

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Spirální podobnost v planimetrii



Vypracoval: Tomáš Hrdlička

Bakalářské studium, prezenční, 3. ročník

Studijní program: B1701 Fyzika – učitelství fyziky a matematiky pro SŠ

Rok odevzdání: 2018

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Jaroslava Švrčka CSc., s použitím uvedené literatury.

V Olomouci 22. dubna 2018

.....  
Tomáš Hrdlička

## **Poděkování**

Tímto děkuji vedoucímu své bakalářské práce panu RNDr. Jaroslavu Švrčkovi, CSc., za velké množství času, úsilí a stylistických rad, které mi při konzultacích věnoval.

## Bibliografická identifikace

Autor	Tomáš Hrdlička
Název práce	Spirální podobnost v planimetrii
Typ práce	bakalářská
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Rok obhajoby práce	2018
Abstrakt	Bakalářská práce je zaměřena na studium a užití spirální podobnosti pro řešení planimetrických úloh. Práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola shrnuje základní shodná a podobná zobrazení v rovině a rovněž zkoumá vlastnosti složených zobrazení ze základních shodností a podobností. Druhá kapitola obsahuje definici spirální podobnosti, příslušné vlastnosti a matematická tvrzení vztahující se ke zkoumané problematice. Třetí kapitola uvádí 26 úloh pro praktickou aplikaci spirální podobnosti, z nichž je 10 řešených a 16 neřešených s uvedeným návodem k jejich řešení.
Klíčová slova	spirální podobnost, geometrické zobrazení, planimetrie
Počet stran	48
Počet příloh	0
Jazyk	český

## Bibliographical identification

Author	Tomáš Hrdlička
Title	Spiral similarity in plane geometry
Type of thesis	bachelor
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
The year of presentation	2018
Abstract	The bachelor's thesis is focused on the study and use of spiral similarity for solving problems in plane geometry. The thesis is divided into three chapters. The first chapter summarizes the basic congruences and similarities in the plane and also examines the properties of the compositions from basic congruences and similarities. The second chapter contains a definition of spiral similarity, relevant properties and mathematical theorems related to the subject under discussion. The third chapter presents 26 problems for the practical application of spiral similarity, of which 10 are solved and 16 are unsolved with instructions for solving them.
Keywords	spiral similarity, projection, plane geometry
Number of pages	48
Numer of appendices	0
Language	czech

# Obsah

Úvod	6
Základní použitá označení	7
<b>1 Geometrická zobrazení v rovině</b>	<b>8</b>
1.1 Shodná zobrazení v rovině . . . . .	8
1.1.1 Shodnosti přímé . . . . .	11
1.1.2 Shodnosti nepřímé . . . . .	12
1.1.3 Skládání shodných zobrazení . . . . .	14
1.2 Podobná zobrazení v rovině . . . . .	17
1.2.1 Stejnolehlost . . . . .	19
1.2.2 Skládání podobných zobrazení . . . . .	20
1.2.3 Skládání shodných a podobných zobrazení . . . . .	21
<b>2 Spirální podobnost</b>	<b>24</b>
2.1 Základní vlastnosti spirální podobnosti . . . . .	24
2.2 Další vlastnosti spirální podobnosti . . . . .	26
2.3 Další geometrické poznatky . . . . .	30
<b>3 Aplikace spirální podobnosti</b>	<b>33</b>
3.1 Řešené úlohy . . . . .	33
3.2 Další neřešené úlohy . . . . .	40
Dodatky	44
Závěr	46
Zdroje	47

# Úvod

Tato bakalářská práce byla napsána s cílem sumarizovat a dále rozšířit poznatky o tzv. *spirální podobnosti*, geometrickém zobrazení v rovině, jež je složením stejnolehlosti a otočení. Jedná se o zobrazení, jež umožňuje efektivní řešení řady planimetrických úloh a dokazování souvisejících tvrzení.

Tento text shrnuje základní vlastnosti spirální podobnosti, uvádí množství dostupných poznatků a prezentuje její aplikace. Podstatnou část práce tvoří aplikace zaměřené na řešení praktických úloh. Dané téma je parciálně zmíněno v některých matematických publikacích, např. v [1] nebo [3], z webového prostředí pak např. v článcích *Cyclic Quadrilaterals – The Big Picture* [14] či *Three Lemmas in Geometry* [15]. Z českých matematických zdrojů lze nalézt základní přehled o zkoumané problematice např. v [11].

K využití této práce jsou nutnými predispozicemi znalosti středoškolské planimetrie a základy teorie skládání zobrazení. Text je dostatečně srozumitelný také pro nadané žáky středních škol se zájmem o tuto problematiku.

Práce je členěna do tří obsáhlejších kapitol, přičemž studium dané problematiky se zaměřuje výhradně na planimetrii. První kapitola se věnuje shodným a podobným zobrazením v rovině obecně, zejména pak jejich skládání. Teorii tato práce rozepisuje o další zjištění, jež pomohou lépe pochopit motivaci ke studiu spirální podobnosti. První část práce tak zároveň poslouží jako základní přehled poznatků o podobných a shodných zobrazeních v rovině.

Hlavní přínos práce představují druhá a třetí kapitola, přičemž druhá kapitola uvádí definici spirální podobnosti, prezentuje příslušné matematické věty, vlastnosti a důsledky. Studované téma podrobně doprovází obrazová podpora pro snazší pochopení textu. Třetí kapitola nabízí zajímavá řešení planimetrických úloh právě užitím spirální podobnosti včetně ukázky důkazů některých souvisejících tvrzení. V závěru je uvedena řada neřešených úloh spolu s návodem k jejich řešení. Zadání úloh jsou z větší části převzata z uvedených zdrojů.

# Použitá označení

$\mathbb{Z}, \mathbb{R}$	—	množina všech celých čísel, všech reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	—	množina všech kladných reálných čísel
$X = Y$	—	bod $X$ je totožný s bodem $Y$
$X \neq Y$	—	bod $X$ je různý od bodu $Y$
$X \in U$ ( $X \notin U$ )	—	bod $X$ je (není) prvkem množiny $U$
$X \rightarrow Y, U \rightarrow U'$	—	bod $X$ se zobrazí na $Y$ , útvar $U$ se zobrazí na $U'$
$f : X \rightarrow Y$	—	bod $X$ se zobrazí na bod $Y$ v zobrazení $f$
$f(X)$	—	obraz bodu $X$ v zobrazení $f$
$f^{-1}$	—	inverzní zobrazení k zobrazení $f$
$U \cong U', U \sim U'$	—	útvary $U, U'$ jsou shodné, útvary $U, U'$ jsou podobné
$XY$	—	přímka $XY$
$\overline{XY}$	—	úsečka s hraničními body $X$ a $Y$
$ XY $	—	délka úsečky $XY$
$d(X, o)$	—	vzdálenost bodu $X$ od přímky $o$
$o_1 \cap o_2$	—	průsečík přímek $o_1, o_2$
$o_1 \parallel o_2$ ( $o_1 \nparallel o_2$ )	—	přímka $o_1$ je (není) rovnoběžná s přímkou $o_2$
$o_1 \perp o_2$	—	přímka $o_1$ je kolmá na přímkou $o_2$
$\triangle XYZ$	—	trojúhelník $XYZ$
$k(S, r)$	—	kružnice $k$ se středem $S$ a poloměrem $r$
$f \circ g$	—	složené zobrazení ze zobrazení $f, g$ v tomto pořadí
$(f \circ g)(X), g(f(X))$	—	obraz bodu $X$ ve složeném zobrazení $f \circ g$
$\vec{u}, \overrightarrow{XY}$	—	vektor $\vec{u}$ , vektor $\overrightarrow{XY}$
$ \vec{u} ,  \overrightarrow{XY} $	—	velikost (délka) vektoru $\vec{u}$ , velikost (délka) vektoru $\overrightarrow{XY}$
$\sphericalangle XYZ$	—	konvexní úhel $XYZ$
$ \sphericalangle XYZ $	—	velikost konvexního úhlu $XYZ$
$\widehat{XYZ}$	—	orientovaný úhel $XYZ$ s prvním ramenem $YX$



# Kapitola 1

## Geometrická zobrazení v rovině

Ve školské geometrii se setkáváme především s geometrickými zobrazeními na rovině, v níž jsou definovány vzdálenosti bodů běžnou eukleidovskou metrikou (jedná se o tzv. eukleidovský prostor). Tato bakalářská práce rozšiřuje poznatky o těchto zobrazeních.

### Definice 1.0.1

Zobrazení  $f$ , které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje právě jeden bod  $X'$  téže roviny, nazýváme *geometrické zobrazení (v rovině)*. Bod  $X$  se nazývá *uzor*, bod  $X' = f(X)$  jeho *obraz*. Geometrický útvar (množina bodů)  $U'$  v rovině je obrazem útvaru  $U$  v téže rovině v zobrazení  $f$ , tvoří-li útvar  $U'$  množina právě všech obrazů bodů množiny  $U$ . Útvar  $U'$  pak značíme  $f(U)$ .

Geometrická zobrazení dělíme na zobrazení shodná, podobná, afinní, kruhová, projektivní či topologická. V této práci se zabýváme těmi zobrazeními, jež zachovávají tvary geometrických útvarů, tj. zobrazeními *shodnými* a *podobnými*. Úvodem zavedme pojem *samodružného* a *slabě samodružného* útvaru.

### Definice 1.0.2

Nechť  $U$  je rovinný útvar. Jestliže v geometrickém zobrazení  $f$  platí  $f(U) = U$ , nazveme  $U$  *samodružný útvar*. Útvar  $U$  se nazývá *slabě samodružný* v zobrazení  $f$ , platí-li  $f(X) \in U$  pro každý bod  $X \in U$  a zároveň existuje alespoň jeden bod  $Y \in U$  takový, že  $Y \neq f(Y)$ .

## 1.1 Shodná zobrazení v rovině

Shodná zobrazení v rovině patří mezi nejvýznamnější geometrická zobrazení. Definiují se pomocí vzdáleností bodů, přitom shodné zobrazení tyto vzdálenosti zachovává a opačně, jestliže jsou v zobrazení zachovány vzdálenosti všech dvojic bodů, jedná se o shodné zobrazení.

**Definice 1.1.1**

Zobrazení  $f$ , které každým dvěma různým bodům  $X, Y$  roviny přiřazuje body  $f(X) = X', f(Y) = Y'$  téže roviny tak, že  $|XY| = |X'Y'|$ , nazveme *shodné zobrazení* v rovině (též *shodnost*). Řekneme, že dva útvary  $U, U'$  téže roviny jsou *shodné*, existuje-li shodnost  $f : U \rightarrow U'$ . Píšeme pak  $U \cong U'$ .

Vzhledem k tomu, že v celé práci studujeme geometrická zobrazení v rovině, nebudeme za shodná zobrazení přívlastek „v rovině“ dále přepisovat. Jak již bylo řečeno, shodnost zachovává tvary geometrických (resp. planimetrických) útvarů, avšak z definice plynou další vlastnosti. Dále uvádíme souhrn některých základních vlastností shodností:

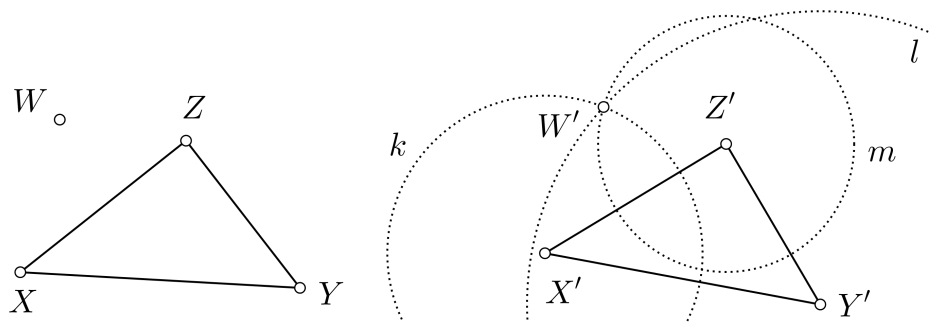
- jde o bijektivní zobrazení,
- obrazem úsečky je úsečka,
- obrazem (polo)přímky je (polo)přímka,
- obrazem (polo)kružnice je (polo)kružnice,
- zachovává rovnoběžnost přímek,
- zachovává vzdálenosti bodů,
- zachovává velikosti úhlů (úhly jsou shodné),
- zachovává dělicí poměr,
- zachovává incidenci (příslušnost k útvaru) bodů,
- zachovává velikosti obsahů omezených planimetrických útvarů.

Jsou-li dány v rovině dva shodné útvary, pak existuje shodné zobrazení, jež převádí jeden útvar na druhý (a opačně). Je-li vzor (a též obraz) bodem, úsečkou či přímkou, pak takové zobrazení *není* jediné. Je-li však vzor (a obraz) trojúhelníkem, je situace odlišná.

**Věta 1.1.1**

Nechť existuje shodné zobrazení  $f : \triangle XYZ \rightarrow \triangle X'Y'Z'$ .<sup>1</sup> Pak je zobrazení  $f$  jediné a přiřazuje jednoznačně každému bodu dané roviny právě jeden bod téže roviny. (Říkáme, že shodnost  $f$  je danými trojúhelníky určena jednoznačně.)

<sup>1</sup>Při zápisu zobrazování útvarů budeme s výhodou využívat zápis pořadí bodů jako zápis odpovídajících si dvojic. Tedy zde  $X \rightarrow X', Y \rightarrow Y'$  a  $Z \rightarrow Z'$ .



Obrázek 1.1: Jednoznačné zobrazení bodu

*Důkaz:* Necht'  $XYZ$ ,  $X'Y'Z'$  jsou trojúhelníky v rovině splňující předpoklady věty 1.1.1. Pro libovolný bod  $W$  téže roviny různý od  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  plyne z definice shodnosti, že  $f(W) = W'$  bude mít stejné vzdálenosti od vrcholů trojúhelníku  $X'Y'Z'$  jako  $W$  od vrcholů trojúhelníku  $XYZ$ , tedy kružnice  $k(X', |XW|)$ ,  $l(Y', |YW|)$ ,  $m(Z', |ZW|)$  se protnou v jediném bodě a to v  $W'$  (obr. 1.1).  $\square$

Těž mluvíme o určení shodnosti přes trojici nekolineárních<sup>2</sup> bodů a příslušných obrazů, přičemž musí být zachovány jejich vzájemné vzdálenosti. Dále platí, že složené zobrazení ze dvou shodností též zachovává vzdálenosti bodů. Podobně složením tří a více shodných zobrazení nedospějeme ke změně této vlastnosti.

### Věta 1.1.2

Necht'  $f$ ,  $g$  jsou dvě shodná zobrazení v rovině  $\rho$ . Složené zobrazení  $f \circ g$  takové, že pro každý bod  $X \in \rho$  platí  $(f \circ g)(X) = g(f(X))$ , je opět shodností (skládání shodností je tak uzavřená operace na množině všech shodností).

*Důkaz:* Necht'  $f$  a  $g$  jsou shodná zobrazení v rovině  $\rho$ . Pro libovolné body  $X, Y \in \rho$ , pro něž platí  $f(X) = X'$ ,  $f(Y) = Y'$  a  $g(X') = X''$ ,  $g(Y') = Y''$ , plyne přímo z definice shodnosti

$$|(f \circ g)(X)(f \circ g)(Y)| = |g(X')g(Y')| = |X''Y''|.$$

$\square$

Shodná zobrazení mohou buďto zachovávat orientaci při značení vrcholů trojúhelníku, nebo ji mohou měnit v opačnou. Dle toho rozlišujeme *shodnosti přímé* (zachovávají orientaci značení) a *shodnosti nepřímé* (mění orientaci v opačnou). Přímé shodnosti jsou:

- identita  $\mathcal{I}$ ,

<sup>2</sup>Neležící na jedné přímce.

- středová souměrnost  $\mathcal{S}$ ,
- posunutí (translace)  $\mathcal{T}$ ,
- otočení (rotace)  $\mathcal{R}$ .

Nepřímé shodnosti jsou:

- osová souměrnost  $\mathcal{O}$ ,
- posunuté zrcadlení  $\mathcal{P}$ .

*Poznámka 1.1:* Přímá shodná zobrazení zachovávají orientaci úhlů, nepřímá shodná mění orientaci úhlů v opačnou.

### 1.1.1 Shodnosti přímé

V této části zkompletujeme základní přímé shodnosti jejich definováním, též budou uvedeny některé jejich vlastnosti a vztahy vůči dalším přímým shodnostem.

**Definice 1.1.2** (identita)

Shodné zobrazení  $\mathcal{I}$  takové, že pro všechny body  $X$  roviny platí  $X = \mathcal{I}(X)$ , nazýváme *identita*. Říkáme, že dva útvary  $U, U'$  jsou *totožné* (*identické*), existuje-li identita  $\mathcal{I}(U) = U'$ . Píšeme pak  $U = U'$ .

*Poznámka 1.2:* Identita se také často značí *id*.

### Věta 1.1.3

Má-li shodnost alespoň tři nekolineární samodružné body, je identitou.

*Důkaz:* Tvrzení plyne z věty 1.1.1. □

**Definice 1.1.3** (středová souměrnost)

Nechť  $S$  a  $X$  jsou body roviny  $\rho$ . Shodné zobrazení  $\mathcal{C} : X \rightarrow X'$  takové, že pro každý bod  $X \in \rho$  je  $S$  středem úsečky  $XX'$ , nazýváme *středová souměrnost*. Značí se  $\mathcal{C}(S)$ , bod  $S$  se nazývá *střed středové souměrnosti*. Řekneme, že dva útvary  $U, U'$  jsou *středově souměrné*, existuje-li středová souměrnost  $\mathcal{C}(U) = U'$ .

*Základní vlastnosti:*

Jediným samodružným bodem středové souměrnosti je střed  $S$ . Všechny přímky procházející středem středové souměrnosti jsou slabě samodružné. Každá kružnice se středem  $S$  je slabě samodružná.

**Definice 1.1.4** (posunutí)

Nechť  $X$  je bod a  $\vec{u}$  vektor roviny  $\rho$ . Shodné zobrazení  $\mathcal{T} : X \rightarrow X'$  takové, že pro každý bod  $X \in \rho$  platí  $\overrightarrow{XX'} = \vec{u}$ , se nazývá *posunutí* (*translace*). Posunutí se značí  $\mathcal{T}(\vec{u})$ , vektor  $\vec{u}$  nazveme *vektor posunutí*, směr vektoru udává *směr posunutí*. Řekneme, že útvar  $U'$  je *posunutím* útvaru  $U$ , existuje-li posunutí  $\mathcal{T}(U) = U'$ .

*Poznámka 1.3:* Posunutí  $\mathcal{T}(\vec{0})$  s nulovým vektorem je identitou.

*Poznámka 1.4:* Posunutí, jež není identitou, často nazýváme *vlastním posunutím*.

*Základní vlastnosti:*

Vlastní posunutí nemá samodružné body, každá přímka rovnoběžná se směrem posunutí je slabě samodružná.

**Definice 1.1.5** (otočení)

Nechť  $R$  a  $X$  jsou body a  $\varphi$  orientovaný úhel téže roviny  $\rho$ . Shodné zobrazení  $\mathcal{R} : X \rightarrow X'$  takové, že pro každý bod  $X$  roviny  $\rho$  platí  $\widehat{XRX'} = \varphi$  a zároveň  $|RX| = |RX'|$ , se nazývá *otočení* (*rotace*). Otočení značíme  $\mathcal{R}(R, \varphi)$ , bod  $R$  nazýváme *střed otočení*,  $\varphi$  *úhel otočení*. Řekneme, že útvar  $U'$  je *otočením* útvaru  $U$ , existuje-li otočení  $\mathcal{R}(U) = U'$ .

*Poznámka 1.5:* Pro orientovaný úhel  $\varphi = k \cdot 360^\circ$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ , je otočení identitou. Pro orientovaný úhel  $\varphi = (2k - 1) \cdot 180^\circ$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ , přechází otočení ve středovou souměrnost se středem  $R$ .

*Poznámka 1.6:* Otočení, jež není identitou či středovou souměrností, nazýváme často *vlastním otočením*.

*Základní vlastnosti:*

Jediný samodružný bod vlastního otočení je střed  $R$ , každá kružnice se středem v  $R$  je slabě samodružná, každá přímka a její obraz svírají velikost orientovaného úhlu  $\varphi$ .

**1.1.2 Shodnosti nepřímé**

Osová souměrnost spolu s posunutým zrcadlením je dvojicí známých nepřímých shodností. Nepřímá shodnost mění smysl značení vrcholů trojúhelníku, tedy například pro rovnostranný trojúhelník bude  $\triangle ABC \rightarrow \triangle ACB$ . V dalším textu definujeme základní nepřímé shodnosti a uvádíme jejich základní vlastnosti.

**Definice 1.1.6** (osová souměrnost)

Nechť  $X$  je bod a  $o$  přímka v rovině  $\rho$ . Shodné zobrazení  $\mathcal{O} : X \rightarrow X'$  takové, že pro každý bod  $X \in \rho$  je přímka  $XX'$  kolmá na  $o$  a zároveň  $d(X, o) = d(X', o)$ , se nazývá *osová souměrnost*. Značí se  $\mathcal{O}(o)$ , přímka  $o$  se nazývá *osou souměrnosti*. Řekneme, že útvary  $U, U'$  jsou *osově souměrné*, existuje-li osová souměrnost  $\mathcal{O}(U) = U'$ .

*Základní vlastnosti:*

Všechny body přímky  $o$  jsou v osové souměrnosti samodružné. Všechny přímky kolmé na osu  $o$  jsou slabě samodružné. Všechny kružnice se středem na ose  $o$  jsou slabě samodružné.

**Věta 1.1.4**

Má-li shodnost dva různé samodružné body a nemá jiný s nimi nekolineární samodružný bod, jedná se o osovou souměrnost.

*Důkaz:* Dané dva samodružné body označují samodružnou přímku, a jelikož třetí nekolineární bod není samodružný a jde o shodné zobrazení, tak vzhledem k zachování vzdáleností musí být zobrazen v osové souměrnosti s osou totožnou s touto přímkou. □

**Definice 1.1.7** (posunuté zrcadlení)

Nechť  $\mathcal{O}(o)$  je osová souměrnost s osou  $o$  a  $\mathcal{T}(\vec{u})$  je posunutí s nenulovým vektorem  $\vec{u}$ , kde vektor  $\vec{u}$  je rovnoběžný s přímkou  $o$ . Zobrazení  $\mathcal{O} \circ \mathcal{T}$  se nazývá *posunuté zrcadlení* (posunutá osová souměrnost) a značí se  $\mathcal{P}(o, \vec{u})$ .

*Základní vlastnosti:*

Posunuté zrcadlení nemá samodružné body, má jedinou slabě samodružnou přímku, a to osu  $o$ .

*Poznámka 1.7:* Složení osové souměrnosti a posunutí je komutativní. Přímka  $o$  a libovolný bod  $X$  neležící na  $o$  určují zobrazovanou rovinu.

Posunuté zrcadlení je definováno složením dvou již známých zobrazení. Stojí za zmínku, že právě tímto přístupem získáváme nové vlastnosti, například absenci samodružných bodů a zároveň změnu orientace značení vrcholů trojúhelníku. Jde tak o nové zobrazení, novou shodnost v rovině, která demonstruje motivaci k zamýšlení se nad skládáním základních zobrazení a hledání nových užitečných vlastností.

### 1.1.3 Skládání shodných zobrazení

Z věty 1.1.2 víme, že skládání shodností je uzavřená operace. Následující věta vypovídá o tom, kdy bude složení dvou shodností shodnost přímá a nepřímá.

#### Věta 1.1.5

Složením lib. počtu přímých shodností se sudým počtem nepřímých shodností v lib. pořadí získáme shodnost přímou. Složením lib. počtu přímých shodností s lichým počtem nepřímých shodností v lib. pořadí získáme shodnost nepřímou.

*Důkaz:* Nepřímá shodnost mění smysl značení trojúhelníku na opačný, přičemž existují právě dva smysly značení trojúhelníku.  $\square$

Nyní podrobně vyšetříme vzájemné skládání základních přímých shodností navzájem. Pro začátek si můžeme rychle rozmyslet, že skládání identity s čímkoliv dalším neposkytuje zásadní závěry. Už však u dvou středových souměrností dojdeme k zajímavějšímu výsledku.

#### Věta 1.1.6

Nechť  $\mathcal{C}_1(S_1)$ ,  $\mathcal{C}_2(S_2)$  jsou středové souměrnosti v téže rovině. Složené zobrazení  $\mathcal{C}_1(S_1) \circ \mathcal{C}_2(S_2)$  je posunutí s vektorem posunutí  $2 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$ . Jsou-li středy středových souměrností totožné, je vektor posunutí nulový (jde o identitu).

*Důkaz:* Nechť body  $S_1, S_2$  náležejí rovině  $\rho$ ,  $\mathcal{C}_1(S_1)$  a  $\mathcal{C}_2(S_2)$  jsou středové souměrnosti a platí  $\mathcal{C}_1(X) = X'$ ,  $\mathcal{C}_2(X') = X''$  pro libovolný bod  $X \in \rho$ . Úsečka  $S_1S_2$  pak je střední příčkou trojúhelníku  $XX'X''$ , proto  $XX'' \parallel S_1S_2$  a  $\overrightarrow{XX''} = 2 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$ , kde orientace je dána pořadím skládaných zobrazení.  $\square$

Složením dvou posunutí je opět posunutí (jde o sčítání vektorů).

#### Věta 1.1.7

Nechť  $\mathcal{T}_1(\vec{u})$ ,  $\mathcal{T}_2(\vec{v})$  jsou posunutí v téže rovině. Složené zobrazení  $\mathcal{T}_1(\vec{u}) \circ \mathcal{T}_2(\vec{v})$  je posunutí  $\mathcal{T}(\vec{u} + \vec{v})$ .

*Důkaz:* Nechť  $X$  je bod a  $\vec{u}, \vec{v}$  vektory téže roviny. Pro zobrazení  $\mathcal{T}_1(\vec{u}) \circ \mathcal{T}_2(\vec{v})$  platí

$$(\mathcal{T}_1(\vec{u}) \circ \mathcal{T}_2(\vec{v}))(X) = \mathcal{T}_2(\vec{v})(X + \vec{u}) = X + \vec{u} + \vec{v} = X + (\vec{u} + \vec{v}) = \mathcal{T}(\vec{u} + \vec{v})(X).$$

$\square$

Jelikož jde o uzavřenou operaci, můžeme pro posunutí spolu s operací skládání zobrazení uvést algebraickou strukturu<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Algebraická struktura je množina prvků spolu s jistou binární operací, jež přiřadí libovolným dvěma prvkům z dané množiny prvek téže množiny.

**Věta 1.1.8**

Množina všech posunutí v rovině tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení komutativní grupu<sup>4</sup>.

*Důkaz:* Uzavřenost operace je zřejmá. Skládání posunutí lze chápat jako sčítání příslušných vektorů, proto jde o asociativní a komutativní operaci. Neutrálním prvkem je posunutí o nulový vektor  $\vec{0}$ , opačným prvkem pak posunutí o vektor  $-\vec{u}$ .  $\square$

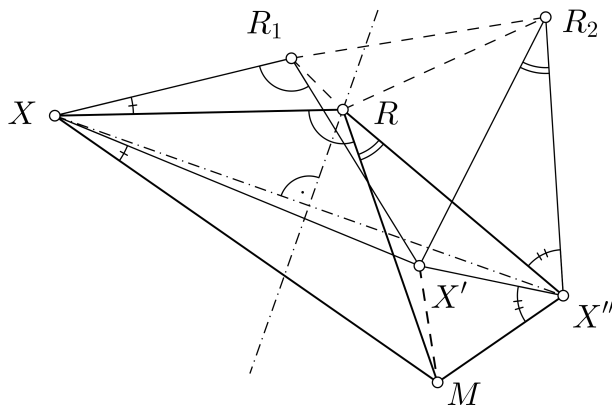
*Poznámka 1.8:* Díky větám 1.1.6 a 1.1.8 lze tuto algebraickou strukturu rozšířit o středovou souměrnost, avšak se ztrátou komutativity.

U vyšetřování skládání otočení budeme postupovat pozvolněji. Nejprve vyšetříme skládání vlastních otočení. Je snadné rozmyslet si, že jsou-li středy vlastních otočení totožné, výsledkem je otočení o orientovaný úhel daný součtem velikostí (s ohledem na znaménko) dílčích. Jsou-li však středy různé, situace se ztíží.

**Věta 1.1.9**

Nechť  $\mathcal{R}_1(R_1, \varphi_1)$ ,  $\mathcal{R}_2(R_2, \varphi_2)$  jsou vlastní otočení v téže rovině. Složené zobrazení  $\mathcal{R}_1(R_1, \varphi_1) \circ \mathcal{R}_2(R_2, \varphi_2)$  je:

1. otočení  $\mathcal{R}_3(R, \varphi_1 + \varphi_2)$ , právě když  $R_1 = R_2 = R$ ;
2. otočení  $\mathcal{R}_3(R, \varphi_1 + \varphi_2)$  se středem  $R \neq R_1 \neq R_2$ , právě když  $R_1 \neq R_2$ .



Obrázek 1.2: Složení vlastních otočení

*Důkaz:* Nechť jsou splněny předpoklady věty 1.1.9 a pro lib. bod  $X$  dané roviny platí  $\mathcal{R}_1(X) = X'$ ,  $\mathcal{R}_2(X') = X''$ .

- (i) Jsou-li středy otočení totožné, pak  $|XR| = |X'R| = |X''R|$  a je zřejmé, že úhel otočení je  $\widehat{XRX'} + \widehat{X'RX''}$ .

<sup>4</sup>Grupa je algebraická struktura, ve které příslušná binární operace splňuje podmínky asociativity, existence neutrálního prvku a prvku opačného/inverzního vzhledem k dané operaci.



- (ii) Jsou-li středy různé, lze pro důkaz užít spirální podobnost<sup>5</sup>. Zobrazíme trojúhelník  $XX'R_1$  ve spirální podobnosti se středem  $X$  a trojúhelník  $X'X''R_2$  ve spirální podobnosti se středem  $X''$  tak, aby obrazy jejich stran  $X'R_1$  a  $X'R_2$  byly totožné – tj. dle obr. 1.2 se zobrazily na úsečku  $RM$ . Pak orientovaný úhel otočení  $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$  je  $\widehat{XRX''} = \widehat{XR_1X'} + \widehat{X'R_2X''}$  a střed  $R \neq R_{1,2}$ .

□

*Poznámka 1.9:* Střed otočení  $R$  z obrázku 1.2 lze najít pomocí průniku os úseček odpovídajících si bodů (jde o užití množin bodů dané vlastnosti).

Jelikož středová souměrnost je speciálním případem otočení, plyne z věty 1.1.6, že skládání otočení není uzavřená operace a proto netvoří vlastní algebraickou strukturu.

Zbývá vyšetřit výsledky složení středové souměrnosti s posunutím a otočením a také složení posunutí a vlastního otočení. Tyto závěry uvedeme zejména s ohledem na typ výsledného zobrazení a bez důkazů.

#### Věta 1.1.10

Nechť  $\mathcal{C}(S)$  je středová souměrnost a  $\mathcal{T}(\vec{u})$  posunutí v téže rovině. Zobrazení  $\mathcal{C}(S) \circ \mathcal{T}(\vec{u})$  je středová souměrnost  $\mathcal{C}(S_1)$ , zobrazení  $\mathcal{T}(\vec{u}) \circ \mathcal{C}(S)$  je středová souměrnost  $\mathcal{C}(S_2)$ .

#### Věta 1.1.11

Nechť  $\mathcal{C}(S)$  je středová souměrnost a  $\mathcal{R}(R, \varphi)$  vlastní otočení v téže rovině. Zobrazení  $\mathcal{C}(S) \circ \mathcal{R}(R, \varphi)$  je otočení  $\mathcal{R}(R_1, \varphi_1)$ , zobrazení  $\mathcal{R}(R, \varphi) \circ \mathcal{C}(S)$  je otočení  $\mathcal{R}(R_2, \varphi_2)$ .

#### Věta 1.1.12

Nechť  $\mathcal{R}(R, \varphi)$  je vlastní otočení a  $\mathcal{T}(\vec{u})$  posunutí v téže rovině. Zobrazení  $\mathcal{R}(R, \varphi) \circ \mathcal{T}(\vec{u})$  je otočení  $\mathcal{R}(R_1, \varphi)$ , zobrazení  $\mathcal{T}(\vec{u}) \circ \mathcal{R}(R, \varphi)$  je otočení  $\mathcal{R}(R_2, \varphi)$ .

Dále již v této práci nebudeme zkoumat speciální případy skládání přímých a nepřímých shodností. Pro kompletnost uvedme známou větu o skládání osových souměrností. Důkaz následující věty je spíše rozsahově než technicky náročný a nebudeme jej uvádět.

#### Věta 1.1.13

Nechť  $o_1, o_2$  jsou dvě přímky v rovině. Složením  $\mathcal{O}_1(o_1) \circ \mathcal{O}_2(o_2)$  vznikne:

<sup>5</sup>Detailně je toto zobrazení popsáno ve 2. kapitole.

1. identita, právě když  $o_1 = o_2$ ;
2. středová souměrnost, právě když  $o_1 \perp o_2$ , kde  $S = o_1 \cap o_2$ ;
3. posunutí, právě když  $o_1 \parallel o_2$ , kde  $d(o_1, o_2) = |\frac{1}{2}\vec{u}|$  a směr posunutí je kolmý na osy souměrnosti;
4. otočení, právě když je  $o_1 \not\parallel o_2$ , kde  $R = o_1 \cap o_2$  a velikost orientovaného úhlu otočení je dvojnásobná vůči odchylce os.

Vidíme, že všechny známé shodnosti v rovině získáme složením osových souměrností (i posunutí zrcadlení). Tento poznatek shrnuje další věta:

#### Věta 1.1.14

Každé shodné zobrazení v rovině lze získat složením osových souměrností, a to nejvýše tří.

*Důkaz:* Viz např. v [5], str. 66. □

Víme, že skládání shodností je uzavřenou operací. V poslední větě tohoto odstavce proto popíšeme jejich algebraickou strukturu vzhledem k příslušné operaci.

#### Věta 1.1.15

Množina všech shodných zobrazení v rovině tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu, tzv. *grupu shodností*.

*Důkaz:* Skládání zobrazení je obecně asociativní, neutrálním prvkem struktury je identita a jelikož každé shodné zobrazení je bijektivní, je určen i prvek inverzní. □

## 1.2 Podobná zobrazení v rovině

Podobná zobrazení jsou oproti shodnostem obecnějším případem geometrických zobrazení. Obraz útvaru v podobném zobrazení má stejný počet stran, vrcholů, má shodné úhly, toto zobrazení však obecně nezachovává vzdálenosti bodů.

### Definice 1.2.1

Nechť je dáno číslo  $k \in \mathbb{R}^+$ . Zobrazení  $f$ , jež každým dvěma bodům  $X, Y$  roviny přiřadí po řadě body  $f(X) = X', f(Y) = Y'$  téže roviny tak, že platí  $|X'Y'| = k \cdot |XY|$ , nazveme *podobné zobrazení* v rovině (též *podobnost*). Číslo  $k$  se nazývá *poměr podobnosti*. Řekneme, že dva útvary  $U, U'$  v téže rovině jsou *podobné*, existuje-li podobnost  $f : U \rightarrow U'$ . Píšeme pak  $U \sim U'$ .

*Poznámka 1.10:* Je-li  $k = 1$ , jedná se o shodnost – v tomto smyslu speciální podobné zobrazení. Je-li  $k \neq 1$ , často takové zobrazení nazýváme *vlastní podobností*.

Studujeme geometrická zobrazení v rovině a pro usnadnění také nebudeme přívlastek „v rovině“ za podobná zobrazení přepisovat. Některé základní vlastnosti podobných zobrazení jsou:

- jde o bijektivní zobrazení,
- obrazem úsečky je úsečka,
- obrazem (polo)přímky je (polo)přímka,
- obrazem (polo)kružnice je (polo)kružnice,
- zachovává rovnoběžnost přímek,
- obecně nezachovává vzdálenosti bodů,
- zachovává velikosti úhlů,
- zachovává dělicí poměr,
- zachovává incidenci bodů,
- obecně nezachovává velikosti obsahů omezených planimetrických útvarů.

Stejně jako u shodných zobrazení existuje pro dva podobné útvary v rovině, jež obsahují alespoň tři nekolineární body, jediná podobnost zobrazující v určeném pořadí jeden útvar na druhý.

### Věta 1.2.1

Nechť existuje podobné zobrazení  $f : \triangle XYZ \rightarrow \triangle X'Y'Z'$ . Pak je zobrazení  $f$  jediné a přiřazuje jednoznačně každému bodu dané roviny právě jeden bod téže roviny. (Řekneme, že zobrazení  $f$  je těmito trojúhelníky určeno jednoznačně.)

*Důkaz:* Tvrzení lze dokázat podobně jako větu 1.1.1. □

Všechny vlastní podobnosti mají stejný počet samodružných bodů.

### Věta 1.2.2

Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

*Důkaz:* Viz např. [5], str. 103. □

Podobná zobrazení jsou opět vzhledem k operaci složení zobrazení uzavřenou strukturou.

### Věta 1.2.3

Nechť  $f, g$  jsou podobná zobrazení,  $\rho$  je rovina. Potom složené zobrazení  $f \circ g$  takové, že pro každý bod  $X \in \rho$  platí  $(f \circ g)(X) = g(f(X))$ , je opět podobné zobrazení (skládání podobností je uzavřená operace na množině všech podobností).

*Důkaz:* Tvrzení plyne přímo z definice podobnosti. Pro libovolné body  $X, Y$  z roviny, pro něž  $f(X) = X', f(Y) = Y', g(X') = X''$  a  $g(Y') = Y''$ , platí

$$|(f \circ g)(X)(f \circ g)(Y)| = k \cdot |g(X')g(Y')| = k \cdot l \cdot |X''Y''| = m \cdot |X''Y''|,$$

kde  $k, l, m \in \mathbb{R}$ . □

Stejně jako u shodností zavádíme pojmy *přímá podobnost* – podobné zobrazení zachovávající orientaci při značení vrcholů trojúhelníku a *nepřímá podobnost* – mění orientaci značení v opačnou. V další části se zaměříme na nejčastěji užívané podobné zobrazení, a to *stejnolehlost*.

## 1.2.1 Stejnolehlost

Významným geometrickým zobrazením je stejnohlost. Je to jediné podobné zobrazení, jež se ve školské geometrii vyučuje. Jak v části 1.2.3 zjistíme, složením stejnohlosti a určitého shodného zobrazení můžeme konstruovat libovolné podobné zobrazení v rovině.

### Definice 1.2.2 (stejnolehlost)

Nechť je dán bod  $H$  roviny  $\rho$  a číslo  $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Podobné zobrazení  $\mathcal{H} : X \rightarrow X'$  takové, že pro každý bod  $X$  z roviny  $\rho$  platí  $\overrightarrow{HX'} = \kappa \cdot \overrightarrow{HX}$ , se nazývá *stejnolehlost (homotetie)*. Stejnolehlost se značí  $\mathcal{H}(H, \kappa)$ , bod  $H$  nazveme *střed stejnohlosti*,  $\kappa$  se nazývá *koeficient stejnohlosti*. Řekneme, že útvary  $U, U'$  jsou *stejnolehlelé*, existuje-li stejnohlost  $\mathcal{H}(U) = U'$ .

*Základní vlastnosti:*

Stejnolehlost je přímá podobnost. Samodružným bodem je střed  $H$ . Obrazem libovolné přímky je přímka s ní rovnoběžná, každá přímka procházející středem  $H$  se zobrazí sama na sebe. Délka obrazu libovolné úsečky je rovna  $|\kappa|$ -násobku délky vzoru. Každé dvě různé kružnice mají dva různé středy stejnohlosti (jeden pro  $\kappa > 0$ , druhý pro  $\kappa < 0$ ).

*Poznámka 1.11:* Ve speciálních případech je stejnolehlost:

- identitou, právě když  $\kappa = 1$ ;
- středovou souměrností, právě když  $\kappa = -1$ .

### Věta 1.2.4

Inverzní zobrazení ke stejnolehlosti  $\mathcal{H}(H, \kappa)$  je stejnolehlost  $\mathcal{H}(H, 1/\kappa)$ .

*Důkaz:* Stejnolehlost je bijektivní zobrazení, proto existuje inverzní zobrazení. Tožnost středů obou stejnolehlostí plyne z věty 1.2.2. Z definice inverzního zobrazení pro libovolný bod  $X$  příslušné roviny získáme

$$\mathcal{I}(\overrightarrow{HX}) = (\mathcal{H}(H, \kappa) \circ \mathcal{H}^{-1}(H, \kappa'))(X) = \mathcal{H}^{-1}(H, \kappa')(\kappa \cdot \overrightarrow{HX}) = \kappa\kappa' \cdot \overrightarrow{HX},$$

kde rovnost je splněna právě pro  $\kappa' = 1/\kappa$ . □

Tímto jsme vyčerpali množinu běžně užívaných podobností a přejdeme ke zkoumání jejich vzájemného skládání.

## 1.2.2 Skládání podobných zobrazení

V předchozích odstavcích jsme zmínili jedině podobné zobrazení. Jelikož jsou shodná zobrazení obsažena v podobnostech, vyšetřeme nejprve samostatně vzájemné skládání stejnolehlostí.

### Věta 1.2.5

Nechť  $\mathcal{H}_1(H_1, \kappa_1)$ ,  $\mathcal{H}_2(H_2, \kappa_2)$  jsou stejnolehlosti v téže rovině. Složené zobrazení  $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$  je:

1. identita  $\mathcal{I}$ , právě když platí  $H_1 = H_2$  a zároveň  $\kappa_1\kappa_2 = 1$ ;
2. posunutí  $\mathcal{T}((-\kappa_2 + 1) \cdot \overrightarrow{H_1H_2})$ , právě když  $H_1 \neq H_2$  a zároveň  $\kappa_1\kappa_2 = 1$ ;
3. stejnolehlost  $\mathcal{H}_3(H_3, \kappa_1\kappa_2)$ , právě když  $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$ . Jsou-li středy  $H_1$ ,  $H_2$  totožné, pak  $H_3 = H_1 = H_2$ , v opačném případě je  $H_3$  různý od  $H_1$ ,  $H_2$  a leží na přímce  $H_1H_2$ .

*Důkaz:* Nechť  $\mathcal{H}_1(H_1, \kappa_1)$ ,  $\mathcal{H}_2(H_2, \kappa_2)$  jsou stejnolehlosti v téže rovině a pro libovolný bod  $X$  této roviny platí  $X' = \mathcal{H}_1(X)$  a  $X'' = \mathcal{H}_2(X')$ .

- (i) Platí  $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2 = \mathcal{I}$ , právě když  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^{-1}$ , tj.  $H_1 = H_2$  a  $\kappa_1\kappa_2 = 1$  (věta 1.2.4).

- (ii) Tvrzení lze dokázat podobně jako větu 1.1.6 využitím podobnosti trojúhelníků  $XX'X''$  a  $H_1XH_2$ . Pro vektor posunutí lze tak dokázat platnost vyjádření  $\overrightarrow{XX''} = (-1/\kappa_1 + 1) \cdot \overrightarrow{H_1H_2} = (-\kappa_2 + 1) \cdot \overrightarrow{H_1H_2}$ .
- (iii) Bod  $H_3$  je samodružný v zobrazení  $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$ , tudíž  $\mathcal{H}_1(H_3) = H'_3 = \mathcal{H}_2^{-1}(H_3)$ . Jelikož obraz a vzor bodu v této stejnolehlosti leží na téže přímce, platí  $H_3 \in \overleftrightarrow{H_1H_2}$ . O tom, zda středy  $H_1, H_2, H_3$  splývají, lze rozhodnout dle věty 1.2.2. Pro  $H_1 = H_2$  je důkaz zřejmý. Pro  $H_1 \neq H_2$  vyjádříme z předchozího bod  $H'_3$  a získáme rovnost  $H_1 + \kappa_1 \cdot \overrightarrow{H_1H_3} = H'_3 = H_2 + \frac{1}{\kappa_2} \cdot \overrightarrow{H_2H_3}$  a úpravou  $\overrightarrow{H_3H_2} + \kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_2H_1} + \kappa_1\kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_1H_3} = 0$ . Nyní vyjádřením vektoru  $\overrightarrow{H_3X''}$  z definice stejnolehlosti dostáváme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H_3X''} &= \overrightarrow{H_3H_2} + \overrightarrow{H_2X''} = \overrightarrow{H_3H_2} + \kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_2X'} = \overrightarrow{H_3H_2} + \kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_2H_1} + \kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_1X'} = \\ &= \overrightarrow{H_3H_2} + \kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_2H_1} + \kappa_1\kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_1X} + \kappa_1\kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_3H_1} - \kappa_1\kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_3H_1} = \\ &= \kappa_1\kappa_2 \cdot (\overrightarrow{H_3H_1} + \overrightarrow{H_1X}) + \overrightarrow{H_3H_2} + \kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_2H_1} - \kappa_1\kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_3H_1} = \\ &= \kappa_1\kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_3X} + \underbrace{\overrightarrow{H_3H_2} + \kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_2H_1} - \kappa_1\kappa_2 \cdot \overrightarrow{H_3H_1}}_{=0 \text{ (z vyjádření bodu } H'_3)} . \end{aligned}$$

□

*Poznámka 1.12:* Skládání stejnolehlostí není obecně komutativní. Komutativní je pouze tehdy, jsou-li středy stejnolehlostí totožné.

Z věty 1.2.5 plyne, že skládání stejnolehlostí není uzavřená operace, složením stejnolehlostí lze získat posunutí (zobrazení s jinými vlastnostmi). Stejnolehlosti tedy netvoří vlastní algebraickou strukturu. Na závěr popíšeme algebraickou strukturu podobností.

### Věta 1.2.6

Množina všech podobností v rovině tvoří spolu s operací skládání zobrazení grupu, tzv. *grupu podobností*.

*Důkaz:* Tvrzení lze dokázat podobně jako větu 1.1.15. □

### 1.2.3 Skládání shodných a podobných zobrazení

V předchozím textu jsme se věnovali skládání zobrazení na izolované množině shodností, poté skládání stejnolehlostí. Přitom shodná zobrazení jsou speciálním případem podobností pro  $k = 1$ . Omezíme-li se však jen na podobnosti vlastní, můžeme

rozlišit shodnost od podobného zobrazení. V této části proto uvažujme pouze vlastní podobná zobrazení a vyšetřeme jejich skládání se shodnostmi.

### Věta 1.2.7

Složení vlastní podobnosti a shodného zobrazení je vlastní podobnost.

*Důkaz:* Jde o uzavřenou operaci. Navíc vzájemné vzdálenosti obrazů odpovídají  $k$ -násobku ( $k \neq 1$ ) vzdáleností vzorů.  $\square$

Dále ukažme, že existuje způsob (podobně jako u shodností), jak lze získat libovolné podobné zobrazení s využitím výše popsanych.

### Věta 1.2.8

Každé vlastní podobné zobrazení s poměrem podobnosti  $k$  lze složit z určité shodnosti a stejnolehlosti s koeficientem  $k$  a středem, jež je totožný s vlastním bodem daného podobného zobrazení.

*Důkaz:* Viz např. v [5], str. 103.  $\square$

Motivováni větou 1.2.8 nyní vyšetřeme skládání stejnolehlostí se základními shodnostmi. Středová souměrnost a identita jsou obsaženy jak ve speciálních případech otočení či posunutí, tak i ve speciálních případech stejnolehlosti, proto se budou následující věty vztahovat pouze k vlastnímu otočení a posunutí, důkazy budou provedeny pouze náznakem.

### Věta 1.2.9

Složením stejnolehlosti  $\mathcal{H}(H, \kappa)$  a vlastního posunutí  $\mathcal{T}(\vec{u})$  v téže rovině je stejnolehlost  $\mathcal{H}(H', \kappa)$  s posunutým středem stejnolehlosti vůči  $H$  o vektor  $\vec{u}/(1-\kappa)$ .

*Důkaz:* Tvrzení lze dokázat pomocí vektorů podobně jako větu 1.2.5, bod 3.  $\square$

*Poznámka 1.13:* Složení stejnolehlosti a posunutí není obecně komutativní.

Vidíme, že množina všech stejnolehlostí a všech posunutí tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení uzavřenou strukturu. Z předchozí věty a z vět 1.2.5, 1.1.3 plyne následující:

### Věta 1.2.10

Množina všech stejnolehlostí a posunutí v téže rovině tvoří vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu (tzv. Mongeovu grupu)<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Viz např. [12], str. 34.

**Věta 1.2.11**

Složením *vlastní stejnolehlosti*<sup>7</sup> a vlastního otočení v téže rovině není stejnolehlost.

*Důkaz:* Stačí poukázat na vlastnosti otočení a stejnolehlosti. Stejnolehlost zachovává rovnoběžnost přímek, vlastní otočení ne. Po aplikaci otočení ve složeném zobrazení bude právě tato vlastnost stejnolehlosti narušena. Podobně otočení zachovává vzdálenosti bodů a vlastní stejnolehlost ji mění v určitém  $\kappa$ -násobku.  $\square$

Složení stejnolehlosti a otočení je (analogicky jako u posunutého zrcadlení) nové přímo podobné zobrazení splňující vlastnosti věty 1.2.8. Toto zobrazení (zmíněné již v důkazu věty 1.1.9) se nazývá *spirální podobnost*.

---

<sup>7</sup>Vlastní stejnolehlost považujeme, stejně jako vlastní podobnost, za zobrazení, jež není shodností, tedy  $|\kappa| \neq 1$ .



# Kapitola 2

## Spirální podobnost

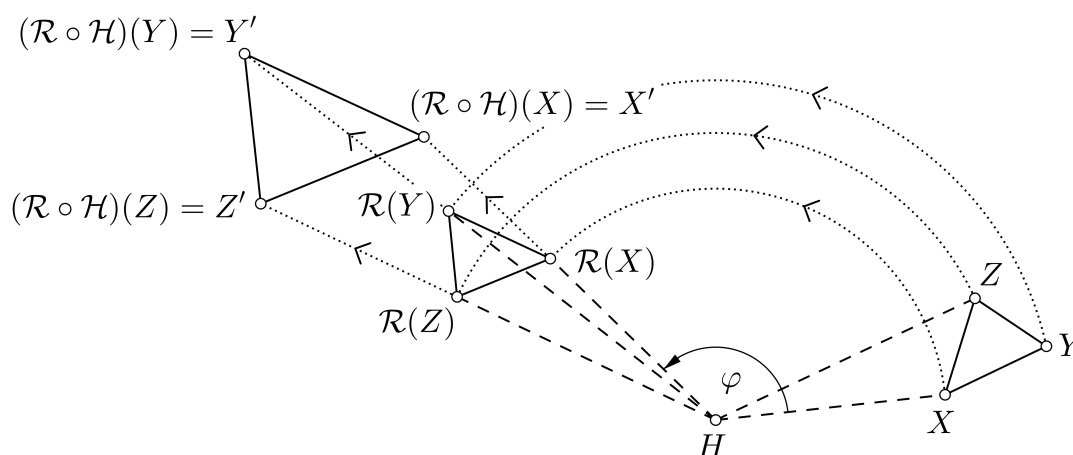
V této kapitole se budeme detailně zabývat *spirální podobností*. Jde o složení shodného a podobného zobrazení, konkrétně dané stejnoolehlosti a otočení. V následující části práce budeme prezentovat řadu poznatků týkajících se právě spirální podobnosti a objasníme důsledky, které z nich plynou.

### 2.1 Základní vlastnosti spirální podobnosti

V úvodu definujeme spirální podobnost.

**Definice 2.1.1** (spirální podobnost)

Nechť  $\mathcal{R}(H, \varphi)$  je otočení a  $\mathcal{H}(H, k)$  stejnoolehlost s koeficientem  $k > 0$  v téže rovině. Složené zobrazení  $\mathcal{R}(H, \varphi) \circ \mathcal{H}(H, k)$  nazýváme *spirální podobnost* a značíme jej  $\mathcal{S}(H, k, \varphi)$ . Bod  $H$  nazveme *středem spirální podobnosti*. Řekneme, že dva útvary  $U, U'$  jsou *spirálně podobné*, existuje-li spirální podobnost  $\mathcal{S}(U) = U'$  (obr. 2.1).



Obrázek 2.1: Spirální podobnost

Spirální podobnost se značí uspořádanou trojicí  $(H, k, \varphi)$  a opačně, tato trojice ji jednoznačně určuje. Všimněme si, že středy otočení a stejnoolehlosti jsou identické, koeficient  $k$  je převzat ze stejnoolehlosti, orientovaný úhel  $\varphi$  z otočení. Jelikož uvažujeme otočení a stejnoolehlost v jedné rovině, je spirální podobnost opět geometrické

zobrazení v rovině. V definici navíc klademe na koeficient stejnolehlosti omezení  $k > 0$ , což je čistě účelovým požadavkem.

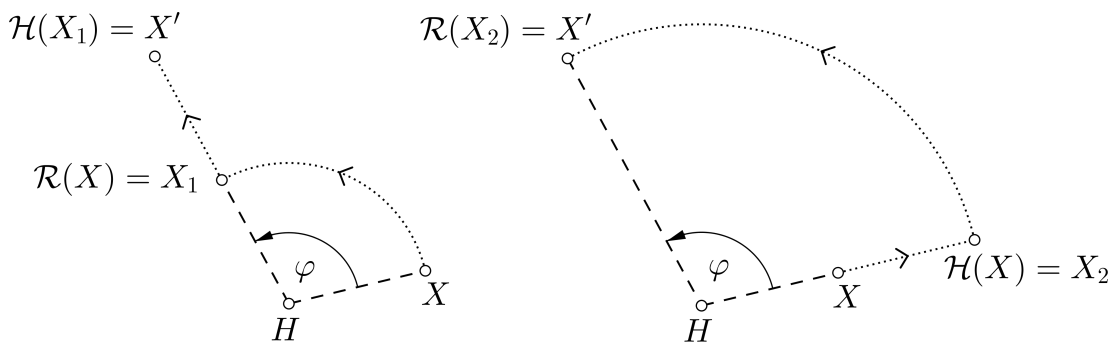
*Poznámka 2.1:* Spirální podobnost bychom mohli též definovat jako složení stejnolehlosti a otočení bez dalších dodatků. Avšak tento přístup je ve speciálních případech (např. pro záporný koeficient podobnosti) pro aplikace nevhodný a proto se nezavádí.

Omezení se na kladné hodnoty  $k$  není nikterak na újmu množiny spirálních podobností. Záporný koeficient stejnolehlosti se dá nahradit přičtením  $\pm 180^\circ$  k orientovanému úhlu otočení při skládání zobrazení. Jelikož je střed  $H$  identický pro otočení i stejnolehlost, má spirální podobnost následující vlastnost.

### Věta 2.1.1

Pro složení stejnolehlosti a otočení v téže rovině se stejným středem platí  $\mathcal{H}(H, k) \circ \mathcal{R}(H, \varphi) = \mathcal{R}(H, \varphi) \circ \mathcal{H}(H, k)$ , tj. skládání stejnolehlosti a otočení s tímž středem je komutativní operací (obr. 2.2).

*Důkaz:* Platnost věty je zřejmá. □



Obrázek 2.2

Dle předchozí věty definice spirální podobnosti nezávisí na pořadí skládaných zobrazení. Dále totožnost středů otočení a stejnolehlosti se dá chápat jako další účelová podmínka. Upustíme-li od takového požadavku a složíme stejnolehlost a otočení o různých středech, výsledné zobrazení bude opět podobné zobrazení. Navíc pak (dle věty 1.2.8) existuje jistý bod  $H$  takový, že složením vhodné shodnosti a stejnolehlosti se středem  $H$  lze konstruovat právě dané podobné zobrazení. Tento fakt shrnuje následující důležitá věta o podobnostech v rovině.

### Věta 2.1.2

Každé dva přímo podobné útvary v rovině jsou zobrazeny jeden na druhý ve spirální podobnosti nebo posunutí.

*Důkaz:* Viz např. [3], str. 97. □

Vidíme, že množinu všech (přímých) podobných zobrazení můžeme s elegancí ponížít jen na spirální podobnost a posunutí. Dle toho lze spirální podobnost považovat za *nejobecnější podobné zobrazení* (kde mezi podobnosti řadíme i shodná zobrazení). V následující části si dále rozšíříme povědomí o vlastnostech tohoto zobrazení.

## 2.2 Další vlastnosti spirální podobnosti

V této části popíšeme vlastnosti a uvedeme věty týkající se spirální podobnosti. Na úvod uveďme základní přehled.

*Základní vlastnosti:*

Spirální podobnost je přímá podobnost a přejímá tak všechny vlastnosti podobných zobrazení. Jejím samodružným bodem je střed  $H$ . Každá přímka zobrazená ve spirální podobnosti svírá se svým vzorem velikost orientovaného úhlu  $\varphi$ .

*Poznámka 2.2:* Spirální podobnost je ve speciálních případech pro  $n \in \mathbb{Z}$ :

- stejnolehlostí se středem  $H$  a koeficientem  $k$ , právě když  $\varphi = n \cdot 360^\circ$ ;
- stejnolehlostí se středem  $H$  a koeficientem  $-k$ , právě když  $\varphi = (2n - 1) \cdot 180^\circ$ ;
- otočením se středem  $H$  a orientovaným úhlem otočení  $\varphi$ , právě když  $k = 1$ ;
- středovou souměrností se středem  $H$ , právě když  $k = 1$  a  $\varphi = (2n - 1) \cdot 180^\circ$ .

*Poznámka 2.3:* Skládání spirálních podobností není obecně komutativní.

### Věta 2.2.1

Inverzní zobrazení ke spirální podobnosti  $\mathcal{S}(H, k, \varphi)$  je spirální podobnost  $\mathcal{S}(H, 1/k, -\varphi)$ .

*Důkaz:* Spirální podobnost je bijektivní zobrazení, existuje proto inverzní zobrazení  $\mathcal{S}^{-1}$ , pro něž platí  $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{I}$ . Vzhledem ke komutativitě skládání stejnolehlosti a otočení se stejným středem pak z věty 1.2.4 plyne velikost poměru podobnosti a inverzní otočení má právě opačný orientovaný úhel. □

Tímto jsou shrnuty základy spirální podobnosti. Následují významné věty rozšiřující pohled na vlastnosti a možnosti aplikace tohoto zobrazení. Při definování

spirální podobnosti jsme psali o jednoznačném určení přes trojici střed, poměr podobnosti a orientovaný úhel. Další věta říká, jak může být spirální podobnost jednoznačně určena pomocí vzoru a jeho obrazu.

**Věta 2.2.2** (o určenosti spirální podobnosti)

Nechť  $A, B, C, D$  jsou různé body v rovině takové, že  $ABDC, ACDB$  tvoří rovnoběžníky. Pak existuje jediná spirální podobnost zobrazující  $A \rightarrow B$  a zároveň  $C \rightarrow D$ .

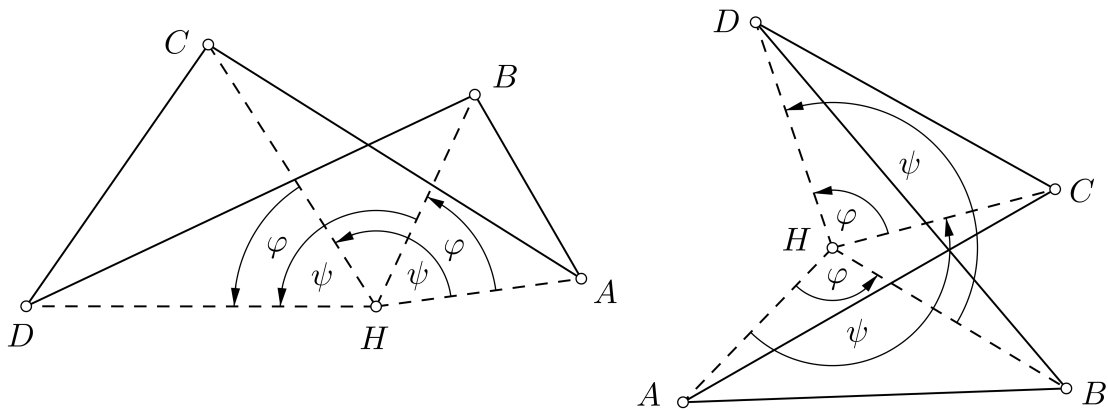
*Důkaz:* Viz např. v [14], str. 4. □

*Poznámka 2.4:* Připustíme-li v předchozí větě existenci rovnoběžníků  $ABDC, ACDB$ , pak zobrazení  $A \rightarrow B, C \rightarrow D$  je posunutí, které spirální podobnost nenabízí a tyto konkrétní případy je nutné vyloučit. Samotná existence plyne z věty 2.1.2.

Pro určení spirální podobnosti postačí určení vzoru a obrazu některé úsečky (jež nebude zobrazena v posunutí). Zaměříme-li se na čtyřúhelník z věty 2.2.2 tvořený body  $A, B, C, D$ , existuje v něm další dvojice potenciálně si ve spirální podobnosti odpovídajících stran.

**Věta 2.2.3** (duplicita spirální podobnosti)

Nechť jsou v rovině dány různé body  $A, B, C, D$  a bod  $H$  takový, že spirální podobnost se středem  $H$  zobrazuje  $A \rightarrow B, C \rightarrow D$ . Pak existuje spirální podobnost se středem  $H$  zobrazující  $A \rightarrow C, B \rightarrow D$  (obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Duplicita spirální podobnosti

*Důkaz:* Spirální podobnost je podobné zobrazení – zachovává velikosti úhlů, tudíž  $|\sphericalangle AHB| = |\sphericalangle CHD|$  a s odkazem na obrázek 2.3 platí  $|\sphericalangle AHC| = |\sphericalangle BHD|$ . Pro poměr podobnosti původní spirální podobnosti je  $k = |AH|/|BH| = |CH|/|DH|$  a úpravou platí také rovnost  $|AH|/|CH| = |BH|/|DH|$ . □

Geometrickou reprezentací věty 2.2.3 je, že ke spirální podobnosti zobrazující trojúhelníky  $HAB \rightarrow HCD^1$  (obr. 2.3) existuje vždy též druhá spirální podobnost zobrazující trojúhelníky  $HAC \rightarrow HBD$ . Dále uvádíme lemma, jež poslouží k prezentaci další zajímavé vlastnosti.

#### Lemma 2.2.4

Nechť  $\mathcal{S}(H, k, \varphi)$  je daná spirální podobnost a pro libovolný bod  $X$  téže roviny různý od  $H$  je  $\mathcal{S}(X) = X'$ . Platí, že trojúhelníky  $HXX'$  jsou pro každý bod  $X$  z roviny podobné. Naopak, spirální podobnost je libovolným trojúhelníkem  $HXX'$  určena jednoznačně.

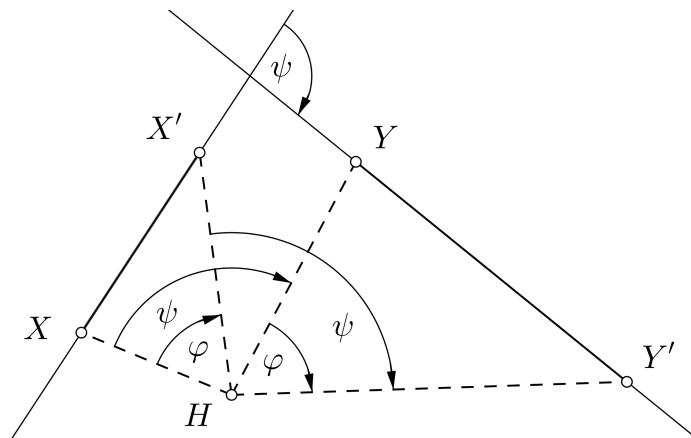
*Důkaz:* Nechť  $\mathcal{S}(H, k, \varphi)$  je spirální podobnost a pro body  $X, X'$  z příslušné roviny platí  $\mathcal{S}(X) = X'$ .

- (i) Chceme ukázat, že pro libovolný bod  $X$  jsou trojúhelníky  $XHX'$  podobné. Zvolme další bod  $Y$  téže roviny tak, že  $\mathcal{S}(Y) = Y'$ .

Přímky  $XX', YY'$  svírají úhel  $\psi$  (viz základní vlastnosti). Díky větě 2.2.3 můžeme zavést další spirální podobnost  $\mathcal{S}'(H, l, \psi) : \overline{XX'} \rightarrow \overline{YY'}$ ;  $l \in \mathbb{R}$ . Pak platí

$$|HX| = l \cdot |HY|, \quad |HX'| = l \cdot |HY'|, \quad |XX'| = l \cdot |YY'|,$$

a proto  $\triangle XHX' \sim \triangle YHY'$ .<sup>2</sup> Tím je dokázána první část lemmatu (obr. 2.4).



Obrázek 2.4

<sup>1</sup>Připomínáme, že při zobrazování útvarů značíme pořadím bodů odpovídající si dvojice v daném zobrazení. Tedy zde  $H \rightarrow H, A \rightarrow C, B \rightarrow D$ . Tohoto budeme zvláště v dalším textu často využívat.

<sup>2</sup>V dalším textu budeme podobně jako u zobrazení útvarů užívat zápis shodnosti a podobnosti útvarů po odpovídajících si bodech, tj. zde jsou sobě odpovídající dvojice  $X$  a  $Y, H$  a  $H, X'$  a  $Y'$ .

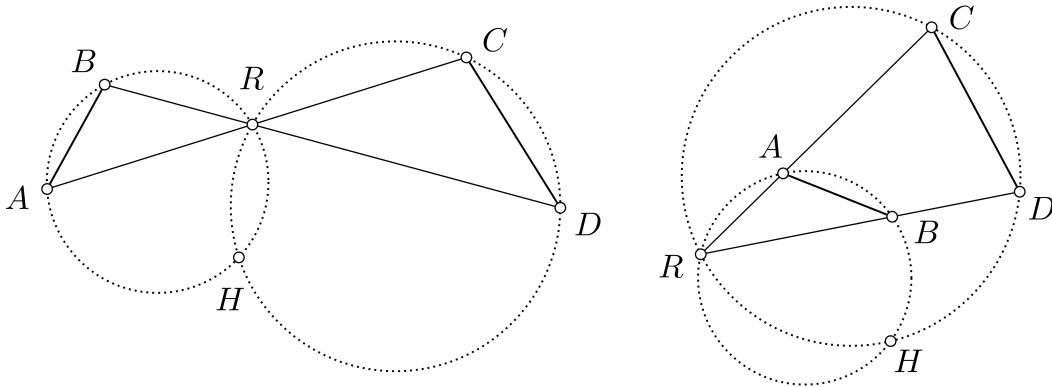
- (ii) Je-li zadán trojúhelník  $XHX'$ , pak  $H$  určuje střed spirální podobnosti, poměr podobnosti je  $k = |HX'|/|HX|$  a orientovaný úhel  $\varphi = \widehat{XHX'}$ .

□

Již víme, podmínky existence spirální podobnosti, jež zobrazuje danou úsečku na druhou, dále jak dané zobrazení jednoznačně určit a známe též duplicitu. Dále ukážeme, že lze vždy pro zobrazovanou úsečku určit příslušný střed  $H$  dané spirální podobnosti.

**Věta 2.2.5** (konstrukce středu spirální podobnosti)

Nechť je dán čtyřúhelník  $ABCD$  takový, že  $AC \cap BD = R$ . Střed  $H$  spirální podobnosti  $\mathcal{S}(H, |CD|/|AB|, \widehat{AHC})$  zobrazující  $\overline{AB} \rightarrow \overline{CD}$  je právě druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům  $ABR$  a  $CDR$ . Jeli takový průsečík jediný, pak  $H = R$ .



Obrázek 2.5: Konstrukce středu spirální podobnosti

*Důkaz:* Nechť  $A, B, C, D$  a  $R$  jsou body splňující podmínku věty 2.2.5. Nechť existuje druhý průsečík  $H$  kružnic opsaných trojúhelníkům  $ABR$  a  $CDR$ . Protože body  $A, B$  leží na kružnicovém oblouku nad úsečkou  $HR$ , platí  $|\sphericalangle HAR| = |\sphericalangle HBR|$ , analogicky  $|\sphericalangle HDR| = |\sphericalangle HCR|$  a proto jsou trojúhelníky  $ACH$  a  $BDH$  podobné. Dle lemmatu 2.2.4 existuje spirální podobnost se středem  $H$  zobrazující  $\overline{AC} \rightarrow \overline{BD}$  a dle věty 2.2.3 též  $\overline{AB} \rightarrow \overline{CD}$  v jiné spirální podobnosti s tímž středem  $H$ . Identita  $H = R$  odpovídá případu, kdy je spirální podobnost stejnolehlostí. □

V praxi se můžeme setkat s případem, kdy tři z bodů  $A, B, C, D$  tvoří trojúhelník a čtvrtý leží na některé z jeho stran. V takovém případě nelze přímo aplikovat větu 2.2.5, avšak můžeme uvažovat středy zobrazovaných úseček (podobnost zachovává dělicí poměr) a hledat tak střed spirální podobnosti pro poloviny úseček,

jejichž krajní body tvoří nyní čtyřúhelník. Dále z provedeného důkazu plyne tvrzení následující věty.

**Věta 2.2.6**

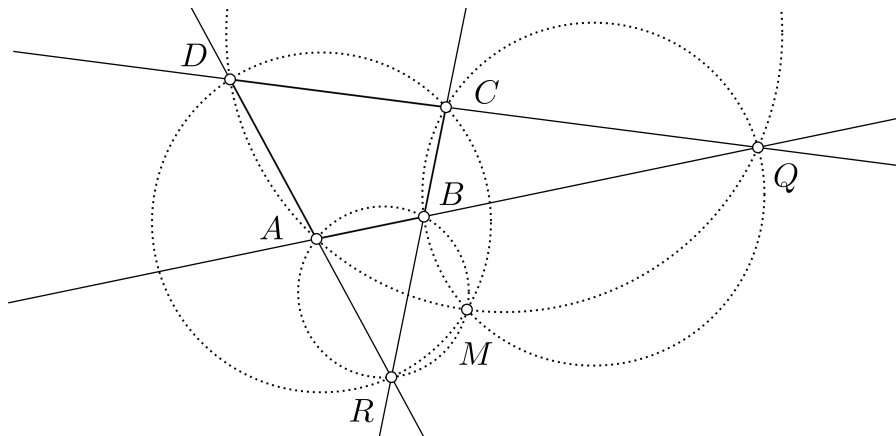
Jestliže jsou v rovině úsečky  $AB$ ,  $CD$  spirálně podobné vzhledem ke středu  $H$  a průsečík  $R$  přímek  $AC$  a  $BD$  leží mimo daný střed, pak jsou čtyřúhelníky  $ABHR$  a  $CDHR$  tětivové.

Na závěr teorie o spirální podobnosti uvedeme větu vztahující se k tzv. *Miquelovu bodu čtyřúhelníku*.

**Věta 2.2.7** (Miquelův bod čtyřúhelníku)

Nechť je dán čtyřúhelník  $ABCD$  takový, že  $AB \cap DC = Q$  a  $AD \cap BC = R$ . Pak kružnice opsané trojúhelníkům  $AQD$ ,  $BQC$ ,  $ARB$ ,  $DRC$  se protínají v jediném bodu  $M$ , tzv. Miquelově bodu čtyřúhelníku  $ABCD$  (obr. 2.6).

*Důkaz:* Tvrzení věty lze dokázat díky spirální podobnosti. Protilehlé strany zadaného čtyřúhelníku jsou spirálně podobné dle středu  $M$ , jehož incidence k daným kružnicím plyne z věty 2.2.5, jednobodový průsečík všech čtyř kružnic je důsledkem věty 2.2.3. □



Obrázek 2.6: Miquelův bod čtyřúhelníku

**Věta 2.2.8**

Nechť  $M$  je Miquelův bod čtyřúhelníku  $ABCD$ . Pak  $M$  je střed spirálních podobností zobrazujících  $\overline{AB} \rightarrow \overline{DC}$ ,  $\overline{AD} \rightarrow \overline{BC}$ .

*Důkaz:* Tvrzení je důsledkem vět 2.2.3, 2.2.5. □

## 2.3 Další geometrické poznatky

V této části uvedeme dvě geometrické reprezentace spirální podobnosti.

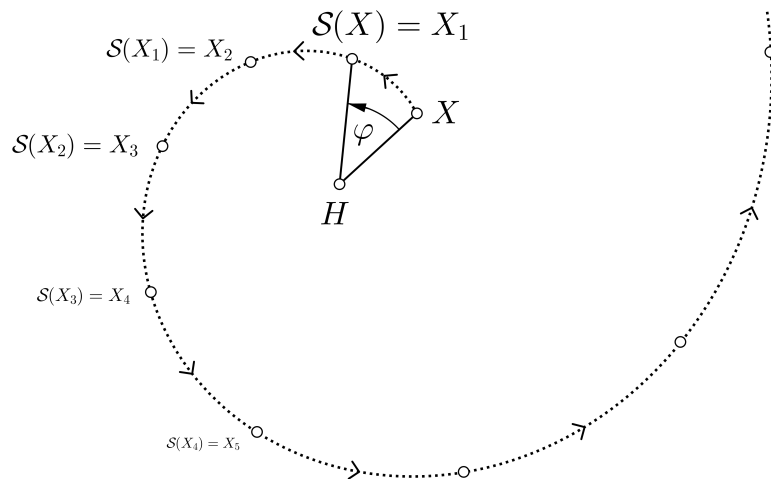
Uvažujme spirální podobnost  $\mathcal{S}(H, k, \varphi)$  a lib. bod  $X$  příslušné roviny ( $X \neq H$ ). Vyšetříme, po jaké křivce se bude pohybovat obraz bodu  $X$ , aplikujeme-li na něj spirální podobnost  $\mathcal{S}$   $n$ -krát;  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . Pro bod  $X$  můžeme zavést polární souřadnice s počátkem v bodě  $H$ , průvodičem označujícím polohu  $n$ -tého obrazu bodu  $X$  a orientovaným úhlem  $\varrho$  označujícím odchylku průvodiče od polopřímky  $HX$ . Velikost průvodiče pak roste (klesá) s  $n$ -tou mocninou poměru podobnosti  $k$  a úhel  $\varrho$  se mění s konstantním krokem o  $n$ -násobek orientovaného úhlu  $\varphi$ . Platí tedy

$$r = k^n |HX|, \quad \varrho = n\varphi.$$

Vyjádříme-li poloměr  $r$  v závislosti na  $\varrho$ , získáváme vztah

$$r = k^{\frac{\varrho}{\varphi}} |HX| = |HX| e^{\frac{\ln k}{\varphi} \varrho},$$

což je logaritmická spirála<sup>3</sup>. Dostáváme tak křivku, na níž leží všechny obrazy bodu  $X$  (obr. 2.7).



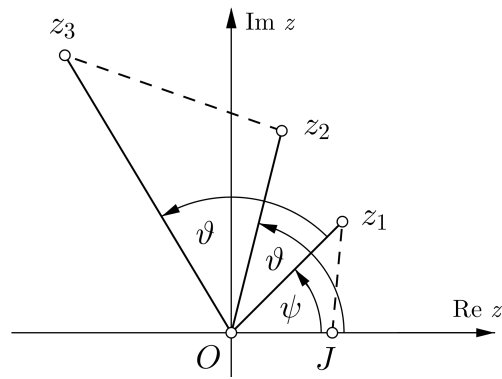
Obrázek 2.7

*Poznámka 2.5:* Z provedené úvahy je vidět, že každý bod se ve spirální podobnosti zobrazuje po (logaritmické) spirále, odtud pak vyplývá název tohoto zobrazení.

Dále necht' je dána Gaussova rovina komplexních čísel a dvě libovolná komplexní čísla v goniometrickém tvaru  $z_1 = |z_1|(\cos \psi + i \sin \psi)$ ,  $z_2 = |z_2|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ . Součin těchto komplexních čísel je  $z_3 = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\psi + \vartheta) + i \sin(\psi + \vartheta))$ . V Gaussově rovině je odchylkou průvodiče čísla  $z_3$  od průvodiče  $z_1$  úhel  $\vartheta$  a délka  $|z_3|$  je  $|z_1| \cdot |z_2|$ , průvodič  $z_3$  je proto obrazem průvodiče  $z_1$  ve spirální podobnosti

<sup>3</sup>Logaritmická spirála má v polárních souřadnicích tvar  $r = ae^{b\varrho}$ , kde  $a, b$  jsou (reálné) konstanty.





Obrázek 2.8

$\mathcal{S}(O, |z_2|, \vartheta)$ . Geometrická reprezentace součinu komplexních čísel je proto spirální podobnost. Pro komplexní počátek  $O = 0 + 0i$ , jednotku  $J = 1 + 0i$  a přiřazením bodů  $Z_1, Z_2, Z_3$  po řadě obrazům komplexních čísel  $z_1, z_2$  a  $z_3$  lze zapsat  $\triangle OJZ_1 \sim \triangle OZ_2Z_3$  (obr. 2.8). Analogicky se dá uvažovat o podílu komplexních čísel.

# Kapitola 3

## Aplikace spirální podobnosti

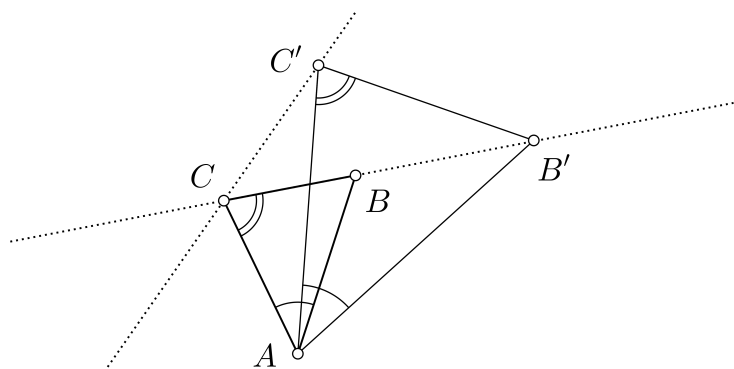
V poslední kapitole aplikujeme spirální podobnosti pro řešení planimetrických úloh a dokazování příslušných tvrzení. Celkem tato kapitola obsahuje 26 různých úloh vhodných pro praktické užití spirální podobnosti. V řešení se často odkazujeme na věty uvedené v předchozím teoretickém rozboru této práce. Zároveň občas využíváme i vlastností z dalších okruhů geometrie, některé takové uvádíme v dodatcích.

### 3.1 Řešené úlohy

V této části uvádíme jako vzor deset planimetrických úloh řešených pomocí spirální podobnosti. Důraz je zde kladen na propojení řešení s větami z teoretické části práce.

#### Úloha 1

Je dán trojúhelník  $ABC$ . Dokažte, že pokud obrazy vrcholu  $B$  v libovolné spirální podobnosti se středem  $A$  leží na přímce  $BC$ , pak obrazy vrcholu  $C$  též leží na (jiné) přímce.

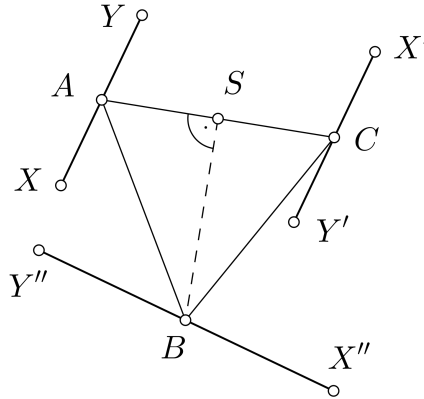


Obrázek 3.1

ŘEŠENÍ. Jestliže se bod  $B$  zobrazí na  $B'$  v jisté spirální podobnosti  $\mathcal{S}_1$  se středem  $A$ , jsou trojúhelníky  $ABC$  a  $AB'C'$  podobné, kde  $\mathcal{S}_1(C) = C'$ . Dle duplicity spirální podobnosti (věta 2.2.3) též  $B \rightarrow C$  v  $\mathcal{S}_2(A, |CA|/|BA|, \widehat{BAC})$  a z vlastností podobných zobrazení též všechny obrazy bodu  $C$  leží na jedné přímce (obr. 3.1).

**Úloha 2**

Je dána úsečka  $XY$  a bod  $S$ , který na ní neleží. Určete množinu všech bodů určených vrcholy rovnostranného trojúhelníku  $ABC$  takového, že  $A \in \overline{XY}$  a  $S$  je střed strany  $AC$ .

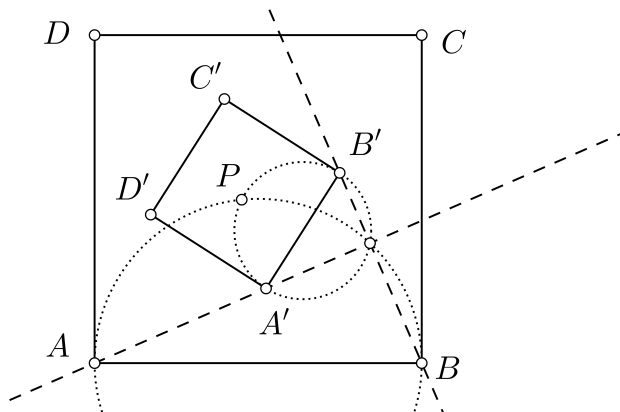


Obrázek 3.2

**ŘEŠENÍ.** Bod  $C$  je středově souměrný s  $A$  podle středu  $S$ , proto množina vrcholů  $C$  odpovídá úsečce  $X'Y'$  středově sdružená s  $\overline{XY}$  podle  $S$ . Bod  $A$  se zobrazí na  $B$  ve spirální podobnosti  $\mathcal{S}(S, \sqrt{3}, +90^\circ)$ , proto množinou vrcholů  $B$  je úsečka  $X''Y''$ , jež je obrazem  $\overline{XY}$  v dané spirální podobnosti, je kolmá na oběma předchozí a  $|X''Y''| = \sqrt{3} \cdot |XY|$  (obr. 3.2).

**Úloha 3**

Čtverce  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$  představují dvě mapy stejného území odpovídající různým měřítkům, přitom mapa  $A'B'C'D'$  je ta s menším měřítkem a je vepsána do mapy  $ABCD$ . Dokažte, že existuje právě jeden bod  $P$  takový, že  $P$  představuje stejné místo na mapě  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$ . Určete tento bod.

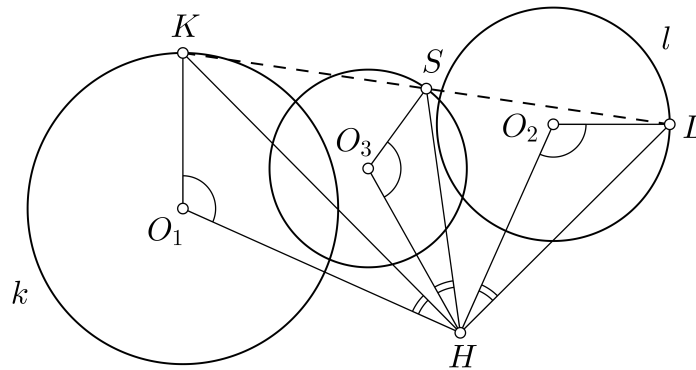


Obrázek 3.3

ŘEŠENÍ. Mapy  $A'B'C'D'$ ,  $ABCD$  představují různě velké čtverce, jsou proto podobné s poměrem podobnosti  $k \neq 1$ , tj. spirálně podobné, a dle věty 1.2.2 existuje jediný samodružný bod, jímž je právě bod  $P$ . Tento bod je pak středem uvažované spirální podobnosti a lze jej určit podle věty 2.2.5 (obr. 3.3).

#### Úloha 4

Na stěně visí dvoje hodiny. Najděte množinu bodů, po které se pohybuje střed úsečky spojující konce velkých ručiček, když jedny hodiny jdou o čtvrt hodinu napřed.



Obrázek 3.4

ŘEŠENÍ. Visící hodiny nahradíme kružnicemi  $k(O_1, r_1)$ ,  $l(O_2, r_2)$ , kde kružnice  $l$  představuje hodiny jdoucí napřed. Nechť  $K \in k$ ,  $L \in l$  a tyto body označují konce velkých ručiček, tj. vzhledem k předběhání hodin  $l$  platí  $KO_1 \perp LO_2$ . Uvažujme spirální podobnost  $\mathcal{S}_1(H, |LO_2|/|KO_1|, \widehat{KHL})$  s jistým středem  $H$ , ve které se zobrazí  $k \rightarrow l$ ,  $K \rightarrow L$ .

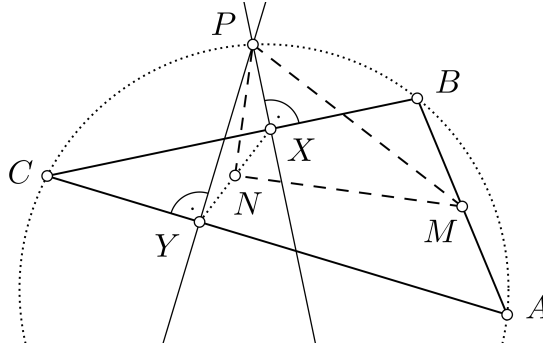
Nechť  $S$  je střed úsečky  $KL$ . Dle lemmatu 2.2.4 jsou při pohybu bodů  $K$ ,  $L$  po kružnicích všechny trojúhelníky  $KHL$  podobné, proto jsou podobné i všechny trojúhelníky  $SHL$ . Existuje tedy spirální podobnost  $\mathcal{S}_2(H, |HS|/|HL|, \widehat{LHS})$  zobrazující bod  $L$  na  $S$ , který z vlastnosti podobných zobrazení vykresluje stejnou křivku a to kružnici (obr. 3.4).

#### Úloha 5

Je dán trojúhelník  $ABC$  a bod  $P$  ležící na oblouku kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  mezi vrcholy  $BC$ , na němž neleží vrchol  $A$ . Paty spuštěné z bodu  $P$  na strany  $BC$  a  $AC$  jsou po řadě  $X$ ,  $Y$ . Jestliže  $M$  je střed úsečky  $AB$  a  $N$  střed úsečky  $XY$ , dokažte, že  $|\sphericalangle MNP| = 90^\circ$ .

ŘEŠENÍ. Jelikož platí rovnosti  $|\sphericalangle PXB| = |\sphericalangle PYA|$  a  $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CAP|$ , jsou trojúhelníky  $BPX$  a  $APY$  podobné, proto  $\overline{BX} \rightarrow \overline{AY}$  ve spirální podobnosti

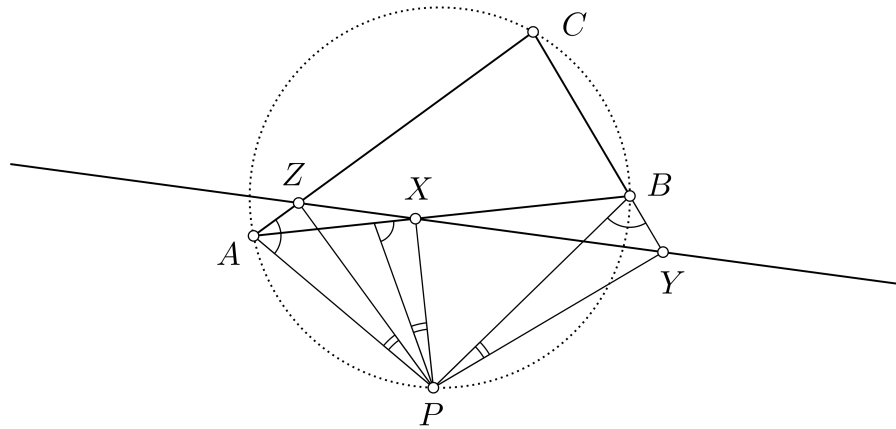
$\mathcal{S}_1(P, |PY|/|PX|, \widehat{PXY})$ . Díky duplicitě (věta 2.2.3)  $\overline{BA} \rightarrow \overline{XY}$ , ze zachování dělicího poměru také  $M \rightarrow N$ , proto i  $\overline{BM} \rightarrow \overline{XN}$  v  $\mathcal{S}_2(P, |PB|/|PX|, \widehat{BPX})$ . Opětovným využitím duplicity platí  $\mathcal{S}_1 : \overline{BX} \rightarrow \overline{MN}$ , proto jsou trojúhelníky  $BPX$  a  $MPN$  podobné a  $|\sphericalangle MNP| = 90^\circ$  (obr. 3.5).



Obrázek 3.5

### Úloha 6 (Simsonova přímka)

Necht'  $ABC$  je daný trojúhelník a  $P$  je bod na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ . Necht'  $X, Y, Z$  jsou paty kolmic z bodu  $P$  po řadě na strany  $AB, BC$  a  $AC$ . Dokažte, že  $X, Y, Z$  leží na jedné přímce, tzv. Simsonově přímce.



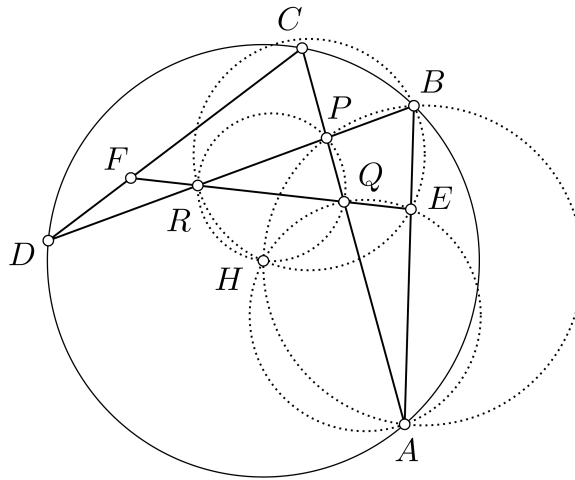
Obrázek 3.6

**ŘEŠENÍ.** Bez újmy na obecnosti uvažujme bod  $P$  na oblouku kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$  mezi vrcholy  $AB$ , na kterém neleží vrchol  $C$ . Jelikož body  $Z$  a  $Y$  jsou paty kolmic z  $P$  na strany trojúhelníku, platí  $|\sphericalangle PZA| = |\sphericalangle PYB|$ . Protože čtyřúhelník  $BCAP$  je tětiový, platí také  $|\sphericalangle PAC| = 180^\circ - |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PBY|$  a ze shodnosti dvou úhlů plyne  $\triangle PAZ \sim \triangle PBY$ . Dle duplicity (věta 2.2.3) existuje spirální podobnost  $\mathcal{S} : \overline{AB} \rightarrow \overline{ZY}$ . To však znamená, že se přímka  $AB$  zobrazí v této spirální podobnosti na Simsonovu přímku  $ZY$ . Z podobnosti trojúhelníků plyne, že bod  $X$  má jistý vzor na  $AB$  a proto  $X \in ZY$  (obr. 3.6).

*Poznámka 3.1:* Platí dokonce věta: Body  $X, Y, Z$  leží na téže přímce, právě když je čtyřúhelník  $ABCP$  tětívový, viz např. [13], str. 1.

### Úloha 7

Nechť  $ABCD$  je tětívový čtyřúhelník takový, že  $|AB| = |CD|$  a  $AC \not\parallel BC$ . Nechť dále  $E$  a  $F$  jsou po řadě vnitřní body úseček  $AD$  a  $CD$  a platí  $|BE| = |DF|$ . Přímky  $AC$  a  $BD$  se protínají v bodě  $P$ ,  $AC$  a  $EF$  v bodě  $Q$ ,  $BD$  a  $EF$  v  $R$ . Uvažujte všechny trojúhelníky  $PQR$  pro různé polohy bodů  $E, F$ . Dokažte, že všechny kružnice trojúhelníkům  $PQR$  opsané mají společný bod různý od  $P$ .



Obrázek 3.7

**ŘEŠENÍ.** Ve spirální podobnosti se středem  $H$  se zobrazí  $\overline{AC} \rightarrow \overline{BD}$  a z podmínky  $|BE| = |DF|$  také  $E \rightarrow F$ , proto  $\overline{AE} \rightarrow \overline{CF}$ ,  $\overline{EB} \rightarrow \overline{FD}$  a dle věty 2.2.6 jsou i čtyřúhelníky  $HABP$ ,  $HAEQ$ ,  $HEBR$  tětívové. Kružnice opsané těmto čtyřúhelníkům jsou Miquelovy kružnice čtyřúhelníku  $PQEB$  s Miquelovým bodem  $H$  (věta 2.2.7), poslední taková kružnice je opsaná čtyřúhelníku  $HQPR$ . Bod  $H$  je samodružný bod uvažované spirální podobnosti a proto je dalším společným bodem všech kružnic opsaných trojúhelníku  $PQR$  (obr. 3.7).

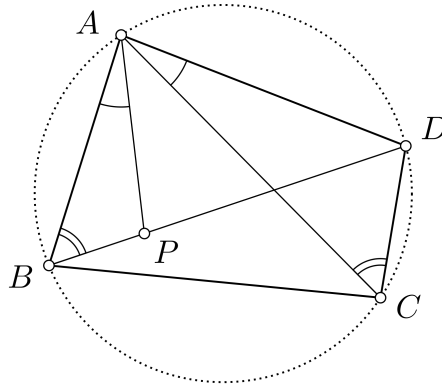
### Úloha 8 (Ptolemaiova věta)

Dokažte tvrzení: Nechť  $ABCD$  je tětívový čtyřúhelník. Označíme-li délky úseček  $AB, BC, CD, DA$  po řadě  $a, b, c, d$  a délky úhlopříček  $AC, BD$  označíme po řadě  $e, f$ , pak platí

$$ac + bd = ef.$$

**ŘEŠENÍ.** Bez újmy na obecnosti předpokládejme  $|\sphericalangle BAD| > |\sphericalangle ABD|$ . Protože body  $B, C$  leží na oblouku nad úsečkou  $AD$ , platí  $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$ . Označme bod  $P$ ,

jež leží na úhlopříčce  $BD$  a platí  $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAP|$ . Trojúhelníky  $ABP$  a  $ACD$  jsou spirálně podobné v zobrazení  $\mathcal{S}(A, |AC|/|AB|, \widehat{BAC})$ .



Obrázek 3.8

Jelikož  $\mathcal{S}(B) = C$  a  $\mathcal{S}(P) = D$ , pak dle lemmatu 2.2.4 jsou podobné také trojúhelníky  $ABC$  a  $APD$ . Z první a druhé podobnosti obdržíme

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CD|}, \quad \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|PD|}{|BC|}, \quad \text{tj.}$$

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BP|, \quad |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |PD|.$$

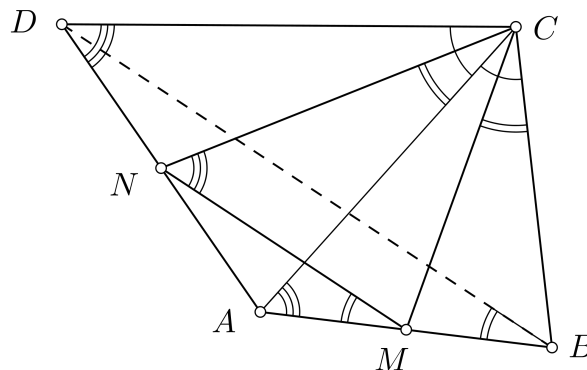
Sečtením posledních rovností získáme po úpravě

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot (|BP| + |PD|) = |AC| \cdot |BD|,$$

což v zavedeném značení znamená  $ac + bd = ef$ , což jsme chtěli dokázat (obr. 3.8).

**Úloha 9** (26. Italská MO, 2010)

Nechť  $ABCD$  je konvexní čtyřúhelník, pro který platí  $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDA|$ ,  $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle ACD|$ . Nechť  $M$  je střed úsečky  $AB$ . Dokažte, že  $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle DBA|$ .



Obrázek 3.9

**ŘEŠENÍ.** Jelikož  $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDA|$  a  $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle ACD|$ , jsou trojúhelníky  $ABC$  a  $DAC$  spirálně podobné v  $\mathcal{S}(C, |BC|/|AC|, \widehat{BCA})$ , obraz bodu  $M$  je střed

úsečky  $AD$ ,  $\mathcal{S}(M) = N$  a úsečka  $MN$  je střední příčkou trojúhelníku  $ABD$ , tudíž  $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle AMN|$ . Dle lemmatu 2.2.4 jsou trojúhelníky  $NMC$  a  $ABC$  podobné. Součtem velikostí úhlů tvořených polopřímkami  $MA$ ,  $MN$ ,  $MC$  a  $MB$  získáme velikost přímého úhlu, tj.

$$|\sphericalangle AMN| + |\sphericalangle NMC| + |\sphericalangle CMB| = 180^\circ$$

a z trojúhelníku  $MBC$  plyne

$$|\sphericalangle BCM| + |\sphericalangle MBC| + |\sphericalangle CMB| = 180^\circ.$$

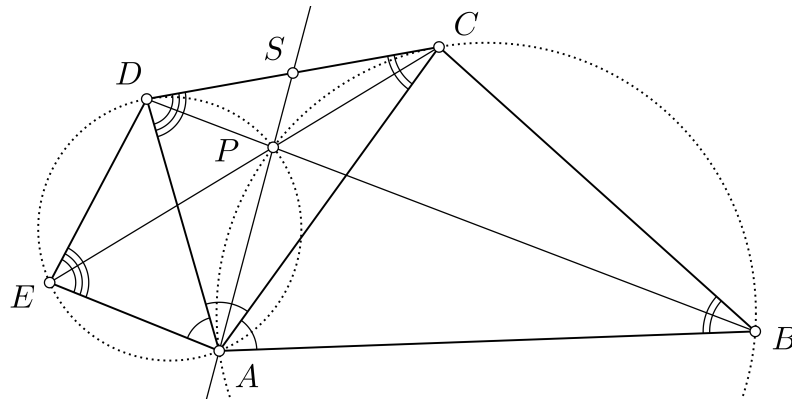
Z  $\triangle NMC \sim \triangle ABC$  plyne  $|\sphericalangle NMC| = |\sphericalangle MBC|$  a proto rozdílem předchozích dvou rovností obdržíme  $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle DBA|$  (obr. 3.9).

### Úloha 10 (IMO Shortlist 2006)

Nechť  $ABCDE$  je konvexní pětiúhelník takový, že platí

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DAE| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADE|.$$

Nechť  $P$  je průsečík úhlopříček  $BD$  a  $CE$ . Dokažte, že přímka  $AP$  protne úsečku  $CD$  v jejím středu.



Obrázek 3.10

ŘEŠENÍ. Z velikostí úhlů plyne, že trojúhelníky  $ADE$ ,  $ACD$  a  $ABC$  jsou vzájemně spirálně podobné dle středu  $A$ . Uvažujme  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ . Pak  $\overline{ED} \rightarrow \overline{CB}$  a dle věty 2.2.5 je  $P$  průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům  $ADE$ ,  $ABC$  a přímka  $AP$  chordálou těchto kružnic.

Z rovnosti  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$  plyne, že přímka  $CD$  je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$  a podobně z rovnosti  $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle ADC|$  plyne, že přímka  $CD$  je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku  $ADE$ . Střed  $S$  úsečky  $CD$  pak leží na tečně k oběma kružnicím a navíc na jejich chordále, proto  $|CS|^2 = |DS|^2$ <sup>1</sup>, z čehož plyne požadovaná vlastnost (obr. 3.10).

<sup>1</sup>Viz např. [6], str. 91.



## 3.2 Další neřešené úlohy

Tato část představuje sborník, který pokračuje ve výčtu úloh spolu s návodem k jejich řešení. Obsahuje celkem šestnáct neřešených úloh a slouží k upevnění nabytých znalostí a tréninku praktické aplikace spirální podobnosti.

### Úloha 11

V rovině jsou dány dva různé čtverce  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$ , body  $A'', B'', C'', D''$  jsou po řadě středy úseček  $AA', BB', CC'$  a  $DD'$ . Dokažte, že čtyřúhelník  $A''B''C''D''$  je opět čtverec.

[NÁVOD. Čtverce  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$  jsou zobrazeny jeden na druhý ve spirální podobnosti vzhledem k jistému středu. Lze využít vlastností plynoucích z lemmatu 2.2.4.]

### Úloha 12

Nechť trojúhelníky  $AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3$  ležící v jedné rovině jsou navzájem (přímo) podobné. Nechť body  $B_1, B_2, B_3$  leží na jedné přímce. Dokažte, že také body  $C_1, C_2, C_3$  leží na přímce.

[NÁVOD. Alespoň jeden ze zadaných trojúhelníků určuje vhodnou spirální podobnost, v níž se zobrazí jedna přímka na druhou.]

### Úloha 13

Jsou dány dvě rovnoběžky a bod  $O$ , jež leží na ose pásu jimi omezeného. Vedeme-li v téže rovině bodem  $O$  přímkou  $p$  různoběžnou s danými rovnoběžkami, protne je postupně v bodech  $X$  a  $Y$ . Nechť  $Z$  je vrchol rovnostranného trojúhelníku  $XYZ$ . Otočíme-li přímkou  $p$  se středem otáčení  $O$  o plný úhel, vytvoří vrcholy  $Z$  všech trojúhelníků  $XYZ$  jistou množinu bodů. Určete tuto množinu.

[NÁVOD. Pro konkrétní polohu trojúhelníku  $XYZ$  lze snadno určit spirální podobnost zobrazující body  $X$  či  $Y$  na vrchol  $Z$ . Pomocí jistého koeficientu podobnosti a úhlu otočení lze již určit množinu vrcholů  $Z$ .]

### Úloha 14

Buď  $ABC$  pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu  $C$ . Nechť  $M$  je střed strany  $AB$ ,  $D$  takový bod strany  $BC$ , že platí  $|CD| = |CM|$ . Označme  $P$  druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům  $BCM$  a  $BDA$ . Dokažte, že  $P$  leží na ose úhlu  $ABC$ .

[NÁVOD. Existuje spirální podobnost  $\mathcal{S} : A \rightarrow D, M \rightarrow C$ . Ze shodnosti úseček  $AM$  a  $CD$  lze díky duplicitě spirální podobnosti ukázat též shodnost trojúhelníků  $AMP$  a  $DCP$ . Závěr plyne z vlastností výšek trojúhelníku.]

### Úloha 15

Bod  $X$  se pohybuje po oblouku Thaletovy kružnice sestrojené nad úsečkou  $AB$ . Bod  $Y$  je bod polopřímky  $XA$ , pro který platí  $|XY| = |XB|$ . Najděte množinu všech bodů  $Y$ .

[NÁVOD. Lze uvažovat spirální podobnost se středem  $B$  zobrazující bod  $X$  na  $A$ .]

### Úloha 16

Jsou dány tři různoběžné přímky, po kterých se rovnoměrně v čase pohybují tři body  $A, B, C$  příslušné každý různé přímce. Ukažte, že pokud ve dvou různých časech  $t_1$  a  $t_2$  jsou trojúhelníky  $ABC$  podobné, pak jsou podobné v každém dalším čase.

[NÁVOD. Trojúhelníky jsou spirálně podobné. Opakovaným užitím duplicity spirální podobnosti a uvážením úměrnosti přírůstku dráhy bodů vůči času lze dokázat požadovanou vlastnost.]

### Úloha 17

Body  $M$  a  $N$  se pohybují po stranách  $AB$  a  $AC$  trojúhelníku  $ABC$  tak, že platí rovnost  $|BM|/|MA| = |AN|/|NC|$ . Uvažujme všechny kružnice opsané trojúhelníku  $AMN$  (pro všechny polohy bodů  $M, N$ ). Dokažte, že tyto kružnice mají společný bod různý od  $A$ .

[NÁVOD. Spirální podobnost se středem  $S$  zobrazuje  $B \rightarrow A, A \rightarrow C$ , tj.  $BA \rightarrow AC$ . Tyto přímky svírají úhel shodný s  $\sphericalangle MSN$ . Získáváme tak tětivový čtyřúhelník.]

### Úloha 18

Nechť  $ABC$  je trojúhelník, bod  $D$  je patou jeho výšky z bodu  $A$ . Nechť přímka téže roviny prochází bodem  $D$  a body  $E, F$ , pro něž platí  $AE \perp BE$  a  $AF \perp CF$ . Označíme-li střed úsečky  $BC$  jako  $M$  a střed úsečky  $EF$  jako  $N$ , dokažte, že  $AN \perp NM$ .

[NÁVOD. Lze uvážit, že úsečka  $EB$  se zobrazí na úsečku  $FC$  ve spirální podobnosti se středem  $A$ .]

### Úloha 19

Trojúhelníku  $ABC$  jsou v rovině vně jeho stran  $AB, BC$  a  $CA$  připsány po

řadě čtverce o středech  $S_1, S_2, S_3$ . Dokažte, že úsečka  $S_1S_2$  je kolmá na úsečce  $BS_3$  a platí  $|S_1S_2| = |BS_3|$ .

[NÁVOD. Lze určit vhodnou dvojici trojúhelníků, které jsou spirálně podobné s poměry podobností  $\sqrt{2}$  a orientovanými úhly otočení  $\pm 45^\circ$ . Pokud tato dvojice bude mít navíc společnou stranu, lze porovnat poměry velikostí úseček.]

### Úloha 20 (Čínská MO 1992)

Je dán tětivový čtyřúhelník  $ABCD$ , průsečík jeho úhlopříček označíme  $P$ , bod  $O$  nechť je střed kružnice čtyřúhelníku opsané a  $Q$  je druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům  $ABP, CDP$ . Dokažte, že úhel  $PQO$  je pravý.

[NÁVOD. Uvažujme spirální podobnost zobrazující střed úhlopříčky  $AC$  na střed úhlopříčky  $BD$ . Tyto středy spolu s body  $P, Q$  leží na jedné kružnici.]

### Úloha 21

Nechť  $ABCD$  je čtyřúhelník a bod  $P$  průsečík jeho úhlopříček. Nechť  $M$  je střed úhlopříčky  $AC$ ,  $N$  je střed  $BD$ ,  $O_1$  je střed kružnice opsané trojúhelníku  $APD$  a  $O_2$  je střed kružnice opsané trojúhelníku  $BCP$ . Nechť  $O$  je střed úsečky  $O_1O_2$ . Dokažte, že  $O$  je středem kružnice opsané trojúhelníku  $MPN$ .

[NÁVOD. Dle věty 2.2.5 je zřejmý střed spirální podobnosti  $\mathcal{S}: \overline{BC} \rightarrow \overline{DA}$  a díky duplicitě spirální podobnosti jsou též dané kružnice spirálně podobné vzhledem k tomuto středu.]

### Úloha 22 (Napoleonova věta)

Dokažte tvrzení: Nechť  $ABC$  je trojúhelník a  $BCD, CEA$  a  $ABF$  jsou rovnostranné trojúhelníky v téže rovině připsané vně stran trojúhelníku  $ABC$  s těžišti po řadě  $T_D, T_E$  a  $T_F$ . Pak je trojúhelník  $T_DT_ET_F$  také rovnostranný.

[NÁVOD. Pomocí spirálních podobností se středy ve vrcholech trojúhelníku  $ABC$ , poměry podobností  $\sqrt{3}$  a orientovanými úhly otočení  $\pm 30^\circ$  lze dokázat shodnost stran trojúhelníku  $T_DT_ET_F$ .]

### Úloha 23 (USAMO 2006)

Je dán čtyřúhelník  $ABCD$ , body  $E, F$  leží po řadě na jeho stranách  $AD, BC$  tak, že platí  $|AE|/|ED| = |BF|/|FC|$ . Body  $S, T$  jsou po řadě průsečíky přímky  $EF$  s  $BA, CD$ . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům  $SAE, SBF, TCF$  a  $TDE$  mají společný bod.

[NÁVOD. Definujme bod  $M$  jako střed spirální podobnosti  $\mathcal{S}: A \rightarrow B, D \rightarrow C$ . Lze ukázat, že i  $E \rightarrow F$  v téže spirální podobnosti. Pak  $M$  je Miquelovým bodem dvou

vhodných čtyřúhelníků a lze se odkázat na větu 2.2.7.]

**Úloha 24** (All-Russian Olympiad 2011)

Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  a bod  $O$ , jež je středem kružnice trojúhelníku opsané. Kružnice procházející body  $A$  a  $O$  protíná strany  $AB$  a  $AC$  po řadě v bodech  $P$ ,  $Q$ . Dokažte, že ortocentrum trojúhelníku  $OPQ$  leží na přímce  $BC$ .

[NÁVOD. Označme  $K$ ,  $L$ ,  $M$  po řadě středy stran  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  daného trojúhelníku. Nejprve uvažujme případ, kdy  $P \neq K$  a  $Q \neq M$ . Z tětiovosti čtyřúhelníku  $APOQ$  lze dokázat  $|\sphericalangle OQM| = |\sphericalangle OPK|$ , což naznačuje vhodnou spirální podobnost. Ze znalosti ortocentra trojúhelníku  $OKM$  lze pomocí nalezené spirální podobnosti určit polohu ortocentra trojúhelníku  $OPQ$ .]

**Úloha 25** (USA TST 2000)

Nechť  $ABCD$  je tětiový čtyřúhelník,  $P$  je průsečík jeho úhlopříček a body  $E$ ,  $F$  jsou po řadě paty kolmic na strany  $AB$ ,  $CD$ . Nechť bod  $K$  je střed strany  $BC$  a  $L$  střed  $AD$ . Dokažte, že  $EF \perp KL$ .

[NÁVOD. Zobrazíme bod  $P$  v osově souměrnosti podle  $DC$  a určíme vhodnou spirální podobnost. Z vlastností podobných zobrazení můžeme uvažovat vhodný deltoid.]

**Úloha 26** (54. IMO)

Je dán trojúhelník  $ABC$ . Body  $P$ ,  $Q$  leží na straně  $BC$  tak, že je splněno  $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$  a  $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$ . Body  $M$  a  $N$  leží po řadě na přímkách  $AP$  a  $AQ$  tak, že  $P$  je střed úsečky  $AM$  a  $Q$  je střed úsečky  $AN$ . Dokažte, že průsečík přímek  $BM$  a  $CN$  leží na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .

[NÁVOD. Uvažujme trojúhelník  $AB_1C_1$  takový, že strana  $BC$  je jeho střední příčkou. Trojúhelník  $ANC$  je spirálně podobný s  $BB_1M$  s úhlem otočení  $\varphi = \widehat{BAC} - 180^\circ$ . Lze pak využít vlastnosti tětiového čtyřúhelníku  $ABCD$ , kde  $D \in BM \cap NC$ .]

# Dodatky

Zde uvádíme některé základní planimetrické vlastnosti užívané při řešení úloh uvedených v této práci. Také zde řešíme některé speciální případy, které nemusely být při řešení úloh zřejmé. Věty v dodatku číslujeme s příponou „D“. Jelikož jde mnohdy o školskou problematiku, známější tvrzení uvedeme bez důkazu.

## Věta 1D (shodnost trojúhelníků)

Dva trojúhelníky jsou shodné:

*sss*: shodují-li se v sobě si odpovídajících stranách.

*sus*: shodují-li se ve dvou stranách a úhlu, který tyto dvě strany svírají.

*usu*: shodují-li se v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně.

*Ssu*: shodují-li se ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich.

## Věta 2D (podobnost trojúhelníků)

Dva trojúhelníky jsou podobné:

*sss*: jsou-li podobné v odpovídajících si stranách.

*sus*: jsou-li podobné ve dvou stranách a shodují-li se v úhlu, který svírají.

*uu*: shodují-li se ve dvou úhlech.

*Ssu*: jsou-li si podobné ve dvou stranách a shodují-li se v úhlu proti větší z nich.

## Věta 3D (kritérium tětívového čtyřúhelníku)

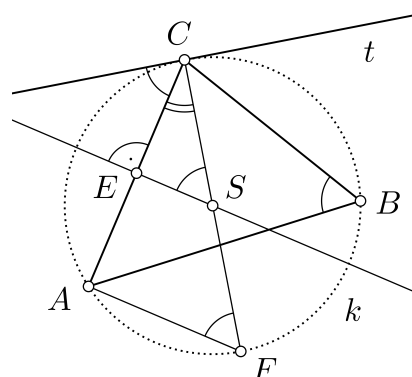
Čtyřúhelník je tětívový, právě když součty velikostí protilehlých úhlů jsou stejné a rovny  $180^\circ$ .

Následující věta dokazuje vlastnost tečny užitou v úloze 10.

## Věta 4D

Nechť  $k$  je kružnice opsaná trojúhelníku  $ABC$ ,  $t$  přímka taková, že svírá se stranou  $AC$  trojúhelníku úhel o velikosti  $|\sphericalangle ABC|$ ,  $C \in t$  a  $t$  leží vně trojúhelníku. Pak je  $t$  tečnou ke kružnici  $k$  v bodě  $C$ .

*Důkaz*: Dle obr. 4.1 sestojíme ke straně  $AC$  kolmici tak, aby procházela středem  $S$  kružnice  $k$ . Průsečík této kolmice se stranou  $AC$  označme  $E$ . Označíme-li druhý průsečík  $SC$  s kružnicí  $k$  jako  $F$ , je  $|\sphericalangle AFC| = |\sphericalangle ABC|$ . Úsečka  $SE$  je střední



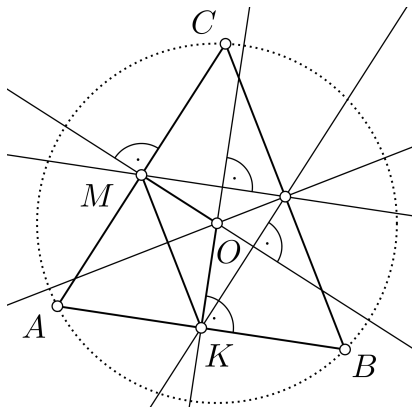
Obrázek 4.1

příčkou trojúhelníku  $AFC$  a proto  $|\sphericalangle ESC| = |\sphericalangle ABC|$ , tj.  $|\sphericalangle SCE| = 90^\circ - |\sphericalangle ABC|$  a  $t$  je tečna ke kružnici  $k$ .  $\square$

Další věta dokazuje vlastnost ortocentra trojúhelníku z úlohy 24.

**Věta 5D**

Je dán trojúhelník  $ABC$ , body  $K, M$  jsou po řadě středy jeho stran  $AB$  a  $AC$  a bod  $O$  je střed kružnice jemu opsané. Pak ortocentrum trojúhelníku  $OKM$  leží na straně  $BC$  trojúhelníku  $ABC$ .



Obrázek 4.2

*Důkaz:* Důkaz provedeme pro obr. 4.2. Jelikož  $K$  je střed strany  $AB$ , platí  $OK \perp AB$  a proto výška trojúhelníku  $OKM$  spuštěná z  $M$  na stranu  $OK$  je střední příčkou trojúhelníku  $ABC$ . Analogicky platí, že výška trojúhelníku  $OKM$  spuštěná z  $K$  na stranu  $OM$  je střední příčkou trojúhelníku  $ABC$ , tj. ortocentrum leží na straně  $BC$  a právě v jejím středu.  $\square$

# Závěr

Předložená bakalářská práce detailně studuje vlastnosti spirální podobnosti v rovině, zejména prezentuje její přednosti při efektivitě řešení planimetrických úloh.

Cílem této práce bylo sumarizovat a dále rozšířit poznatky o spirální podobnosti. Text je uveden kapitolou, jež se zabývá shodnými a podobnými zobrazeními v rovině a která shrnuje příslušné poznatky tak, aby čtenář pochopil problematiku skládání shodných a podobných zobrazení a získal tak představu o způsobu definice a motivaci ke studiu spirální podobnosti.

Druhá kapitola je od definování spirální podobnosti doprovázena grafickou podporou ve snaze co nejvíce znázornit vlastnosti daného zobrazení. Popisuje vlastnosti spirální podobnosti, uvádí množství matematických vět souvisejících s tématem a studuje jejich důsledky. V této části navíc píšeme o geometrické reprezentaci spirální podobnosti.

Poslední část práce podává rozsáhlou databázi úloh pro užití spirální podobnosti v řešení planimetrických úloh. Nabízí celkem 10 řešených příkladů a dalších 16 neřešených, jež jsou doprovázeny návodem k jejich řešení. Zadání úloh jsou čerpána mj. z knihy [1] a z webových zdrojů *Geometry Unbound* [10], *Spirální podobnost* [11], *Three Lemmas in Geometry* [15] (další zdroje uvádíme v seznamu níže).

Vlastním přínosem této práce hodnotím doplnění české matematické literatury o vhodný studijní materiál, jež se detailně věnuje právě studiu a využití spirální podobnosti, shrnuje její vlastnosti, nabízí nezanedbatelné množství souvisejících úloh a názorně prezentuje jejich řešení. První kapitola práce navíc může sloužit jako přehled základních vlastností podobných a shodných zobrazení v rovině. Díky psaní této práce jsem pronikl hlouběji do geometrie roviny a zvládl, díky četným profesionálním radám pana RNDr. Jaroslava Švrčka, CSc., sepsat vlastní matematický text.

Tato práce byla vysázena systémem  $\text{\LaTeX}$ .  
Grafická podpora byla vytvořena programem GeoGebra.

# Seznam použitých zdrojů

## Literatura

- [1] Andreescu, T. – Rolínek, M. – Tkadlec, J.: *107 Geometry Problems* (from the AwesomeMath Year-Round Program), XYZ Press, 2013.
- [2] Boček, L. – Zhouf, J.: *Planimetrie*. Pdf UK, Praha, 2009.
- [3] Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: *Geometry revisited*. Washington: Mathematical Association of America, 1967. New mathematical library, 19.
- [4] Horák, S.: *Kružnice*. 1., vyd. Mladá fronta. Škola mladých matematiků, Praha, 1966.
- [5] Janyška, J.: *Geometrická zobrazení*. Math MUNI, Brno, 2014.
- [6] Lávička, M.: *Syntetická geometrie*. Skriptum ZČU, Plzeň, 2007.
- [7] Leischner, P.: *Geometrická zobrazení*. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2010.
- [8] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, Praha, 1998.
- [9] Sekanina, M. – Boček, L. – Kočandrlé, M. – Šedivý, J.: *Geometrie II*. 1., vyd. Edice učebnice pro vysoké školy. SPN, Praha, 1988.

## Internetové zdroje

- [10] Kedlaya, K. S.: *Geometry Unbound* [online]. USA, 17 Jan 2006 [cit 16.10.2017].  
Ke stažení na adrese:  
<http://kskedlaya.org/geometryunbound/gu-060118.pdf>
- [11] Konopecký, F.: *Spirální podobnost* [online]. Praha [cit 17.4.2017]. Ke stažení na adrese:  
[https://mks.mff.cuni.cz/library/Spiralni\\_podobnost\\_FK/Spiralni\\_podobnost\\_FK.pdf](https://mks.mff.cuni.cz/library/Spiralni_podobnost_FK/Spiralni_podobnost_FK.pdf)
- [12] Lávička, M.: *KMA/G2 Geometrie 2* [online]. ZČU, pomocný učební text. Plzeň, 2006 [cit 4.10.2017]. Ke stažení na adrese:  
[http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G2/texty/G2\\_text.pdf](http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G2/texty/G2_text.pdf)
- [13] Robin, J. W.: *The Simson Line* [online]. Course Math 461 Course title: College Geometry [cit 23.10.2017]. Ke stažení na adrese:  
<http://www.math.wisc.edu/~robbin/461dir/simson.pdf>



- [14] Zhao, Y.: *Cyclic Quadrilaterals – The Big Picture* [online]. Winter Camp, 2009 [cit 6.8.2017]. Ke stažení na adrese:  
[http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic\\_quad.pdf](http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf)
- [15] Zhao, Y.: *Three Lemmas in Geometry* [online]. Massachusetts Institute of Technology. Winter Camp, 2010 [cit 6.8.2017]. Ke stažení na adrese:  
[http://yufeizhao.com/olympiad/three\\_geometry\\_lemmas.pdf](http://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf)