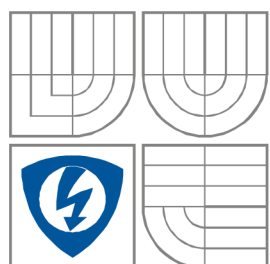


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V
BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A
KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLÓGIÍ

ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND
COMMUNICATION

DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

MAPOVÁNÍ A HOMOGENIZACE ZÁKLADNÍHO MAGNETICKÉHO POLE TOMOGRAFU

MAPPING AND HOMOGENITY CORRECTION OF BASIC MAGNETIC FIELD IN TOMOGRAPH

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S PROJECT

AUTOR PRÁCE

DALIBOR ŽŮREK

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE

Ing. MICHAL HADINEC

SUPERVISOR

BRNO, 2010

ABSTRAKT

Tato práce se zaměřuje na rešerši dostupné literatury v oblasti mapování magnetického pole a na rozklad tohoto pole na gradienty. Zpočátku jde o seznámení se základními pojmy v oblasti magnetické rezonance, které jsou důležité pro pochopení dané problematiky a pro seznámení s principy měření magnetických polí na vybraném povrchu. Dále jsou zde popsány dvě základní měřicí techniky magnetické rezonance a je proveden rozbor způsobů rozkladu magnetického pole na gradienty pomocí Taylorovy řady a sférických funkcí. V druhé části práce je popsán způsob získání naměřených hodnot v tomografu, které jsou spolu s předešlým rozkladem pole následně využity k popisu numerického výpočtu magnetické indukce na povrchu koule. Hodnoty naměřených a vypočítaných hodnot jsou v závěru porovnány.

KLÍČOVÁ SLOVA

Magnetické pole, magnetická rezonance (MR), relaxační doba, FID/echo signál, rozklad pole, aproximační koeficienty, magnetická indukce

ABSTRACT

This work focuses on a search of available literature in the field of mapping the magnetic field and the degradation of the field gradients. Initially on introduction to basic concepts in the field of magnetic resonance imaging, which are important for understanding the problems and become familiar with the principles of measurement of magnetic fields on the selected surface. Furthermore, there are described two basic measurement techniques, magnetic resonance imaging. The work is analyzed the degradation patterns of magnetic field gradients using the Taylor series and spherical functions. The second part describes how to obtain readings in the tomograph, which together with the previous decomposition of the field then used to describe a numerical calculation of magnetic induction on the surface of a sphere. Values measured and calculated values are compared at the end.

KEYWORDS

Magnetic field, magnetic resonance (MR), relaxation time, FID / echo signal, degradation of the field, approximate coefficients, magnetic induction

ŽŮREK, D. *Mapování a homogenizace základního magnetického pole tomografu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií. Ústav radioelektroniky, 2010. 63 s., 0 s. příloh. Bakalářská práce. Vedoucí práce: ing. Michal Hadinec

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Mapování a homogenizace základního magnetického pole tomografu jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne

.....

(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu bakalářské práce ing. Michalu Hadincovi za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne

.....

(podpis autora)

OBSAH

SEZNAM OBRÁZKŮ	i
SEZNAM TABULEK.....	iii
ÚVOD	1
1 TEORETICKÝ ÚVOD	2
1.1 Historie elektromagnetismu	2
1.2 Elektromagnetismus	2
2 POPIS ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE.....	3
2.1 Elektromagnetická síla	3
2.2 Elektromagnetické pole.....	3
2.3 Intenzita elektrického pole, magnetická indukce a Lorentzova síla.....	4
2.4 Maxwellovy rovnice.....	5
3 ÚVOD DO NMR	8
3.1 Magnetická rezonance.....	8
3.1.1 Magnetický moment.....	9
3.1.2 Precesní pohyb a Larmorova frekvence	10
3.1.3 Relaxační mechanismy	12
3.2 Měřicí techniky MR	14
3.2.1 Metoda spinového echa (SE).....	14
3.2.2 Metoda gradientního echa (GE)	15
4. ROZKLAD ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE	17
4.1 Princip korekce nehomogenity.....	17
4.2 Rozklad pole pomocí Taylorova rozvoje	18
4.3 Rozklad pole pomocí sférických funkcí.....	22
5. ZPŮSOBY MĚŘENÍ MAGNETICKÉHO POLE POMOCÍ NMR	26
5.1 Získání naměřených dat	26
6. VÝPOČET A ZPRACOVÁNÍ DAT.....	28
6.1 Výpočet aproximačních koeficientů pomocí Legendrových polynomů	28
6.2 Výpočet hodnot magnetické indukce pomocí Legendrových polynomů	34
6.3 Výpočet aproximačních koeficientů pomocí Taylorovy řady	37
6.4 Výpočet hodnot magnetické indukce pomocí Taylorovy řady	39
7. SROVNÁNÍ NAMĚŘENÝCH A VÝPOČTENÝCH HODNOT	40
7.1 Naměřené hodnoty	40
7.2 Porovnání koeficientů Legendrova a Taylorova rozvoje	41

7.3 Porovnání naměřených a vypočtených hodnot.....	43
7.4 Stupeň aproximace	48
8. ZÁVĚR.....	50
LITERATURA.....	51
SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK	52
Zkratky	52
Symboly a veličiny.....	52

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Elektromagnetická interakce mezi částicemi [5].	3
Obr. 2: Rozložení síly F náboje Q v elektromagnetickém poli [5].	4
Obr. 3: Elektromagnetické pole vytvořené náboji Q [5].	6
Obr. 4: Naznačení spinu a magnetického momentu elementárního náboje [5].	9
Obr. 5: Rotační pohyb vektoru magnetizace [2].	10
Obr. 6: Energetické stavy protonu ve vnějším magnetickém poli, osa x vyjadřuje intenzitu magnetického pole a osa y energii.	11
Obr. 7: Sklopení vektoru magnetizace po aplikaci 90° RF impuls [2].	11
Obr. 8: Průběh návratu vektoru magnetizace M_z po aplikaci 90° RF impulsu do termodynamické rovnováhy.	13
Obr. 9: Časový průběh vektoru magnetizace M_{xy} po aplikaci 90° RF impulsu.	13
Obr. 10: Časové průběhy relaxací T_1 , T_2 a FID signálu [2].	14
Obr. 11: Popsání principu spinového echa [2].	15
Obr. 12: Základní impulzní sekvence pro metodu spinového echa (SE), $G_x = GR$ je tzv. čtecí gradient ve směru x (kmitočtové kódování polohy), $G_y = GP$ je fázový gradient (fázové kódování polohy) a $G_z = GS$ je vymežovací gradient (vymezuje excitovanou vrstvu) [2].	15
Obr. 13: Základní impulzní sekvence metody gradientního echa (GE) [2].	16
Obr. 14: Princip metody gradientní echa [2].	16
Obr. 15: K principu korekce nehomogenity	17
Obr. 16: Teoretické průběhy několika základních gradientů používaných při korekci pole v NMR.	18
Obr. 17: Rozložení složek B_0 a B' magnetického pole.	19
Obr. 18: Bod v magnetickém poli, kde r je vzdálenost bodu od počátku ($r < 1$), θ je polovina vrcholového úhlu a φ je azimut.	24
Obr. 19: Měřicí sonda	26
Obr. 20: Tomograf a detail posuvu, na který se umísťuje sonda.	26
Obr. 21: Rozložení měřených bodů M na povrchu koule	27
Obr. 22: Pole matic L_c a L_d	31
Obr. 23: Mapa naměřených hodnot magnetické indukce.	41
Obr. 24: Mapa naměřených hodnot magnetické indukce.	44
Obr. 25: Mapa hodnot magnetické indukce vypočítaných pomocí Legendrových polynomů.	44
Obr. 26: Mapa hodnot magnetické indukce vypočítaných pomocí Taylorova rozvoje.	45

Obr. 27: Mapa rozdílu mezi naměřenými a vypočítanými hodnotami magnetické indukce ..	46
Obr. 28: 3D model naměřených hodnot	47
Obr. 29: 3D model vypočítaných hodnot	47
Obr. 30: 3D model rozdílových hodnot magnetické indukce	47
Obr. 31: Mapy vypočítaných hodnot magnetické indukce a) a rozdíl mezi naměřenými a vypočítanými hodnotami b) pro $Q=2$	48
Obr. 32: Mapy vypočítaných hodnot magnetické indukce a) a rozdíl mezi naměřenými a vypočítanými hodnotami b) pro $Q=7$	48
Obr. 33: Závislost maximální odchylky mezi naměřenými a vypočtenými hodnotami na stupni aproximace Q	49

SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Členy Taylorova rozvoje v bodě X, Y a Z.	20
Tab. 2: Rozvoj pole s minimálním počtem členů (B_0 je hodnota složky B_z v počátku a pro jednoduchost $B_z=B$) do 3. řádu Taylorova rozvoje.	22
Tab. 3: Tabulka s naměřenými hodnotami magnetické indukce pro 12 bodů ležících na 9 kružnicích v objemu koule.	40
Tab. 4: Tabulka hodnot aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ v [μT] modelu (rozvoje) do 3. stupně a řádu Legendrova polynomu.	42
Tab. 5: Tabulka hodnot aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ v [μT] modelu (rozvoje) do 3. řádu Taylorova rozvoje.	42
Tab. 6: Tabulka podílů hodnot aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ v [μT] Tab. 3 a Tab. 2 modelu (rozvoje) pro $Q=4$	42
Tab. 7: Tabulka s hodnotami magnetické indukce vypočítanými pomocí Taylorova rozvoje i Legendrových polynomů pro 12 bodů ležících na 9 kružnicích v objemu koule.	43
Tab. 8: Tabulka rozdílu mezi hodnotami naměřenými v tomografu a hodnotami vypočítanými.	45

ÚVOD

Následující text je rozdělen do 7 hlavních částí, které seznamují s problematikou magnetické rezonance, s praktickým měřením pomocí NMR tomografu a numerickým výpočtem magnetického pole na povrchu koule. V první části je vysvětlen pojem elektromagnetismus, který je základem pro magnetickou rezonanci. V další části je popsáno elektromagnetické pole, tzn. jeho základní veličiny jako elektromagnetická síla, intenzita elektromagnetického pole, magnetická indukce atd. V této části jsou také uvedeny Maxwellovy rovnice v integrálním i diferenciálním tvaru, které jsou dále použity v rozkladu magnetického pole na gradienty. Ve třetí části je čtenář seznámen se samotnou magnetickou rezonancí a jejími základními parametry, kterými jsou magnetický moment, precesní pohyb a relaxační mechanismy. Toto seznámení je důležité z hlediska získávání hodnot magnetického pole pomocí NMR tomografu. Jsou zde popsány také dvě základní měřicí metody magnetické rezonance a to metoda spinového echa a gradientního echa. Ve čtvrté části je vysvětlen a rozepsán rozklad elektromagnetického pole pomocí Taylorova rozvoje a sférických funkcí, který je důležitý pro následující numerické výpočty. Pátá část seznamuje čtenáře s praktickým měřením v NMR tomografu, kterým jsou získána data potřebná k následnému numerickému výpočtu magnetické indukce na povrchu koule, což je popsáno v šesté kapitole této práce. V závěrečné části jsou srovnány naměřené hodnoty tomografu s hodnotami vypočítanými pomocí programu Matlab, které vycházejí z předcházející teorie.

1 TEORETICKÝ ÚVOD

1.1 Historie elektromagnetismu

Vědy o elektřině a magnetismu se rozvíjely po staletí odděleně až do roku 1820, kdy mezi nimi Hans Christian Oersted našel spojitost. V tu dobu zjistil, že elektrický proud protékající vodičem vychyluje střílku kompasu. Elektromagnetismus dále rozvíjela spousta vědců, mezi které patřil i Michael Faraday. Až v polovině 19. století shrnul všechny předešlé poznatky do jednotné teorie James Clerk Maxwell a objevil elektromagnetickou povahu světla. V klasickém elektromagnetismu se elektromagnetické pole řídí sadou rovnic známých jako Maxwellovy rovnice a elektromagnetická síla je daná Lorentzovým silovým zákonem [6].

Klasický elektromagnetismus je (sadou svých transformačních vztahů) neslučitelný s klasickou mechanikou a podle Maxwellových rovnic je rychlost světla univerzální konstanta, která je příslušným vztahem propojena s elektrickou permitivitou a magnetickou permeabilitou vakua. Problém vyřešil až v roce 1905 Albert Einstein uvedením speciální teorie relativity. Tato teorie nahradila klasickou kinematiku novou teorií kompatibilní s klasickým elektromagnetismem. V této teorii vystupují magnetické a elektrické pole jako formy obecného elektromagnetického pole a mohou na sebe navzájem přecházet [6].

Ve stejném roce však Einstein zpochybnil samotné základy klasického elektromagnetismu. Jeho teorie fotoelektrického jevu předpokládala, že světlo se nešíří jako vlnění elektromagnetického pole, ale může existovat ve formě částic, diskrétních kvant, později nazývaných fotony. Einsteinova teorie fotoelektrického jevu byla v souladu s představami, které se objevily v navrženém řešení tzv. ultrafialové katastrofy, které představil Max Planck v roce 1900. Spojení Einsteinovy a Planckovy teorie následně vedlo ke kvantové mechanice, která byla formulována v roce 1925. Na jejím základě byla kolem roku 1940 dokončena nová kvantově mechanická teorie elektromagnetismu; tato teorie se označuje jako kvantová elektrodynamika („QED“) a je jednou z nejpřesnějších fyzikálních teorií.

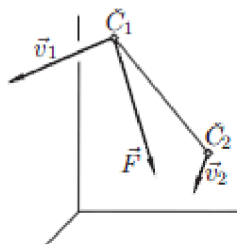
1.2 Elektromagnetismus

Elektromagnetismem se může rozumět soubor fyzikálních jevů, ve kterém se projevuje vzájemná souvislost mezi elektřinou a magnetismem. Dále se elektromagnetismem může myslet taky oblast fyziky, která tyto jevy zkoumá, případně přímo teorie elektromagnetického pole, která elektromagnetické jevy vysvětluje. Elektromagnetismus je projevem jedné ze čtyř základních interakcí a to elektromagnetické interakce. Mezi další interakce patří gravitace, která má největší dosah a působí na všechny látky a energie, dále pak slabá interakce a silná interakce.

2 POPIS ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

2.1 Elektromagnetická síla

Tělesa se skládají z částic, jejichž elektromagnetické vlastnosti podmiňují elektromagnetické děje a elektromagnetické vlastnosti těchto těles. Na tyto částice působí v okolí jiných podobných částic, kromě síly gravitační, ještě síly elektromagnetické, které jsou projevem elektromagnetické interakce. Skoro všechny interakce mezi atomy jsou způsobeny elektromagnetickou silou působící na elektricky nabitě protony a elektrony v atomech. Sem patří i síla, kterou libovolné pevné těleso klade odpor proti vniknutí jiného tělesa (a kterou člověk vnímá dotykem), ale také všechny formy chemických jevů, které vznikají z interakcí mezi elektronovými orbitaly. Síla \mathbf{F} , která působí na částici \check{C}_1 , pohybující se rychlostí \mathbf{v}_1 (Obr. 1) se vysvětluje tím, že na ni působí elektromagnetické pole částice \check{C}_2 . Částice s těmito vlastnostmi jsou elektricky nabitě a nesou tzv. elektrický náboj Q , jednotka je $1\text{coulomb} = 1C$ [5].



Obr. 1: Elektromagnetická interakce mezi částicemi [5].

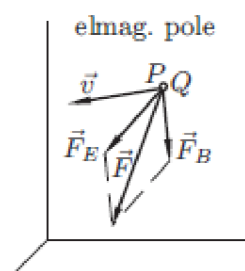
2.2 Elektromagnetické pole

Elektromagnetické pole vzniká pohybujícími se nabitými částicemi. Neprojevuje se jen svými silovými účinky na elektricky nabitě částice, ale má i jiné vlastnosti:

- hybnost (fotonové rakety)
- energii (ohřev Země Sluncem)

Klasicky se toto pole popisuje složením dvou složek: elektrické a magnetické. Elektrická složka působí na elektricky nabitě objekty – částice, tělesa – silou, nezávislou na jejich pohybu. Magnetická složka se zase působí na nabitě objekty, pouze když se pohybují. Na nabitou částici v klidu magnetické pole nepůsobí [5][6]. Výsledná síla \mathbf{F} , působící v libovolném bodě P na nabitou částici, pohybující se rychlostí \mathbf{v} v elektromagnetickém poli (Obr. 2), je rovna

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m . \quad (2.1)$$



Obr. 2: Rozložení síly \mathbf{F} náboje Q v elektromagnetickém poli [5].

Obě složky (elektrická i magnetická) se v prostoru překrývají a jsou na sobě závislé: změna jedné z nich způsobí změnu druhé. Ve zvláštních případech lze však vytvořit elektromagnetické pole obsahující jen elektrickou složku (tzv. elektrostatické pole), nebo jen magnetickou složku (tzv. magnetostatické pole). Elektrostatické pole je buzeno (v dané inerciální s.s.) náboji v klidu. Toto pole působí na elektricky nabitá tělesa silou nezávislou na jejich pohybu, ale nepůsobí na permanentní magnety ani proudovodiče (nejsou-li elektricky nabitý). Magnetostatické pole je buzeno klidnými permanentními magnety nebo proudovodiči se stálým proudem. Působí na permanentní magnety a na pohybující se elektricky nabitě částice (elektrické proudy). Elektrostatické i magnetostatické pole jsou stálé v čase [5].

Elektromagnetické pole, vytvořené elektricky nabitými částicemi, které jsou vůči sobě v klidu, se nazývá elektrostatické. Veličina, která je přímo úměrná velikosti síly, která na ni působí v tomto elektrostatickém poli, se nazývá elektrický náboj částice Q . Tyto částice mohou být nabitě kladně (protony), záporně (elektrony) anebo na ně elektrostatické pole nepůsobí, potom hovoříme o tzv. neutronech.

Náboj Q libovolně kladně nabitě částice je dán vztahem

$$\frac{Q}{e} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{F}_p}, \quad (2.2)$$

kde \mathbf{F}_p je velikost síly působící v libovolně zvoleném bodě P elektrostatického pole na proton, \mathbf{F} velikost síly působící v tomtéž bodě na uvažovanou částici \check{C} a e je elementární náboj o velikosti $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Náboj tělesa nezávisí na jeho rychlosti, s rychlostí se nemění, je invariantní. Tento výsledek se nazývá zákon invariance elektrického náboje [5].

2.3 Intenzita elektrického pole, magnetická indukce a Lorentzova síla

Kromě toho, že pohybem elektrického náboje vzniká magnetické pole, také změna magnetického pole generuje pole elektrické. Mohutnost elektrického pole se z hlediska jeho silových účinků na elektrické náboje charakterizuje veličinou \mathbf{E} , zvanou intenzita elektrického pole. Tato je v bodě P definována vztahem (definice vektoru \mathbf{E}):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad [\text{volt.metr}^{-1} = \text{newton.coulomb}^{-1}], \quad (2.3)$$

kde Q je bodový náboj v klidu nebo v pohybu, na který působí v bodě P elektrická síla \mathbf{F} . Pro elektrické pole buzené libovolným počtem zdrojů platí

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n, \quad (2.4)$$

což je tzv. zákon superpozice elektrických polí.

U magnetického pole charakterizuje jeho vlastnosti vektorová veličina zvaná magnetická indukce \mathbf{B} . Tato je v bodě P definována vztahem (definice vektoru \mathbf{B}):

$$\mathbf{B} = \frac{|\mathbf{F}_m|}{|Q| \cdot |\mathbf{v}_1|} \quad [T = N/(C \cdot ms^{-1})], \quad (2.5)$$

kde \mathbf{F}_m je magnetická síla, která působí na bodový náboj Q , letící magnetickým polem rychlostí \mathbf{v}_1 . Tato síla se nazývá Lorentzova síla \mathbf{F}_m (nebo \mathbf{F}_L). Je-li magnetické pole vytvořeno n zdroji Z_1, Z_2, \dots, Z_n a je-li \mathbf{B}_k magnetická indukce pole vytvořeného k -tým zdrojem, pak je magnetická indukce výsledného pole dána vztahem

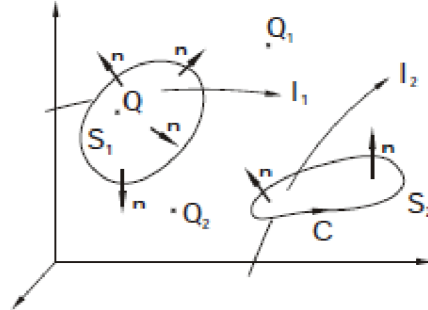
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_n. \quad (2.6)$$

Tento vztah vyjadřuje zákon superpozice magnetických polí.

2.4 Maxwellovy rovnice

J. C. Maxwell ukázal, že všechny zákony a výsledky teorie elektromagnetického pole lze odvodit jako důsledek několika základních obecných zákonů. Tyto obecné zákony, společně se všemi teoretickými důsledky z nich plynoucími, tvoří tzv. Maxwellovu teorii elektromagnetického pole. Vztahy, pomocí kterých je Maxwellova teorie matematicky formulována, se nazývají Maxwellovy rovnice. Tyto rovnice používáme ve dvou základních tvarech - diferenciálním (pro polní veličiny ve tvaru hustot, tedy diferenciální polní veličiny) a integrálním nebo také bilančním tvaru pro veličiny integrální. Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru mají platnost omezenou pouze na oblast, v níž jsou materiálové parametry ϵ, μ, γ konstantní, nebo kde se tyto parametry spojitě mění. Neplatí tedy na ostrém rozhraní dvou prostředí (např. slída - vzduch, vodič - vzduch apod.) [5].

Nechť elektromagnetické pole, vytvořené náboji Q a proudy I v libovolném prostředí, je v inerciální vztažné soustavě O_{xyz} charakterizováno vektory $\mathbf{E}(x, y, z; t)$, \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} . Nechť S_1 je libovolná uzavřená plocha orientovaná vnější normálou a necht' C je libovolná pevná uzavřená orientovaná křivka (Obr. 3).



Obr. 3: Elektromagnetické pole vytvořené náboji Q [5].

Potom můžeme definovat 4 základní Maxwellovy rovnice takto:

První Maxwellovu rovnici také nazýváme Ampérův průtokový zákon nebo zákon celkového proudu.

$$\text{Platí: } \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\psi}{dt} + \sum I, \quad (2.7)$$

kde ψ je elektrický indukční tok plochou S_2 , která má křivku C za okraj. Integrálem na levé straně je definováno magnetomotorické napětí. Součet $\sum I$ je algebraický součet proudu, které procházejí plochou S_2 . Fyzikální interpretace: Cirkulace vektoru intenzity magnetického pole se rovná celkovému proudu, který teče plochou S , jejíž okraj tvoří cirkulační dráha C [5].

Druhá Maxwellova rovnice se nazývá zákon elektromagnetické indukce nebo taky indukční zákon.

$$\text{Platí: } \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\phi}{dt}, \quad (2.8)$$

kde ϕ je magnetický indukční tok křivkou C . Integrálem na levé straně je definováno indukované elektromotorické napětí ε_i . Fyzikální interpretace: Cirkulace vektoru intenzity elektrického pole se rovná záporně vzaté časové změně magnetického toku, tekoucího plochou S_2 , jejíž okraj tvoří uzavřená křivka C [5].

Třetí Maxwellovu rovnici se nejčastěji používá ve tvaru, který je znám pod názvem Gaussova věta elektrostatiky:

$$\text{Platí: } \iint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{n} = \sum Q, \quad (2.9)$$

kde $\sum Q$ je algebraický součet „pravých“ (tj. nikoliv polarizací vzniklých) nábojů uvnitř plochy S_1 . Fyzikální interpretace: Elektrický indukční tok uzavřenou (obalovou) plochou se rovná volnému náboji uvnitř této plochy [5].

Čtvrtá Maxwellova rovnice je známá taky pod názvem Gaussův zákon pro magnetické pole.

$$\text{Platí: } \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2.10)$$

Fyzikální interpretace: Magnetický indukční tok uzavřenou (obalovou) plochou se rovná nule.

Výše uvedené vztahy jsou v integrálním tvaru. Z tohoto tvaru lze užitím vektorové analýzy získat rovnice v diferenciálním tvaru, které vypadají následovně:

I. Maxwellova rovnice

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.11)$$

Magnetické pole intenzity H v oblasti s proudy je vírové a je průvodním jevem elektrického proudu. Tento proud může být vedený s hustotou J_0 nebo posuvný s hustotou $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Mimo oblast s proudy je $\text{rot}\mathbf{H} = 0$ a pole je nevírové [7].

II. Maxwellova rovnice

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

Časovou změnou magnetického pole vzniká vírové elektrické pole. Vztah $\partial \mathbf{B} / \partial t$ jako posuvný magnetický proud. Tyto první dvě Maxwellovy rovnice jsou navzájem nezávislé [7].

III. Maxwellova rovnice

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_0 - \text{div}\mathbf{P}) \text{ nebo } \text{div}\vec{D} = \rho \quad (2.13)$$

Tento vztah říká, že existuje i elektrické pole zřídlové, jako průvodní jev elektrického náboje [7].

IV. Maxwellova rovnice

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (2.14)$$

Tento vztah říká, že magnetické pole B je nezřídlové.

3 ÚVOD DO NMR

3.1 Magnetická rezonance

Magnetickou rezonancí, jinak nazývanou také nukleární magnetickou rezonancí NMR, se rozumí fyzikální jev, při kterém reagují jádra atomů určitých látek ve statickém magnetickém poli (homogenní magnetické pole \mathbf{B}_0) na vlnění elektromagnetické vlnění. Bez působení vnějšího magnetického pole je orientace os jednotlivých protonů v jádře zcela náhodná. Podnět k vybuzení rezonance dodává generovaný radiofrekvenční signál (RF) z vysílače na vhodné frekvenci.

Tento signál excituje rezonující jádra (protony) atomů, které vykazují spin (rotační pohyb částice), do vyššího energetického stavu (opačná orientace nežli \mathbf{B}_0). Tento stav se projevuje precesním pohybem spinujících protonů, které byly vybuzeny do rezonance. Pokud jsou magnetické dipóly orientovány ve směru vnějšího magnetického pole, jádra atomů s jaderným spinem přecházejí do nižšího energetického stavu.

Jádra atomů tedy mění směr vektorů magnetizace [3]. Jakmile přestane působit budící RF signál, tak se vlivem relaxačních mechanismů, popsaných relaxačními časy T1 resp. T2, vracejí jádra atomů do stavu termodynamické rovnováhy. Současně se emituje rotující, rychle slábnoucí signál odezvy NMR, jinak zvaný jako FID/echo signál resp. volně indukovaný signál, který lze měřit. Velikost tohoto signálu je úměrná počtu rezonujících jader vybuzených atomů.

Výše popsaný způsob uvede do rezonance celý objem snímané scény umístěné v homogenním magnetickém poli \mathbf{B}_0 a v poli RF cívek. Aby byla rezonance vybuzena pouze ve zvolené tomografické rovině (v ose z), využívá se gradientní magnetické pole. Do vyššího energetického stavu budou RF impulsem vybuzeny pouze elektrony, které jsou na vhodné pozici ve směru- z gradientního pole G_z . Spektrum FID/echo signálu lze získat pomocí dalších gradientních magnetických polí (G_x , G_y), orientovaných ve správném směru roviny (x , y). Toto spektrum reprezentuje jednu projekci ve vybraném směru. Další projekce lze získat natočením gradientního magnetického pole ve vybraném směru [3].

K vysvětlení jevu MR se používají dva modely: kvantově mechanický a makroskopický fyzikální (Blochův) model. Z pohledu kvantové fyziky je NMR vysvětlována jako rozštěpení energetických hladin atomového jádra vlivem okolního magnetického pole. Změnou magnetického pole se emitují fotony s energií, která je dána právě rozdílem těchto energetických hladin. Makroskopický fyzikální model už umožňuje objasnit vznik vektoru magnetizace \mathbf{M}_z , jeho libovolnou orientaci a vytvoření FID/echo signálu, což je pro popis NMR lepší. Magnetický moment určité látky daný vektorem magnetizace, je určen vektorovým součtem magnetických momentů všech jader [1][3]. Bez působení magnetického pole na jádra je vektor magnetického pole nulový, ale bude-li na jádra působit silné vnější homogenní magnetické pole, vektory magnetizace \mathbf{M} se orientují ve směru indukce \mathbf{B}_0 tohoto pole a nastane ustálený stav.

3.1.1 Magnetický moment

Základem MR je tedy existence nenulového jaderného magnetického momentu. Ten vzniká v důsledku nesymetrického rozložení náboje jádra a spinu [3]. Jinak řečeno: mechanickým momentem hybnosti (rotačním impulzem) – tzv. spinem p (\mathbf{J}) elementárního náboje (protonu) $+e$ je generován magnetický moment μ (\mathbf{m}) ve směru rotace (Obr. 4). Platí

$$\mu = \gamma \cdot p, \quad (3.1)$$

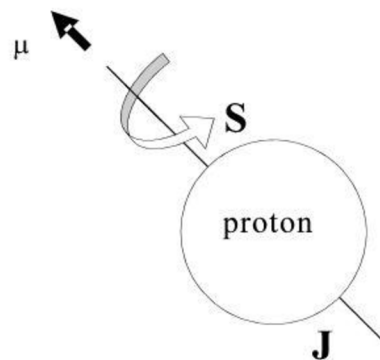
kde γ je gyromagnetický poměr, pro který platí

$$\gamma = \frac{ge}{2m_p}. \quad (3.2)$$

Z pohledu kvantové teorie potom platí

$$p_B = m\hbar \text{ a } \mu_B = m \cdot g \cdot \mu_N, \quad (3.2), (3.3)$$

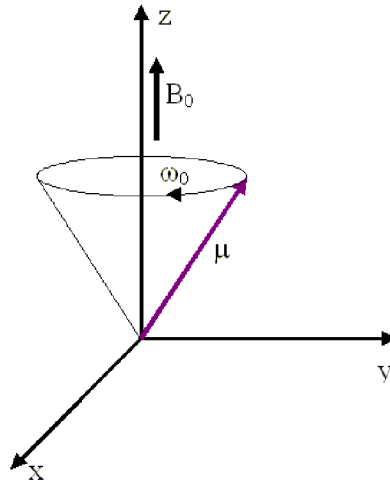
kde m je kvantové číslo rezonující částice, h je Planckova konstanta, \hbar je redukovaná Planckova konstanta $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, g je tzv. Landého faktor, jehož hodnota se zjišťuje experimentálně a μ_N charakterizuje jaderný magneton.



Obr. 4: Naznačení spinu a magnetického momentu elementárního náboje [5].

3.1.2 Precesní pohyb a Larmorova frekvence

Precesní pohyb je charakterizován rotačním pohybem vektoru magnetizace v jednom bodě fixované osy částice vykloněné do osy rotace o nenulový úhel (pohyb po plášti pomyslného kužele) (Obr. 5) [2].



Obr. 5: Rotační pohyb vektoru magnetizace [2].

Frekvence precesního pohybu (tzv. Larmorova frekvence) závisí jednak na intenzitě vnějšího magnetického pole \mathbf{B}_0 a jednak na typu atomového jádra, vyjádřeném gyromagnetickým poměrem [1][2]. Pokud je toto magnetické pole statické např. $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$, dojde k rozštěpení energetických hladin jaderného magnetického momentu (tzv. Zeemanův jev) a vzniknou hladiny s energiemi odpovídajícími jadernému spinovému kvantovému číslu m

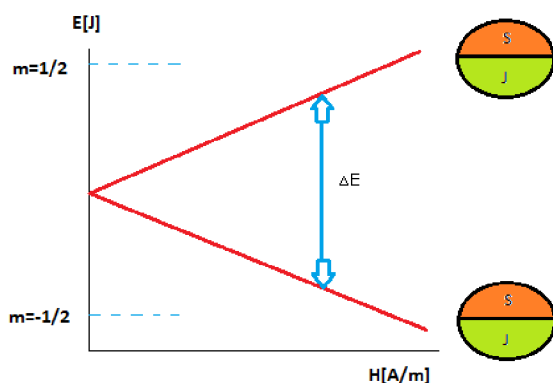
$$E = -\gamma\hbar B_0 m. \quad (3.4)$$

Hodnota m může nabývat hodnot $\pm 1/2$, které udávají tzv. Zeemanovy energetické hladiny (Obr. 6). Tyto hladiny jsou určeny orientací osy rotace protonového jádra vzhledem k vnějšímu magnetickému poli \mathbf{B}_0 . Můžou tedy nastat dva stavy jaderného magnetického momentu:

- nižší energetický stav- při $m=1/2$, osa orientována ve směru \mathbf{B}_0 ;
- vyšší energetický stav- při $m=-1/2$, osa orientována v protisměru \mathbf{B}_0 ;

Rozdíl těchto dvou energetických hladin je dán rovnicí

$$\Delta E = \hbar \cdot \gamma \cdot B_0 = \hbar \cdot \omega_0 \quad (3.5)$$



Obr. 6: Energetické stavy protonu ve vnějším magnetickém poli, osa x vyjadřuje intenzitu magnetického pole a osa y energii.

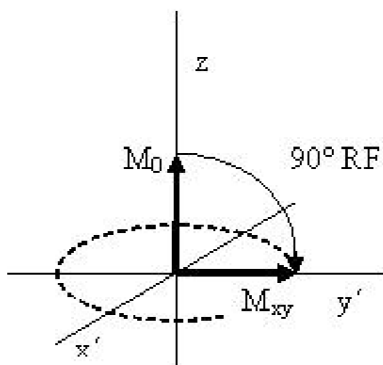
Přechod protonu na jinou energetickou hladinu je tedy možný dodáním nebo emisí příslušného kvanta energie. Při přechodu na vyšší energetickou hladinu je tato energie dodávána pomocí RF signálu. Obsazování energetických hladin určuje Boltzmanův zákon.

Porovnáním rovnic (3.4) a (3.5) dostaneme vztah

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \gamma \cdot B_0 \quad \text{nebo} \quad \omega_0 = \gamma \cdot B_0, \quad (3.6)$$

který je nazván Larmorovou podmínkou.

Pokud při $M_z = M_0$ (stav termodynamické rovnováhy) aplikujeme 90° RF impuls, který bude mít kmitočet co nejbližší Larmorově kmitočtu f_0 , překloupí se vektor magnetizace \mathbf{M}_z do roviny (x, y) (Obr. 7). Tím pádem vymizí z-složka a vektor magnetizace $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_{xy}$. Pokud umístíme do této roviny (x, y) snímací cívku, indukuje se v ní střídavý proud na Larmorově frekvenci ω_0 , který odpovídá velikosti \mathbf{M}_{xy} [3]. Přijímaný signál se nazývá zkratkou FID (Free Induction Decay), signál volné precese nebo také volně indukovaný signál a má exponenciálně klesající průběh.



Obr. 7: Sklopení vektoru magnetizace po aplikaci 90° RF impuls [2].

3.1.3 Relaxační mechanismy

Vektorovým součtem všech magnetických momentů, které jsou obsaženy v celém objemu zkoumaného vzorku, je určena jaderná magnetizace \mathbf{M} . Závisí na vnějším magnetickém poli tak, že při $\mathbf{B}_0=0$ je $\mathbf{M}=0$. Pokud je vnější magnetické pole přítomné, vzniká na základě Boltzmanova zákona nenulová magnetizace \mathbf{M}_0 ve směru \mathbf{B}_0 daná vztahem

$$\mathbf{M}_0 = \frac{\rho_p \gamma^2 \hbar^2}{4kT} \mathbf{B}_0, \quad (3.7)$$

kde k je Boltzmanova konstanta ($k=1,38 \cdot 10^{-23} \text{W.s/K}$) a T je absolutní teplota. Nadbytek protonů, jejichž magnetické momenty jsou orientovány ve směru magnetického pole \mathbf{B}_0 , určuje směr vektoru magnetizace \mathbf{M}_z

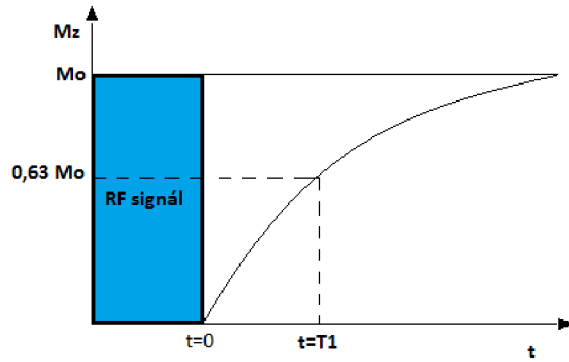
$$M_z = M_0 \cdot c \cdot \frac{B_0 - N_p}{T}, \quad (3.8)$$

kde $c=0,001\text{K/T}$ a je to konstanta pro protony, N_p reprezentuje celkový počet protonů. Tato rovnice platí pro kvantový model MR.

Aby se dosáhlo stavu termodynamické rovnováhy ($M_z = M_0$ a $M_{xy} = 0$), existují dva typy interakcí: spin-mřížková a spin-spinová interakce. Pro tyto interakce existují tzv. relaxační časy T_1 a T_2 , za které se jádra po ukončení působení vř magnetického pole vrátí do svého základního stavu [1]. Pro makroskopický (Blochův) model platí vztah

$$M_z(t) = M_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad (3.9)$$

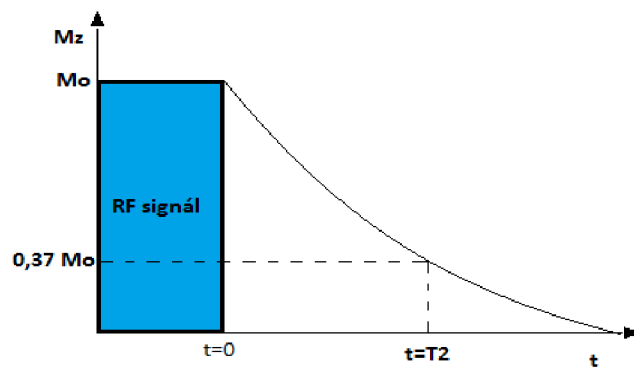
kde konstanta T_1 vyjadřuje tzv. podélnou relaxační dobu [1]. Tato relaxace je způsobena překlopením spinujících protonů z antiparalelní do paralelní orientace. Rychlost relaxace určuje velikost relaxačního času T_1 . Průběh návratu vektoru magnetizace \mathbf{M}_z zpět do směru osy z představuje T_1 relaxační křivka [4](Obr. 8). Spin-mřížkový relaxační čas T_1 udává čas, při kterém dosáhne vektor magnetizace \mathbf{M}_z na 63% své původní velikosti.



Obr. 8: Průběh návratu vektoru magnetizace \mathbf{M}_z po aplikaci 90°RF impulzu do termodynamické rovnováhy.

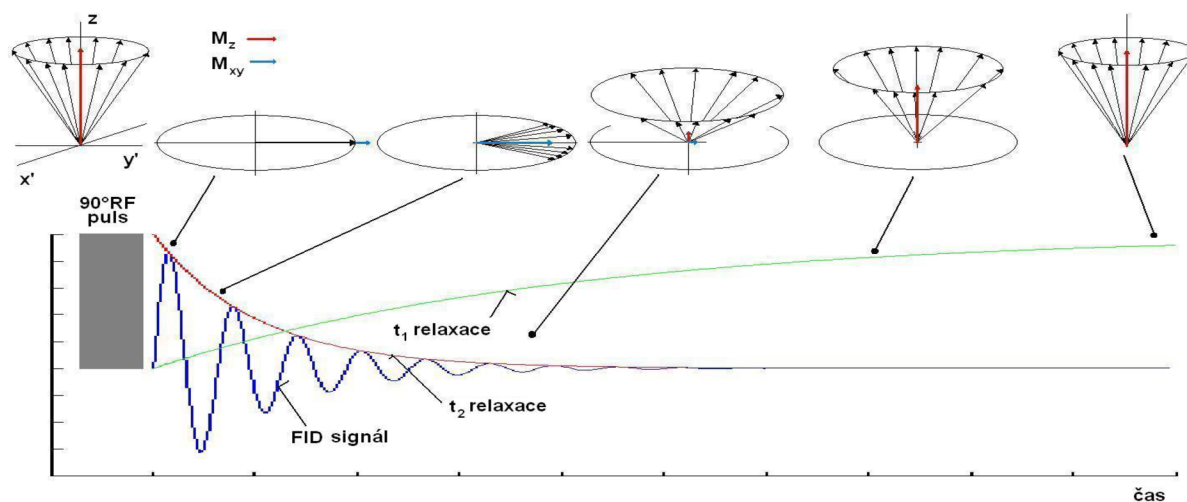
Spin-spinová interakce vzniká v důsledku nehomogenity statického B_0 nebo pomalu se měnících nehomogenit pole vnitřního působením polí okolních jader a výměnou spinů mezi jádry. Tyto dvě skutečnosti způsobují, že sfázované elementární dipóly, které vznikly při aplikaci 90°RF pulzu, ztrácejí svou fázovou koherenci a vzniká tzv. příčná relaxace [4]. Časová konstanta, která popisuje návrat vektoru příčné magnetizace \mathbf{M}_{xy} do rovnováhy ($M_{xy}=0$), je tzv. spin-spinový, příčný relaxační čas T_2 . Tento čas určuje dobu, kdy poklesne vektor magnetizace \mathbf{M}_{xy} na hodnotu 35% (Obr. 9). Velikost T_2 určuje rychlost relaxace a platí

$$M_{xy}(t) = M_0 \cdot e^{\frac{-t}{T_2}}. \quad (3.10)$$



Obr. 9: Časový průběh vektoru magnetizace \mathbf{M}_{xy} po aplikaci 90°RF impulzu.

Kromě relaxační doby T_2 byla zavedena taky efektivní relaxační doba T_2^* , která hodnotí vliv vnitřních a vnějších nehomogenit. Obě relaxace probíhají současně, T_2 může probíhat i bez T_1 , ale s jednou podmínkou, že T_2 je vždy menší než T_1 (Obr. 10).

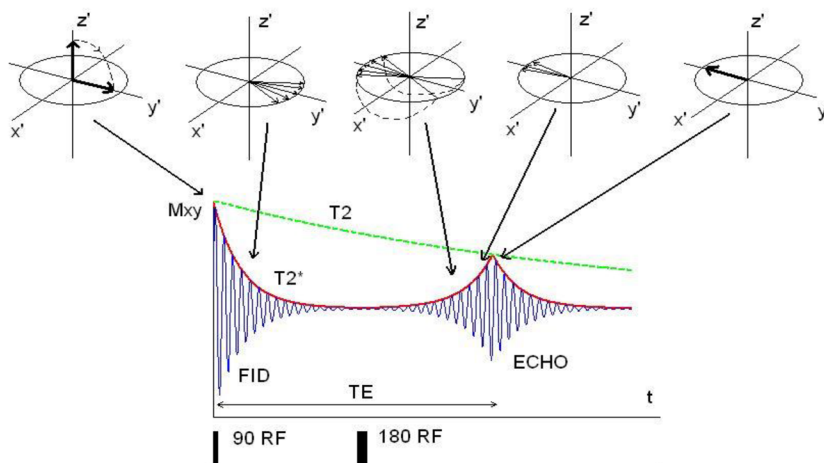


Obr. 10: Časové průběhy relaxací T_1 , T_2 a FID signálu [2].

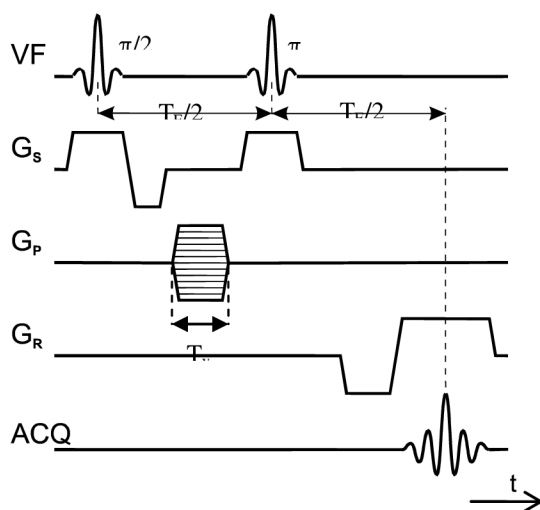
3.2 Měřicí techniky MR

3.2.1 Metoda spinového echa (SE)

Tato metoda je velmi rozšířenou zobrazovací technikou, která využívá sledu ($90^\circ+180^\circ$) RF impulzů následujících za sebou (řádově milisekundy). Aplikací 90° RF impulsu se vektor magnetizace \mathbf{M}_0 překlopí do transverzální roviny xy ($M_{xy} = M_0$ a FID je maximální). Zde se začne projevovat T_2 relaxace a dochází k rozfázování. V časovém okamžiku $t=TE/2$ (time echo) se aplikuje 180° RF impuls, tzv. refokuzující impuls, který překlopí elementární dipóly v rovině xy o 180° kolem osy x (Obr. 11, Obr. 12). Dojde k opětovnému sfázování jednotlivých spinů a v přijímací cílce je detekován spin echo (SE) signál (vektor \mathbf{M}_{xy} bude orientován opačným směrem než na začátku buzení). Amplituda SE signálu je závislá na průběhu relaxační křivky T_2 (T_2^* se neuplatní) [1][2].



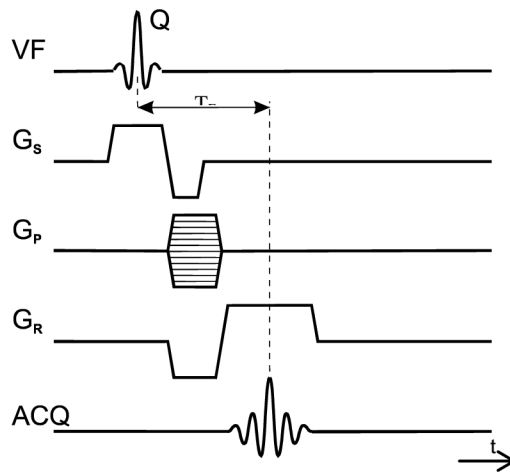
Obr. 11: Popsání principu spinového echa [2].



Obr. 12: Základní impulzní sekvence pro metodu spinového echa (SE), $G_x = G_R$ je tzv. čtecí gradient ve směru x (kmitočtové kódování polohy), $G_y = G_P$ je fázový gradient (fázové kódování polohy) a $G_z = G_S$ je vymežovací gradient (vymezuje excitovanou vrstvu) [2].

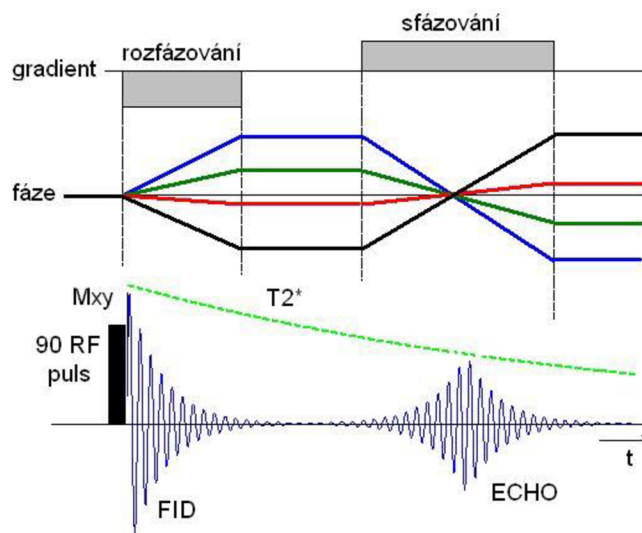
3.2.2 Metoda gradientního echa (GE)

Jedná se o velmi rychlou zobrazovací techniku, ve které se pracuje s menšími časy než u SE, tzn. kratší TR (Time Reppetition). Na začátku je, stejně jako u metody SE, pomocí 90°RF impulzu sklopen vektor magnetizace \mathbf{M}_0 do transverzální roviny (jaderné spiny sfázovány). Místo 180°RF impulzu, který se používá u SE metody, slouží k vyvolání echo signálu gradient magnetického pole. Při excitaci se aktivuje vymežovací gradient $G_S=G_Z$, za ním následuje kmitočtové kódování pomocí gradientu $G_P=G_Y$ a fázové kódování pomocí fázovacího gradientu $G_R=G_X$ (Obr. 13) [1][2].



Obr. 13: Základní impulzní sekvence metody gradientního echa (GE) [2].

Sousedící protony začnou precedovat s mírně odlišnou Larmorovou frekvencí a dojde k rozfázování jednotlivých spinů. Pomocí inverze amplitudy čtecího gradientu G_R se jednotlivé spiny znovu sfázují a tím se vyvolá echo signál (Obr. 14). Pokles amplitudy echo signálu oproti amplitudě FID signálu je zde závislý na relaxačním čase T_2^* .



Obr. 14: Princip metody gradientního echa [2].

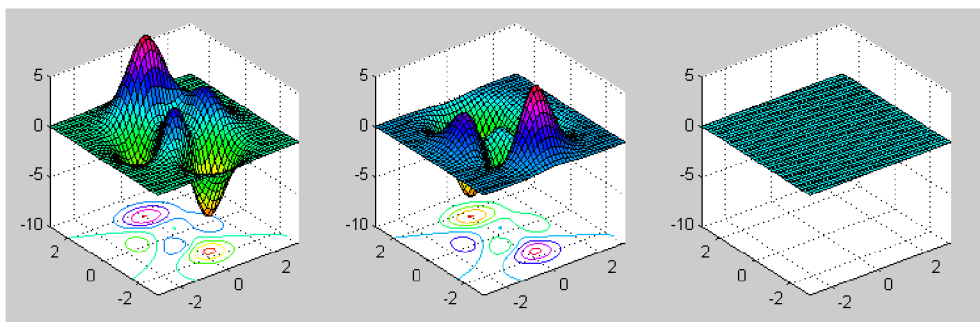
4. ROZKLAD ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

4.1 Princip korekce nehomogenity

Homogenita hlavního magnetického pole je definována jako maximální odchylka pole na daném objemu, tedy podle vztahu

$$\Delta B_0 = \frac{B_{0,max} - B_{0,min}}{B_{0,mean}} . \quad (4.1)$$

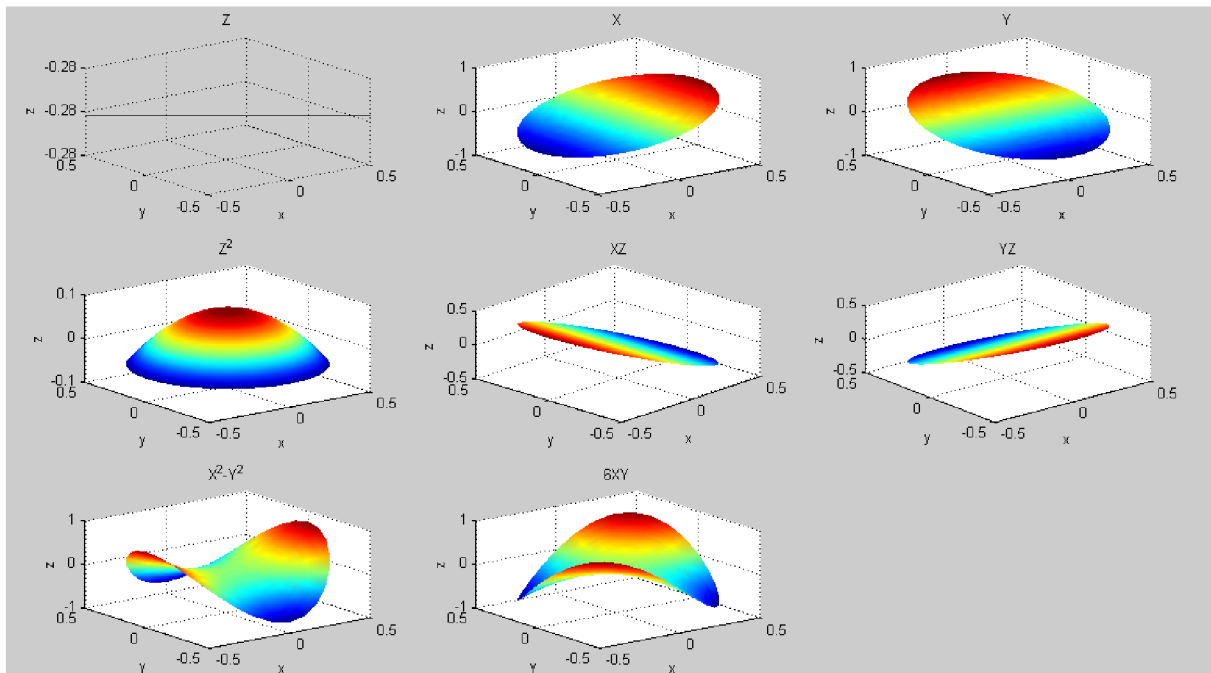
Kde $B_{0,max}$ resp. $B_{0,min}$ jsou maximální, resp. minimální hodnoty magnetické indukce a $B_{0,mean}$ je aritmetický průměr hodnot indukce na daném objemu. Nehomogenitu magnetického pole udáváme v jednotkách ppm. Například máme magnet s homogenitou pole 20 ppm, znamená to, že pole magnetu se liší 20 milionkrát od průměrné hodnoty na uvažovaném objemu. Ppm je tedy relativní hodnota (1ppm z veličiny x odpovídá hodnotě $x=1/1.10^6$ z x). Porovnáme-li například magnet s polem 1.0 T a homogenitou 10 ppm s magnetem 10.0T a homogenitou 10 ppm, bude mít silnější magnet zhruba desetkrát větší rozdíl v homogenitě statického pole. To způsobí větší problémy se zkreslením obrazu. Uvádí se, že pro klinické NMR účely je vhodné, aby magnet měl homogenitu kolem 5 ppm na objemu o průměru 50 cm[zel.k.]. Pro získání kvalitních a ostrých MR obrazů je důležité, aby magnet měl dostatečně homogenní pole na celém měřeném objemu. V praxi většinou není možné, aby samotný hlavní magnet tomografu dokázal generovat takto vysoce homogenní pole. Při řešení tohoto problému je v zásadě možné zvolit dva přístupy. Buď nehomogenitu magnetu korigovat ve výsledných naměřených obrazech, nebo se snažit o korekci základního magnetického pole již v průběhu měření. Princip korekce je zřejmý z Obr. 15.



Obr. 15: K principu korekce nehomogenity

V ideálním případě dojde při superpozici dvou navzájem opačných průběhů pole k vytvoření naprosto homogenního výsledného pole. Naprosto homogenní pole uvedeným postupem v praxi samozřejmě nevytvoříme, neboť již při mapování pole určeného k optimalizaci používáme měřicí metody k zachycení FID signálu, které mají jistou toleranci, jednak vzhledem k ovlivnění pole sondou určenou k mapování průběhu pole a nemůžeme ani vyloučit nepřesnost umístění sondy v uvažovaném objemu. Problémy vznikají také při generaci korekčního pole korekčními cívkami. Při homogenizaci pole předpokládáme, že korekční cívky generují vždy čisté gradientní pole požadovaného typu, což však v praxi nelze docílit. Vždy se projeví vliv postranních složek daného gradientu, především u gradientů vyšších řádů.

Obecný průběh magnetického pole je možné popsat gradienty. Teoretické průběhy jednotlivých gradientů, které se používají při korekcích magnetického pole je možné vykreslit v matlabu následovně:

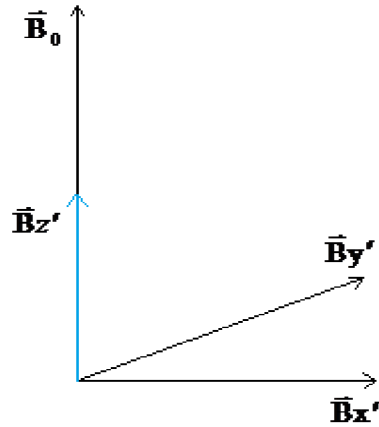


Obr. 16: Teoretické průběhy několika základních gradientů používaných při korekci pole v NMR

Každý změřený průběh magnetického pole je možné rozložit na vhodnou kombinaci těchto gradientů. Toho lze dosáhnout buď pomocí Taylorovy řady a nebo s Legendrovými polynomy. Jak uvidíme dále, pro naše účely je vhodnější použít Legendrovy polynomy a to nejen vzhledem k symetrii měřeného objemu. Rozklady využijeme pro určení koeficientů C a D, které určují vliv odpovídajícího gradientu na průběh mapy pole a tím i dávají základní představu pro nastavení korekčních cívek při ladění nehomogenity základního magnetického pole B_0 .

4.2 Rozklad pole pomocí Taylorova rozvoje

Jestliže je známa hodnota magnetického pole v určitém bodě, např. v počátku $B[0,0,0]$, můžeme pomocí Taylorovy věty určit jeho hodnoty v libovolném bodě prostoru $[x,y,z]$. Magnetické pole se dále rozloží pouze na složky ve směru os a souřadný systém se orientuje tak, že základní pole leží v ose z . V této ose leží také složka hlavního magnetického pole B_0 , která je stálá a homogenní (Obr. 17). Složka $B'(B'_x, B'_y, B'_z)$ popisuje nehomogenitu pole v osách x, y, z [8].



Obr. 17: Rozložení složek \mathbf{B}_0 a \mathbf{B}' magnetického pole.

Pro velikost výsledného vektoru magnetického pole platí vztah

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'. \quad (4.2)$$

Z absolutní velikosti tohoto vektoru danou vztahem

$$|\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'| = \sqrt{(B_0 + B'_y)^2 + (B'_z)^2 + (B'_x)^2} \quad (4.3)$$

lze vyjádřit vztah

$$|\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'| = B_0 + B'_y + \frac{B'_x}{2} \left(\frac{B'_x}{B_0} \right) + \frac{B'_z}{2} \left(\frac{B'_z}{B_0} \right) \quad (4.4)$$

ze kterého vyplývá, že po dosazení číselných poměrů

$$B'_x = B'_y = B'_z = 10^{-5} \cdot B_0 \quad (4.5)$$

lze třetí a čtvrtý člen oproti druhému zanedbat, protože jejich velikost silně poklesla. Tím pádem je tedy nehomogenita magnetického pole určena pouze z-tovou složkou \mathbf{B}'_z poruchové složky magnetického pole \mathbf{B}' . Pro Taylorův rozvoj tedy stačí aplikovat pouze na z-tovou složku pole. Níže jsou uvedeny jednotlivé členy Taylorova rozvoje v bodě X, Y a Z [8].

Tab. 1: Členy Taylorova rozvoje v bodě X, Y a Z .

ŘÁD	Jednotlivé členy rozvoje			
0	B_z			1
1	$\frac{\partial B_z}{\partial x} X$	$\frac{\partial B_z}{\partial y} Y$	$\frac{\partial B_z}{\partial z} Z$	$\frac{1}{1!}$
2	$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} X^2$ $\frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial x} XY$ $\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial z} XZ$	$\frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial x} YX$ $\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} Y^2$ $\frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial z} YZ$	$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z \partial x} ZX$ $\frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial z} YZ$ $\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} Z^2$	$\frac{1}{2!}$

,kde $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ je gradient a $\frac{1}{1!} \frac{\partial B_z}{\partial x} X$ je člen Taylorovy řady (činitel $\frac{1}{n!}$ je u jednotlivých členů vyznačen vždy pouze jedenkrát pro celou skupinu).

III. řád se skládá z 27 členů, IV. řád z 81 a n -tý řád z 3^n členů. Tyto členy, stejně jako členy dalších řádů, se dají pomocí Maxwellových rovnic zjednodušit. Pokud v pracovním prostoru netečou proudy budící pole B_0 , nabudou rovnice výraz

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4.6)$$

což lze napsat jako rovnici

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

a výraz

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0, \quad (4.8)$$

který lze napsat jako

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0. \quad (4.9)$$

Výraz $\text{div}\mathbf{B}$ se derivuje $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.10)$$

a protože lze pořadí derivací zaměnit, dosazením ze vztahů (4.9) vznikne vztah

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = 0 \quad \text{čili} \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = 0, \quad (4.11)$$

ze kterého si vyjádříme

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \quad \text{čili} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} Y^2 = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} Y^2 - \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} Y^2. \quad (4.12)$$

Stejným způsobem se může provést důkaz pro složky B_x a B_y . Pro již zmíněnou redukci členů, např. členů II. řádu, se dosazením vztahu (4.11) počet členů zmenší z 9 na 5 (Tab. 2).

Příklad úpravy členů II. řádu:

do původních 7 členů Taylorova rozvoje

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} X^2 + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} Y^2 + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} Z^2 + \dots$$

se, dosazením rovnice (4.11)

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} X^2 - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} Y^2 - \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} Y^2 + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} Z^2 + \dots \text{ a}$$

pomocí vytýkání

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} (X^2 - Y^2) - \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} Y^2 + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} Z^2 + \dots,$$

dojde ke zmenšení celkového počtu členů. Stejným způsobem se redukují členy III. řádu z 10 členů na 7 atd.

Tab. 2: Rozvoj pole s minimálním počtem členů (B_0 je hodnota složky B_z v počátku a pro jednoduchost $B_z=B$) do 3. řádu Taylorova rozvoje.

ŘÁD	GRADIENTY MAGNETICKÉHO POLE			
0	B_0			1
1	$\frac{\partial B}{\partial x} X$	$\frac{\partial B}{\partial y} Y$	$\frac{\partial B}{\partial z} Z$	$\frac{1}{1!}$
2	$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} (X^2 - Y^2)$ $\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} 2XY$	$\frac{\partial^2 B}{\partial y \partial z} 2YZ$	$\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial z} 2ZX$ $\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} (Z^2 - Y^2)$	$\frac{1}{2!}$
3	$\frac{\partial^3 B}{\partial x^3} X(X^2 - 3Y^2)$ $\frac{\partial^3 B}{\partial x^2 \partial y} Y(3X^2 - Y^2)$ $\frac{\partial^3 B}{\partial x^2 \partial z} 3Z(X^2 - Y^2)$	$\frac{\partial^3 B}{\partial x \partial y \partial z} (6XYZ)$	$\frac{\partial^3 B}{\partial z^3} Z(Z^2 - 3Y^2)$ $\frac{\partial^3 B}{\partial z^2 \partial y} Y(3Z^2 - Y^2)$ $\frac{\partial^3 B}{\partial z^2 \partial x} 3X(Z^2 - Y^2)$	$\frac{1}{3!}$

4.3 Rozklad pole pomocí sférických funkcí

V magneticky homogenní oblasti lze celkovou magnetickou indukci popsat Laplaceovou diferenciální rovnicí [8]. Tato rovnice má v kartézské soustavě stejný tvar jak pro vlastní vektor, tak i pro jeho jednotlivé složky B_x, B_y, B_z [8]. Pro NMR experimenty (u NMR spektrometru nebo MR tomografu) je důležitá pouze hlavní složka magnetické indukce B_z základního magnetického pole, která má paralelní směr s osou symetrie a rovněž vyhovuje rovnici

$$\nabla^2 B_z = 0. \quad (4.13)$$

Řešení uvedené diferenciální rovnice ve sférické souřadné soustavě lze vyjádřit rozvojem

$$B_z(x, y, z) = \sum_n \sum_{m=0}^n r^n \cdot {}^m P_n(\cos \theta) \cdot [C_{n,m} \cos(m\varphi) + D_{n,m} \sin(m\varphi)] \quad (4.14)$$

kde r, θ, φ jsou souřadnice ve sférické soustavě, $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ jsou koeficienty, a ${}^m P_n(\cos \theta)$ jsou přidružené Legendrovy ortogonální polynomy prvního druhu, stupně n a řádu m . Legendrovým polynomem stupně n rozumíme polynom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (4.15)$$

Tvar např. prvních tří Legendrových polynomů je

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x \text{ a}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \text{ atd.}$$

Dosazením těchto polynomů do kulové čili sférické funkce

$$P_n^m(x) = \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (4.16)$$

se získají členy Legendrova přidruženého polynomu [9]. Tvar např. prvních čtyř přidružených Legendrových polynomů je

$$P_0^0(x) = 1,$$

$$P_1^0(x) = x,$$

$$P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2},$$

$$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \text{ atd.}$$

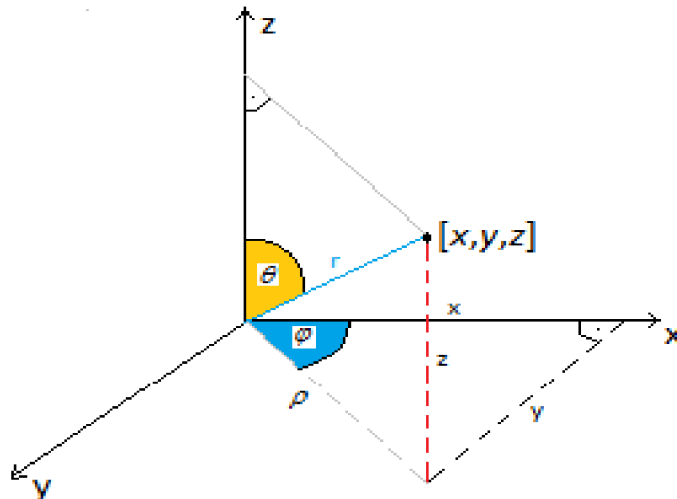
Příklad výpočtu pro $m=0, n=2$:

$$P_2^0(x) = \sqrt{(1-x^2)^0} \frac{d^0 P_2(x)}{dx^0} = \sqrt{1} \frac{d^0 \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right]}{dx^0} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Souvislost s kartézskými a cylindrickými souřadnicemi určují vztahy

$$\begin{aligned}
 x &= r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi), \quad z = r \cdot \cos(\theta), \quad r^2 = z^2 + x^2 + y^2, \\
 \rho &= r \cdot \sin(\theta), \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{a} \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{y}{x},
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

kteřé vyplívají z Obr.18 [8].



Obr. 18: Bod v magnetickém poli, kde r je vzdálenost bodu od počátku ($r < 1$), θ je polovina vrcholového úhlu a φ je azimut.

Sférické souřadnice v rozvoji mohou být tedy jednoduše vyjádřeny v pravoúhlé kartézské soustavě [8].

$$\begin{aligned}
 B_z(x, y, z) = & C_{0,0} & + C_{0,1} \cdot z & + C_{0,2} \cdot \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) & + C_{0,3} \cdot z \left(z^2 - \frac{3\rho^2}{2} \right) & + \dots \\
 & + C_{1,1} \cdot x & + C_{1,2} \cdot 3xz & + C_{1,3} \cdot x \left(6z^2 - 3\frac{\rho^2}{2} \right) & + \dots \\
 & + D_{1,1} \cdot y & + D_{1,2} \cdot 3yz & + D_{1,3} \cdot y \left(6z^2 - 3\frac{\rho^2}{2} \right) & + \dots \\
 & & + C_{2,2} \cdot 3(x^2 - y^2) & + C_{2,3} \cdot 15z(x^2 - y^2) & + \dots \\
 & & + D_{2,2} \cdot 6xy & + D_{2,3} \cdot 30xyz & + \dots \\
 & & & + C_{3,3} \cdot 15x(x^2 - 3y^2) & + \dots \\
 & & & + D_{3,3} \cdot 15y(3x^2 - y^2) & + \dots
 \end{aligned}$$

První člen tohoto rozvoje $C_{0,0}$ představuje magnetickou indukci ideálně homogenního magnetického pole. Příklad výpočtu pro $m=0$ a $n=2$:

$$r^2 \cdot P_2^0(\cos \theta) \cdot [C_{0,2} \cos(0) + D_{0,2} \sin(0)] = r^2 \cdot \left[\frac{1}{2} (3x^2 - 1) \right] \cdot C_{0,2}.$$

Dosadí-li se $\cos \theta$ za x vznikne rovnice

$$\frac{3}{2} r^2 \cdot \cos^2 \theta - \frac{1}{2} r^2.$$

Dále se pomocí vztahů (4.17) získá rovnice

$$\frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

a po vykrácení

$$z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} = \underline{\underline{z^2 - \frac{\rho^2}{2}}}.$$

Při srovnání obou rozvoje je vidět, že některé gradienty např. x , y , a z jsou v obou rozvojech identické a některé např. $3xz$ nebo $6xy$ jsou jiné. Z tohoto důvodu můžeme potom v Matlabu očekávat rozdílné koeficienty právě u těchto členů.

5. ZPŮSOBY MĚŘENÍ MAGNETICKÉHO POLE POMOCÍ NMR

Metody založené na NMR se používají při měření složky B_z silného základního magnetického pole B_0 a její změny, když potřebujeme dosáhnout výsledků s dostatečnou přesností [10]. Měření prostorové konfigurace magnetického pole je možné provádět některými z následujících způsobů:

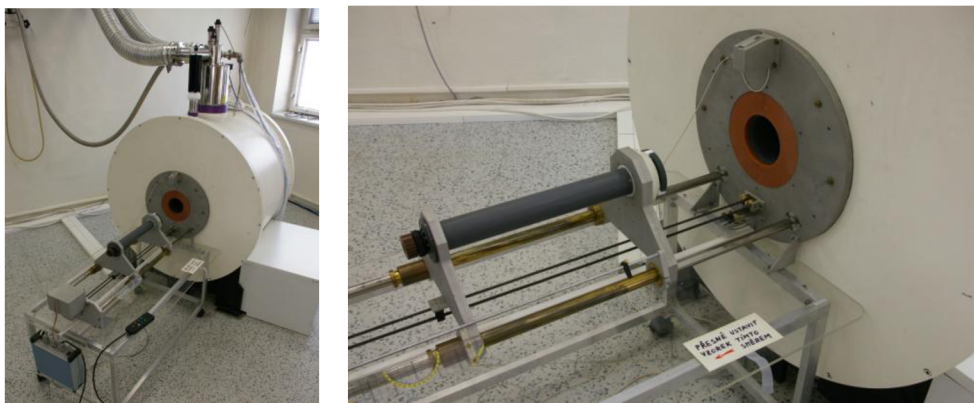
- Klasickým postupem některou z NMR technik
- Sondou s několika NMR cívkami připojenými přes multiplexer k RF přijímači
- Některou z 2D MRI metod
- RF a gradientní cívkou se speciální konfigurací na dlouhé válcové ploše

5.1 Získání naměřených dat

Měření bylo provedeno sondou s NMR cívkou (Obr. 19), která byla umístěna na obdelníkové podložce přichycené k válcové trubce. Ta se na začátku měření umístila do přesné polohy na posuv tomografu (Obr. 20) a po zasunutí do tomografu jsme získali spektrální čáry, ze kterých se odečetla střední hodnota frekvence a z ní se vypočítala hodnota magnetické indukce v daném bodě.



Obr. 19: Měřicí sonda



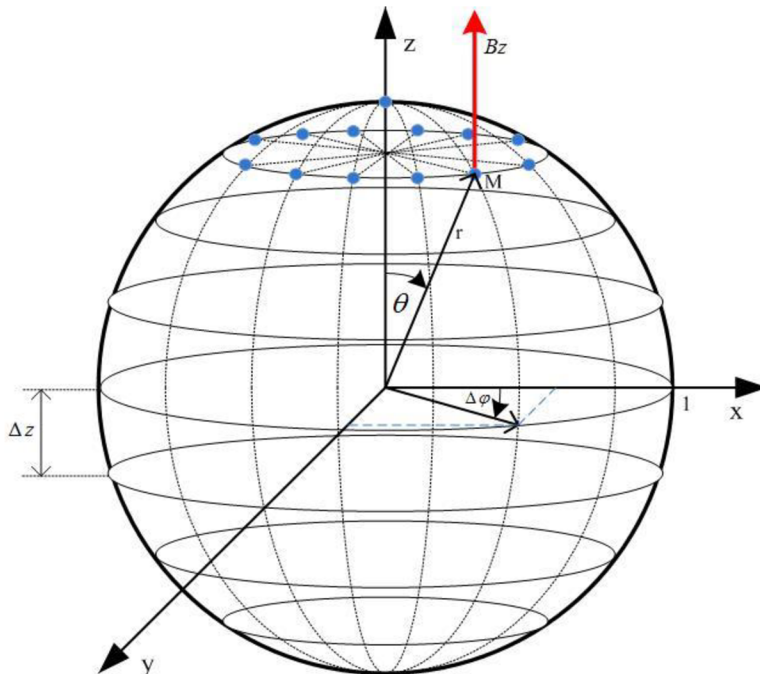
Obr. 20: Tomograf a detail posuvu, na který se umísťuje sonda.

Pro měření byla zvolena metoda gradientního echa. Dále je nutno vhodně zvolit rozložení a s tím spojený počet bodů v mapovaném prostoru tohoto pole. Z Laplaceovy rovnice je známo, že její řešení v uzavřené oblasti je jednoznačně určeno hodnotami na její hranici. Na této hranici také dosahuje řešení extrémních hodnot (Dirichterův vnitřní problém a věta o maximu) - tzn., že měřicí body jsou situovány na povrchu koule, i když je z hlediska konstrukce měřících přípravků podstatně jednodušší měřit B_z složku magnetické indukce na povrchu válce, který je vepsán do pomyslné koule. V této kouli ovšem nesmí být přítomny žádné zdroje magnetického pole.

Rozložení a počet měřených bodů je znázorněno na Obr. 19. $\Delta\varphi$ značí přírůstek úhlu a Δz krok mezi kružnicemi v ose z . Při našem měření byly měřené body rovnoměrně rozmístěny na kružnicích na povrchu koule a to s přírůstkem $\Delta\varphi = 30^\circ$. Krok Δz nebyl rovnoměrný, jelikož byl určený úhlem θ a nabýval hodnot -32; -30,05; -23,24; -11,14; 0; 11,14; 23,24; 30,05 a 32 (mm). Tyto dvě veličiny předurčují volbu maximálního řádu a stupně rozvoje pole, kterým se budou naměřené hodnoty prokládat. Na všech měřících kružnicích obepínajících kouli (nebo válec) musí být splněna podmínka

$$\Delta z = 0.5t_f, \quad (5.1)$$

kde t_f je perioda funkce u koeficientu $C_{n,n}$ nebo $D_{n,n}$ pro rozvoj pole n -tého stupně a řádu a Δz je měřicí krok úhlu nebo posunu z . Tento vztah udává tzv. Kotělník-Shannonův teorém, který říká, že všechny vzorky je nutno odebírat nejméně dvakrát za periodu funkce nejvyššího stupně a řádu t_f . Tento teorém platí při vzorkování pro všechny funkce prokládaného rozvoje.



Obr.21: Rozložení měřených bodů M na povrchu koule

6. VÝPOČET A ZPRACOVÁNÍ DAT

Na základě výše uvedených poznatků a souvislostí byl sestaven počítačový program, který pomocí rekurentních vztahů uvedených v kapitole 3. a 4. a použitím metody nejmenších čtverců LSQ (Least mean Squares) umožnil výpočet aproximačních koeficientů $C_{m,n}$ a $D_{m,n}$ v rozvoji magnetického pole Legendrovými polynomy a taky koeficientů v rozvoji pole Taylorovou řadou. Pro matematické vyjádření rozvoje naměřeného magnetického pole je tedy nutné aproximovat naměřené hodnoty magnetické indukce Legendrovým polynomem.

Metoda LSQ vede na řešení poměrně rozsáhlých systémů lineárních rovnic (při aproximaci do 11 stupně a řádu polynomu tj. $n=11$, to znamená řešit soustavu 144 rovnic o 144 neznámých). Aby bylo programování algoritmu jednodušší, lze využít následující podmínky:

- Počátek souřadné soustavy zvolíme ve středu koule, na jejímž povrchu měříme.
- Jednotlivé měřicí body volíme systematicky uspořádané vzhledem k rovinám $x=0$, $y=0$, $z=0$ a s konstantním přírůstkem úhlu $\Delta\varphi$ a krokem Δz podle (Obr. 21)
- Nezávisle proměnné se normalizují-tzn., že se poloměr měřicí koule a vzdálenost mezi měřenými kružnicemi přirovná ke standardní hodnotě – tou může být poloměr opsané koule nebo u válce jeho poloviční výška. Tato normalizace totiž umožní srovnávat magnetická pole různě velkých objektů

Při analýze konkretizují nalezené hodnoty koeficientů u jednotlivých funkcí rozvoje pole do určitého řádu a stupně matematický model pole a tedy určují potřebné typy korekčních polí a jejich velikost [10]. Tento model avšak velmi dobře reprezentuje konfiguraci měřeného pole, i když je počet jeho parametrů o hodně nižší než počet měřených hodnot B_z . Pomocí něho lze také určit hodnoty magnetického pole i v těch místech, kde nebyly měřeny a to v celém objemu měřicí koule.

6.1 Výpočet aproximačních koeficientů pomocí Legendrových polynomů

Při výpočtu aproximačních koeficientů za pomoci Legendrových polynomů budeme vycházet ze vztahu (4.14), pomocí kterého byl proveden rozklad magnetické pole ve sférických souřadnicích (kapitola 4.3). Z předchozí teorie je známo, že souvislost mezi kártézskými a sférickými souřadnicemi je dána vztahy (4.14). Podle těchto vztahů platí, že složka B_i v bodě měření (výpočtu) i o souřadnicích (ρ_i, φ_i, z_i) je aproximována řadou, která je složená z funkcí $f_{i,mn} \cos(m\varphi_i)$ a $f_{i,mn} \sin(m\varphi_i)$. Tyto funkce je možné porovnat s členy Taylorova rozvoje. Kvůli přehlednosti je dobré ji zapsat ve tvaru aproximačního trojúhelníka tak, aby byly v jednotlivých řádcích pouze členy s totožnou trigonometrickou funkcí a tedy:

$$\begin{aligned}
B_{ai}(\rho_i, \varphi_i, z_i) = & [C_{00}f_{i,00} + C_{01}f_{i,01} + C_{02}f_{i,02} + C_{03}f_{i,03} + C_{04}f_{i,04}] \cdot \cos(0) + \\
& + [C_{11}f_{i,11} + C_{12}f_{i,12} + C_{13}f_{i,13} + C_{14}f_{i,14}] \cdot \cos(\varphi_i) + \\
& + [D_{11}f_{i,11} + D_{12}f_{i,12} + D_{13}f_{i,13} + D_{14}f_{i,14}] \cdot \sin(\varphi_i) + \\
& + [C_{22}f_{i,22} + C_{23}f_{i,23} + C_{24}f_{i,24}] \cdot \cos(2\varphi_i) + \\
& + [D_{22}f_{i,22} + D_{23}f_{i,23} + D_{24}f_{i,24}] \cdot \sin(2\varphi_i) + \\
& + [C_{33}f_{i,33} + C_{34}f_{i,34}] \cdot \cos(3\varphi_i) + \\
& + [D_{33}f_{i,33} + D_{34}f_{i,34}] \cdot \sin(3\varphi_i) + \\
& + [C_{44}f_{i,44}] \cdot \cos(4\varphi_i) + \\
& + [D_{44}f_{i,44}] \cdot \sin(4\varphi_i) + \\
& + P(\rho_i, \varphi_i, z_i)
\end{aligned}$$

Toto je tedy obecný tvar složek aproximační řady, ze které se vychází při vyjádření sférických souřadnic v pravoúhlé kartézské soustavě (viz kap. 4.3). Funkce $f_{i, nm}$ jsou součiny Legendrových polynomů $P_n^m(\cos \theta)$ a n -té mocniny vzdálenosti r měřeného bodu i od počátku souřadné soustavy. Z důvodu přehlednosti zde bylo použito indexování funkcí, které odpovídá parametrům řádu m a stupni n Legendrova polynomu. Index i souvisí s polohou konkrétního měřeného bodu (ρ_i, φ_i, z_i) v objemu měřené koule. Obecně se řádky a sloupce toho aproximačního trojúhelníku označují indexy p a q . Sloupcový index p (pořadí sloupce) je o řád vyšší než stupeň polynomu n tzn. $q=n+1$ a řádkový index (pořadí řádku) souvisí s řádem derivace přidruženého Legendrova polynomu tedy s řádem m , který také určuje násobek azimutu φ u funkcí $\cos(m\varphi)$ a $\sin(m\varphi)$. $P(\rho_i, \varphi_i, z_i)$ zde reprezentuje gradienty vyšších řádů, které vzniknou zvýšením stupně polynomu. Koeficienty C_{nm} a D_{nm} jsou zde hledanými aproximačními koeficienty.

Pro nalezení těchto koeficientů postupujeme následovně. Po roznásobení funkcí $f_{i, nm}$ trigonometrickými funkcemi ($\cos(m\varphi)$ a $\sin(m\varphi)$) a následném převedení do kartézských souřadnic je možné tento rozvoj porovnávat s předchozím Taylorovým rozvojem (viz kap. 4.2). Ze členů vzniklého rozvoje se vytvoří matice \mathbf{P} , která bude obsahovat Legendrovy polynomy příslušného řádu a stupně.

$$\mathbf{P}_{(Q \times Q)} = \begin{pmatrix} P_0^0 & P_1^0 & P_2^0 & P_3^0 & P_n^0 \\ 0 & P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 & P_n^1 \\ 0 & 0 & P_2^2 & P_3^2 & P_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & P_3^3 & P_n^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_n^m \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Rozměr této matice je obecně $m+1$ řádků a $n+1$ sloupců, kde m a n představují řád a stupeň polynomu což znamená, že rozměr matice úzce závisí na stupni zvolené aproximace

(stupni polynomu). Proto zavedeme parametr Q , který bude mít velikost $Q=n+1$. Vygenerovaná matice \mathbf{P} bude mít potom rozměr $Q \times Q$ a pod hlavní diagonálou jen nulové prvky, které nám však v tuto chvíli nevaří. Hodnoty prvků matice \mathbf{P} závisí na pozici kružnice, která nese body, ve kterých je následně zjišťována hodnota magnetická indukce. Pozice těchto kružnic je dána úhlem θ .

Tato matice je tedy základem pro další výpočty, při kterých součet jejich jednotlivých prvků řádek po řádku vytvoří řadu gradientů, které po roznásobení příslušnými koeficienty ze vztahu (4.14) a po následném celkovém součtu určí hodnotu magnetické indukce v daném bodě souřadného systému.

Matice \mathbf{R} , která je znázorněna níže, je naplněna prvky $r_{s,t}^n$, které udávají vzdálenost měřeného bodu v objemu nebo na povrchu koule od počátku souřadné soustavy. Indexy s a t zde určují umístění prvku v matici. S každým stupněm polynomu n a s každou změnou r vzdálenosti bodu od počátku souřadné soustavy se vytvoří nová matice \mathbf{R} .

$$\mathbf{R}_{n(Q \times Q)} = \begin{pmatrix} r_{1,1}^n & r_{1,2}^n & r_{1,3}^n & \dots & r_{1,Q}^n \\ r_{2,1}^n & r_{2,2}^n & r_{2,3}^n & \dots & r_{2,Q}^n \\ r_{3,1}^n & r_{3,2}^n & r_{3,3}^n & \dots & r_{3,Q}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & r_{4,Q}^n \\ r_{Q,1}^n & r_{Q,2}^n & r_{Q,3}^n & r_{Q,4}^n & r_{Q,Q}^n \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Velikost matice \mathbf{R} musí mít stejný rozměr jako má matice \mathbf{P} a to $Q \times Q$, protože se tyto matice mezi sebou násobí. Proto byla zavedena matice \mathbf{f} , která odpovídá funkci f_{nm} . Tyto funkce jsou homogenní polynomy, střídavě sudého a lichého stupně, které nezávisí na azimutu φ . Několik prvních funkcí je uvedeno níže:

$$\begin{aligned} f_{00} &= 1 & f_{01} &= z & f_{02} &= z^2 - \frac{\rho^2}{2} & f_{03} &= z \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) & f_{04} &= z^4 - 3z^2 \rho^2 + \frac{\rho^2}{2} \\ & & f_{11} &= \rho & f_{12} &= 3z\rho & f_{13} &= 6z^2 \rho - 3\frac{\rho^3}{2} & f_{14} &= 10z^3 \rho + \frac{15z\rho^3}{2} \\ & & & & f_{22} &= 3\rho^2 & f_{23} &= 15z\rho^2 & f_{24} &= 45z^2 \rho^2 + \frac{15\rho^4}{2} \\ & & & & & & f_{33} &= 15\rho^3 & f_{34} &= 105z\rho^3 \\ & & & & & & & & f_{44} &= 105\rho^4 \end{aligned}$$

Matice \mathbf{f} má následující tvar:

$$\mathbf{f}_{(Q \times Q)} = \mathbf{R}_{(Q \times Q)} \times \mathbf{P}_{(Q \times Q)} \quad (6.3)$$

Rozměr matice \mathbf{f} je tedy obecně $Q \times Q$. Pokud je vzdálenost měřeného bodu od počátku souřadné soustavy rovna jedné ($r=1$), leží tento bod na povrchu koule (měřeného tělesa) a matice \mathbf{R} obsahuje jen jedničky. Potom platí, že

$$\mathbf{f}_{(Q \times Q)} = \mathbf{P}_{(Q \times Q)} \cdot \quad (6.4)$$

Pro výpočet je dále důležité definovat matice **Co** a **Si**, které obsahují goniometrické funkce $\sin(m\phi)$ a $\cos(m\phi)$. Tyto funkce mění svůj argument podle řádu polynomu m , který určuje násobek příslušného úhlu ϕ . Tento úhel mění svou velikost podle pozice měřeného (počítaného) bodu v objemu koule (měřeného tělesa). Rozměr matic **Co** a **Si** opět závisí na stupni aproximace Q .

$$\mathbf{Co}_{(Q \times Q)} = \begin{pmatrix} \cos(0)_{1,1} & \cos(0)_{1,2} & \cos(0)_{1,3} & \dots & \cos(0)_{1,Q} \\ \cos(\phi)_{2,1} & \cos(\phi)_{2,2} & \cos(\phi)_{2,3} & \dots & \cos(\phi)_{2,Q} \\ \cos(2\phi)_{3,1} & \cos(2\phi)_{3,2} & \cos(2\phi)_{3,3} & \dots & \cos(2\phi)_{3,Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(m\phi)_{Q,1} & \cos(m\phi)_{Q,2} & \cos(m\phi)_{Q,3} & \cos(m\phi)_{Q,4} & \cos(m\phi)_{Q,Q} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

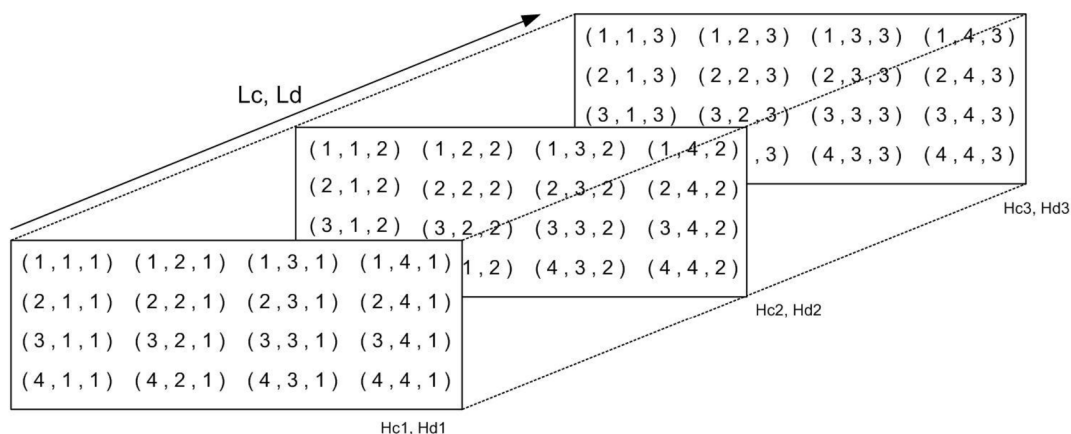
$$\mathbf{Si}_{(Q \times Q)} = \begin{pmatrix} \sin(0)_{1,1} & \sin(0)_{1,2} & \sin(0)_{1,3} & \dots & \sin(0)_{1,Q} \\ \sin(\phi)_{2,1} & \sin(\phi)_{2,2} & \sin(\phi)_{2,3} & \dots & \sin(\phi)_{2,Q} \\ \sin(2\phi)_{3,1} & \sin(2\phi)_{3,2} & \sin(2\phi)_{3,3} & \dots & \sin(2\phi)_{3,Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(m\phi)_{Q,1} & \sin(m\phi)_{Q,2} & \sin(m\phi)_{Q,3} & \sin(m\phi)_{Q,4} & \sin(m\phi)_{Q,Q} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Pomocí předešlých matic vypočítáme matice **Hc** a **Hd**, které obsahují dostatek hodnot potřebných pro výpočet aproximačních koeficientů. Tyto matice vzniknou vynásobením matic **Co** a **Si** maticí **f** člen po členu a mají nulové prvky pod hlavní diagonálou:

$$\mathbf{Hc} = \mathbf{Co} \cdot \mathbf{f} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{Hd} = \mathbf{Si} \cdot \mathbf{f} \quad (6.8)$$

Aby měla aproximace smysl, provádí se tento výpočet pro všechny body, jejichž počet je dán počtem měřených (počítaných) hodnot, které jsou k dispozici. Matice **Hc** a **Hd** se poté ukládají do maticového pole **Lc** a **Ld** (Obr. 22) pro další výpočty.



Obr. 22: Pole matic Lc a Ld

Aby se tyto matice mohly použít při výpočtu aproximačních koeficientů C_{nm} a D_{nm} , musíme je upravit do určitého tvaru. Z výchozího vztahu (4.14) je zřejmé, že prvky matic \mathbf{Hc} a \mathbf{Hd} představují členy součtu řady. Tyto prvky se tedy přepíší člen po členu do matic \mathbf{Sc} a \mathbf{Sd} a to následovně:

z matice

$$\mathbf{Hc}_{(g \times Q)} = \begin{pmatrix} hc_{1,1} & hc_{1,2} & hc_{1,3} & \dots & hc_{1,Q} \\ 0 & hc_{2,2} & hc_{2,3} & \dots & hc_{2,Q} \\ 0 & 0 & hc_{3,3} & \dots & hc_{3,Q} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & hc_{4,Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & hc_{Q,Q} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

se vezme prvním řádek a vloží se do prvního řádku matice \mathbf{Sc} , potom se vezme druhý řádek a vloží se opět do prvního řádku matice \mathbf{Sc} atd. až budou všechny řádky matice \mathbf{Hc} přepsané do řádku matice \mathbf{Sc} .

$$\mathbf{Sc}_{(g \times Q^2)} = \begin{pmatrix} hc_{1,1,1} \rightarrow hc_{1,Q,1} & hc_{2,1,1} \rightarrow hc_{2,Q,1} & \rightarrow & hc_{Q,Q,1} \\ hc_{1,1,2} \rightarrow hc_{1,Q,2} & hc_{2,1,2} \rightarrow hc_{2,Q,2} & \rightarrow & hc_{Q,Q,2} \\ hc_{1,1,3} \rightarrow hc_{1,Q,3} & hc_{2,1,3} \rightarrow hc_{2,Q,3} & \rightarrow & hc_{Q,Q,3} \\ hc_{1,1,4} \rightarrow hc_{1,Q,4} & hc_{2,1,4} \rightarrow hc_{2,Q,4} & \rightarrow & hc_{Q,Q,4} \\ \downarrow \rightarrow \downarrow & \downarrow \rightarrow \downarrow & \rightarrow & \downarrow \rightarrow \downarrow \\ hc_{1,1,g} \rightarrow hc_{1,Q,g} & hc_{2,1,g} \rightarrow hc_{2,Q,g} & \rightarrow & hc_{Q,Q,g} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

První řádek matice \mathbf{Sc} je tedy tvořen prvky první matice \mathbf{Hc} z maticového pole \mathbf{Lc} . Rozměr matic \mathbf{Sc} a \mathbf{Sd} je zde $g \times Q^2$. Index g zde představuje počet měřených (počítaných) bodů, tzn. pořadí matice \mathbf{Hc} v maticovém poli \mathbf{Lc} a index Q značí stupeň aproximace. Analogickým způsobem se přepisují i další matice \mathbf{Hc} . Stejným způsobem vznikne i matice \mathbf{Sd} , která je však složená z prvků matice \mathbf{Hd} . Protože měly matice \mathbf{Hc} a \mathbf{Hd} nulové prvky pod hlavní diagonálou, objeví se tyto prvky i v maticích \mathbf{Sc} a \mathbf{Sd} . Pokud měříme např. 7 bodů na 12 kružnicích a stupeň aproximace $Q=4$, celkový počet bodů $g=84$ a matice \mathbf{Sc} a \mathbf{Sd} budou mít rozměr 84×16 .

Pokud vynásobíme tyto matice s vektory \mathbf{C} a \mathbf{D} , dostaneme jednotlivé členy rozvoje pro daný měřený bod. Vektory \mathbf{C} a \mathbf{D} mají obecně rozměr Q^2 :

$$\mathbf{Sc}_{(g \times Q^2)} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \downarrow \\ C_{(Q^2)} \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{Sd}_{(g \times Q^2)} \times \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \downarrow \\ D_{(Q^2)} \end{pmatrix}. \quad (6.11),(6.12)$$

Protože je ale potřeba v každém měřeném bodě počítat s příspěvky obou koeficientů C i D , provede se sloučení matic \mathbf{S}_c a \mathbf{S}_d do jedné matice, kterou nazveme maticí \mathbf{S} . Tímto způsobem tedy vznikne následující systém matic

$$\left(\begin{array}{cc} hc_{1,1,1} & hc_{1,2,1} \rightarrow hc_{Q,Q,1} & hd_{1,1,1} \rightarrow hd_{Q,Q,1} \\ hc_{1,1,2} & hc_{1,2,2} \rightarrow hc_{Q,Q,2} & hd_{1,1,2} \rightarrow hd_{Q,Q,2} \\ hc_{1,1,3} & hc_{1,2,3} \rightarrow hc_{Q,Q,3} & hd_{1,1,3} \rightarrow hd_{Q,Q,3} \\ hc_{1,1,4} & hc_{1,2,4} \rightarrow hc_{Q,Q,4} & hd_{1,1,4} \rightarrow hd_{Q,Q,4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ hc_{1,1,g} & hc_{1,2,g} \rightarrow hc_{Q,Q,g} & hd_{1,1,g} \rightarrow hd_{Q,Q,g} \end{array} \right)_{(g \times 2Q^2)}^{\mathbf{S}} \times \left(\begin{array}{c} C_1 \\ \downarrow \\ C_{Q^2} \\ D_1 \\ \downarrow \\ D_{Q^2} \end{array} \right)_{(2Q^2)}^{\mathbf{K}} = \left(\begin{array}{c} B_{m1} \\ B_{m2} \\ B_{m3} \\ B_{m4} \\ \downarrow \\ B_{mg} \end{array} \right)_{(g)}^{\mathbf{B}_m}, \quad (6.13)$$

kde matice \mathbf{K} obsahuje hledané aproximační koeficienty C i D a vektor \mathbf{B}_m naměřené hodnoty magnetické indukce v daných bodech.

Tuto maticovou rovnici už je možné numericky řešit metodou nejmenších čtverců LSQ např. s využitím programu Matlab. Tato metoda obecně vyžaduje velký počet rovnic. Jelikož obsahuje většina matic, se kterými počítáme, nadbytečné nulové prvky pod hlavní diagonálou, jsou tyto nuly obsaženy i v některých sloupcích matic \mathbf{S}_c a \mathbf{S}_d a tudíž v celkové maticové rovnici. Tyto sloupce odstraníme, čímž se zmenší rozměr těchto matic a tedy rozměr matic celkového systému. Vznik těchto nulových prvků byl zapříčiněn počáteční transformací rozvoje do matice a také průběhem trigonometrických funkcí v určitých bodech. Tento průběh určuje parametr m (řád Legendrova polynomu), který nabývá pro každý měřený bod právě jednou nulové hodnoty. Pro koeficient D , který se násobí funkcí $\sin(m\varphi)$ potom platí, že prvních Q koeficientů nemá smysl počítat, protože nabývají nulové hodnoty a ve výsledném příspěvku se tedy v daném bodě stejně neprojeví. Obecný rozměr maticové rovnice je

$$\mathbf{S}_{(g \times 2Q^2)} \times \mathbf{K}_{(2Q^2)} = \mathbf{B}_{m(g)}. \quad (6.14)$$

Po optimalizaci matic se rozměr \mathbf{S}_c respektive \mathbf{S}_d zmenší z 84×16 na 84×10 respektive 84×6 – tím je tedy dán celkový rozměr matice \mathbf{S} 84×16 . Matice \mathbf{S}_d tím pádem bude mít potom menší rozměr než matice \mathbf{S}_c , protože obsahovala větší počet nulových sloupců. Z toho důvodu má i menší podíl příspěvků v matici \mathbf{S} a tedy v celkové maticové rovnici. Rozměr maticové rovnice po úpravě bude obecně následující

$$\mathbf{S}_{(g \times Q^2)} \times \mathbf{K}_{(Q^2)} = \mathbf{B}_{m(g)}. \quad (6.15)$$

Z důvodu transformace řady rozvoje magnetického pole do maticového systému, který je pro numerické řešení jednodušší, už matice \mathbf{S} neobsahuje $2Q^2$ sloupců, ale jen polovinu, tedy pouze Q^2 . Pro např. $Q=4$ (stupeň polynomu je 3) bude mít maticová rovnice rozměr

$$\mathbf{S}_{(84 \times 16)} \times \mathbf{K}_{(16)} = \mathbf{B}_{m(84)}. \quad (6.16)$$

Protože byla v maticích provedena optimalizace prvků, je nutno s tím počítat při interpretaci výsledků. Např. pro $Q=4$ je podíl aproximačních koeficientů C/D ve výsledném vektoru K $10/6$, protože matice S obsahovala větší příspěvek prvků matice Sc než matice Sd . To znamená, že prvních 10 prvků vektoru jsou aproximační koeficienty C a zbylých 6 prvků jsou aproximační koeficienty D . S rostoucím Q se tedy mění podíl aproximačních koeficientů ve výsledném vektoru K ; např. pro $Q=5$ je podíl $15/10$, pro $Q=6$ je podíl $21/15$ atd. z toho plyne, že počet koeficientů C se při zvýšení aproximace Q o jeden stupeň zvětší o hodnotu stupně aproximace a počet koeficientů D bude stejný, jako předchozí počet koeficientů C . Obecně tedy získáme Q^2 koeficientů, které se liší svým podílem na celkové hodnotě magnetické indukce v daném bodě.

Optimalizace se v dnešní době vysoce výkonných počítačů může zdát jako zbytečná, ale při větších stupních Legendrových polynomů a tedy větších rozměrech počítaných matic, může být na běžných počítačích výpočet značně zpomalen.

6.2 Výpočet hodnot magnetické indukce pomocí Legendrových polynomů

Pro výpočet hodnoty magnetické indukce v kterémkoliv místě uzavřené oblasti (koule), jsou nyní k dispozici hodnoty aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$, které se získaly předchozími výpočty.

Při popisu zpětného výpočtu se vychází opět ze vztahu (4.14). Hodnoty Legendrových polynomů jsou dány úhlem θ , azimutem φ ovlivňuje hodnoty goniometrických funkcí Si a Co . Znamé koeficienty $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ mají nyní podobu dvou vektorů. Abychom mohli dále s těmito koeficienty počítat, musíme je převést z vektorů do matic a to následujícím způsobem:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \downarrow \\ C_p \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & C_5 & C_6 & C_7 \\ 0 & 0 & C_8 & C_9 \\ 0 & 0 & 0 & C_p \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \downarrow \\ D_q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_5 & D_6 & D_7 \\ 0 & 0 & D_8 & D_9 \\ 0 & 0 & 0 & D_q \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

kde index p značí podíl koeficientů C a index q podíl koeficientů D ve výsledném vektoru K . V matici D však oproti matici C naplníme první řádek nulovými prvky, protože je stejně násoben funkcí $\sin(\theta)$. Po těchto úpravách mají obě matice rozměr $Q \times Q$.

Nyní můžeme přejít k popisu zpětného výpočtu hodnoty magnetické indukce v daných bodech. Hodnoty Legendrových polynomů vložené do matice P , již známe z předchozího výpočtu. Podle polohy počítaných bodů určíme jejich vzdálenost r od středu

souřadné soustavy a naplníme tak matici \mathbf{R} . Stejným způsobem jako v předešlé části se vytvoří matice \mathbf{f} , která se rovná součinu matice \mathbf{P} s maticí \mathbf{R} člen po členu a tedy

$$\mathbf{f}_{(Q \times Q)} = \mathbf{R}_{(Q \times Q)} \times \mathbf{P}_{(Q \times Q)}, \quad (6.19)$$

kde mají všechny matice rozměr $Q \times Q$. Tímto způsobem se vypočítala následující část vztahu

$$\sum_n \sum_{m=0}^n r^n \cdot {}^m P_n(\cos \theta) = \mathbf{f}. \quad (6.20)$$

Nyní se vytvoří nová matice \mathbf{Ha} , která se rovná součtu součinů vypočítaných aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ s goniometrickými funkcemi. Matice s těmito funkcemi $\sin(m\varphi)$ a $\cos(m\varphi)$, které mění svůj argument podle řádu Legendrova polynomu, jsou známé z předchozích výpočtů a jsou to tedy matice \mathbf{Si} a \mathbf{Co} . Matice \mathbf{Ha} potom odpovídá části vztahu (4.14) a to

$$\sum_n \sum_{m=0}^n [C_{n,m} \cos(m\varphi) + D_{n,m} \sin(m\varphi)] = \mathbf{Ha}_{(Q \times Q)} \quad (6.21)$$

a vypadá následovně

$$\mathbf{Ha}_{(Q \times Q)} = \left(\left(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & C_5 & C_6 & C_7 \\ 0 & 0 & C_8 & C_9 \\ 0 & 0 & 0 & C_p \end{pmatrix} \times \mathbf{Co}_{(Q \times Q)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_5 & D_6 & D_7 \\ 0 & 0 & D_8 & D_9 \\ 0 & 0 & 0 & D_q \end{pmatrix} \times \mathbf{Si}_{(Q \times Q)} \right) \right). \quad (6.22)$$

Její rozměr je stejný jako rozměry matic, ze kterých byla vypočítána.

Aby byl výpočet výchozího vztahu (4.14) kompletní, musí se vynásobit matice \mathbf{Ha} člen po členu s maticí \mathbf{f} . Tím se vytvoří nová matice

$$\mathbf{H}_{(Q \times Q)} = \mathbf{Ha}_{(Q \times Q)} \times \mathbf{f}_{(Q \times Q)}, \quad (6.23)$$

která má tento tvar

$$\mathbf{H}_{b(Q \times Q)} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \dots & h_{1,Q} \\ 0 & h_{2,2} & h_{2,3} & \dots & h_{2,Q} \\ 0 & 0 & h_{3,3} & \dots & h_{3,Q} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{4,Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{Q,Q} \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

kde index b značí počet počítaných bodů na každé kružnici. Tato matice již tvoří členy součtu řady. Jelikož se hodnoty jejích prvků mění se stupněm a řádem Legendrova polynomu n a m , ukládají se sumy jednotlivých matic \mathbf{H} do maticového pole \mathbf{B} . Sumou se zde rozumí součet jednotlivých prvků v každé vytvořené matici \mathbf{H} . Tato suma se tedy uloží na pozici v maticovém poli \mathbf{B} , která je dána počtem počítaných bodů a počtem kružnic, na kterých tyto body leží. Pro např. 12 počítaných bodů na 7 kružnicích bude počet matic v maticovém poli \mathbf{B} 7 (což odpovídá i počtu řádků každé matice) a počet sloupců v každé matici bude 12. Zde se neberou v úvahu vrcholové body koule. Počet měřených bodů v souřadné soustavě závisí na azimutu φ a počet kružnic na úhlu mezi rovinou xy a pomyslným vektorem vedoucím od počátku souřadné soustavy do měřeného bodu, tzn. úhlem θ . První řádek v maticovém poli \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_{(Q \times Q \times 1)} = \begin{pmatrix} \sum \mathbf{H}_1 & \sum \mathbf{H}_2 & \sum \mathbf{H}_3 & \rightarrow & \sum \mathbf{H}_b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

druhý řádek v maticovém poli

$$\mathbf{B}_{(Q \times Q \times 2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum \mathbf{H}_1 & \sum \mathbf{H}_2 & \sum \mathbf{H}_3 & \rightarrow & \sum \mathbf{H}_b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

atd. Označení pole \mathbf{B} je zde $\mathbf{B}_{(Q \times Q \times k)}$, kde index k určuje umístění sum jednotlivých matic \mathbf{H} v poli \mathbf{B} a je daný počtem kružnic koule, na kterých jsou umístěny měřené body.

Aby bylo možné maticové pole použít, musíme z něj vytvořit jednu matici \mathbf{Bv} , která již nebude obsahovat nulové prvky.

$$\mathbf{Bv}_{(k \times b)} = \begin{pmatrix} \sum \mathbf{H}_{1,1} & \sum \mathbf{H}_{2,1} & \sum \mathbf{H}_{3,1} & \rightarrow & \sum \mathbf{H}_{b,k} \\ \sum \mathbf{H}_{1,2} & \sum \mathbf{H}_{2,2} & \sum \mathbf{H}_{3,2} & \rightarrow & \sum \mathbf{H}_{b,k} \\ \sum \mathbf{H}_{1,3} & \sum \mathbf{H}_{2,3} & \sum \mathbf{H}_{3,3} & \rightarrow & \sum \mathbf{H}_{b,k} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sum \mathbf{H}_{1,k} & \sum \mathbf{H}_{2,k} & \sum \mathbf{H}_{3,k} & \rightarrow & \sum \mathbf{H}_{b,k} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Rozměr této matice je $k \times b$ což znamená, že její řádky se naplní nenulovými prvky z matic \mathbf{H} umístěných v maticovém poli \mathbf{B} , tak jak jdou za sebou.

Protože nejsou do předešlých výpočtů brány v úvahu hodnoty magnetické indukce v bodech, které leží na vrcholech koule, musí se tyto hodnoty dopočítat. Vrcholové body na horní straně koule představují první řádek matice \mathbf{Bv} a vrcholové body na spodní straně koule představují poslední řádek. Aby bylo možné tyto body dopočítat, přidá se do matice \mathbf{Bv} poslední sloupec, který bude obsahovat stejné hodnoty jako sloupec první. Je to proto, že počáteční body, ve kterých se zjišťuje hodnota magnetické indukce, jsou na všech kružnicích zároveň i body koncovými. Tyto body se vypočítají následujícím způsobem a to tak, že se zprůměruje první a poslední řádek matice \mathbf{Bv} . Hodnota získaná zprůměrováním prvního řádku představuje prvky nového řádku, kterým bude matice \mathbf{Bv} začínat a hodnota získaná zprůměrováním posledního řádku naopak vytvoří nový řádek na konci matice \mathbf{Bv} . Tímto způsobem se zvětší index k (počet řádků matice \mathbf{Bv}) o dva tzn., že nyní bude tato matice obsahovat všechny hodnoty magnetické indukce v daných bodech ze všech kružnic a je možno ji tedy graficky vykreslit a porovnat s hodnotami získanými praktickým měřením.

6.3 Výpočet aproximačních koeficientů pomocí Taylorovy řady

Postup výpočtu aproximačních koeficientů pomocí Taylorovy řady je velice podobný jako v předchozím případě. Rozdíl je ve výpočtu prvků počátečních matic \mathbf{Hc} a \mathbf{Hd} . Hodnoty těchto prvků odpovídají členům (gradientům) Taylorova rozvoje vypočítaným v kapitole 4.2 (Tab. 1). Gradienty z této tabulky je dobré přepsat kvůli přehlednosti do tvaru rovnice. Nesmíme zde ale zapomenout na násobení jednotlivých gradientů příslušnými faktoriály. Aproximační trojúhelník do 3. řádu Taylorova polynomu má potom následující podobu:

$$\begin{aligned}
 Ba(x, y, z) = & C_{0,0} & + C_{0,1}z & + C_{0,2} \frac{1}{2}(z^2 - y^2) & + C_{0,3} \frac{1}{6}(z(z^2 - 3y^2)) & + \dots \\
 & + C_{1,1}x & + C_{1,2}xz & & + C_{1,3} \frac{1}{6}3x(z^2 - y^2) & + \dots \\
 & + D_{1,1}y & + D_{1,2}yz & & + D_{1,3} \frac{1}{6}y(3z^2 - y^2) & + \dots \\
 & & + C_{2,2} \frac{1}{2}(x^2 - y^2) & + C_{2,3} \frac{1}{6}3z(x^2 - y^2) & + \dots \\
 & + D_{2,2}xy & & + D_{2,3}xyz & + \dots \\
 & & & & + C_{3,3} \frac{1}{6}x(x^2 - 3y^2) & + \dots \\
 & & & & + D_{3,3} \frac{1}{6}y(3x^2 - y^2) & + \dots
 \end{aligned}$$

Tuto rovnici obsahující gradienty Taylorova rozvoje lze porovnávat s rovnicí, která obsahuje Legendrovy polynomy (viz. kapitola 4.3). Příklad srovnání pro $n=1$ a $m=1$ vypadá následovně - vycházíme z funkce $f_{i,m} \cos(m\varphi_i)$, která tvoří spolu s aproximačními koeficienty $C_{n,m}$ členy Legendrovy rovnice. Po dosazení stupně a řádu polynomu n a m se funkce

$$f_{i,11} \cos(\varphi_i) = x, \quad (6.28)$$

kde $f_{i,11}$ na levé straně rovnice je funkce homogenního polynomu, která je rovna ρ a pravou stranu tvoří gradient x z Taylorovy rovnice. Celkově potom platí, že

$$\rho \cos(\varphi) = r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi) = x, \quad (6.29)$$

což vyplývá z Obr. 16 a ze vztahů (4.14).

Gradients u koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ se potom zvlášť rozepíše do matic \mathbf{Hc} a \mathbf{Hd} , jejichž podoba pro např. $Q=4$ je

$$\mathbf{Hc}_{(Q \times Q)} = \begin{pmatrix} 1 & z & 0,5(z^2 - y^2) & \frac{1}{6}(z(z^2 - 3y^2)) & hc_{1,Q} \\ 0 & x & xz & \frac{1}{6}3x(z^2 - y^2) & hc_{2,Q} \\ 0 & 0 & 0,5(x^2 - y^2) & \frac{1}{6}3z(x^2 - y^2) & hc_{3,Q} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}x(x^2 - 3y^2) & hc_{4,Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & hc_{Q,Q} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{Hd}_{(Q \times Q)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & yz & \frac{1}{6}y(3z^2 - y^2) & hd_{2,Q} \\ 0 & 0 & xy & xyz & hd_{3,Q} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}y(3x^2 - y^2) & hd_{4,Q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & hd_{Q,Q} \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

kde Q představuje řád Taylorova polynomu zvětšený o jedničku. Podobně jako v předchozím případě, kde je rozměr matic \mathbf{Hc} a \mathbf{Hd} závislý na stupni Legendrova polynomu, zde tedy závisí rozměr matic na volbě řádu Taylorova polynomu.

Dále se postupuje stejným způsobem jako v předchozím případě, kdy se vytvoří pole matic \mathbf{Lc} a \mathbf{Ld} , a z nich potom matice \mathbf{Sc} a \mathbf{Sd} . Následně se z těchto matic vytvoří matice \mathbf{S} a

za pomoci naměřených hodnot se opět metodou nejmenších čtverců vypočítají hodnoty aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ v daných bodech koule, jejichž počet je dán podílem příspěvků matic \mathbf{S}_c a \mathbf{S}_d v matici \mathbf{S} .

6.4 Výpočet hodnot magnetické indukce pomocí Taylorovy řady

Při zpětném výpočtu hodnot magnetické indukce v daných bodech souřadné soustavy se ze získaných aproximačních koeficientů vytvoří matice \mathbf{C} a \mathbf{D} . Tyto matice se následně vynásobí maticemi \mathbf{H}_c a \mathbf{H}_d , jejichž prvky jsou tvořeny gradienty magnetického pole a sečtou se. Získáme tak matice \mathbf{H}

$$\mathbf{H}_{b(Q \times Q)} = \mathbf{C}_{(Q \times Q)} \times \mathbf{H}_c_{(Q \times Q)} + \mathbf{D}_{(Q \times Q)} \times \mathbf{H}_d_{(Q \times Q)}, \quad (6.32)$$

kde index b značí počet počítaných bodů na každé kružnici. Sumy prvků jednotlivých matic se opět ukládají do maticového pole \mathbf{B} (způsobem popsaným výše), ze kterého se poté získá matice \mathbf{B}_v . Tato matice už obsahuje hodnoty magnetické indukce v jednotlivých bodech souřadného systému získané výpočtem z gradientů Taylorova rozvoje a je už proto možné ji vykreslit a porovnat s hodnotami magnetické indukce získané výpočty z Legendrových polynomů.

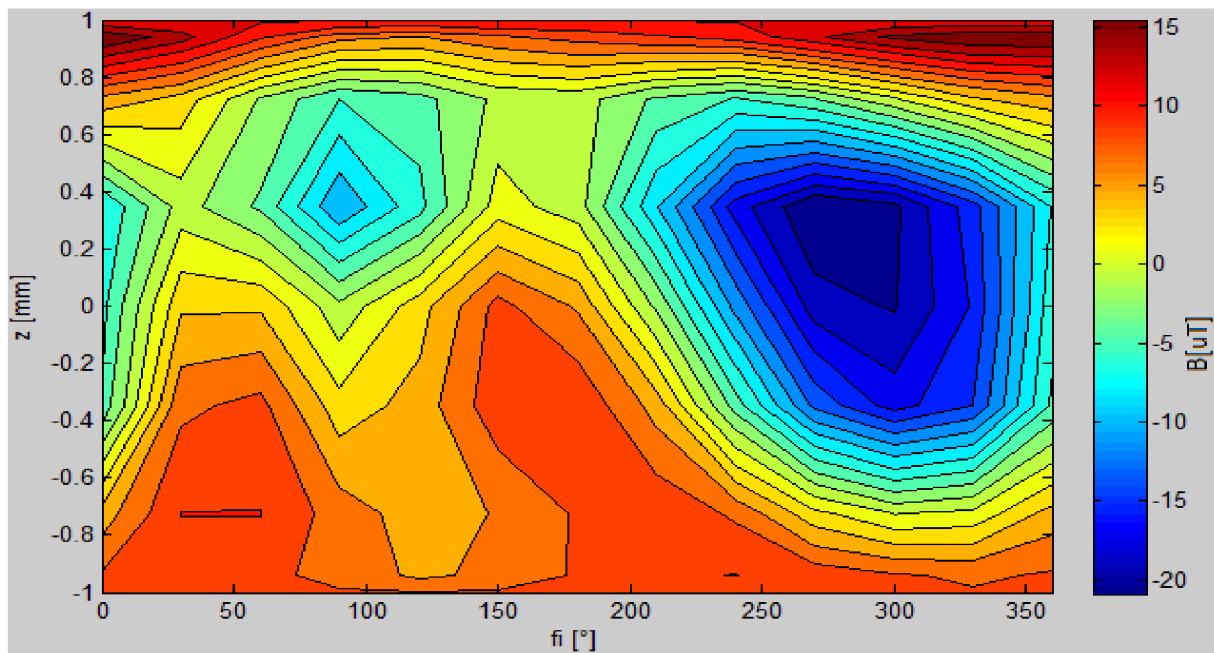
7. SROVNÁNÍ NAMĚŘENÝCH A VYPOČTENÝCH HODNOT

7.1 Naměřené hodnoty

Při měření, které bylo provedeno pro 12 bodů na 9 kružnicích (viz kapitola 5.) v objemu koule pomocí NMR tomografu, byly získány hodnoty magnetické indukce v měřených bodech (Tab. 3 a Obr. 23). Z těchto naměřených hodnot se vycházelo při výpočtech koeficientů a to pomocí dvou metod. První metoda využívá při výpočtech matici naplněnou Legendrovými polynomy a druhá zase matici s prvky, které odpovídají gradientům magnetického pole vypočítané Taylorovým rozvojem.

Tab. 3: Tabulka s naměřenými hodnotami magnetické indukce pro 12 bodů ležících na 9 kružnicích v objemu koule.

<i>k/b</i>	1	2	3	4	5	6
1	12,0175	12,0175	12,0175	12,0175	12,0175	12,0175
2	17,2960	14,3585	10,3165	7,0730	6,2510	7,8725
3	5,9920	3,8540	-1,0340	-4,5350	-3,4310	-0,4700
4	-6,2980	-0,0700	-3,0550	-9,8230	-5,2170	1,8090
5	-5,2170	4,2535	4,2535	-0,3760	3,7130	8,8360
6	-4,1590	7,7550	8,8360	3,4310	5,3110	9,3760
7	5,3580	10,0580	10,0580	7,3550	5,4520	6,5090
8	8,4130	9,2120	8,6950	7,6140	5,9930	6,8150
9	8,3752	8,3752	8,3752	8,3752	8,3752	8,3752
<i>k/b</i>	7	8	9	10	11	12
1	12,0175	12,0175	12,0175	12,0175	12,0175	12,0175
2	8,9535	9,7525	10,5515	13,2540	15,9565	17,2960
3	-0,0700	-3,0550	-4,7000	-2,7960	0,7280	4,2535
4	-0,0700	-7,9430	-16,3090	-20,9150	-19,5520	-14,4290
5	6,1100	-1,1750	-10,6455	-18,2125	-19,2935	-15,2280
6	9,8930	5,5930	-3,5485	-12,2435	-16,3090	-13,6300
7	8,4130	9,7530	7,8730	3,3130	0,8690	1,4100
8	8,4130	9,7530	10,0580	9,2120	8,4130	7,8730
9	8,3752	8,3752	8,3752	8,3752	8,3752	8,3752



Obr. 23: Mapa naměřených hodnot magnetické indukce.

Tato mapa vychází z hodnot v (Tab. 3), získaných měření 9×12 bodů na povrchu koule, tedy celkově měření 108 bodů. Hodnoty se zde pohybují v rozmezí od $-20,9150$ do $17,2960 \mu T$. Na ose x je znázorněna velikost azimutu φ od 0 do 360° a osa y znázorňuje vzdálenosti na ose z směřující od počátku souřadné soustavy směrem k 1 a -1 . Jinak řečeno tato mapa zobrazuje rozbalený povrch koule do obdélníkového tvaru, který představuje rozložení magnetické indukce na povrchu této koule. Velikost magnetické indukce je zde znázorněna pomocí různých barev. Tmavě modrá barva představuje nejmenší a naopak tmavě červená barva největší hodnotu indukce. Vrcholové body rozložené koule, kdy $z=1$ mm a -1 mm ($r=1$), mají jen jedinou hodnotu magnetické indukce a to pro všechny azimuty φ .

7.2 Porovnání koeficientů Legendrova a Taylorova rozvoje

Při výpočtu aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ a tedy i při následném výpočtu magnetické indukce se vycházelo z naměřených hodnot. Hodnoty těchto koeficientů se liší v závislosti na použité metodě výpočtu. Výpočet aproximačních koeficientů s použitím Legendrových polynomů byl proveden pro stupeň aproximace $Q=4$, který je určený stupněm Legendrova polynomu zvětšeným o jedničku. Koeficienty získané druhou metodou byly vypočítány za pomoci gradientů Taylorova rozvoje do třetího řádu. Tabulky s hodnotami koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ obou metod pro $Q=4$ vypadají následovně:

Tab. 4: Tabulka hodnot aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ v [μT] modelu (rozvoje) do 3. stupně a řádu Legendrova polynomu.

m/n	0	1	2	3
$C_{n,0}$	0,2100	-3,4118	22,6684	7,2867
$C_{n,1}$		-7,5542	0,8474	2,5073
$D_{n,1}$		-3,0785	1,7784	1,8020
$C_{n,2}$			-1,7031	-0,2591
$D_{n,2}$			-1,0555	0,4013
$C_{n,3}$				0,1381
$D_{n,3}$				0,0531

Tab. 5: Tabulka hodnot aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ v [μT] modelu (rozvoje) do 3. řádu Taylorova rozvoje.

m/n	0	1	2	3
$C_{n,0}$	0,2100	-3,4118	22,6684	43,7201
$C_{n,1}$		-7,5542	2,5422	30,0879
$D_{n,1}$		-3,0785	5,3351	21,6244
$C_{n,2}$			-21,5531	-29,6317
$D_{n,2}$			-6,3327	12,0396
$C_{n,3}$				-10,1342
$D_{n,3}$				-0,6228

Tab. 6: Tabulka podílů hodnot aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ v [μT] Tab. 3 a Tab. 2 modelu (rozvoje) pro $Q=4$.

m/n	0	1	2	3
$C_{n,0}$	1	1	1	6
$C_{n,1}$	0	1	3	12
$D_{n,1}$	0	1	3	12
$C_{n,2}$	0	0	12,7	114,4
$D_{n,2}$	0	0	6	30
$C_{n,3}$	0	0	0	73,4
$D_{n,3}$	0	0	0	11,7

Hodnoty aproximačních koeficientů v Tab. 6 odpovídají předchozí teorii tzn., Legendrovým a Taylorovým rovnicím. Hodnoty v Tab. 4. a Tab. 5. byly vypočítány pro body, jejichž vzdálenost od počátku souřadné soustavy byla rovna jedné ($r=1$) tzn., že tyto body tedy leží na povrchu koule, jejíž poloměr je jedna.

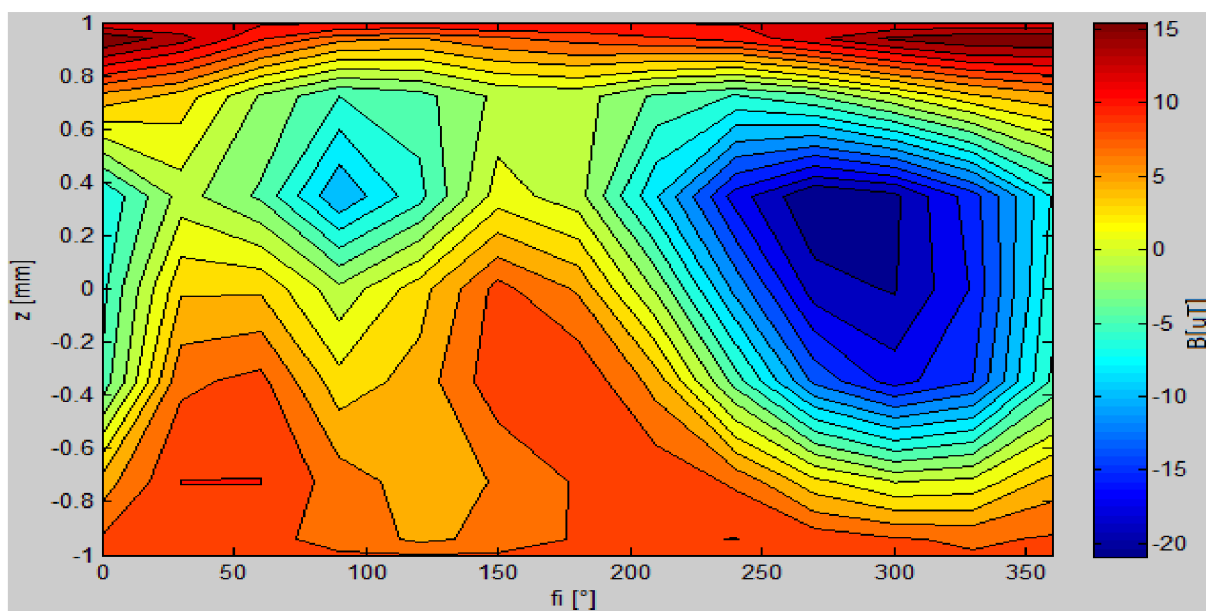
7.3 Porovnání naměřených a vypočítaných hodnot

Pomocí vypočítaných aproximačních koeficientů $C_{n,m}$ a $D_{n,m}$ se zpětným výpočtem u obou metod určily hodnoty magnetické indukce ve všech měřených bodech koule. Tabulky s hodnotami magnetické indukce, vypočítané pro 12 bodů na 9 kružnicích pro obě metody vypadají následovně:

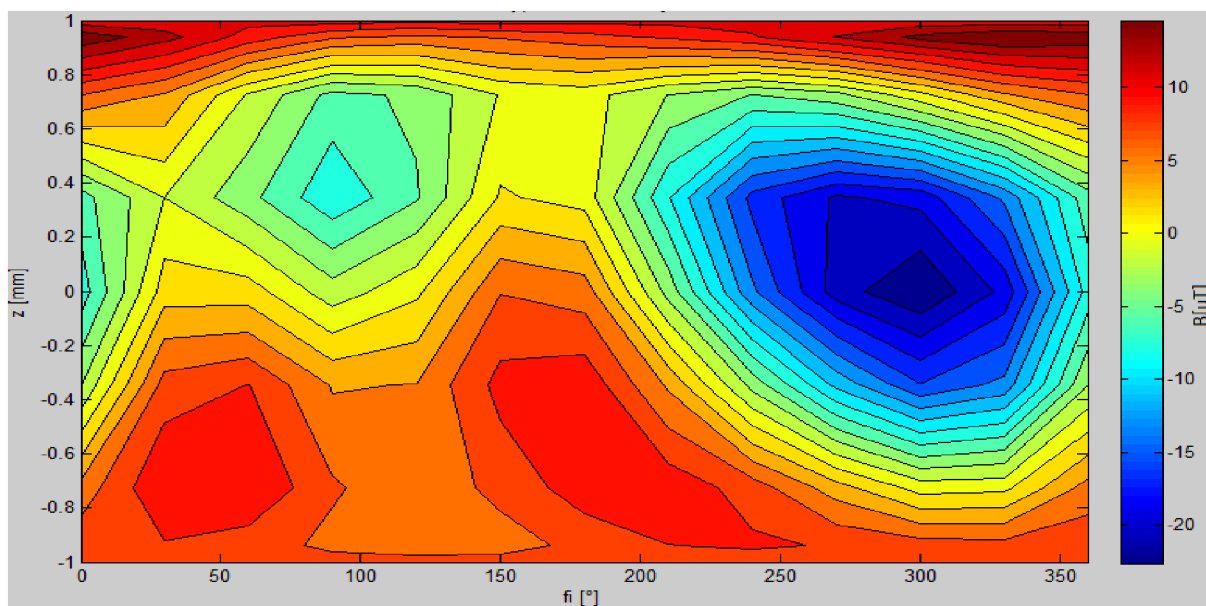
Tab. 7: Tabulka s hodnotami magnetické indukce vypočítanými pomocí Taylorova rozvoje i Legendrových polynomů pro 12 bodů ležících na 9 kružnicích v objemu koule.

k/b	1	2	3	4	5	6
1	11,5245	11,5245	11,5245	11,5245	11,5245	11,5245
2	15,9869	13,5025	10,0501	7,4022	6,6626	7,3747
3	7,1481	5,0781	-0,5110	-4,6600	-3,6313	-0,15112
4	-4,7445	-0,29502	-3,4415	-7,3641	-4,2412	1,7896
5	-6,9264	2,5624	2,4360	-1,3233	1,1388	7,0920
6	-2,1562	7,9664	9,0781	5,1178	5,3816	9,7024
7	6,0310	10,8564	10,8137	7,4233	5,8631	7,6965
8	8,4454	8,8312	8,1027	6,6710	5,8456	6,3554
9	7,9585	7,9585	7,9585	7,9585	7,9585	7,9585
k/b	7	8	9	10	11	12
1	11,5245	11,5245	11,5245	11,5245	11,5245	11,5245
2	8,3883	9,3288	10,7113	12,8333	15,1167	16,4745
3	0,4888	-2,1766	-4,0849	-2,6981	1,0085	5,0259
4	0,8599	-7,6375	-15,8494	-19,2372	-18,3122	-12,9845
5	6,2311	-2,8828	-12,9753	-19,8097	-22,6467	-18,381
6	10,4103	4,9945	-2,7217	-10,0727	-15,0434	-12,7597
7	10,0259	10,2902	8,1704	4,3086	0,7791	1,1082
8	7,7356	8,9822	9,3656	8,8197	8,0127	7,8480
9	7,9585	7,9585	7,9585	7,9585	7,9585	7,9585

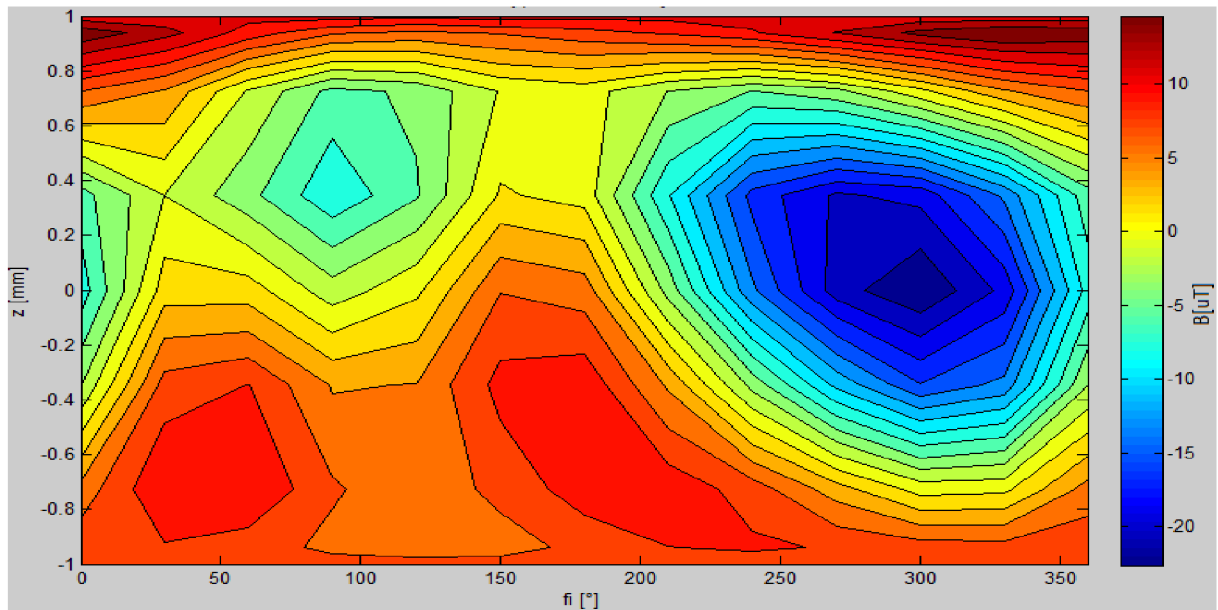
Index k značí počet kružnic, na kterých se nachází b měřených bodů souřadné soustavy. Z tabulky je zřejmé, že hodnoty magnetické indukce se tedy shodují jak při výpočtu z Legendrových polynomů, tak i z Taylorova rozvoje, i když má každá metoda jiné hodnoty aproximačních koeficientů. To může být způsobeno odlišným způsobem stanovení hodnot některých gradientů použitých při výpočtu rozvoje, případně vlivem gradientů vyšších řádů. Z vykreslených map pro oba rozvoje (Obr. 24, 25 a 26) je však vidět, že odlišnosti u koeficientů gradientů vyšších řádů se ve výsledné mapě v podstatě neprojeví. To také potvrzuje fakt, že nemá smysl používat pro výpočet nesmyslně vysoké stupně aproximace. Mapy znázorňující naměřené i vypočítané hodnoty magnetické indukce vypadají následovně:



Obr. 24: Mapa naměřených hodnot magnetické indukce.



Obr. 25: Mapa hodnot magnetické indukce vypočítaných pomocí Legendrových polynomů.



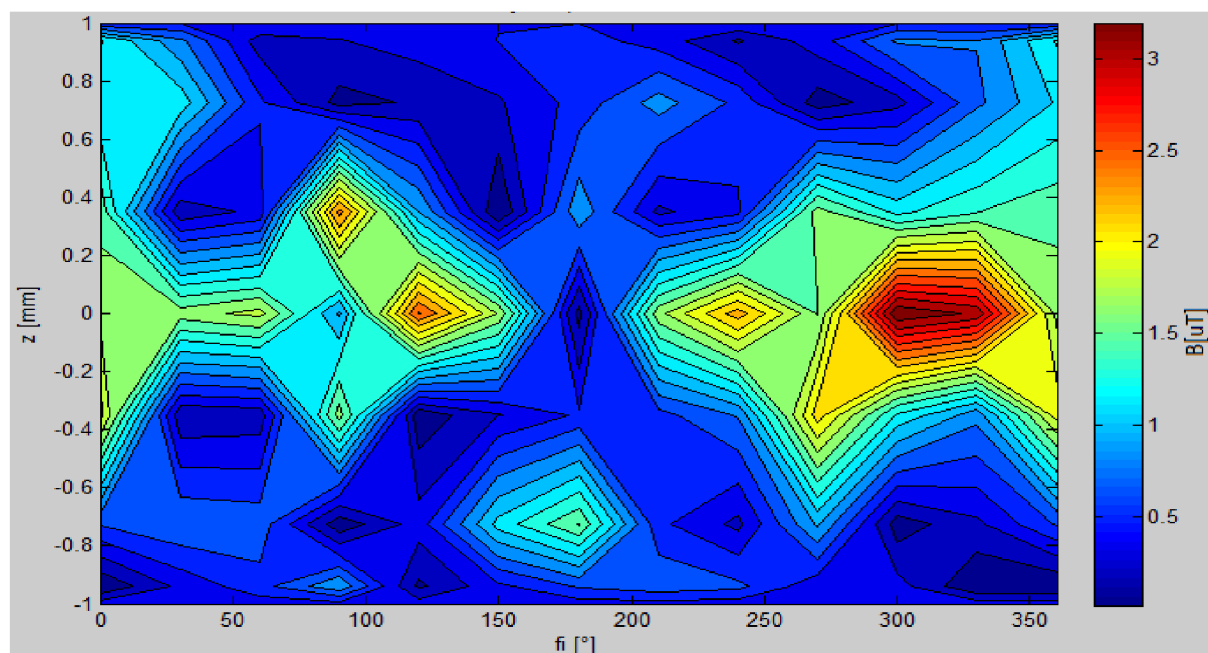
Obr. 26: Mapa hodnot magnetické indukce vypočítaných pomocí Taylorova rozvoje.

Rozdíly hodnot magnetické indukce v jednotlivých bodech mezi naměřenými a vypočítanými hodnotami jsou uvedeny v Tab. 8; názorně jsou vykresleny na Obr. 27.

Tab. 8: Tabulka rozdílu mezi hodnotami naměřenými v tomografu a hodnotami vypočítanými.

k/b	1	2	3	4	5	6
1	0,493	0,493	0,493	0,493	0,493	0,493
2	1,3091	0,856	0,2664	0,3292	0,4116	0,4978
3	1,1561	1,2241	0,523	0,125	0,2003	0,31888
4	1,5535	0,22502	0,3865	2,4589	0,9758	0,0194
5	1,7094	1,6911	1,8175	0,9473	2,5742	1,744
6	2,0028	0,2114	0,2421	1,6868	0,0706	0,3264
7	0,673	0,7984	0,7557	0,0683	0,4111	1,1875
8	0,0324	0,3808	0,5923	0,943	0,1474	0,4596
9	0,4167	0,4167	0,4167	0,4167	0,4167	0,4167

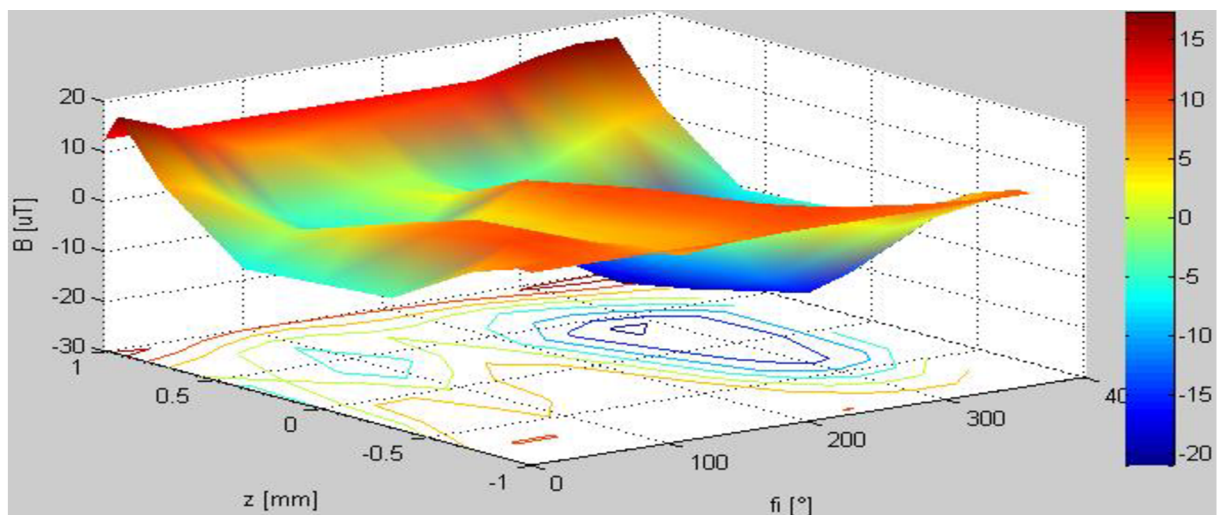
k/b	7	8	9	10	11	12
1	0,493	0,493	0,493	0,493	0,493	0,493
2	0,5652	0,4237	0,1598	0,4207	0,8398	0,8215
3	0,5588	0,8784	0,6151	0,0979	0,2805	0,7724
4	0,9299	0,3055	0,4596	1,6778	1,2398	1,4445
5	0,1211	1,7078	2,3298	1,5972	3,3532	3,153
6	0,5173	0,5985	0,8268	2,1708	1,2656	0,8703
7	1,6129	0,5372	0,2974	0,9956	0,0899	0,3018
8	0,6774	0,7708	0,6924	0,3923	0,4003	0,025
9	0,4167	0,4167	0,4167	0,4167	0,4167	0,4167



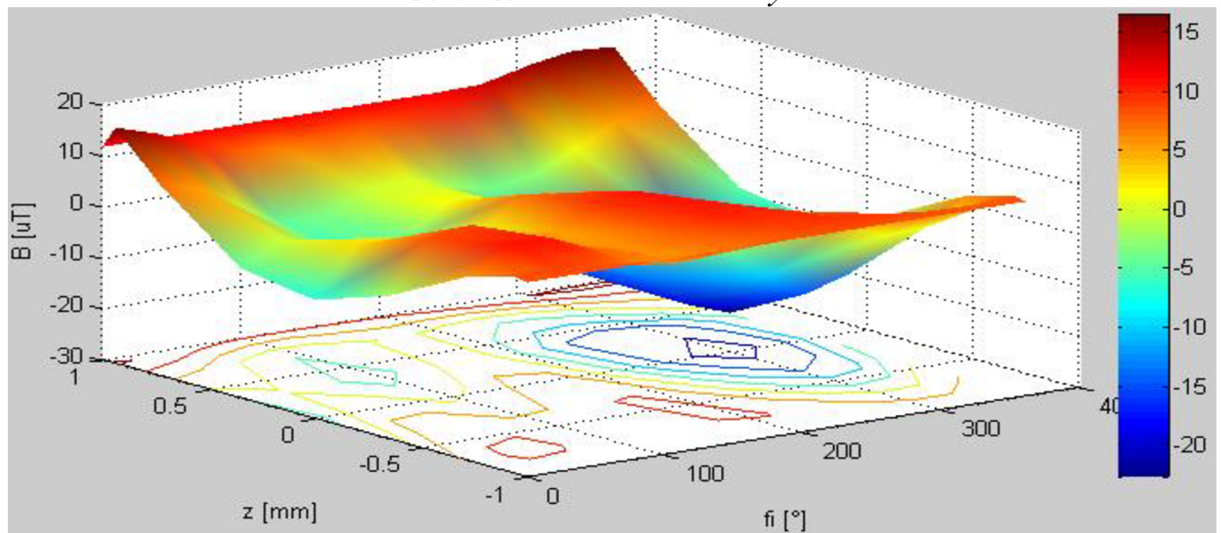
Obr. 27: Mapa rozdílu mezi naměřenými a vypočítanými hodnotami magnetické indukce.

Maximální chyba vzhledem k hodnotě rozdílu mezi minimem a maximem souboru měřených dat je asi 8,8 %, což odpovídá odchylce 3,3532 μT . Odchytky jsou způsobeny nepřesným určením polohy sondy při měření, z čehož plyne nepřesné stanovení souřadnice pro výpočet atd.. Může být taky nepřesné odečtení naměřené frekvence ze spektra NMR signálu a ovlivnění pole tomografu sondou.

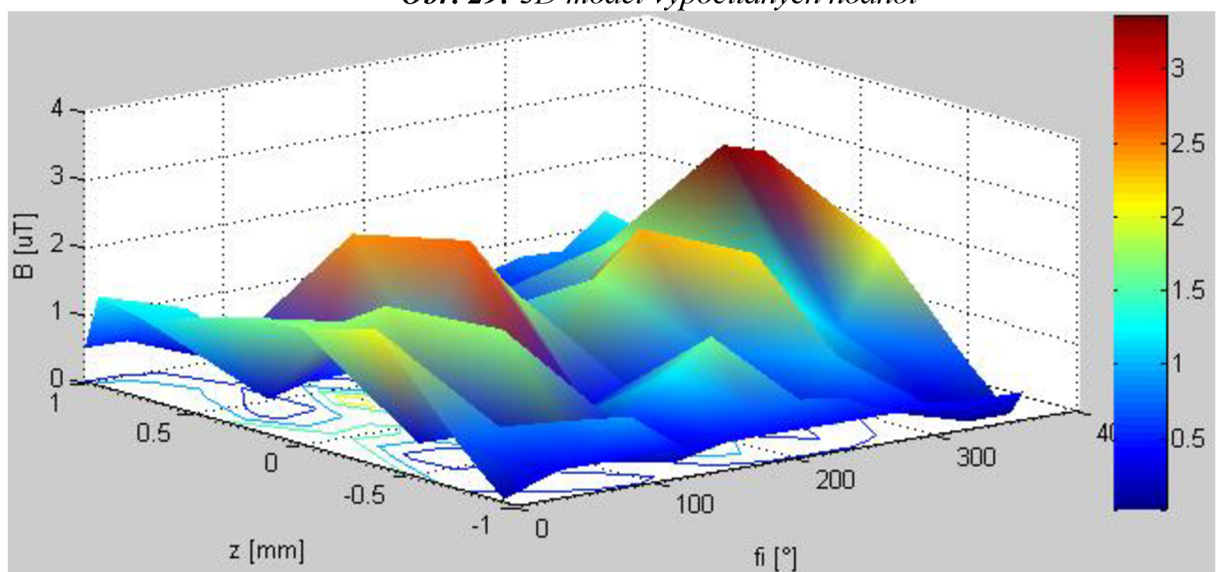
Srovnání naměřených a vypočtených hodnot ve 3D modelech vypadá následovně:



Obr. 28: 3D model naměřených hodnot



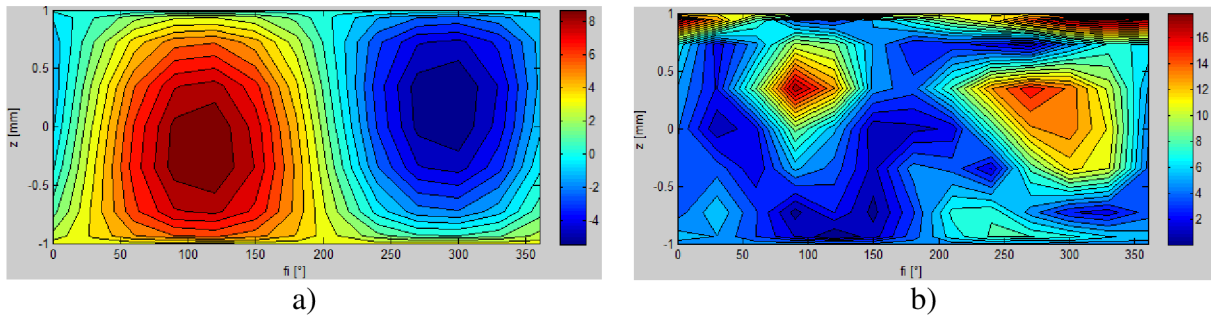
Obr. 29: 3D model vypočítaných hodnot



Obr. 30: 3D model rozdílových hodnot magnetické indukce

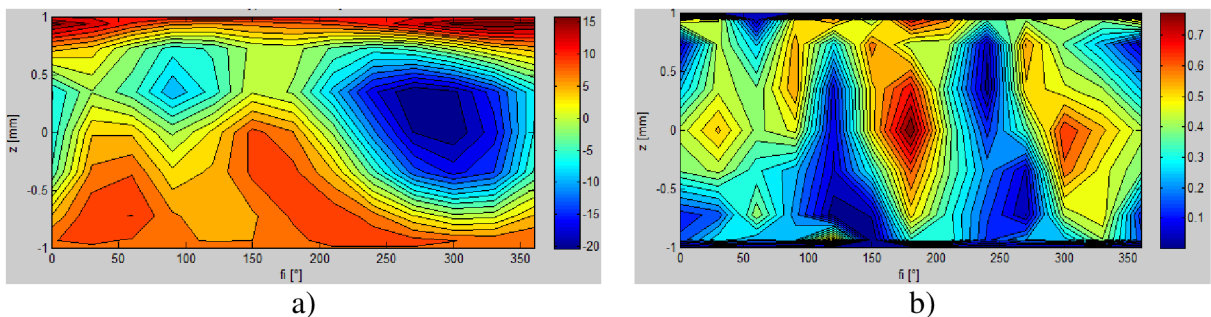
7.4 Stupeň aproximace

S rostoucím stupněm aproximace (stupněm polynomu) se zpřesní výpočty hodnot aproximačních koeficientů a celkově tedy i výsledné pole. Je to způsobeno tím, že se počítá s větším počtem hodnot, tzn. s většími maticemi, jejichž rozměry jsou závislé na stupni polynomu a počtu měřených (počítaných) bodů. S každým nárůstem stupně polynomu se však zvyšuje náročnost výpočtů a tedy i doba, za kterou je program schopný zobrazit výsledek. Podoby map znázorňující rozložení magnetické indukce na povrchu koule pro různé stupně polynomu Q jsou uvedené na Obr. 31 a 32.



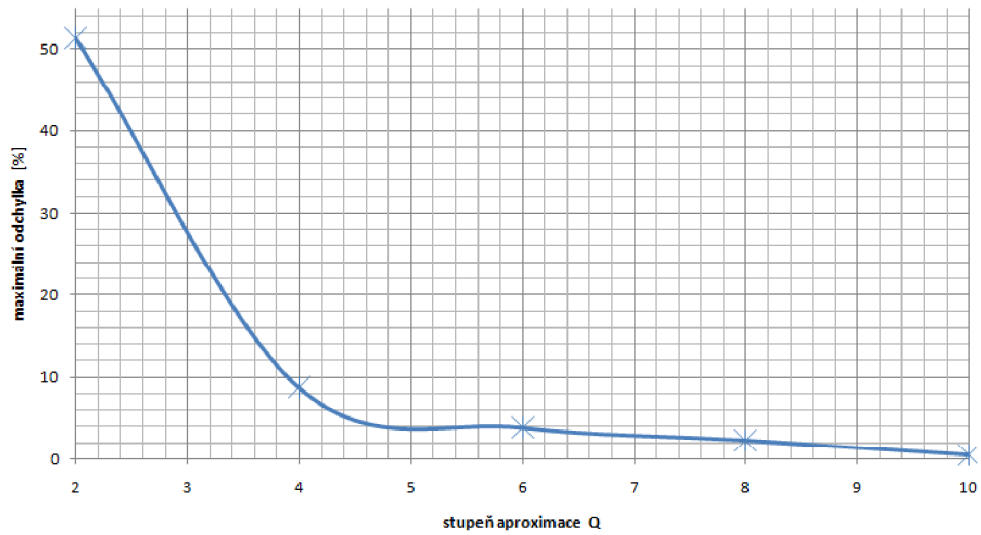
Obr. 31: Mapy vypočítaných hodnot magnetické indukce a) a rozdíl mezi naměřenými a vypočítanými hodnotami b) pro $Q=2$.

Pro stupeň aproximace $Q=2$ se zvýšily odchylky oproti $Q=4$ o více jak čtyřnásobek. Naopak pro $Q=7$ se odchylky asi o čtyřnásobek zmenšily.



Obr. 32: Mapy vypočítaných hodnot magnetické indukce a) a rozdíl mezi naměřenými a vypočítanými hodnotami b) pro $Q=7$.

Pro např. $Q=10$ je maximální odchylka už jen $0,19 \mu T$ atd., což potvrzuje předchozí poznatky. Zvyšováním stupně polynomu se sice zvětšuje přesnost výpočtů (Obr. 33), ale to nejde do nekonečna, protože potom už jsou koeficienty u gradientu tak malé, že se ve výsledné mapě stejně neprojeví. Při teoretickém popisu obou modelů pole jsme používali $Q=4$, protože při tomto stupni je již přesnost aproximace dostatečná a na rozvoji pole lze jasně demonstrovat souvislost mezi Legendre a Taylorem.



Obr. 33: Závislost maximální odchylky mezi naměřenými a vypočítanými hodnotami na stupni aproximace Q .

8. ZÁVĚR

V této práci byl čtenář seznámen s problematikou magnetické rezonance a jejími základními veličinami. Dále je zde popsán rozklad elektromagnetického pole a to dvěma způsoby. Prvním způsobem je výpočet gradientů tohoto pole pomocí Taylorova rozvoje. Počet členů rozvoje je možno redukovat s využitím Maxwellových rovnic. Dále byl proveden teoretický rozbor rozkladu magnetického pole pomocí Legendrových polynomů a demonstrována analogie mezi členy tohoto rozvoje a členy rozvoje Taylorovy řady. V další části bylo popsáno mapování pole na kulovém povrchu v tomografu pomocí NMR technik, při kterém se získaly data potřebná k následujícím numerickým výpočtům. Pro řešení soustavy rovnic, které byly zpracovány s využitím systému Matlab, byla použita metoda nejmenších čtverců. Touto metodou se získaly hodnoty aproximačních koeficientů a to za použití obou způsobů rozkladu magnetického pole. Z těchto koeficientů se následným zpětným výpočtem určily hodnoty magnetické indukce na povrchu měřené koule a byla tak ověřena přesnost a vhodnost použitých metod k rozkladu. Získané hodnoty byly v závěru porovnány a vykresleny do map znázorňující rozložený povrch měřené koule. Z výsledku práce je vidět, že výpočty magnetické indukce jsou při použití rozkladu Taylorovým rozvojem prakticky stejné jako při použití Legendrových polynomů. Z principu korekce nehomogenity základního magnetického pole \mathbf{B}_0 v NMR systémech lze vyvodit, že hodnoty získaných aproximačních koeficientů C a D lze využít pro určení napájecích proudů korekčních cívek tomografu, případně pro simulované ladění nehomogenity v Matlabu. Gradienty v uvedených rozvoji pole odpovídají gradientům generovaných korekčními cívkami. Uvedená metoda rozkladu pole má tedy využití pro homogenizaci pole v NMR systémech bez nutnosti experimentování s nastavením korekcí pouze dle zkrácení spektrálních čar či empirických zkušeností obsluhy.

LITERATURA

- [1] STEINBAUER, M., *Měření magnetické susceptibility technikami tomografie magnetické rezonance*. Disertační práce. Brno: FEKT VUT v Brně, 2005. 53 s
- [2] informace o zobrazovacích metodách: http://fmri.mchmi.com/main_index.php?strana=1
- [3] DRASTISCH, A., *Tomografické zobrazovací systémy*. Skriptum. Brno: FEI VUT v Brně, 2004. 208 s
- [4] HORNAK, P. J., *The basics of NMR* [online], Dostupný z WWW: <http://www.cis.rit.edu/htbooks/nmr/>
- [5] Kolektiv ÚFI FSI, *Elektřina a magnetismus*. Skriptum. Brno: ÚFI FSI VUT v Brně, 2005. 125 s
- [6] Halliday, D., Resnik, R., Walker, J.: *Fyzika*, VUTIUM a PROMETHEUS, 2000.
- [7] IVÁNEK, L., *Elektromagnetismus*. Učební text. 1.vyd., Ediční středisko VŠB – TUO, 2007. 183 s.
- [8] KONZBUL P., SVEDA K. : Shim Coils for NMR and MRI solenoid magnets, *Measurement Science and Technology*, Vol. 6, pp.1116-1123, 1995
- [9] REKTORYS, K. a kol. *Přehled užité matematiky*. Praha: Prometheus, 1995. 720 pages. ISBN 80-85849-92-5.
- [10] KONZUBL, P., *Generace a analýza korekčních magnetických polí pro NMR a MRI solenoidální magnety*. Disertační práce. Brno: FEKT VUT v Brně a ÚPT AV ČR, 1997.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

Zkratky

<i>NMR</i>	nukleární magnetická rezonance
<i>FID</i>	signál volné precese (Free Induction Decay)
<i>SE</i>	technika MR zobrazování (Spin Echo)
<i>GE</i>	technika MR zobrazování (Gradient Echo)
<i>TE</i>	časové echo (Time echo)
<i>TR</i>	časové opakování (Time Reppetition)
<i>LSQ</i>	Metoda nejmenších čtverců (Least mean Squares)
<i>RF</i>	radiofrekvenční

Symboly a veličiny

F	vektor elektromagnetické síly	(N)
v	vektor rychlosti pohybující se částice	(m·s ⁻¹)
F_e	vektor elektrické síly	(N)
F_m	vektor magnetické síly	(N)
Q	elektrický náboj	(C)
e	elementární náboj, $e = 1,602\ 19 \cdot 10^{-19}$	(C)
E	vektor intenzity elektrického pole	(V·m ⁻¹)
B	vektor magnetické indukce	(T)
F_m	vektor magnetické síly	(N)
I	vektor proudu	(A)
ψ	elektrický indukční tok	(C)
φ	magnetický indukční tok	(Wb)
ε_i	indukované elektromotorické napětí	(V)
H	intenzita magnetického pole	(A·m ⁻¹)
T1 a T2	relaxační doby	(s)
T₂[*]	efektivní spin-spinová relaxační doba	(s)
M_z	vektor magnetizace	(A·m ⁻¹)
B₀	homogenní magnetické pole	(T)
p	rotační impuls elementární částice	
γ	gyromagnetický poměr	(rad·s ⁻¹ ·T ⁻¹)
m	kvantové číslo	
h	Planckova konstanta ($h = 6,626 \cdot 10^{-34}$)	(J·s)
ħ	redukovaná Planckova konstanta ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$)	(J·s)
μ_j	jaderný magneton ($\mu_j = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,051 \cdot 10^{-27}$)	(A·m ²)

g	Landého faktor	(-)
ω_0	Larmorova frekvence	(s ⁻¹)
k	Boltzmanova konstanta ($k=1,38 \cdot 10^{-23}$)	(W.s/K)
T	absolutní teplota	(K)
N_p	počet protonů	
\mathbf{B}_0	vektor indukce základního magnetického pole	(T)
\mathbf{B}'	vektor poruchové složky magnetického pole	(T)
B_z	hlavní složka magnetické indukce	(T)
\mathbf{J}	moment hybnosti jádra	(kg·m ² ·s ⁻¹)
\mathbf{m}, μ	magnetický moment atomu nebo molekuly	(A·m ²)
μ_r	relativní permeabilita	(SI)
r, θ, φ	souřadnice ve sférické soustavě	
x, y, z	souřadnice v Kartézské soustavě	
n	stupeň polynomu	
m	řád polynomu	
$C_{n,m}$ a $D_{n,m}$	aproximační koeficienty stupně n a řádu m	
${}^m P_n$	Přidružený Legendrův polynom stupně n a řádu m	
P_n	Legendrův polynom stupně n	
$\Delta\varphi$	Přírůstek úhlu	(°)
Δz	Krok mezi kružnicemi	(m)
t_f	Perioda funkce	(s)
f_{nm}	Funkce homogenních polynomů	
Q	stupeň aproximace	
k	součet kružnic koule	
b	počet měřených bodů na jedné kružnici	