

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Fuzzy inferenční systémy



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Bc. Kristýna Sklenářová**
Studijní program: N1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Aplikace matematiky v ekonomii
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2022

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Kristýna Sklenářová

Název práce: Fuzzy inferenční systémy

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2022

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá problematikou fuzzy inferenčních systémů a vybranými metodami představenými v odborné literatuře. V první kapitole jsou popsány základy teorie fuzzy množin, jejichž znalost je potřebná pro porozumění dalšímu textu. Druhá kapitola je věnována teoretickému představení přibližné dedukce a fuzzy inferenčních systémů. V této kapitole jsou pak také představeny čtyři vybrané přístupy k inferenci: Mamdaniho přístup, Novákův přístup, přístup zobecněného Sugena a přístup Sugena a Yasukawy. V poslední kapitole jsou tyto jednotlivé algoritmy ukázány a porovnány na několika jednoduchých příkladech, které byly modelovány v programovém prostředí MATLAB pomocí vlastní vytvořené funkce.

Klíčová slova: fuzzy množina, fuzzy číslo, fuzzy relace, defuzzifikace, jazyková proměnná, báze fuzzy pravidel, přibližná dedukce, fuzzy inference

Počet stran: 98

Počet příloh: 1 CD

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Kristýna Sklenářová

Title: Fuzzy inference systems

Type of thesis: Master's thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

The year of presentation: 2022

Abstract: This master's thesis deals with the issue of fuzzy inference systems and examines selected methods presented in scientific literature. The first chapter gives a basic introduction to fuzzy set theory and provides information needed to understand the following text. The second chapter is devoted to the theory of approximate reasoning and fuzzy inference systems. This chapter also presents four selected approaches to fuzzy inference: Mamdani's approach, Novák's approach, the generalized Sugeno's approach and the approach of Sugeno & Yasukawa. In the last chapter, the process of inference of these selected methods is described and their differences are shown on several simple examples that were modeled in the programming platform MATLAB using a custom-made function.

Key words: fuzzy set, fuzzy number, fuzzy relation, defuzzification, linguistic variable, fuzzy rule base, approximate reasoning, fuzzy inference

Number of pages: 98

Number of appendices: 1 CD

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a všechny použité zdroje jsou uvedeny v seznamu literatury.

V Olomouci dne

.....

podpis

Obsah

Úvod	7
1 Základy teorie fuzzy množin	8
1.1 Historie a motivace	8
1.2 Základní pojmy a operace	9
1.3 Fuzzy relace a jejich skládání	16
1.4 Fuzzy čísla	18
1.5 Defuzzifikace	22
1.6 Jazyková proměnná	24
2 Fuzzy inferenční systémy	26
2.1 Báze fuzzy pravidel a přibližná dedukce	26
2.2 Fuzzy inferenční algoritmy	30
2.2.1 Mamdaniho fuzzy inference	31
2.2.2 Novákova fuzzy inference	34
2.2.3 Zobecněná Sugenoova fuzzy inference	37
2.2.4 Sugenoova & Yasukawova fuzzy inference	39
3 Porovnání inferenčních algoritmů na názorných příkladech	41
3.1 Příklad s jednou vstupní proměnnou	42
3.1.1 Výchozí příklad	42
3.1.2 Upravení výchozího příkladu pro trojúhelníková fuzzy čísla	54
3.1.3 Upravení výchozího příkladu zjemněním škál	58
3.2 Příklad s protichůdnými pravidly	69
3.3 Příklad se dvěma vstupními proměnnými	75
3.4 Ukázka případu, kdy žádné pravidlo není zasaženo	86
Závěr	92
Literatura	94
Seznam obrázků	97
Seznam tabulek	98

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat panu RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph. D. za odborné vedení mé diplomové práce, cenné rady, nápady a připomínky a také trpělivost a časté a velice přínosné konzultační hodiny, které mi věnoval. Dále bych chtěla poděkovat kamarádce Haničce za zpětnou vazbu a rady ohledně gramatiky a také všem, kteří to se mnou během psaní této práce vydrželi a byli mi psychickou oporou.

Úvod

Tato diplomová práce je věnována problematice fuzzy inferenčních systémů, jejichž cílem je matematicky modelovat lidské usuzování. Tyto systémy se tedy snaží na základě nějakých slovně formulovaných pravidel typu “JESTLIŽE, PAK” srozumitelně a intuitivně popisovat vztahy mezi proměnnými a s využitím fuzzy logiky z nich vyvozovat závěry.

V první kapitole této práce se nejdříve seznámíme se základy teorie fuzzy množin. Představíme si koncepci fuzzy množiny, uvedeme si základní pojmy, pomocí kterých lze fuzzy množiny popsat a operace, které s nimi můžeme provádět. Dále se zaměříme na fuzzy relace a fuzzy čísla a popíšeme si různé metody defuzzifikace. Nakonec si zadefinujeme jazykovou proměnnou, se kterou budeme v dalších kapitolách pracovat.

Druhá kapitola se již bude věnovat teoretickému pozadí fuzzy inferenčních systémů. V této části se nejprve stručně seznámíme se základní myšlenkou fuzzy logiky, zadefinujeme si bázi fuzzy pravidel a představíme si přibližnou dedukci. Následně si uvedeme obecný proces fuzzy inferenčních systémů a představíme si čtyři různé přístupy k inferenci: Mamdaniho přístup, Novákův přístup a dva typy zobecnění klasického Suganova přístupu.

Ve třetí kapitole si pak zkusíme několik fuzzy inferenčních systémů sestavit a jednotlivé algoritmy na nich modelovat. Pro tyto účely si vytvoříme vlastní funkci v programovacím prostředí MATLAB. Na daných příkladech si ukážeme nejen způsob výpočtu a chování jednotlivých metod, ale také se pokusíme jednotlivé přístupy mezi sebou porovnat.

Kapitola 1

Základy teorie fuzzy množin

Na začátku této práce se nejdříve seznámíme se základy teorie fuzzy množin, což je další matematický nástroj, který nám umožňuje efektivně pracovat nejen s čísly, ale také s vágními (neurčitými) pojmy, a matematicky modelovat významy slov přirozeného jazyka.

Informace pro tuto kapitolu byly čerpány z publikací [1], [7], [11] a [12], není-li uvedeno jinak.

1.1. Historie a motivace

Za zakladatele teorie fuzzy množin a fuzzy logiky je považován americký inženýr a profesor narozený v Ázerbajdžánu, Lotfi A. Zadeh. Pojem “fuzzy” a základní koncepci fuzzy množin představil poprvé ve svém článku *Fuzzy Sets* [12], který byl publikován v roce 1965 v časopise *Information and Control*.

V 60. letech začal Zadeh zpochybňovat dostatečnost klasické matematiky, která je založena na přesném popisu systému a exaktních definicích. Zadeh byl názoru, že čím detailněji se snažíme nějaké složité systémy popsat, tím více se můžeme v daném popisu začít ztrácet. Navrhl tedy, že k přesnému a zároveň srozumitelnému popisu potřebujeme jiný druh matematiky, který bude umět pracovat i s vágními pojmy a přirozeným jazykem. Zadeh upozornil na to, že v reálném životě se narozdíl od klasických množin, jejichž hranice jsou jasně vymezené, setkáváme ve velké míře s množinami, u kterých tyto hranice tak jedno-

značně stanovit nedokážeme. Pro tyto množiny se rozhodl použít označení *fuzzy* (mlhavý, neostrý či neurčitý).

Jako příklad takových množin ve svém díle uvádí např. množinu krásných žen či množinu vysokých mužů. Vidíme, že pro tyto případy nemáme žádné jasně dané kritérium, dle kterého bychom ženy či muže do těchto množin zařadili, resp. nezařadili. Ve svém díle se Zadeh snažil poukázat na to, že právě takovéto typy nepřesně vymezených množin však mají velmi důležitou roli v lidském myšlení a vyjadřování, a přišel s nápadem funkce příslušnosti, na kterém je teorie fuzzy množin založena.

Ačkoliv se ze začátku tato teorie setkala s poměrně velkou vlnou nepochopení, skepse a kritiky, nenechal se Zadeh těmito negativními reakcemi odradit a s postupem času začala jeho teorie fuzzy množin nacházet příznivce a uplatnění, nejprve zejména v Japonsku, následně i v Evropě a USA.

1.2. Základní pojmy a operace

V této kapitole si představíme některé základní pojmy a operace týkající se fuzzy množin. Definice a značení použité v této části byly převzaty převážně z [8] a [11].

Ostrá vs. fuzzy množina

Již víme, že klasická (neboli ostrá) množina má jasně vymezené hranice, dle kterých dokážeme rozhodnout o tom, zda nějaký prvek do dané množiny patří či nikoliv. Každou ostrou množinu A definovanou na univerzu \mathcal{U} lze tedy popsat pomocí tzv. *charakteristické funkce* χ_A , která každému prvku x z \mathcal{U} přiřadí buď hodnotu 1, pokud prvek do množiny A patří, nebo 0, pokud do ní nepatří, tj.:

$$\chi_A : \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\} \tag{1.1}$$

$$\forall x \in \mathcal{U} : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x \in A \\ 0 & \text{jestliže } x \notin A. \end{cases} \tag{1.2}$$

Základní ideou fuzzy množin pak je, že prvek může do množiny A patřit i jen z části (tj. v určitém stupni).

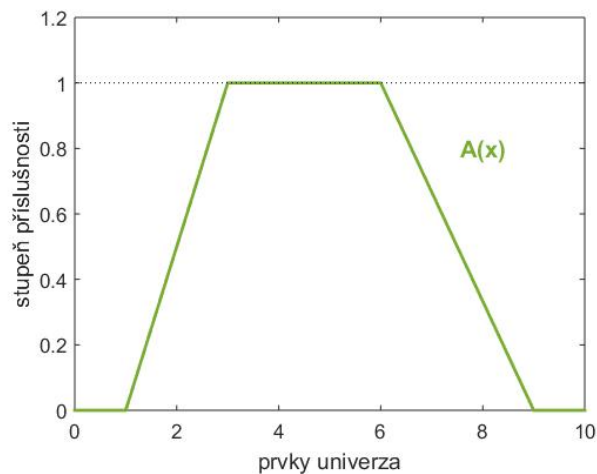
Definice 1.1 (Fuzzy množina). *Nechť je dána množina \mathcal{U} , tzv. univerzum. Pak fuzzy množina A na univerzu \mathcal{U} je definována zobrazením*

$$\mu_A : \mathcal{U} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle. \quad (1.3)$$

Funkci μ_A nazýváme funkcí příslušnosti fuzzy množiny A . Pro každé $x \in \mathcal{U}$ nazýváme hodnotu $\mu_A(x)$ stupeň příslušnosti prvku x k fuzzy množině A .

Z definice je zřejmé, že jakoukoliv ostrou množinu lze interpretovat jako speciální případ fuzzy množiny, kde $\mu_A = \chi_A$.

Pro zjednodušení budeme dále funkci příslušnosti fuzzy množiny označovat stejně jako danou fuzzy množinu (tj. $\mu_A = A(\cdot)$). Příklad grafu funkce příslušnosti fuzzy množiny můžeme vidět na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Příklad funkce příslušnosti

Systém všech fuzzy množin definovaných na \mathcal{U} značíme $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ a skutečnost, že A je fuzzy množina na \mathcal{U} , pak značíme zápisem $A \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Základní pojmy pro popis fuzzy množin

Definice 1.2 (Základní pojmy). *Nechť je dána $A \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.*

Nosičem fuzzy množiny A na univerzu \mathcal{U} rozumíme ostrou množinu

$$\text{Supp } A = \{x \in \mathcal{U} \mid A(x) > 0\}. \quad (1.4)$$

Jádrem fuzzy množiny A na univerzu \mathcal{U} rozumíme ostrou množinu

$$\text{Ker } A = \{x \in \mathcal{U} \mid A(x) = 1\}. \quad (1.5)$$

Nechť je dáno reálné číslo $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

α -řezem fuzzy množiny A na univerzu \mathcal{U} rozumíme ostrou množinu

$$A_\alpha = \{x \in \mathcal{U} \mid A(x) \geq \alpha\}. \quad (1.6)$$

Výškou fuzzy množiny A na univerzu \mathcal{U} rozumíme hodnotu

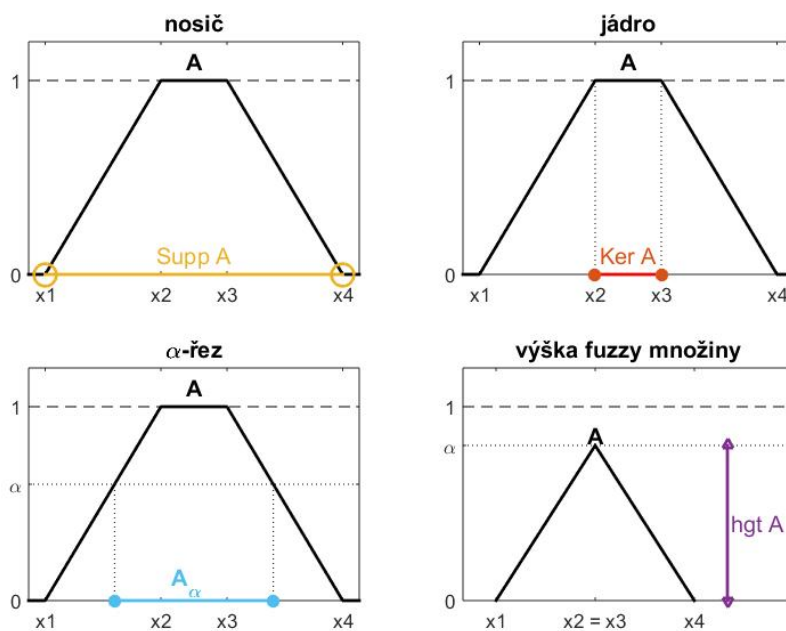
$$\text{hgt } A = \sup\{A(x) \mid x \in \mathcal{U}\}. \quad (1.7)$$

Fuzzy množina A se nazývá normální, jestliže

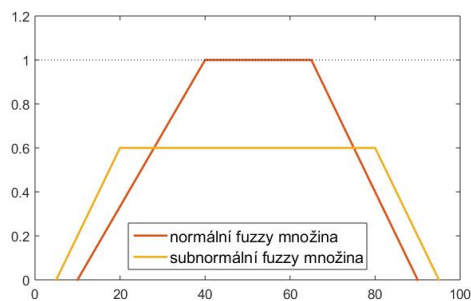
$$\text{Ker } A \neq \emptyset, \quad (1.8)$$

jinak se nazývá subnormální.

Všechny výše zmíněné pojmy jsou znázorněny na obrázcích [1.2](#) a [1.3](#).



Obrázek 1.2: Nosič, jádro, α -řez a výška fuzzy množiny



Obrázek 1.3: Normální vs. subnormální fuzzy množina

Základní a zobecněné operace s fuzzy množinami

Z práce s klasickými množinami víme, že prvky, které mají množiny společné, můžeme modelovat pomocí průniku, prvky, které se vyskytují alespoň v jedné z množin, pomocí sjednocení a prvky, které se v množině nevyskytují, pomocí doplňku. Obdobné operace můžeme provádět také s fuzzy množinami. Narozdíl

od klasických množin zde ale tyto operace nejsou určeny jednoznačně. Než se podíváme na definice takových operací a jejich znázornění, je třeba ještě podotknout, že tyto operace lze provádět pouze s fuzzy množinami definovanými na stejném univerzu.

Operace s fuzzy množinami jsou tedy unární (doplňek) nebo binární (průnik, sjednocení) operace na $\mathcal{F}(\mathcal{U})$. Jelikož jsou fuzzy množiny jednoznačně definovány svými funkcemi příslušnosti, jsou tyto operace konstruovány tzv. “po bodech”, pro jednotlivé stupně příslušnosti.

Nejdříve se podíváme na základní operace dle Zadeha a následně si uvedeme některé doplňující operace, které je potřeba znát pro další kapitoly.

Definice 1.3 (Průnik). *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.*

Průnikem fuzzy množin A a B rozumíme fuzzy množinu $(A \cap B) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ s funkcí příslušnosti definovanou vztahem

$$\forall x \in \mathcal{U} : (A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}. \quad (1.9)$$

Definice 1.4 (Sjednocení). *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.*

Sjednocením fuzzy množin A a B rozumíme fuzzy množinu $(A \cup B) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ s funkcí příslušnosti definovanou vztahem

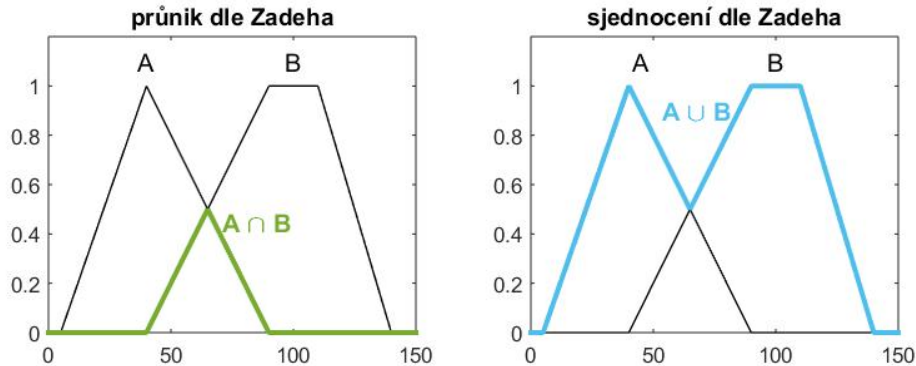
$$\forall x \in \mathcal{U} : (A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}. \quad (1.10)$$

Definice 1.5 (Doplňek). *Nechť $A \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.*

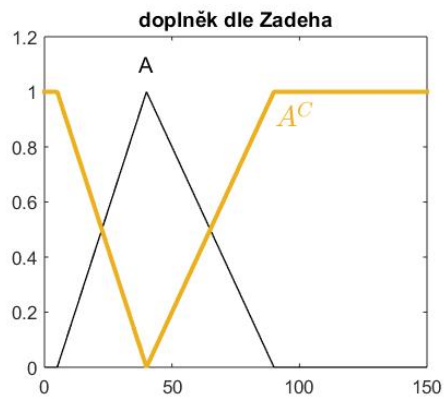
Doplňkem fuzzy množiny A rozumíme fuzzy množinu $A^C \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ s funkcí příslušnosti definovanou vztahem

$$\forall x \in \mathcal{U} : (A^C)(x) = 1 - A(x). \quad (1.11)$$

Všechny výše uvedené Zadehovy operace jsou zobrazeny na obrázku [1.4](#) a [1.5](#).



Obrázek 1.4: Průnik a sjednocení dle Zadeha



Obrázek 1.5: Doplněk dle Zadeha

Dále si tedy ještě uvedeme doplňující operace dle zakladatele tříhodnotové logiky, polského matematika Jana Łukasiewiczze, které jsou zobrazeny na obrázku 1.6. Těmto operacím se také říká odvážný průnik a odvážné sjednocení.

Definice 1.6 (Łukasiewiczův průnik). *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.*

Łukasiewiczovým (odvážným) průnikem *fuzzy množin A a B rozumíme fuzzy množinu $(A \cap_L B) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ s funkcí příslušnosti definovanou vztahem*

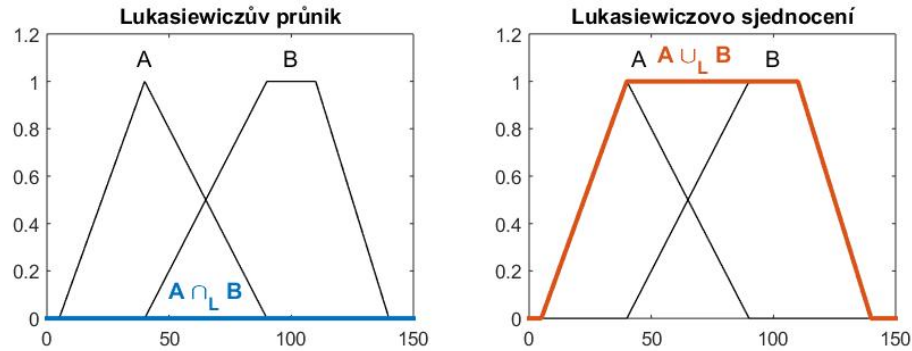
$$\forall x \in \mathcal{U} : (A \cap_L B)(x) = A(x) \otimes B(x) = \max\{0, A(x) + B(x) - 1\}. \quad (1.12)$$

Definice 1.7 (Łukasiewiczovo sjednocení). *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.*

Łukasiewiczovým (odvážným) sjednocením *fuzzy množin A a B rozumíme fuzzy*

množinu $(A \cup_L B) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ s funkcí příslušnosti definovanou vztahem

$$\forall x \in \mathcal{U} : (A \cup_L B)(x) = A(x) \oplus B(x) = \min\{1, A(x) + B(x)\}. \quad (1.13)$$



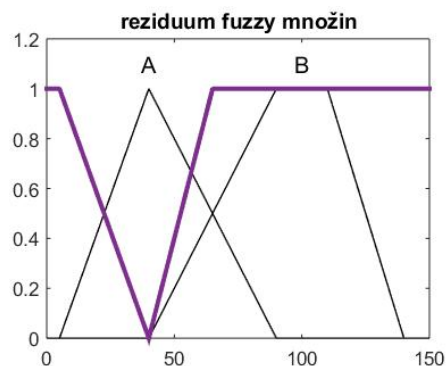
Obrázek 1.6: Průnik a sjednocení dle Łukasiewicze

Poslední operací, kterou si zde uvedeme, je operace reziduum. Tato operace modeluje význam logické spojky “jestliže, pak” a nese tedy informaci o možnosti výskytu nějaké vlastnosti v závislosti na výskytu vlastnosti předchozí. Grafický příklad této operace je zobrazen na obrázku 1.7.

Definice 1.8 (Reziduum). *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.*

Reziduem fuzzy množin A a B rozumíme fuzzy množinu $(A \ominus B) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ s funkcí příslušnosti definovanou vztahem

$$\forall x \in \mathcal{U} : (A \ominus B)(x) = \min\{1, 1 - A(x) + B(x)\}. \quad (1.14)$$



Obrázek 1.7: Reziduum fuzzy množin A a B

1.3. Fuzzy relace a jejich skládání

Obdobně, jako tomu je u klasických množin, můžeme také v teorii fuzzy množin modelovat učité vztahy mezi prvky pomocí relací. Zatímco u klasické (ostré) relace však prvky v daném vztahu buď jsou, nebo nejsou, fuzzy relace nám umožní intenzitu tohoto vztahu kvantifikovat. Prvky tedy ve vztahu mohou být úplně, nemusí v něm být vůbec, nebo v něm mohou být například jen na 50 %.

Názorným příkladem může být pro klasickou relaci např. relace “ \geq ” na \mathbb{R} a pro fuzzy relaci relace “mnohem větší” na \mathbb{R} .

Definice v této části byly opět převzaty z publikací [8] a [11].

Definice 1.9 (Fuzzy relace). *n -ární fuzzy relace je libovolná fuzzy množina R definovaná na kartézském součinu univerz $\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n$.*

Definice 1.10 (Kartézský součin fuzzy množin). *Nechť $A_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i), i = 1, \dots, n$. Kartézským součinem fuzzy množin A_1, \dots, A_n nazveme fuzzy množinu $A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n)$ s funkcí příslušnosti*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n : (A_1 \times \dots \times A_n)(x_1, \dots, x_n) = \min\{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\}. \quad (1.15)$$

Stupeň příslušnosti n -tice (x_1, \dots, x_n) k fuzzy relaci R , tj. $R(x_1, \dots, x_n)$, udává míru vztahu R mezi prvky x_1, \dots, x_n . Funkce příslušnosti R tedy představuje sdružené možnostní rozdělení, které nám říká, že možnost, že daná kombinace hodnot je právě (x_1, \dots, x_n) , je $R(x_1, \dots, x_n)$.

K tomu, abychom z dané n -ární relace získali k -ární relaci, kde $k \leq n$, slouží tzv. projekce fuzzy relace. Chceme-li naopak z k -ární fuzzy relace získat relaci n -ární, použijeme pak tzv. cylindrické rozšíření. Definice těchto dvou pojmů byly převzaty z [7].

Definice 1.11 (Projekce fuzzy relace). *Nechť je dána fuzzy relace $R \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n)$ a vybrané indexy i_1, \dots, i_k , přičemž $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$,*

$k \in \{1, \dots, n-1\}$. Projekce fuzzy relace R na $\mathcal{U}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{U}_{i_k}$ je fuzzy množina $Proj(R; \mathcal{U}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{U}_{i_k})$ s funkcí příslušnosti

$$\forall (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \mathcal{U}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{U}_{i_k} : \\ Proj(R; \mathcal{U}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{U}_{i_k})(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \sup\{R(y_1, \dots, y_n) \mid x_{i_t} = y_{i_t}, t = 1, \dots, k\}. \quad (1.16)$$

Definice 1.12 (Cylindrické rozšíření fuzzy relace). *Nechť $R \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{U}_{i_k})$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Cylindrické rozšíření fuzzy relace R na $\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n$ je fuzzy množina $Cyl(R; \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n)$ s funkcí příslušnosti*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n : Cyl(R; \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_n)(x_1, \dots, x_n) = R(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \quad (1.17)$$

Pokud je z kontextu zřejmé, na jaké univerzum při cylindrickém rozšíření fuzzy relaci R rozšiřujeme, můžeme použít zjednodušené značení R^* .

Poslední důležitou operací, kterou si zde představíme, je kompozice (neboli skládání) fuzzy relací.

Definice 1.13 (Silná a slabá kompozice). *Nechť je dána fuzzy relace R na $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ a fuzzy relace S na $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$.*

Silnou kompozicí fuzzy relací R a S nazýváme fuzzy relaci $R \circ S$ na $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ s funkcí příslušnosti

$$\forall (x, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W} : (R \circ S)(x, z) = \sup_{y \in \mathcal{V}} \min\{R(x, y), S(y, z)\}. \quad (1.18)$$

Slabou kompozicí fuzzy relací R a S nazýváme fuzzy relaci $R \overset{\circ}{\times} S$ na $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ s funkcí příslušnosti

$$\forall (x, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W} : (R \overset{\circ}{\times} S)(x, z) = \sup_{y \in \mathcal{V}} \{R(x, y) \otimes S(y, z)\}. \quad (1.19)$$

Silná kompozice tedy používá minimum, zatímco slabá kompozice používá Lukasiewiczovu konjunkci (1.12).

1.4. Fuzzy čísla

V této kapitole se zaměříme na speciální typ fuzzy množin, které slouží k modelování nějaké “fuzzy kvantity”, neboli vágně popsaného množství (např. “asi 10”, “zhruba 180 cm”, apod.). V praxi se právě s takto nepřesnými hodnotami setkáváme velmi často a fakt, že je díky fuzzy číslům dokážeme modelovat a pracovat s nimi, je pro matematiku velkým přínosem.

Následující definice a věty byly opět čerpány z [1] a [11].

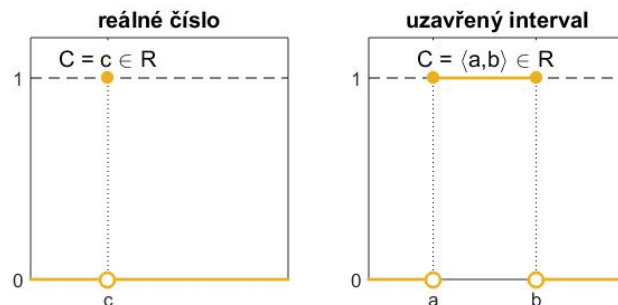
Definice 1.14 (Fuzzy číslo). *Fuzzy množina C definovaná na množině reálných čísel \mathbb{R} se nazývá fuzzy číslo, jestliže splňuje následující 3 podmínky:*

- $\text{Ker } C \neq \emptyset$ (tj. C je normální fuzzy množina),
- $\forall \alpha \in (0, 1) : \alpha$ -řez C_α je uzavřený interval,
- nosič $\text{Supp } C$ je ohraničený.

Množinu všech fuzzy čísel pak značíme $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$.

Někdy se rozlišuje označení “fuzzy číslo” pro případy, kdy je jádro jednoprvkové a “fuzzy interval”, je-li jádro tvořeno dvěma a více prvky.

Je dobré připomenout, že i na ostrá reálná čísla či uzavřené intervaly můžeme nahlížet jako na speciální případ fuzzy čísel, jak lze vidět z obrázku 1.8.



Obrázek 1.8: Reálné číslo a uzavřený interval jako fuzzy množiny

Lze dokázat, že pro každé fuzzy číslo C existují hodnoty $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, pro které platí:

$$C(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, x_1) \\ L(x) & \text{pro } x \in \langle x_1, x_2 \rangle \\ 1 & \text{pro } x \in \langle x_2, x_3 \rangle \\ P(x) & \text{pro } x \in (x_3, x_4) \\ 0 & \text{pro } x \in (x_4, \infty), \end{cases} \quad (1.20)$$

kde $L(x)$ je neklesající, zprava spojitá funkce a $P(x)$ je nerostoucí, zleva spojitá funkce. Důkaz viz [2, str. 99, 100].

Reálným číslym, které splňují podmínky:

- a) $Ker C = \langle x_2, x_3 \rangle$
- b) $\overline{Supp C} = \langle x_1, x_4 \rangle$

říkáme tzv. *význačné hodnoty* fuzzy čísla C , přičemž $\overline{Supp C}$ značí uzávěr nosiče fuzzy čísla C .

Výše uvedená interpretace fuzzy čísla se někdy označuje jako tzv. kanonická forma fuzzy čísla.

Alternativně lze k zápisu fuzzy čísla využít také jeho systém α -řezů. Z vlastnosti b) z definice fuzzy čísla 1.14 plyne, že pro všechna $\alpha \in (0, 1)$ je C_α uzavřený interval. Fuzzy číslo C je pak definováno následovně:

$$C = \{ \langle \underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \}, \quad (1.21)$$

kde \underline{c}, \bar{c} jsou reálné funkce takové, že:

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \langle \underline{c}(\alpha), \bar{c}(\alpha) \rangle & \text{pro } \alpha \in (0, 1) \\ \overline{Supp C} &= \langle \underline{c}(0), \bar{c}(0) \rangle & \text{pro } \alpha = 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

přičemž funkce \underline{c} zobrazuje interval $\langle 0, 1 \rangle$ na interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ a funkce \bar{c} je zobrazením $\langle 0, 1 \rangle$ na $\langle x_3, x_4 \rangle$.

Význačné třídy fuzzy čísel

V závislosti na tvaru funkcí \underline{c} a \bar{c} rozlišujeme několik význačných tříd fuzzy čísel. Nejjednodušší z nich je lineární fuzzy číslo, které se používá velmi často ve fuzzy modelech pro modelování neurčité informace a je lehce implementovatelné do algoritmů. Dále si uvedeme ještě kvadratické fuzzy číslo a po částech lineární fuzzy číslo.

Definice 1.15 (Lineární fuzzy číslo). *Fuzzy číslo C je lineární fuzzy číslo, jestliže $\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:*

$$C(x; x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, x_1) \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} & \text{pro } x \in \langle x_1, x_2 \rangle \\ 1 & \text{pro } x \in \langle x_2, x_3 \rangle \\ \frac{x_4-x}{x_4-x_3} & \text{pro } x \in (x_3, x_4) \\ 0 & \text{pro } x \in (x_4, \infty). \end{cases} \quad (1.23)$$

Lineární fuzzy číslo je tedy jednoznačně popsáno svými význačnými hodnotami. Rozlišujeme následující speciální případy:

a) lichoběžníkové fuzzy číslo:

$$C = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle, \text{ kde } x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

b) trojúhelníkové fuzzy číslo:

$$C = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle, \text{ kde } c_1 = x_1 < c_2 = x_2 = x_3 < c_3 = x_4$$

c) fuzzy číslo typu Z:

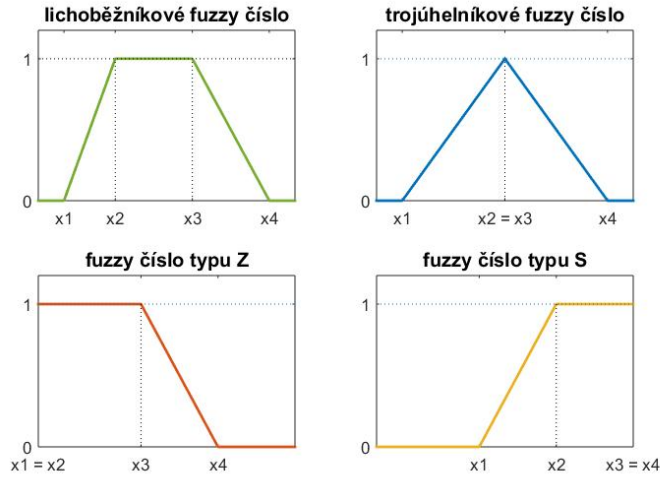
$$C = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle, \text{ kde } x_1 = x_2 < x_3 < x_4$$

d) fuzzy číslo typu S:

$$C = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle, \text{ kde } x_1 < x_2 < x_3 = x_4$$

Lichoběžníkové číslo se používá zejména pro modelování dat typu “hodnota je mezi x_2 a x_3 ” a trojúhelníkové pro data typu “hodnota je asi c_2 ”.

Všechny tyto typy jsou znázorněny na obrázku 1.9.



Obrázek 1.9: Speciální případy lineárních fuzzy čísel

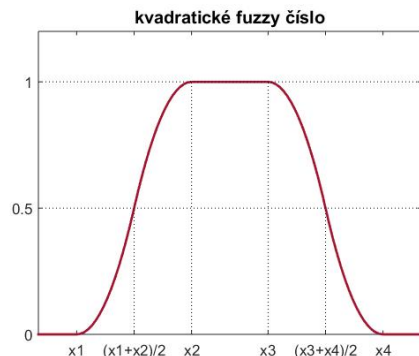
Chceme-li použít alternativní definici lineárního fuzzy čísla pomocí α -řezů, pak jsou funkce \underline{c} a \bar{c} definovány jako následující lineární funkce:

$$\begin{aligned}\underline{c}(\alpha) &= x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \\ \bar{c}(\alpha) &= x_4 - \alpha(x_4 - x_3).\end{aligned}\tag{1.24}$$

Definice 1.16 (Kvadratické fuzzy číslo). *Fuzzy číslo C je kvadratické fuzzy číslo, jestliže $\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:*

$$C(x; x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, x_1) \\ \frac{2(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)^2} & \text{pro } x \in \langle x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \rangle \\ 1 - \frac{2(x_2-x)^2}{(x_2-x_1)^2} & \text{pro } x \in \langle \frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \rangle \\ 1 & \text{pro } x \in \langle x_2, x_3 \rangle \\ 1 - \frac{2(x-x_3)^2}{(x_4-x_3)^2} & \text{pro } x \in (x_3, \frac{x_3+x_4}{2}) \\ \frac{2(x_4-x)^2}{(x_4-x_3)^2} & \text{pro } x \in (\frac{x_3+x_4}{2}, x_4) \\ 0 & \text{pro } x \in (x_4, \infty). \end{cases}\tag{1.25}$$

Také kvadratické fuzzy číslo je tedy jednoznačně dáno svými význačnými hodnotami, avšak místo přímek je modelováno pomocí parabol (viz obr. 1.10).



Obrázek 1.10: Kvadratické fuzzy číslo

K přesnější aproximaci nějakého fuzzy čísla, u kterého není znám jeho předpis funkce, lze použít tzv. *po částech lineární fuzzy číslo třídy n* , kdy zvolíme uzávěr nosiče, jádro nosiče a n α -řezů ($\alpha_1 < \dots < \alpha_n$), pomocí kterých budeme fuzzy číslo reprezentovat. Následně zadáme příslušné hodnoty

$$\begin{aligned} \underline{c}(0), \underline{c}(\alpha_1), \dots, \underline{c}(\alpha_n), \underline{c}(1) \\ \bar{c}(0), \bar{c}(\alpha_1), \dots, \bar{c}(\alpha_n), \bar{c}(1). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Celkem tedy budeme mít $2(n+2)$ bodů a funkci příslušnosti daného fuzzy čísla C pak získáme jejich lineárním propojením.

1.5. Defuzzifikace

Nyní se seznámíme s procesem inverzním k procesu fuzzifikace, neboli s tzv. defuzzifikací. Uvažujme, že máme fuzzy množinu definovanou na reálné ose (tj. $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$). S využitím procesu defuzzifikace budeme schopni tuto fuzzy množinu nahradit nějakým konkrétním reálným číslem. V jistém smyslu jde tedy o analogii k případu, kdy nahrazujeme náhodnou veličinu nějakou její číselnou charakteristikou (např. střední hodnotou). Stejně tak, jako existuje více možných číselných charakteristik pro náhodné veličiny, existují i různé možnosti defuzzifikace.

V této práci si uvedeme následující způsoby defuzzifikace: metoda těžiště (angl. centroid), metoda bisektoru, metoda MOM (Middle Of Maximum), metoda

SOM (Smallest Of Maximum) a metoda LOM (Largest of Maximum). Informace o těchto metodách byly čerpány z [4] a [8].

Je dobré podotknout, že vzhledem ke způsobu výpočtu mohou metody dávat velmi odlišné výsledky a je tedy vždy potřeba zvážit, která z nich nám bude nejvíce vyhovovat. Jejich porovnání uvidíme také v kapitole 3.

Těžiště

Metoda těžiště (COG...Center Of Gravity) dává jako výsledek hodnotu těžiště dané fuzzy množiny.

Mějme $A \in \mathcal{F}(\langle a, b \rangle)$. Výsledná hodnota je pak dána vztahem

$$COG(A) = \frac{\int_a^b A(x) \cdot x dx}{\int_a^b A(x) dx}. \quad (1.27)$$

Bisektor

Metoda bisektoru vrátí hodnotu, která rozdělí fuzzy množinu na 2 oblasti se stejnou plochou.

MOM, SOM a LOM

Označme si pomocí M množinu všech prvků, jejichž stupeň příslušnosti je roven výšce dané fuzzy množiny, tj.:

$$M = \{x \in \langle a, b \rangle \mid A(x) = hgt(A)\}. \quad (1.28)$$

Metoda MOM bere jako výslednou hodnotu střed maxim (tj. střed z hodnot ležících v α -řezu s největším stupněm příslušnosti), metoda SOM bere nejmenší hodnotu z množiny M a metoda LOM pak naopak tu největší¹.

$$MOM(A) = \frac{\inf M + \sup M}{2} \quad (1.29)$$

$$SOM(A) = \inf M \quad (1.30)$$

$$LOM(A) = \sup M \quad (1.31)$$

¹Pozn.: v softwaru Matlab bere funkce `defuzz` pro defuzzifikaci pomocí SOM a LOM nejmenší, resp. největší hodnotu z absolutních hodnot.

1.6. Jazyková proměnná

V poslední části první kapitoly se seznámíme s koncepcí tzv. *jazykové proměnné*. Autorem této koncepce je opět Lotfi Zadeh, který ve svém díle [14] dokonce uvedl, že ji považuje za jeden z jeho největších přínosů k rozvoji fuzzy logiky.

Definice a informace pro tuto kapitolu byly čerpány z [11] a [13].

Definice 1.17 (Jazyková proměnná). Jazyková proměnná je uspořádaná pětice

$$(\mathcal{X}, \mathcal{T}(\mathcal{X}), \mathcal{U}, G, M), \quad (1.32)$$

kde \mathcal{X} je jméno jazykové proměnné, $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ je množina jazykových hodnot proměnné \mathcal{X} , \mathcal{U} je univerzum, na němž jsou definovány významy jazykových hodnot, G je syntaktické pravidlo pro generování hodnot z $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ a M je sémantické pravidlo, neboli funkce, která každému jazykovému výrazu z množiny termů přiřadí fuzzy množinu vyjadřující jeho význam, tedy $\mathcal{A} \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ a $M(\mathcal{A}) = A \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Jazyková proměnná je jakýmsi nástrojem pro zjednodušené vyjádření tzv. *bazické proměnné*, což je reálná proměnná, která je k ní přidružená a jejíž obor hodnot je identický s univerzem této jazykové proměnné.

Definice 1.18 (Bazická proměnná). Bazická proměnná přidružená k jazykové proměnné $(\mathcal{X}, \mathcal{T}(\mathcal{X}), \mathcal{U}, G, M)$, je uspořádaná dvojice

$$(x, \mathcal{U}), \quad (1.33)$$

kde x je jméno bazické proměnné (většinou $x = \mathcal{X}$) a \mathcal{U} je obor hodnot identický s univerzem jazykové proměnné \mathcal{X} .

Jazyková proměnná je tedy jakousi fuzzy diskretizací bazické proměnné, jejíž hodnoty nejsou čísla, ale slova. Při vyjadřování pomocí hodnot jazykové proměnné nejsme sice natolik přesní, ale je to pro nás mnohdy jednodušší a přirozenější. Jako příklad si můžeme představit proměnnou “výška”, kdy

místo výroku “dívka měří 178 cm” řekneme “dívka je vysoká”. Pro každou konkrétní číselnou hodnotu pak máme stupeň příslušnosti, v jakém danému výrazu “vysoká” odpovídá.

Kapitola 2

Fuzzy inferenční systémy

V této kapitole se seznámíme s fuzzy inferenčními systémy, které s využitím fuzzy logiky a na základě nějakých expertně stanovených slovních pravidel umožňují modelovat vztahy mezi vstupními a výstupními jazykovými proměnnými a pro napozorované hodnoty vstupních proměnných umožní určit výslednou hodnotu výstupu.

Nejprve se tedy stručně seznámíme se základy fuzzy logiky, popíšeme si bázi fuzzy pravidel, představíme si fuzzy inferenci (neboli přibližnou dedukci) a uvedeme si několik možných přístupů - Mamdaniho přístup, Novákův přístup a dva typy zobecnění Sugenova přístupu. V kapitole 3 si pak jednotlivé inferenční mechanismy ukážeme na jednoduchých příkladech a porovnáme.

Informace pro tuto kapitolu byly čerpány především z publikací [1], [5], [6], [7] a [11], není-li uvedeno jinak.

2.1. Báze fuzzy pravidel a přibližná dedukce

Pojem *fuzzy logika* bývá obecně používán ve dvou smyslech - v užším a širším smyslu. Zatímco v užším smyslu jde o jakési zobecnění vícehodnotové logiky, v širším smyslu je fuzzy logika chápána celkově jako metodologie počítající se slovy, která umožňuje aproximovat lidské usuzování a poskytuje určitou rovnováhu mezi přesností a signifikantností. Ačkoliv jsme při počítání se slovy méně přesní, je totiž používání termů většinou mnohem srozumitelnější a intuitivnější.

Fuzzy logika v užším smyslu je pak jen jednou z větví tohoto širšího pojetí.

Hlavním rysem fuzzy logiky je odmítnutí základního principu klasické Aristotelovské logiky - principu bivalence. Fuzzy logika se tedy, na rozdíl od té klasické, neomezuje pouze na dva stupně pravdy (0 pro nepravdu a 1 pro pravdu), ale umožňuje navíc uvažovat i pravdu částečnou, tj. pravdu v libovolném stupni z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Dalo by se tedy říci, že zatímco klasická logika vidí svět jen černobíle, fuzzy logika umožňuje vidět i různé odstíny šedi. [14]

Je dobré si uvést, že před fuzzy logikou přišel s myšlenkou více hodnot pravdy i již dříve zmíněný polský logik Jan Łukasiewicz, který vybuřoval nejprve tříhodnotovou logiku, kdy ke stupňům 1 a 0 přidal navíc stupeň 0.5, který můžeme brát jako symbol pro “nevím”, a později tuto logiku rozšířil na logiku n -hodnotovou pro spočetně mnoho hodnot pravdy (např. $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$). Jak bylo uvedeno výše, fuzzy logika je pak zobecněním této vícehodnotové logiky a umožňuje stupňů pravdy nekonečně mnoho.

Základem fuzzy logiky je práce s jazykovými proměnnými. S využitím nějakých expertních znalostí lze pak často poměrně přesně a intuitivně vyjádřit vztahy mezi těmito proměnnými a jejich hodnotami prostřednictvím běžného jazyka. Tyto znalosti a zkušenosti lze popsat ve formě fuzzy pravidel typu “JESTLIŽE - PAK”.

Než jsou však tato pravidla formulována, je třeba se zamyslet nad tím, jaké vstupní a výstupní proměnné uvažujeme a jaké jsou jejich obory hodnot. Nejdříve si tedy nadefinujeme reálné bazické proměnné a dále jim odpovídající jazykové proměnné. Uvažujeme-li například jako jednu z proměnných výšku člověka, musíme mít stanovené univerzum, tj. jakých hodnot může proměnná nabývat, jaké termy uvažujeme (např. “nízký”, “středně vysoký” a “vysoký”) a jaké jsou jejich matematické významy.

Pro každou kombinaci hodnot vstupních proměnných, která může nastat, je následně expertem zadána kombinace hodnot výstupních proměnných v podobě “JESTLIŽE - PAK” pravidel. Všimněme si, že nemusíme mít pravidlo nutně pro každou kombinaci vstupů, avšak nemělo by se stát, že nastane situace, pro kterou

žádné pravidlo definované nebude. Všechna tato pravidla pak dohromady tvoří tzv. *bázi fuzzy pravidel*.

Báze fuzzy pravidel je tedy jazykově definovaná funkce vyjadřující vztah mezi vstupními a výstupními jazykovými proměnnými. Pro zjednodušení budeme v této práci uvažovat pouze jednu výstupní proměnnou.

Definice 2.1 (Jazykově definovaná funkce - báze fuzzy pravidel). *Nechť jsou dány jazykové proměnné $(\mathcal{X}_j, \mathcal{T}(\mathcal{X}_j), \mathcal{U}_j, G_j, M_j)$ pro $j = 1, \dots, m$ a jazyková proměnná $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}(\mathcal{Y}), \mathcal{V}, G, M)$. Nechť dále $\mathcal{A}_{ij} \in \mathcal{T}(\mathcal{X}_j)$ pro $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$; $M_j(\mathcal{A}_{ij}) = A_{ij} \in \mathcal{F}_N(\mathcal{U}_j)$ a $\mathcal{B}_i \in \mathcal{T}(\mathcal{Y})$, $i = 1, \dots, n$; $M(\mathcal{B}_i) = B_i \in \mathcal{F}_N(\mathcal{V})$.*

Pak zápis \mathcal{R} :

Pravidlo 1: Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{11} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{1m} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_1

⋮

Pravidlo n: Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{n1} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{nm} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_n

se nazývá jazykově definovaná funkce vyjadřující vztah mezi jazykovými proměnnými $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ a jazykovou proměnnou \mathcal{Y} .

Celkem tedy máme n pravidel, přičemž každé pravidlo má dvě části: “JESTLIŽE”-část, které říkáme antecedent (předpoklad) a která je tvořena vstupními proměnnými, a “PAK”-část, které říkáme konsekvent (závěr) a je tvořena výstupní proměnnou. Na základě těchto pravidel pak chceme pro nějakou konkrétní kombinaci hodnot vstupních proměnných (ty mohou být ostré nebo i fuzzy) vyvodit hodnotu výstupní proměnné.

Tento proces odvozování výstupu vychází z dedukce v klasické logice, která je založena na aplikaci logického pravidla *modus ponens*, jenž je nejvýznamnějším dedukčním pravidlem a tvoří základ výrokové logiky.

Mějme dané dva výroky, výrok φ a implikaci $\varphi \Rightarrow \psi$. Pravidlo modus ponens pak říká, že jestliže platí φ a zároveň platí implikace $\varphi \Rightarrow \psi$, pak musí platit také výrok ψ .

$$\frac{\varphi; \varphi \Rightarrow \psi}{\psi} \quad (2.1)$$

Konkrétněji lze toto pravidlo zapsat následovně:

Pravidlo: Jestliže A je pravda, pak B je pravda.
Pozorování: A je pravda.

Závěr: B je pravda.

V klasické logice však uvažujeme pouze 2 stupně pravdy ($\{0,1\}$) a abychom mohli vyvodit závěr, musí pozorování zcela přesně zasáhnout levou stranu pravidla. V takové situaci bychom tedy museli mít pravidlo pro každý možný výsledek pozorování, což by například u spojitého univerza bylo možné jen tehdy, máme-li nějaký funkční předpis.

Již ale víme, že ve fuzzy logice může být výrok pravdivý i v libovolném stupni z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Zobecněním této klasické dedukce je tedy tzv. *přibližná dedukce*, která pak umožňuje i situaci, kdy je levá strana pravidla zasažena jen částečně. Je-li tedy antecedent (A) pravdivý jen v nějakém stupni, bude pak také konsekvent (B) pravdivý pouze v tomto stejném stupni. Této pravdivostní hodnotě říkáme *míra zasažení pravidla*.

Nyní si uvedeme obecné schéma přibližné dedukce a popíšeme si, v čem se mohou lišit různé přístupy k fuzzy inferenci. Následně se pak na některé konkrétní přístupy zaměříme blíže.

Obecné schéma přibližné dedukce

Mějme dánu bázi pravidel dle definice 2.1, kterou budeme značit \mathcal{R} . Dále mějme dané pozorování, ze kterého chceme na základě těchto pravidel vyvodit závěr, tedy:

Pravidlo 1: Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{11} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{1m} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_1 .

⋮

Pravidlo n : Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{n1} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{nm} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_n .
Pozorování: \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}'_1 a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}'_m .

Závěr: \mathcal{Y} je \mathcal{B}' , $M(\mathcal{B}') = B' = ?$

Výsledné B' pak závisí na zvoleném přístupu k přibližné dedukci.

Cílem fuzzy inference je tedy dosadit pozorování do dané jazykově definované funkce a vyvodit výstup, přičemž předpokládáme, že alespoň jedno z pravidel bude alespoň částečně tímto pozorováním zasaženo. Otázkou zde však je, jak přesně pozorování do funkce dosadit a jakým způsobem tento výstup vypočítat. K tomu, jak z částečných zásahů těchto pravidel dedukovat výsledné \mathcal{Y} , existují různé přístupy, na které se v následující části podíváme.

2.2. Fuzzy inferenční algoritmy

Jak již bylo řečeno, na bázi fuzzy pravidel můžeme nahlížet různými způsoby. Můžeme různě interpretovat jednotlivá pravidla a jedné bázi lze přiřadit různé fuzzy relace představující její matematický význam.

Obecný proces fuzzy inferenčních systémů

Obecně můžeme proces fuzzy inferenčního systému rozdělit do čtyř částí:

1. fuzzifikace vstupů
2. vyhodnocení zásahů pravidel
3. agregace výstupů z jednotlivých pravidel
4. defuzzifikace výsledné fuzzy množiny.

V případě, že máme ostré hodnoty vstupních pozorování, nejprve tyto reálné hodnoty formálně fuzzifikujeme. Formální fuzzifikace přitom neznamena nic jiného, než že na reálné číslo nahlížíme jako na fuzzy číslo, jehož funkce příslušnosti nabývá v dané hodnotě stupně 1, jinak je nulová.

Ve druhém kroku je našim cílem ohodnocení pravidel. Tady nejprve vypočítáme míru zasažení levých stran, kterou pak dle zvoleného inferenčního mechanismu aplikujeme na příslušný konsekvent, tj. na pravou stranu pravidla.

Máme tedy vygenerovaný určitý výstup z každého pravidla a naším úkolem je tyto výstupy nějakým způsobem agregovat. Jak toto udělat pak opět závisí na zvoleném inferenčním algoritmu.

Jak uvidíme dále, pro některé metody bude výstupem obecně fuzzy množina $B' \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$, pro některé přímo fuzzy číslo a někdy i rovnou ostrá hodnota $b' \in \mathbb{R}$. Chceme-li dostat ostrý výstup, je pak našim posledním úkolem v případě fuzzy výstupu tuto fuzzy množinu vhodně defuzzifikovat.

Nyní si ukážeme konkrétní postup pro následující fuzzy inferenční algoritmy: Mamdaniho, Nováka, zobecněného Sugena a přístup Sugena & Yasukawy.

2.2.1. Mamdaniho fuzzy inference

Jednou z nejčastěji používaných metod fuzzy inference je metoda Ebrahima H. Mamdaniho. K vytvoření tohoto přístupu ho přivedlo zjištění, že většina kontrolních inženýrů připustila, že matematické výpočty, na základě kterých byla do té doby převáděna informace do automatických regulátorů, neodpovídají jejich intuitivnímu přístupu k manuální regulaci. Mamdaniho cílem tedy bylo vytvořit systém, který by byl schopen zpracovat slovně zadané instrukce a napodobit tak klasické lidské usuzování. V roce 1975 pak přišel s fuzzy inferenčním mechanismem založeným na Zadehově konceptu fuzzy logiky, který byl poprvé použit v Londýně k regulaci generátoru páry.

Tato podkapitola byla sepsána zejména na základě publikací [3] a [11].

Hlavní myšlenka Mamdaniho přístupu

Mějme daných m vstupních jazykových proměnných, n pravidel a pozorování, pro které chceme určit hodnotu výstupní proměnné \mathcal{Y} . Samotné pozorování přitom může být ostré i fuzzy a výstupem bude v tomto případě obecně nějaká fuzzy množina B^M .

Pravidlo 1: Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{11} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{1m} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_1

⋮

Pravidlo n : Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{n1} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{nm} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_n

Pozorování: \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}'_1 a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}'_m

Závěr: \mathcal{Y} je \mathcal{B}' , $M(\mathcal{B}') = B^M$

Mamdaniho přístup je založen na teorii možnosti a na jednotlivá pravidla je nahlíženo jako na jakési prototypy toho, co všechno může nastat. Každé pravidlo je tedy interpretováno jako fuzzy relace na $\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{V}$ a představuje sdružené možnostní rozdělení veličin x_1, \dots, x_m, y .

Dle Mamdaniho je tedy matematickým významem každého z pravidel kartézský součin matematických významů jednotlivých termů:

$$M(\text{Pravidlo } i) = A_{i1} \times \dots \times A_{im} \times B_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Stupeň příslušnosti dané kombinace $(x_1, \dots, x_m, y) \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{V}$ k této fuzzy relaci je pak dán vztahem

$$M(\text{Pravidlo } i)(x_1, \dots, x_m, y) = \min\{A_{i1}(x_1), \dots, A_{im}(x_m), B_i(y)\}. \quad (2.3)$$

Celkem tedy máme n těchto kartézských součinů. Všechna tato pravidla jsou pak dle Mamdaniho spojena spojkou “NEBO”, která představuje klasickou operaci sjednocení dle Zadeha a je interpretována jako operace maximum. Význam celé báze pravidel je tedy dán následovně:

$$M(\mathcal{R}) = \bigcup_{i=1}^n M(\text{Pravidlo } i) = \bigcup_{i=1}^n (A_{i1} \times \dots \times A_{im} \times B_i), \quad (2.4)$$

přičemž funkce příslušnosti této fuzzy relace je pro všechny kombinace $(x_1, \dots, x_m, y) \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{V}$ definována vztahem:

$$M(\mathcal{R})(x_1, \dots, x_m, y) = \max_{i=1, \dots, n} \{\min\{A_{i1}(x_1), \dots, A_{im}(x_m), B_i(y)\}\}. \quad (2.5)$$

Také pozorování je dle Mamdaniho modelováno jako kartézský součin

$$M(\text{Pozorování}) = A'_1 \times \dots \times A'_m \quad (2.6)$$

s funkcí příslušnosti definovanou pro všechny $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$ vztahem:

$$M(\text{Pozorování})(x_1, \dots, x_m) = \min\{A'_1(x_1), \dots, A'_m(x_m)\}. \quad (2.7)$$

Finálním výstupem je pak fuzzy množina $B^M \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$, kterou získáme jako silnou kompozici, kdy fuzzy množinu modelující pozorování dosadíme do fuzzy množiny modelující význam báze pravidel:

$$B^M = M(\text{Pozorování}) \circ M(\mathcal{R}) \quad (2.8)$$

$$B^M = (A'_1 \times \dots \times A'_m) \circ \bigcup_{i=1}^n (A_{i1} \times \dots \times A_{im} \times B_i). \quad (2.9)$$

Funkce příslušnosti fuzzy množiny B^M je pak pro každé $y \in \mathcal{V}$ definovaná vztahem

$$B^M(y) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_m) \\ \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m}} \min\{M(\text{Pozorování})(x_1, \dots, x_m); M(\mathcal{R})(x_1, \dots, x_m, y)\}. \quad (2.10)$$

Algoritmus výpočtu Mamdaniho dedukce

Pro praktické použití Mamdaniho algoritmu využijeme následující větu, jejíž důkaz nalezneme např. v [11, str. 78, 79].

Nechť je dána báze fuzzy pravidel \mathcal{R} a pozorování “ \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}'_1 a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}'_m ”.

Pak pro výslednou fuzzy množinu z Mamdaniho přibližné inference platí:

$$B^M = \bigcup_{i=1}^n B_i^M, \quad (2.11)$$

kde

$$\forall y \in \mathcal{V} : B_i^M(y) = \min\{h_i, B_i(y)\}, \quad (2.12)$$

přičemž hodnota h_i udává míru zasažení i -tého pravidla a je dána vztahem

$$h_i = \text{hgt}((A'_1 \times \dots \times A'_m) \cap (A_{i1} \times \dots \times A_{im})) = \min\{\text{hgt}(A'_1 \cap A_{i1}), \dots, \text{hgt}(A'_m \cap A_{im})\}. \quad (2.13)$$

Při výpočtu tedy nejprve vypočítáme míru zasažení každého z pravidel h_i , $i = 1, \dots, n$ jakožto minimum z výšek průniků mezi významem pozorování a příslušným významem levé strany pravidla.

Následně zkonstruujeme výstupy jednotlivých pravidel B_i^M tak, že v dané výšce h_i “uřízneme” významy příslušných pravých stran.

Nakonec tyto “uříznuté” pravé strany sjednotíme, čímž získáme výslednou fuzzy množinu B^M . Pokud budeme chtít jako výstup ostrou hodnotu, musíme tuto fuzzy množinu ještě defuzzifikovat.

V kapitole 3 si tento postup názorně ukážeme na konkrétních příkladech. Na jednom z nich pak také uvidíme, že tomuto algoritmu nevadí protichůdná pravidla (tj. že pro stejné vstupy je možné mít různé výstupy). Toto je dáno tím, že každé pravidlo představuje nějakou možnost a výsledek je jejich sjednocením.

2.2.2. Novákova fuzzy inference

Další fuzzy inferenční přístup, který si zde představíme, je přístup profesora Viléma Nováka, s jehož pomocí byla v České republice realizována řada průkopnických aplikací. Zásadní rozdíl oproti Mamdaniho přístupu je v tom, že Novák nevychází z teorie možnosti, ale z formální teorie fuzzy logiky a bázi pravidel \mathcal{R} modeluje jako konjunkce implikací.

Informace o Novákově inferenčním algoritmu byly čerpány z [8] a [9].

Hlavní myšlenka Novákova přístupu

Pro začátek si představme, že máme pouze 1 vstupní a 1 výstupní jazykovou proměnnou, tedy:

Pravidlo: Jestliže \mathcal{X} je \mathcal{A} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B} .

Novák pak na tvrzení “ \mathcal{X} je \mathcal{A} ”, kde $M(\mathcal{A}) = A \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, nahlíží jako na nekonečnou množinu pravdivostně ohodnocených výroků ve tvaru

$$x = a \quad (A(a)) \quad \forall a \in \mathcal{U}, \quad (2.14)$$

přičemž $(A(a))$, neboli stupeň příslušnosti prvku a k fuzzy množině A , udává stupeň pravdivosti daného tvrzení. Jinak řečeno, hodnotě x postupně přiřadíme všechny možné hodnoty $a \in \mathcal{U}$ a pravdivost těchto výroků je dána funkcí příslušnosti fuzzy množiny A . Stejně tak nahlížíme i na pravou stranu pravidla:

$$y = b \quad (B(b)) \quad \forall b \in \mathcal{V}. \quad (2.15)$$

Jednotlivá pravidla tedy Novák chápe jako pravdivostně ohodnocené implikace v nekonečněhodnotové logice. Z první kapitoly víme, že implikaci modelujeme pomocí operace reziduum a stupeň pravdivosti je pak dán vztahem

$$A(a) \rightarrow B(b) = \min\{1, 1 - A(a) + B(b)\}. \quad (2.16)$$

Pravidlo je tedy interpretováno jako nekonečná množina pravdivostně ohodnocených implikací s odpovídajícím stupněm pravdivosti:

$$x = a \Rightarrow y = b \quad (\min\{1, 1 - A(a) + B(b)\}) \quad \forall a \in \mathcal{U}, \forall b \in \mathcal{V}. \quad (2.17)$$

Také pozorování “ \mathcal{X} je \mathcal{A}' ” je interpretováno jako nekonečná množina pravdivostně ohodnocených výroků

$$x = a \quad (A'(a)) \quad \forall a \in \mathcal{U}. \quad (2.18)$$

Závěr “ \mathcal{Y} je \mathcal{B}' ”, přičemž $M(\mathcal{B}') = B^N \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$, se pak získá na základě pravidla modus ponens v nekonečněhodnotové logice, které má tvar

$$\frac{\varphi \quad (\alpha); \quad \varphi \Rightarrow \psi \quad (\beta)}{\psi \quad (\alpha \otimes \beta)}, \quad (2.19)$$

tj. máme výrok φ se stupněm pravdivosti α , implikaci $\varphi \Rightarrow \psi$ se stupněm pravdivosti β a závěrem je výrok ψ , který platí ve stupni $\alpha \otimes \beta$, kde \otimes značí Łukasiewiczovu konjunktci

$$\alpha \otimes \beta = \max\{0, \alpha + \beta - 1\}. \quad (2.20)$$

V našem případě tedy toto pravidlo modus ponens vypadá následovně:

$$\frac{x = a \quad (A'(a)); \quad x = a \Rightarrow y = b \quad (A(a) \rightarrow B(b))}{y = b \quad (A'(a) \otimes (A(a) \rightarrow B(b)))}. \quad (2.21)$$

Matematicky lze pak význam pravidla zapsat jako operaci rezidua cylindrických rozšíření fuzzy množin A a B

$$M(\text{Pravidlo}) = A^* \ominus B^* \quad (2.22)$$

s funkcí příslušnosti definovanou pro všechna $(a, b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ vztahem

$$A^* \ominus B^*(a, b) = \min\{1, 1 - A(a) + B(b)\}, \quad (2.23)$$

kde $A^* = \text{Cyl}(A, \mathcal{U} \times \mathcal{V})$ a $B^* = \text{Cyl}(B, \mathcal{U} \times \mathcal{V})$. Cylindrické rozšíření je nutné z toho důvodu, že význam pravidla má být fuzzy relace na $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ (tj. levou a pravou stranu pravidla potřebujeme dostat na stejná univerza).

Nyní předpokládejme, že máme m vstupních proměnných a n pravidel.

Pravidlo 1: Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{11} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{1m} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_1

⋮

Pravidlo n : Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{n1} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{nm} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_n

Pozorování: \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}'_1 a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}'_m

Závěr: \mathcal{Y} je \mathcal{B}' , $M(\mathcal{B}') = B^N$

Spojku “A” v antecedentu pak v Novákové fuzzy inferenci modelujeme stejně jako u Mamdaniho pomocí kartézského součinu a jelikož musí všechna pravidla platit současně, tak spojení pravidel modelujeme pomocí operace průniku. Významy jednotlivých pravidel jsou tedy ve tvaru

$$M(\text{Pravidlo } i) = (A_{i1} \times \dots \times A_{im})^* \ominus B_i^*, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.24)$$

s funkcí příslušnosti definovanou pro všechny kombinace $(x_1, \dots, x_m, y) \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{V}$ vztahem

$$M(\text{Pravidlo } i)(x_1, \dots, x_m, y) = \min\{1, 1 - \min\{A_{i1}(x_1), \dots, A_{im}(x_m)\} + B_i(y)\}. \quad (2.25)$$

Matematický význam celé báze pravidel je následně dán vztahem

$$M(\mathcal{R}) = \bigcap_{i=1}^n (A_{i1} \times \dots \times A_{im})^* \ominus B_i^*, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.26)$$

s funkcí příslušnosti definovanou pro všechny $(x_1, \dots, x_m, y) \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{V}$ jako

$$M(\mathcal{R})(x_1, \dots, x_m, y) = \min_{i=1, \dots, n} \{ \min\{1, 1 - \min\{A_{i1}(x_1), \dots, A_{im}(x_m)\} + B_i(y)\} \}. \quad (2.27)$$

Výslednou fuzzy množinu $B^N \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$ tentokrát získáme jako slabou kompozici významu pozorování a báze pravidel

$$B^N = M(\text{Pozorování}) \overset{\circ}{\times} M(\mathcal{R}) \quad (2.28)$$

$$B^N = (A'_1 \times \dots \times A'_m) \overset{\circ}{\times} \bigcap_{i=1}^n (A_{i1} \times \dots \times A_{im})^* \ominus B_i^*. \quad (2.29)$$

Funkce příslušnosti fuzzy množiny B^N je pak pro každé $y \in \mathcal{V}$ definovaná vztahem

$$B^N(y) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_m) \\ \in \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m}} \max\{0, M(\text{Pozorování})(x_1, \dots, x_m) + M(\mathcal{R})(x_1, \dots, x_m, y) - 1\}. \quad (2.30)$$

U této metody je tedy výstupem opět obecně fuzzy množina, kterou je při potřebě ostrého výstupu nutné ještě vhodně defuzifikovat. Názorný postup výpočtu a chování tohoto algoritmu si také ukážeme v kapitole 3.

2.2.3. Zobecněná Sugenoova fuzzy inference

V této části si popíšeme speciální fuzzy inferenční algoritmus, který navrhla docentka Talašová pro potřeby svého řešiče úloh vícekritériálního hodnocení variant a rozhodování. Důvodem pro jeho navržení bylo to, aby výstupem fuzzy inference bylo fuzzy číslo, které bude navíc stejného typu, jako jsou fuzzy čísla používaná v celém modelu. Veškeré informace o tomto přístupu byly čerpány z [11].

Než si však tento přístup představíme, podíváme se na stručný popis klasické Sugenoovy fuzzy inference.

Sugenův přístup k fuzzy inferenci

Schéma klasické Sugenoovy inference je následující:

Pravidlo 1: Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{11} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{1m} , pak y je b_1

⋮

Pravidlo n : Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{n1} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{nm} , pak y je b_n

Pozorování: x_1 je a_1 a ... a x_m je a_m

Závěr: y je b ,

kde $M(\mathcal{A}_{ij}) = A_{ij} \in \mathcal{F}_N(\mathcal{U}_j)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ a $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

Míru zasažení pravidel h_i získáme dosazením m -tice (a_1, \dots, a_m) do kartézského součinu významů z levé strany pravidla, tj.

$$h_i = (A_{i1} \times \dots \times A_{im})(a_1, \dots, a_m), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.31)$$

a závěr pak jako vážený průměr reálných hodnot z pravých stran pravidel, kde váhami jsou příslušné míry zasažení

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n h_i b_i}{\sum_{i=1}^n h_i}. \quad (2.32)$$

V Sugenově algoritmu tedy na pravých stranách vystupují pouze ostré hodnoty b_1, \dots, b_n reálné proměnné y , pozorování je také ostré a výstupem je reálná hodnota $b \in \mathbb{R}$.

Zobecněná Sugenoova přibližná dedukce

Zobecnění klasického Sugenoova algoritmu spočívá v tom, že reálné výstupní hodnoty na pravých stranách jsou nahrazeny jazykovými hodnotami, jejichž matematické významy jsou fuzzy čísla. Navíc také pozorování může být v tomto případě i fuzzy.

Pravidlo 1: Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{11} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{1m} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_1

⋮

Pravidlo n : Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{n1} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{nm} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_n

Pozorování: \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}'_1 a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}'_m

Závěr: \mathcal{Y} je \mathcal{B}' , $M(\mathcal{B}') = B^S$

Výsledkem fuzzy inference je tedy fuzzy číslo B^S , které získáme jako vážený průměr fuzzy čísel na pravých stranách, přičemž váhami jsou opět míry zasažení těchto pravidel, které vypočítáme stejně jako v Mamdaniho či Novákové algoritmu

$$B^S = \frac{\sum_{i=1}^n h_i B_i}{\sum_{i=1}^n h_i}, \quad (2.33)$$

$$h_i = \text{hgt}((A'_1 \times \dots \times A'_m) \cap (A_{i1} \times \dots \times A_{im})). \quad (2.34)$$

2.2.4. Sugenova & Yasukawova fuzzy inference

Posledním algoritmem fuzzy inference, který si v této práci představíme, je další zobecnění klasického Sugenoova přístupu, který představil Sugeno společně s Yasukawou v jejich článku [10]. V tomto případě na levých i pravých stranách pravidel vystupují opět jazykové termy, jejichž matematické významy jsou fuzzy čísla. Narozdíl od zobecněné Sugenoovy dedukce z předchozí části ale v přístupu Sugena a Yasukawy uvažujeme pouze ostré hodnoty pozorování (tj. reálné hodnoty a_1, \dots, a_m bazických proměnných x_1, \dots, x_m) a výstupem je reálná hodnota, kterou zde získáme jako vážený průměr těžišť významů pravých stran pravidel.

Obecné schéma tohoto algoritmu je tedy následující:

Pravidlo 1: Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{11} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{1m} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_1

⋮

Pravidlo n : Jestliže \mathcal{X}_1 je \mathcal{A}_{n1} a ... a \mathcal{X}_m je \mathcal{A}_{nm} , pak \mathcal{Y} je \mathcal{B}_n

Pozorování: x_1 je a_1 a ... a x_m je a_m

Závěr: y je b^{SY} ,

kde

$$b^{SY} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i b_i}{\sum_{i=1}^n h_i}, \quad (2.35)$$

přičemž míry zasažení pravidel h_i získáme opět dosazením m -tice (a_1, \dots, a_m) do kartézského součinu významů z levé strany pravidla a hodnoty b_i získáme defuzzifikací fuzzy čísel B_i metodou těžiště

$$b_i = \frac{\int_{y \in \mathcal{V}} B_i(y) \cdot y dy}{\int_{y \in \mathcal{V}} B_i(y) \cdot dy}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.36)$$

Kapitola 3

Porovnání inferenčních algoritmů na názorných příkladech

V předchozí kapitole jsme si představili čtyři různé přístupy k fuzzy inferenci a popsali si jejich teoretické pozadí. Nyní si tyto algoritmy názorně ukážeme na několika jednoduchých příkladech, na kterých se také pokusíme ilustrovat jejich rozdíly a chování v různých situacích.

Všechny níže uvedené příklady byly modelovány v programu MATLAB za pomoci vlastní funkce, která byla vytvořena speciálně pro tuto diplomovou práci. Důvodem k jejímu naprogramování bylo to, že ačkoliv je v MATLABu zabudované prostředí Fuzzy Logic Toolbox, ve kterém si můžeme různé fuzzy inferenční systémy sestavit a vizualizovat, umožňuje toto prostředí použít pouze přístup Mamdaniho a Sugena.

Vytvořená funkce, která pak umožňuje sestavení a simulaci fuzzy inferenčního systému pro všechny dříve představené algoritmy, je k této práci přiložena pod názvem `FIS.m` a může být následně využita i pro modelování vlastních příkladů.

Dále je přiložena také funkce `FIS_vystup.m`, která nám na základě zvoleného algoritmu a způsobu defuzzifikace dá rovnou ostrou výslednou hodnotu. Tuto funkci využijeme v části 3.1 pro vykreslení funkce modelující závislost výstupní proměnné na jedné proměnné vstupní.

Detailní popis vstupů a způsobu jejich zadávání je vysvětlen ve skriptech funkcí. K práci jsou rovněž přiloženy skripty všech dále řešených příkladů.

3.1. Příklad s jednou vstupní proměnnou

Jako první si ukážeme proces jednotlivých fuzzy inferenčních systémů na jednoduchém příkladu, ve kterém uvažujeme pouze jednu vstupní a jednu výstupní proměnnou. Budeme v něm modelovat vztah mezi váhou člověka a doporučením, zda by měl na základě dané hodnoty zhubnout, váhu si udržet či přibrat.

3.1.1. Výchozí příklad

Mějme tedy vstupní proměnnou - *váhu*, pro kterou máme definované tři jazykové hodnoty - “*podvýživa*”, “*optimální váha*” a “*nadváha*”. Na základě zadané váhy pak chceme zjistit hodnotu výstupní proměnné - *doporučení*. Tato proměnná přitom může nabývat hodnot “*zhubnout*”, “*udržet*”, nebo “*přibrat*”.

Tento příklad budeme modelovat pro člověka, který je asi 180 cm vysoký. Na základě BMI je v takovém případě ideální váha 70 kg. Pro proměnnou *váha* zde budeme uvažovat hodnoty z intervalu $\langle 40, 100 \rangle$ a univerzem pro proměnnou *doporučení* bude interval $\langle -30, 30 \rangle$.

Nejprve si nadefinujeme významy hodnot jednotlivých jazykových proměnných¹. Význačné hodnoty a typy fuzzy čísel pro jednotlivé termy jsou shrnuty v tabulkách 3.1 a 3.2 a zobrazeny na obrázku 3.1.

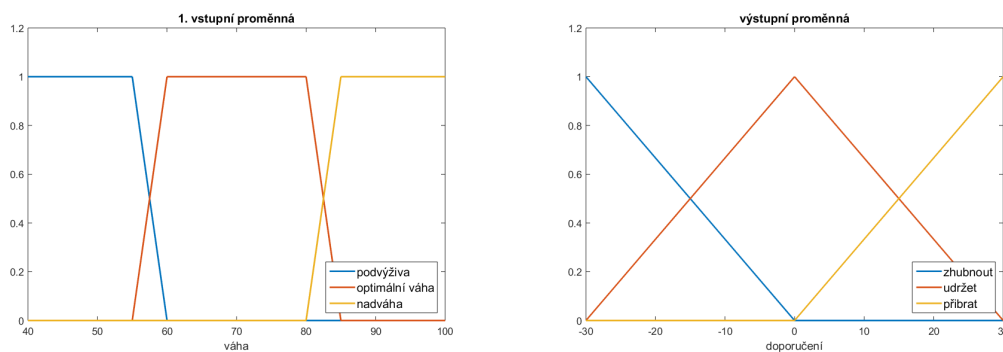
váha	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>podvýživa</i>	40	40	55	60	lineární
<i>optimální váha</i>	55	60	80	85	lineární
<i>nadváha</i>	80	85	100	100	lineární

Tabulka 3.1: Definování hodnot proměnné *váha*

¹Pozn.: Tyto hodnoty jsou stanoveny jen orientačně a slouží k demonstraci příkladu. Nejedná se tedy o žádná lékařsky podložená doporučení ohledně váhy.

doporučení	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>zhubnout</i>	-30	-30	-30	0	lineární
<i>udržet</i>	-30	0	0	30	lineární
<i>přibrat</i>	0	30	30	30	lineární

Tabulka 3.2: Definování hodnot proměnné *doporučení*



(a) vstupní proměnná

(b) výstupní proměnná

Obrázek 3.1: Vstupní a výstupní proměnné

Dále mějme bázi pravidel, která je zapsána v tabulce 3.3.

Pravidlo 1:	Jestliže váha = “ <i>podvýživa</i> ”, pak doporučení = “ <i>přibrat</i> ”.
Pravidlo 2:	Jestliže váha = “ <i>optimální váha</i> ”, pak doporučení = “ <i>udržet</i> ”.
Pravidlo 3:	Jestliže váha = “ <i>nadváha</i> ”, pak doporučení = “ <i>zhubnout</i> ”.

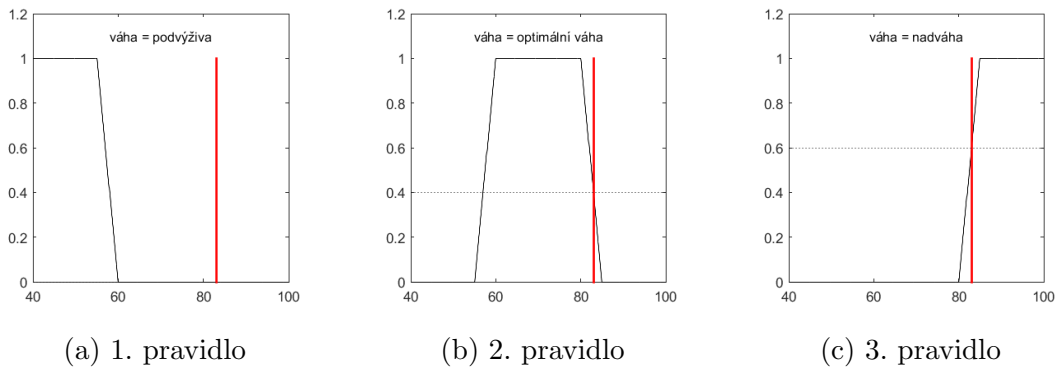
Tabulka 3.3: Báze pravidel

Nakonec určíme hodnotu pozorování, tj. zadáme váhu, pro kterou chceme získat výsledné doporučení. V tomto případě budeme pro demonstraci postupu jednotlivých metod nejprve zjišťovat výstup pro konkrétní hodnotu 83 kg, následně si však tyto přístupy porovnáme obecně jakožto funkce modelující závislost výstupní proměnné na proměnné vstupní.

Nyní tedy máme všechny potřebné informace a můžeme se pustit do samotného procesu fuzzy inferenčního systému. Prvním krokem, který je pro

všechny algoritmy stejný, je výpočet míry zasažení každého z pravidel. Již víme, že tyto hodnoty získáme jako minimum z výšek průniků mezi významem pozorování a příslušným významem levé strany pravidla. V případě ostrých pozorování pak můžeme provést formální fuzzifikaci či hodnotu jednoduše dosadit do funkce příslušnosti daných termů.

Míry zasažení pravidel pro tento příklad můžeme vidět z obrázku 3.2, na kterém jsou vykresleny významy antecedentů jednotlivých pravidel spolu s formálně fuzzifikovaným pozorováním, a z tabulky 3.4.



Obrázek 3.2: Zásahy levých stran pravidel

Míry zasažení pravidel	
h_1	0
h_2	0,4
h_3	0,6

Tabulka 3.4: Míry zasažení jednotlivých pravidel

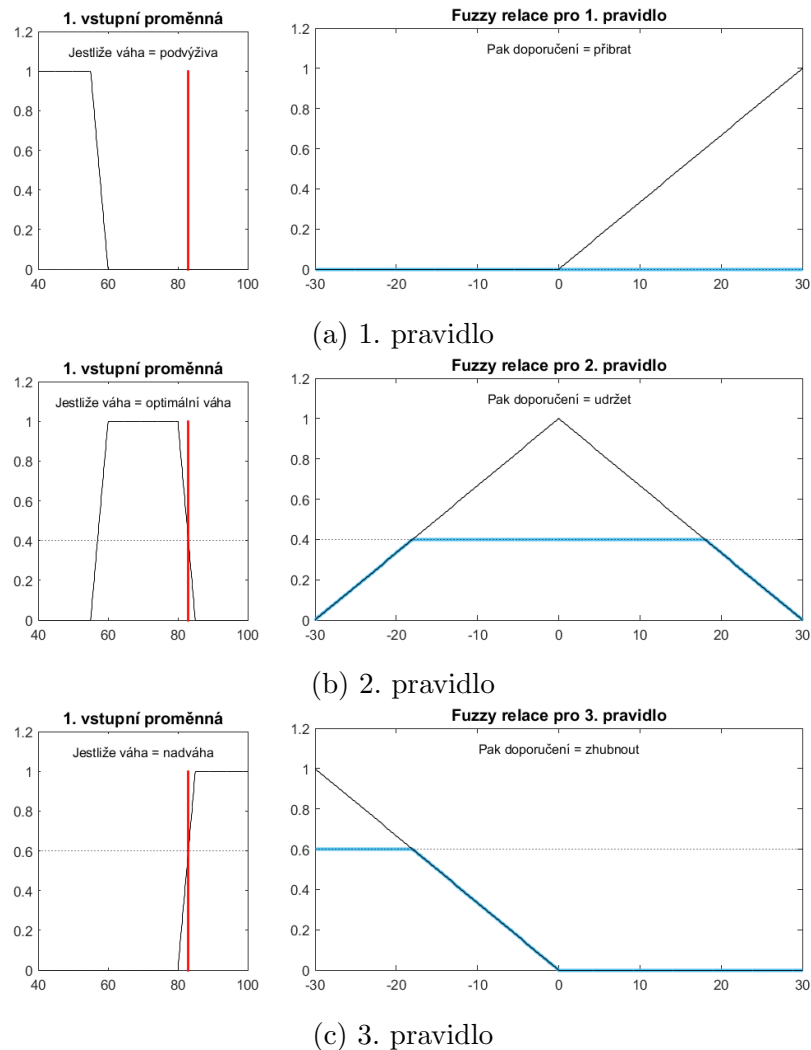
První pravidlo tedy našim pozorováním nebylo zasaženo vůbec, druhé bylo zasaženo ve stupni 0,4 a třetí ve stupni 0,6.

V dalších krocích bude pak našim cílem vypočítané míry zásahů aplikovat na konsekventy a získat tak výstupy z jednotlivých pravidel. Tyto dílčí výstupy budeme následně určitým způsobem agregovat, abychom dostali výslednou hod-

notu doporučení. To, jak při těchto krocích budeme postupovat, se však už pro jednotlivé algoritmy liší.

Postup inference dle Mamdaniho

V Mamdaniho inferenčním algoritmu získáme dílčí výstupy z jednotlivých pravidel tak, že významy pravých stran ve výšce zasažení pravidla uřízneme. Tento proces můžeme vidět na obrázku 3.3.



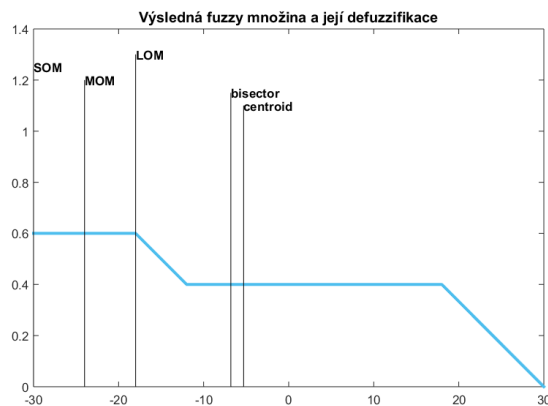
Obrázek 3.3: Mamdani - fuzzy relace pravidel

Z kapitoly 2 již víme, že Mamdani na jednotlivá pravidla nahlíží jako na

jakési prototypy, které udávají, co všechno je možné. První pravidlo nám tedy říká, co dělat v případě podvýživy, avšak pokud podvýživu nemáme, pak nám toto pravidlo neřekne nic.

Jelikož jednotlivá pravidla představují možnosti, tak význam celé báze pravidel pak získáme sjednocením jejich významů, tj. sjednocením těch uříznutých pravých stran. Výsledkem je v tomto případě fuzzy množina vykreslená na obrázku 3.4. Při váze 83 kg bychom tedy měli s pravdivostí 0,6 zhubnout a s pravdivostí 0,4 si váhu udržet.

Pokud bychom chtěli získat jako výstup ostrou hodnotu, musíme tuto fuzzy množinu defuzzifikovat. Jak ale můžeme z obrázku 3.4 vidět, jednotlivé metody defuzzifikace nám mohou dát velmi odlišné hodnoty. Pokud bychom použili například defuzzifikaci pomocí těžiště, bylo by výsledným výstupem doporučení zhubnout 5,3 kg, zatímco metoda MOM by nám doporučila zhubnout 24 kg a SOM dokonce 30 kg².



Obrázek 3.4: Mamdani - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Z výsledné fuzzy množiny vidíme, že jsme v tomto případě dostali poměrně neurčitý výsledek. Toto nás může přimět přemýšlet o tom, zda máme vhodně

²Pozn.: Vytvořená funkce, pomocí které příklady řešíme, používá vlastní příkazy k defuzzifikaci. Pokud bychom použili funkci `defuzz` zaimplementovanou v MATLABu, která pro metody SOM a LOM bere nejmenší, resp. největší hodnotu z absolutních hodnot ležících v α -řezu s největším stupněm příslušnosti, byly by tyto hodnoty naopak.

nadefinované vstupní a výstupní proměnné a zda by nebylo dobré zadání příkladu nějak upravit. O to se pak pokusíme v následujících podkapitolách.

Postup inference dle Nováka

Novák se na jednotlivá pravidla nedívá jako na možnosti, ale jako na implikace v nekonečněhodnotové logice. V tomto případě tedy nedochází k uříznutí pravých stran ve výšce h_i , ale funkce příslušnosti jednotlivých dílčích významů pravidel B_i^N získáme pro všechna $y \in \langle -30, 30 \rangle$ na základě vztahu

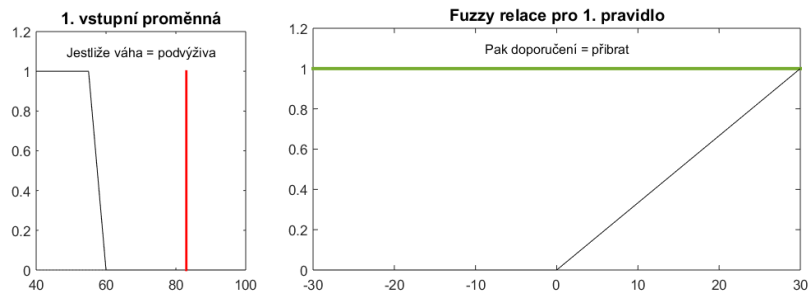
$$B_i^N(y) = \min\{1, 1 - h_i + B_i(y)\}, \quad (3.1)$$

kde B_i jsou významy pravých stran, $i = 1, 2, 3$. Postup získávání těchto výstupů lze vidět na obrázku 3.5.

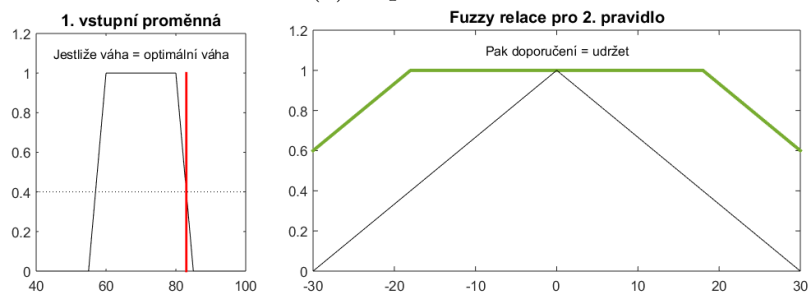
Například první pravidlo nám tedy říká, že máme-li podvýživu, pak je doporučením pouze přibrat. Pokud však podvýživu nemáme, pak můžeme na základě tohoto pravidla dělat cokoliv. Jelikož naše pozorování term “*podvýživa*” nezasahuje v žádném stupni, je tedy dle prvního pravidla cokoliv zcela možné.

Další dvě pravidla již částečně zasažena jsou a algoritmus nám vzhledem ke stupni zasažení “vyhloubí díry” pro situace, které by těmito pravidly neodpovídaly.

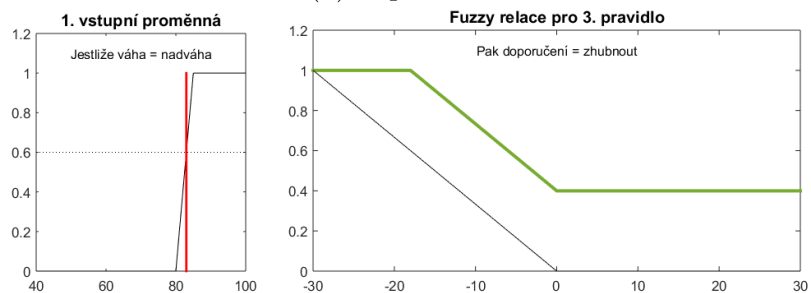
Všechny tyto implikace pak musí platit současně, proto výslednou množinu B^N získáme jako průnik jednotlivých množin B_i^N . Výslednou fuzzy množinu a její defuzzifikace můžeme vidět na obrázku 3.6.



(a) 1. pravidlo

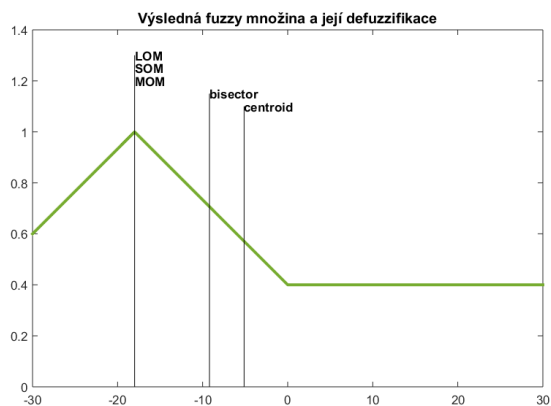


(b) 2. pravidlo



(c) 3. pravidlo

Obrázek 3.5: Novák - fuzzy relace pravidel



Obrázek 3.6: Novák - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

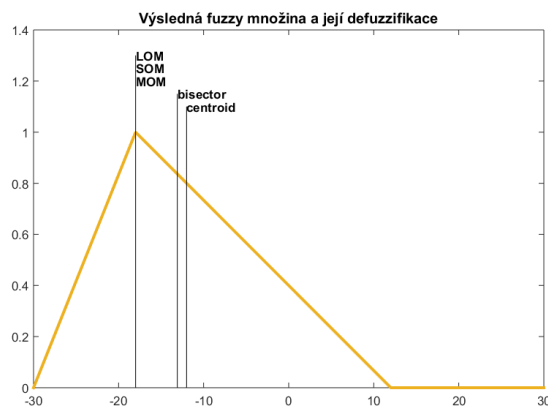
Postup inference dle zobecněného Sugena

To, že u Mamdaniho a Novákova přístupu je výstupem obecně fuzzy množina, může být v některých případech poněkud nevýhodné a pro některé fuzzy modely to může být problém. Výhodou zobecněného Sugena je, že u tohoto algoritmu bude výstupem vždy fuzzy číslo, které bude navíc stejného typu, jako fuzzy čísla použitá v modelu.

Toto výsledné fuzzy číslo zde získáme jako vážený průnik významů pravých stran, kde váhami jsou jednotlivé míry zasažení pravidel. Výpočet výstupu pro tento příklad tedy vypadá následovně:

$$\begin{aligned} B^S &= \frac{\sum_{i=1}^3 h_i B_i}{\sum_{i=1}^3 h_i} = \\ &= \frac{0 \cdot [0; 30; 30; 30] + 0,4 \cdot [-30; 0; 0; 30] + 0,6 \cdot [-30; -30; -30; 0]}{0 + 0,4 + 0,6} = \\ &= [0; 0; 0; 0] + [-12; 0; 0; 12] + [-18; -18; -18; 0] = [-30; -18; -18; 12]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Výsledné fuzzy číslo a jeho defuzzifikace vidíme na obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Zobecněný Sugeno - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Na základě defuzzifikace pomocí metod LOM, SOM a MOM by zde doporučením bylo zhubnout 18 kg, dle bisektoru zhubnout 13 kg a dle centroidu 12 kg.

Můžeme si všimnout, že v tomto případě ale ztrácíme informaci o neurčitosti, které jsme si u Mamdaniho přístupu hned všimli. Nevýhodou zobecněného Sugena tedy je, že nás nemusí upozornit na nevhodně definované zadání příkladu či na to, že o vstupech nemáme dostatečnou informaci.

Postup inference dle Sugena & Yasukawy

Poslední metodou je přístup Sugena a Yasukawy, jehož výstupem je, jak již víme z kapitoly 2, ostrá reálná hodnota. Tuto hodnotu přitom získáme jako vážený průměr centroidů pravých stran. V tomto případě tedy jako

$$\begin{aligned}
 b^{SY} &= \frac{\sum_{i=1}^3 h_i b_i}{\sum_{i=1}^3 h_i} = \\
 &= \frac{0 \cdot 20 + 0,4 \cdot 0 + 0,6 \cdot (-20)}{0 + 0,4 + 0,6} = -12,
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

kde b_i jsou hodnoty získané defuzzifikací významů B_i pomocí metody těžiště.

Algoritmus Sugena a Yasukawy nám tak pro tento příklad doporučuje zhubnout 12 kg.

Porovnání výstupních hodnot

V následující tabulce 3.5 máme shrnuty výsledné hodnoty pro jednotlivé metody a různé typy defuzzifikace:

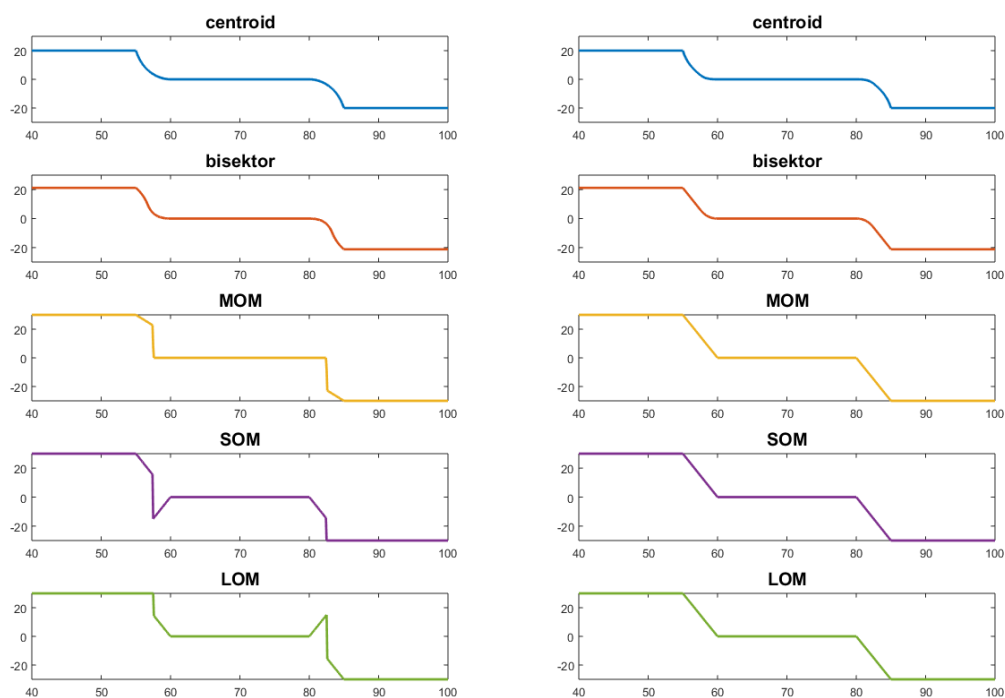
Výsledné hodnoty defuzzifikace			
	Mamdani	Novák	Zobecněný Sugeno
centroid	-5,3	-5,1	-12
bisektor	-6,8	-9,2	-13
MOM	-24	-18	-18
SOM	-30	-18	-18
LOM	-18	-18	-18

Tabulka 3.5: Souhrn výsledných hodnot

Vidíme, že výstupy nabývají hodnot v rozpětí od -5 kg až po -30 kg. Jestli zhubnout 5 kg, nebo 30 kg, už je však poměrně velký rozdíl. U Mamdaniho

přístupu jsem již naznačili, že problém může být ve špatně zadaných počátečních parametrech. V následujících podkapitolách si proto zkusíme stejný příklad namodelovat jinak a také zjemnit škály zadaných proměnných.

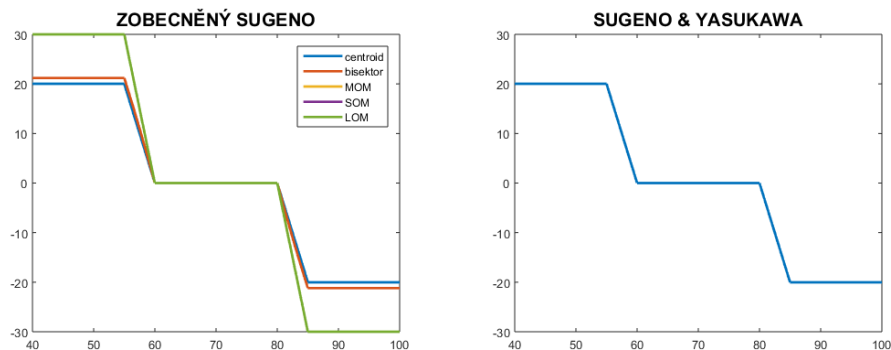
Tímto jsme si ukázali proces výpočtu pro jednu konkrétní hodnotu váhy. Jelikož jde o funkci jedné proměnné, můžeme si její průběh přehledně vykreslit. Na obrázcích 3.8 a 3.9 tedy můžeme vidět grafy vyjadřující závislost doporučení na váze pro jednotlivé přístupy a různé metody defuzzifikace.



(a) Mamdani

(b) Novák

Obrázek 3.8: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro jednotlivé metody defuzzifikace pro Mamdaniho a Novákův přístup



Obrázek 3.9: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro jednotlivé metody defuzzifikace pro Sugenovy modifikace

Na grafech z obrázku 3.8 vidíme, že u Mamdaniho přístupu a funkcí pro SOM a LOM vznikají velmi nepěkné skoky, na základě kterých bychom v určitých úsecích dostali s rostoucí váhou dokonce i doporučení ještě více přibírat. Tyto metody tak nevykazují vhodné výsledky, neboť funkce by měly být monotónní. Pro Mamdaniho fuzzy inferenci bychom tedy tyto metody obecně nedoporučili. V jakém případě se nám však tyto způsoby budou hodit, se dozvíme v kapitole 3.2.

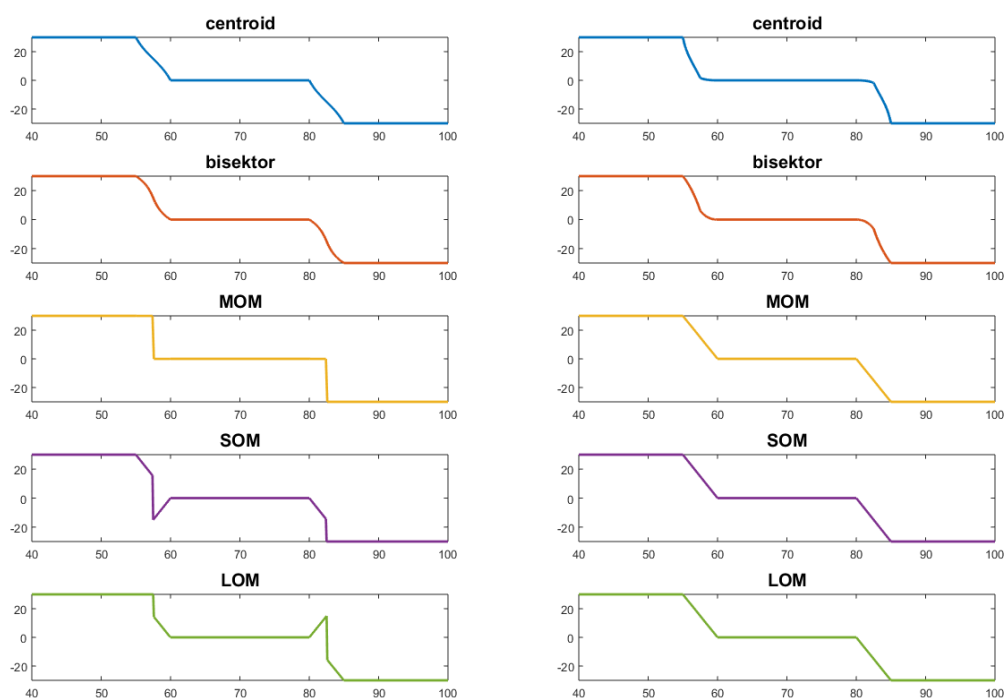
Dále si můžeme všimnout, že pro takto zadaný příklad bychom pro defuzzifikace pomocí těžiště a bisektoru vzhledem k jejich způsobu výpočtu nikdy nedostali krajní hodnoty výstupní proměnné. A to ani v případě, že bychom měli nejnižší či nejvyšší možnou váhu. Abychom toto napravili, musíme při definování hodnot výstupní proměnné ve funkci zadat krajní hodnoty jako symetrická fuzzy čísla a symbolicky je tedy protáhnout mimo uvažované univerzum.

Upravené zadání hodnot je zobrazeno v tabulce 3.6. Jelikož se nic nemění na tom, že stále uvažujeme univerzum $\langle -30, 30 \rangle$, podoba výstupních fuzzy množin zůstává stejná. Ke změně dojde tedy pouze u hodnot defuzzifikací pro metodu těžiště, bisektoru a MOM. Metody MOM, SOM a LOM jsou navíc nastaveny tak, aby námi uvažované univerzum nemohly překročit.

Výsledné funkce jsou zobrazeny na obrázcích 3.10 a 3.11.

doporučení	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>zhubnout</i>	-60	-30	-30	0	lineární
<i>udržet</i>	-30	0	0	30	lineární
<i>přibrat</i>	0	30	30	60	lineární

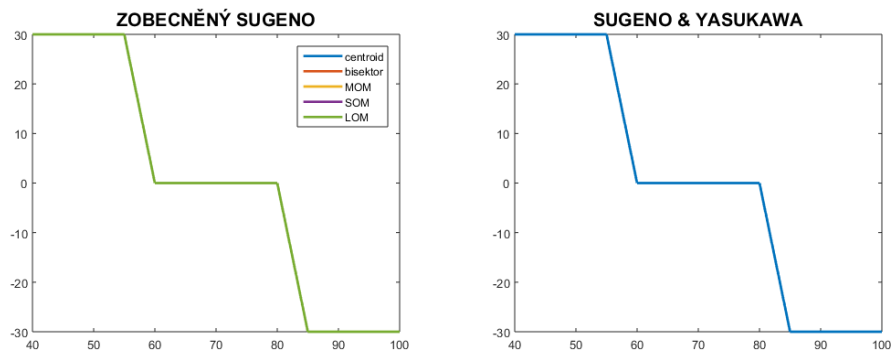
Tabulka 3.6: Protažení krajních hodnot proměnné *doporučení*



(a) Mamdani

(b) Novák

Obrázek 3.10: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením po protažení krajních hodnot pro Mamdaniho a Novákův algoritmus



Obrázek 3.11: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením po protažení krajních hodnot pro Sugenovy modifikace

Tímto se nám tedy podařilo vyřešit zmíněný problém s defuzzifikací. Zarazit nás zde ale ještě mohou schodovité tvary jednotlivých funkcí. Zaměříme-li se například na Mamdaniho metodu a defuzzifikaci pomocí těžiště, pak vážíme-li například 55 kg, dostaneme doporučení přibrat 30 kg, avšak pokud bychom vážili pouze o 5 kg více, pak už by nám bylo doporučeno váhu si udržet.

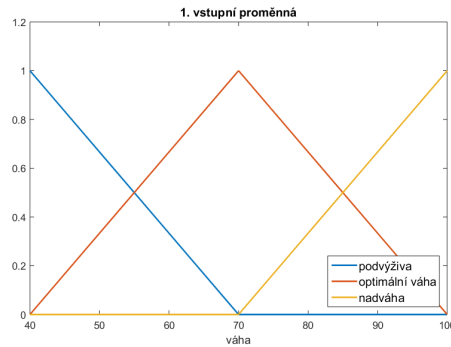
Tyto skoky jsou způsobeny tím, že máme hodnoty vstupní proměnné modelované pomocí lichoběžníkových fuzzy čísel s poměrně širokými jádry. V následující části si tedy příklad opět předefinujeme a místo lichoběžníkových fuzzy čísel budeme uvažovat fuzzy čísla trojúhelníková.

3.1.2. Upravení výchozího příkladu pro trojúhelníková fuzzy čísla

Hodnoty vstupní proměnné *váha* mějme nyní definované podle tabulky 3.7 a znázorněné na obrázku 3.12.

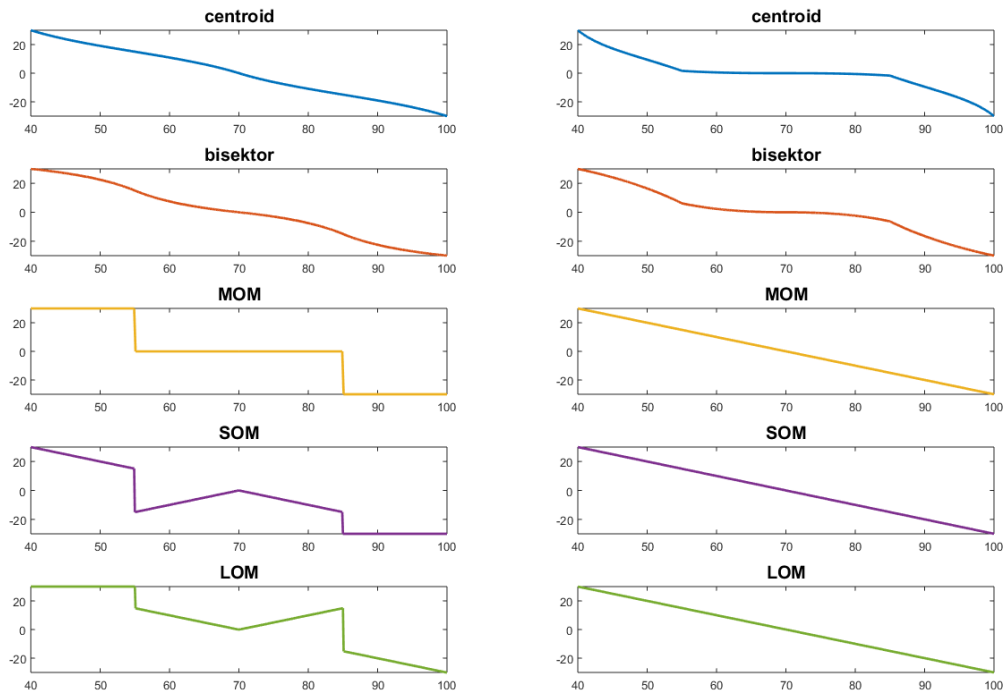
váha	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>podváživa</i>	40	40	40	70	lineární
<i>optimální váha</i>	40	70	70	100	lineární
<i>nadváha</i>	70	100	100	100	lineární

Tabulka 3.7: Definování hodnot proměnné *váha* pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel



Obrázek 3.12: Vstupní proměnná modelovaná pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel

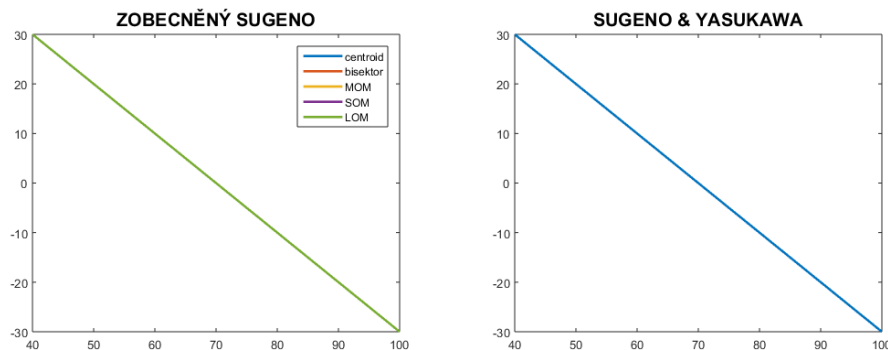
Funkce vyjadřující závislost doporučení na váze pro takto upravený příklad jsou pak zobrazeny na obrázcích 3.13 a 3.14.



(a) Mamdani

(b) Novák

Obrázek 3.13: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Mamdaniho a Nováka



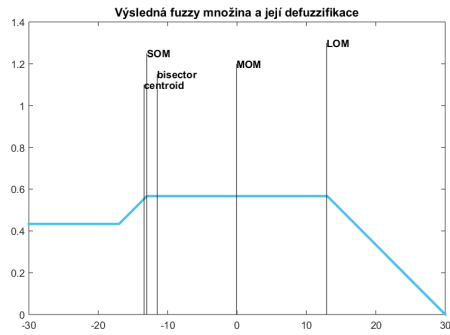
Obrázek 3.14: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Sugenovy modifikace

Vidíme, že až na metody MOM, SOM a LOM u Mamdaniho přístupu, které mají i nadále nehezký průběh, jsou již skoky v ostatních funkcích vyhlazené a funkce mají plynulý průběh.

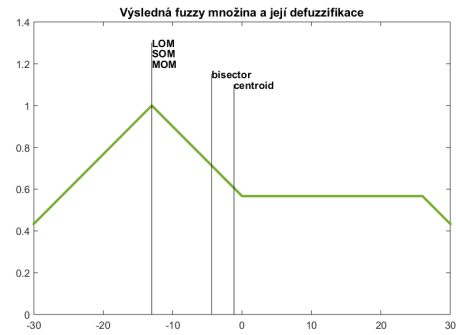
Pro srovnání s výchozím příkladem, ve kterém nemáme protažené krajní výstupní hodnoty a vstupní hodnoty jsou modelovány pomocí lichoběžníkových čísel, jsou v tabulce 3.8 ukázány výsledné defuzzifikace pro tutéž hodnotu 83 kg. Dané pozorování nyní zasahuje pravidla ve stupních 0; 0,57 a 0,43. Výsledné fuzzy množiny, které byly v tomto případě defuzzifikovány, jsou zobrazeny na obrázku 3.15.

výsledné hodnoty defuzzifikace			
	Mamdani	Novák	Zobecněný Sugeno
centroid	-13,4	-1,2	-13
bisektor	-11,5	-4,4	-13
MOM	0	-13	-13
SOM	-13	-13	-13
LOM	12,9	-13	-13

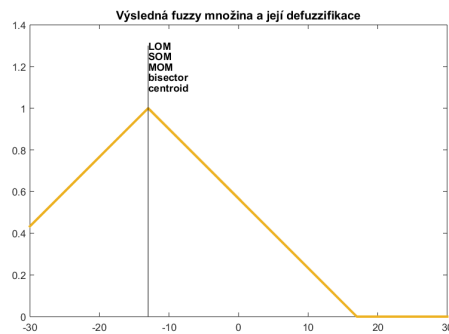
Tabulka 3.8: Souhrn výsledných hodnot



(a) Mamdaniho výstup



(b) Novákův výstup



(c) Výstup zobecněného Sugena

Obrázek 3.15: Výsledné fuzzy množiny a jejich defuzzifikace

Z výsledné fuzzy množiny u Mamdaniho přístupu můžeme vidět, proč metody MOM, SOM a LOM dávají tak nehezké výsledky. Máme-li totiž téměř napůl zasažená dvě pravidla, bude pak velmi široká množina M , ze které bereme v případě SOM infimum a pro LOM supremum. Nejhorší situace pak nastane právě tehdy, když jsou dvě pravidla zasažená přesně z poloviny. V takových situacích pak právě vznikají ty největší rozdíly mezi SOM a LOM.

I v tomto případě zde však stále vidíme poměrně neurčité výstupy. Toto bychom mohli vyřešit tím, že se pokusíme zjemnit škály daných proměnných a uvažovat u nich více jazykových hodnot.

3.1.3. Upravení výchozího příkladu zjemněním škál

Uvažujme tedy opět příklad pro váhu a doporučení. Nyní si však zjemníme škály a budeme uvažovat více jazykových hodnot jak pro vstupní proměnnou *váha*, tak i pro výstupní proměnnou *doporučení*.

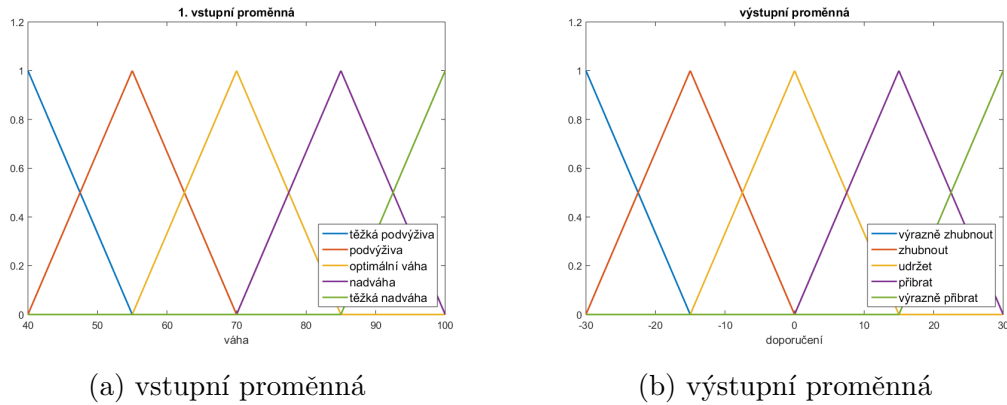
Tentokrát mějme u obou proměnných 5 termů, jejichž významy jsou shrnuty v tabulkách 3.9 a 3.10 a zobrazeny na obrázku 3.16:

váha	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>těžká podvýživa</i>	40	40	40	55	lineární
<i>podvýživa</i>	40	55	55	70	lineární
<i>optimální váha</i>	55	70	70	85	lineární
<i>nadváha</i>	70	85	85	100	lineární
<i>těžká nadváha</i>	85	100	100	100	lineární

Tabulka 3.9: Definování nových hodnot proměnné *váha*

doporučení	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>výrazně zhubnout</i>	-45	-30	-30	-15	lineární
<i>zhubnout</i>	-30	-15	-15	0	lineární
<i>udržet</i>	-15	0	0	15	lineární
<i>přibrat</i>	0	15	15	30	lineární
<i>výrazně přibrat</i>	15	30	30	45	lineární

Tabulka 3.10: Definování nových hodnot proměnné *doporučení*



Obrázek 3.16: Nové vstupní a výstupní proměnné

Pro tento příklad tedy mějme bázi fuzzy pravidel sepsanou v tabulce 3.11.

Pravidlo 1:	Jestliže váha = “ <i>těžká podvýživa</i> ”, pak doporučení = “ <i>výrazně přibrat</i> ”.
Pravidlo 2:	Jestliže váha = “ <i>podvýživa</i> ”, pak doporučení = “ <i>přibrat</i> ”.
Pravidlo 3:	Jestliže váha = “ <i>optimální váha</i> ”, pak doporučení = “ <i>udržet</i> ”.
Pravidlo 4:	Jestliže váha = “ <i>nadváha</i> ”, pak doporučení = “ <i>zhubnout</i> ”.
Pravidlo 5:	Jestliže váha = “ <i>těžká nadváha</i> ”, pak doporučení = “ <i>výrazně zhubnout</i> ”.

Tabulka 3.11: Nová báze pravidel

Pro porovnání opět uvažujme jako pozorování hodnotu 83 kg. Stupně zasažení pravidel jsou uvedeny v tabulce 3.12.

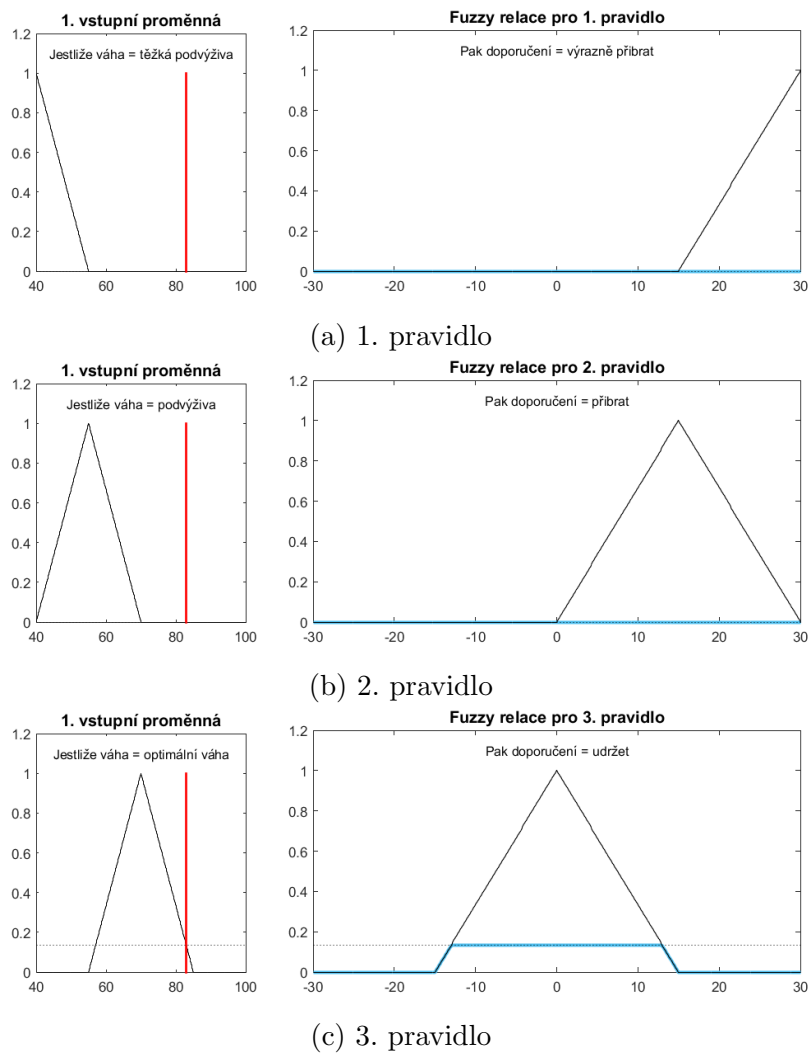
Míry zasažení pravidel	
h_1	0
h_2	0
h_3	0,13
h_4	0,87
h_5	0

Tabulka 3.12: Míry zasažení jednotlivých pravidel

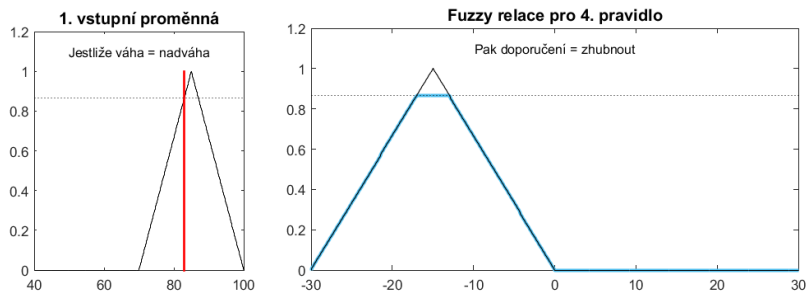
Dále se opět podíváme, jaké budou výstupy pro jednotlivé metody.

Mamdaniho přístup

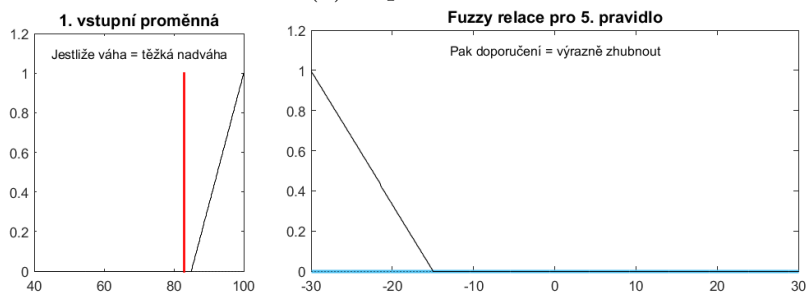
Proces konstrukce významů jednotlivých pravidel je zobrazen na obrázcích 3.17 a 3.18 a výsledná fuzzy množina pak na obrázku 3.19.



Obrázek 3.17: Mamdani - fuzzy relace pravidel (1. část)

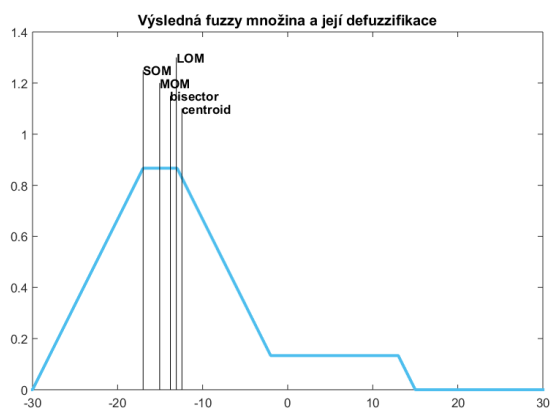


(a) 4. pravidlo



(b) 5. pravidlo

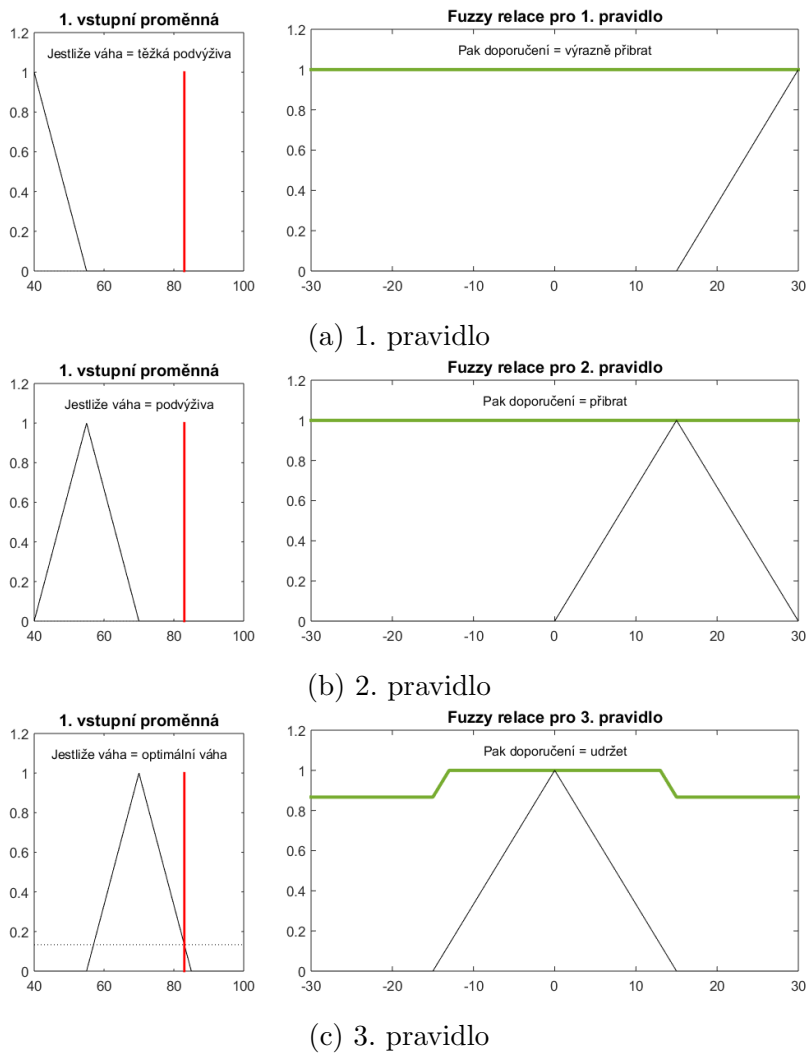
Obrázek 3.18: Mamdani - fuzzy relace pravidel (2. část)



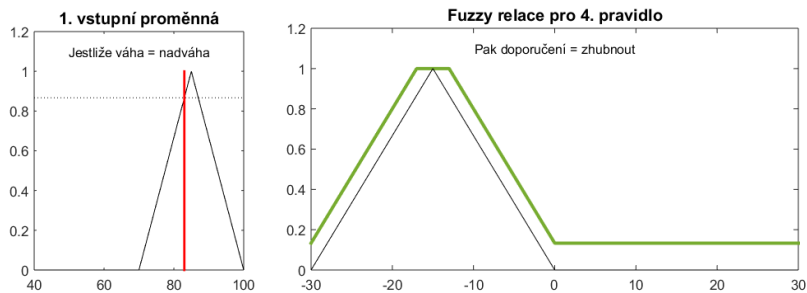
Obrázek 3.19: Mamdani - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Novákův přístup

Jak bude v tomto případě vypadat proces konstrukce dílčích významů při použití fuzzy inference dle Nováka, můžeme vidět na obrázcích 3.20 a 3.21 a výslednou množinu na obrázku 3.22.



Obrázek 3.20: Novák - fuzzy relace pravidel (1. část)

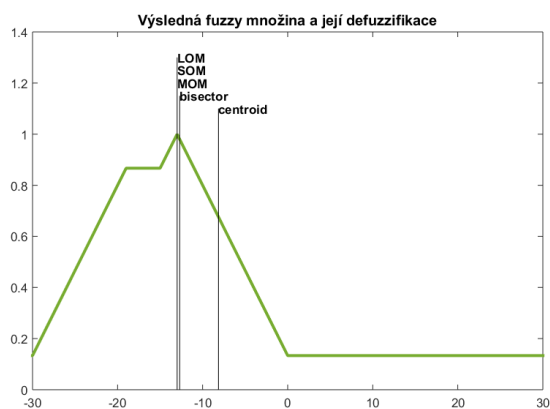


(a) 4. pravidlo



(b) 5. pravidlo

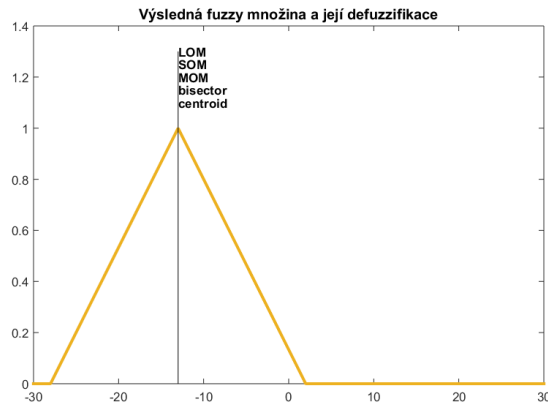
Obrázek 3.21: Novák - fuzzy relace pravidel (2. část)



Obrázek 3.22: Novák - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Zobecněný Sugeno a Sugeno & Yasukawa

Pro zobecněného Sugena dostaneme v tomto případě fuzzy číslo vykreslené na obrázku 3.23 a Sugeno & Yasukawa doporučí zhubnout 13 kg.



Obrázek 3.23: Zobecněný Sugeno - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Porovnání výstupních hodnot

Výsledné hodnoty pro jednotlivé algoritmy a různé metody defuzzifikace jsou nyní shrnuty v tabulce 3.13.

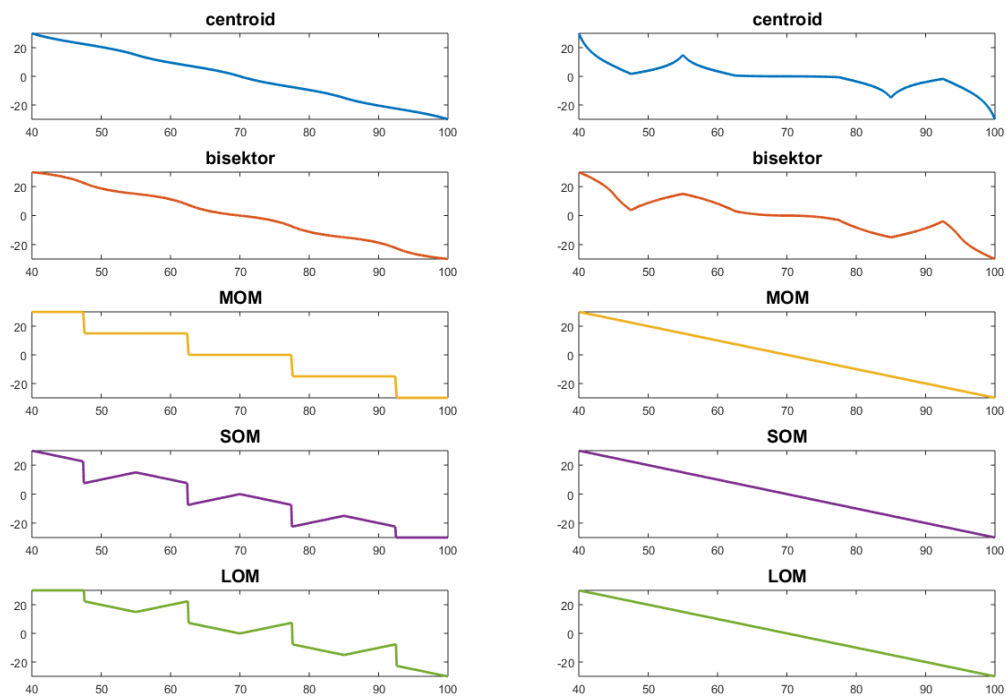
výsledné hodnoty defuzzifikace			
	Mamdani	Novák	Zobecněný Sugeno
centroid	-12, 4	-8, 1	-13
bisektor	-13, 8	-12, 7	-13
MOM	-15	-13	-13
SOM	-17	-13	-13
LOM	-13	-13	-13

Tabulka 3.13: Souhrn nových výsledných hodnot

Vidíme, že v případě takto sestaveného systému, kde naše hodnota pozorování již jen částečně zasahuje třetí pravidlo a z velké části pak zasahuje čtvrté pravidlo, už metody nedávají tak neurčité výstupy, jako tomu bylo dříve, a výsledné defuzzifikace již nejsou tak výrazně odlišné.

Pomocí zjemnění škál tedy můžeme dostat méně neurčité výsledky, avšak musíme tím pádem nadefinovat více hodnot a více pravidel.

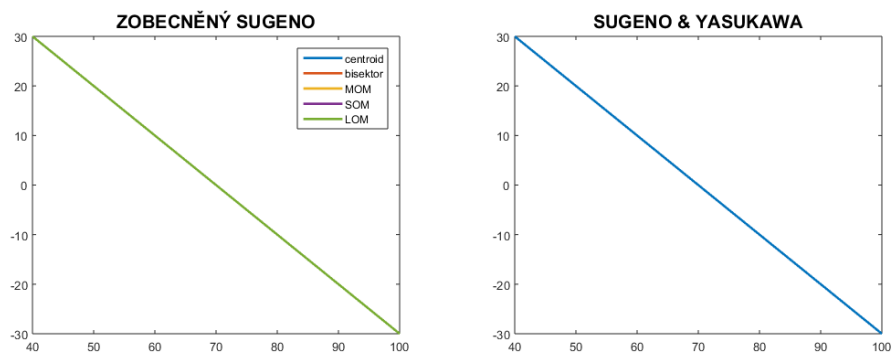
Průběhy jednotlivých funkcí jsou ukázány na obrázcích 3.24 a 3.25.



(a) Mamdani

(b) Novák

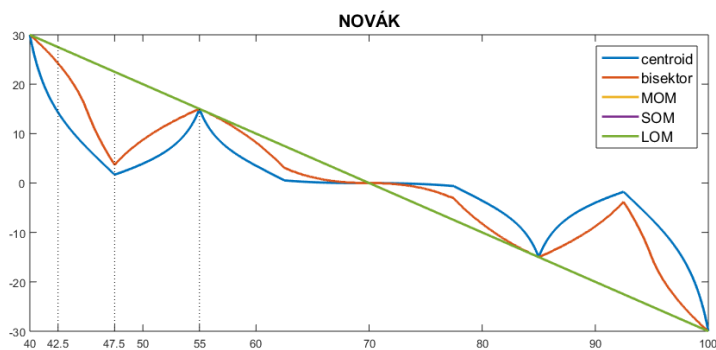
Obrázek 3.24: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Mamdaniho a Nováka



Obrázek 3.25: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Sugenyovy modifikace

Z obrázku 3.24 vidíme, že poměrně překvapivý průběh mají funkce používající metodu těžiště a bisektoru u Novákova přístupu. Vidíme, že pro krajní hodnoty univerza se tyto dvě metody nechovají hezky. Toto je způsobeno povahou výpočtu. V Novákově metodě se totiž při nezasažení pravidla nevynulují hodnoty mimo oblast, tj. laicky řečeno algoritmus “nevyhloubí dané díry”. Největší problém pak tedy způsobují hodnoty, které zasahují přesně napůl dvě krajní pravidla.

Pro názornost si ukážeme, jak vypadají výstupní fuzzy množiny pro některé z krajních hodnot. Na obrázku 3.26 vidíme opět vykreslené jednotlivé funkce a na obrázku 3.27 výstupy algoritmu pro hodnoty 42,5 kg, 47,5 kg a 55 kg.

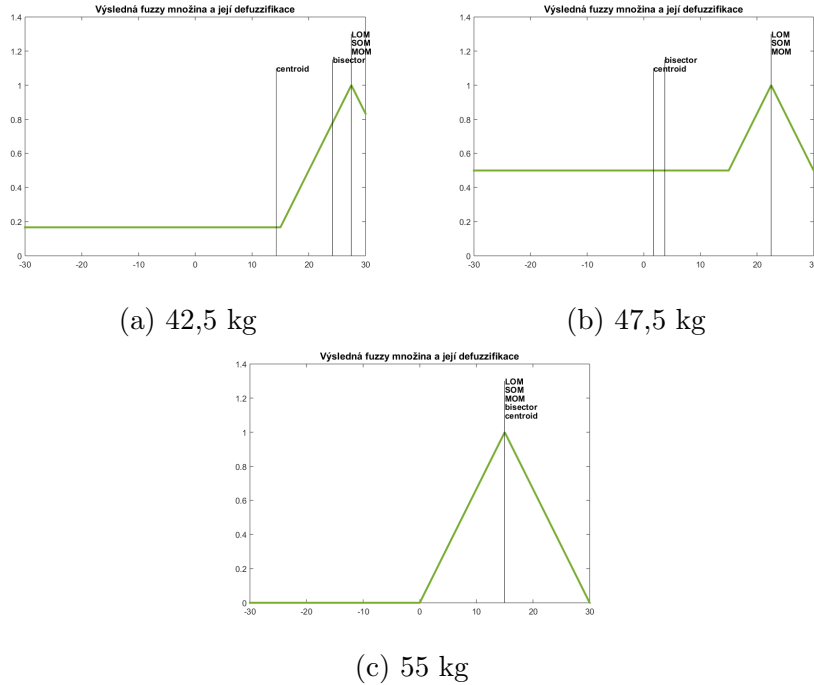


Obrázek 3.26: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Novákův algoritmus

Pro vybrané hodnoty jsou přitom míry zasažení jednotlivých pravidel sepsány v tabulce 3.14.

Míry zasažení pravidel			
Pozorování	42,5 kg	47.5 kg	55 kg
h_1	0,83	0,5	0
h_2	0,17	0,5	1
h_3	0	0	0
h_4	0	0	0
h_5	0	0	0

Tabulka 3.14: Míry zasažení pravidel pro vybraná pozorování



Obrázek 3.27: Výsledné fuzzy množiny z Novákova algoritmu pro vybrané hodnoty

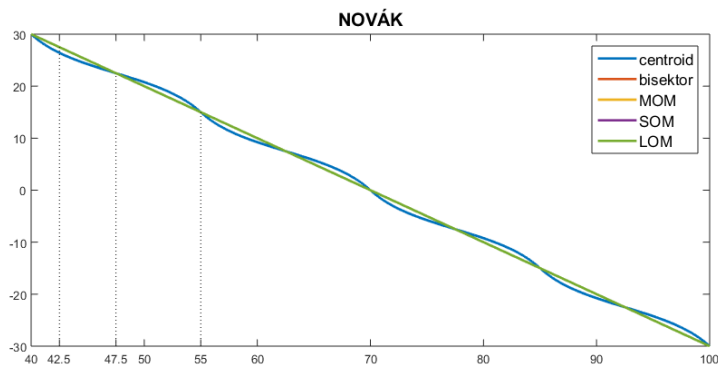
V tomto případě bychom tedy nedoporučili používat pro defuzzifikaci metodu těžiště či bisektoru, ale místo toho spíše metodu MOM, SOM či LOM.

Další možností, jak bychom mohli tomuto problému předejít, by bylo při agregování výstupů z jednotlivých pravidel místo klasického průniku použít průnik Łukasiewiczův. Funkce příslušnosti pro Łukasiewiczův průnik n množin B_i^N , $i = 1, \dots, n$ je pro všechna $y \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$ dána vztahem

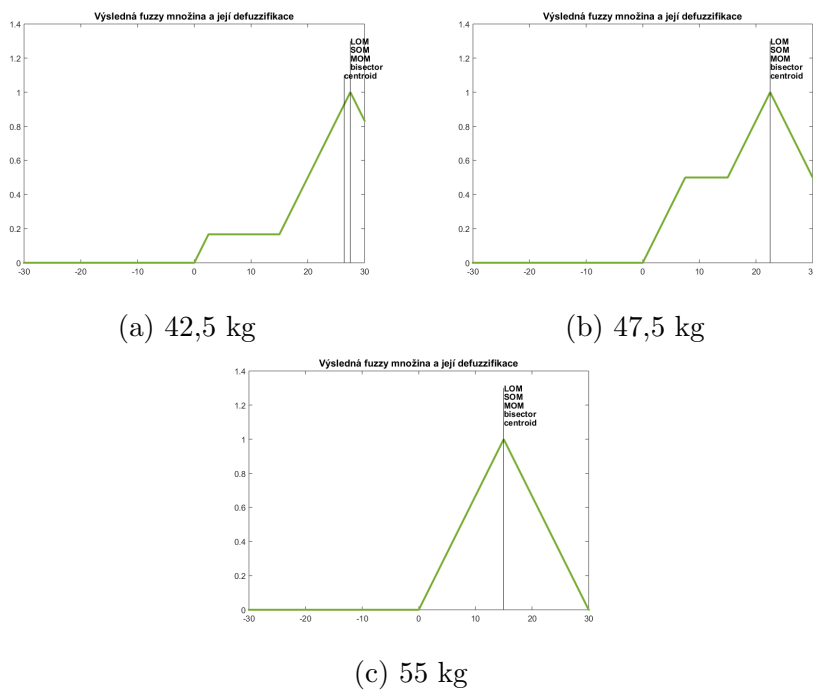
$$B^N(y) = \max\left\{0, \sum_{i=1}^n B_i^N(y) - n + 1\right\}, \quad (3.4)$$

kdy v tomto případě $\mathcal{F}(\mathcal{V}) = \langle -30, 30 \rangle$ a $n = 5$.

Průběh funkcí při použití Łukasiewiczova průniku vidíme na obrázku 3.28 a podobu výsledných fuzzy množin pro stejné vybrané hodnoty na obrázku 3.29.



Obrázek 3.28: Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Novákův algoritmus při použití Łukasiewiczova průniku



Obrázek 3.29: Výsledné fuzzy množiny z Novákova algoritmu pro vybrané hodnoty při použití Łukasiewiczova průniku

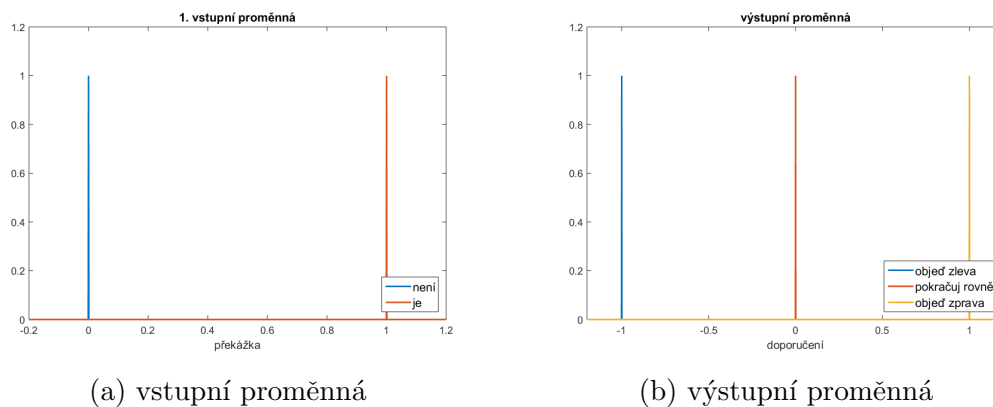
Na tomto příkladu jsme si tedy ukázali, že důležitou otázkou při sestavování fuzzy inferenčních systémů není jen to, jaký algoritmus a defuzzifikaci zvolit, ale důležité je také mít primárně vhodně nadefinované proměnné a bázi pravidel.

3.2. Příklad s protichůdnými pravidly

V této části se podíváme na to, jak by si jednotlivé inferenční algoritmy poradily se situací, kdy v bázi budou protichůdná pravidla, tj. když by pro stejné hodnoty vstupů byly možné různé hodnoty výstupů.

Představme si, že jedeme autem a před námi se může objevit překážka. My chceme sestavit systém, který by nám na základě toho, zda před námi překážka je, nebo není, řekl, co máme dělat. V tomto příkladu budeme pro názornost pracovat pouze s ostrými čísly, které však chápeme jen jako speciální případ fuzzy čísel.

Mějme tedy vstupní proměnnou *překážka* a výstupní proměnnou *doporučení*. Proměnná *překážka* může nabývat hodnoty 0, která značí, že před námi překážka není, a hodnoty 1, která značí, že překážka před námi je. Proměnná *doporučení* může nabývat hodnoty -1, která nám říká, že máme překážku objet zleva, hodnoty 0, která říká, ať pokračujeme rovně, a hodnoty 1, která radí překážku objet zprava. Předpokládejme, že silnice je dostatečně široká a nic nám případně v objíždění bránit nebude. Vykreslení daných proměnných můžeme vidět na obrázku 3.30.



Obrázek 3.30: Vstupní a výstupní proměnné

Uvažovat budeme následující 3 pravidla uvedená v tabulce 3.15.

Pravidlo 1:	Jestliže překážka = “není”, pak doporučení = “pokračuj rovně”.
Pravidlo 2:	Jestliže překážka = “je”, pak doporučení = “objed’ zleva”.
Pravidlo 3:	Jestliže překážka = “je”, pak doporučení = “objed’ zprava”.

Tabulka 3.15: Báze pravidel

Nyní se podíváme, jaký výstup by nám jednotlivé algoritmy daly v případě, že překážka před námi bude. Vstupní hodnota pozorování je tedy 1.

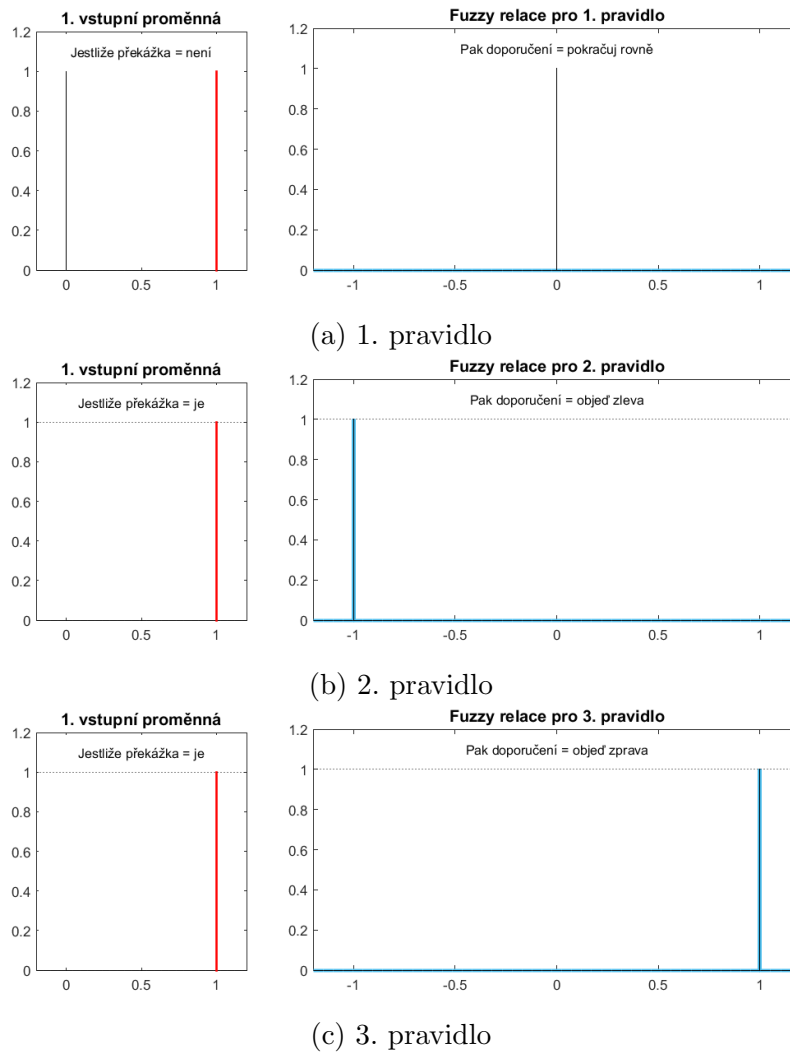
V tomto případě by pak první pravidlo nebylo zasaženo vůbec a ta další dvě pravidla by byla zasažena zcela. Míry zasažení pravidel jsou sepsány v tabulce 3.16.

Míry zasažení pravidel	
h_1	0
h_2	1
h_3	1

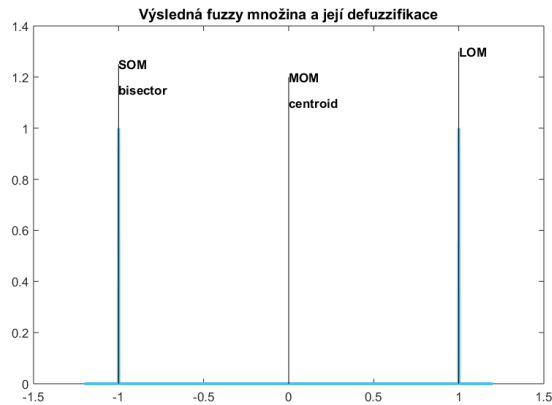
Tabulka 3.16: Míry zasažení jednotlivých pravidel

Mamdaniho přístup

Na obrázku 3.31 můžeme vidět proces vyhodnocování jednotlivých pravidel pro inferenční přístup dle Mamdaniho a na obrázku 3.32 pak výslednou množinu, která vznikla sjednocením výstupů z těchto jednotlivých pravidel.



Obrázek 3.31: Mamdani - fuzzy relace pravidel



Obrázek 3.32: Mamdani - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Jelikož Mamdani pravidla chápe jako možnosti, které ve výsledku sjednocuje, nejsou pro něj protichůdná pravidla problém. V tomto případě nám tedy řekne, že rovně jet nesmíme, ale jinak můžeme překážku objet zleva nebo i zprava.

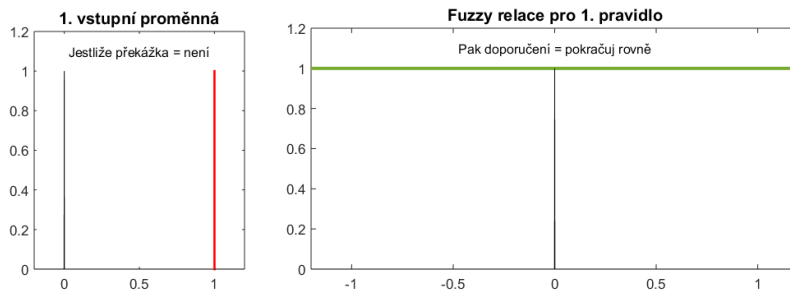
Ačkoliv my jsme v tomto příkladu pro názornost použili pouze jednoduchý případ s ostrými hodnotami, můžeme i tak vidět, že bychom si zde museli dát velký pozor na použitou metodu defuzzifikace. Kdybychom totiž v tomto případě použili k defuzzifikaci metodu těžiště či střed maxim, byla by výstupem hodnota 0, která znamená jet rovně, a do překážky bychom na základě tohoto doporučení narazili. Právě pro tyto případy máme metody SOM a LOM, na základě kterých pak překážku správně objedeme. Podle toho, kterou z těchto dvou metod zvolíme, rozhodneme o tom, zda budeme překážku objíždět zleva, nebo zprava³.

³Pozn.: Kdybychom pro výpočet defuzzifikace použili v MATLABu zaimplementovaný příkaz `defuzz`, který LOM a SOM počítá z absolutních hodnot, dostali bychom v obou případech výslednou hodnotu -1, tj. pouze doporučení objet překážku zleva.

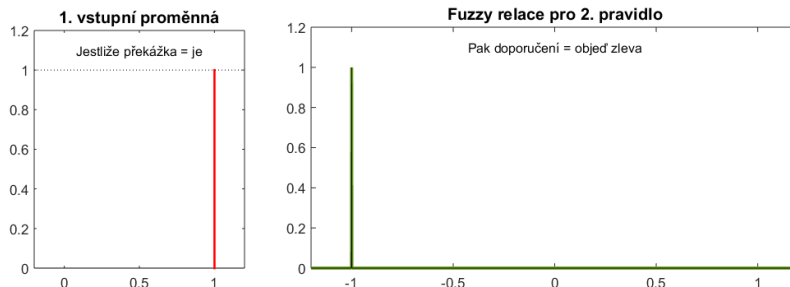
Pozn.: Metoda bisektoru zde dá jako výstup také hodnotu -1, neboť zde není žádná plocha k rozdělení a bisektor tak bere první možnou hodnotu.

Novákův přístup

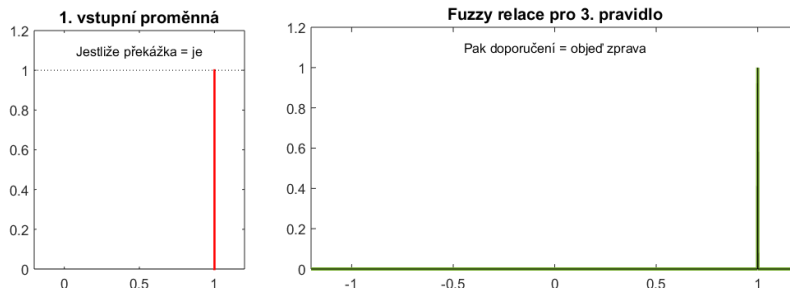
Jinou situaci nyní uvidíme při použití Novákova přístupu. Jelikož první pravidlo nebylo zasaženo vůbec, můžeme dle něj dělat cokoli, tj. objíždět zleva, zprava a nebo jet rovně. Druhé pravidlo už je zasaženo zcela a jedinou možností je podle něj objet překážku zleva. Stejně tak je zcela zasažené i třetí pravidlo, které nám pak říká, že překážku máme objet zprava. Tento proces vyhodnocování pravidel je zobrazen na obrázku 3.33.



(a) 1. pravidlo



(b) 2. pravidlo



(c) 3. pravidlo

Obrázek 3.33: Novák - fuzzy relace pravidel

Jelikož Novákův algoritmus nahlíží na pravidla jako na implikace, které musejí platit současně, a spojení těchto pravidel modeluje pomocí operace průniku, byla by v tomto případě výsledkem prázdná množina. Při protichůdných pravidlech nám tedy tato metoda řekne, že nic není možné.

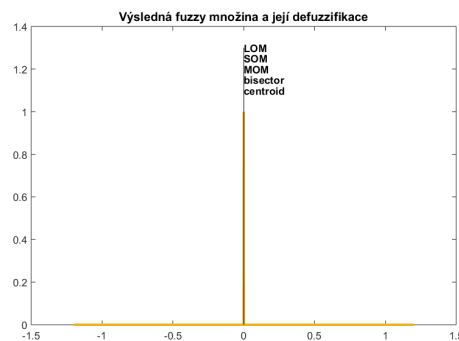
Novákův přístup k inferenci tedy může být použit pouze tehdy, máme-li zajištěno, že v bázi protichůdná pravidla nejsou. Na to, že něco není v pořádku, jsme v tomto případě však díky výstupu v podobě prázdné množiny upozorněni.

Abychom zde pak mohli Novákovu metodu použít, musíme bázi pravidel přeformulovat a v tomto případě vybrat pouze jednu možnost pro objíždění. Museli bychom tedy určit, že v případě výskytu překážky ji budeme objíždět například zásadně zleva, a vypustili bychom třetí pravidlo.

Zobecněný Sugeno a Sugeno & Yasukawa

Nyní si ukážeme, že pro protichůdná pravidla rozhodně není vhodný algoritmus zobecněného Sugena či přístup Sugena a Yasukawy. Vzhledem k tomu, že tyto metody počítají výstup jako vážený průměr, dostali bychom pak ve všech případech jako výsledek doporučení jet rovně, a do překážky bychom narazili. Na to, že je něco špatně, by nás v tomto případě navíc ani nic neupozornilo.

Výstup pro zobecněného Sugena je zobrazen na obrázku 3.34 a výsledná hodnota dle algoritmu Sugena a Yasukawy by byla rovna nule.



Obrázek 3.34: Zobecněný Sugeno - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Na tomto příkladu jsme si tedy ukázali, že máme-li v bázi protichůdná pravidla, pak si s tím poradí pouze přístup Mamdaniho, avšak je potřeba dát si pozor na použitou metodu defuzzifikace. Pokud bychom totiž zvolili defuzzifikaci pomocí centroidu či MOM, nebyli bychom nijak upozorněni na to, že v bázi mohou být protichůdná pravidla, a na základě výstupu bychom narazili. Protichůdná pravidla tedy musíme detekovat sami a vzhledem k tomu pak zvolit vhodnou metodu defuzzifikace.

Naopak Novák nás na tento problém díky výstupu v podobě prázdné množiny upozorní a dá nám tedy najevo, že bychom bázi pravidel měli upravit a zvolit pouze jednu možnost objíždění. Tato volba pouze jednoho ze směrů pak vlastně odpovídá tomu, když u Mamdaniho vybíráme mezi defuzzifikací pomocí SOM a LOM.

Přístupy vycházející ze Sugenyovy metody nás nejenže na problém neupozorní, ale dokonce nám i ve všech případech dají špatnou výstupní hodnotu.

3.3. Příklad se dvěma vstupními proměnnými

Nyní se podíváme, jak algoritmy pracují v případě, že máme více vstupních proměnných. Pro jednoduchost a názornost si zkonstruujeme příklad, ve kterém budou vstupní proměnné dvě.

Představme si, že jsme v obchodě a vybíráme si například šaty. Každé zkoušené šaty budeme chtít nějak ohodnotit na základě toho, jak nám sluší a jak pohodlné jsou. Budeme mít tedy vstupní proměnné “*vzhled*” a “*pohodlnost*” a výstupní proměnnou bude “*hodnocení*”.

Vzhled budeme hodnotit body od 0 do 10, kdy 0 bodů znamená, že nám šaty vůbec nesluší, a 10 znamená, že nám naprosto sluší. Pohodlnosti budeme přiřazovat hodnoty z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, přičemž 0 značí, že jsou šaty absolutně nepohodlné, a 1 že jsou naopak zcela pohodlné. Výsledné hodnocení pak bude dáno v procentech, tj. od 0 do 100.

Jednotlivé proměnné, jejich termy, významy a typy fuzzy čísel jsou popsány v tabulkách 3.17 a 3.18 a znázorněny na obrázcích 3.35 a 3.36.

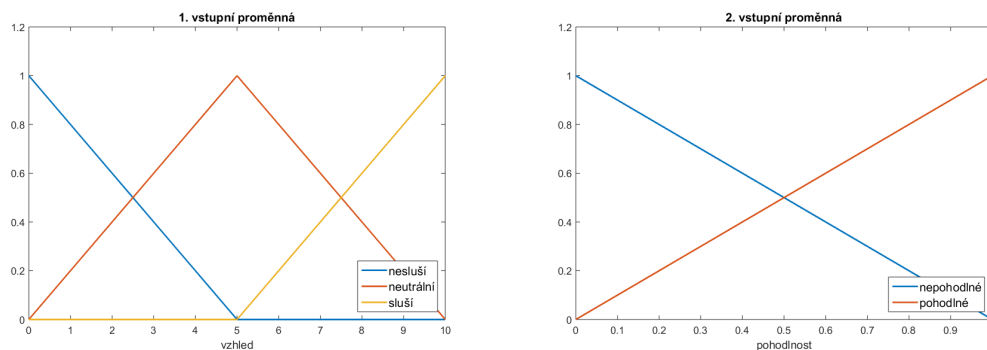
Na tomto příkladu si také ukážeme, že funkce FIS.m dokáže pracovat i s kvadratickými fuzzy čísly a fuzzy pozorováními.

Vstupní proměnné					
vzhled	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>nesluší</i>	0	0	0	5	lineární
<i>neutrální</i>	0	5	5	10	lineární
<i>sluší</i>	5	10	10	10	lineární
pohodlnost	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>nepohodlné</i>	0	0	0	1	lineární
<i>pohodlné</i>	0	1	1	1	lineární

Tabulka 3.17: Definování hodnot vstupních proměnných

Výstupní proměnná					
hodnocení	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>nespokojenost</i>	-50	0	0	50	kvadratické
<i>průměr</i>	0	50	50	100	kvadratické
<i>spokojenost</i>	50	100	100	150	kvadratické

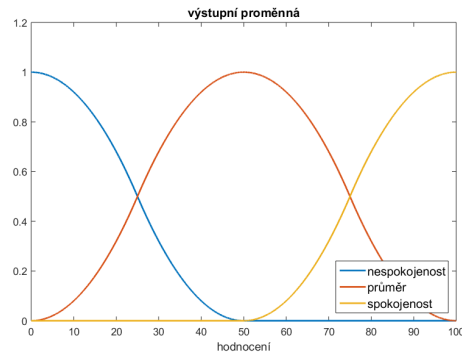
Tabulka 3.18: Definování hodnot výstupní proměnné



(a) 1. vstupní proměnná

(b) 2. vstupní proměnná

Obrázek 3.35: Vstupní proměnné



Obrázek 3.36: Výstupní proměnná

Báze pravidel je sepsána v tabulce 3.19 a napozorované hodnoty jednotlivých vstupních proměnných v tabulce 3.20. Pro nějaké konkrétní šaty máme tedy vzhled ohodnocený fuzzy číslem reprezentujícím “asi 7” bodů a pohodlnost jsme určili na hodnotu 0.8. Pro potřeby funkce však i tuto ostrou hodnotu zadáme jako fuzzy číslo, abychom měli všechny hodnoty pozorování stejného druhu.

Pravidlo 1:	Jestliže vzhled = “ <i>neslušší</i> ” a pohodlnost = “ <i>nepohodlné</i> ”, pak hodnocení = “ <i>nespokojenost</i> ”.
Pravidlo 2:	Jestliže vzhled = “ <i>neutrální</i> ” a pohodlnost = “ <i>nepohodlné</i> ”, pak hodnocení = “ <i>nespokojenost</i> ”.
Pravidlo 3:	Jestliže vzhled = “ <i>slušší</i> ” a pohodlnost = “ <i>nepohodlné</i> ”, pak hodnocení = “ <i>průměr</i> ”.
Pravidlo 4:	Jestliže vzhled = “ <i>neslušší</i> ” a pohodlnost = “ <i>pohodlné</i> ”, pak hodnocení = “ <i>nespokojenost</i> ”.
Pravidlo 5:	Jestliže vzhled = “ <i>neutrální</i> ” a pohodlnost = “ <i>pohodlné</i> ”, pak hodnocení = “ <i>průměr</i> ”.
Pravidlo 6:	Jestliže vzhled = “ <i>slušší</i> ” a pohodlnost = “ <i>pohodlné</i> ”, pak hodnocení = “ <i>spokojenost</i> ”.

Tabulka 3.19: Báze pravidel

Pozorování					
	x_1	x_2	x_3	x_4	typ fuzzy čísla
<i>vzhled</i>	6	7	7	8	lineární
<i>pohodlnost</i>	0.8	0.8	0.8	0.8	lineární

Tabulka 3.20: Hodnoty pozorování pro jednotlivé proměnné

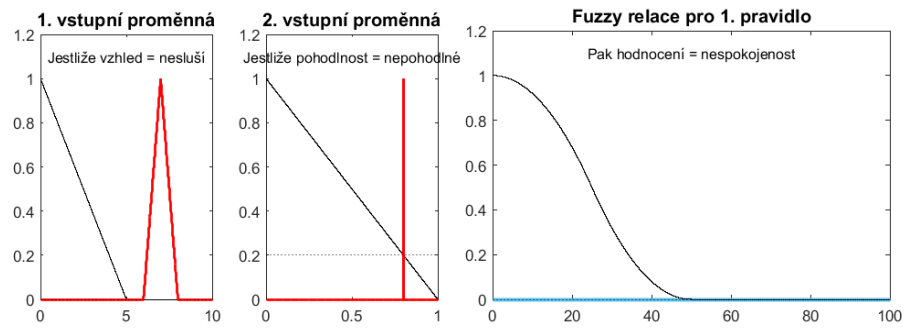
To, v jakých mírách naše pozorování zasahuje jednotlivá pravidla, je zapsáno v následující tabulce 3.21. Jak již víme z kapitoly 2 a můžeme vidět například z obrázků 3.37 a 3.38, míry zasažení jednotlivých pravidel v případě více proměnných v antecedentu získáme jako minimum ze zásahů jednotlivých významů v daném pravidle. Poté už pokračujeme stejně jako dříve.

Míry zasažení pravidel	
h_1	0
h_2	0.2
h_3	0.2
h_4	0
h_5	0.666
h_6	0.5

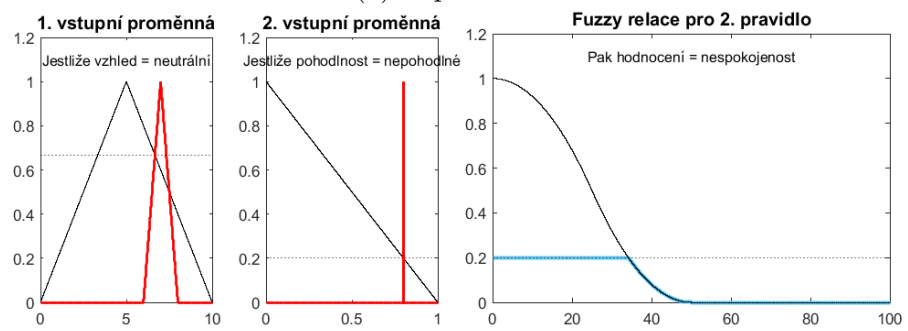
Tabulka 3.21: Míry zasažení jednotlivých pravidel

Mamdaniho přístup

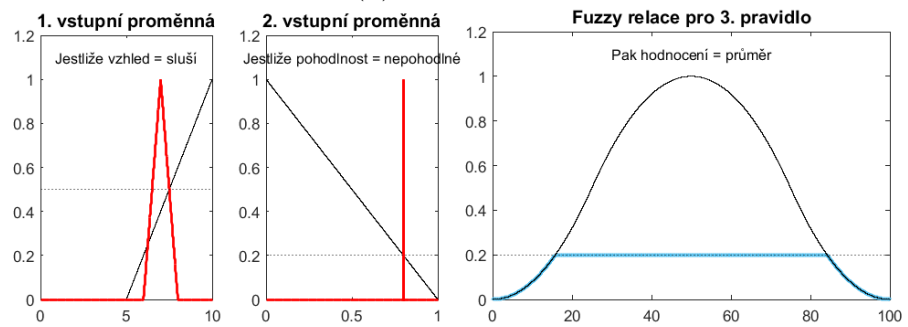
Proces inference pro Mamdaniho metodu je znázorněn na obrázcích 3.37 a 3.38, výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace pak na obrázku 3.39.



(a) 1. pravidlo

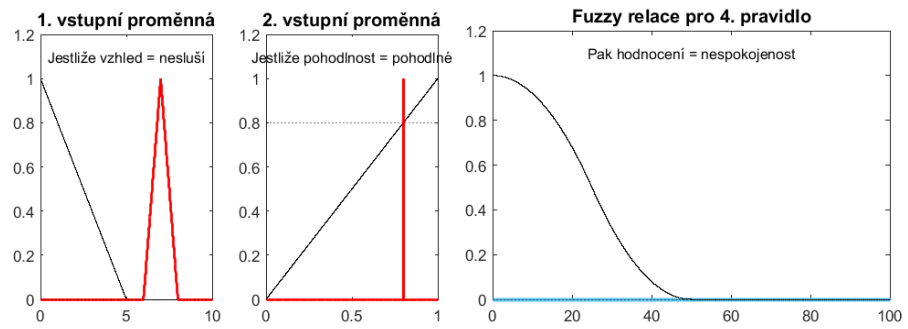


(b) 2. pravidlo

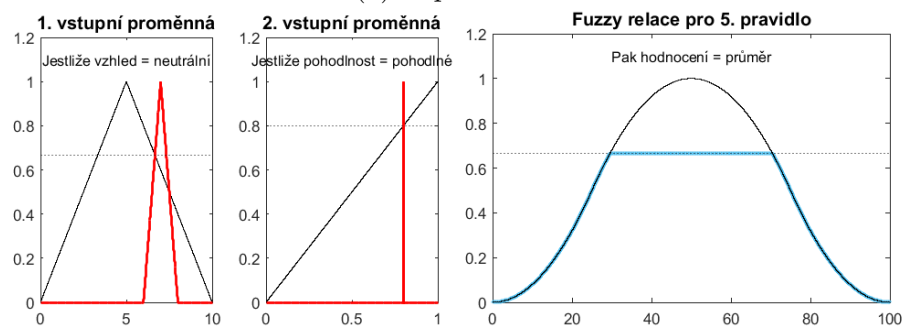


(c) 3. pravidlo

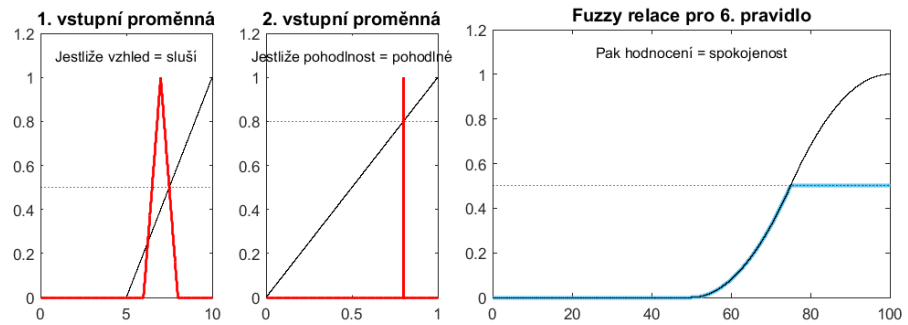
Obrázek 3.37: Mamdani - fuzzy relace pravidel (1.část)



(a) 4. pravidlo

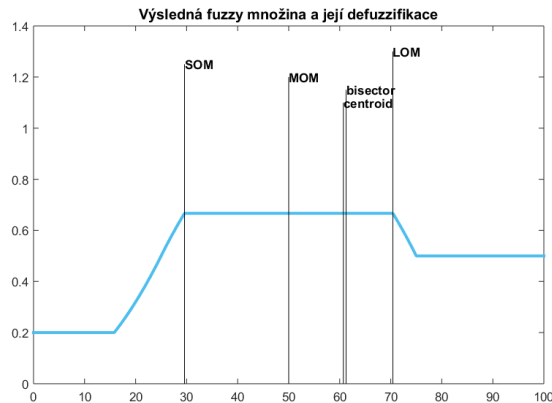


(b) 5. pravidlo



(c) 6. pravidlo

Obrázek 3.38: Mamdani - fuzzy relace pravidel (2. část)



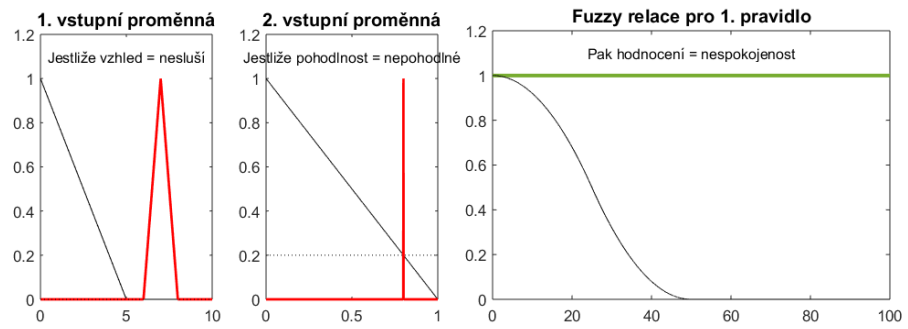
Obrázek 3.39: Mamdani - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Pokud bychom tedy k hodnocení našich šatů použili Mamdaniho přístup, byli bychom s nimi na základě defuzzifikace metodou těžiště či bisektoru spokojeni zhruba na 61 %, s použitím metody SOM pouze na 30 %, s MOM na 50 % a s LOM na 70 %. Opět zde ve výsledném hodnocení vidíme poměrně výraznou neurčitost a velké rozdíly v defuzzifikaci.

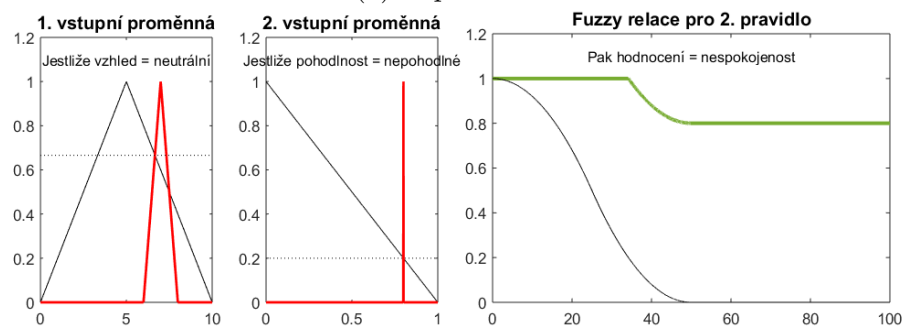
Novákův přístup

Pro případ Novákova fuzzy inferenčního algoritmu můžeme vidět průběh na obrázcích 3.40 a 3.41 a výslednou fuzzy množinu na obrázku 3.42.

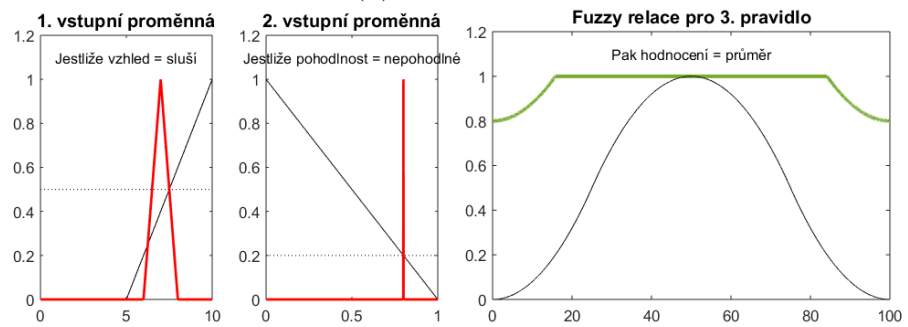
V tomto případě by výsledkem defuzzifikace pomocí těžiště bylo hodnocení šatů 51 %, pomocí bisektoru 55 %, pomocí SOM 69 %, pomocí MOM 73 % a pomocí LOM pak 76 %.



(a) 1. pravidlo

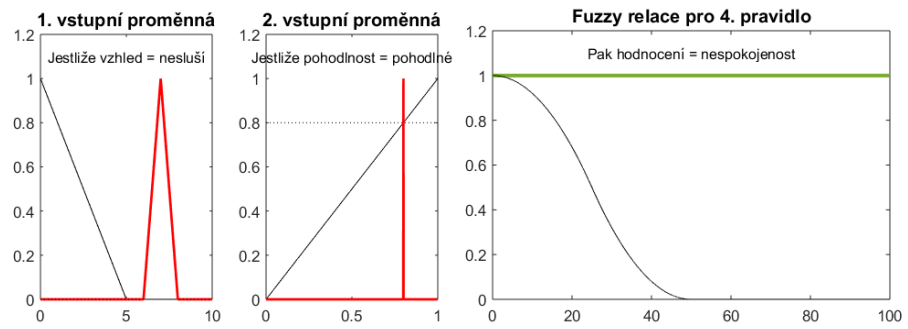


(b) 2. pravidlo

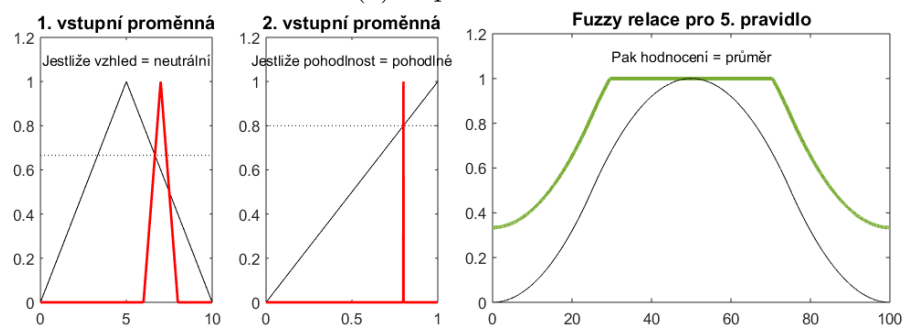


(c) 3. pravidlo

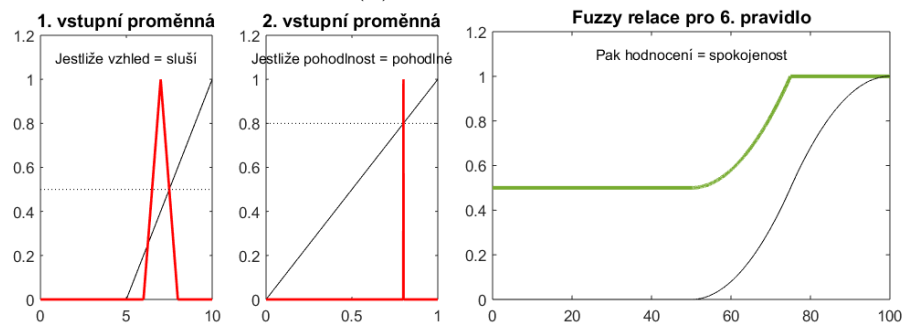
Obrázek 3.40: Novák - fuzzy relace pravidel (1.část)



(a) 4. pravidlo

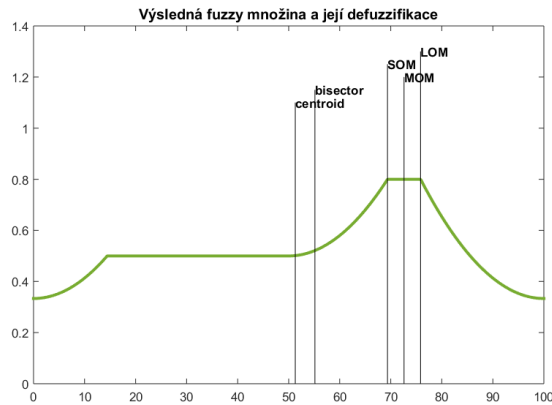


(b) 5. pravidlo



(c) 6. pravidlo

Obrázek 3.41: Novák - fuzzy relace pravidel (2. část)

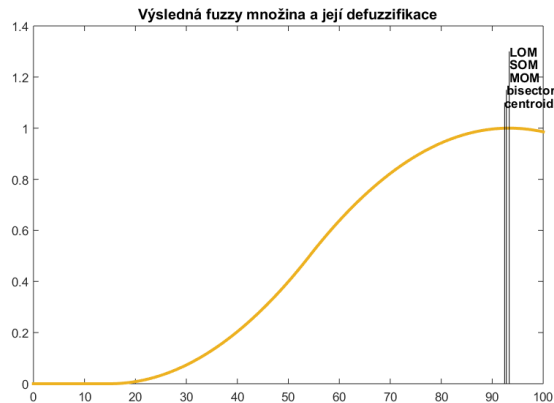


Obrázek 3.42: Novák - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Zobecněný Sugeno

Nakonec, podíváme-li se na výsledné fuzzy číslo získané pomocí zobecněného Sugenova algoritmu, které je zobrazeno na obrázku 3.43, uvidíme, že všechny metody nám zde dají stejné výsledné hodnocení 93 %. Jak totiž víme, výstupem v tomto algoritmu je vždy fuzzy číslo stejného typu, jako jsou fuzzy čísla použitá v daném modelu. V tomto případě je výstupem tedy symetrické kvadratické fuzzy číslo. Díky tomu, že jsme v zadání příkladu symbolicky protáhli krajní fuzzy čísla u výstupní proměnné, umožní nám také metody centroidu a bisektoru dosáhnout i krajních hodnot hodnocení. Pokud bychom tak neučinili, pak bychom i pro naprosto slušivé a zcela pohodlné šaty dostali při těchto metodách defuzzifikace jako maximální hodnocení jen nějakých 85 %.

Pro přístup Sugena a Yasukavy zde žádný výsledek nemáme, protože tento algoritmus předpokládá pouze ostré hodnoty pozorování. Na toto nás však funkce `FIS.m` upozorní.



Obrázek 3.43: Zobecněný Sugeno - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Porovnání výstupních hodnot

Hodnoty všech výsledných defuzzifikací tohoto příkladu jsou sepsány v následující tabulce 3.22.

Výsledné hodnoty defuzzifikace			
	Mamdani	Novák	Zobecněný Sugeno
centroid	61	51	93
bisektor	61	55	93
MOM	50	73	93
SOM	30	69	93
LOM	70	76	93

Tabulka 3.22: Souhrn všech výsledných hodnot defuzzifikace

Opět tedy můžeme vidět, že výsledné hodnocení šatů výrazně závisí na tom, jaký si vybereme inferenční algoritmus a jaký způsob defuzzifikace použijeme. Zejména u fuzzy inference dle Mamdaniho je pak vidět obrovská závislost na metodě defuzzifikace. Zatímco u Mamdaniho můžeme pro naše šaty dostat jako hodnocení i pouhých 30 %, u ostatních metod se nedostaneme pod 50 %.

3.4. Ukázka případu, kdy žádné pravidlo není zasazeno

Na závěr této práce se ještě zkusíme podívat na to, jak by se zachovaly jednotlivé algoritmy v případě, kdy by ani jedno z pravidel nebylo zasazeno. Došlo by tedy k porušení předpokladu, že pozorování alespoň částečně zasáhne hodnoty na levé straně alespoň jednoho pravidla. Toto by znamenalo, že nemáme vhodně sestavenou bázi a nastala situace, pro kterou v ní není zadefinované pravidlo.

Použijme nyní stejné zadání jako v předcházejícím příkladu, avšak z báze záměrně vynecháme jedno pravidlo a hodnotu pozorování nastavme tak, aby žádné z těch zbylých nebylo ani částečně zasazeno.

Uvažujme tedy stejné vstupní a výstupní proměnné, které jsou popsány v tabulkách 3.17 a 3.18 a zobrazeny na obrázcích 3.35 a 3.36. Z báze pravidel z tabulky 3.19 pak odstraníme páté pravidlo. V roli pozorování nyní budeme mít šaty, které mají naprosto neutrální vzhled a jsou zcela pohodlné. Budou mít tedy přesně 5 bodů za vzhled a hodnotu 1 pro pohodlnost. Jak můžeme vidět z tabulky 3.23, stupeň zasazení je teď pro všechna pravidla nulový.

Míry zasazení pravidel	
h_1	0
h_2	0
h_3	0
h_4	0
h_5	0

Tabulka 3.23: Míry zasazení jednotlivých pravidel

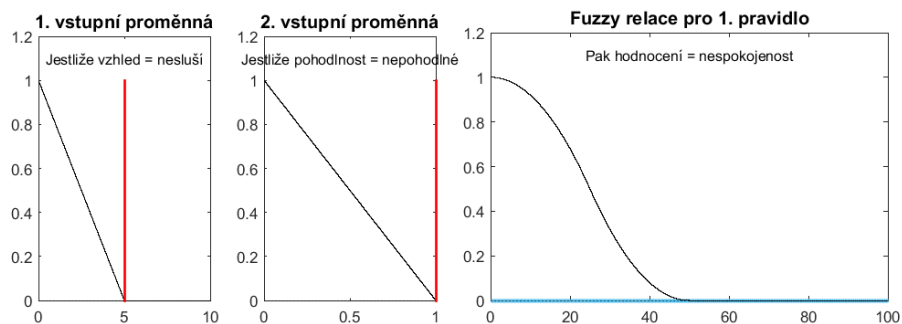
Dále uvidíme, jak se v této situaci budou jednotlivé metody chovat.

Mamdaniho přístup

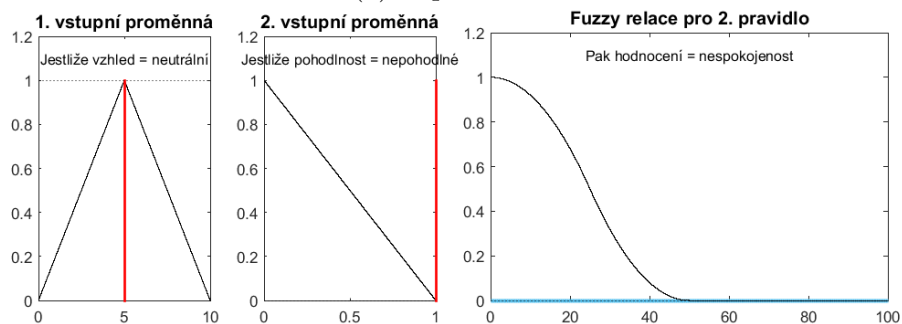
Jelikož u Mamdaniho přístupu dílčí významy pravidel získáme uříznutím pravých stran ve výšce zasazení, která je zde všude nulová, bude zde pro všechna tato pravidla výstupem prázdná množina.

Pro získání výsledného výstupu tu tak sjednocujeme prázdné fuzzy množiny a celkovým výstupem je tedy také prázdná množina. Dle tohoto algoritmu by pak žádné hodnocení nebylo možné.

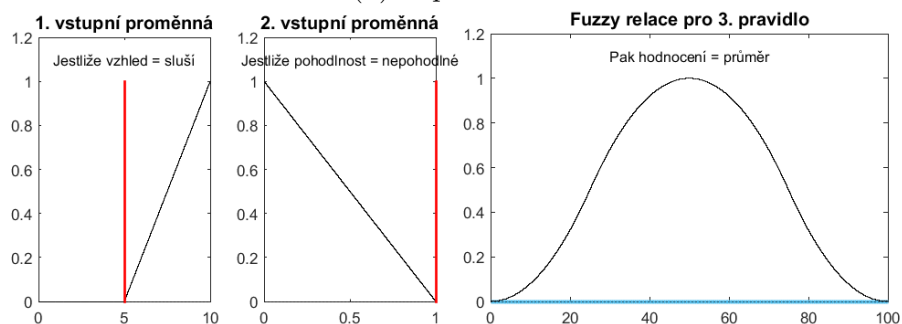
Proces inference je zachycen na obrázcích 3.44 a 3.45.



(a) 1. pravidlo

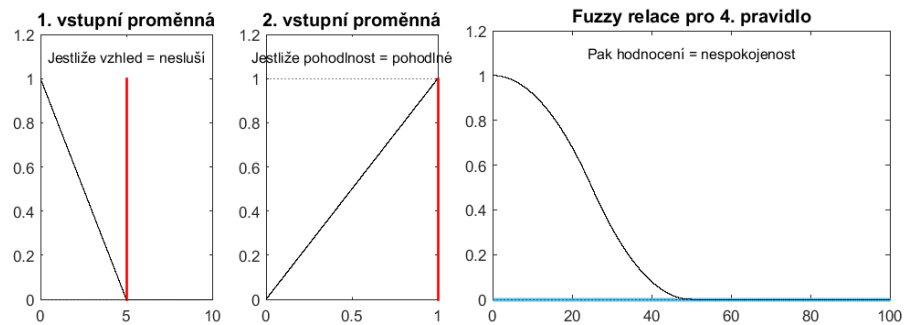


(b) 2. pravidlo

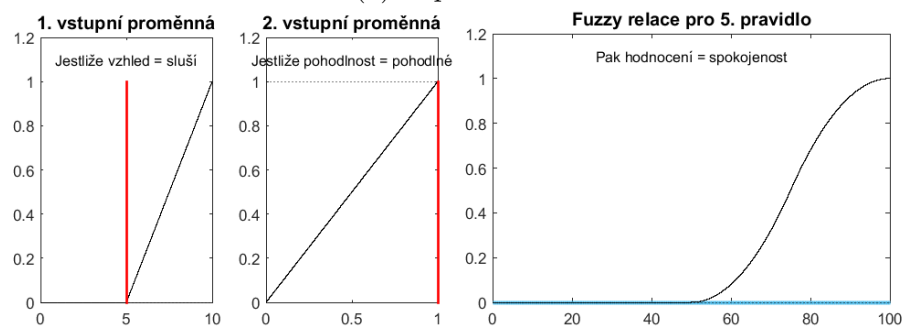


(c) 3. pravidlo

Obrázek 3.44: Mamdani - fuzzy relace pravidel (1.část)



(a) 4. pravidlo



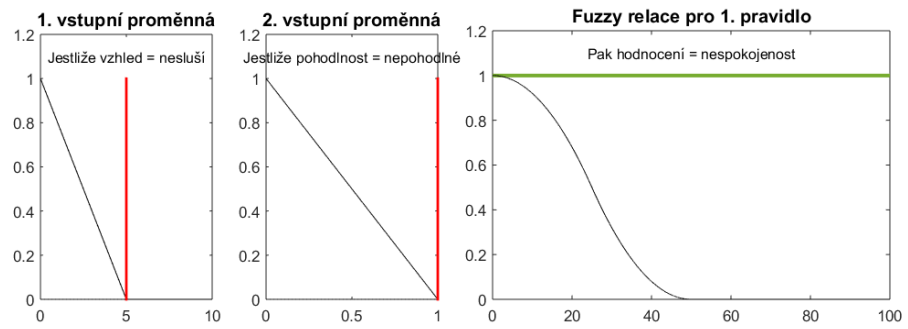
(b) 5. pravidlo

Obrázek 3.45: Mamdani - fuzzy relace pravidel (2. část)

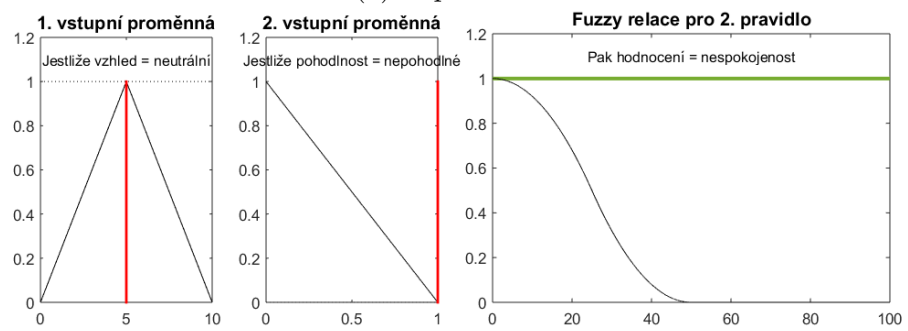
Novákův přístup

U Nováka bude situace opačná. Z pravdivosti implikace totiž víme, že neplatí-li předpoklad, pak implikace bude pravdivá. Vztáhneme-li to na tuto situaci, tak pokud není antecedent ani z části zasažen, pak výstupem bude celé univerzum, tj. $B^N = \mathcal{V} = \langle 0, 100 \rangle$, a možné je tedy cokoliv. Jakékoliv hodnocení tak bude pravdivé ve stupni 1.

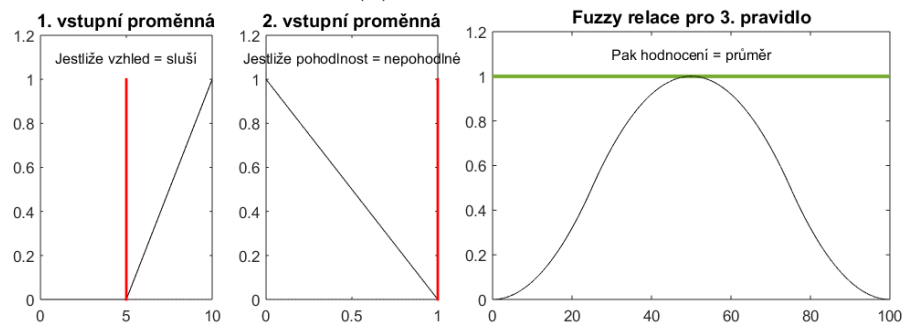
Postup inference je vykreslen na obrázcích 3.46 a 3.47 a výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace na obrázku 3.48.



(a) 1. pravidlo

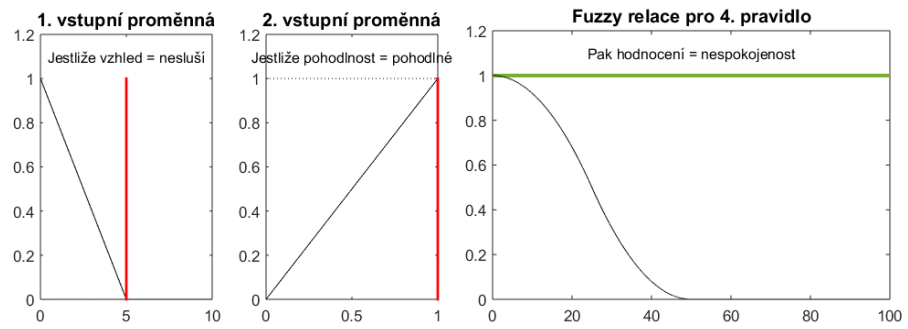


(b) 2. pravidlo

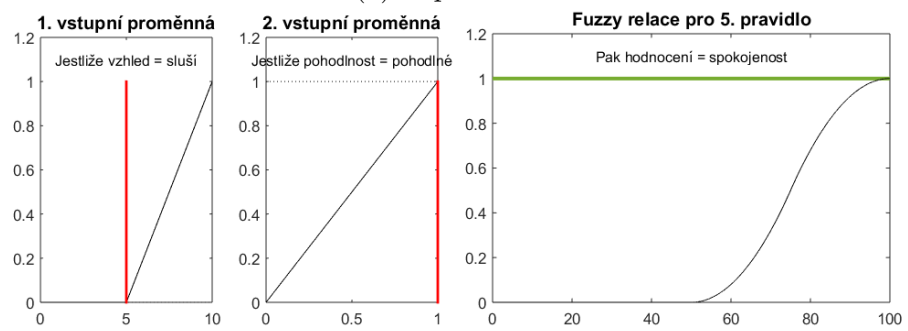


(c) 3. pravidlo

Obrázek 3.46: Novák - fuzzy relace pravidel (1.část)

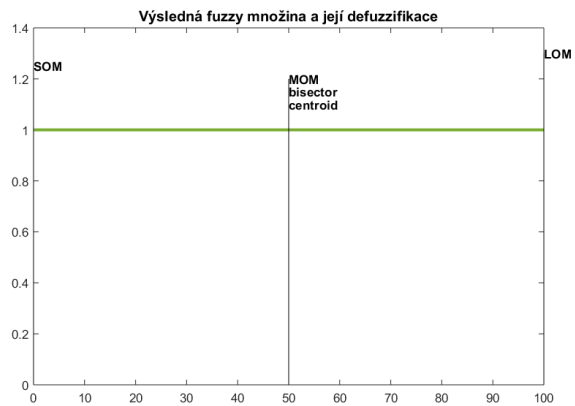


(a) 4. pravidlo



(b) 5. pravidlo

Obrázek 3.47: Novák - fuzzy relace pravidel (2. část)



Obrázek 3.48: Novák - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace

Zobecněný Sugeno a Sugeno & Yasukava

Pokud by tato situace nastala u některé ze Sugenových metod, tak by algoritmus “zhavaroval”. Vyplývá to z výpočtu váženého průměru, kdy ve jmenovateli máme součet stupňů zasažení pravidel a zde bychom tedy dostali dělení nulou. V této situaci pak námi používaná funkce `FIS.m` zobrazí zprávu, že z důvodu nezasažení žádného z pravidel nelze určit výstup, a proces výpočtu se zastaví.

Nemáme-li tedy zajištěno, že báze pravidel pokrývá alespoň částečně všechny reálně možné kombinace vstupních proměnných, mohlo by se pak stát, že žádné pravidlo nebude ani z části zasaženo. V takovém případě by metody vycházející ze Sugenova přístupu ihned selhaly, neboť by výpočet vedl na dělení nulou. Na základě Mamdaniho přístupu by výsledkem byla prázdná množina a tedy žádná hodnota výstupní proměnné by nebyla možná, zato dle Novákova přístupu by v tomto případě bylo zcela možné cokoliv.

Menší nevýhodou u Novákova přístupu je to, že bychom po použití defuzzifikace nebyli na nastalou situaci nijak upozorněni. Výstupem by pak byla průměrná hodnota, tj. 50 %, případně 0 % pro SOM či 100 % pro LOM.

Je dobré ještě zmínit, že u Mamdaniho přístupu nám funkce `FIS.m` v tomto případě zobrazí zprávu, že výstupem je prázdná množina, a proces výpočtu ukončí. Pokud bychom však pro modelování použili například Fuzzy Logic Designer v MATLABu, nebyli bychom na skutečnost, že žádné pravidlo nebylo zasaženo, nijak upozorněni a jako výsledek defuzzifikace prázdné množiny bychom dostali průměrnou hodnotu.

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo seznámit čtenáře s problematikou fuzzy inferenčních systémů a popsat vybrané metody představené v odborné literatuře, konkrétně Mamdaniho metodu, Novákovu metodu, metodu zobecněného Sugena a metodu Sugena a Yasukawy.

Než jsme se však zaměřili na samotné fuzzy inferenční systémy, seznámili jsme se v první kapitole nejprve se základy teorie fuzzy množin. V této kapitole byla představena definice fuzzy množiny a základní pojmy a operace, jejichž znalost byla potřebná k porozumění dalšímu textu. V závěru této části pak byla zadefinována jazyková proměnná, neboli proměnná, jejíž hodnoty jsou vyjádřeny slovně a jejich matematický význam je modelován pomocí fuzzy množin.

Druhá kapitola se již věnovala teoretickému představení fuzzy inferenčních systémů a jednotlivých metod. Ukázali jsme si, že fuzzy inferenční systémy nám umožňují modelovat vztahy mezi jazykovými proměnnými prostřednictvím expertně stanovených slovních pravidel typu “JESTLIŽE-PAK” a na základě fuzzy logiky následně pro zadané hodnoty vstupních proměnných vypočítat hodnotu výstupní proměnné. Způsob vyvození této výsledné hodnoty přitom závisí na zvoleném přístupu k fuzzy inferenci, tj. na použité metodě.

Ve třetí kapitole jsme si následně na jednoduchých příkladech ukázali, jak jednotlivé inferenční algoritmy postupují v praxi. Již u prvního příkladu jsme mohli vidět, že při sestavování fuzzy inferenčních systémů je třeba nejen vybrat vhodný mechanismus a způsob defuzzifikace, ale primárně je důležité mít vhodně nadefinované proměnné a bázi pravidel. Zjistili jsme, že aby výsledná funkce modelující závislost výstupní proměnné na proměnných vstupních měla plynulejší

průběh a neobsahovala schodovité skoky, je lepší mít významy hodnot vstupních proměnných definované pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel.

K tomu, aby navíc výsledné hodnoty byly méně neurčité, může dopomoci zjemnění jazykových škál. Zde je však třeba si uvědomit, že s přidáváním hodnot roste také složitost systému. Pak totiž může být obtížnější nadefinovat jednotlivé významy a roste počet pravidel.

Následně jsme si také ukázali, že máme-li v bázi protichůdná pravidla, poradí si s tím pouze Mamdaniho algoritmus, avšak i u něj je potřeba dát si velký pozor na použitou metodu defuzzifikace.

V poslední části práce pak bylo demonstrováno, jak by se metody zachovaly v případě, kdy by báze pravidel byla špatně sestavená a nastalo by pozorování, pro které by v ní nebylo pravidlo. Zde jsme mohli vidět, že například pro metody založené na Sugenově přístupu by výpočet úplně selhal, neboť by vedl na dělení nulou.

Přínos této práce spatřuji nejen v popisu a porovnání jednotlivých metod, ale také ve vytvořené funkci, která umožňuje sestavit si v programu MATLAB vlastní fuzzy inferenční systémy a vizualizovat si jejich proces pro všechny čtyři uvedené metody.

Osobně shledávám toto téma jako velmi zajímavé a během psaní práce, zejména tedy při samotném modelování vlastních příkladů, jsem se přesvědčila o tom, že jsou fuzzy inferenční systémy díky své srozumitelnosti a poměrně snadnému sestavení velmi užitečné a mohou nám i v každodenním životě usnadnit řadu rozhodovacích a řídicích procesů.

Literatura

- [1] Bělohávek, R., Dauben, J.W., Klir, G.J.: *Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective*. Oxford University Press. New York, 2017. ISBN 9780190200015.
- [2] Klir, G. J., Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall PTR, New Jersey 1995. ISBN 0-13-101171-5
- [3] Mamdani, E. H., Assilian S.: *An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller*. Int. J. Man-Machine Studies, Vol. 7, 1975, pp. 1-13.
- [4] MathWorks. [online] Defuzzification Methods - MATLAB & Simulink [cit. 2022-03-28] dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/fuzzy/defuzzification-methods.html>
- [5] MathWorks. [online] What Is Fuzzy Logic? - MATLAB & Simulink [cit. 2022-04-08] dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/fuzzy/fuzzy-inference-process.html>
- [6] MathWorks. [online] What Is Fuzzy Logic? - MATLAB & Simulink [cit. 2022-04-08] dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/fuzzy/what-is-fuzzy-logic.html>
- [7] Novák, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. SNTL. Praha, 1990. ISBN 80-03-00325-3.
- [8] Novák, V.: *Základy fuzzy modelování*. 1. vydání. BEN. Praha, 2000. ISBN 80-7300-009-1.
- [9] Novák, V., Lehmke, S.: *Logical structure of fuzzy IF-THEN rules*. Fuzzy Sets and Systems 157, 2006, pp. 2003-2029.
- [10] Sugeno, M., Yasukawa, T.: *A Fuzzy-Logic-Based Approach to Qualitative Modeling*. IEEE Transactions on fuzzy systems 1.1, 1993, pp. 7-31.
- [11] Talašová, J.: *Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení a rozhodování*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. ISBN 80-244-0614-4.

- [12] Zadeh, L. A.: *Fuzzy Sets*. Information and Control 8, 1965, pp. 338-353
- [13] Zadeh, L. A.: *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I*. Information Sciences 8, 1975, pp. 199-249.
- [14] Zadeh, L. A.: *Fuzzy logic-a personal perspective*. Fuzzy Sets and Systems 281, 2015, pp. 4-20.

Seznam obrázků

1.1	Příklad funkce příslušnosti	10
1.2	Nosič, jádro, α -řez a výška fuzzy množiny	12
1.3	Normální vs. subnormální fuzzy množina	12
1.4	Průnik a sjednocení dle Zadeha	14
1.5	Doplňěk dle Zadeha	14
1.6	Průnik a sjednocení dle Lukasiewicze	15
1.7	Reziduum fuzzy množin A a B	15
1.8	Reálné číslo a uzavřený interval jako fuzzy množiny	18
1.9	Speciální případy lineárních fuzzy čísel	21
1.10	Kvadratické fuzzy číslo	22
3.1	Vstupní a výstupní proměnné	43
3.2	Zásahy levých stran pravidel	44
3.3	Mamdani - fuzzy relace pravidel	45
3.4	Mamdani - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	46
3.5	Novák - fuzzy relace pravidel	48
3.6	Novák - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	48
3.7	Zobecněný Sugeno - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	49
3.8	Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro jednotlivé metody defuzzifikace pro Mamdaniho a Novákův přístup	51
3.9	Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro jednotlivé metody defuzzifikace pro Sugenyovy modifikace	52
3.10	Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením po protažení krajních hodnot pro Mamdaniho a Novákův algoritmus	53
3.11	Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením po protažení krajních hodnot pro Sugenyovy modifikace	54
3.12	Vstupní proměnná modelovaná pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel	55
3.13	Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Mamdaniho a Nováka	55
3.14	Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Sugenyovy modifikace	56
3.15	Výsledné fuzzy množiny a jejich defuzzifikace	57
3.16	Nové vstupní a výstupní proměnné	59

3.17 Mamdani - fuzzy relace pravidel (1. část)	60
3.18 Mamdani - fuzzy relace pravidel (2. část)	61
3.19 Mamdani - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	61
3.20 Novák - fuzzy relace pravidel (1. část)	62
3.21 Novák - fuzzy relace pravidel (2. část)	63
3.22 Novák - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	63
3.23 Zobecněný Sugeno - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	64
3.24 Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Mamdaniho a Nováka	65
3.25 Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Sugenyovy modifikace	65
3.26 Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Novákův algoritmus	66
3.27 Výsledné fuzzy množiny z Novákova algoritmu pro vybrané hodnoty	67
3.28 Funkce vyjadřující vztah mezi váhou a doporučením pro Novákův algoritmus při použití Lukasiewiczova průniku	68
3.29 Výsledné fuzzy množiny z Novákova algoritmu pro vybrané hodnoty při použití Lukasiewiczova průniku	68
3.30 Vstupní a výstupní proměnné	69
3.31 Mamdani - fuzzy relace pravidel	71
3.32 Mamdani - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	72
3.33 Novák - fuzzy relace pravidel	73
3.34 Zobecněný Sugeno - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	74
3.35 Vstupní proměnné	76
3.36 Výstupní proměnná	77
3.37 Mamdani - fuzzy relace pravidel (1.část)	79
3.38 Mamdani - fuzzy relace pravidel (2. část)	80
3.39 Mamdani - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	81
3.40 Novák - fuzzy relace pravidel (1.část)	82
3.41 Novák - fuzzy relace pravidel (2. část)	83
3.42 Novák - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	84
3.43 Zobecněný Sugeno - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	85
3.44 Mamdani - fuzzy relace pravidel (1.část)	87
3.45 Mamdani - fuzzy relace pravidel (2. část)	88
3.46 Novák - fuzzy relace pravidel (1.část)	89
3.47 Novák - fuzzy relace pravidel (2. část)	90
3.48 Novák - výsledná fuzzy množina a její defuzzifikace	90

Seznam tabulek

3.1	Definování hodnot proměnné <i>váha</i>	42
3.2	Definování hodnot proměnné <i>doporučení</i>	43
3.3	Báze pravidel	43
3.4	Míry zasažení jednotlivých pravidel	44
3.5	Souhrn výsledných hodnot	50
3.6	Protážení krajních hodnot proměnné <i>doporučení</i>	53
3.7	Definování hodnot proměnné <i>váha</i> pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel	54
3.8	Souhrn výsledných hodnot	56
3.9	Definování nových hodnot proměnné <i>váha</i>	58
3.10	Definování nových hodnot proměnné <i>doporučení</i>	58
3.11	Nová báze pravidel	59
3.12	Míry zasažení jednotlivých pravidel	59
3.13	Souhrn nových výsledných hodnot	64
3.14	Míry zasažení pravidel pro vybraná pozorování	66
3.15	Báze pravidel	70
3.16	Míry zasažení jednotlivých pravidel	70
3.17	Definování hodnot vstupních proměnných	76
3.18	Definování hodnot výstupní proměnné	76
3.19	Báze pravidel	77
3.20	Hodnoty pozorování pro jednotlivé proměnné	78
3.21	Míry zasažení jednotlivých pravidel	78
3.22	Souhrn všech výsledných hodnot defuzzifikace	85
3.23	Míry zasažení jednotlivých pravidel	86