as well as on numerical and graphical support.

## **klíčová slova**

Střežení cíle, diferenciální hry, matematický model, ryzí pronásledování, pronásledovací křivka

## **keywords**

Target guarding, differential games, mathematical model, pure pursuit, pursuit curve

STLOUKAL, Robin. *Problematika střežení cíle - matematické modely a jejich analýza*. Brno, 2024. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/157623>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Jan Čermák.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Problematika střežení cíle - matematické modely a jejich analýza* vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Jana Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Robin Stloukal



Na tomto místě bych chtěl vyjádřit vděk doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za vedení mé bakalářské práce a za čas, který mi věnoval. Díky patří i mojí vždy podporující rodině.

Robin Stloukal





# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>11</b>
<b>2 Isaacsova úloha se stejnými rychlostmi</b>	<b>12</b>
2.1 Formulace úlohy a základní úvahy . . . . .	12
2.2 Analýza strategie obránce . . . . .	15
2.2.1 Trasa přímočarého rovnoměrného pohybu . . . . .	15
2.2.2 Trasa ryzího pronásledování . . . . .	19
2.3 Modifikace Isaacsovy úlohy . . . . .	23
<b>3 Isaacsova úloha s různými rychlostmi</b>	<b>27</b>
3.1 Formulace a rozbor úlohy . . . . .	27
3.2 Modifikace úlohy . . . . .	30
3.3 Analýza strategie obránce . . . . .	33
3.3.1 Příklad rychlejšího obránce . . . . .	33
3.3.2 Příklad rychlejšího útočníka . . . . .	34
<b>4 Závěr</b>	<b>37</b>

# 1 Úvod

Diferenciální hry představují oblast v teorii her, která se zaměřuje na analýzu strategických interakcí mezi hráči v čase. Na rozdíl od klasické teorie her, která často zkoumá statická rozhodnutí, diferenciální hry umožňují modelovat dynamiku strategických rozhodnutí a sledovat, jak se tyto rozhodnutí vyvíjí v reálném čase.

Problém střežení cíle poprvé formuloval R. Isaacs ve své klasické monografii o diferenciálních hrách [1]. Podstata problému spočívá ve formulaci optimálních strategií pro dva stejně rychlé hráče, z nichž první hráč (angl. Evader, E) se snaží dosáhnout cílovou oblast (angl. Target, T) (v klasické formulaci je nepohyblivá) přičemž druhý (angl. Pursuer, P) se tomuto dosažení snaží zabránit.

Pro lepší představu uvedme typické příklady střežení cíle. Jako útočníka E si můžeme představit bombardér směřující k nepřátelské průmyslové zóně, tedy k cíli (či oblasti) T. Jako obránce P můžeme uvažovat malé obranné letadlo, snažící se zachytit E před dosažením zóny T. Tato letadla mohou mít různé nebo stejné rychlosti. Zaměníme-li útočníka E například za obrněné vozidlo s jadernou hlavicí, změní se i strategie. Útočník E se bude snažit, aby výbuch proběhl alespoň na určitou vzdálenost od cíle T, zatímco obránce P se bude snažit zachytit útočníka E co nejdále od cíle.

Tato bakalářská práce zahrnuje úlohu pronásledování se stejnými rychlostmi i složitější variantu této úlohy zohledňující různé rychlosti obou hráčů. Hlavním cílem je nalezení a analýza konkrétních strategií pro obránce, jejíž součástí je grafická i numerická podpora problému.

Práce je rozdělena do dvou hlavních kapitol. V první se zabýváme základním problémem stejných rychlostí a v druhé se věnujeme složitější variantě, ve které se hráči pohybují různými rychlostmi. Součástí každé kapitoly je formulace problému, analýza a pojednání o vhodných strategiích (zejména z pohledu obránce). Dále se zabýváme i modifikacemi úloh.

V první kapitole představíme verzi problému střežení cíle se stejně rychlými hráči. Isaacs tuto verzi představil s ryze vojenským zaměřením, a my ukážeme, že uplatnění je širší, než se může na první pohled zdát. Následně se zaměříme na analýzu a řešení různých konkrétních strategií a v závěru analyticky popíšeme i modifikaci této úlohy.

Druhá kapitola se zabývá střežením cíle s hráči, kteří jsou různě rychlí. Tato verze se od původní zásadně liší a vyžaduje jiný přístup a jiné myšlenkové pochody pro její analýzu. I zde nejprve formuluje úlohu a popíšeme základní aspekty, ze kterých se postupně jako mozaika sestaví aparát, který následně použijeme pro analýzu a návrh vhodných strategií pro obránce.

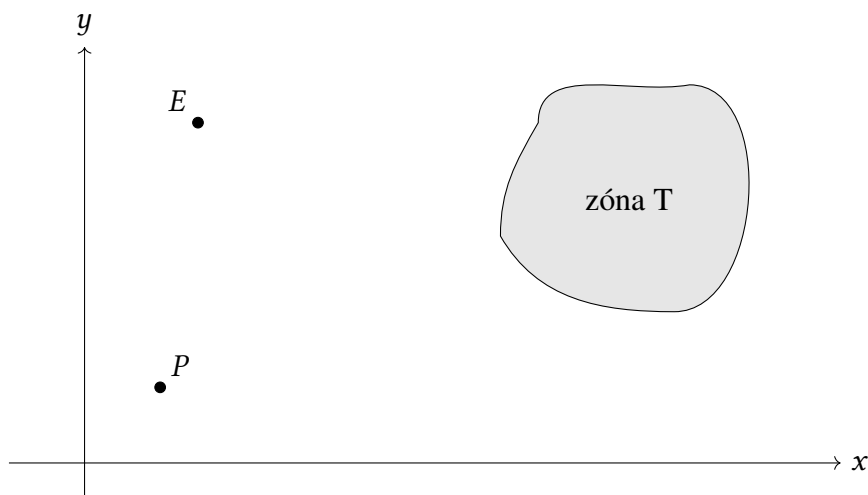
Na závěr zdůrazňeme, že matematický aparát této práce nevyužívá poznatků teorie diferenciálních her, a vychází ze standardních prostředků matematické analýzy a geometrie vyučovaných na bakalářském stupni vysokoškolského studia.

## 2 Isaacsova úloha se stejnými rychlostmi

### 2.1 Formulace úlohy a základní úvahy

V této kapitole se budeme zabývat základní úlohou, kterou popsal Rufus Isaacs ve své klasické monografii o diferenciálních hrách. Provedeme základní sestavení úlohy a její analýzu. Text níže čerpá ze zdrojů [1] a [2].

Úloha střežení cíle je typem diferenciální hry, v níž jeden hráč ( $P$ , obránce) se snaží zabránit druhému hráči ( $E$ , útočníkovi) v dosažení nebo poškození určitého cíle  $T$  (viz obrázek 1). Oba hráči mají stejnou rychlost a cíl je statická zóna (oblast)  $T$ .

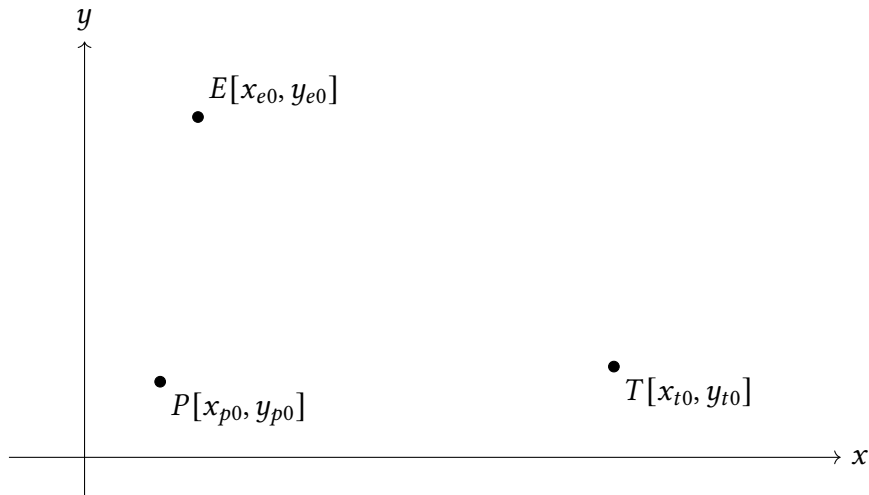


Obrázek 1: Základní geometrie úlohy,  $E$  útočící a  $P$  bránící zónu  $T$

Při analýze se zaměříme na otázky dosažitelnosti (může být cíl vůbec napaden nebo ubráněn?), nebo výpočtem optimálních strategií hráčů (jak má útočník nebo obránce jednat, aby maximalizoval nebo minimalizoval svůj zisk či ztrátu?). Hra končí buď výhrou obránce, pokud dojde k protnutí jeho trajektorie s trajektorií útočníka  $E$ , nebo výhrou útočníka, pokud se jeho trajektorie střetne s cílovou zónou  $T$ .

Jaká bude vhodná strategie pro obránce nebo útočníka? Bez dalších konkrétních dat o poloze hráčů či charakteru zóny  $T$  by bylo nemožné odpovědět na tuto otázku, a odvodit vhodnou strategii. Proto pro zjednodušení můžeme předpokládat, že cílová zóna  $T$  je reprezentována pouhým bodem. V praxi by se mohlo jednat například o rádiový vysílač, který má být zničen, resp. chráněn (viz obrázek 2). Popíšme nyní analyticky tuto situaci.

Na obrázku 2 jsou vyobrazeny obecné polohy útočníka, obránce a cílového bodu o souřadnicích  $E[x_{e0}, y_{e0}]$ ,  $P[x_{p0}, y_{p0}]$  a  $T[x_{t0}, y_{t0}]$ .

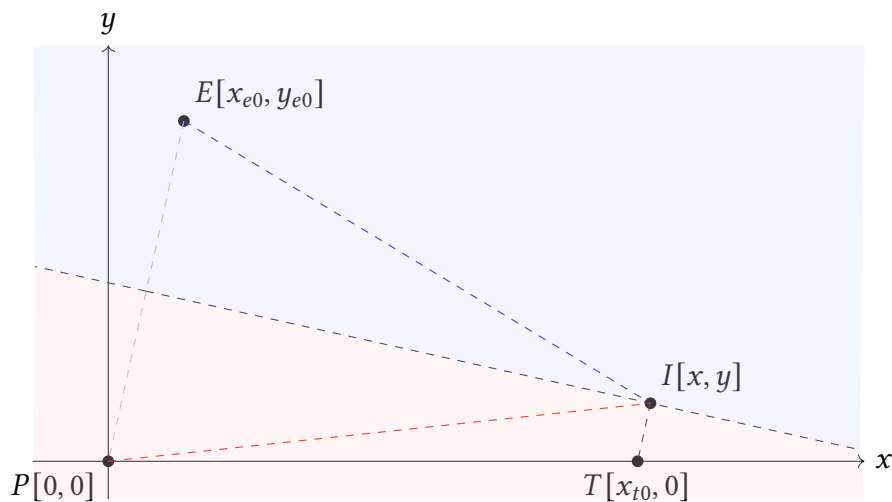


Obrázek 2: Geometrie úlohy,  $E$  útočící a  $P$  bránící bod  $T$

Přesuňme souřadnicový systém tak, aby  $P$  byl v počátku a cíl  $T$  na ose  $x$ . Rovinu rozdělíme na dvě poloroviny podle bodů, které jsou blíže obránci (obrázek 3, červená) a které jsou blíže útočnickovi (obrázek 3, modrá). Na hranici těchto polorovin jsou body vzdálené od obou hráčů stejně. Získali jsme tak rozdělení roviny podle toho, kam by při předepsané rychlosti dorazil dříve obránc resp. útočník. Hranice polorovin je přímka shodná s osou úsečky  $EP$ . Najdeme rovnici pro hranici těchto polorovin.

Tato přímka má směrnici  $-\frac{x_{e0}}{y_{e0}}$ , prochází středem úsečky  $EP$   $[\frac{x_{e0}}{2}, \frac{y_{e0}}{2}]$  a je popsána následující rovnicí:

$$y = -\frac{x_{e0}}{y_{e0}} \cdot x + \frac{x_{e0}^2 + y_{e0}^2}{2 \cdot y_{e0}}. \quad (2.1)$$



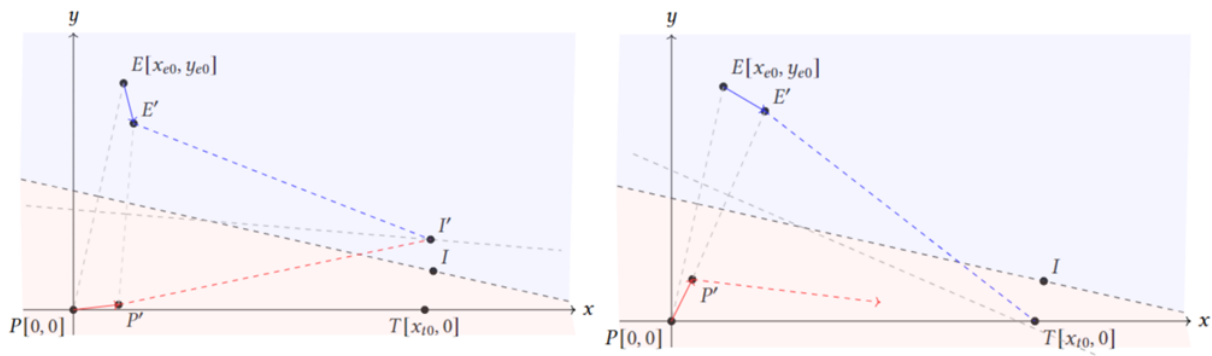
Obrázek 3: Geometrie úlohy,  $E$  útočící a  $P$  bránící bod  $T$ , bod  $I$  zastupující střet trajektorií  $E$  a  $P$

Vidíme, že v této variantě diferenciální hry je klíčovým parametrem souřadnice cíle  $T$ . Pokud je cíl blíže k útočnickovi  $E$ , vede to vždy k jeho výhře. Naopak, pokud je cíl  $T$  blíže k obránci  $P$ , může obránce svým chováním dosáhnout výhry.

Je zřejmé, že jednou z vhodných strategií pro útočníka je putovat co nejkratší cestou tak, aby minimalizoval svoji vzdálenost od cílové zóny  $T$  a tím zároveň maximalizoval svůj úspěch. Jakou strategii by tedy měl zvolit obránce, při znalosti útočnickovy taktiky?

Obránce při znalosti polohy cíle zvolí takovou trasu, aby co nejdříve zachytil útočníka (který tedy směřuje na nejbližší dosažitelný bod od cíle  $T$ ). Tento střet nastane právě v bodě  $I$  (viz obrázek 3). Bod  $I$  je průsečíkem přímky (2.1) její kolmice procházející cílem  $T$ .

Na obrázku 4 jsou znázorněny některé varianty chování, které mohou nastat. Vlevo je vizualizovaná situace, kdy se útočník chová neefektivně a obránce inteligentně. Útočník zpočátku zvolí náhodný směr a po určitém kroku přejde na trasu směřující k cíli  $T$ . Při takovém postupu bude útočník chycen obráncem ve větší vzdálenosti od cíle  $T$  než kdyby zpočátku volil směr k bodu  $I$ . V pravé části obrázku je situace, kde se útočník chová efektivněji a obránce náhodně. Obránce ztrácí svou počáteční výhodu a po určitém kroku se cíl  $T$  nachází na horní polorovině. V takovém scénáři vyhrává útočník.



Obrázek 4: Geometrie úlohy, počáteční souřadnice útočníka  $E[x_{e0}, y_{e0}]$  a obránce  $P[0, 0]$ , souřadnice po 1 kroku  $E', P'$ , cíl  $T$ , bod  $I$  zastupující střet trajektorií  $E$  a  $P$ , vlevo útočník volí nejprve směr náhodně, poté směřuje na útočníka a dobrá obrana obránce, vpravo vhodný útok a náhodná hra obránce

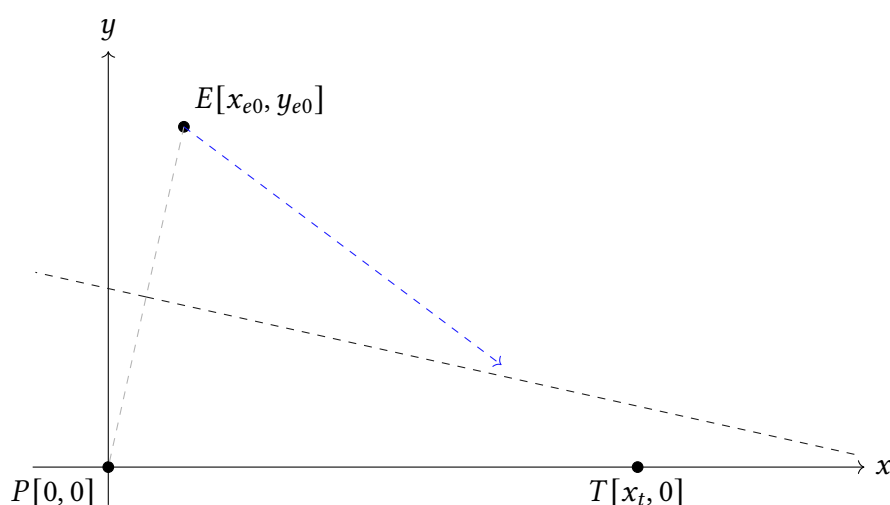
V následujících podkapitolách se zaměříme na konkrétní chování obou hráčů (zejména pak obránce) v různých strategických scénářích.

## 2.2 Analýza strategie obránce

Uvažujme scénář, kdy cíl je blíže obránci a útočník zvolí pevně danou strategii, která je obránci známa dopředu. Útočník se vydá na cíl  $T$  přímočarým rovnoměrným pohybem rychlostí  $v$ . Jedná se sice o změnu oproti dosavadnímu uvažování (útočník mířil k nejbližšímu možnému dosažitelnému bodu), ale jakákoliv změna směru útočnickova pohybu by byla pouze otázkou numerických přepočtů řešení. V této kapitole se zaměříme na diskuzi konkrétní možných tras pro obránce a zhodnocení, na kolik jsou pro něj výhodné.

### 2.2.1 Trasa přímočarého rovnoměrného pohybu

V této podkapitole se pokusíme najít správný směr pro obránce, když by se měl vydat přímočarým rovnoměrným pohybem. Hledáme vlastně směrnici přímky, pod kterou musí vyrazit, aby útočníka zasáhl. V této pasáži jsou obsaženy vlastní výpočty autora.



Obrázek 5: Geometrie úlohy, útočník  $E$  útočící směřující na cíl  $T$ , obránce  $P$

Popišme nyní úlohu kinematically s pomocí geometrie. Na obrázku 5 můžeme pozorovat tři body o následujících souřadnicích, vyjádřených v čase  $t = 0$ :

- Útočník:  $E[x_{e0}, y_{e0}]$
- Cíl:  $T[x_T, 0]$
- Obránce:  $P[0, 0]$

Jak již bylo zmíněno, pohyb útočníka  $E$  lze popsat jako rovnoměrný a přímočarý pohyb se směrovým vektorem  $(x_T - x_{e0}; -y_{e0})$ . Tento pohyb lze popsat parametricky pomocí následující přímky.

$$\begin{aligned}\Phi_E(t) &= x_{e0} + k_E \cdot (x_T - x_{e0}) \cdot t, \\ \psi_E(t) &= y_{e0} + k_E \cdot (-y_{e0}) \cdot t,\end{aligned}$$

kde  $k_E$  je multiplikační konstanta, která upravuje směrový vektor tak, aby odpovídal předepsané rychlosti. Pro tuto konstantu rovnost platí popsána níže:

$$k_E = \frac{v}{\sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}},$$

kde  $v$  je společná rychlost útočníka a obránce.

Obránce  $P$  rovněž zvolí trasu po přímce, tedy rovnoměrný přímočarý pohyb. Zbývá zodpovědět otázku, pod jakým úhlem bude putovat. Jeho pohyb lze popsat následovně.

$$\begin{aligned}\Phi_P(t) &= x = v \cdot \cos(\alpha) \cdot t, \\ \psi_P(t) &= y = v \cdot \sin(\alpha) \cdot t.\end{aligned}$$

Najděme nyní  $\alpha$  tak, aby existoval takový čas  $\hat{t}$ , že platí:

$$\begin{aligned}\Phi_P(\hat{t}) &= \Phi_E(\hat{t}), \\ \psi_P(\hat{t}) &= \psi_E(\hat{t}).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Rozepsáním rovnic (2.2) získáme níže uvedené rovnice.

$$\begin{aligned}x_{e0} + \frac{v}{\sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}} \cdot (x_T - x_{e0}) \cdot \hat{t} &= v \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{t}, \\ y_{e0} + \frac{v}{\sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}} \cdot (-y_{e0}) \cdot \hat{t} &= v \cdot \sin(\alpha) \cdot \hat{t}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

V těchto rovnostech vystupují dvě neznámé:  $\hat{t}$  a  $\alpha$ .

Tyto rovnosti následně umocníme na druhou a sečteme. Vzniklou pravou stranu můžeme upravit jako

$$v^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \hat{t}^2 + v^2 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \hat{t}^2 = v^2 \cdot \hat{t}^2 \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) = v^2 \cdot \hat{t}^2.$$

Na levé straně vznikl součet dvou mocnin ve tvaru

$$\left( x_{e0} + \frac{v}{\sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}} \cdot (x_T - x_{e0}) \cdot \hat{t} \right)^2 + \left( y_{e0} + \frac{v}{\sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}} \cdot (-y_{e0}) \cdot \hat{t} \right)^2.$$

Tyto závorky roznásobíme, pravou stranu odečtením převedeme nalevo a poté společně vhodně zasubstituuje:

$$A \cdot \hat{t}^2 + B \cdot \hat{t} + C = 0,$$

kde koeficienty  $A, B, C$  jsou následující:

$$\begin{aligned}A &= \frac{v^2}{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2} \cdot ((x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2) - v^2 = v^2 - v^2 = 0, \\ B &= 2 \cdot \frac{v}{\sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}} \cdot ((x_T - x_{e0}) \cdot x_{e0} + (-y_{e0}) \cdot y_{e0}), \\ C &= x_{e0}^2 + y_{e0}^2.\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy jednu lineární rovnici pro jednu neznámou. Pro čas zachycení  $\hat{t}$  tedy platí

$$\hat{t} = \frac{-C}{B},$$

odtud po dosazení

$$\hat{t} = \frac{-(x_{e0}^2 + y_{e0}^2) \cdot \sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}}{2 \cdot v \cdot ((x_T - x_{e0}) \cdot x_{e0} - y_{e0}^2)}.\tag{2.4}$$



Čas  $\hat{t}$  z fyzikální interpretace nesmí být záporný. To znamená, že jmenovatel výrazu (2.4) musí mít záporné znaménko. Tedy

$$2 \cdot v \cdot ((x_T - x_{e0}) \cdot x_{e0} - y_{e0}^2) < 0.$$

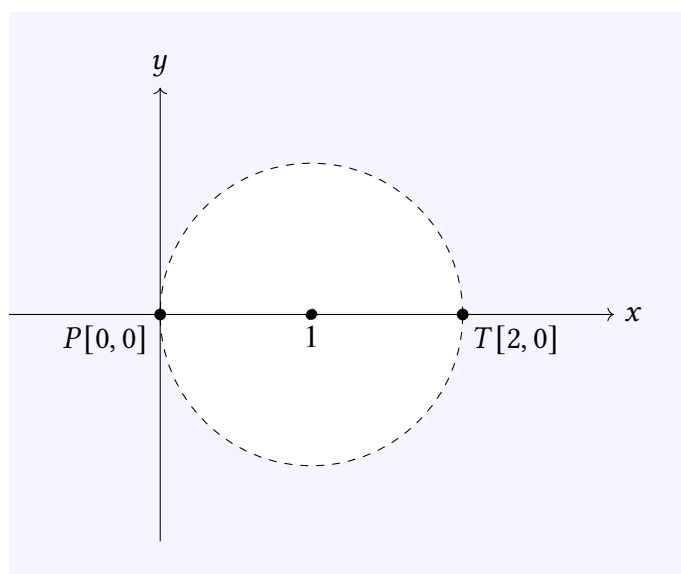
Otočením znaménka a úpravou na čtverec dostáváme nerovnost

$$-x_T \cdot x_{e0} + x_{e0}^2 + y_{e0}^2 = (x_{e0} - \frac{1}{2}x_T)^2 + y_{e0}^2 - \frac{1}{4}x_T^2 > 0. \quad (2.5)$$

Celkem platí:

$$(x_{e0} - \frac{1}{2}x_T)^2 + y_{e0}^2 > \frac{1}{4}x_T^2. \quad (2.6)$$

Nerovnost (2.6) nám pro určité hodnoty  $x$ -ových souřadnic cíle  $T$  dává podmínku pro polohu útočníka  $E$ , tak, aby existoval čas  $\hat{t}$ , za který dojde k zachycení. Obrázek níže vizualizuje situaci, kdy je cíl  $T$  zafixovaný na pozici  $[2,0]$ .



Obrázek 6: Grafická vizualizace vztahu (2.6) pro cíl  $T$  zafixovaný na  $[2,0]$ , obránce  $P$  v počátku, modrá množina - body možného výskytu útočníka  $E$

Provedme stručnou geometrickou analýzu získané oblasti. Tato podmínka vyjadřuje množinu bodů, ve kterých se nesmí nacházet útočník, aby úloha měla smysl. V případě, kdy se útočník nachází ve větší vzdálenosti od cíle než obránce - což je náš předpoklad (viz obrázek 5), je tato podmínka splněna automaticky. Poznamenejme, že opačná implikace neplatí.

Se znalostí času zachycení se nyní můžeme vrátit k rozepsaným rovnicím (2.3). Z této původně soustavy dvou rovnic o dvou neznámých již můžeme bez potíží vyjádřit úhel buď z první nebo z druhé rovnice. Zvolme například první, pak pro úhel  $\alpha$  dostáváme

$$\alpha = \arccos \left( \frac{x_{e0}}{v \cdot \hat{t}} + \frac{x_T - x_{e0}}{\sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}} \right).$$

Celkově tedy platí

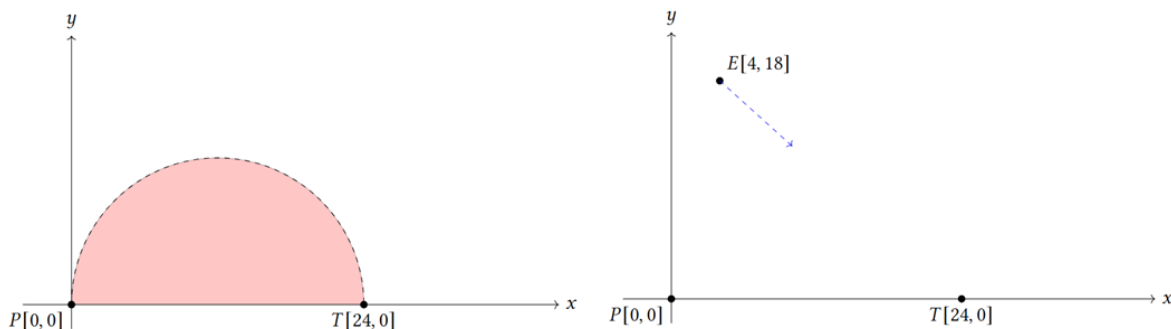
$$\alpha = \arccos \left( \frac{x_{e0} \cdot 2 \cdot ((x_T - x_{e0}) \cdot x_{e0} - y_{e0}^2)}{-(x_{e0}^2 + y_{e0}^2) \cdot \sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}} + \frac{x_T - x_{e0}}{\sqrt{(x_T - x_{e0})^2 + y_{e0}^2}} \right).$$

Získali jsme tak vyjádření úhlu, pod kterým se pohybuje obránce tak, aby zneškodnil útočníka (připomeňme, že za předpokladu, že cíl je blíže k obránci). Můžeme konstatovat, že při stejných rychlostech je tedy tento úhel jediný a pokud by obránce pokračoval pod jiným úhlem, pak by útočníka minul.

Pro ilustraci těchto výpočtů uvedme následující příklad.

**Příklad 2.1.** Jako cíl si pro tuto chvíli představme slavné historické město Kartágo. Jako bod obránce  $P$  uvažujeme malý přístav s majákem, který obhlíží okolní neklidné moře a je kdykoliv připraven vyslat loď na obranu města. V naší úloze budeme uvažovat, že kartagenští obránci, čekající právě v bodě  $P$ , znají výsledky a poznatky, které jsme získali během našeho pozorování výše.

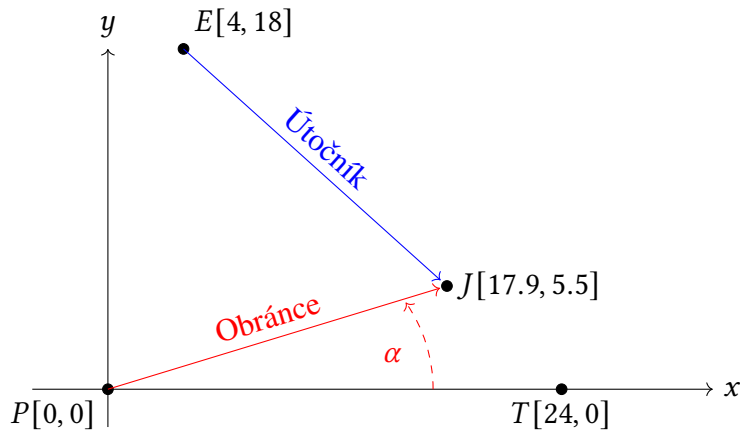
Na obrázku 7 nalevo můžeme pozorovat obránce  $P$  se souřadnicemi  $[0,0]$  a město Kartágo značené jako  $T$ , vzdálené od přístavu 24 námořních mil. Než vybereme umístění útočníka, poznamenejme, že tato volba nesmí být učiněna z kruhu dle obrázku 6 (v našem příkladě budeme uvažovat pouze kladné hodnoty ypsilon, jde tedy o červeně zvýrazněný půlkruh dle obrázku 7)



Obrázek 7: Příklad, útočník  $E$ , obránce  $P$ , cíl  $T$ , nalevo oblast kde se nesmí nacházet útočník, aby mohl obránce zvítězit, napravo útočník s naznačeným směrem pohybu

Na obrázku napravo můžeme pozorovat útočníka  $E$ , kterého zaměníme v našem příkladě za římskou útočnou flotilu, kterou obránci zpozorují v souřadnicích  $[4,18]$ . Povětrnostní a plavební podmínky jsou takové, že obránci i útočníci dosahují svojí maximální rychlostí, která v této době mohla být až 8 uzlů (námořní míle za hodinu).

Obránci ze znalostí poznatků naší úlohy si spočítají, že by útočníky měli dosáhnout za čas  $\hat{t} = 2.343$  hodiny společně s úhlem, pod kterým vyrazí  $\alpha = 16,93^\circ$ . K střetu kartagenské a římské flotily dojde v bodě  $J$  o souřadnicích  $[17.9, 5.5]$  a o tom, kdo vyjde z boje jako vítěz by rozhodly válečné schopnosti příslušného národu.



Obrázek 8: Grafická vizualizace průběhu pronásledování, útočník  $E$ , obránce  $P$ , cíl  $T$ , bod střetnutí  $J$ , úhel  $\alpha$ , pod kterým se pohybuje  $P$

## 2.2.2 Trasa ryzího pronásledování

V této kapitole se inspirováme přirozenými interakcemi v životním prostředí, konkrétně v kontextu hnízdního chování ptáků. Obránce, který v tomto případě může být například pták, má za úkol ochránit své hnízdo a mláďata před útočníky, jako jsou dravci nebo jiní predátoři. Ptáci, kteří chrání svá hnízda, často provádějí aktivní sledování a pronásledování potenciálních nebezpečí, která by mohla ohrozit jejich potomstvo. Obránce může využít své letové schopnosti k rychlému pohybu a pronásledování útočníka, čímž mu brání v přiblížení k hnízdu. Tímto způsobem obránce aktivně reaguje na hrozbu a snaží se ji eliminovat, přičemž se snaží minimalizovat riziko pro svá mláďata.

Ryzí pronásledování je varianta pronásledování, kdy jeden hráč v každém okamžiku míří na druhého a snaží se ho dosáhnout. Geometricky vyjádřeno, tečna sestavená k trajektorii pronásledovatele v bodě, ve kterém se pronásledovatel nachází, bude vždy mířit na pronásledovaného. Co se tedy stane, když se útočník vydá po pevně zvolené trajektorii, konkrétně přímce dané body  $ET$  (viz obrázek 9), a obránce zvolí ryzí pronásledování?

Tato kapitola obsahuje vlastní výpočty - je variací pirátské úlohy ryzího pronásledování (viz [2]). V klasické formulaci tato úloha obsahuje podmínku kolmosti směru trasy pronásledovaného na spojnici obou hráčů, my tuto podmínku nyní nevyžadujeme. Pro snazší řešení tohoto problému je vhodné otočit souřadný systém podle ilustrace na obrázku 9. Jak tedy bude vypadat trajektorie obránce  $P$ ?

Podívejme se nyní na tento problém analyticky. Nejdříve popíšeme souřadnice jednotlivých hráčů:

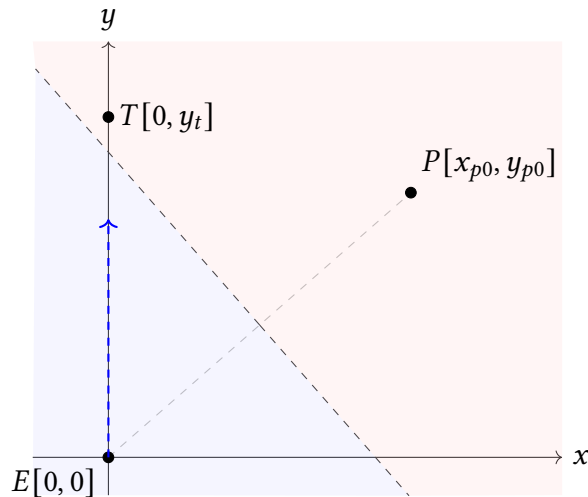
- Obecná poloha útočníka v čase  $t$ :  $E[0, 0] \rightarrow E[0, vt]$
- Obecná poloha obránce v čase:  $P[x_{p0}, y_{p0}] \rightarrow P[x, y]$

Obránce  $P$  stále míří na útočníka  $E$ , a proto platí následující rovnice

$$y'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - vt}{x}, \quad (2.7)$$

kde je  $y'(x)$  derivace funkce  $y$  podle  $x$ ,  $\Delta y$  je rozdíl v  $y$ -ových složek a  $\Delta x$  je rozdíl v  $x$ -ových složek. Tento vztah musíme upravit tak, aby neobsahoval čas  $t$ . K tomu využijeme základní vztah pro dráhu  $s = v \cdot t$  a vyjádření délky oblouku

$$s = \int_{x_{p0}}^x \sqrt{1 + (y'(\psi))^2} d\psi.$$



Obrázek 9: Transformovaný souřadný systém

Dohromady získáváme vztah pro čas  $t$ :

$$t = \frac{1}{v} \int_{x_{p0}}^x \sqrt{1 + (y'(\psi))^2} d\psi.$$

Takto vyjádřené  $t$  dále dosadíme do vztahu (2.7):

$$y'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - v \frac{1}{v} \int_{x_{p0}}^x \sqrt{1 + (y'(\psi))^2} d\psi}{x}.$$

Tuto integro-diferenciální rovnici řešíme roznásobením na tvar

$$y'(x) \cdot x = y - v \frac{1}{v} \int_{x_{p0}}^x \sqrt{1 + (y'(\psi))^2} d\psi,$$

který zderivujeme podle  $x$ . Tím získáme ODR2

$$y''(x) \cdot x + y'(x) = y'(x) - \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

Položením  $z(x) = y'(x)$  a následnou úpravou dostáváme rovnici

$$z'(x) = -\frac{1}{x} \sqrt{1 + z^2(x)},$$

což je separovaná ODR1. Jelikož obránce v čase  $t = 0$  míří na útočníka  $E$ , máme počáteční podmínku  $z(x_{p0}) = y'(x_{p0}) = k_{PE}$ , kde  $k_{PE}$  je počáteční směrnice obránce mířícího na útočníka. Na řádcích níže následuje řešení dané ODR1:

$$\frac{dz(x)}{dx} = -\frac{\sqrt{1 + z^2(x)}}{x},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + z^2(x)}} dz = -\int \frac{1}{x} dx.$$

Po integraci získáváme vztah

$$\operatorname{argsinh}(z(x)) = -\ln(x) + C.$$

Jelikož z počáteční podmínky známe, že  $z(x_{p0}) = k_{PE}$ , tak platí

$$C = \operatorname{argsinh}(k_{PE}) + \ln(x_{p0}).$$

Partikulární řešení  $z(x)$  je tedy tvaru

$$z(x) = \sinh(-\ln(x) + \operatorname{argsinh}(k_{PE}) + \ln(x_{p0})) = -\sinh\left(\ln\left(\frac{x}{x_{p0}}\right) - \operatorname{argsinh}(k_{PE})\right).$$

Odtud úpravou

$$z(x) = -\frac{1}{2} \left[ e^{\ln\left(\frac{x}{x_{p0}}\right) - \operatorname{argsinh}(k_{PE})} - e^{-\ln\left(\frac{x}{x_{p0}}\right) + \operatorname{argsinh}(k_{PE})} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{x}{x_{p0}} \cdot e^{-\operatorname{argsinh}(k_{PE})} - \frac{x_{p0}}{x} \cdot e^{\operatorname{argsinh}(k_{PE})} \right].$$

Na závěr integrujeme, abychom získali ze substituce  $z(x) = y'(x)$  hledanou  $y(x)$ :

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2 \cdot x_{p0}} \cdot e^{-\operatorname{argsinh}(k_{PE})} - x_{p0} \cdot \ln(x) \cdot e^{\operatorname{argsinh}(k_{PE})} \right] + C.$$

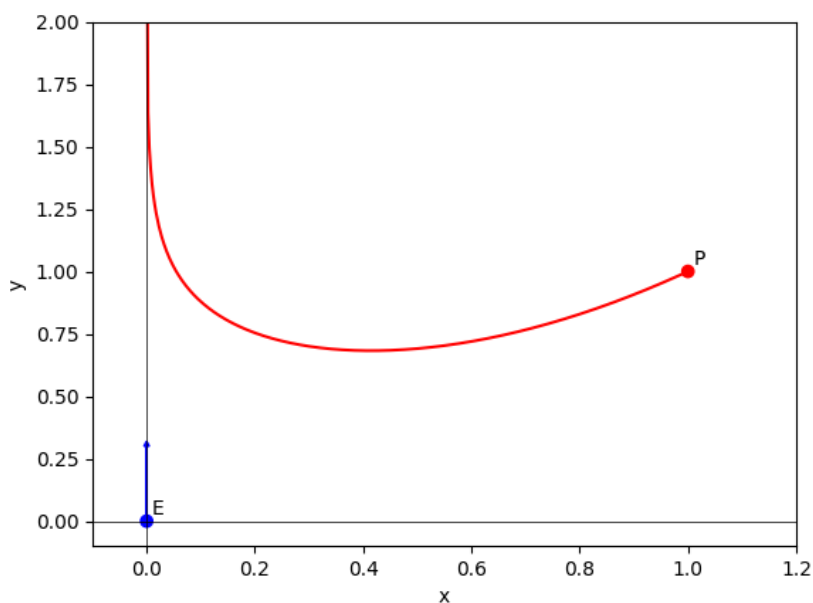
Užitím počáteční podmínky  $y(x_{p0}) = y_{p0}$  dostáváme

$$C = y_{p0} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x_{p0}^2}{2 \cdot x_{p0}} \cdot e^{-\operatorname{argsinh}(k_{PE})} - x_{p0} \cdot \ln(x_{p0}) \cdot e^{\operatorname{argsinh}(k_{PE})} \right].$$

Předchozí dva vztahy dále můžeme upravit pomocí identity  $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  a propojit dohromady:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2 - x_{p0}^2}{2 \cdot x_{p0} \cdot (k_{PE} + \sqrt{k_{PE}^2 + 1})} - x_{p0} \cdot \ln(x \cdot x_{p0}) \cdot (k_{PE} + \sqrt{k_{PE}^2 + 1}) \right] + y_{p0}. \quad (2.8)$$

Získali jsme tak předpis pro funkci, která popisuje pohyb obránce sledujícího útočníka ryzím pronásledováním. Tuto křivku si můžeme prohlédnout na obrázku 10, ve kterém obránce  $P$  startuje z pozice  $[1,1]$ .



Obrázek 10: Graf křivky, po které se pohybuje obránce při startu z pozice [1,1]

Zaměřme se na analýzu nalezené pronásledovací křivky. Dokázal by obránce zachytit útočníka, když by zvolil tuto strategii?

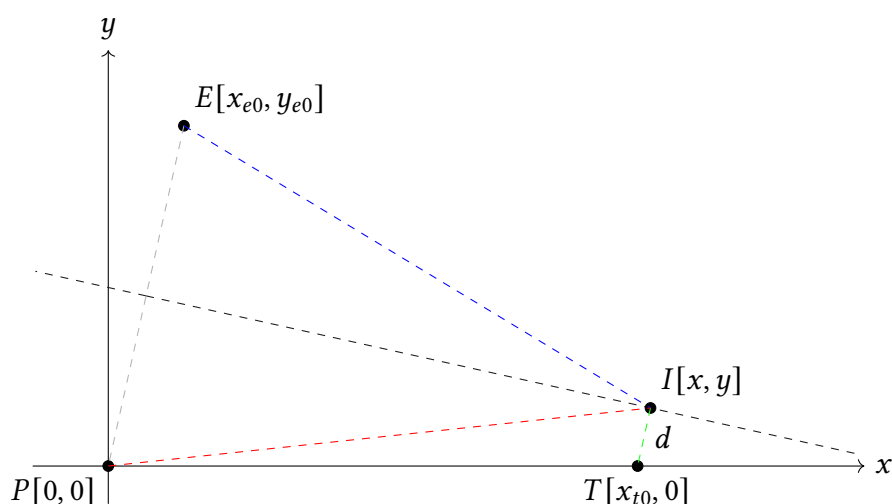
Předpis funkce (2.8) a její grafická vizualizace na obrázku 10 napovídá, že k zachycení nedojde. Skutečně přímka, po níž se pohybuje útočník je asymptotou k nalezené pronásledovací křivce (příslušná limita zprava je nevlastní). Křivky obránce a útočníka se tedy skutečně neprotnou. V praxi tedy bude platit, že ačkoliv se pták může nacházet dostatečně blízko dravce, nebude pro něj trasa ryzího pronásledování vhodnou taktikou k ochraně svého hnízda a zachycení útočníka. Tato strategie je nevýhodná i v případě, kdy se pták nachází ve větší vzdálenosti od predátora. Ačkoliv je v počátku obránce blíž k cíli a mohl by ho ochránit např. pomocí trasy přímočarého rovnoměrného pohybu, po zvolení ryzího pronásledování ztratí svojí počáteční výhodu, neuchrání své hnízdo a jeho mise bude ztracena.

## 2.3 Modifikace Isaacsovy úlohy

Jak již bylo zmíněno v úvodu, má smysl zabývat se i jinou variantou Isaacsovy úlohy. Lze uvažovat situaci, kde není nutné fyzické střetnutí mezi útočníkem a obráncem. Místo toho může útočník dosáhnout vítězství dosažením určené vzdálenosti  $R$  od cíle. Tato podkapitola čerpá ze zdroje [2].

Pro lepší představu situace uveďme jiný příklad z praxe. Útočníka  $E$  můžeme nahradit aktivistou, jehož cílem je poškodit Monu Lisu, což je cíl  $T$ . Muzeální strážce, tedy obránce  $P$ , se bude snažit tomuto činu předejít. Aktivista je vybaven barvou napuštěnými balónky a jelikož to není žádný ostrostřelec, musí se dostat na určitou vzdálenost  $R$  od cíle, aby se trefil. Jaká bude výhodná strategie pro útočníka nebo obránce?

Pro tuto variaci lze diskutovat podobně, jako pro původní úlohu. Nemá smysl uvažovat cíl  $T$  v polorovině bližší k bodu  $E$ , jelikož by došlo k výhře útočníka. Uvažujme tedy, že cíl je blíže k  $P$ . Útočník se v tomto případě bude snažit dosáhnout co nejbližšího bodu k cíli, aby splnil svoji misi. Při takovém chování obou hráčů dojde k střetu opět na přímce (2.1). Na obrázku 11 je situace vizualizována.



Obrázek 11: Geometrie úlohy,  $E$  útočící a  $P$  bránící bod  $T$ , bod  $I$  zastupující střet trajektorií  $E$  a  $P$ ,  $d$  zastupující velikost úsečky  $IT$

Nejbližším dosažitelným bodem pro útočníka je bod  $I$  o souřadnicích  $[x, y]$ , což je průsečík přímky (2.1) a kolmice na tuto čáru procházející bodem  $T$ . Najdeme nyní vztah mezi základními souřadnicemi a tímto bodem.

Přímka procházející bodem  $T$  a průsečíkem  $I$  má směrnici  $\frac{y_{e0}}{x_{e0}}$  a lze ji popsat vztahem

$$y = \frac{y_{e0}}{x_{e0}} \cdot x - \frac{y_{e0}}{x_{e0}} \cdot x_{t0}. \quad (2.9)$$

Pro průsečík  $I$  kombinací (2.1) a (2.9) dostáváme:

$$-\frac{x_{e0}}{y_{e0}} \cdot x + \frac{x_{e0}^2 + y_{e0}^2}{2 \cdot y_{e0}} = \frac{y_{e0}}{x_{e0}} \cdot x - \frac{y_{e0}}{x_{e0}} \cdot x_{t0}.$$

Vyřešením této rovnice získáváme předpis pro  $x$ -ovou souřadnici polohy  $x_0$  průsečíku  $I$ :

$$x = \frac{x_{e0}}{2} + \frac{y_{e0}^2}{x_{e0}^2 + y_{e0}^2} \cdot x_{t0}. \quad (2.10)$$

Zpětným dosazením do jedné z přímek získáme předpis pro  $y$ -ovou souřadnici průsečíku:

$$y = \frac{y_{e0}}{x_{e0}} \cdot \left( \frac{x_{e0}}{2} + \frac{y_{e0}^2}{x_{e0}^2 + y_{e0}^2} \cdot x_{t0} \right) - \frac{y_{e0}}{x_{e0}} \cdot x_{t0}. \quad (2.11)$$

Tím jsme získali souřadnice bodu  $I$ . Dalším zajímavým aspektem, z něhož můžeme odvodit určité charakteristiky problému, je velikost vzdálenosti  $d$  mezi cílem  $T$  a průsečíkem  $I$ . Velikost úsečky  $IT$  získáme jako velikost vektoru daný těmito body. Druhá mocnina velikosti této úsečky je dána výrazem  $(x - x_{t0})^2 + (y)^2$ . Po rozepsání dostáváme následující

$$d^2 = \left( \frac{x_{e0}}{2} + \frac{y_{e0}^2}{x_{e0}^2 + y_{e0}^2} \cdot x_{t0} - x_{t0} \right)^2 + \left( \frac{y_{e0}}{x_{e0}} \cdot \left( \frac{x_{e0}}{2} + \frac{y_{e0}^2}{x_{e0}^2 + y_{e0}^2} \cdot x_{t0} \right) - \frac{y_{e0}}{x_{e0}} \cdot x_{t0} \right)^2. \quad (2.12)$$

Umocněním závorek, převedením na stejného jmenovatele a následnou úpravou získáváme

$$d^2 = \frac{[x_{e0} \cdot (x_{e0}^2 + y_{e0}^2) - 2 \cdot x_{t0} \cdot x_{e0}^2]^2}{4 \cdot x_{e0}^2 \cdot (x_{e0}^2 + y_{e0}^2)}.$$

Odmocněním vztahu dostáváme velikost úsečky  $IT$  ve tvaru

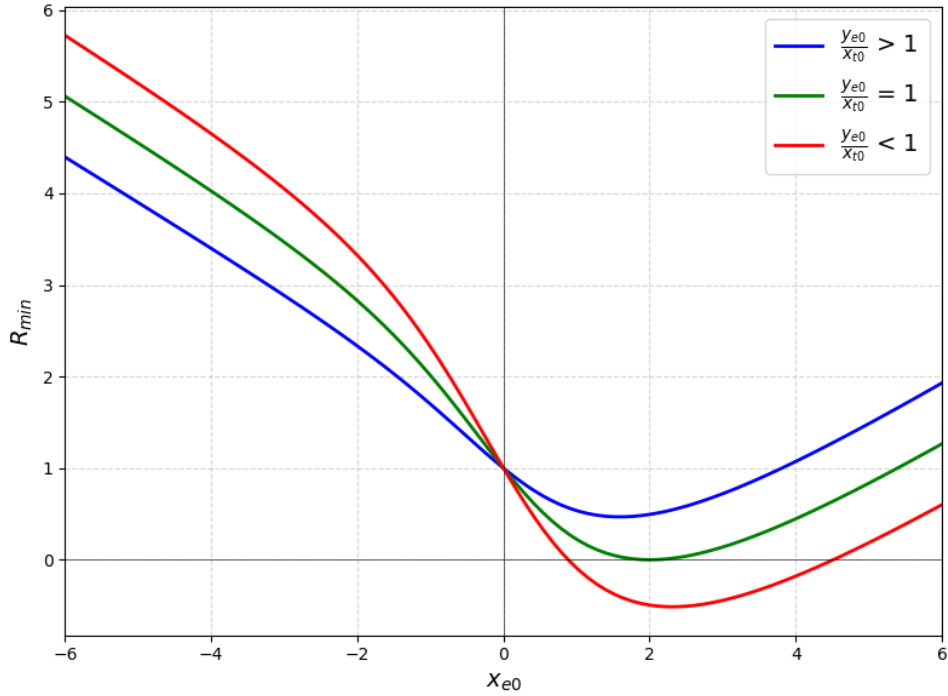
$$d = \frac{x_{e0} \cdot (x_{e0}^2 + y_{e0}^2) - 2 \cdot x_{t0} \cdot x_{e0}^2}{2 \cdot x_{e0} \cdot \sqrt{x_{e0}^2 + y_{e0}^2}}. \quad (2.13)$$

Tím jsme získali vztah pro  $d$ . V kontextu celého problému je pro nás velikost  $d$  klíčovou informací, jelikož díky ní můžeme určit minimální parametry hry tak, aby zvítězil buď útočník nebo obránce. Pokud zvolíme vzdálenost  $R$ , na kterou se musí útočník  $E$  dostat aby zvítězil, tak, že platí  $R > d$ , zvítězí útočník. Naopak pokud bychom zvolili opačnou nerovnost  $R < d$ , zvítězí obránce.

Na obrázku 12 je zobrazena závislost minimální velikosti  $R$  ( $R_{min}$ ) na  $x$ -ové poloze útočníka pro pevně dané  $y_{e0}$  a  $x_{t0}$ , a to ve třech variantách, aby situace odpovídala obrázku 11. Vidíme, že budeme-li přibližovat útočníka z levé části osy  $x$ , potřebná vzdálenost  $R$  se bude zmenšovat. V určitém okamžiku se může křivka dostat pod osu  $x$ . Toto chování závisí na poměru  $\frac{y_{e0}}{x_{t0}}$ . Pokud platí, že  $\frac{y_{e0}}{x_{t0}} > 1$ , křivka se pod nulu nedostane. Pokud zvolíme rovnost, existuje jeden nulový bod a pokud nastane nerovnost menší než jedna, pak se ocitne křivka i pod osou  $x$ .

Část červené křivky, která nabývá záporných hodnot  $R_{min}$  znamená v praxi automatickou výhru útočníka, jelikož v tomto případě je k němu cíl  $T$  blíže. Zelená křivka nabývá pro jednu hodnotu  $x_{e0}$  nulovou vzdálenost  $R_{min}$ . Cíl  $T$  v tomto případě leží přímo na přímce (2.1). V takovém případě by nešlo rozhodnout, kdo je vítězem ("remíza"). Nerovnost  $\frac{y_{e0}}{x_{t0}} \leq 1$  tedy nemá smysl uvažovat.





Obrázek 12: Minimální hodnota  $R_{min}$  pro danou hodnotu  $x_{e0}$

Pro další vizualizaci a orientaci v úloze upravme ještě vyraz (2.13). Vydělme jej složkou  $x_{t0}$

$$\frac{R}{x_{t0}} < \frac{\frac{x_{e0}}{x_{t0}} \cdot (x_{e0}^2 + y_{e0}^2) - 2 \cdot x_{e0}^2}{2 \cdot x_{e0} \cdot \sqrt{x_{e0}^2 + y_{e0}^2}}.$$

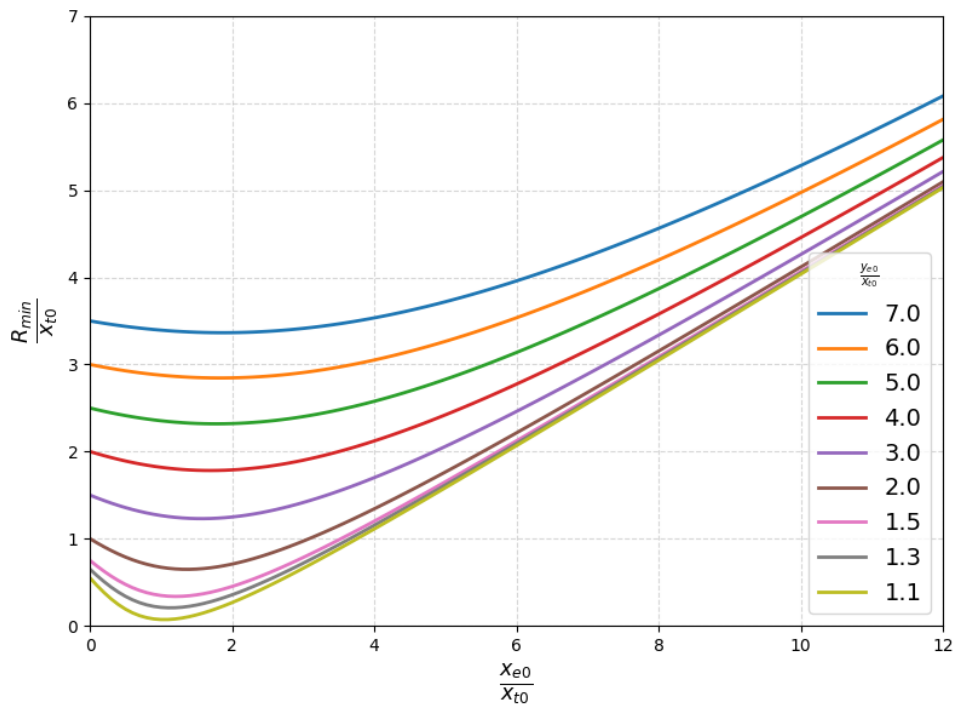
Další úpravou získáme nerovnost

$$\frac{R}{x_{t0}} < \frac{(x_{e0}^2 + y_{e0}^2)^2 / x_{t0} - 2 \cdot x_{e0}}{2 \cdot x_{t0} \cdot \sqrt{(x_{e0}^2 + y_{e0}^2) / x_{t0}^2}},$$

kterou finálně můžeme přepsat na

$$\frac{R}{x_{t0}} < \frac{\left(\frac{x_{e0}}{x_{t0}}\right)^2 + \left(\frac{y_{e0}}{x_{t0}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x_{e0}}{x_{t0}}}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{x_{e0}}{x_{t0}}\right)^2 + \left(\frac{y_{e0}}{x_{t0}}\right)^2}}. \quad (2.14)$$

Z tohoto vztahu není na první pohled příliš zřejmé, jaký má význam. Jeho vizualizace je ale zajímavější. Na obrázku 13 vidíme několik křivek, které vyjadřují závislost poměru  $\frac{R_{min}}{x_{t0}}$  na poměru  $\frac{x_{e0}}{x_{t0}}$  pro dané hodnoty poměru  $\frac{y_{e0}}{x_{t0}}$ .



Obrázek 13: Minimální hodnota  $\frac{R_{min}}{x_{t0}}$  pro danou hodnotu  $\frac{x_{e0}}{x_{t0}}$

Můžeme dospět k podobným závěrům jako u obrázku 12. Uvažujeme pouze poměry  $\frac{y_{e0}}{x_{t0}} > 1$ . Vidíme, že zprvu při rostoucím poměru  $\frac{x_{e0}}{x_{t0}}$  klesá relativní potřebná vzdálenost  $R$ , ale posléze se všechny křivky ustálí, stanou se téměř lineárně rostoucími. Tyto poznatky odpovídají geometrii na obrázku 11.

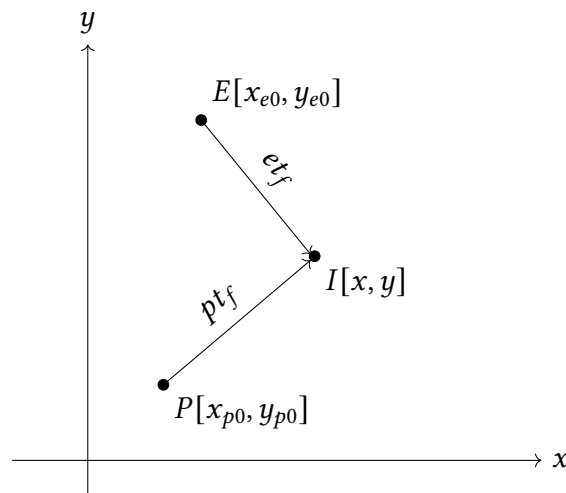
### 3 Isaacsova úloha s různými rychlostmi

#### 3.1 Formulace a rozbor úlohy

Rufus Isaacs představil problém střežení cíle před hráči se stejnými rychlostmi, který jsme analyzovali v předchozí kapitole. Zde jsme identifikovali proces řešení pomocí přímky, která rozděluje rovinu na dvě části a na níž může dojít k ukončení hry. Nicméně při uvažování různých rychlostí obou hráčů se tyto principy řešení mění. Tato kapitola čerpá z [3].

Uvažujme situaci na americko-mexických hranicích jako praktickou ilustraci tohoto problému. Zde se mexičtí imigranti, představující útočníky, snaží nelegálně překročit hranice do Spojených států, zatímco hraniční policie, reprezentující obránce, se snaží imigranty zastavit a zadržet. Cílem imigrantů může být nalezení díry v plotě nebo jiného vhodného místa pro nelegální překročení hranic. Hraniční policie disponuje terénními auty (nebo hypoteticky v budoucnosti autonomními vozidly) a je rychlejší než imigranti, kteří se musí spoléhat pouze na svou fyzickou sílu a pohyblivost.

Jak se tedy změní úloha, budeme-li uvažovat různé rychlosti? Stále budeme považovat cíl  $T$  a hráče  $E$  i  $P$  za body. Označme rychlost útočníka jako  $e$  a rychlost obránce jako  $p$ . Jejich poměr  $e : p \neq 1$ . Dále je vhodné pro další úvahy zavést veličinu  $t_f$  jako čas, za který dojde k ukončení hry. To nám umožní definovat dráhu, kterou hráči urazí během hry, jako  $et_f$  resp.  $pt_f$ .



Obrázek 14: Geometrie úlohy,  $E$  útočící a  $P$  bránící bod  $T$ , trajektorie obránce  $pt_f$ , trajektorie útočníka  $et_f$

Z Pythagorovy věty můžeme odvodit druhé mocniny velikostí uražených drah:

$$(x - x_{e0})^2 + (y - y_{e0})^2 = (e \cdot t_f)^2, \quad (3.1)$$

$$(x - x_{p0})^2 + (y - y_{p0})^2 = (p \cdot t_f)^2. \quad (3.2)$$

Vzájemným vydělením rovnic (3.1) a (3.2), jednoduchými úpravami a zavedením substituce  $x_c = \frac{x_{e0} \cdot p^2 - x_{p0} \cdot e^2}{p^2 - e^2}$ ,  $y_c = \frac{y_{e0} \cdot p^2 - y_{p0} \cdot e^2}{p^2 - e^2}$  získáváme

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot x_c + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_c + \frac{p^2 \cdot (x_{e0}^2 + y_{e0}^2) - e^2 \cdot ((x_{p0})^2 + y_{p0}^2)}{p^2 - e^2} = 0.$$

Tuto rovnici lze úpravou na čtverec a vhodnou substitucí přepsat do tvaru rovnice kružnice

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2, \quad (3.3)$$

kde

$$R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 - \frac{p^2 \cdot (x_{e0}^2 + y_{e0}^2) - e^2 \cdot ((x_{p0})^2 + y_{p0}^2)}{p^2 - e^2}}.$$

Rovnice (3.3), která představuje rovnici kružnici s poloměrem  $R$  a středem  $C[x_c, y_c]$ , je dána průnikem trajektorií útočnicka a obránce. Tato kružnice reprezentuje množinu bodů, na které může dojít k ukončení hry (tzv. kružnice střetnutí).

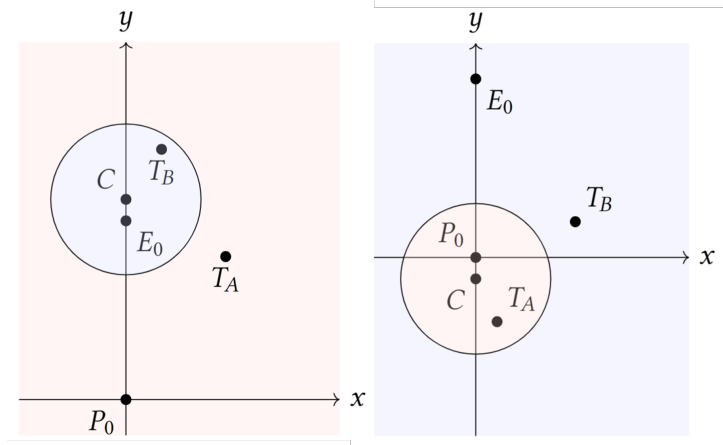
Nyní se zaměříme na další informace o středu  $C$  této kružnice. Směrnice, kterou svírá přímka spojující body  $C$  a  $E_0$  (počáteční pozice útočnicka) s osou  $x$ , je dána následovně:

$$\frac{y_c - y_{e0}}{x_c - x_{e0}} = \frac{\frac{y_{e0} \cdot p^2 - y_{p0} \cdot e^2}{p^2 - e^2} - y_{e0}}{\frac{x_{e0} \cdot p^2 - x_{p0} \cdot e^2}{p^2 - e^2} - x_{e0}} = \frac{y_{e0} - y_{p0}}{x_{e0} - x_{p0}},$$

kde poslední výraz reprezentuje směrnici přímky  $EP$ . To nám poskytuje důležitou informaci o poloze středu  $C$ , neboť leží přesně na této přímce  $EP$  a zároveň se nemůže nacházet na úsečce mezi body  $E$  a  $P$ .

Pro lepší vizualizaci můžeme bez ztráty obecnosti zafixovat polohu obránce  $P$  v počátku souřadného systému, označeném  $P_0$ , a útočnicka  $E$  na ose  $y$ , označené  $E_0$ . Střed  $C$  se pak bude nacházet na ose  $y$ , přičemž jeho poloha závisí na velikostech rychlostí  $e$  a  $p$ . Jelikož platí, že  $x_c = 0$  (viz obrázek 15), jedinou proměnnou je  $y$ -ová souřadnice středu, která je dána vztahem (připomeňme, že  $y_{p0} = 0$ )

$$y_c = \frac{y_{e0} \cdot p^2 - y_{p0} \cdot e^2}{p^2 - e^2} = \frac{p^2}{p^2 - e^2} \cdot y_{e0}. \quad (3.4)$$



Obrázek 15: Geometrie úlohy, počáteční souřadnice útočnicka  $E_0 = E[0, y_{e0}]$  a obránce  $P_0 = P[0, 0]$ , možné lokality cíle  $T_A$  a  $T_B$ , střed kružnice střetnutí  $C$ . Vlevo případ  $p > e$  a vlevo případ  $p < e$

Pokud zvolíme  $p > e$ , nastane situace vlevo na obrázku 15. Je patrné, že  $y$ -ová souřadnice středu  $C$  je v tomto případě kladným násobkem  $y$ -ové souřadnice útočnicka, a tedy se nachází nad ní. Naopak, pokud zvolíme  $p < e$  nastane situace vpravo, kde střed kružnice bude umístěn ve spodní části obrázku. Vizualizace obsahují červenou a modrou oblast, kde body  $T_A$  a  $T_B$

označují možné lokace cíle  $T$ . Jestliže se  $T$  nachází v pozici  $T_A$  v červené zóně, výhodu získává útočník. Naopak při souřadnicích cíle v modré zóně je ve výhodě obránce.

Nyní ověříme, zda tato variace úlohy souhlasí s řešením v druhé kapitole, kdy  $e : p = 1$ . Tam jsme pracovali s bodem  $P$  v počátku a obecně umístěným bodem  $E$ . Vydělme nyní znovu rovnice (3.1) a (3.2) a dosadíme za bod  $P$  počátek. Dostáváme

$$\frac{(x - x_{e0})^2 + (y - y_{e0})^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Odstraněním zlomku a roznásobením závorek získáváme rovnici

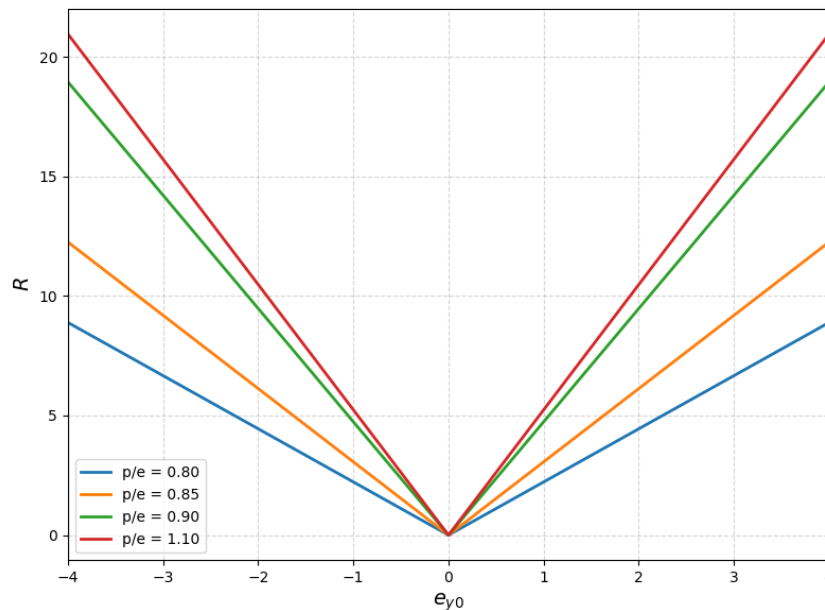
$$x^2 - 2x_{e0}x + x_{e0}^2 + y^2 - 2y_{e0}y + y_{e0}^2 = x^2 + y^2,$$

z čehož snadno vyjádříme

$$y = \frac{x_{e0}^2 + y_{e0}^2 - 2x_{e0}x}{2y_{e0}} = -\frac{x_{e0}}{y_{e0}}x + \frac{(x_{e0}^2 + y_{e0}^2)}{2y_{e0}},$$

což souhlasí s poznatkou (přesněji s rovnicí (2.1)) v druhé kapitole.

Na obrázku 16 si můžeme prohlédnout, jak  $y$ -ová souřadnice závisí na poloměru kružnice pro různé hodnoty poměru rychlostí. Můžeme konstatovat, že když se poměr rychlostí blíží k jedné, poroste poloměr do nekonečna a vzniká tak přímka.



Obrázek 16: Závislost poloměru kružnice  $R$  na  $y$ -ové souřadnici útočníka  $y_{e0}$  pro různé hodnoty poměru rychlostí

## 3.2 Modifikace úlohy

V této pasáži se budeme zabývat modifikací úlohy tak, že ukončovací podmínka nastane, když se obránce  $P$  dostane na určitou vzdálenost  $d$  od útočníka  $E$  (původně jsme uvažovali za ukončovací podmínku samotné střetnutí hráčů). V praxi by se mohlo jednat o situaci na základní škole. Útočníkem budeme uvažovat žáka, který chce vyvést nějakou nekalost (například pokreslit tabuli), a obránce je paní učitelka, která se snaží dostat na určitou vzdálenost  $d$  od žáka, aby ho svým neúprosným pohledem uklidnila.

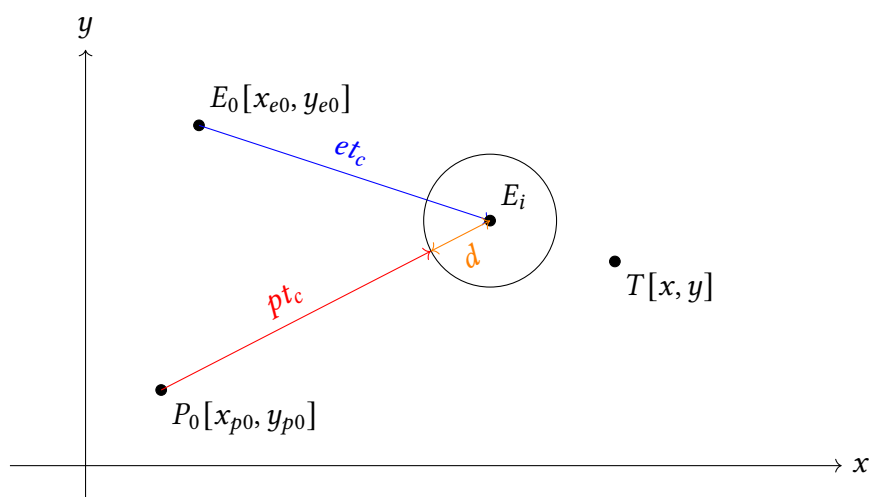
Rovnice (3.1) a (3.2) se tak rozšíří o další rovnici, která zohledňuje fakt, že rozdíl pozic v obecném čase  $t_c$  obránce  $P_i[x_{pi}, y_{pi}]$  a útočníka  $E_i[x_{ei}, y_{ei}]$  je  $d$ . Platí tedy následující rovnice:

$$(x_{ei} - x_{e0})^2 + (y_{ei} - y_{e0})^2 = (e \cdot t_c)^2, \quad (3.5)$$

$$(x_{pi} - x_{p0})^2 + (y_{pi} - y_{p0})^2 = (p \cdot t_c)^2, \quad (3.6)$$

$$(x_{pi} - x_{ei})^2 + (y_{pi} - y_{ei})^2 = (d)^2. \quad (3.7)$$

Poslední rovnice nám udává množinu možných míst, kde se obránce může nacházet. Pro naše uvažování budeme předpokládat, že to je trasa taková, kdy obránce směřuje přímo do bodu  $E_i$ , jak je zobrazeno na obrázku 17 červenou barvou (mohl by mířit i tečně ke kružnici, tento případ ovšem zřejmě není výhodný).



Obrázek 17: Geometrie úlohy,  $E$  útočící a  $P$  bránící bod  $T$ ,  $d$  vzdálenost potřebná pro obránce, aby zachytil útočníka, červená resp. modrá přímka - uražená trajektorie obránce resp. útočníka za čas  $t_c$

Z geometrie úlohy zobrazené výše vyplývá ještě jedna dodatečná podmínka, kterou popisuje rovnice

$$(x_{ei} - x_{p0})^2 + (y_{ei} - y_{p0})^2 = (d + pt_c)^2, \quad (3.8)$$

kterou využijeme později v textu.

Dále, abychom odvodili další aspekty úlohy, bez újmy na obecnosti transformujeme souřadnicový systém následujícím způsobem:

- Obránce opět umístíme do počátku, tj.  $P_0[x_{p0}, y_{p0}] \rightarrow P_0[0, 0]$
- Útočník se bude nacházet na ose  $y$ , tj.  $E_0[x_{e0}, y_{e0}] \rightarrow E_0[0, y_{e0}]$
- Označení souřadnic hráčů v prostoru zůstávají bez změny, tj.  $E_i[x_{ei}, y_{ei}]$ ,  $P_i[x_{pi}, y_{pi}]$

Rovnice (3.5) až (3.8) se tak redukují na tvar

$$x_{ei}^2 + (y_{ei} - y_{e0})^2 = (et_c)^2, \quad (3.9)$$

$$x_{pi}^2 + y_{pi}^2 = (pt_c)^2, \quad (3.10)$$

$$(x_{pi} - x_{ei})^2 + (y_{pi} - y_{ei})^2 = d^2, \quad (3.11)$$

$$x_{ei}^2 + y_{ei}^2 = (d + pt_c)^2. \quad (3.12)$$

V následujících krocích se pokusíme zjistit více o poloze obránce  $P_i$ . Pokusíme se vyjádřit polohu útočnicka  $E_i$  v závislosti na známých datech a souřadnicích obránce a následně je využijeme v další práci. Analýza pozic  $E_i$  i  $P_i$  je stěžejní pro další rozbor problému a odvození obránčovy výhodné strategie. Rozdílem (3.12) od (3.9) a jednoduchými úpravami získáme rovnici

$$-2y_{ei} \cdot y_{e0} + y_{e0}^2 = (et_c^2)^2 - (d + pt_c)^2.$$

Odkud dokážeme vyjádřit  $y$ -ovou souřadnici útočnicka v prostoru ve tvaru

$$y_{ei} = \frac{-(et_c^2)^2 + (d + pt_c)^2 + y_{e0}^2}{2y_{e0}}. \quad (3.13)$$

Dále díky informaci, že bod  $E_i$  leží na přímce dané body  $P_i$  a  $P_0$ , platí následující rovnost

$$\frac{y_{ei}}{x_{ei}} = \frac{y_{pi}}{x_{pi}}.$$

Toho využijeme v kombinaci s (3.13), abychom vyjádřili  $x$ -ovou souřadnici útočnicka:

$$x_{ei} = \frac{y_{ei}}{y_{pi}} \cdot x_{pi} = \frac{x_{pi}}{y_{pi}} \cdot \frac{-(et_c^2)^2 + (d + pt_c)^2 + y_{e0}^2}{2y_{e0}}. \quad (3.14)$$

Substitucí vztahů (3.13) a (3.14) do rovnice (3.11) dostaneme rovnici

$$\left( x_{pi} - \frac{x_{pi}}{y_{pi}} \cdot \frac{-(et_c^2)^2 + (d + pt_c)^2 + y_{e0}^2}{2y_{e0}} \right)^2 + \left( y_{pi} - \frac{-(et_c^2)^2 + (d + pt_c)^2 + y_{e0}^2}{2y_{e0}} \right)^2 = d^2. \quad (3.15)$$

V tomto vztahu dále eliminujeme čas  $t_c$  jeho substitucí z rovnice (3.10). Získáme tak tuto rovnici

$$\left( x_{pi} - \frac{x_{pi}}{y_{pi}} \cdot \frac{-\frac{e^2}{p^2} (x_{pi}^2 + y_{pi}^2) + \left( d + \sqrt{x_{pi}^2 + y_{pi}^2} \right)^2 + y_{e0}^2}{2y_{e0}} \right)^2 + \left( y_{pi} - \frac{-\frac{e^2}{p^2} (x_{pi}^2 + y_{pi}^2) + \left( d + \sqrt{x_{pi}^2 + y_{pi}^2} \right)^2 + y_{e0}^2}{2y_{e0}} \right)^2 = d^2. \quad (3.16)$$

Všimněme si, že množina možných pozic obránce (rovnice (3.16)) je vyjádřena jako polynom dvanáctého stupně. Pokud bychom se omezili na případ stejných rychlostí, tj.  $p = e$ , redukoval by se výraz (3.16) na polynom osmého stupně.

Analyzujme nyní, jak by se vztah (3.16) změnil, pokud by byla vzdálenost  $d$  rovna nule. Zlomek, který je společný oběma závorkám v rovnici (3.16) upravme a označme ho jako  $A$ :

$$A = \frac{\left(1 - \frac{e^2}{p^2}\right) \cdot (x_{pi}^2 + y_{pi}^2) + y_{e0}^2}{2y_{e0}}.$$

Výraz (3.16) se tak transformuje na

$$\left(\frac{x_{pi}^2}{y_{pi}^2} + 1\right) \cdot (A - y_{pi}) = 0.$$

Odtud vyplývá rovnost

$$A - y_{pi} = 0.$$

Návratem k původní substituci za  $A$  získáme rovnici

$$\left(1 - \frac{e^2}{p^2}\right) \cdot (x_{pi}^2 + y_{pi}^2) + y_{e0}^2 - 2y_{pi}y_{e0} = 0,$$

kteřou upravíme jako

$$x_{pi}^2 + y_{pi}^2 - \frac{2y_{pi}y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}} + \frac{y_{e0}^2}{1 - \frac{e^2}{p^2}} = 0.$$

Odtud doplněním na čtverec získáme

$$x_{pi}^2 + \left(y_{pi} - \frac{y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}}\right)^2 = \left(\frac{e}{p} \cdot \frac{y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}}\right)^2. \quad (3.17)$$

Rovnice (3.17) představuje kružnici se středem  $C$  a poloměrem  $R$ , kde

$$C \left[0, \frac{y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}}\right] = C \left[0, \frac{p^2}{p^2 - e^2} \cdot y_{e0}\right],$$

$$R = \frac{e}{p} \cdot \frac{y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}} = \frac{e}{p} \cdot \frac{p^2}{p^2 - e^2} \cdot y_{e0}.$$

Všimněme si, že se jedná o kružnici (3.3), převedenou do souřadnicového systému, ve kterém platí:  $x_{p0} = 0$ ,  $y_{p0} = 0$  a  $x_{e0} = 0$  (obránce v počátku, útočník na ose  $y$ ).

Z této analýzy obránčovy pozice  $P_i$  můžeme konstatovat, že pokud uvažujeme za kritérium na ukončení hry srážku pozic hráčů, bude se redukovat polynom (3.16) na kružnici 3.17. Pokud by se dále rovnaly i rychlosti hráčů, získáme přímkou rozdělující rovinu na dvě oblasti, která byla popsána dříve (v kapitole 2). Poznatky získané v této části tedy v uvedených speciálních případech odpovídají dřívějším poznatkům.

Přecházející analýza může být přínosem pro hledání strategie pro oba hráče. Popis pozice hráčů je jednoduchý pouze v případě, kdy bychom mohli zanedbat vzdálenost  $d$  ve vztahu (3.15) (tedy  $d + pt_c \approx pt_c$ ). V praxi to znamená, že pokud je vzdálenost nutná pro chyzení zanedbatelná vůči velikosti dráhy, kterou musí obránce  $P$  urazit, bude mnohem lehčí odvodit vhodnou strategii pro jakéhokoliv z hráčů. Naopak, pokud nelze vzdálenost  $d$  zanedbat, pak i v případě rovnosti rychlostí hráčů  $p = e$  se nejedná o jednoduchý případ přímkou rozdělující rovinu tak, jak bylo popsáno v druhé kapitole.

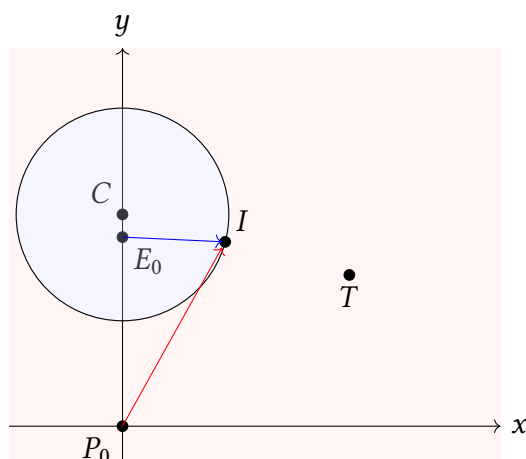


### 3.3 Analýza strategie obránce

V předchozí kapitole jsme získali potřebné informace o tom, kde se obránce může ocitát. A to pro oba případy, kdy uvažujeme jako ukončovací podmínku přímé protnutí trajektorií obou hráčů nebo podmínku dosažení určité vzdálenosti  $d$  obránцем od útočníka. S těmito znalostmi se nyní zaměříme na analýzu strategie obránce (při známé strategii útočníka) pro různé scénáře hry.

#### 3.3.1 Příklad rychlejšího obránce

V této části budeme uvažovat podmínku  $p > e$ , což znamená, že obránce je rychlejší než útočník, a tím získává zásadní výhodu. Na obrázku 15 vlevo si můžeme prohlédnout možné pozice cíle  $T$ , které určují další dynamiku hry. Podívejme se nyní blíže na situaci, kdy je cíl v pozici  $T_A$ . V takovém případě má obránce šanci cíl ubránit. Jednou z vhodných strategií pro obránce i útočníka je pohybovat se rovnoměrně přímočaře. Útočník míří na bod  $I[x_I, y_I]$ , který má nejmenší vzdálenost od cíle  $T$ , přičemž útočník je schopen tohoto bodu dosáhnout (viz situace na obrázku 2.1). V bodě  $I[x_I, y_I]$  je útočník zachycen. Dynamiku úlohy si můžeme prohlédnout na obrázku 18.



Obrázek 18: Geometrie úlohy,  $E$  útočící a  $P$  bránící bod  $T$ , počáteční polohy hráčů  $E_0, P_0$ , bod střetnutí  $I$ , střed kružnice zachycení  $C$

Najděme nyní předpis pro průsečík  $I$ . Nechť souřadnice cíle jsou  $T[x_t, y_t]$  a souřadnice středu kružnice, na které dojde k zachycení, jsou  $C[x_c, y_c]$ . Jelikož bod  $I$  leží na úsečce dané body  $CT$  (se směrnici  $k_{CT}$ ), platí následující vztah vyjadřující rovnost směrnic:

$$k_{CT} = \frac{y_c - y_t}{x_c - x_t} = \frac{y_I - y_t}{x_I - x_t}.$$

Odtud vyjádříme rovnici pro  $y_I$ :

$$y_I = y_t + k_{CT} \cdot (x_I - x_t). \quad (3.18)$$

Dále využijeme předpisu pro kružnici (3.3), na které dojde k střetnutí:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2.$$

Dosažením vyjádřeného  $y_I$  získáváme rovnici

$$(x_I - x_c)^2 + (y_t + k_{CT} \cdot (x_I - x_t) - y_c)^2 = R^2.$$

Jednoduchou úpravou dále dostáváme kvadratickou rovnici pro  $x_I$

$$(1 + k_{CT}^2) \cdot x_I^2 + 2 \cdot (k_{CT} \cdot n - x_C) \cdot x_I + x_C^2 + n^2 - R^2 = 0,$$

kde  $n = y_T - k_{CT} \cdot x_T - y_C$ .

Řešení této kvadratické rovnice je následující rovnost

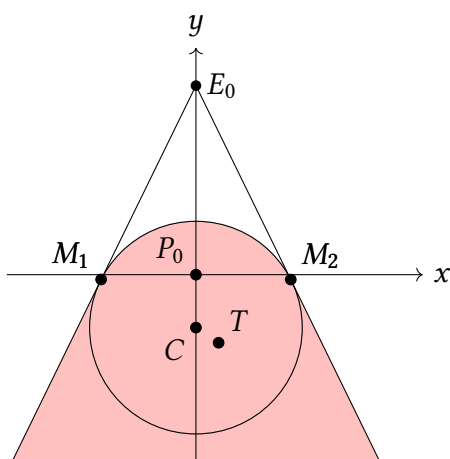
$$x_I = \frac{-(k_{CT} \cdot n - x_C) \pm \sqrt{(1 + k_{CT}^2) \cdot R^2 - (k_{CT} \cdot x_C + n)^2}}{1 + k_{CT}^2}.$$

Z tohoto vztahu volíme to znaménko, které povede k nalezení nejbližšího bodu  $I$  k cíli  $T$ .

Na závěr konstatujeme, že pro případ pomalejšího útočníka je jedna z vhodných strategií pro obránce (při znalosti strategie protivníka) pohybovat se přímočarým rovnoměrným pohybem k bodu střetnutí  $I$  (jehož souřadnice byly specifikovány výše). Jedná se o variaci případu, který jsme analyzovali v kapitole 2.2.1 se stejnými rychlostmi. Zde jsme zjistili, že úhel, pod kterým by měl obránce vyrazit, je jediný. Toto tvrzení platí i zde a my bychom tak mohli využít podobné metody pro hlubší analýzu. Hlavním rozdílem oproti případu s stejnými rychlostmi je obránčova rychlostí výhoda. Pokud bychom uvažovali, že se obránce vydá po nevýhodné trajektorii a zároveň může svoje chování během průběhu hry měnit, bude mít obránce oproti případu stejných rychlostí hráčů mnohem větší manévrovací prostor svoji chybu napravit a útočníka dostihnout.

### 3.3.2 Případ rychlejšího útočníka

V této části uvažujeme  $p < e$ . Útočník je rychlejší a disponuje výhodou. Obrázek 15 vizualizuje tuto situaci. Analogicky k předcházející části můžeme umístit cíl buď do pozice uvnitř příslušného kruhu, nebo mimo něj. Pokud by se cíl  $T$  ocitl mimo kruh, vyhrává útočník. Naopak pokud bude uvnitř kruhu, můžeme diskutovat o vhodné trase pro obránce, aby ubránil cíl  $T$ . Pro ilustraci problému je situace vizualizována na obrázku 19.



Obrázek 19: Geometrie úlohy,  $E[0, y_{e0}]$  útočící a  $P[0, 0]$  bránící bod  $T[x_T, y_T]$ , body dotyku tečen z bodu  $E_0$  na kružnici střetnutí  $M_1, M_2$ , střed kružnice střetnutí  $C$

Na tomto obrázku můžeme pozorovat červenou oblast, kterou je množina bodů, kde útočník riskuje polapení. Útočník může být polapen nejdříve na oblouku daném body  $M_1$  a  $M_2$ , které představují body dotyku tečen na kružnici střetnutí. Tento fakt je dán tím, že při útočnickově snaze přiblížit se k cíli  $T$  má obránce velký manévrovací prostor. Nalezneme nyní vztah bodu

$M_1[x_{m1}, y_{m1}]$  ke známým parametrům úlohy. Tečna prochází bodem  $M_1$ , proto platí následující vztah

$$y - y_{e0} = k_t \cdot x,$$

kde  $k_t$  je směrnice tečny. Bod  $M_1$  leží na kružnici polapení (3.3), proto platí rovnice

$$x_{m1}^2 + (y_{m1} - y_c)^2 = R^2.$$

Kombinací výše uvedených rovnic získáme rovnici

$$x_{m1}^2 + (y_{e0} + k_t \cdot x - y_c)^2 = R^2,$$

kteřou upravíme do tvaru kvadratické rovnice

$$(1 + k_t^2) \cdot x_{m1}^2 + 2 \cdot k_t \cdot (y_{e0} - y_c) \cdot x_{m1} + (y_{e0} - y_c)^2 - R^2 = 0.$$

Z tohoto tvaru můžeme určit rovnici pro směrnici tečny  $k_t$  díky znalosti pro vyjádření diskriminantu, který položíme rovno nule (tečna má pouze jediný dotyk s kružnicí):

$$4 \cdot k_t^2 \cdot (y_{e0} - y_c)^2 - 4 \cdot (1 + k_t^2) \cdot ((y_{e0} - y_c)^2 - R^2) = 0,$$

$$k_t^2 \cdot R^2 + (y_{e0} - y_c)^2 - R^2 = 0.$$

Odtud plyne vztah pro směrnici tečny  $k_t$  ve tvaru

$$k_t = \pm \sqrt{\frac{(y_{e0} - y_c)^2 - R^2}{R^2}} = \pm \sqrt{\left(\frac{y_{e0} - y_c}{R}\right)^2 - 1}. \quad (3.19)$$

Vztah (3.19) dále upravíme díky vyjádření  $y$ -ové středové souřadnice a vyjádření velikosti poloměru z rovnice (3.17):

$$y_c = \frac{y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}},$$

$$R = \frac{e}{p} \cdot \frac{y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}}.$$

Dosazením do vztahu (3.19) dostáváme následující vyjádření směrnice tečny:

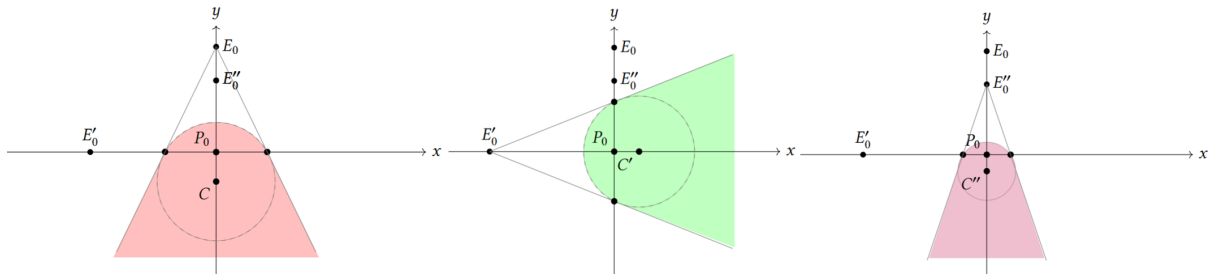
$$k_t = \pm \sqrt{\left(\frac{y_{e0} - \frac{y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}}}{\frac{e}{p} \cdot \frac{y_{e0}}{1 - \frac{e^2}{p^2}}}\right)^2 - 1} = \pm \sqrt{\left(\frac{p \cdot (1 - \frac{e^2}{p^2}) - p}{e}\right)^2 - 1} = \pm \sqrt{\frac{e^2}{p^2} - 1}.$$

Tím jsme získali předpis pro směrnici tečny, který je nezávislý na počátečních souřadnicích hráčů. Tento výsledek znamená, že poloměr kružnice, na které dojde k střetnutí, se mění tak, že výše zmíněné tečny procházející bodem  $E_0$  mají konstantní úhel s přímkou danou body  $E_0P_0$ . Body  $M_1$  a  $M_2$  můžeme nalézt jakožto průsečík přímkou (3.18) a přímkou na ni kolmé procházející středem  $C$ . Tuto přímkou můžeme zapsat ve tvaru

$$y - y_c = -\frac{1}{k_t} \cdot x.$$

Průsečíky přímkou  $M_1$  a  $M_2$  pak lze vyjádřit jako  $\left[\frac{k_t}{1 - \frac{e^2}{p^2}} \cdot y_{e0}, 0\right]$ . Vhodnou volbou znaménka  $k_t$  pak lze vyjádřit konkrétní tečný bod. Pro oba body  $M_1$  a  $M_2$  platí, že leží na přímce kolmé na spojnici bodů  $EP$ , jak můžeme pozorovat na obrázku 19. Protože směrnice  $k_t$  je nezávislá na polohách hráčů, spojnice tečných bodů bude vždy kolmá na přímkou  $E_0P_0$  a bude procházet bodem  $P_0$ .

Proveďme nyní analýzu obráncovy strategie s novými poznatky. Pro lepší analýzu zafixujme obránce do pozice  $P_0$ . Dále uvažujme různé pozice útočníka tak, jak je vizualizováno na obrázku 20.



Obrázek 20: Geometrie úlohy, počáteční souřadnice útočníka  $E_0 = E[0, y_{e0}]$  a obránce  $P_0 = P[0, 0]$ , možné lokality cíle  $T_A$  a  $T_B$ , střed kružnice  $C$ , kružnice, na nichž dojde k střetnutí. Vlevo případ  $p > e$  a vlevo případ  $p < e$ .

Vybarvené oblasti na obrázku 20 značí oblast, kam se útočník dostane s pouze s riskem polapení. Pokud by se útočník  $E$  nacházel v pozici  $E_0$ , v obrázku nalevo, je množina bodů kam se nemůže dostat vyznačena červeně. Situace se mění, pokud by se dokázal přesunout do bodu  $E'_0$ . Zde je oblast vybarvena zeleně, mírně se zmenšila a odkryla body, které doposud byly zakryty červeně. Když se útočník přibližuje k obránci, množina zakrytých bodů se zmenšuje. Proto, když by se útočník nacházel v pozici  $E''_0$  (na obrázku 20 úplně vpravo), bude nedostupná oblast nejmenší. Můžeme nyní konstatovat, že útočník se může dostat do jakéhokoliv bodu na rovině tím, že se bude vhodně otáčet a pohybovat kolem (prozatím) zafixovaného obránce  $P$ . Tento fakt je dán tím, že útočník je rychlejší než obránce.

Aby mohl obránce zachránit cíl  $T$ , nemůže zvolit taktiku, kterou jsme uvažovali v minulých kapitolách, protože by riskoval, že útočník díky své rychlostní výhodě vymanévruje takovou pozici, že snadno dosáhne cíle a zničí ho. Proto možnou výhodnou taktikou pro obránce bude namísto pronásledování útočníka zvolení primárně směřování cíli a zde vyčkávání na útočníka, aby ho mohl zachytit. Jakékoliv jiné chování by mohlo vyústit v obráncovu prohru a zničení cíle.

Propojme tyto závěry s praktickým příkladem z úvodu kapitoly 3.2. Zde je popsán duel paní učitelky, která představuje pomalejšího obránce, a žáka, který je rychlejší. Pro paní učitelku není vhodnou taktikou vyrazit přímo za žákem, ale spíše dorazit k místu, kde žák hodlá vykonat nekalost, a vyčkat zde na něj. Žák by mohl využít své rychlosti a dostat se do takové pozice, že paní učitelka nekalosti nezabrání.

## 4 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo formulovat a analyzovat problematiku střežení cíle, a to včetně grafické a numerické podpory. Dále bylo cílem nalézt a popsat vhodnou strategii, podle které by se mohli hráči chovat.

V první kapitole jsme formulovali úlohu se stejně rychlými hráči, jak ji poprvé popsal Rufus Isaacs. Následně jsme analyzovali základní aspekty problému. Dále jsme v této kapitole hledali jakou trasu by mohl obránce zvolit, za předpokladu, že útočník se pohybuje přímo na cíl rovnoměrným přímočarým pohybem. Jako první jsme analyzovali strategii, která by se dala označit jako intuitivní, a to případ, kdy se obránce pohybuje po přímce. Nalezli jsme přesné vyjádření, pod jakým úhlem by se měl obránce vydat, aby zachytil útočníka a ubránil cíl. V druhém případě jsme se podívali blíže na variantu, kdyby se obránce pohyboval podle pravidel ryzího pronásledování. Klasická formulace problému ryzího pronásledování má aspekt kolmosti spojnice hráčů na směr pohybu obránce. V této práci toto pravidlo neuvažujeme a pracujeme s libovolnou pozicí pronásledovatele. Analyticky jsme prokázali, že obránce nemůže útočníka nikdy dostihnout, a tedy první strategie je mnohem výhodnější.

V druhé kapitole jsme se zaměřili na variantu úlohy o pronásledování, ve které jsou hráči různě rychlí. Formulovali jsme tento typ úlohy a analyzovali jsme pozice hráčů v různých situacích. Díky analytické a grafické podpoře jsme dokázali vytvořit vhodný aparát, který jsme využili k další analýze problému. Díky pochopení možných pozic hráčů a grafických vizualizacích popisujícím situaci jsme následně dokázali analyzovat oba případy možného rozdělení rychlostí. Nalezli jsme řešení, jak by se měl chovat obránce, jak pro případ, kdy je v nevýhodě, tak pro případ, kdy má výhodu větší rychlosti.

Závěrem můžeme konstatovat že problematika střežení cíle ještě v češtině zpracována nebyla, a tak tato práce může být prvotním impulzem k dalšímu zpracování tohoto zajímavého problému.

## Reference

- [1] ISAACS, Rufus, 1965. *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. John Wiley and Sons, Inc. ISBN 9780882751535.
- [2] NAHIN, Paul J., 2007. *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*. Princeton. New Jersey: Princeton University Press. ISBN 9780691125145.
- [3] VENKATESAN, Raghav Harini a SINHA, Nandan Kumar, 2014. *The Target Guarding Problem Revisited: Some Interesting Revelations*. IFAC Proceedings Volumes. Vol. 47, č. 3, s. 1556–1561. DOI 10.3182/20140824-6-ZA-1003.02297.