UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

Konstrukce kuželoseček na základě projektivních vlastností

Bakalářská práce

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Miloslava Sedlářová, CSc.

Vypracovala:
Ludmila Benešová
M-DG, 3. ročník

Rok odevzdání: 2008

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení RNDr. Miloslavy Sedlářové, CSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí bakalářské práce RNDr. Miloslavě Sedlářové, CSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah:

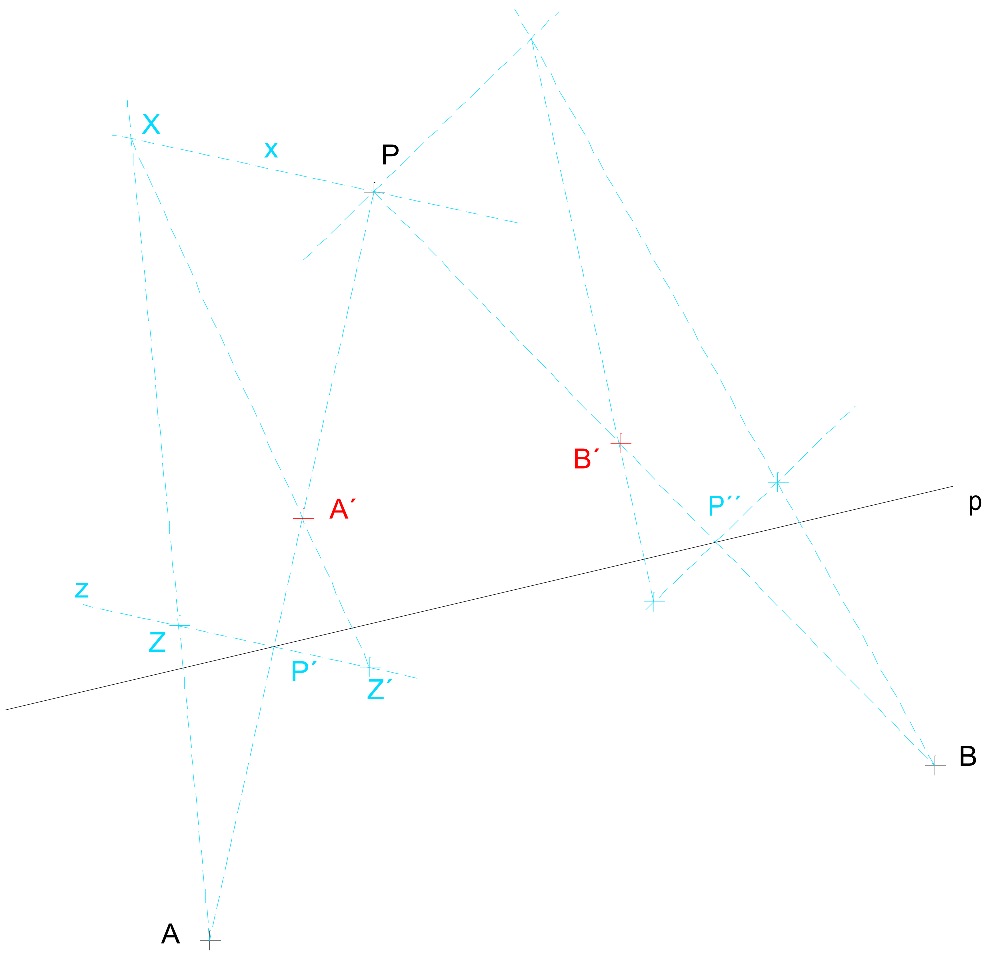
1. Základní konstrukce

Konstrukce čtvrtého harmonického bodu

Máme dán pól P s polárou p a další bod A (resp. B). Pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu doplníme další bod A´ (resp. B´).

Postup:

- **PA∩p = P´**
- bodem **P´** vedeme přímku **z**, na níž sestrojíme body **Z**, **Z´**, pro něž platí **|ZP´|=|P´Z´|**
- bodem **P** vedeme rovnoběžku **x** s přímkou **z**
- sestrojíme bod **X** na přímce **x**, pro který platí **X = AZ∩x**
- sestrojíme bod **A´**, **A´= XZ´∩PA, (PP´AA´) = -1**



Obr. 1.1

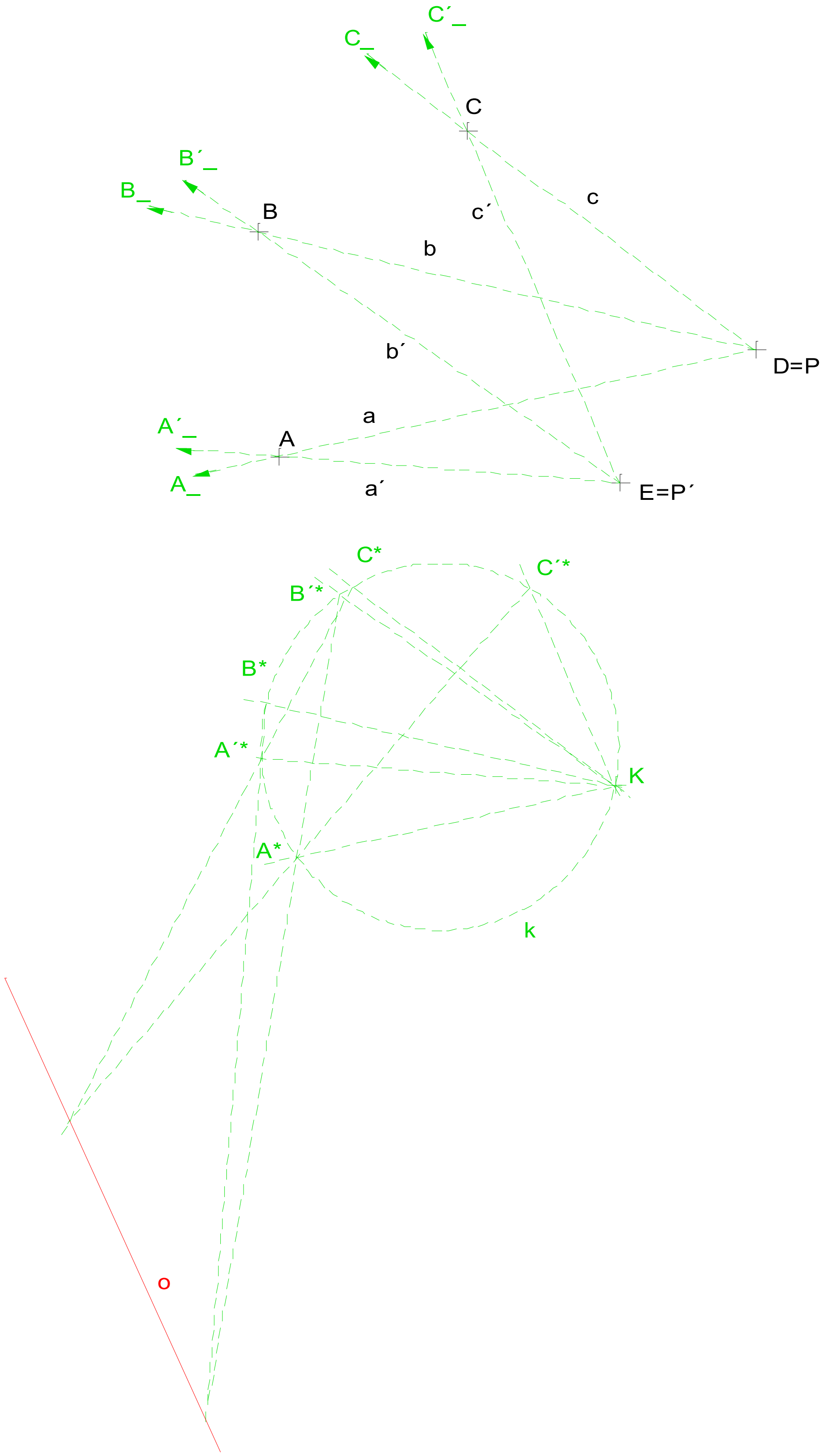
<u>Afinní klasifikace kuželosečky</u>

Chceme-li rozhodnout, o jaký afinní typ kuželosečky jde, určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou. Využíváme k tomu konstrukci s použitím Steinerovy kružnice.

Máme dáno pět bodů A, B, C, D, E kuželosečky.

<u>Postup:</u>

- dva z pěti bodů označíme za středy nesoumístných projektivních svazků **D = P**, **E = P´**
- získáme dva nesoumístné projektivní svazky **P(a,b,c,…)**, **P´(a´,b´,c´,…)**
- využíváme toho, že nevlastní body jsou určeny jen směry
- zvolíme Steinerovu kružnici **k** a na ní bod **K**
- bodem **K** promítneme body **A_**, **A´_**, **B_**, **B´_**, **C_**, **C´_** (nevlastní body), průsečíky se Steinerovou kružnicí jsou body **A***, **A´***, **B***, **B´***, **C***, **C´***
- sestrojíme direkční osu **o**, **o = (A*C´*∩A´*C*) (A*B´*∩A´*B*)**
- jestliže osa **o** protne Steinerovu kružnici **k** ve dvou bodech, jedná se o hyperbolu a spojnice těchto bodů se středem promítání **K** určují směry asymptot hyperboly
- jestliže osa **o** protne Steinerovu kružnici **k** v jednom bodě, jedná se o parabolu
- jestliže osa **o** neprotne Steinerovu kružnici **k** v žádném bodě, jedná se o elipsu (obr. 1.2)



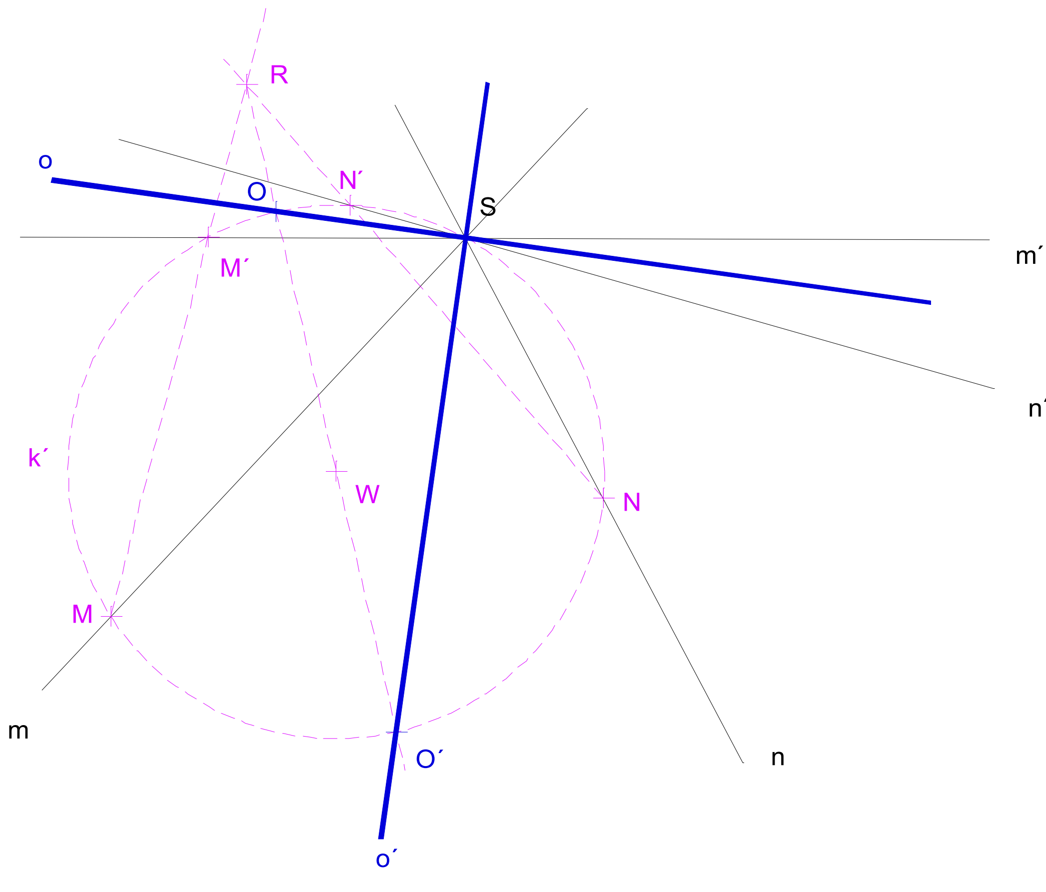
Obr. 1.2

Konstrukce hlavních os kuželosečky

V každé involuci přímek (průměrů), která není pravoúhlá existuje právě jeden pravoúhlý pár (tzv. centrální přímky). Máme-li dány sdružené průměry m, m´, n, n´ kuželosečky, je tento pravoúhlý pár roven osám kuželosečky.

Postup:

- **S** je střed svazku přímek, zvolíme Steinerovu kružnici **k´** se středem **W** procházející bodem **S**
- průměry **m**, **m´**, **n**, **n´** protínají Steinerovu kružnici **k´** v bodech **M**, **M´**, **N**, **N´**
- střed involuce je bod **R**, **R = MM´∩NN´**
- spojnice **RW** protíná Steinerovu kružnici **k´** v bodech **O**, **O´**
- body **O**, **O´** spojím se středem svazku **S**; **o**, **o´** jsou k sobě kolmé, **o = SO**, **o´ =SO´**



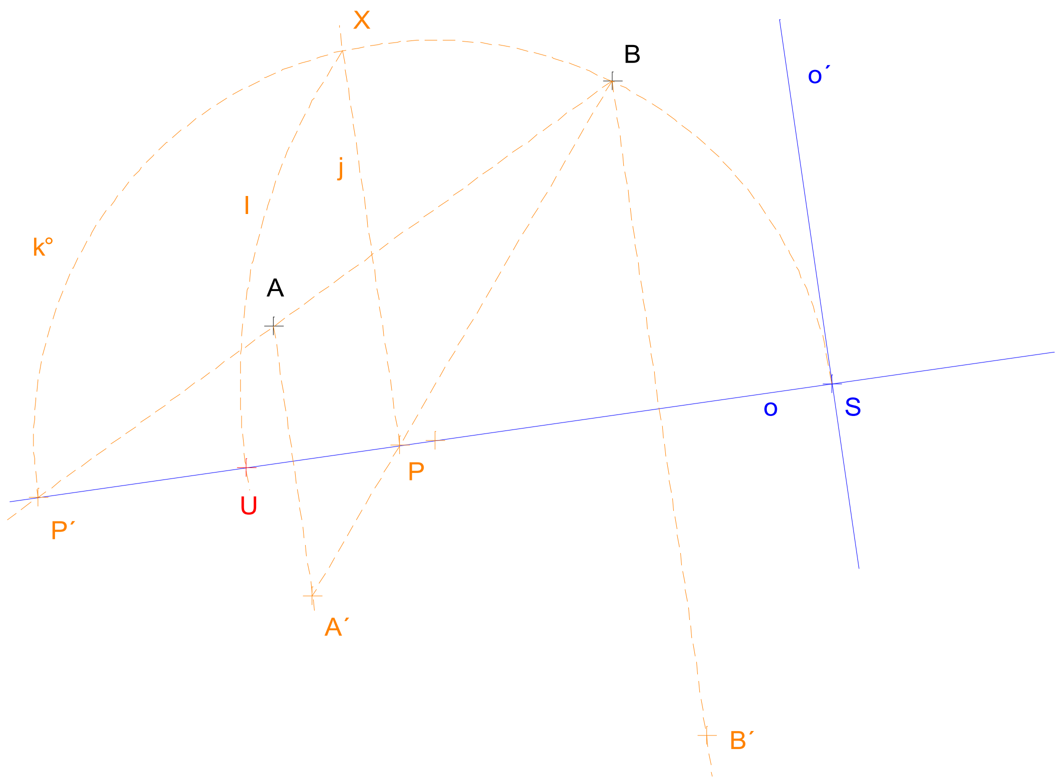
Obr. 1.3

Konstrukce vrcholů kuželosečky

Konstrukce vrcholů kuželosečky (omezení os kuželosečky), je-li dána osa o, střed S a dva body A, B kuželosečky.

Postup:

- sestrojíme body **A´**, **B´** souměrné k bodům **A**, **B** podle osy **o**
- dva vrcholy čtyřrohu **P**, **P´** jsou na ose **o**, jeden je v nekonečnu
- je dána involuce pólů **P**, **P´**, **S** a platí **|SP|.|SP´|=|SU|²**
- nad větším z průměrů **SP´**, **SP** sestrojíme Thaletovu kružnici **k°**
- v bodě **P** vztyčíme kolmici **j**, **k°∩j = X**, bodem **X** prochází kružnice **l**, **l(S, |SX|)**, **l∩o = U**
- **|US|=|SU´|**, samodružné body involuce pólů **U**, **U´** omezují osu **o**, stejným způsobem můžeme omezit i osu **o´**



Obr. 1.4

2. Konstrukce středových kuželoseček

Sestrojte kuželosečku, je-li dáno pět bodů A, B, C, D, E

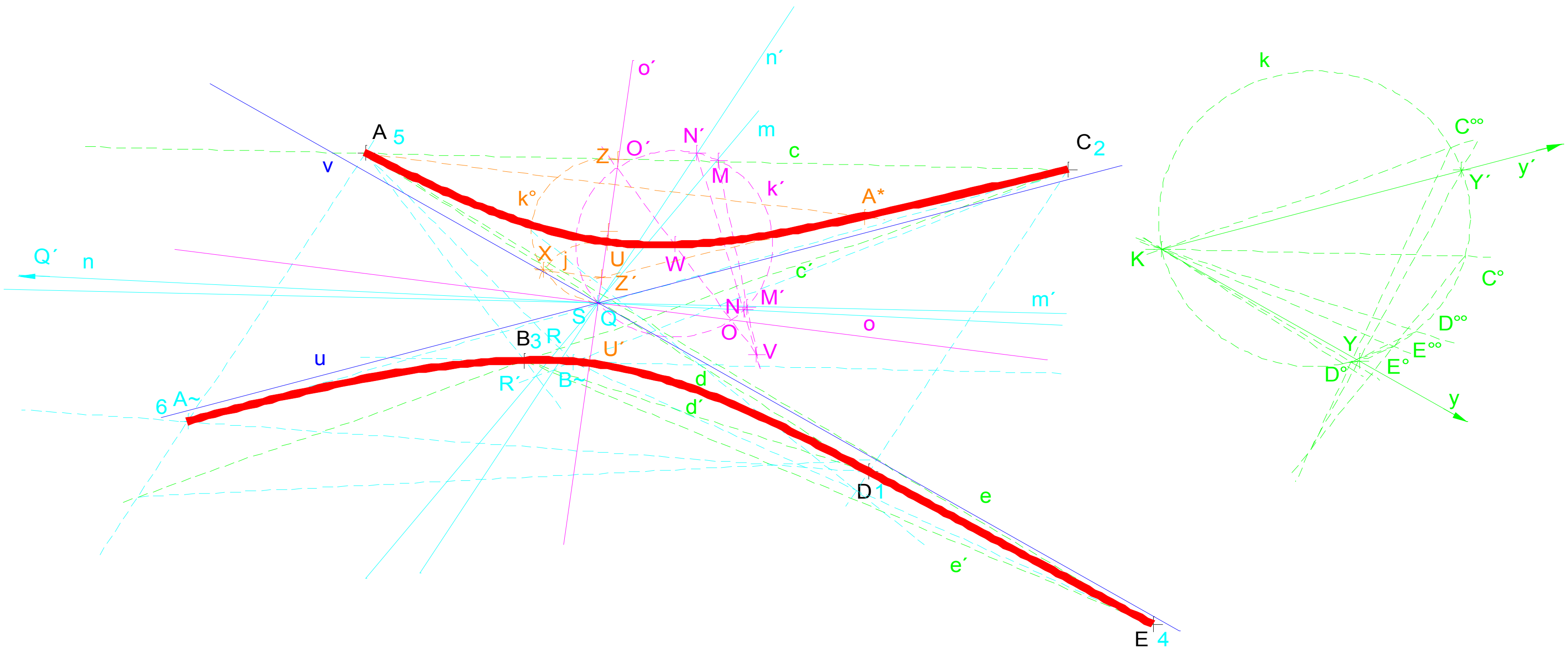
Rozbor:

- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (pomocí Steinerovy kružnice)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- sestrojíme asymptoty

Postup:

1. - zvolíme 2 body **A**,**B** za středy nesoumístných projektivních svazků **A(c,d,e,…)** a **B(c´,d´,e´,…)** (str. 7)
   - direkční osa protíná Steinerovu kružnici **k** ve dvou bodech **Y,Y´**, jedná se o hyperbolu
2. - bodem **B** vedeme rovnoběžku s přímkou **AC**
   - určíme na ní bod **B~** pomocí Pascalovy věty
   - body **A**,**B**,**B~**,**D** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **AB∩DB~ = R´** , **AB~ ∩BD = R**
   - bodem **A** vedeme rovnoběžku s přímkou **CD**
   - určíme na ní bod **A~** pomocí Pascalovy věty
   - body **A**,**A~**,**C**,**D** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **CA∩DA~ = Q´** , **CA~∩DA = Q**
   - **m = RR´**, **n = QQ´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **AC** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **CD** jdoucí bodem **S**
   - **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů
3. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy hyperboly (str. 9)
4. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy hyperboly (str. 10)
5. - sestrojíme asymptoty **u** $\|$ **y´**, **v** $\|$ **y** , **y**, **y´** jsou směry asymptot, které získáme při konstrukci direkční osy v 1. bodě postupu
6. - sestrojíme hyperbolu jdoucí body **A**,**B**,**C**,**D**,**E**

Obr. 2.1



Sestrojte kuželosečku, je-li dána tečna a s bodem dotyku A a tři další body kuželosečky B,C,D.

Rozbor:

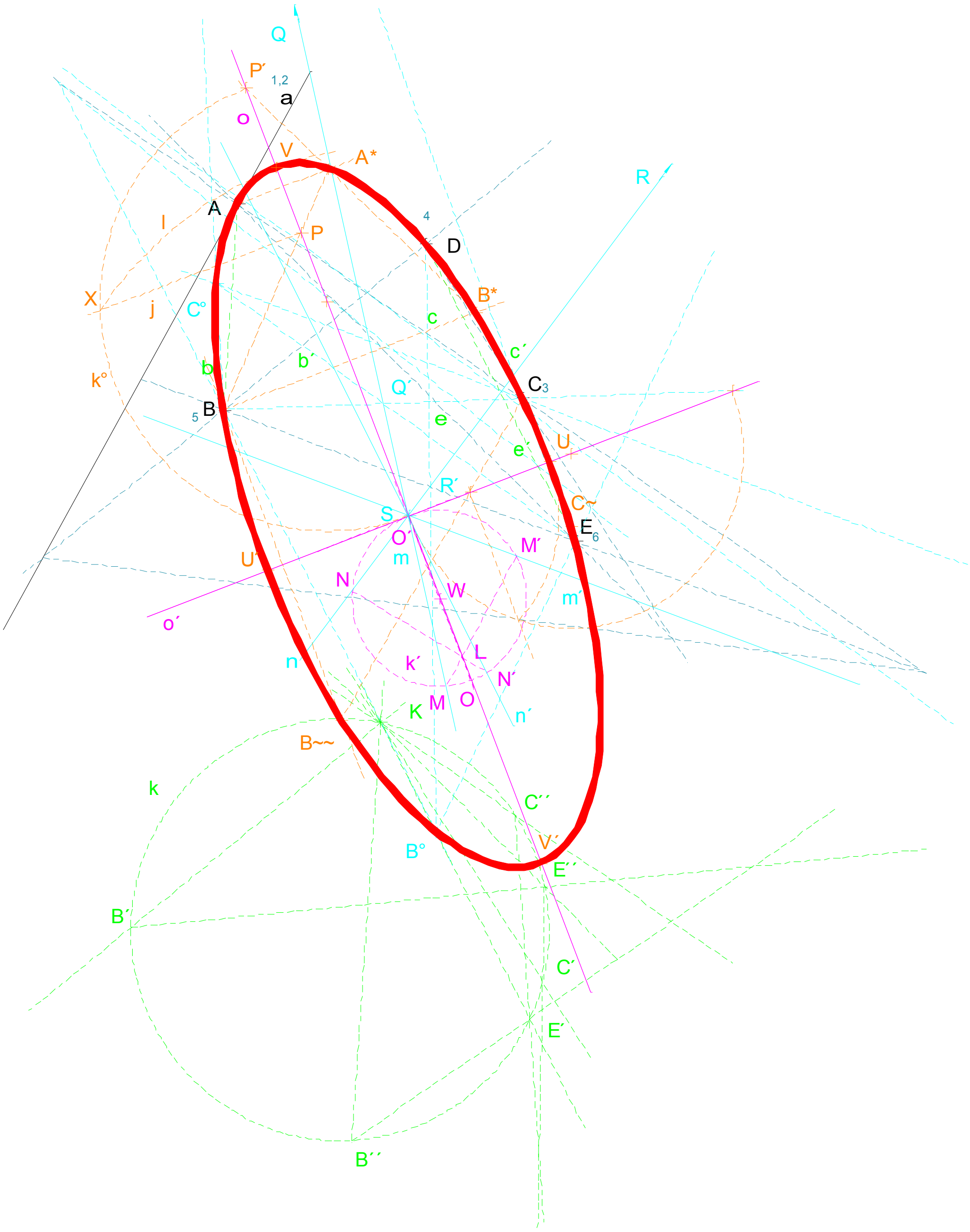
- pomocí Pascalovy věty doplníme další bod
- rozhodneme o, jaký afinní typ kuželosečky jde (určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce svazku průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- omezíme osu **o´**

Postup:

1. - bodem **B** vedeme přímku, na níž sestrojíme pomocí Pascalovy věty další bod **E** kuželosečky
2. - zvolíme 2 body **A**,**D** za středy nesoumístných projektivních svazků **A(b,c,e,…)** a **D(b´,c´,e´,…)** (str. 7)
   - direkční osa neprotíná Steinerovu kružnici **k**, jedná se o elipsu
3. - bodem **C** vedeme rovnoběžku s přímkou **BE**
   - určíme na ní bod **C°** pomocí Pascalovy věty
   - body **B**,**E**,**C**,**C°** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **EC∩BC° = Q** , **EC°∩BC = Q´**
   - bodem **B** vedeme rovnoběžku s přímkou **DE**
   - určíme na ní bod **B°** pomocí Pascalovy věty
   - body **D**,**E**,**B**,**B°** tvoří lichoběžník kuželosečce vepsaný, **BD∩EB° = R** , **BE∩B°D = R´**
   - **m = QQ´**, **n = RR´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **BE** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **DE** jdoucí bodem **S**
   - **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů
4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy elipsy (str. 9)
5. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy elipsy (str. 10)

6. - použijeme stejnou konstrukci jako v 5. bodu postupu pro omezení osy **o´**

7. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**,**B**,**C**,**D**,



Obr. 2.2

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány dvě tečny a, b s body dotyku A, B a další bod C

Rozbor:

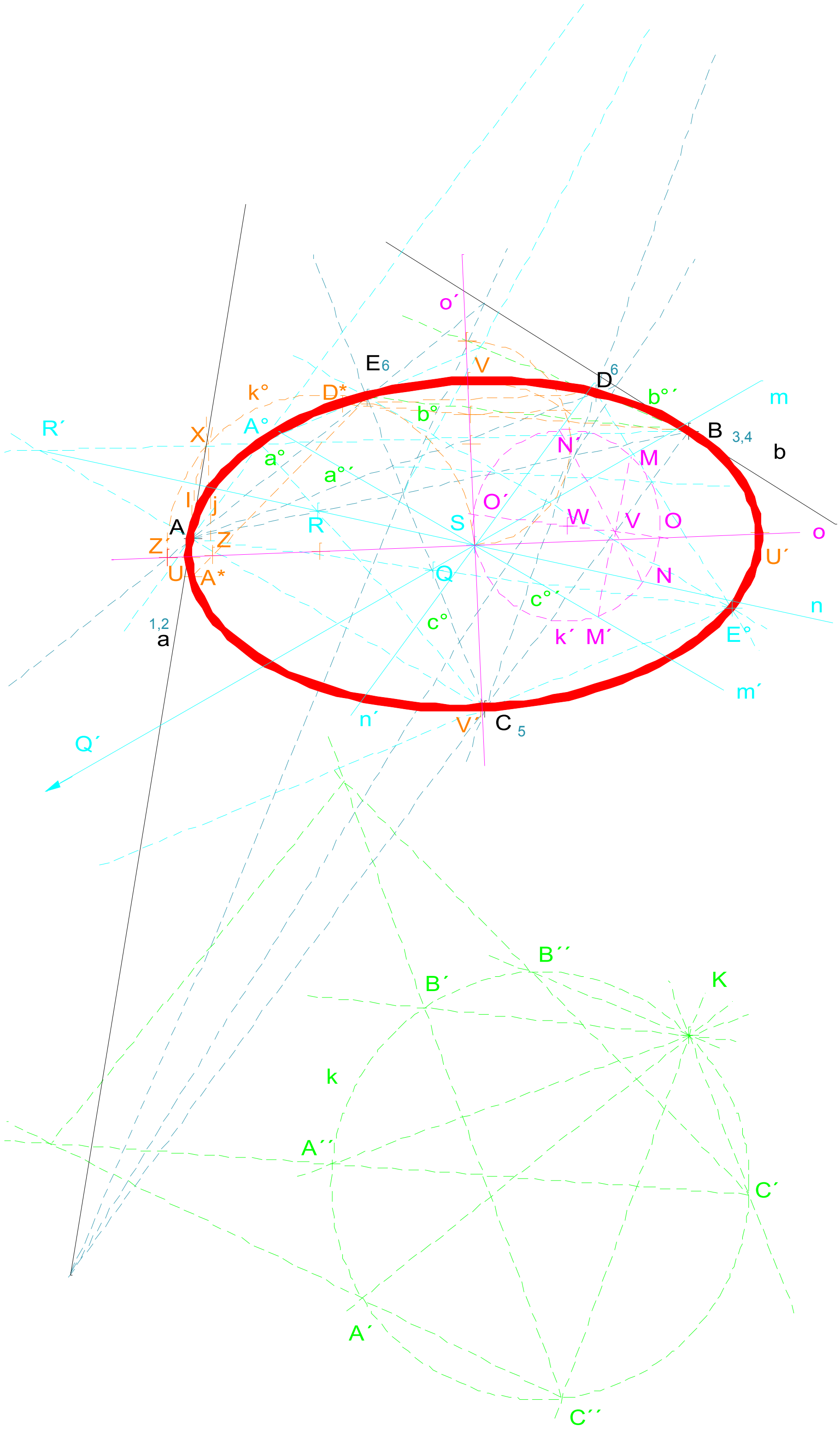
- sestrojíme dva další body kuželosečky podle Pascalovy věty
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce svazku průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- omezíme osu **o´**

Postup:

1. - bodem **C** vedeme přímku, na níž sestrojíme pomocí Pascalovy věty další bod **E** kuželosečky
   - bodem **C** vedeme přímku, na níž sestrojíme pomocí Pascalovy věty další bod **D**
2. - zvolíme 2 body **E**,**D** za středy nesoumístných projektivních svazků **E(a´,b´,c´,…)**, **D(a°´,b°´,c°´,…)** (str. 7)
   - direkční osa neprotíná Steinerovu kružnici **k**, jedná se o elipsu
3. - bodem **A** vedeme rovnoběžku s přímkou **BC**
   - určíme na ní bod **A°** pomocí Pascalovy věty
   - body **A**,**B**,**C**,**A°** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **AC∩BA° = R´** , **CA°∩BA = R**
   - bodem **E** vedeme rovnoběžku s přímkou **AC**
   - určíme na ní bod **E°** pomocí Pascalovy věty
   - body **E**,**A**,**C**,**E°** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **EC∩AE° = Q** , **AE∩CE° = Q´**
   - **m = QQ´**, **n = RR´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **AC** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **BC** jdoucí bodem **S**
   - **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů
4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy elipsy (str. 9)
5. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy (str. 10)

6. - použijeme stejnou konstrukci jako v 5. bodu postupu pro omezení osy **o´**

7. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**,**B**,**C**,**D**,**E**



Obr. 2.3

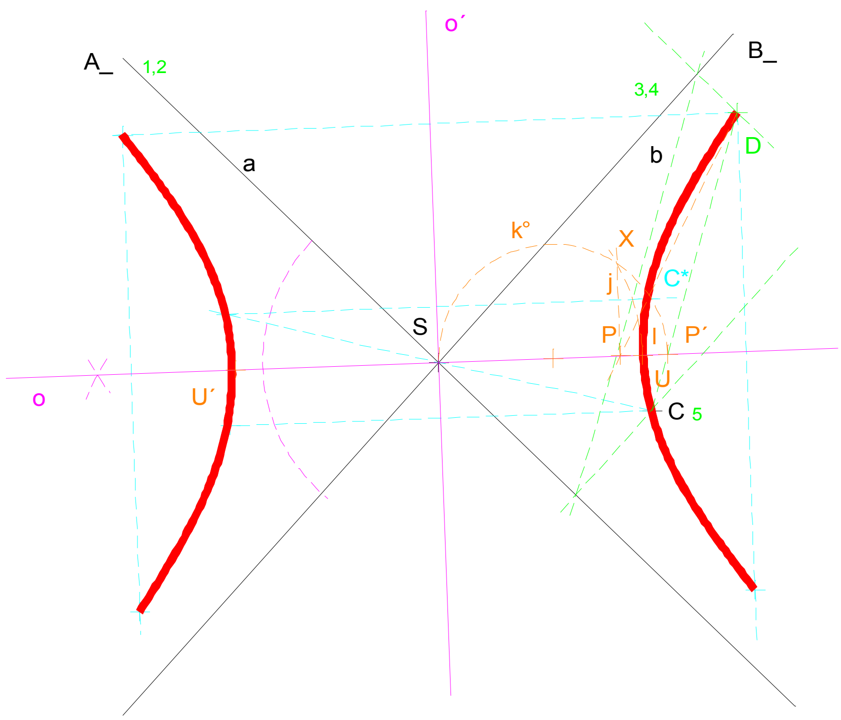
Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány dvě tečny a,b s nevlastními body dotyku A_, B_ a jeden další bod C

Rozbor:

- rozhodneme o typu kuželosečky
- sestrojíme osy
- sestrojíme další bod pomocí Pascalovy věty
- sestrojíme vrcholy hyperboly

Postup:

1. - máme dány dvě tečny s nevlastními body dotyku, proto se jedná o hyperbolu
   - tyto tečny jsou asymptotami
2. - osy půlí úhel asymptot
3. - bodem **C** vedeme přímku a na ní pomocí Pascalovy věty sestrojíme bod **D**
4. - sestrojíme vrcholy hyperboly **U**, **U´** (str. 10)
5. - sestrojíme hyperbolu procházející body **C, D, U, U´**



Obr. 2.4

Sestrojte kuželosečku, je-li dána tečna a s bodem dotyku A a tečny b,c,d

Rozbor:

- pomocí Brianchonovy věty sestrojíme body dotyku na zbývajících tečnách a další bod a tečnu
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce svazku průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- omezíme osu **o´**

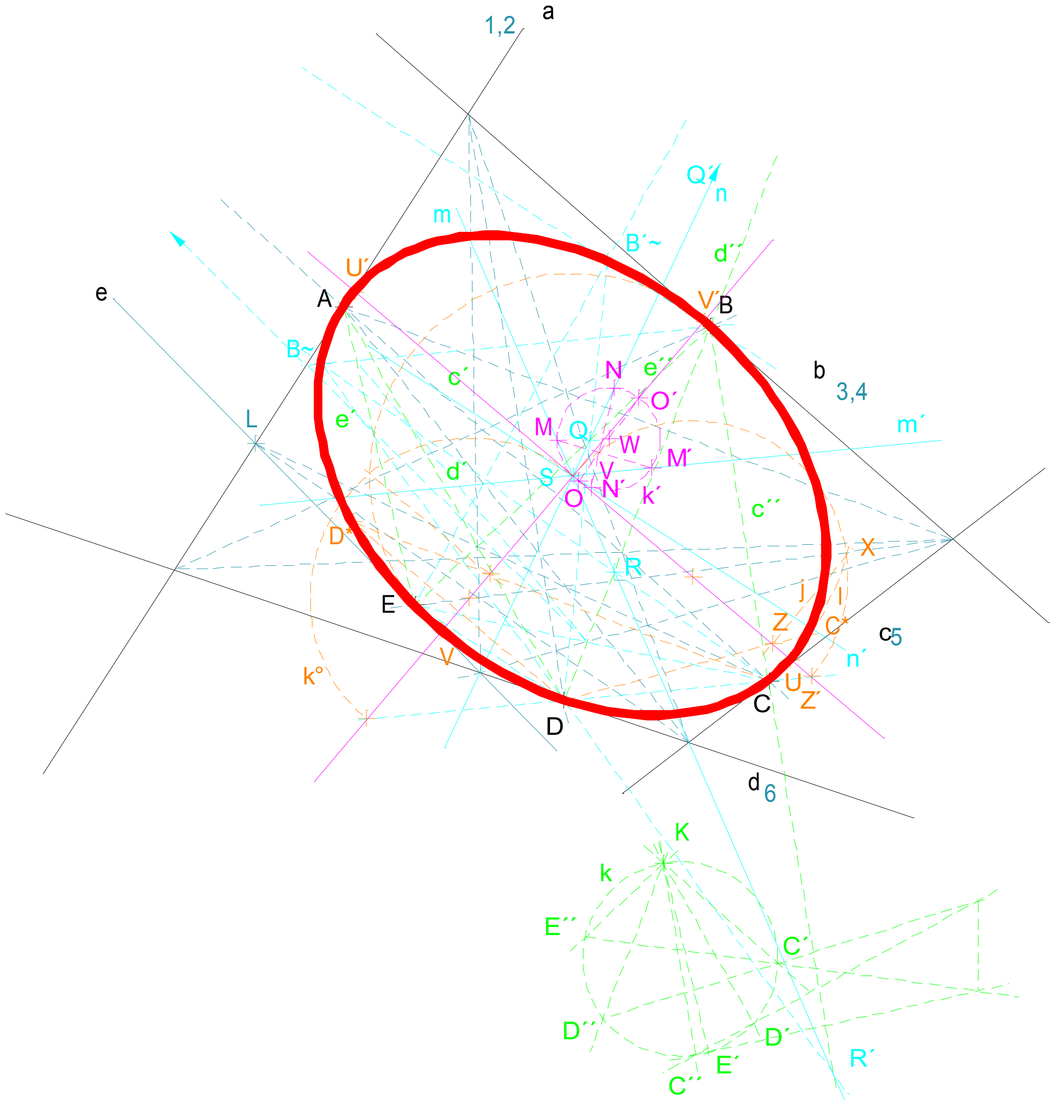
Postup:

1. - postupně hledáme pomocí Brianchonovy věty body dotyku **B**,**C**,**D** na tečnách **b**,**c**,**d** a ještě jednu tečnu **e** s bodem dotyku **E**
2. - zvolíme 2 body **A**,**B** za středy nesoumístných projektivních svazků **A(c´,d´,e´,…)** a **B(c´´,d´´,e´´,…)** (str. 7)
   - direkční osa neprotíná Steinerovu kružnici **k**, jedná se o elipsu
3. - bodem **B** vedeme rovnoběžku s přímkou **CD**
   - určíme na ní bod **B~** pomocí Pascalovy věty
   - body **C**,**D**,**B~**,**B** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **BD∩B~C = R** , **BC∩B~D = R´**
   - bodem **B** vedeme rovnoběžku s přímkou **ED**
   - určíme na ní bod **B´~** pomocí Pascalovy věty
   - body **B**,**B´~**,**E**,**D** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **DB∩EB´~ = Q** , **EB∩DB´~ = Q´**
   - **m = RR´**, **n = QQ´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **CD** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **ED** jdoucí bodem **S**
   - **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů
4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy elipsy (str. 9)

5. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy (str. 10)

6. - použijeme stejnou konstrukci jako v 5. bodu postupu pro omezení osy **o´**

7. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**,**B**,**C**,**D**,**E**



Obr. 2.5

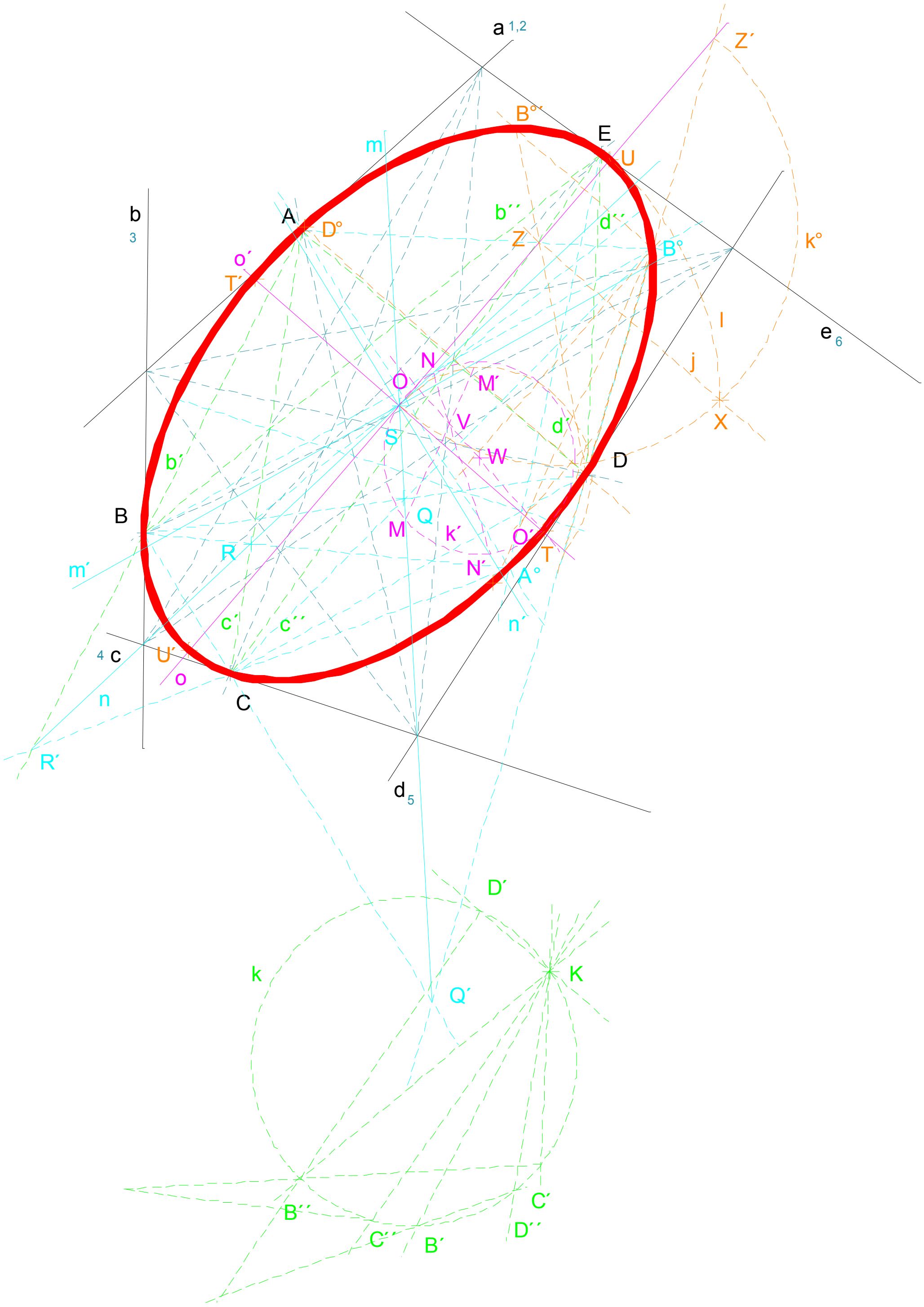
<u>Sestrojte kuželosečku, je-li dáno pět tečen a, b, c, d, e</u>

<u>Rozbor:</u>

- pomocí Brianchonovy věty sestrojíme body dotyku na všech pěti tečnách
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce svazku průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- omezíme osu **o´**

<u>Postup:</u>

1. - postupně sestrojíme pomocí Brianchonovy věty body dotyku na všech tečnách
2. - zvolíme 2 body **A**,**E** za středy nesoumístných projektivních svazků **A(b´,c´,d´,…)** a **E(b´´,c´´,d´´,…)** (str. 7)
   - direkční osa neprotíná Steinerovu kružnici **k**, jedná se o elipsu
3. - bodem **B** vedeme rovnoběžku s přímkou **CD**
   - určíme na ní bod **B°** pomocí Pascalovy věty
   - body **C**,**D**,**B°**,**B** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **BD∩B°C = Q** , **BC∩B°D = Q´**
   - bodem **A** vedeme rovnoběžku s přímkou **BC**
   - určíme na ní bod **A°** pomocí Pascalovy věty
   - body **B**,**C**,**A°**,**A** tvoří lichoběžník kuželosečce vepsaný, **AC∩BA° = R** , **AB∩A°C = R´**
   - **m = QQ´**, **n = RR´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **CD** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **BC** jdoucí bodem **S**
   - **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů
4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy elipsy (str. 9)
5. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy elipsy (str. 10)
6. - použijeme stejnou konstrukci jako v 5. bodu postupu pro omezení osy **o´**
7. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**, **B**, **C**, **D**, **E**



Obr. 2.6

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány tři body A, B, C a involuce sdružených pólů P, P´, Q, Q´, jež kuželosečka indukuje na dané přímce p

Rozbor:

- sestrojíme další body (samodružné body) kuželosečky na přímce **p** (použijeme involuci pólů)
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (pomocí Steinerovy kružnice)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- sestrojíme asymptoty

Postup:

1. - sestrojíme samodružné body **D**, **E**, když **PP´**, **QQ´** tvoří involuci indukovanou kuželosečkou na přímce **p**, pomocí Steinerovy kružnice **k***
2. - zvolíme 2 body **C**,**E** za středy nesoumístných projektivních svazků **C(a´,b´,d´,…)** a **E(a,b,d,…)** (str. 7)
   - direkční osa protíná Steinerovu kružnici **k** ve dvou bodech, jedná se o hyperbolu
3. - bodem **B** vedeme rovnoběžku s přímkou **DC**
   - určíme na ní bod **B~** pomocí Pascalovy věty
   - body **C**, **D**, **B**, **B~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **DB ∩ CB~ = R** , **DB~ ∩ CB = R´**
   - bodem **C** vedeme rovnoběžku s přímkou **AD**
   - určíme na ní bod **C~** pomocí Pascalovy věty
   - body **A**, **D**, **C**, **C~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **DC ∩ AC~ = T** , **AC ∩ DC~ = T´**
   - **m = RR´**, **n = TT´**, **m ∩ n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **DC** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **AD** jdoucí bodem **S**
   - **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů

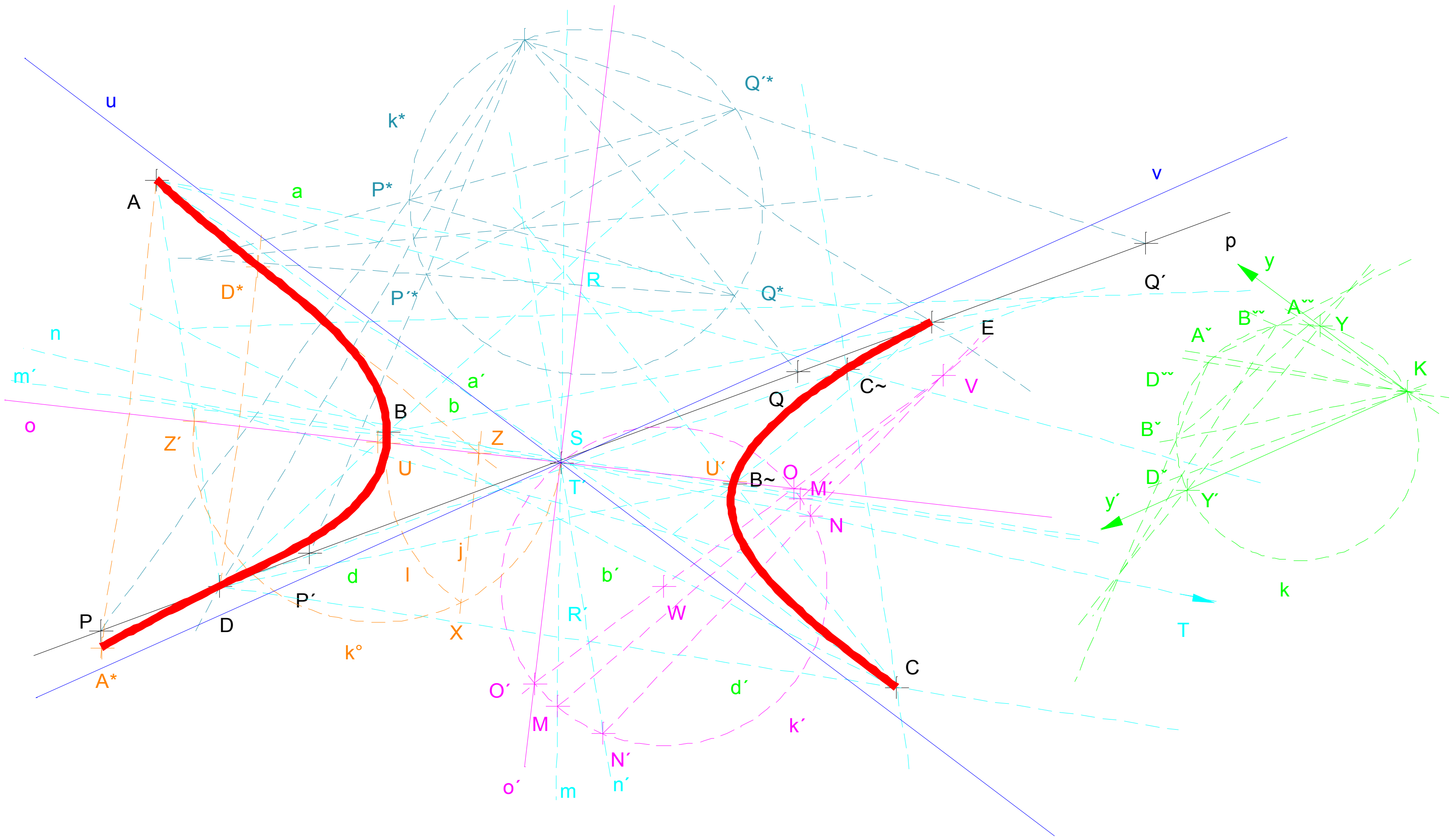
4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy hyperboly (str. 9)

5. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy hyperboly (str. 10)

6. - sestrojíme asymptoty **u**, **v**, **u** || **y**, **v** || **y´**, **y**, **y´** jsou směry asymptot, které získáme při konstrukci direkční osy ve 2. bodě postupu

7. - sestrojíme hyperbolu jdoucí body **A**, **B**, **C**, **D**, **E**

Obr. 2.7


u
k*
Q´*
a
P*
A
v
p
y
Q´
D*
P´*
R
Q*
A˘˘
B˘˘
A˘
Y
E
n
K
m´
a´
Q
C~
V
D˘˘
o
B
b
Z
S
Z´
B˘
U
U´
B~
O
D˘
M´
T
y´
Y´
N
j
d
I
b´
W
k
P
P´
R´
T
D
X
k°
A*
O´
d´
C
M
k´
N´
o´
m
n´

Sestrojte kuželosečku, je-li dán pól P s polárou p a tři body kuželosečky A, B, C

Rozbor:

- sestrojíme dva další body kuželosečky pomocí konstrukce čtvrtého harmonického body
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce svazku průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o´**
- omezíme osu **o**

Postup:

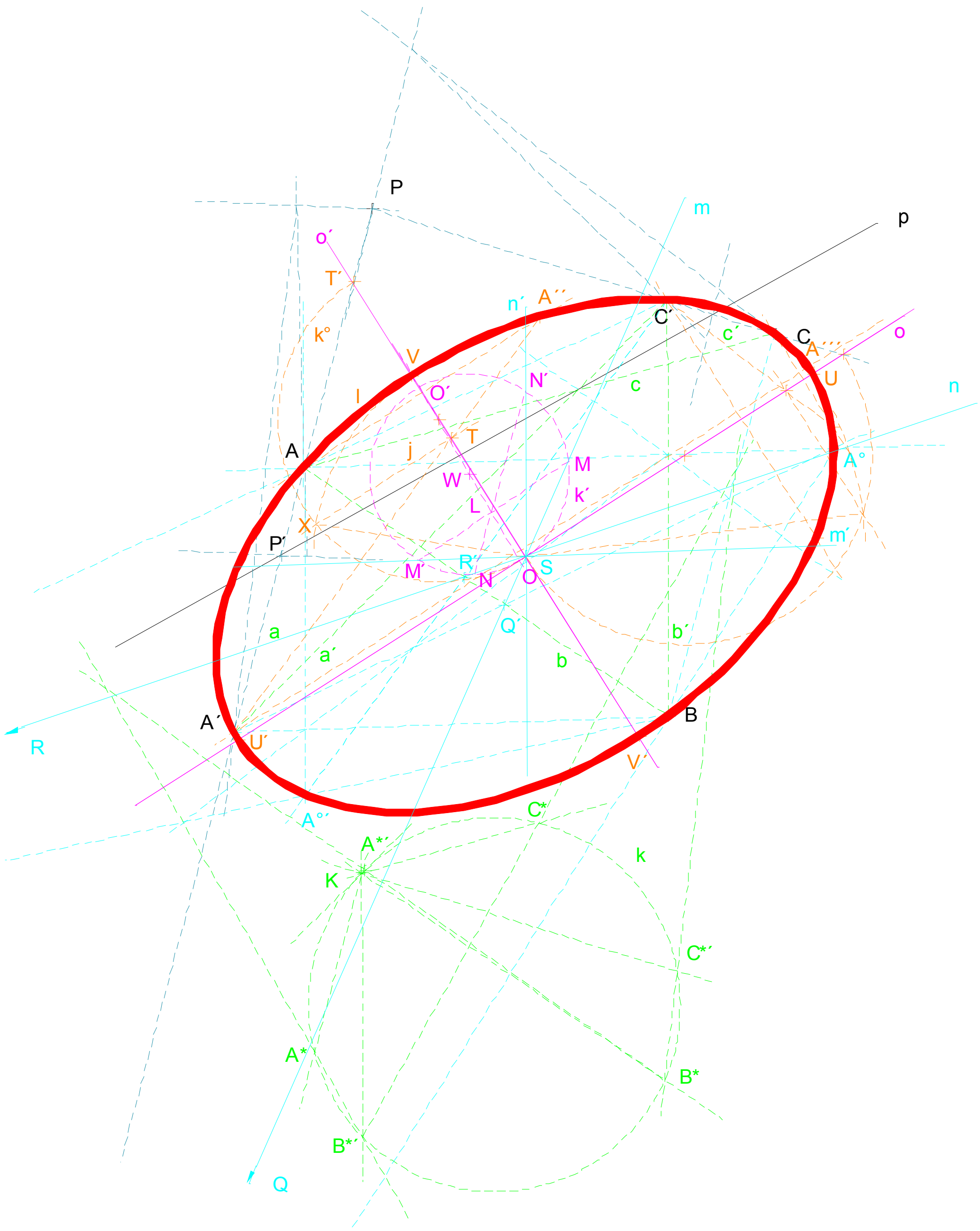
1. - sestrojíme další dva body kuželosečky **A´**, **C´** pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu (str. 6)
2. - zvolíme 2 body **A**,**C´** za středy nesoumístných projektivních svazků **A(a,b,c,…)**, **C´(a´,b´,c´,…)** (str. 7)
   - direkční osa neprotíná Steinerovu kružnici **k**, jedná se o elipsu
3. - bodem **A** vedeme rovnoběžku s přímkou **A´B**
   - určíme na ní bod **A°** pomocí Pascalovy věty
   - body **A´**,**B**,**A**,**A°** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **AB∩A´A° = Q** , **A°B∩AA´ = Q´**
   - bodem **A** vedeme rovnoběžku s přímkou **BC´**
   - určíme na ní bod **A°´** pomocí Pascalovy věty
   - body **B**,**C´**,**A**,**A°´** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **AB∩C´A°´ = R** , **AC´∩BA°´ = R´**
   - **m = QQ´**, **n = RR´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **A´B** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **BC´** jdoucí bodem **S**
   - **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů

4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy elipsy (str. 9)

5. - užitím involuce pólů sestrojíme vedlejší vrcholy elipsy (str. 10)

6. - použijeme stejnou konstrukci jako v 5. bodu postupu pro omezení osy **o**

7. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**,**A´**,**B**,**C**,**C´**



Obr. 2.8

<u>Sestrojte kuželosečku, je-li dána tečna a s bodem dotyku A, jedna další tečna b a jeden pól P s polárou p</u>

<u>Rozbor:</u>

- sestrojíme další body kuželosečky pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu, Brianchonovy věty a Pascalovy věty
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce svazku průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- omezíme osu **o´**

<u>Postup:</u>

1. - sestrojíme další dva body kuželosečky **A´**, **B´** pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu (str. 6)
   - sestrojíme tečnu **a´** bodem **A´**: **p∩a = O**, **OA´= a´**
   - sestrojíme bod **B** na tečně **b** pomocí Brianchonovy věty
   - bodem **B** vedeme přímku a na ní pomocí Pascalovy věty sestrojíme bod **C** kuželosečky
2. - zvolíme 2 body **A´**,**B´** za středy nesoumístných projektivních svazků **A´(a*,b*,c*,…)**, **B´(a*´,b*´,c*´,…)** (str. 7)
   - direkční osa neprotíná Steinerovu kružnici **k**, jedná se o elipsu
3. - bodem **C** vedeme rovnoběžku s přímkou **A´B´**
   - určíme na ní bod **C~** pomocí Pascalovy věty
   - body **A´**,**B´**,**C**,**C~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **A´C∩B´C~ = Q** , **A´C~∩B´C = Q´**
   - bodem **B** vedeme rovnoběžku s přímkou **AA´**
   - určíme na ní bod **B~** pomocí Pascalovy věty
   - body **A**,**A´**,**B**,**B~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **AB~∩A´B = R** , **AB∩A´B~ = R´**

- **m = QQ´**, **n = RR´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)

- **m´** je rovnoběžka s **A´B´** jdoucí bodem **S**

- **n´** je rovnoběžka s **AA´** jdoucí bodem **S**

- **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů

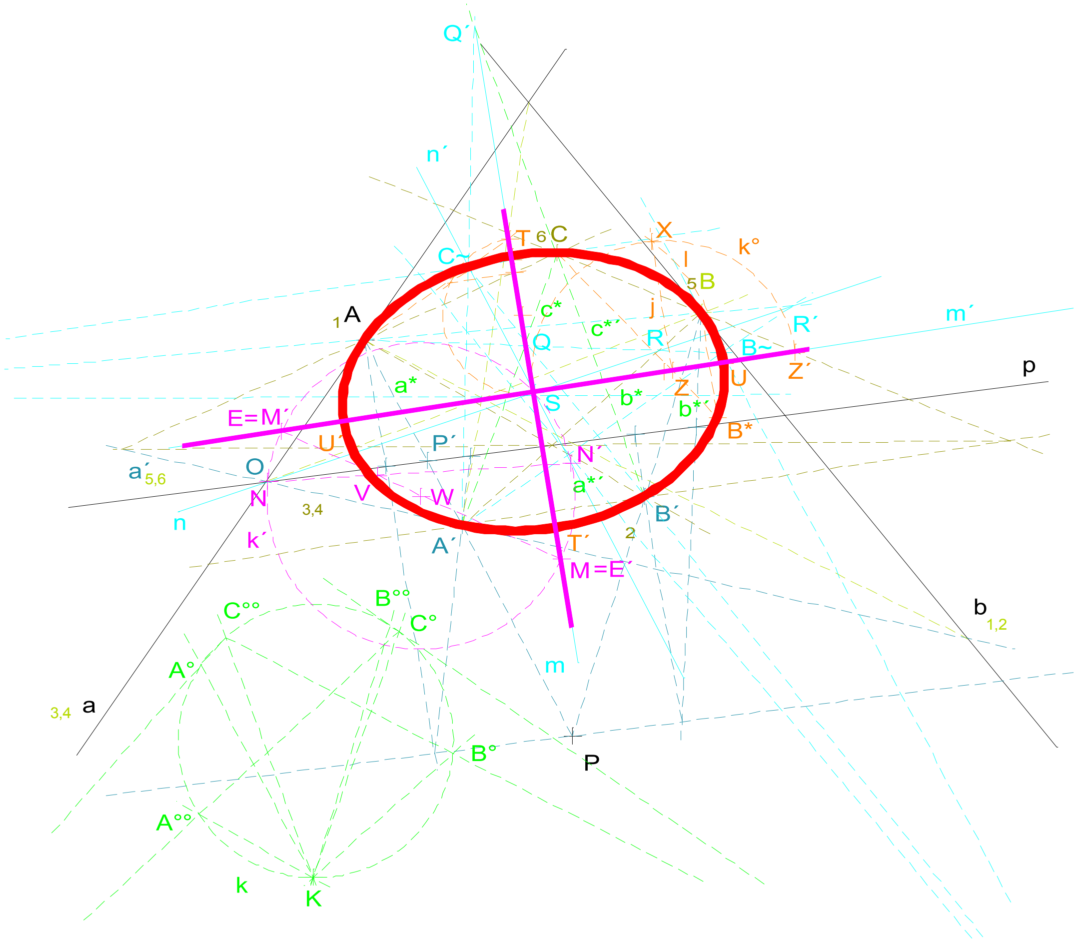
4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy elipsy (str. 9)

5. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy elipsy (str. 10)

6. - použijeme stejnou konstrukci jako v 5. bodě postupu pro omezení osy **o´**

7. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**,**A´**,**B**,**B´**,**C**

Obr. 2.9



Sestrojte kuželosečku, je-li dán bod A a dva její páry pólů P,Q s polárami p,q

Rozbor:

- sestrojíme čtyři další body kuželosečky pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce svazku průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- omezíme osu **o´**

Postup:

1. - sestrojíme další body kuželosečky **A´**, **A´´**, **A°**, **A°°** pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu (str. 6)
2. - pro lepší orientaci v dalším postupu označíme: **A´= B**, **A´´= C**, **A°= D**, **A°°= E**
   - zvolíme 2 body **A**, **B** za středy nesoumístných projektivních svazků **A(a,b,c,…)**, **B(a´,b´,c´,…)** (str. 7)
   - direkční osa neprotíná Steinerovu kružnici **k**, jedná se o elipsu
3. - bodem **A** vedeme rovnoběžku s přímkou **BC**
   - určíme na ní bod **A~** pomocí Pascalovy věty
   - body **A**, **B**, **C**, **A~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **AB ∩ CA~ = R** , **BA~ ∩ AC = R´**
   - bodem **C** vedeme rovnoběžku s přímkou **AB**
   - určíme na ní bod **C~** pomocí Pascalovy věty
   - body **C**, **A**, **B**, **C~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **CA ∩ BC~ = L´** , **CB ∩ AC~ = L**
   - **m = RR´**, **n = LL´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **BC** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **AB** jdoucí bodem **S**

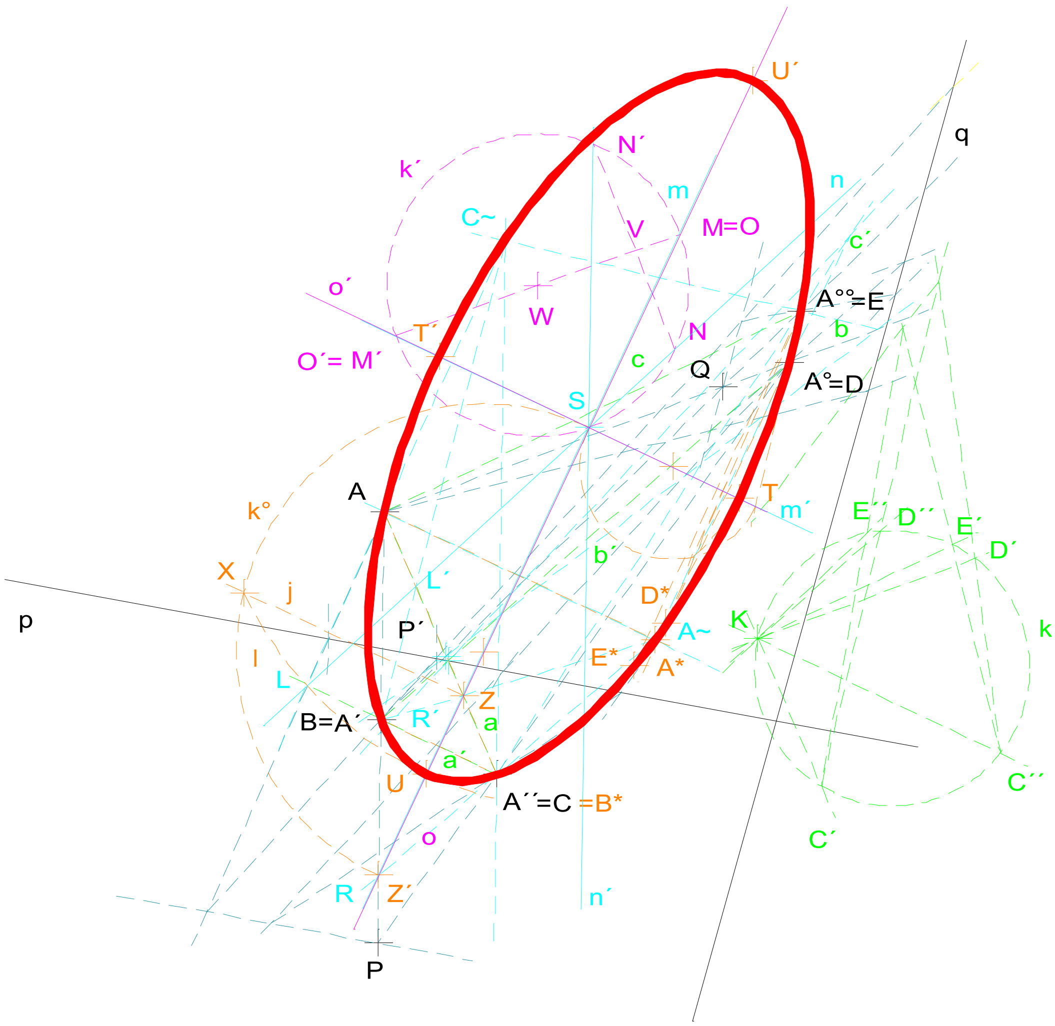
- **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů

4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy elipsy (str. 9)

5. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy elipsy (str. 10)

6. - použijeme stejnou konstrukci jako v 5. bodě postupu pro omezení osy **o´**

7. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**, **B**, **C**, **D**, **E**



Obr. 2.10

<u>Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány dva body A, B a polární trojúhelník PQR</u>

<u>Rozbor:</u>

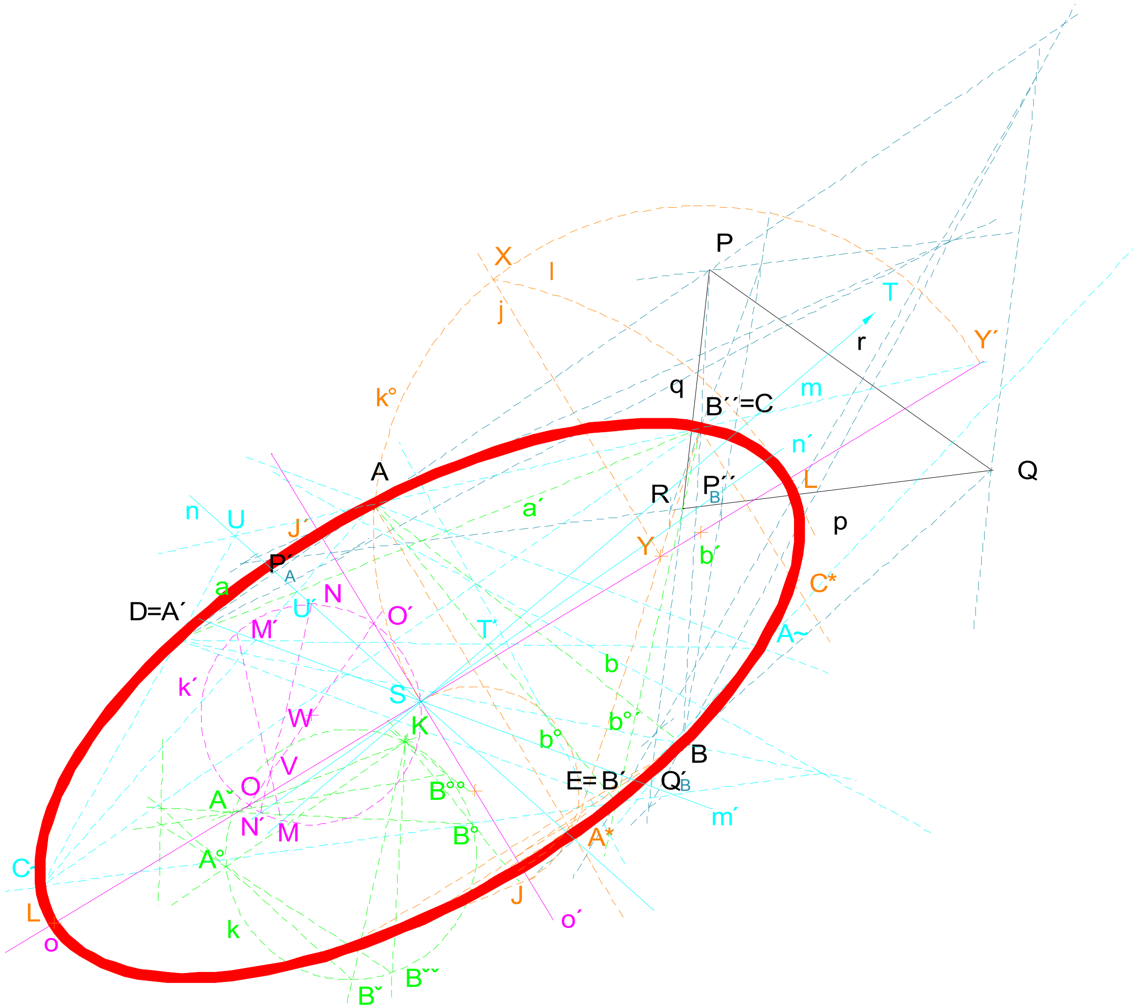
- sestrojíme tři další body kuželosečky pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (určíme průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce svazku průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o´**
- omezíme osu **o**

<u>Postup:</u>

1. - sestrojíme další body kuželosečky **A´**, **B´**, **B´´** pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu (str. 6)
2. - zvolíme 2 body **A**, **B´´** za středy nesoumístných projektivních svazků **A(a,b,b°,…)**, **B´´(a´,b´,b°´,…)** (str. 7)
   - direkční osa neprotíná Steinerovu kružnici **k**, jedná se o elipsu
3. - pro lepší orientaci v dalším postupu zvolíme: **A´= D**, **B´= E**, **B´´= C**
   - bodem **A** vedeme rovnoběžku s přímkou **DE**
   - určíme na ní bod **A~** pomocí Pascalovy věty
   - body **A**, **D**, **E**, **A~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **AD ∩ EA~ = T** , **DA~ ∩ AE = T´**
   - bodem **C** vedeme rovnoběžku s přímkou **AD**
   - určíme na ní bod **C~** pomocí Pascalovy věty
   - body **C**, **A**, **D**, **C~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **CA∩DC~ = U** , **CD∩AC~ = U´**
   - **m = TT´**, **n = UU´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **DE** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **AD** jdoucí bodem **S**
   - **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů

4. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy elipsy (str. 9)
5. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy elipsy (str. 10)
6. - použijeme stejnou konstrukci jako v 5. bodě postupu pro omezení osy **o´**
7. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**, **B**, **C**, **D**, **E**

Obr. 2.11


P
X
l
j
T
r
Y´
q
B´´=C
m
k°
n´
A
R
P´´
L
Q
a´
p
n
U
J´
Y
b´
P
a
N
C*
D=A´
U´
O´
T´
M´
A~
b
k´
S
W
b°´
K
b°
B
V
E= B´
Q´
O
B°°
A˘
N´
M
B°
m´
A*
C
A°
J
o´
L
k
o
B˘˘
B˘

Sestrojte kuželosečku, je-li dán jeden polární trojúhelník kuželosečky PQR a ještě jeden její pól M s polárou m

Rozbor:

- sestrojíme bod kuželosečky (použijeme involuci pólů)
- sestrojíme další body kuželosečky
- rozhodneme, o jaký afinní typ kuželosečky jde (pomocí Steinerovy kružnice)
- sestrojíme involuci sdružených průměrů kuželosečky
- určíme pravoúhlý pár involuce průměrů (určíme osy)
- omezíme osu **o**
- sestrojíme asymptoty

Postup:

1. - sestrojíme body **A**, **B**: **MQ∩m = M´**, **MQ∩q = Q´**, body **M**,**M´**,**Q**,**Q´**tvoří involuci pólů, položíme **M = L´**, **M´= L**
   - pomocí Steinerovy kružnice **k*** sestrojíme samodružné body **A**,**B** na přímce **MQ**
2. - sestrojíme další body kuželosečky **B´**, **B´´**, **B°**, **B°°** pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu (str. 6)
3. - pomocí Steinerovy kružnice **k** a bodů **B**, **B´**, **B´´**, **B°**, **B°°** zjistíme, že se jedná se o hyperbolu
   - protože **MM´**,**QQ´** se neoddělují, jde o hyperbolickou involuci
4. - bodem **B** vedeme rovnoběžku s přímkou **B°B´**
   - určíme na ní bod **B~** pomocí Pascalovy věty
   - body **B°**, **B´**, **B**, **B~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **B´B∩B°B~ = E** , **B´B~∩B°B = E´**
   - bodem **B°°** vedeme rovnoběžku s přímkou **B°B**
   - určíme na ní bod **B°°~** pomocí Pascalovy věty
   - body **B**, **B°**, **B°°**, **B°°~** tvoří čtyřroh kuželosečce vepsaný, **B°B°°∩BB°°~ = F** , **BB°°∩B°B°°~ = F´**
   - **m = EE´**, **n = FF´**, **m∩n = S** (střed kuželosečky)
   - **m´** je rovnoběžka s **B°B´** jdoucí bodem **S**
   - **n´** je rovnoběžka s **B°B** jdoucí bodem **S**

- **m**,**m´**,**n**,**n´** určují involuci sdružených průměrů

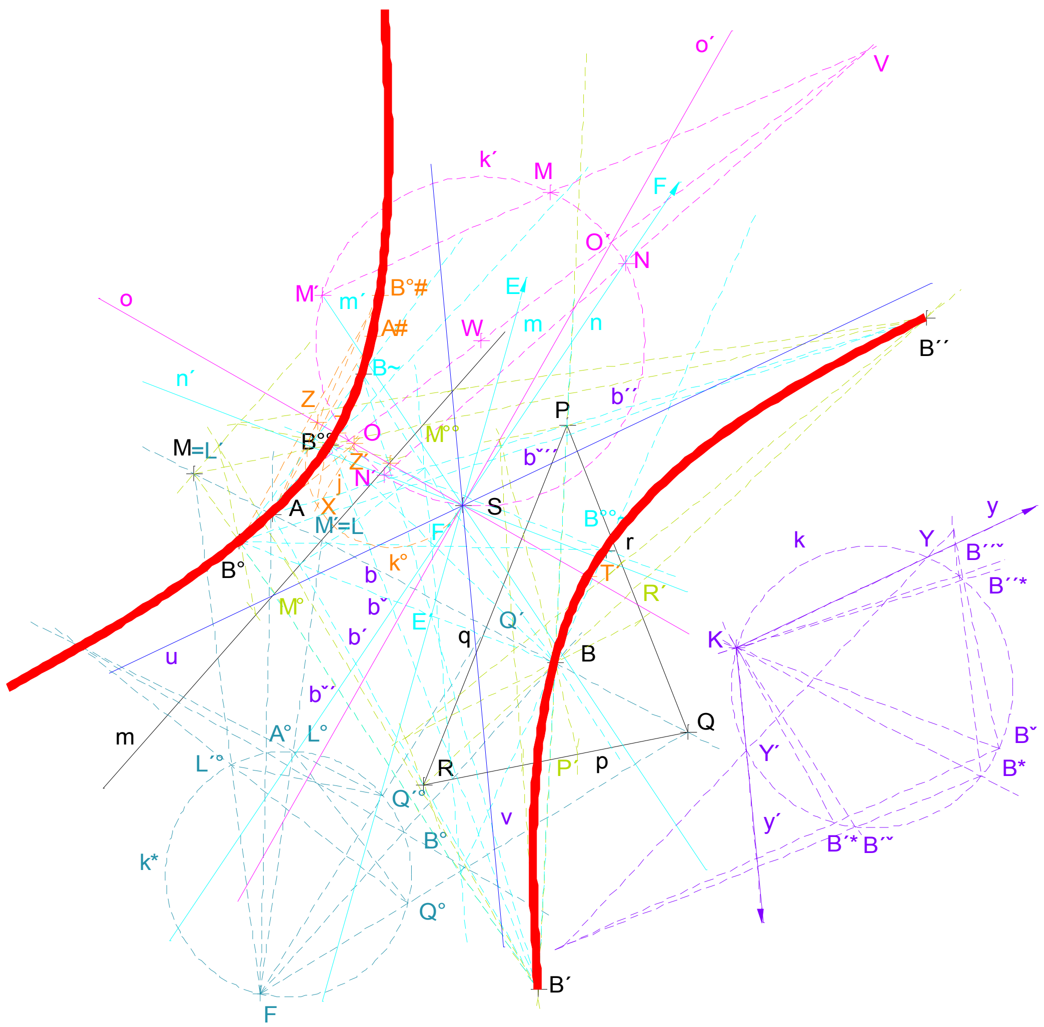
5. - užitím involuce průměrů sestrojíme osy hyperboly (str. 9)

6. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy hyperboly (str. 10)

7. - pomocí Steinerovy kružnice sestrojíme směry asymptot **y**, **y´**

   - máme dva nesoumístné projektivní svazky **A(b, b´, b´´)**, **B°(bˇ, bˇ´, bˇ´´)**, využijeme konstrukce určení afinního typu kuželosečky (str. 7)

   - průniky direkční osy **(BˇB´*∩B*B´ˇ)(B*B´´ˇ∩BˇB´´*)** se Steinerovou kružnicí **k** jsou **Y**, **Y´** , **KY= y**, **KY´= y´**



Obr. 2.12

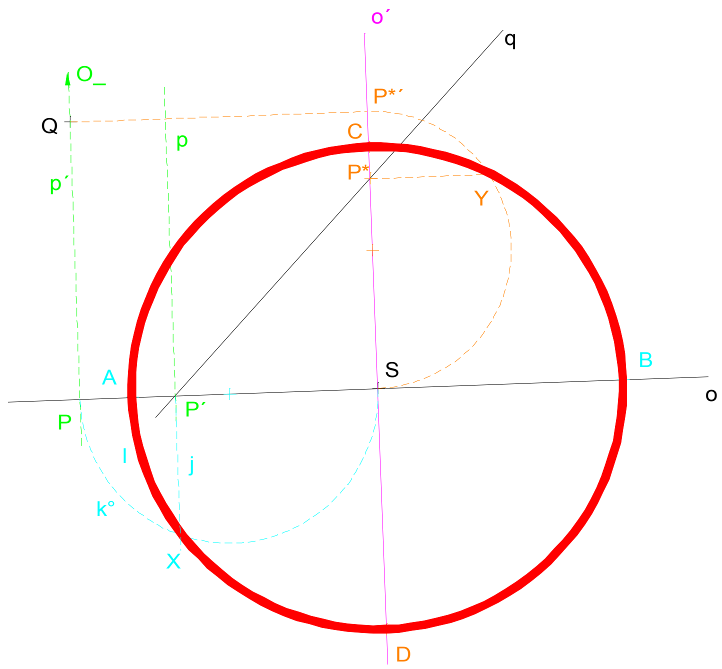
Sestrojte elipsu, je-li dána osa o, střed elipsy S, pól Q s polárou q

Rozbor:

- sestrojíme osu **o´**
- sestrojíme další póly s polárami
- omezíme osu **o**
- omezíme osu **o´**

Postup:

1. - sestrojíme osu **o´**, která je kolmá k ose **o** ve středu **S** elipsy
2. - pólem **Q** vedeme rovnoběžku **p´** s osou **o**, **p´∩o = P**
   - **q∩o = P´**, sestrojíme bodem **P´** rovnoběžku **p** s přímkou **p´**
3. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy elipsy na ose **o** (str. 10)
4. - bodem **Q** vedeme rovnoběžku s **o**, kde protne **o´** je bod **P*´**, **p∩o´ = P***
   - stejně jako ve 3. bodě postupu omezíme osu **o´** elipsy
5. - sestrojíme elipsu jdoucí body **A**, **B**, **C**, **D**



Obr. 2.13

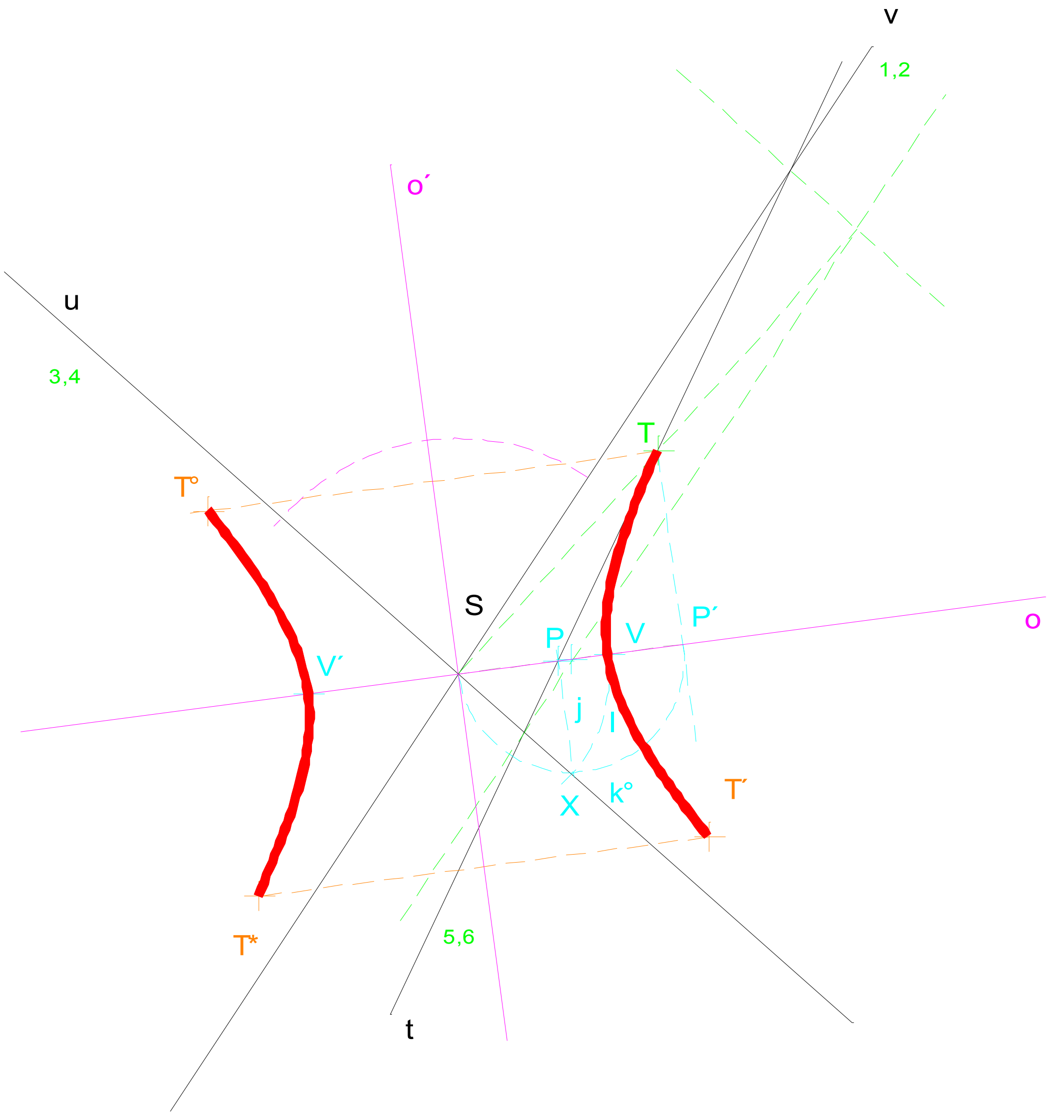
<u>Sestrojte hyperbolu, jsou-li dány dvě asymptoty u,v a jedna další tečna t</u>

<u>Rozbor:</u>

- pomocí Brianchonovy věty sestrojíme bod dotyku na tečně
- sestrojíme osy
- sestrojíme vrcholy hyperboly
- sestrojíme další body hyperboly

<u>Postup:</u>

1. - pomocí Brianchonovy věty sestrojíme bod dotyku **T** na tečně **t** (asymptoty jsou tečny v nevlastních bodech)
2. - osy půlí úhel asymptot
3. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy hyperboly (str. 10)
4. - sestrojíme další body **T´**, **T°**, **T*** hyperboly, když víme, že hyperbola je osově souměrná kuželosečka
5. - sestrojíme hyperbolu jdoucí body **T**, **T´**, **T°**, **T***



Obr. 2.14

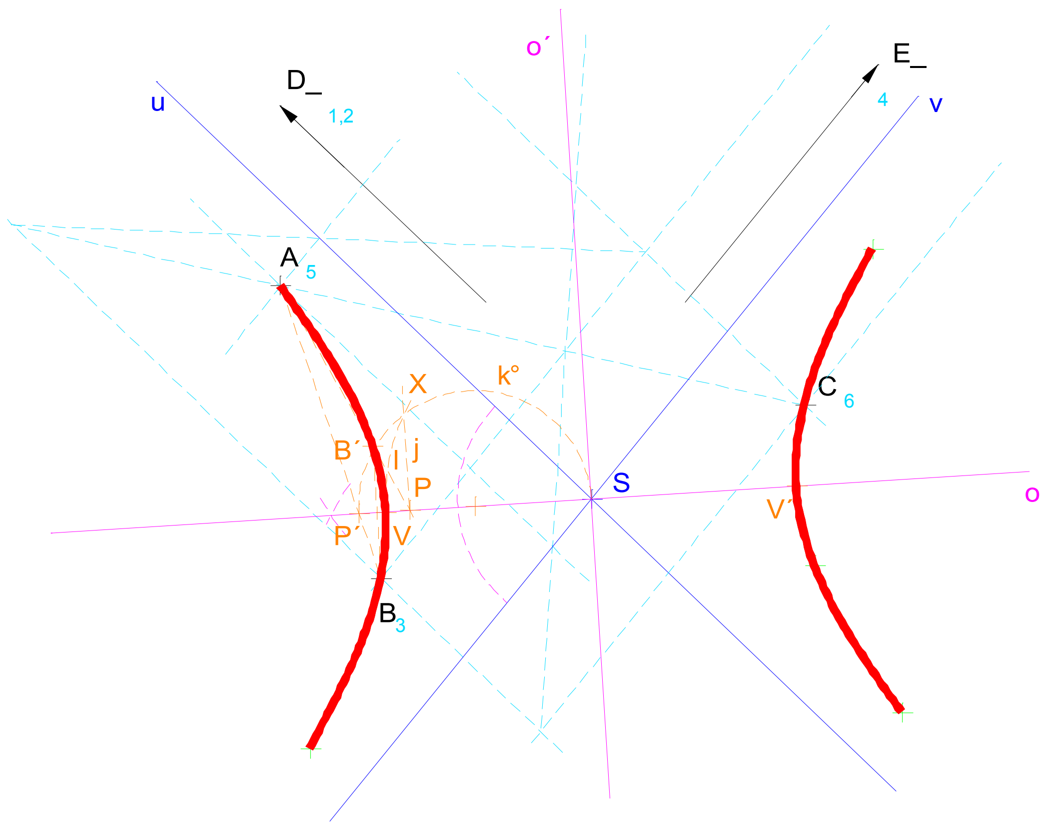
Sestrojte hyperbolu, jsou-li dány tři body A, B, C a směry asymptot D_, E_

Rozbor:

- pomocí Pascalovy věty sestrojíme asymptoty hyperboly
- sestrojíme osy hyperboly
- sestrojíme vrcholy hyperboly

Postup:

1. - pomocí Pascalovy věty sestrojíme asymptoty **u**, **v** hyperboly
2. - sestrojíme osy **o**, **o´** hyperboly, víme-li, že osy půlí úhel asymptot
3. - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy hyperboly (str. 10)
4. - sestrojíme hyperbolu, jdoucí body **A**, **B**, **C**, **V**, **V´**



Obr. 2.15

Sestrojte hyperbolu, je-li dán jeden její průměr p s krajními body P, P* a jeden její sdružený průměr p´ k průměru p s náhradními krajními body P´, P´*

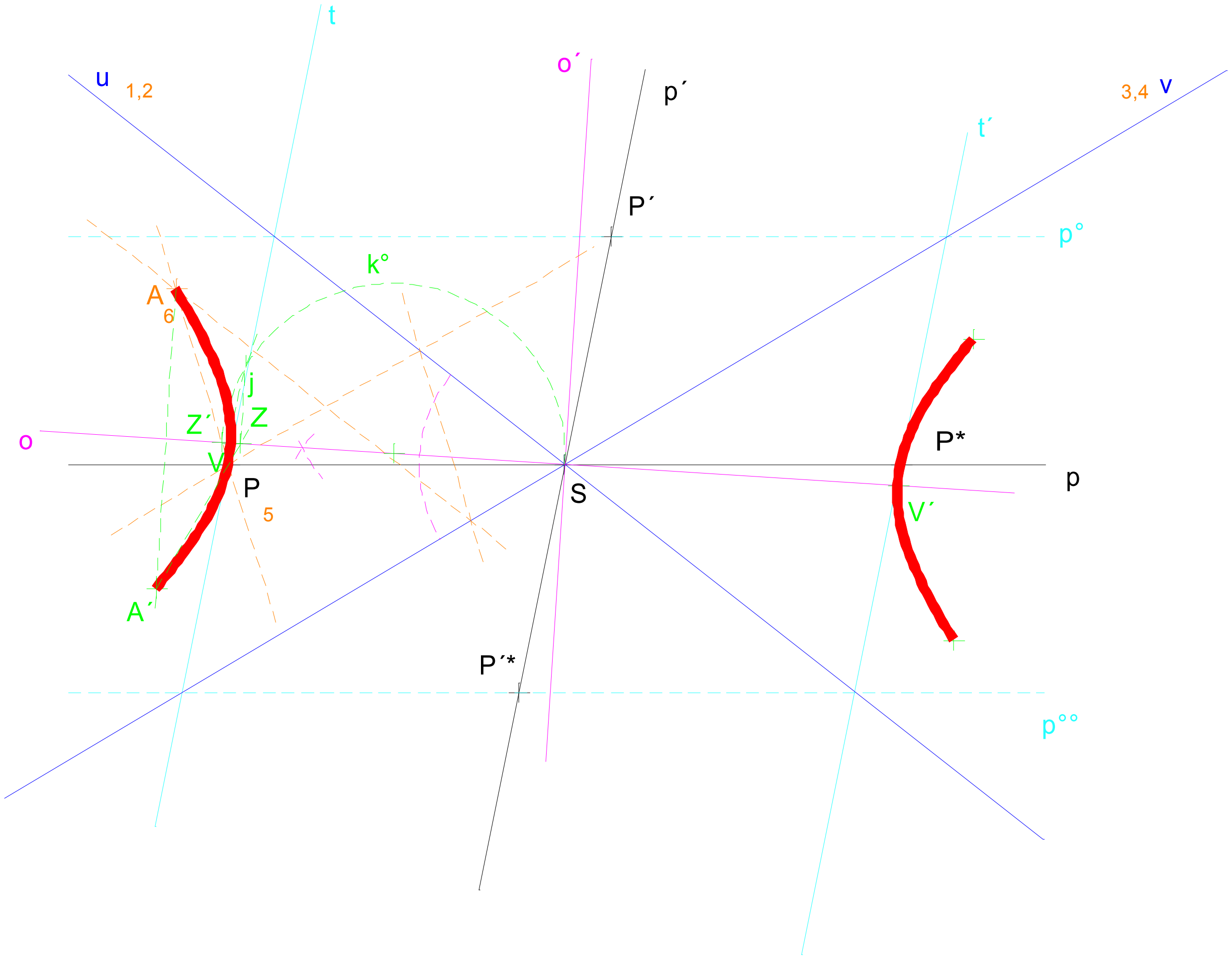
Rozbor:

- sestrojíme asymptoty hyperboly
- sestrojíme osy hyperboly
- sestrojíme vrcholy hyperboly

Postup:

1. - **p°** je polára k pólu **P´***, jdoucí bodem **P´**, **p°°** je polára k pólu **P´**, jdoucí bodem **P´***
   - v bodech **P**, **P*** sestrojíme tečny **t**, **t´**, **t** || **t´** || **p´**
   - asymptoty **u**, **v** jsou úhlopříčky rovnoběžníku **t**, **t´**, **p°**, **p°°**
2. - sestrojíme osy **o**, **o´** hyperboly jako osy úhlu asymptot
3. - body **P**, **P*** jsou skutečné body hyperboly
   - pomocí Pascalovy věty najdeme na přímce vedené bodem **P** další bod **A** hyperboly
   - užitím involuce pólů sestrojíme vrcholy (str. 10)
4. - sestrojíme hyperbolu jdoucí body **P**, **P´**, **A**, **A´**, **V**, **V´**

Obr. 2.16



3. Konstrukce paraboly

Sestrojte parabolu, jsou-li dány tři body A, B, C a směr osy s_

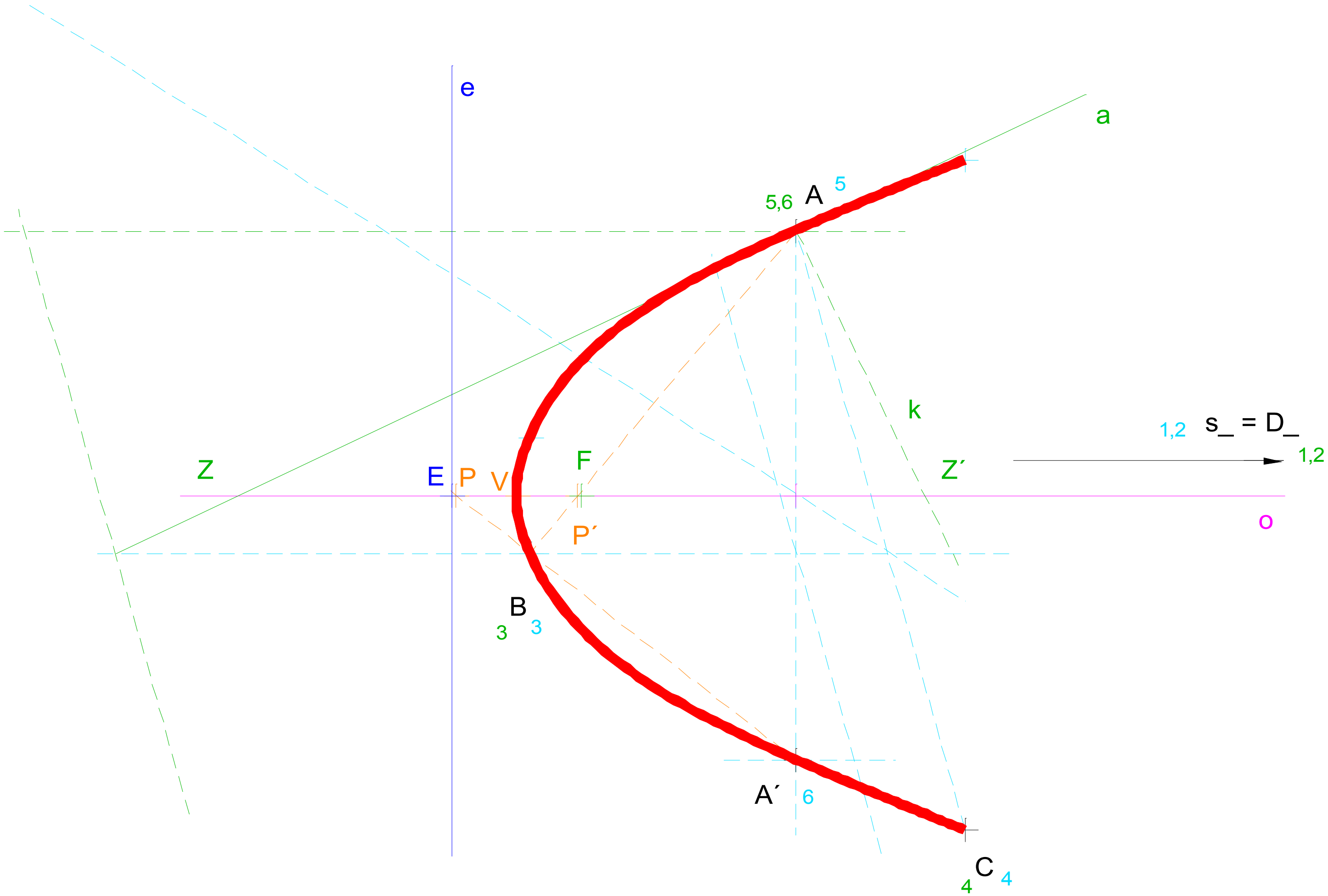
Rozbor:

- pomocí Pascalovy věty sestrojíme další bod
- sestrojíme osu paraboly
- sestrojíme vrchol paraboly
- sestrojíme ohnisko paraboly
- sestrojíme řídící přímku paraboly

Postup:

1. - pomocí Pascalovy věty sestrojíme bod **A´** na kolmici z bodu **A** ke směru osy **s_** (směr osy udává směr nevlastního bodu **D_**)
2. - středem úsečky **AA´** vedeme rovnoběžku se směrem osy **s_** , to je osa **o** paraboly
3. - najdeme vrcholy jako samodružné body involuce pólů **P**, **P´**, **AB∩o = P´**, **A´B∩o = P**, **(PP´VV_) = -1**, **V** je střed **PP´**, **V_** je nevlastní bod
4. - pomocí Pascalovy věty sestrojíme tečnu **a** v bodě **A**, sestrojíme kolmici **k** v bodě **A** k tečně **a**, **a∩o = Z**, **k∩o = Z´**, **|ZF|=|FZ´|**, **F** je ohnisko paraboly
5. - sestrojíme bod **E**, **|EV|=|VF|**, v bodě **E** sestrojíme kolmici **e** k ose **o**, **e** je řídící přímka
6. - sestrojíme parabolu jdoucí body **A**, **A´**, **B**, **C**, **V**

Obr. 3.1



<u>Sestrojte parabolu, jsou-li dány tři tečny a,b,c a na jedné z nich bod dotyku A</u>

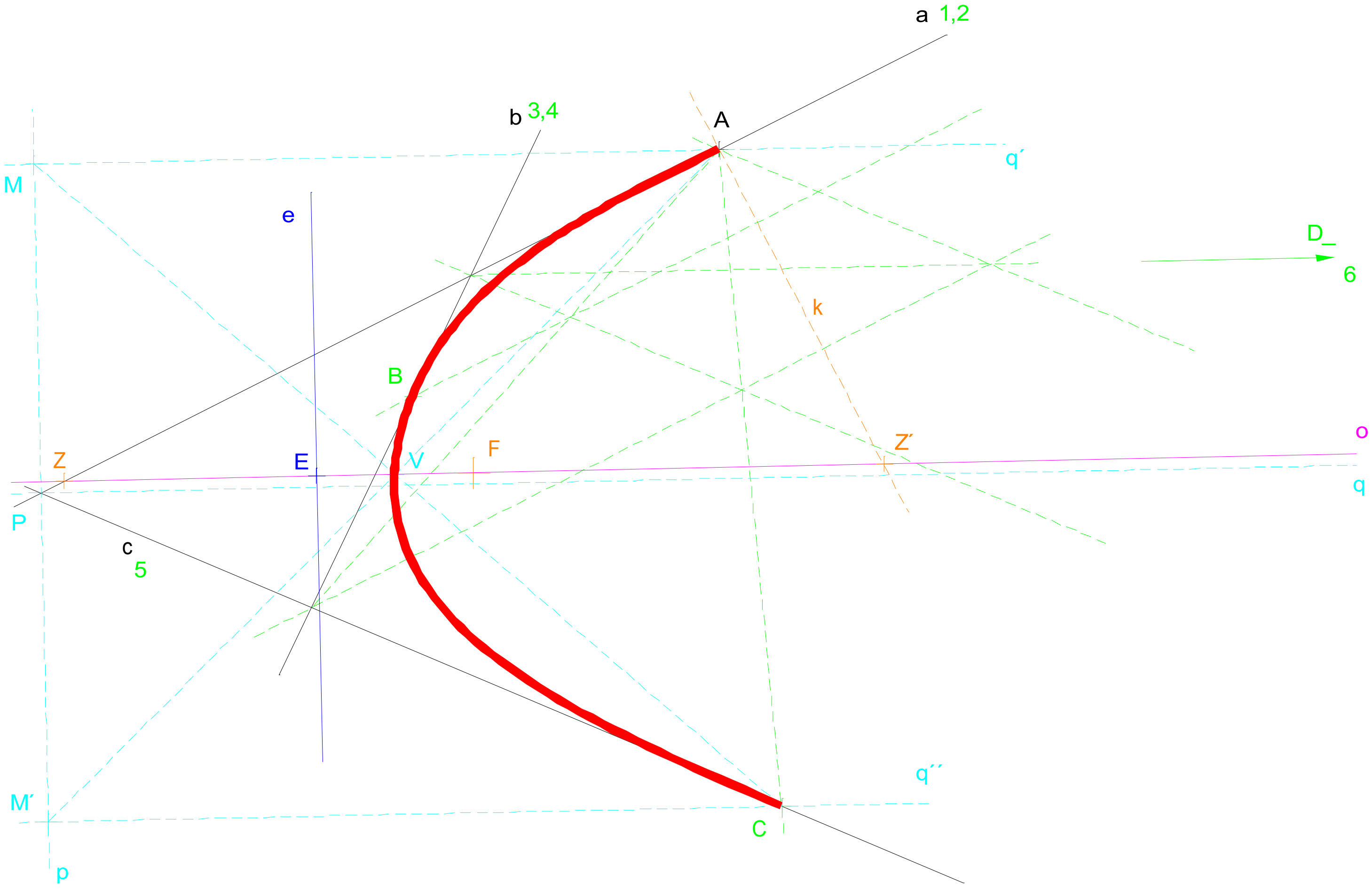
<u>Rozbor:</u>

- pomocí Brianchonovy věty sestrojíme další body dotyku na tečnách
- sestrojíme vrchol paraboly
- sestrojíme osu paraboly
- sestrojíme ohnisko paraboly
- sestrojíme řídící přímku paraboly

<u>Postup:</u>

1. - pomocí Brianchonovy věty sestrojíme na tečně **b** bod dotyku **B**, na tečně **c** bod dotyku **C** a na nevlastní přímce **d_** bod **D_** , směr bodu **D_** je směr osy paraboly
2. - **a∩c=P**, bodem **P** vedeme rovnoběžku **q** se směrem osy
   - v bodě **P** sestrojíme kolmici **p** na přímku **q**
   - body dotyku **A**, **C** na tečnách **a**, **c** vedeme rovnoběžky **q´**, **q´´** s přímkou **q**, **q´∩p = M**, **q´´∩p = M´**
   - **MC∩M´A =V** (vrchol paraboly)
3. - vrcholem **V** vedeme rovnoběžku **o** se směrem osy, **o** je osa paraboly
4. - sestrojíme kolmici **k** na tečnu **a** v bodě **A**, **a∩o = Z**, **k∩o = Z´**, **|ZF|=|FZ´|**, **F** je ohnisko paraboly
5. - sestrojíme bod **E**, **|EV|=|VF|**, v bodě **E** sestrojíme kolmici **e** k ose **o**, **e** je řídící přímka
6. - sestrojíme parabolu jdoucí body **A**, **B**, **C**, **V**

Obr. 3.2



<u>Sestrojte parabolu, jsou-li dány dvě tečny a,b a ohnisko F paraboly</u>

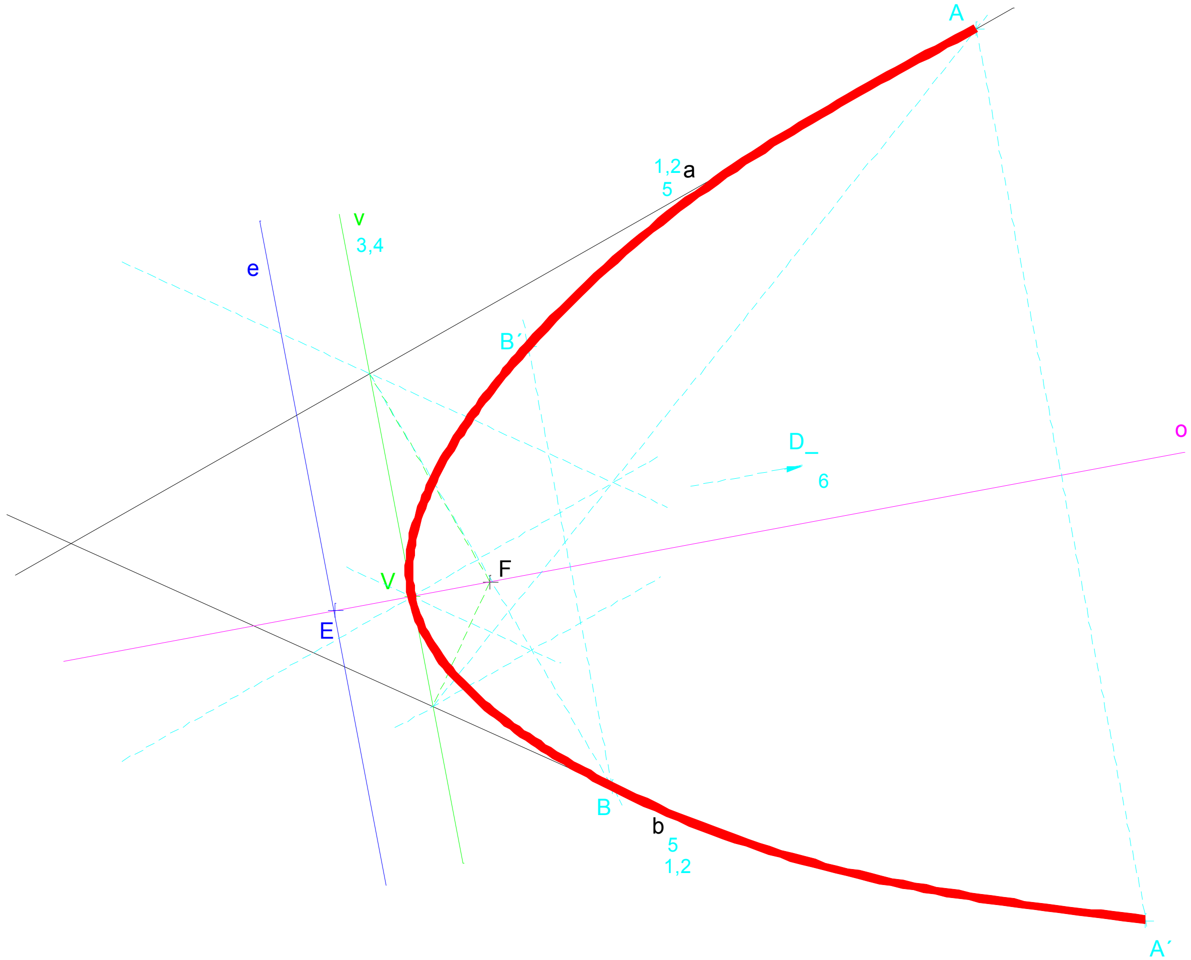
<u>Rozbor:</u>

- sestrojíme vrchol a vrcholovou tečnu paraboly
- sestrojíme osu paraboly
- sestrojíme řídící přímku paraboly
- pomocí Brianchonovy věty sestrojíme body dotyku na tečnách paraboly

<u>Postup:</u>

1. - z ohniska **F** sestrojíme kolmice k tečnám **a**, **b**, průsečíky těchto kolmic s tečnami jsou body vrcholové tečny **v**
   - vedeme kolmici z ohniska **F** na vrcholovou tečnu **v**, průnik kolmice a vrcholové tečny je vrchol **V** paraboly
2. - osa **o** paraboly je přímka jdoucí body **V**, **F**
3. - řídící přímka **e** paraboly je kolmice na osu **o** v bodě **E**, kde $|\mathbf{EV}|=|\mathbf{VF}|$
4. - pomocí Brianchonovy věty sestrojíme bod **A** na tečně **a**, bod **B** na tečně **b** (lze řešit též užitím ohniskových vlastností)
5. - sestrojíme parabolu jdoucí body **A**, **B**, **V**

Obr. 3.3



Sestrojte parabolu, jsou-li dány dvě tečny a, b, polára p a pól P

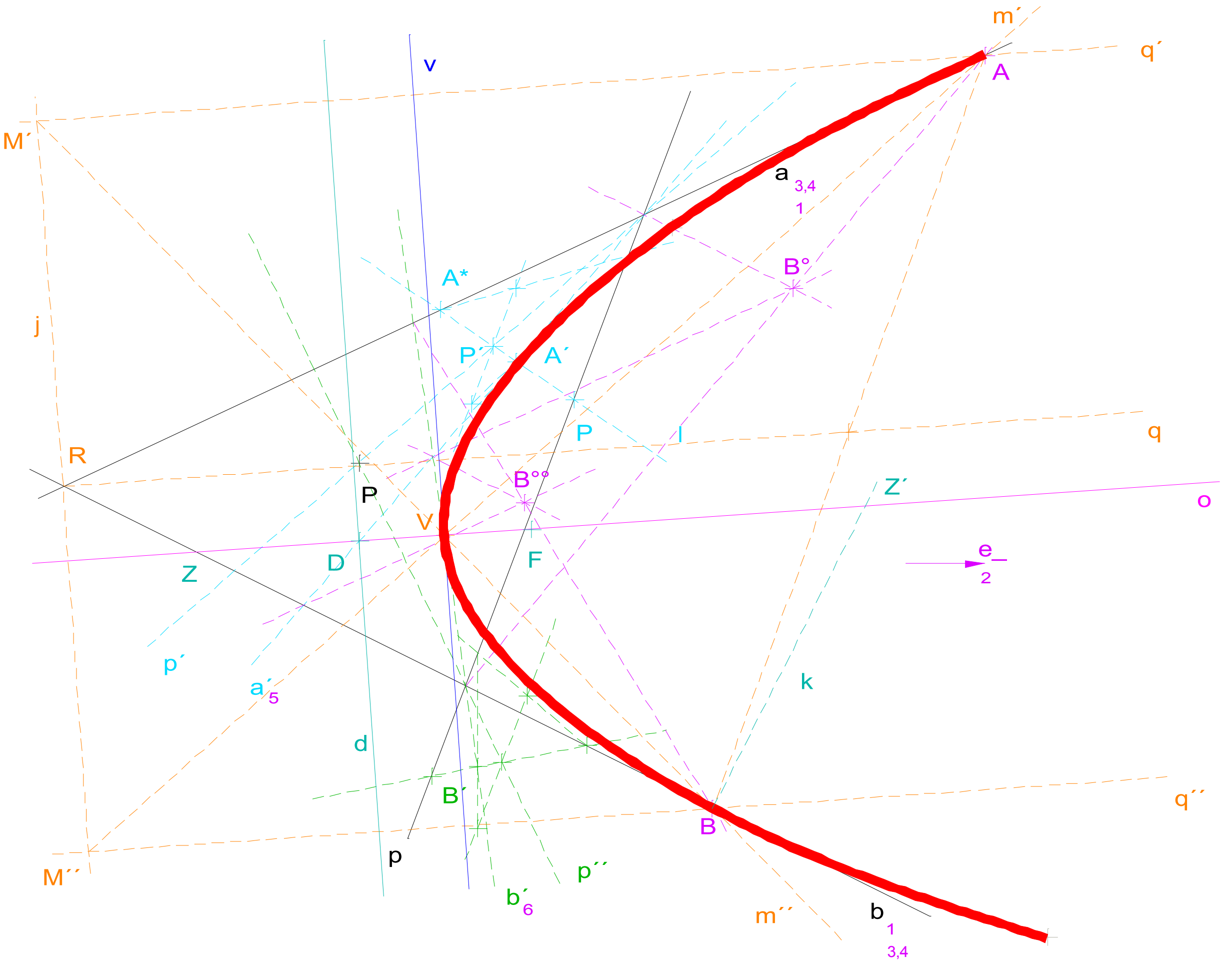
Rozbor:

- pomocí libovolné přímky a konstrukce čtvrtého harmonického bodu sestrojíme tečny **a´**, **b´**
- pomocí Brianchonovy věty sestrojíme body dotyku na tečnách **a**, **b**
- sestrojíme vrchol a směr osy paraboly
- sestrojíme vrcholovou tečnu a osu paraboly
- sestrojíme ohnisko paraboly
- sestrojíme řídící přímku paraboly

Postup:

1. - **p´= P(p∩a)**, zvolíme libovolnou přímku **l** , která protíná přímky **p**, **a**, **p´**
   - **A*= l∩a**, **P = l∩p**, **P´= l∩p´**, pomocí konstrukce čtvrtého harmonického bodu sestrojíme bod **A´** (str. 6)
   - **A´(p∩a) = a´**, **a´** je také tečna paraboly
   - stejně sestrojíme i tečnu **b´**
2. - pomocí Brianchonovy věty sestrojíme body dotyku **A**, **B** na tečnách **a**, **b**
3. - **a∩b=R**, bodem **R** vedeme přímku **q**, která prochází středem úsečky **AB**
   - **q** určuje směr osy paraboly
   - v bodě **R** sestrojíme kolmici **j** na přímku **q**
   - body dotyku **A**, **B** na tečnách **a**, **b** vedeme rovnoběžky **q´**, **q´´** s přímkou **q**, **q´∩j = M´**, **q´´∩j = M´´**
   - **M´B∩M´´A = V** (vrchol paraboly)
4. - vrcholová tečna **v** je kolmá na směr osy **q**, osa **o** prochází vrcholem **V** a je rovnoběžná se směrem osy, tedy **q**
5. - sestrojíme kolmici **k** na tečnu **b** v bodě **B**, **b∩o = Z**, **k∩o = Z´**, **|ZF|=|FZ´|**, **F** je ohnisko paraboly
6. - sestrojíme bod **D**, **|DV|=|VF|**, v bodě **D** sestrojíme kolmici **d** k ose **o**, **d** je řídící přímka
7. - sestrojíme parabolu jdoucí body **A**, **B**, **V**

Obr. 3.4



Použitá literatura:

Karel Havlíček : Úvod do projektivní geometrie kuželoseček,
SNTL Praha, 1956