



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**OPTIMALIZACE NÁVRHU SOLÁRNÍHO KOLEKTORU  
VYUŽÍVAJÍCÍ LATENTNÍ TEPLA FÁZOVÉ PŘEMĚNY**

OPTIMAL DESIGN OF SOLAR AIR COLLECTOR WITH LATENT HEAT THERMAL ENERGY STORAGE

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Martin Zálešák**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.**

**BRNO 2018**



# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	<b>Bc. Martin Zálešák</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## **Optimalizace návrhu solárního kolektoru využívající latentní teplo fázové přeměny**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Solární kolektory patří mezi technická zařízení, která umožňují přeměnit solární energii na tepelnou energii. Tato tepelná energie může být následně použita např. k ohřevu vody nebo k vytápění. Solární kolektor využívající materiál s fázovou přeměnou navíc umožňuje akumulaci tepelné energie pro její pozdější využití. Vhodný návrh kolektoru je základním předpokladem pro jeho efektivní a ekonomický provoz.

Práce je zaměřena na vývoj tepelného modelu solárního kolektoru, který pro zvýšení efektivity svého provozu využívá latentního tepla fázové přeměny vhodného materiálu. Model bude následně využit zvoleným optimalizačním algoritmem k návrhu kolektoru a jeho provozu a pro stanovení vlastností materiálu měnícího skupenství.

### **Cíle diplomové práce:**

Cílem práce je naprogramovat (případně ve vhodném software vytvořit) tepelný model solárního kolektoru pro vzduchové systémy, který využívá materiálů se změnou fáze k akumulaci tepla. Model bude následně využit zvoleným optimalizačním algoritmem/softwarem k návrhu kolektoru a ke stanovení jeho optimálních parametrů.

### **Seznam doporučené literatury:**

MEHLING, Harald a Luisa F. CABEZA. Heat and cold storage with PCM: An up to date introduction into basics and applications. Heidelberg: Springer, 2008. ISBN 978-364-2088-070.

INCROPERA, Frank P., David P. DEWITT, Theodore L. BERGMAN a Adrienne S. LAVINE. Principles of heat and mass transfer. Sedmé vyd. Singapore: John Wiley, 2013. ISBN 978-0-470-64615-1.

RAO, Singiresu S. Engineering optimization: Theory and practice. Čtvrté vyd. Hoboken: Wiley, 2009.  
ISBN 978-0-470-18352-6.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato práce se zabývá tvorbou numerického modelu solárního kolektoru využívajícího materiály s fázovou přeměnou. Model byl implementován v programovacím jazyku Python. S využitím vytvořeného modelu byla provedena optimalizace několika úloh pomocí vybraných metod heuristické optimalizace. Výsledky chování modelu a optimalizace zvolených úloh byly následně vyhodnoceny.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

fázová přeměna, numerický model teplotního pole, metoda efektivní tepelné kapacity, heuristická optimalizace

## **ABSTRACT**

The thesis deals with the creation for a numerical model of a solar collector with a phase change material as a heat storage medium. The model was implemented in Python. Using the created model, design optimization of several problems was carried out with the use of selected methods of heuristic optimization. The results of the behaviour of the created model and of design optimization were then analysed and evaluated.

## **KEYWORDS**

phase change, numerical model for temperature distribution, effective heat capacity method, heuristic optimization

ZÁLEŠÁK, Martin. *Optimalizace návrhu solárního kolektoru využívající latentní teplo fázové přeměny*: diplomová práce. BRNO: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav Matematiky, 2018. 87 s. Vedoucí práce Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Optimalizace návrhu solárního kolektoru využívající latentní teplo fázové přeměny* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Lubomíra Klimeše, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

BRNO .....

.....

podpis autora





Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Lubomíru Klimešovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

BRNO .....

.....

podpis autora



# OBSAH

Vymezení cílů diplomové práce	13
Úvod	15
<b>1 Materiály s fázovou přeměnou</b>	<b>17</b>
1.1 Úvod do problematiky . . . . .	17
1.2 Konstrukční řešení . . . . .	19
<b>2 Základy přenosu tepla</b>	<b>21</b>
2.1 Základy přenosu tepla . . . . .	21
2.2 Vedení tepla . . . . .	21
2.3 Fourierův zákon . . . . .	22
2.4 Součinitel tepelné vodivosti . . . . .	22
2.5 Měrná tepelná kapacita . . . . .	23
2.6 Energetická bilance . . . . .	23
2.7 Rovnice vedení tepla v tělese . . . . .	24
2.8 Přenos tepla prouděním . . . . .	26
2.9 Přenos tepla zářením . . . . .	29
2.9.1 Sluneční konstanta . . . . .	29
<b>3 Metoda kontrolních objemů</b>	<b>31</b>
3.1 Úvod . . . . .	31
3.2 Diskretizace . . . . .	31
3.3 Numerický model CSM panelu . . . . .	32
3.3.1 Vnitřní uzlové body . . . . .	34
3.3.2 Rohové uzlové body . . . . .	36
3.3.3 Hranové uzlové body . . . . .	37
3.3.4 Stranové uzlové body . . . . .	38
3.4 Stabilita metody kontrolních objemů . . . . .	40
3.5 Model proudícího vzduchu . . . . .	43
3.5.1 Diskretizace vrstvy vzduchu . . . . .	43
3.5.2 Funkce sousednosti – neighFun . . . . .	45
3.5.3 Pohybová funkce – moveFun . . . . .	48
3.6 Numerické řešení proudícího vzduchu . . . . .	50
3.6.1 Tepelné toky prouděním . . . . .	50
3.6.2 Vnitřní uzlové body . . . . .	51
3.6.3 Rohové uzlové body . . . . .	52
3.6.4 Hranové uzlové body . . . . .	53

3.7	Programové řešení . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Numerické modelování fázové přeměny</b>	<b>55</b>
4.1	Metoda efektivní tepelné kapacity . . . . .	55
4.2	Metoda entalpie . . . . .	58
4.3	Metoda zotavující se teploty . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Optimalizace</b>	<b>59</b>
5.1	Úvod . . . . .	59
5.2	Evoluční metody . . . . .	60
5.2.1	Algoritmus diferenciální evoluce . . . . .	60
5.3	Optimalizace hejnem částic . . . . .	63
5.4	Blackbox optimalizace . . . . .	63
5.5	Energetická optimalizace solárního kolektoru . . . . .	64
5.6	Optimalizace z hlediska stabilní teploty na výstupu . . . . .	73
5.7	Zhodnocení optimalizace . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>77</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>79</b>

# VYMEZENÍ CÍLŮ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Dílčí cíle v rámci této diplomové práce je možno formulovat v následujících bodech:

- Rešerše základních termodynamických pojmů popisujících přenos tepla.
- Vytvoření numerického modelu solárního kolektoru ve 3D pomocí metody kontrolních objemů.
- Vytvoření dynamického modelu solárního kolektoru.
- Optimalizace návrhu solárního kolektoru pomocí vytvořeného modelu a zhodnocení výsledků.



# ÚVOD

Celosvětové využívání energie značně narostlo, protože poptávka po energii exponenciálně roste. Od průmyslové revoluce, celosvětová spotřeba energie silně spoléhá na fosilní paliva, které se staly nepostradatelnou částí moderního života [11]. Většina elektrické energie (okolo 78%) je získávána z fosilních paliv a jaderných elektráren. Obnovitelné zdroje tvoří okolo 22% a z toho jde většinou o hydroelektrárny [23]. Ostatní obnovitelné zdroje energie – solární, větrná, geotermální, vlnová, tvoří pouze 5% celkové produkované energie [23]. Obnovitelné zdroje energie jsou však velmi podceňovány, protože jsou schopné zásobovat světovou energetickou poptávku. Z výzkumů plyne, že pokud bychom využili alespoň 5% celkové solární energie, pak bychom získali 50krát více energie, než je celosvětová spotřeba. Solární energie má výhodu v přístupnosti a obnovitelnosti, navíc její využívání neznečišťuje prostředí [16].

Materiály s fázovou přeměnou (PCM) mají v posledních letech velké množství aplikací. Hlavní myšlenkou naprosté většiny aplikací je určitým chytrým způsobem využít energie, která je uložena v materiálu v důsledku procesu fázové přeměny ve formě latentního tepla. Toto teplo je následně využito k účelům, které jsou specifické u každé aplikace.

Velká řada aplikací se snaží využít solární energii prostřednictvím solárních kolektorů [11][10], které vyžívají sluneční záření např. k ohřevu vzduchu. V reálné aplikaci může jít o vysoušení bylinek [11], kde je velice podstatné, aby nedošlo k přerušení procesu dehydratace během noci. Ukázalo se, že s využitím PCM materiálů je to možné a dochází k výrazné úspoře energie oproti klasickým způsobům vysoušení. Tento způsob je konstrukčně jednoduchý a nenáročný na údržbu, což z něj dělá výbornou alternativu pro rozvojové země, kde elektrická energie nemusí být samozřejmostí.

PCM materiály se těší velkému množství aplikací ve stavebnictví. Jejich zabudováním do vozovky dojde k akumulaci tepla během dne a zabrání jejímu přehřívání, které může často vést k nežádoucím efektům jako je např. deformace jejího povrchu [17]. Další z aplikací je klimatizace budov. Ve státech s horkým klimatem velice často dochází k skokovému nárůstu odběru energie, proto zlepšení vnitřního klimatu pomocí PCM materiálu dokáže odlehčit elektrické síti a po určitou dobu efektivně pracovat [5]. Aplikací PCM materiálů do oken lze také docílit klimatizace vzduchu [18]. Další možností může být využití PCM materiálu v mobilních zařízeních, s cílem redukce jejich přehřívání [20].

Hlavní cíle této diplomové práce jsou vytvoření numerického modelu solárního kolektoru ve 3D a vzduchových vrstev, který bude zohledňovat změnu fáze PCM materiálu a především pak optimalizace parametrů takto vytvořeného modelu.





# 1 MATERIÁLY S FÁZOVOU PŘEMĚNOU

## 1.1 Úvod do problematiky

Materiály s fázovou přeměnou mají velký potenciál v tepelných systémech, především protože umožňují efektivněji manipulovat např. se solární energií a nebo s tepelnými přebytky během různých průmyslových procesů. Umožňují uložit velké množství energie na jednotku hmoty a to i při malém teplotním rozmezí, čímž se stávají vhodnou volbou pro mnoho technických aplikací. Myšlenkou je využití latentního tepla fázové přeměny, která probíhá při přechodu z kapalně na plynnou fázi nebo z tuhé na kapalnou a opačně.

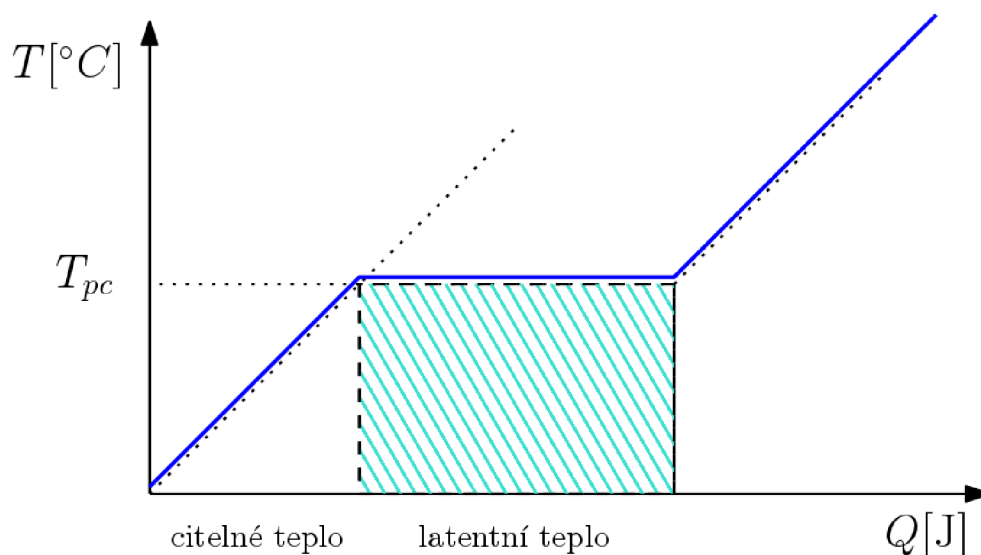
Prvním z případů je fázová přeměna z kapalně na plynný stav – tzv. var. S rostoucí teplotou ohřívána kapalina přejde celá do plynněho stavu. Fyzikální vlastnosti plynněho stavu této látky se však výrazně liší od jejích vlastností ve stavu kapalněm. Jednou z největších změn projde hustota. Zatím co hustota vody při atmosférickěm tlaku a pokojové teplotě je přibližně  $1 \text{ g cm}^{-3}$ , tak hustota páry při  $125^\circ\text{C}$  nabývá hodnot okolo  $0,56 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}$ , což je rozdíl 3 řádů. Chemické složení však zůstává nezměněno a původní kapaliny lze dosáhnout reverzním procesem pomocí ochlazení.

Druhým případem je proces tání. Jedná se o přechod z tuhého stavu na stav kapalně. Jako příklad lze uvažovat např. vosk. Postupným ohřevem dojde k přeměně fáze z pevně na kapalnou. Stejně jako v předchozím případě dochází ke změně fyzikálních vlastností a proces je vratně.

Tedy fázová přeměna je změnou uspořádání atomů, molekul nebo částic látky daněho chemického složení, způsobená z vnějšku, která se projeví změnou fyzikálních vlastností.

V této práci bude uvažován především případ – přechod pevná/kapalná fáze. Z technických důvodů je fázová přeměna pevná/kapalná fáze lépe dosažitelná než u kapalně/plynně. Pevná fáze materiálu je charakteristická pevným uspořádáním atomů a molekul v materiálu. Pokud je materiál ohříván, pak jejich kinetická energie roste a při určité teplotě, známě jako teplota tání, dojde k porušení silných vnitřních sil a ty se stanou slabšími – Van-der-Waalsovy síly [19]. Tedy materiál po fázové přeměně půjde jednoduše deformovat i pomocí menších sil.

Hlavním principem většiny aplikací spojených s PCM materiály je manipulace s latentním teplem fázové přeměny. Latentním teplem fázové přeměny nazýváme teplo, které je potřeba dodat během fázové přeměny z pevné fáze na kapalnou. Pokud ohříváme látku mimo oblast fázové přeměny pak jedná o tzn. citelné teplo. Na obr. 1.1 lze vidět TQ diagram, který ukazuje jak se mění teplota v závislosti na teple dodaném materiálu.



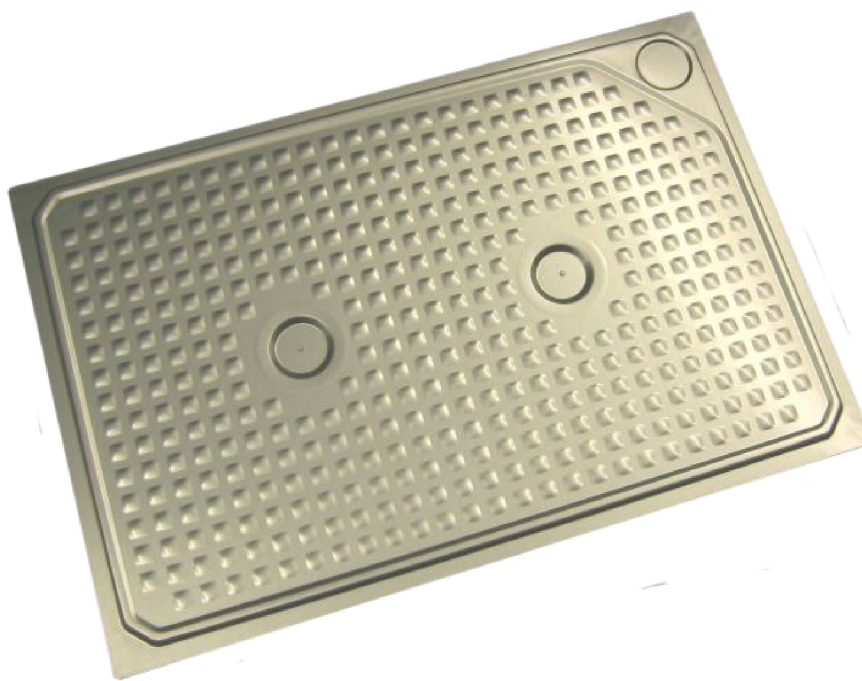
Obr. 1.1: TQ diagram

Dalo by se tedy říct, že aplikace využívající PCM materiály fungují na principu akumulace energie ve formě latentního tepla. PCM materiál má funkci určitého zásobníku na energii, čímž výrazně zvyšuje množství tepelné energie kterou je možné do materiálu uložit.

## 1.2 Konstrukční řešení

Ve velkém počtu aplikací se využívá materiálů na bázi parafínu. Konkrétně stojí za zmínku PCM materiály od německé firmy Rubitherm, které jsou v této práci uvažovány. PCM materiál, především v aplikacích solárního ohřevu vzduchu, je zabudován v hliníkových panelech obdélníkového tvaru, které se často označují zkratkou CSM – z anglického compact storage modules viz obr. 1.2.

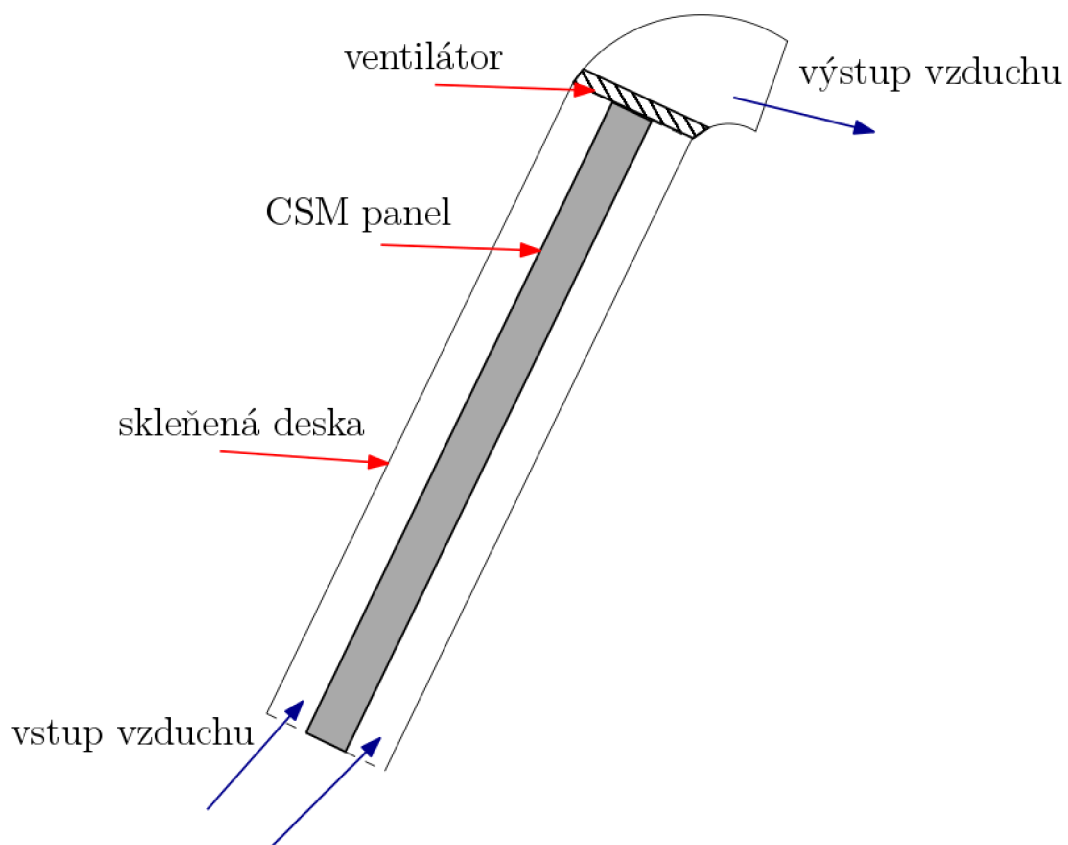
Hliníkový obal zajišťuje velký přenos tepla a také neodmyslitelně malou náchylnost ke korozi, které navíc brání i oboustranná antikorozní vrstva. Výrobce uvádí, že teploty fázové přeměny jednotlivých materiálů z řady RT je možné vybírat od  $-10^{\circ}\text{C}$  do  $90^{\circ}\text{C}$  [21].



Obr. 1.2: CSM panel

Tyto panely jsou základem celého solárního kolektoru. Ze strany dopadu slunečního záření mají skleněnou desku a ze strany druhé je plech s izolací, aby co nejméně tepla uniklo zadní stranou. Mezi CSM panelem a sklem (resp. plechem s izolací) je mezera pro proudění vzduchu. V horní části kolektoru je otvor pro odsávání vzduchu, který je pomocí ventilátoru odváděn potrubím viz Obr. 1.3.

Absorbér solárního kolektoru, tvořený z PCM materiálu, je ohříván slunečním zářením a mění svou fázi, čímž do sebe ukládá tepelnou energii ve formě latentního tepla fázové přeměny. Takto akumulovaná energie se následně využije pro ohřev vzduchu, který proudí okolo CSM panelů viz obr. 1.3. Úkolem této práce je nyní vytvořit model teplotního pole CSM panelů, vzduchu proudícího okolo a pomocí něj optimalizovat parametry zařízení, tak aby byl ohřev co nejefektivnější.



Obr. 1.3: Solární kolektor

## 2 ZÁKLADY PŘENOSU TEPLA

Přenos tepla se uskutečňuje ve formě vedení, proudění nebo záření, avšak ve většině technických aplikací se setkáváme s kombinací všech tří zároveň. S vedením se v této práci setkáme uvnitř PCM materiálu. Proudění se bude realizovat na rozhraní PCM materiál/vzduch a pomocí slunečního záření se bude jednostranně ohřívat PCM materiál. Nejprve je však nutné zavést základní veličiny, které nám poskytnou základ pro další výpočty. V této kapitole bylo čerpáno z [8] a hlavně především z [22].

### 2.1 Základy přenosu tepla

Energii je možné přenést interakcí systému s jeho okolím. Takové interakce jsou buď teplo a nebo práce. Aby došlo k přenosu tepla mezi systémem a okolím, je nutná existence teplotního gradientu. Důležité pojmy pro charakterizaci přenosu tepla jsou tepelný tok a hustota tepelného toku, které popsány následovně:

- Tepelný tok celkový [W], tj. tepelný tok, který teče danou plochou  $S$  je značen  $\dot{Q}$
- Měrný tepelný tok [ $\text{W m}^{-2}$ ], který udává plošnou hustotu tepelného toku je značen  $\dot{q}$

Vzájemný vztah mezi nimi popisuje rovnice

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{S}. \quad (2.1)$$

### 2.2 Vedení tepla

Vedení tepla lze popsat jako přenos energie od více energetických k méně energetickým částicím. Tyto částice mohou být molekuly (pro případ kdy se jedná o plyny nebo kapalinu) nebo v našem případě atomy tuhých látek [4]. Vedení tepla se potom uskutečňuje ve směru klesající teploty za předpokladu, že existuje teplotní gradient.

Reálnými příklady přenosu tepla vedením jsou – přenos tepla uvnitř tuhých materiálů jako je např. ocel, zeď aj. nebo kontakt dvou pevných těles. Přenos tepla vedením je zanedbatelný pro plynné látky, kde značně převažuje konvektivní přenos tepla.

## 2.3 Fourierův zákon

Měrný tepelný tok  $\dot{q}$  [ $\text{W m}^{-2}$ ], to jest celkový tepelný tok  $\dot{Q}$  [W] vztažený na jednotku plochy  $S$ , přenášený vedením v nějaké látce je přímo úměrný velikosti teplotního gradientu a má opačné znaménko než tento gradient [4]

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{S} = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (2.2)$$

kde  $\lambda$  je veličina známá jako součinitel tepelné vodivosti, tedy fyzikální vlastnost materiálu. Její rozměr je [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]. Záporná hodnota u  $\lambda$  v rovnici (2.2) plyne z faktu, že směr tepelného toku je vždy opačný ke směru teplotního gradientu.

Fourierův zákon lze zapsat v 1D případě ve zjednodušeném tvaru. Pro konečný teplotní rozdíl  $\Delta T$  na krajích dané vrstvy o tloušťce  $\delta$  a tepelné vodivosti  $\lambda$  platí

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\Delta T}{\delta}. \quad (2.3)$$

Jelikož tepelný tok je vektorová veličina, je nutné obecně uvažovat jeho plný tvar ve 3D. Pro obecný případ vedení tepla ve 3D tělese je pak Fourierův zákon ve znění:

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \text{grad } T. \quad (2.4)$$

V kartézské souřadné soustavě je gradient vyjádřen vztahem

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.5)$$

Tepelný tok má tedy zřejmě tři složky

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.6)$$

## 2.4 Součinitel tepelné vodivosti

Součinitel tepelné vodivosti  $\lambda$  je fyzikální vlastností látky, která byla zavedena jako konstanta úměrnosti mezi teplotním tokem a gradientem teploty ve Fourierově zákoně. Obecně u všech látek je součinitel tepelné vodivosti funkcí teploty nebo případně i polohy, pokud jde o nehomogenní látku. Avšak pro výpočty je běžně považován za konstantní.

Pro různé druhy materiálu se tepelná vodivost liší. Např. pro hliník, kterým je obalen PCM materiál v CSM panelech, má součinitel tepelné vodivosti  $221 \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ . Tzn. neklade téměř žádný tepelný odpor a je možné tuto vrstvu v modelu zanedbat. Naopak součinitel tepelné vodivosti vzduchu je  $0,01 \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ , což dělá z plynu velmi dobré tepelné izolanty [8]. Díky této vlastnosti bude zároveň možné v modelu zanedbat přenos tepla vedením mezi jednotlivými kontrolními objemy vzduchu.

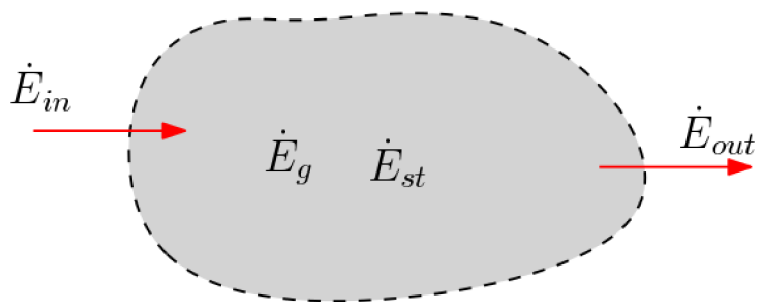
Čím větší hodnotu součinitele tepelné vodivosti těleso má, tím menší odpor klade vůči přenosu tepla z jedné části tělesa na druhou. Jinak řečeno, k přenesení určitého tepelného toku je nutný určitý teplotní rozdíl mezi oběma stranami tělesa. Tento potřebný rozdíl teplot bude tím vyšší, čím má materiál tělesa nižší hodnotu tepelné vodivosti.

## 2.5 Měrná tepelná kapacita

Veličina měrná tepelná kapacita  $c$  [ $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ] vyjadřuje množství tepla, které je potřeba přivést látce o hmotnosti 1 kg, aby se ohřála o 1 K [4]. Měrná tepelná kapacita je stejně jako součinitel tepelné vodivosti mírně teplotně závislá. Pro běžné výpočty se považuje za konstantní. Na její teplotní závislosti je však postavená celá metoda efektivní tepelné kapacity z kapitoly 4, což umožní modelovat materiály s fázovou přeměnou.

## 2.6 Energetická bilance

Důvodem proč zavést pojem energetické bilance je, že pomocí ní dokážeme vyjádřit jak moc se těleso ohřívá či ochlazuje, než dosáhne rovnovážného stavu s okolím. Zavedení energetické bilance pro kontrolní objem má smysl především protože je velmi často využívána v metodě kontrolních objemů. Kontrolním objemem rozumíme oblast v prostoru ohraničenou kontrolním povrchem, přes který může procházet látka i energie viz obr. 2.1.



Obr. 2.1: Schéma kontrolního objemu

Jelikož 1. zákon termodynamiky musí platit v každém časovém okamžiku, je možné ho naformulovat s využitím toků energie. Zřejmě musí být taktéž v každém časovém okamžiku splněna rovnováha mezi měrnými toky energie [1].

Bilanční rovnici pro energetické toky lze zapsat jako:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} = \frac{dE_{st}}{dt}, \quad (2.7)$$

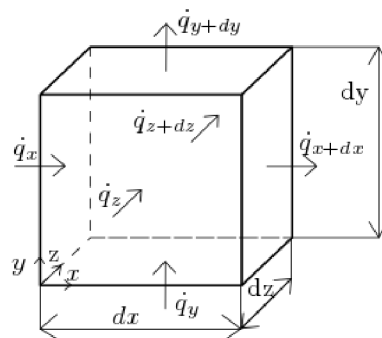
kde energetické toky  $\dot{E}_{in}$  a  $\dot{E}_{out}$  vyjadřují popořadě energii vstupující a vystupující z kontrolního objemu. Tyto toky jsou povrchové veličiny. Jsou tedy spjaty s procesy, které se vyskytují na kontrolním povrchu a jsou úměrné jeho velikosti. Nejběžněji jsou to tepelné toky vedením, konvencí nebo zářením. Energetické toky  $\dot{E}_{in}$  a  $\dot{E}_{out}$  v sobě zahrnují i práci.

Generovaná energie  $\dot{E}_g$  jevem objemovým. Vyjadřuje rychlost přeměny energie na tepelnou v daném kontrolním objemu. Velikost této energie je úměrná kontrolnímu objemu. Příkladem může být průtok elektrického proudu vodičem. Vodič se v důsledku svého odporu začne ohřívat, čímž se začne měnit elektrická energie na tepelnou. Hodnota této energie se označuje jako tzv. Joulovo teplo [8].

Energetický tok  $\dot{E}_{st}$  je hodnota energie akumulované v daném kontrolním objemu. Tento energetický tok se vyskytne jen v případě, když toky energie vstupující a vystupující z kontrolního objemu nejsou v rovnováze.

## 2.7 Rovnice vedení tepla v tělese

Uvažujme elementární krychli v kartézských souřadnicích s objemem  $dV = dx dy dz$ . Jsou vyjádřeny tepelné toky, které vstupují do tohoto objemového elementu stěnami s plochou  $S$  a souřadnicemi  $x, y, z$ . Tepelné toky, které vystupují z tohoto objemového elementu mají souřadnice  $x + dx, y + dy, z + dz$ . Dále je uvažována tepelná energie, která je generována v objemovém elementu. Nyní lze předepsat energetickou bilanci pro objemový element ve tvaru rovnice energetické bilance (2.7). Za energie  $\dot{E}_{in}, \dot{E}_{out}$  jsou považovány tepelné toky vstupující resp. vystupující vedením ve všech směrech  $x, y, z$ .



Obr. 2.2: Schéma kontrolního objemu [22]

Pro jednotlivé toky platí platí:

- Tepelný tok vstupující do objemového elementu levou stěnou ve směru  $x$  (plocha stěny je na ose  $x$ -ové ose v místě  $x$ ) má hodnotu [8]

$$\dot{Q}_x = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$$

- Tepelný tok, který z objemového elementu vystupuje pravou stěnou ve směru  $x$  a v poloze  $x + dx$  je roven

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$$

Stejným způsobem lze definovat tepelné toky vstupující a vystupující z objemového elementu ve směru  $y$  a  $z$  ( $\dot{Q}_y, \dot{Q}_{y+dy}, \dot{Q}_z$  a  $\dot{Q}_{z+dz}$ ).



- Tepelná energie generovaná uvnitř objemového elementu  $\dot{E}_g$  je vyjádřena jako součin objemové energie  $\dot{Q}_{zdroj}$  [W m<sup>-3</sup>] a objemu tělesa

$$\dot{Q}'_{zdroj} = \dot{Q}_{zdroj} dV = \dot{Q}_{zdroj} dx dy dz \quad [\text{W}] \quad (2.10)$$

- Změna vnitřní energie objemového elementu v čase je dána jako

$$\frac{dU}{dt} = mc \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{W}] \quad (2.11)$$

Dosazením do rovnice energetické bilance pro objemový element je získán vztah

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z + \dot{Q}'_{zdroj} - \dot{Q}_{x+dx} - \dot{Q}_{y+dy} + \dot{Q}_{z+dz} = \frac{dU}{dt} \quad [\text{W}]. \quad (2.12)$$

Rovnice (1.8 – 1.11) a analogicky odvozené vztahy pro tepelné toky  $\dot{Q}_y$ ,  $\dot{Q}_{y+dy}$ ,  $\dot{Q}_z$ ,  $\dot{Q}_{z+dz}$  jsou dosazeny do rovnice (1.12). Je využito Fourierova zákona pro tepelný tok (2.2) a rovnice je elementárně upravena. Výsledný vztah je ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}_{zdroj} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.13)$$

což je rovnice vedení tepla, též známá jako rovnice tepelné difúze [8].

Pokud bude považován součinitel tepelné vodivosti, měrná tepelná kapacita a hustota za konstantní, tj.  $\lambda = \text{konst}$ ,  $c = \text{konst}$  a  $\rho = \text{konst}$ , dojde k zjednodušení rovnice na standardní tvar

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}_{zdroj}}{\lambda} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Veličina

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2.15)$$

se nazývá teplotní vodivost.

## 2.8 Přenos tepla prouděním

Přenos tepla prouděním neboli konvekcí je velmi podstatný pro kapalné a plynné látky, jelikož je ve většině případů dominantním vůči přenosu tepla vedením. Dá se rozdělit na dva typy a to na přirozenou konvekci a na konvekci nucenou [4]. Přirozená konvekce je způsobena rozdílem hustot, protože se změnou teploty dochází ke změně hustoty a tím je způsobeno proudění. Nucenou konvekci způsobují vnější síly, příkladem může být ventilátor, kompresor, vítr nebo čerpadlo [8].

### Newtonův ochlazovací zákon

Velikost tepelného toku prouděním charakterizuje Newtonův ochlazovací zákon, který má tvar

$$\dot{Q} = \alpha S(T_M - T_\infty), \quad (2.16)$$

kde  $\dot{Q}$  je tepelný tok prouděním např. mezi pevným tělesem a vzduchem, který se přenesse přes plochu  $S$ . Teplota  $T_M$  značí teplotu pevného tělesa a  $T_\infty$  je teplota okolí tzn. teplota v dostatečně velké vzdálenosti od pevného tělesa. Nejdůležitějším členem této rovnice je součinitel přestupu tepla  $\alpha$  [ $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ ]. Tento součinitel svým způsobem vyjadřuje, jaké množství tepla se při daných teplotách přenesse přes povrch  $S$ .

Určování součinitele přenosu tepla  $\alpha$  je obecně velice náročná úloha. Lze jej vyjádřit buď z experimentálních dat a nebo analyticky pomocí teorie podobnostních čísel. Je zřejmé, že teoreticky určený součinitel nebude nikdy plně vystihovat celý model, jelikož se jedná o velmi komplexní problém, který je ovlivněn velkým počtem parametrů.

### Podobnostní čísla

Podobnostní čísla jsou bezrozměrné veličiny, které hrají důležitou roli při popisu přenosu tepla. Dokážeme pomocí nich teoreticky určit hodnotu součinitele přestupu tepla, avšak jedná se pouze o empiricky odvozené hodnoty. Nyní budou definovány nejpoužívanější podobnostní čísla a následně pomocí nich vyjádřeny součinitele přestupu tepla.

### Reynoldsovo číslo

Reynoldsovo číslo vyjadřuje poměr setrvačných a viskózních sil [1]. Podle jeho hodnoty lze rozhodnout, jestli se jedná o proudění laminární, turbulentní nebo případně

o přechodové. Jeho hodnotu vyjadřuje vztah

$$Re = \frac{uD_h}{\nu}, \quad (2.17)$$

kde  $u$  je rychlost proudění,  $D_h$  charakteristický rozměr a  $\nu$  je kinematická viskozita. Charakteristický rozměr se dá vyjádřit vztahem  $D_h = \frac{4S}{\sigma}$  [1], kde  $S$  je plocha desky a  $\sigma$  je její obvod. Pro obdélníkovou desku o rozměrech  $a, b$  zřejmě platí  $D_h = \frac{4S}{\sigma} = \frac{4ab}{2a+2b}$ .

### Prandtlovo číslo

Prandtlovo číslo vyjadřuje míru podobnosti rychlostního a teplotního pole [8]. Do velké míry závisí na tom o jakou kapalinu jde a v jakém se nachází stavu. Prandtlova čísla řádově mnohem menší než 1, což jsou látky s malou viskozitou, indukují ve velké míře konvektivní přenos tepla. Prandtlovo číslo je definována jako

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}, \quad (2.18)$$

kde  $c_p$  je měrná tepelná kapacita látky,  $\mu$  je dynamická viskozita a  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti. Běžná hodnota pro plyny je zhruba 0,7 - 1.

### Grashofovo číslo

Grashofovo číslo udává poměr mezi vztlakem a viskózními silami, které působí na těleso. Je charakteristické pro přenos tepla volnou konvekcí. Je určeno vztahem

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TD_h^3}{\nu^2}, \quad (2.19)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $\beta$  je teplotní součinitel objemové roztažnosti [10],  $\nu$  je kinematická viskozita,  $\Delta T$  je rozdíl teploty povrchu a teploty okolí  $T_\infty$  a  $D_h$  je charakteristický rozměr.

### Rayleighovo číslo

Rayleighovo číslo je kombinací Prandtlova a Grashofova čísla a je typické pro charakterizaci proudění volnou konvekcí. Je dáno jako

$$Ra = Pr Gr. \quad (2.20)$$

## Nusseltovo číslo

Nusseltovo číslo představuje bezrozměrný součinitel přestupu tepla na povrchu tělesa a uvádá míru konvektivního přenosu tepla probíhajícího na jeho povrchu [1]. Nusseltovo číslo, které je blízké k 1, značí podobnou velikost konvektivní a konduktivní složky přenosu tepla a také, že jde o laminární proudění. Pro větší hodnoty převažuje konvektivní složka a jedná se o proudění turbulentní [1].

Pomocí Nusseltova čísla bude možné určit velikost součinitele přestupu tepla a to přímo z jeho předpisu

$$Nu = \frac{\alpha D_h}{k}, \quad (2.21)$$

kde  $k$  je součinitel tepelné vodivosti proudícího média, tedy v případě této práce se jedná o vzduch.

Avšak je nutné pomocí vhodné korelace vyjádřit Nusseltovo číslo. Tyto korelace se liší tím, pro jakou geometrii a jaký typ proudění jsou určeny. Geometrie je uvažována jako kanál mezi dvěma deskami a charakteristický rozměr je vyjádřen stejně jako u rovnice (2.17). Typ proudění je určen pomocí Reynoldsova čísla. Vnitřní proudění se běžně považuje za laminární, pokud je hodnota Reynoldsova čísla menší než 2300. Pro hodnoty  $Re \geq 2300$  jde o turbulentní proudění.

K výpočtu je nutné znát tzv. Moodyho faktor tření, který lze vyjádřit z Moodyho diagramu a nebo pomocí vztahu [1]

$$f = (0,79 \ln(Re) - 1,64)^{-2}, \quad (2.22)$$

pro  $3000 \leq Re \leq 5 \times 10^6$ . Pak tedy pro turbulentní proudění tzv. Gnielinského korelace [1], která je ve tvaru

$$Nu = \frac{(\frac{f}{8})(Re - 1000)Pr}{1 + 12,7(\frac{f}{8})^{\frac{1}{2}}(Pr^{\frac{2}{3}} - 1)}, \quad (2.23)$$

což platí pro relativně široké spektrum Prandtlova a Reynoldsova čísla ( $0,5 \leq Pr \leq 2000$ ,  $3000 \leq Re \leq 5 \times 10^6$ ). Existuje ještě alternativní Dittus–Boelterova rovnice (2.24), která výpočetně jednodušší, ale může dopouštět chyby až do 25% [1].

$$Nu = 0,023 Re^{\frac{4}{5}} Pr^n, \quad (2.24)$$

kde  $n = 0,4$  při ohřevu a  $n = 0,3$  při ochlazování tělesa.

Pro laminární proudění kanálem mezi dvěma deskami jsou zadány tabulkové hodnoty Nusseltova čísla:

$$\begin{aligned} Nu &= 8,23 && \text{pro } \dot{Q} = \text{konst}, \\ Nu &= 7,54 && \text{pro } T_M = \text{konst}. \end{aligned}$$

## 2.9 Přenos tepla zářením

Každý objekt je zdrojem elektromagnetického záření, které má svůj vlnový charakter. Toto záření se dá rozdělit na různé typy podle vlnové délky a pokud se většina zářivého toku přemění při dopadu na tepelný tok, pak jde o tepelné záření [1].

V této práci bude důležité především sluneční záření, které svým dopadem způsobuje ohřev CSM panelů. Otázkou je, jakou bude mít tepelný tok slunečního záření velikost. Je zřejmé, že jeho velikost se bude odvíjet od mnoha parametrů jako např. zeměpisná poloha, poloha země vzhledem k slunci, vzdálenost země od slunce a další.

### 2.9.1 Sluneční konstanta

Sluneční konstanta je teoretická hodnota tepelného toku slunečního záření. Je měřena na povrchu kolmém k dopadu paprsků ve vzdálenosti jedné astronomické jednotky od slunce [1].

$$I_{SC} = 1367 \text{ [W m}^{-2}\text{]} \quad (2.25)$$

Jedná se však pouze o hodnotu na kraji atmosféry. Sluneční záření je při průchodu atmosférou zeslabováno. Dochází k částečnému rozptylu, odrazu a pohlcování. Na zemi tedy ve výsledku dopadá jak nerozptýlené sluneční záření, které prošlo atmosférou, tak i sluneční záření rozptýlené. Pro účely solárních kolektorů se obecně [12] počítá s hodnotou

$$I_G = 1000 \text{ [W m}^{-2}\text{]} \quad (2.26)$$

Tepelný tok zářením na povrchu země lze tedy vyjádřit jako [12]

$$\dot{Q}_{0,n,o} = I_G S_{0,n,o} \tau \alpha_1, \quad (2.27)$$

kde  $I_G$  je intenzita slunečního záření (2.26) dopadajícího na solární kolektor,  $S_{0,n,o}$  je plocha dopadu pro konkrétní uzlový bod,  $\tau$  je transmitance skleněného krytu a  $\alpha_1$  je absorptivita CSM-panelu. Hodnoty transmitance skleněného krytu a absorptivity CSM-panelu byly zvoleny popořadě 0,91 a 0,95 [12].



## 3 METODA KONTROLNÍCH OBJEMŮ

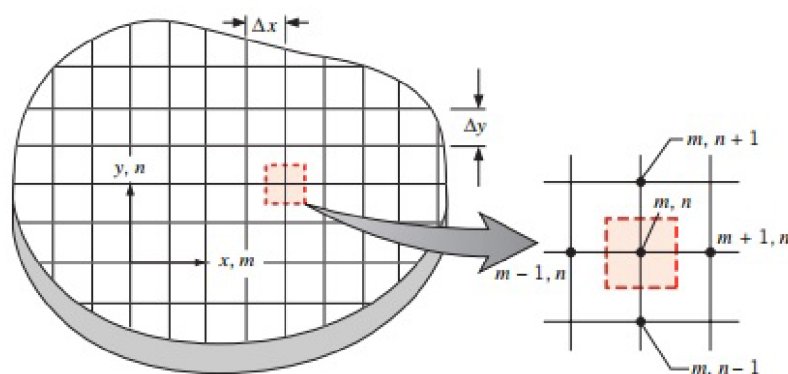
### 3.1 Úvod

V druhé kapitole byly rozebrány teoretické základy přenosu tepla. V praxi obecně nalezení řešení takové rovnice velmi složité a je nutné, na úkor určitého zobecnění, využít numerických metod.

Numerické řešení bude vždy zatížené chybou, ale při vhodné volbě numerické metody a jejích parametrů lze dosáhnout velice uspokojivých výsledků za relativně krátký výpočetní čas. Byla zvolena metoda kontrolních objemů, která je použita jak pro odvození rovnic vedení tepla v tyči, tak i pro vedení tepla v desce. Princip spočívá v diskretizaci zvoleného tělesa na síť uzlových bodů a kontrolních objemů, pro které jsou následně odvozeny bilanční rovnice, ze kterých lze vypočítat teplotu.

### 3.2 Diskretizace

Na rozdíl od analytického řešení, které umožňuje určit teplotu v libovolném bodě tělesa, je u numerického řešení možné určit teplotu pouze v diskretních prostorových bodech a čase. Pokud chceme tedy řešit problém numericky, je potřeba těleso diskretizovat, což je standardní u téměř všech numerických metod řešících parciální diferenciální rovnice. Diskretizace je provedena rozdělením celkového tělesa na malé kontrolní elementy [14], které obsahují uzlový bod viz obr. 3.1.



Obr. 3.1: Diskretizace tělesa [1]

Diskretizovat těleso je možné více způsoby [14]. V této práci byl zvolen způsob, který nejprve rovnoměrně rozdělí uzlové body uvnitř tělesa a následně k nim přiřadí příslušné kontrolní objemy. Tímto způsobem volíme vzdálenost mezi uzlovými

body přímo zadáním dělení  $N_x, N_y, N_z$  a délek stran  $l, h, d$ , avšak objem kontrolních objemů příslušných krajním uzlovým bodům (vzhledem k centrálním uzlovým bodům) bude menší. Konkrétně v 3D modelu se jedná o  $1/2$  u stran,  $1/4$  u hran a  $1/8$  rohových uzlových bodů. Alternativně je možné nejprve vytvořit kontrolní objemy a přiřadit do jejich středů uzlové body, což je ekvivalentní způsob.

Bude potřeba diskretizovat CSM panel, který je uvažován jako 3D kvádr daných rozměrů. Hliníkový obal CSM panelu netvoří téměř žádný tepelný odpor, proto ho lze v modelu zanedbat. Dále je nutné diskretizovat vzduchovou vrstvu podél obou stran CSM panelu. Všechny uzlové body spolu v celku tvoří síť uzlových bodů. Uzlové body jsou označeny podle zvoleného dělení a pro případ 3D tělesa jsou body indexovány třemi indexy  $m, n$  a  $o$ .

Každý uzlový bod reprezentuje určitou oblast a jeho teplota je uvažována jako průměrná teplota příslušného kontrolního objemu [1]. Např. teplota příslušná bodu  $m, n, o$  na obr. 2.1 je průměrnou teplotou vyznačeného kontrolního objemu. Volba uzlových bodů závisí většinou na dané geometrii nebo požadované přesnosti. Přesnost řešení se odvíjí zejména od počtu uzlových bodů a s jejich množstvím obvykle roste.

Diskretizace probíhá i v čase, kdy je celkový časový interval  $(0, t_{max})$  diskretizován jednoznačně pomocí časového diskretizačního kroku  $\Delta t$ .

### 3.3 Numerický model CSM panelu

Jak již bylo zmíněno v kapitole 1, CSM panel je tvořený ze dvou hliníkových desek, které jsou k sobě po obvodu připevněné a prostor mezi nimi vyplňuje PCM materiál. Po zanedbání hliníkové vrstvy je tedy CSM panel uvažován jako kvádr PCM materiálu. Diskretizace probíhá ve třech prostorových proměnných  $x, y$  a  $z$ , zadáním rozměrů CSM panelu a počtu uzlových bodů pro každý směr  $N_x, N_y$  a  $N_z$ . Takto vytvořené uzlové body vytvoří síť uzlových bodů s příslušnými kontrolními objemy.

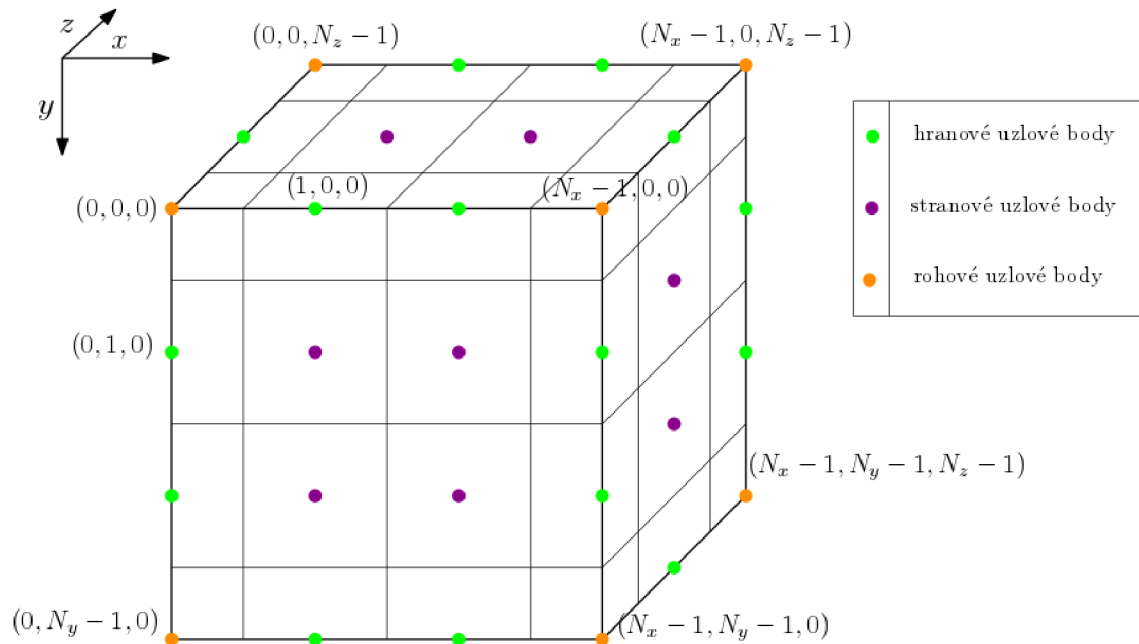
Numerická metoda která bude využita pro výpočet se nazývá metoda kontrolních objemů a to konkrétně její explicitní forma. Jejím principem je vyjádřit teplotu uzlových bodů v následujícím časovém diskretizačním kroku v závislosti pouze na teplotách v čase předchozím. Teplota v novém časovém kroku je tedy závislá na teplotách tohoto bodu a bodů okolních v čase předchozím, pokud předpokládáme časově nezávislé fyzikální parametry materiálu.

$$T_{m,n,o}^{p+1} = f(T_{m,n,o}^p, T_{m-1,n,o}^p, T_{m+1,n,o}^p, T_{m,n-1,o}^p, T_{m,n+1,o}^p, T_{m,n,o-1}^p, T_{m,n,o+1}^p), \quad (3.1)$$

kde výrazem  $T_{m,n,o}^p$  rozumíme teplotu v uzlovém bodě s indexy  $m, n, o$  a časovém diskretizačním kroku  $p$ . Rovnice (3.1) přísluší centrálnímu uzlovému bodu a způsob jejího odvození bude popsán v následujícím textu.



Po diskretizaci tělesa je nutné odvodit rovnice pro teplotu uzlových bodů. Jelikož diskretizace rozděluje uzlové body na různé typy, je potřeba určit rovnici pro každý typ zvlášť. Je uvažován 3D model, což znamená 27 různých typů uzlových bodů v tělese – 8 rohových, 6 stranových, 12 hranových a vnitřní uzlové body. Tato odlišnost v rovnicích je způsobena rozdílnými kontrolními objemy, indexováním a především také různými okrajovými podmínkami u krajních uzlových bodů.



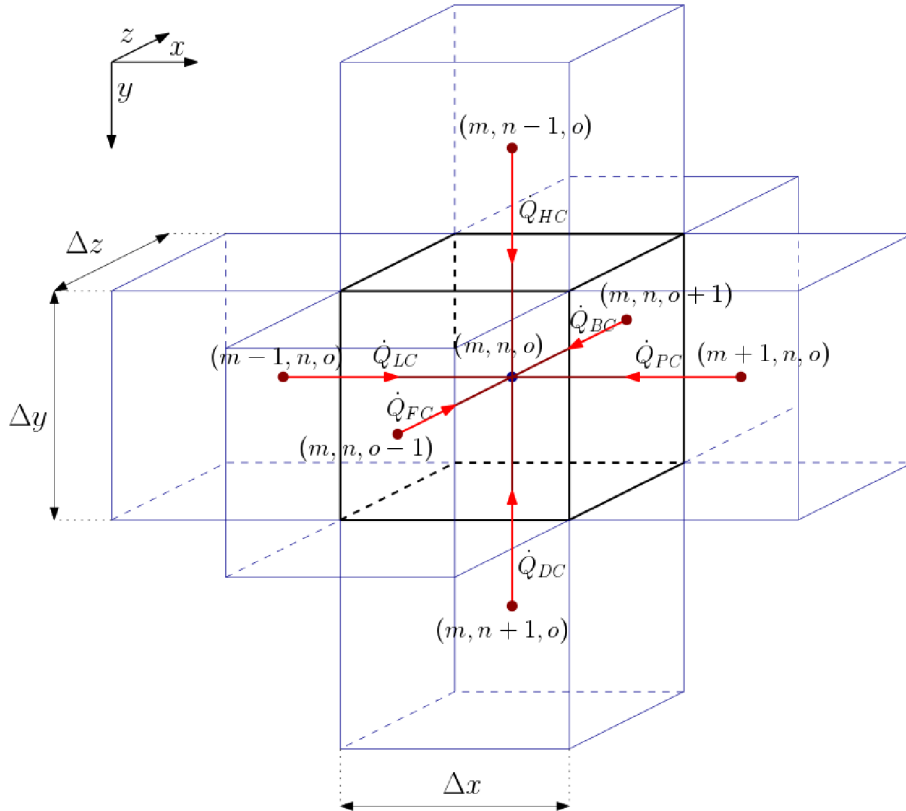
Obr. 3.2: Typy uzlových bodů

Na obr. 3.2 je ilustrace výsledné diskretizace. Body jsou indexovány od 0, tedy pokud je ve směru  $x$  např.  $N_x$  uzlových bodů, pak je jejich množina popsána indexy  $m = 0, 1, \dots, N_x - 1$ . Toto na první pohled nestandardní značení je typické pro mnoho moderních programovacích jazyků, jako jsou např. C++ nebo Python, ve kterém je programována naprostá většina kódu v této práci. Toto značení bude tedy dále využíváno především z důvodu kompatibility značení v práci a v programu.

Jednotlivé druhy uzlových bodů jsou barevně rozlišeny na obr. 3.2. Vnitřní uzlové body by se obtížně značily a proto budou mít vlastní obrázek v následujícím textu. Uzlové body lze zjednodušeně rozdělit do skupin: rohy, strany, hrany a vnitřní. Jelikož se jedná o velký počet uzlových bodů, text se bude dále věnovat konkrétně reprezentantům každé z těchto skupin, protože rovnice v těchto skupinách sdílí určité stejné vlastnosti a ostatní rovnice by byly odvozeny analogickým způsobem.

### 3.3.1 Vnitřní uzlové body

Vnitřní uzlové body lze charakterizovat jako množinu uzlových bodů s indexy  $m = 1, 2, \dots, N_x - 2$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_y - 2$  a  $o = 1, 2, \dots, N_z - 2$ . Pro všechny tyto uzlové body bude odvozena společná rovnice, která se liší pouze v indexování. Vnitřní uzlové body, pokud bude uvažováno jemné dělení, tvoří i více jak 90% veškerých uzlových bodů, avšak nevstupuje jimi do modelu žádná okrajová podmínka.



Obr. 3.3: Centrální uzlový bod

Pro odvození rovnice bude využito energetické bilance pro kontrolní objem a Fourierova zákona. Nejdřív je nutné si vyjádřit jednotlivé tepelné toky vstupující do kontrolního objemu  $m$ ,  $n$ ,  $o$ :

$$\dot{Q}_{LC} = -\lambda S \frac{T_{m-1,n,o}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta x} \quad (3.2)$$

$$\dot{Q}_{PC} = -\lambda S \frac{T_{m+1,n,o}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta x} \quad (3.3)$$

$$\dot{Q}_{HC} = -\lambda S \frac{T_{m,n+1,o}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta y} \quad (3.4)$$

$$\dot{Q}_{DC} = -\lambda S \frac{T_{m,n-1,o}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta y} \quad (3.5)$$

$$\dot{Q}_{FC} = -\lambda S \frac{T_{m,n,o-1}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta z} \quad (3.6)$$

$$\dot{Q}_{BC} = -\lambda S \frac{T_{m,n,o+1}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta z}. \quad (3.7)$$

Vytvořením energetické bilance pro kontrolní objem z rovnice (2.7) plyne

$$\dot{Q}_{LC} + \dot{Q}_{PC} + \dot{Q}_{HC} + \dot{Q}_{DC} + \dot{Q}_{FC} + \dot{Q}_{BC} = mc \frac{\Delta T}{\Delta t}. \quad (3.8)$$

Za jednotlivé tepelné toky v rovnici (3.8) je dosazeno z rovnic (3.2) - (3.7) a pravá strana rovnice je elementárně upravena.

$$\begin{aligned} \lambda \Delta y \Delta z \frac{T_{m+1,n,o}^p + T_{m-1,n,o}^p - 2T_{m,n,o}^p}{\Delta x} + \lambda \Delta x \Delta z \frac{T_{m,n+1,o}^p + T_{m,n-1,o}^p - 2T_{m,n,o}^p}{\Delta y} + \\ + \lambda \Delta x \Delta y \frac{T_{m,n,o+1}^p + T_{m,n,o-1}^p - 2T_{m,n,o}^p}{\Delta z} = \Delta x \Delta y \Delta z c \rho \frac{T_{m,n,o}^{p+1} - T_{m,n,o}^p}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nyní je rovnice (3.9) převedena na tvar (3.1), tedy pomocí jednoduchých algebraických úprav je získán vztah

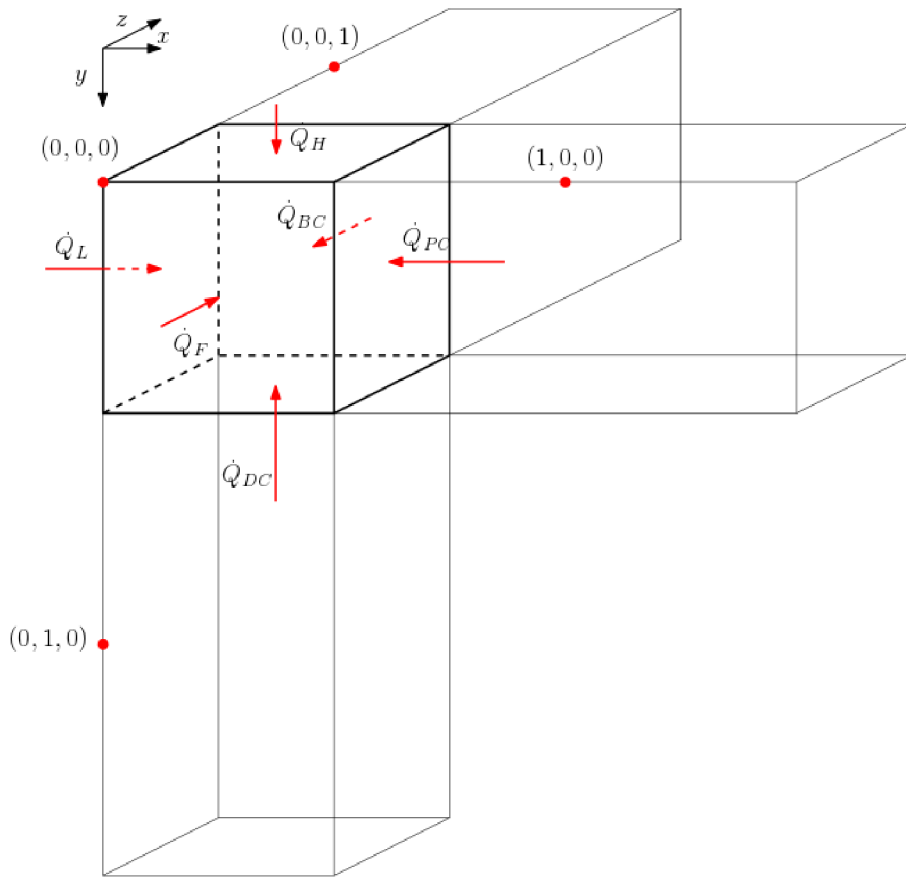
$$\begin{aligned} T_{m,n,o}^{p+1} = T_{m,n,o}^p + \frac{\lambda \Delta t}{c \rho (\Delta x)^2} (T_{m+1,n,o}^p + T_{m-1,n,o}^p - 2T_{m,n,o}^p) + \\ + \frac{\lambda \Delta t}{c \rho (\Delta y)^2} (T_{m,n+1,o}^p + T_{m,n-1,o}^p - 2T_{m,n,o}^p) + \frac{\lambda \Delta t}{c \rho (\Delta z)^2} (T_{m,n,o+1}^p + T_{m,n,o-1}^p - 2T_{m,n,o}^p). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Rovnice (3.10) je explicitní vztah pro teplotu v  $(p+1)$ -ním časovém diskretizačním kroku v závislosti na teplotách v  $p$ -tém časovém kroku pro vnitřní uzlové body.

### 3.3.2 Rohové uzlové body

Rohové uzlové body jsou specifické tím, že nedochází k žádnému procházení indexů, jelikož jde právě o 8 uzlových bodů s indexy –  $(0, 0, 0)$ ,  $(N_x - 1, 0, 0)$ ,  $(0, N_y - 1, 0)$ ,  $(N_x - 1, N_y - 1, 0)$ ,  $(0, 0, N_z - 1)$ ,  $(N_x - 1, 0, N_z - 1)$ ,  $(0, N_y - 1, N_z - 1)$ ,  $(N_x - 1, N_y - 1, N_z - 1)$ .

Co do množství se jedná o velmi malou množinu uzlových bodů, avšak vstupují jimi do modelu hned 3 okrajové podmínky. Na Obr. 3.4 lze vidět uzlový bod s indexy  $(0, 0, 0)$ , který sousedí s třemi uzlovými body  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  a jsou předepsány celkem tři, prozatím blíže neurčené, okrajové podmínky ve formě hustot tepelných toků  $\dot{q}_L$ ,  $\dot{q}_H$  a  $\dot{q}_F$ .



Obr. 3.4: Rohový uzlový bod

Odvození rovnice probíhá analogicky jako v případě předchozím. Energetická bilance je ve tvaru:

$$\dot{Q}_L + \dot{Q}_{PC} + \dot{Q}_H + \dot{Q}_{DC} + \dot{Q}_F + \dot{Q}_{BC} = mc \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad (3.11)$$

kde  $\dot{Q}_L = \dot{q}_L S = \dot{q}_L \frac{\Delta y \Delta z}{2} = \dot{q}_L \frac{\Delta y \Delta z}{4}$ ,  $\dot{Q}_H = \dot{q}_H \frac{\Delta x \Delta z}{4}$  a  $\dot{Q}_F = \dot{q}_F \frac{\Delta x \Delta y}{4}$ .

Do rovnice (3.11) je dosazeno  $\dot{Q}_{PC}$ ,  $\dot{Q}_{DC}$  a  $\dot{Q}_{BC}$  z Fourierova zákona. Rovnice (3.11) přejde na tvar:

$$\begin{aligned} \dot{q}_L \frac{\Delta y \Delta z}{4} + \lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{\Delta z}{2} \frac{T_{1,0,0}^p - T_{0,0,0}^p}{\Delta x} + \dot{q}_H \frac{\Delta x \Delta z}{4} + \lambda \frac{\Delta x \Delta z}{4} \frac{T_{0,1,0}^p - T_{0,0,0}^p}{\Delta y} + \\ + \dot{q}_F \frac{\Delta x \Delta y}{4} + \lambda \frac{\Delta x \Delta y}{4} \frac{T_{0,0,1}^p - T_{0,0,0}^p}{\Delta z} = c\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{8} \frac{T_{0,0,0}^{p+1} - T_{0,0,0}^p}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Celá rovnice je násobena členem  $\frac{8\Delta t}{c\rho\Delta x\Delta y\Delta z}$  a převedena na explicitní vzorec (3.1), tedy

$$\begin{aligned} T_{0,0,0}^{p+1} = T_{0,0,0}^p + \frac{2\Delta t}{c\rho} \left( \frac{\dot{q}_L}{\Delta x} + \frac{\dot{q}_H}{\Delta y} + \frac{\dot{q}_F}{\Delta z} \right) + \frac{2\lambda\Delta t}{c\rho} \left( \frac{T_{1,0,0}^p - T_{0,0,0}^p}{(\Delta x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{T_{0,1,0}^p - T_{0,0,0}^p}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{0,0,1}^p - T_{0,0,0}^p}{(\Delta z)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

je explicitní předpis pro teplotu uzlového bodu  $(0, 0, 0)$ . Ostatní rohové body se odvozují opět stejným způsobem.

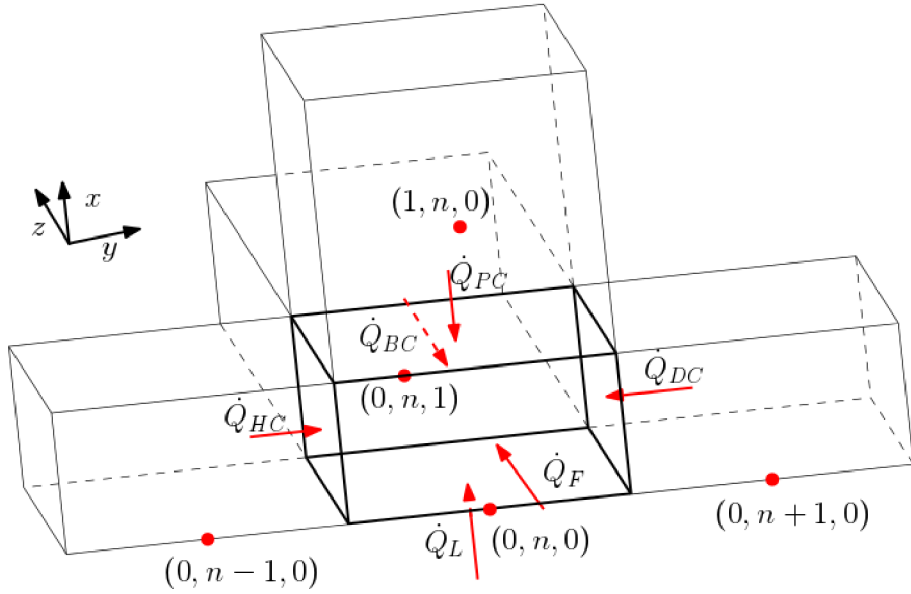
### 3.3.3 Hranové uzlové body

Hranové uzlové body je možné popsat jako body, které mají dva pevně dané indexy. Tyto pevně dané indexy vždy nabývají hodnot buď prvního a nebo posledního indexu. Třetí indexy mohou být rovny  $m = 1, 2, \dots, N_x - 2$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_y - 2$  nebo  $o = 1, 2, \dots, N_z - 2$ . Tedy jedním příkladem může být hrana  $(0, 0, o)$ , kde  $o = 1, 2, \dots, N_z - 2$  a oba pevné indexy jsou rovny nule. Dalším příkladem může být hrana  $(N_x, 0, o)$ . Je zřejmé že celkový počet je  $3 \times 2^2 = 12$  hran v tělese ve tvaru kvádrů. Každý z hranových uzlových bodů má 4 sousední uzlové body a vstupují do něj dvě okrajové podmínky.

Rovnice pro teplotu uzlových bodů na hraně  $(0, n, 0)$  pro  $n = 1, 2, \dots, N_y - 2$  se určí opět pomocí energetické bilance pro kontrolní objem:

$$\dot{Q}_L + \dot{Q}_{PC} + \dot{Q}_{HC} + \dot{Q}_{DC} + \dot{Q}_F + \dot{Q}_{BC} = mc \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad (3.14)$$

kde  $\dot{Q}_L = \dot{q}_L \Delta y \frac{\Delta z}{2}$ ,  $\dot{Q}_F = \dot{q}_F \frac{\Delta x}{2} \Delta y$  a ostatní tepelné toky jsou vyjádřeny pomocí Fourierova zákona.



Obr. 3.5: Hranový uzlový bod

Rovnice energetické bilance (3.14) přejde na tvar:

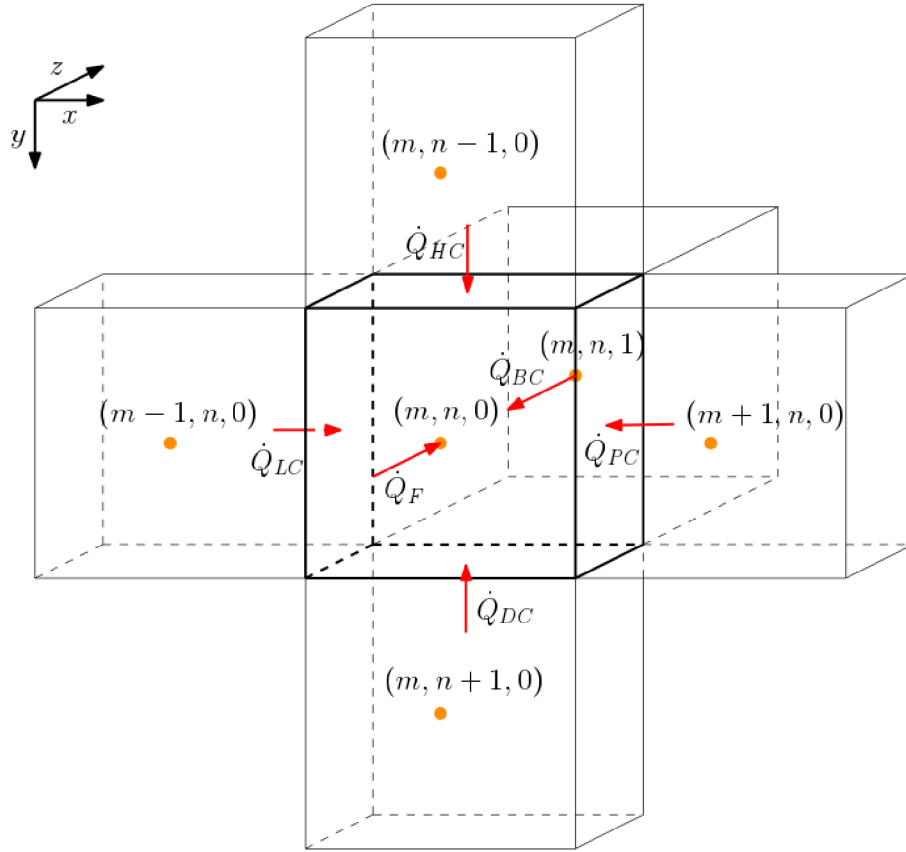
$$\begin{aligned} \dot{q}_L \frac{\Delta y \Delta z}{2} + \lambda \Delta y \frac{\Delta z}{2} \frac{T_{1,n,0}^p - T_{0,n,0}^p}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x \Delta z}{4} \frac{T_{0,n+1,0}^p + T_{0,n-1,0}^p - 2T_{0,n,0}^p}{\Delta y} + \\ + \dot{q}_F \frac{\Delta x \Delta y}{2} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \Delta y \frac{T_{0,n,1}^p - T_{0,n,0}^p}{\Delta z} = c\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{4} \frac{T_{0,n,0}^{p+1} - T_{0,n,0}^p}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Rovnice je upravena a je vyjádřena  $T_{0,n,0}^{p+1}$ :

$$\begin{aligned} T_{0,n,0}^{p+1} = T_{0,n,0}^p + \frac{2\Delta t}{c\rho} \left( \frac{\dot{q}_L}{\Delta x} + \frac{\dot{q}_F}{\Delta z} \right) + \frac{2\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \left( T_{1,n,0}^p - T_{0,n,0}^p \right) + \\ + \frac{\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta y)^2} \left( T_{0,n+1,0}^p + T_{0,n-1,0}^p - 2T_{0,n,0}^p \right) + \frac{2\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta z)^2} \left( T_{0,n,1}^p - T_{0,n,0}^p \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.3.4 Stranové uzlové body

Jako stranové uzlové body jsou uvažovány uzlové body s jedním pevným indexem na hodnotě prvního nebo posledního indexu pole a další dva z indexů jsou procházeny v určitém rozsahu. Tento rozsah je opět  $m = 1, 2, \dots, N_x - 2$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_y - 2$  a  $o = 1, 2, \dots, N_z - 2$ . Tedy jako příklad jedné ze stran lze uvést přední stranu, která je definována indexy  $m = 1, 2, \dots, N_x - 2$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_y - 2$  a fixním indexem  $o = 0$ . Celkový počet stran tělesa ve tvaru kvádrů je zřejmě 6. Do modelu vstupuje přes stranu pouze jedna okrajová podmínka, což je v případě přední strany hustota teplelného toku  $\dot{q}_F$ .



Obr. 3.6: Stranový uzlový bod

Opět je vyjádřena rovnice energetické bilance jako:

$$\dot{Q}_{LC} + \dot{Q}_{PC} + \dot{Q}_{HC} + \dot{Q}_{DC} + \dot{Q}_F + \dot{Q}_{BC} = mc \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad (3.17)$$

kde všechny tepelné toky vyjádříme z Fourierova zákona, až na tepelný tok  $\dot{Q}_F$ , který je roven  $\dot{Q}_F = \dot{q}_F \Delta x \Delta y$ . Po dosazení do rovnice energetické bilance (3.17) je získán vztah:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\Delta y \Delta z}{2} \left( \frac{T_{m+1,n,0}^p + T_{m-1,n,0}^p - 2T_{m,n,0}^p}{\Delta x} \right) + \lambda \frac{\Delta x \Delta z}{2} \left( \frac{T_{m,n+1,0}^p + T_{m,n-1,0}^p - 2T_{m,n,0}^p}{\Delta y} \right) + \\ + \dot{q}_F \Delta x \Delta y + \lambda \Delta x \Delta y \left( \frac{T_{m,n,1}^p - T_{m,n,0}^p}{\Delta z} \right) = \rho \Delta x \Delta y \frac{\Delta z}{2} c \frac{T_{m,n,0}^{p+1} - T_{m,n,0}^p}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

který nyní pouze stačí pomocí jednoduchých úprav převést na výsledný tvar (3.19).

$$\begin{aligned}
T_{m,n,0}^{p+1} &= T_{m,n,0}^p + \frac{\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \left( T_{m+1,n,0}^p + T_{m-1,n,0}^p - 2T_{m,n,0}^p \right) + \frac{2\Delta t}{c\rho\Delta z} \dot{q}_F + \\
&+ \frac{\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta y)^2} \left( T_{m,n+1,0}^p + T_{m,n-1,0}^p - 2T_{m,n,0}^p \right) + \frac{2\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta z)^2} \left( T_{m,n,1}^p - T_{m,n,0}^p \right) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

### 3.4 Stabilita metody kontrolních objemů

Výhodou explicitní formy metody kontrolních objemů je její relativní jednoduchost, avšak je nutné ověřit podmínky stability, které jsou specifické pro každý uzlový bod v tělese. Principem je určit takový časový krok  $\Delta t$ , pro který bude metoda počítat fyzikálně správné výsledky. Postup pro určení těchto podmínek dává [14][1].

Aby nedošlo k porušení druhého zákona termodynamiky, teplo musí být přenášeno vždy proti směru teplotního gradientu. Je tedy nutné, aby byl koeficient u člene  $T_i^p$  na pravé straně rovnice (3.21) kladný [14]. Rovnice (3.20) je předpis pro teplotu vnitřního uzlového bodu v 1D.

$$T_i^{p+1} = T_i^p + \frac{\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} (T_{i-1}^p + T_{i+1}^p - 2T_i^p). \quad (3.20)$$

$$T_i^{p+1} = T_i^p \left( 1 - 2\frac{\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \right) + \frac{\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} (T_{i-1}^p + T_{i+1}^p). \quad (3.21)$$

Tedy musí platit:

$$\left( 1 - 2\frac{\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \right) \geq 0, \quad (3.22)$$

což se dá vyjádřit jako

$$\Delta t \leq \frac{c\rho(\Delta x)^2}{2\lambda}. \quad (3.23)$$

Tato vlastnost se dá jednoduše ilustrovat na příkladu. Je uvažováno 1D vedení tepla a chceme ověřit stabilitu vnitřního uzlového bodu viz rovnice (3.20) - (3.23). Zvolme  $T_{i-1}^p = T_{i+1}^p = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_i^p = 50^\circ\text{C}$  a fyzikální parametry  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$  společně s dělením  $\Delta x$  jsou zvoleny tak, aby nebyla splněna podmínka stability.

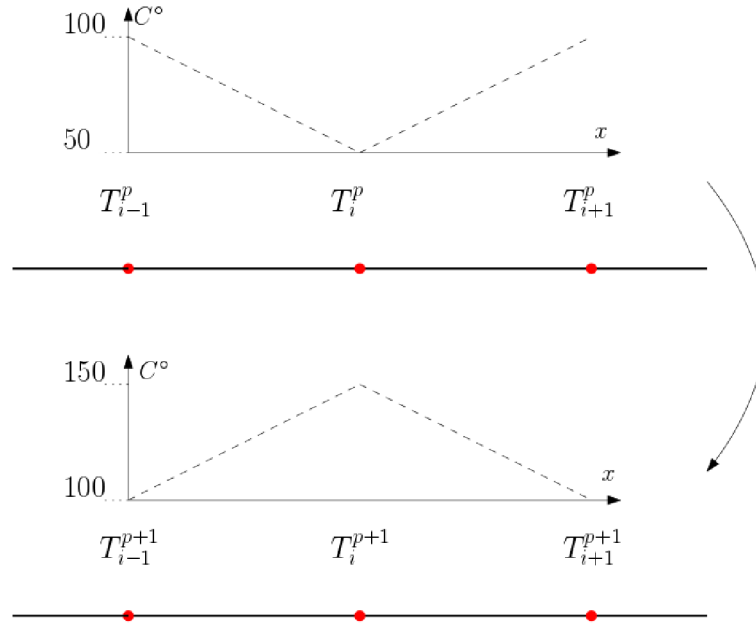
$$\frac{\lambda\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} = 1. \quad (3.24)$$

Tedy z (3.21) plyne

$$T_i^{p+1} = 50(1 - 2) + 1(100 + 100) = 150^\circ\text{C}, \quad (3.25)$$

což zřejmě porušuje druhý zákon termodynamiky, jelikož uzlové body o teplotě  $100^\circ\text{C}$  ohřály  $i$ -tý uzlový bod na teplotu  $150^\circ\text{C}$  viz obr. 3.7.





Obr. 3.7: Stabilita uzlového bodu

Zřejmě je možné předepsat podmínku stability analogickým způsobem pro každý uzlový bod v 3D modelu. Avšak ověření těchto podmínek by bylo velmi výpočetně náročné, protože je nutné aby byly splněny v každé časové iteraci. Pokud by došlo k porušení podmínky stability pouze v jednom uzlovém bodě, který má ve svém okolí pouze stabilní uzlové body, pak nedochází k většímu porušení stability celkového řešení, jelikož je řešení v nestabilním uzlovém bodě „ustáleno“ body okolními. Proto se v praxi často ověřují např. dva uzlové body – jeden vnitřní a jeden krajní.

Pokud bude uvažován vnitřní uzlový bod 3D modelu z předchozí kapitoly, pak platí

$$1 - \frac{2\lambda\Delta t}{c\rho} \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \geq 0. \quad (3.26)$$

$$\Delta t \leq \frac{c\rho}{2\lambda} \left( \frac{(\Delta x \Delta y \Delta z)^2}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2(\Delta z)^2 + (\Delta y)^2(\Delta z)^2} \right) \quad (3.27)$$

Rovnice (3.27) je podmínka stability pro vnitřní uzlový bod. Pokud nebude uvažována fázová přeměna, tak postačuje tuto podmínku ověřit pouze jednou, protože nedochází ke změně fyzikálních parametrů ani parametrů dělení. Pokud by však fázová přeměna byla uvažována a to konkrétně pomocí metody efektivní tepelné kapacity viz kapitola 4, pak by docházelo ke změně měrné tepelné kapacity  $c$  a tím i podmínky stability (3.27).

Podmínky stability pro rohové, hranové a stranové uzlové body je složité určit obecně. Pro všechny tyto typy uzlových bodů je nutné rozlišovat např. o kterou z hran se jedná, protože mají rozdílné okrajové podmínky. Příkladem může být

okrajová podmínka ve formě tepelného toku prouděním, který určuje Newtonův ochlazovací zákon jako

$$\dot{Q}_L = \alpha S(T_{vz}^p - T_{PCM}^p). \quad (3.28)$$

Je zřejmé, že se v rovnici (3.28) vyskytuje člen, který bude zasahovat do stability. Tímto členem je  $T_{PCM}^p$ , který ovlivní velikost koeficientu viz rovnice (3.21). Okrajová podmínka ve tvaru předepsaného tepelného toku nijak neovlivňuje stabilitu uzlového bodu. Dále Dirichletova okrajová podmínka je triviálním případem, protože nedochází vůbec k výpočtu uzlového bodu a teplota je předepsána.

## 3.5 Model proudícího vzduchu

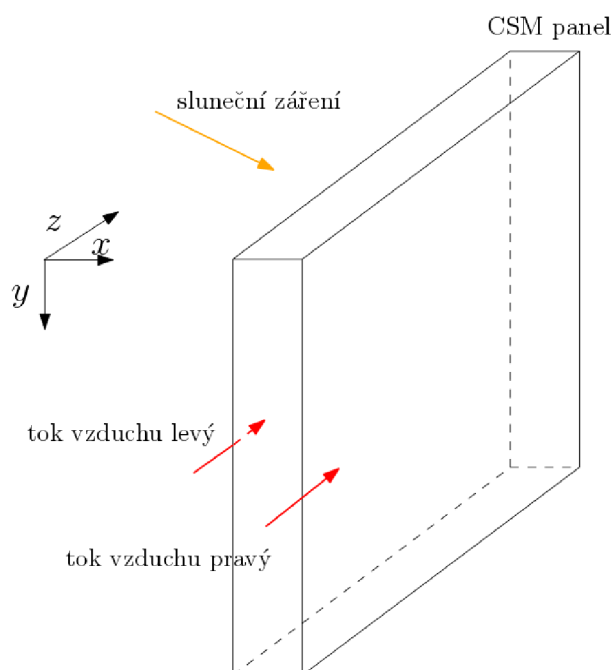
V předchozí kapitole byl odvozen kompletní numerický model pro přenos tepla vedením v pevném tělese. Dále však bude nutné uvažovat i okolní vzduch proudící podél CSM panelů a přenos tepla na rozhraní panel/vzduch. Naskytá se hned několik problémů se kterými se bude nutné vypořádat.

Zřejmě bude vhodné přejít od statického modelu na dynamický, jelikož se proudící vzduch pohybuje a jednotlivé uzlové body mění s časovými iteracemi svoji pozici. Cílem této kapitoly tedy bude navrhnout takový dynamický model a vypořádat se s různými problémy, především programovacího charakteru. Proudění vzduchu bude jednorozměrné, ve směru osy  $z$ . Na obr. 3.8 lze vidět, že k proudění vzduchu dochází oboustranně.

Přenos tepla prouděním podél ostatních stran není v modelu uvažován. Jedná se o strany 3D tělesa s nejmenším plošným obsahem viz obr. 3.8. Tyto strany jsou dále pokládány za izolované a je na nich předepsána okrajová podmínka ve tvaru

$$\dot{q}_F = 0, \dot{q}_B = 0, \dot{q}_H = 0, \dot{q}_D = 0.$$

Stejně jako v případě CSM panelů je nejprve nutné dané těleso diskretizovat. Jedná se o dvě vrstvy vzduchu, které budou totožné ve smyslu tvaru a diskretizace. V následujícím textu bude odvozen model levé vrstvy vzduchu, pro pravou stranu by se postupovalo analogicky.



Obr. 3.8: Proudění vzduchu

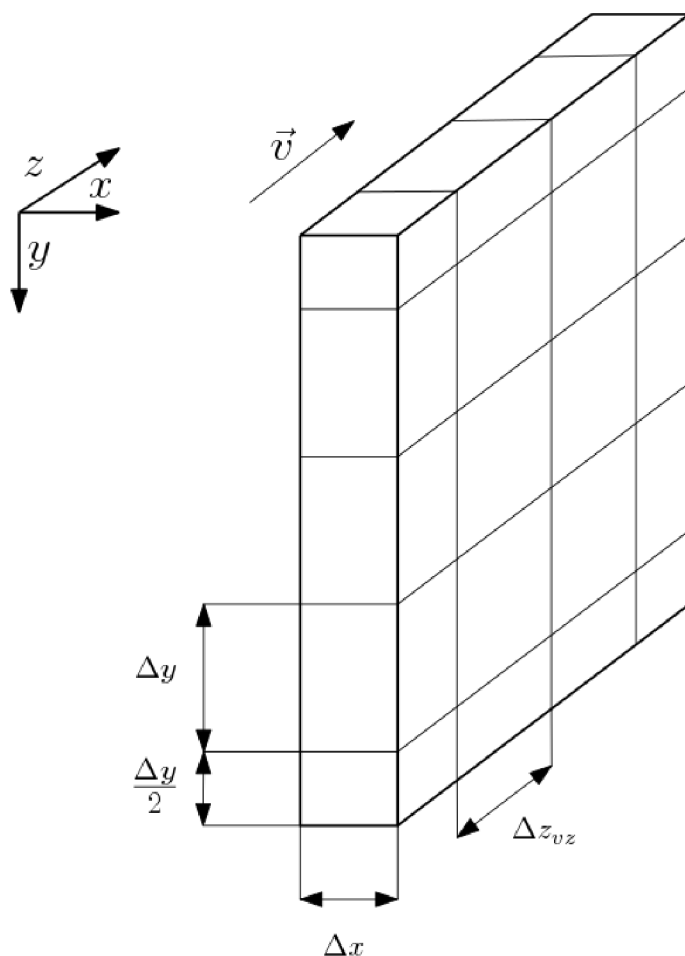
### 3.5.1 Diskretizace vrstvy vzduchu

Diskretizace vzduchové vrstvy je určena, stejně jako u CSM panelu, počtem uzlových bodů pro každou ze souřadnicových os. Ve směru osy  $x$  bude pouze jeden uzlový bod viz obr. 3.9, jelikož součinitel tepelné vodivosti vzduchu je řádově  $10^{-2}$ . Nedochozí tedy téměř k žádnému přenosu tepla ve směru osy  $x$  a je možné uvažovat jedinou vrstvu. Počet uzlových bodů ve směru osy  $y$  je zvolen stejně jako u CSM panelu

na  $N_y$ . Nemělo by totiž žádný praktický význam volit specifické dělení a pouze by to komplikovalo výpočet.

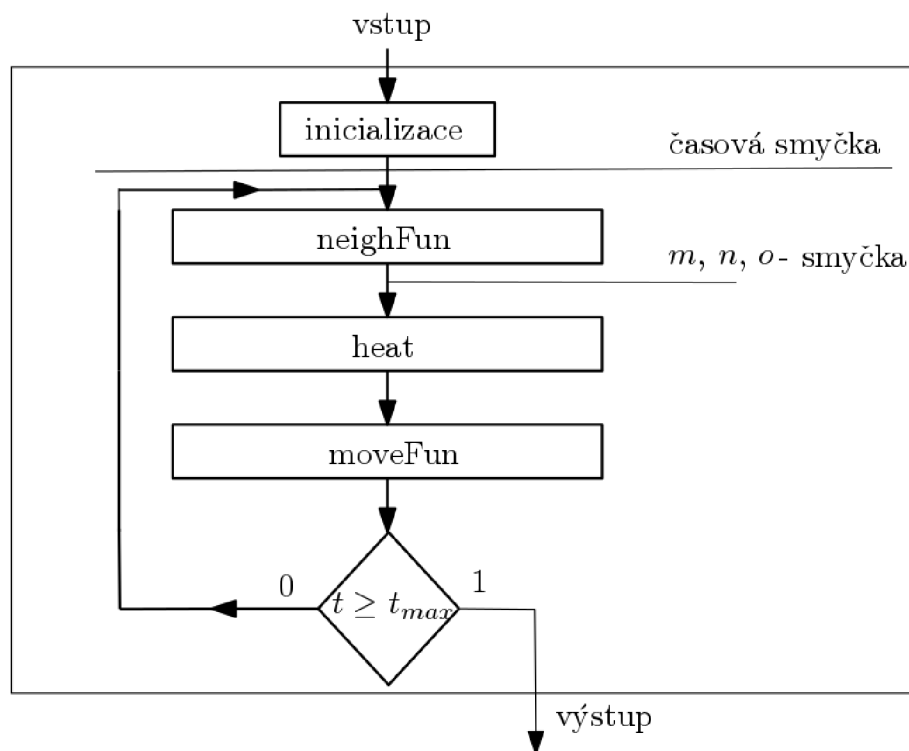
Ve směru osy  $z$  bude  $N_{zv}$  uzlových bodů, což libovolné dělení. V tomto případě má smysl např. jemnější dělení, jelikož dojde k zpřesnění výsledků modelu. Opět dochází i k časové diskretizaci, která je totožná jako v předchozí kapitole.

Je tedy vytvořena síť uzlových bodů s příslušnými kontrolními objemy a je nutné odvodit explicitní vztah pro teplotu každého z nich. Zvolená numerická metoda je opět metoda kontrolních objemů z předešlé podkapitoly.



Obr. 3.9: Diskretizace vzduchu

Kde  $\Delta x = e$  je šířka vzduchové mezery. Dále než bude odvozen tvar rovnic, je vhodné zmínit, jakým způsobem je programově řešeno posouvání a sousednosti jednotlivých uzlových bodů v dynamickém modelu. Průběh algoritmu se dá znázornit následujícím diagramem, kde každá z funkcí bude dále detailně popsána.



Obr. 3.10: Diagram programu

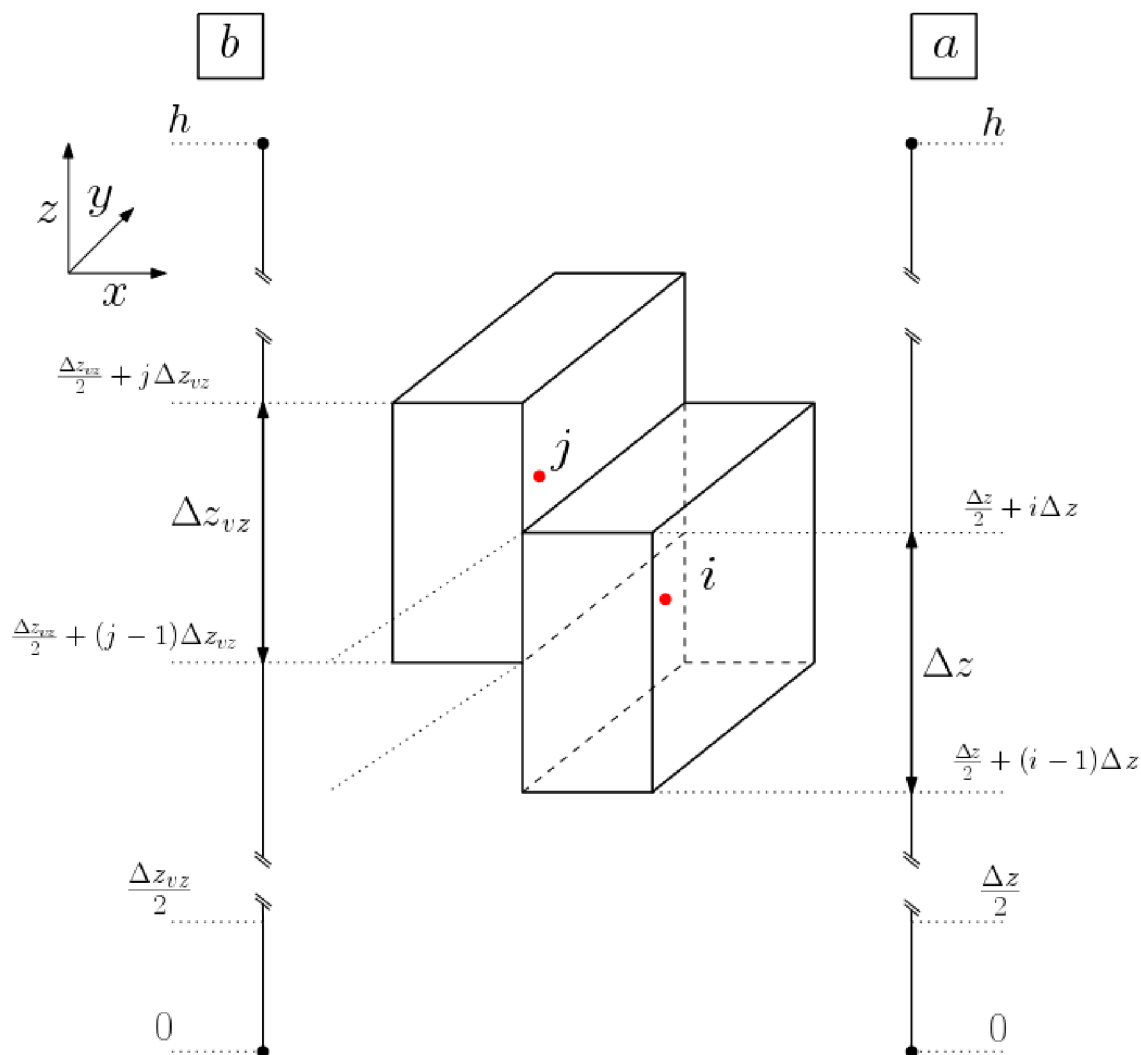
### 3.5.2 Funkce susednosti – neighFun

Jedním z problémů, se kterým se bylo nutné vypořádat, byla susednost jednotlivých kontrolní objemů PCM materiálu a vzduchu. Pokud by byl uvažován statický model, nebylo by potřeba řešit susednost, jelikož by docházelo k plnému překryvu susedních ploch mezi PCM a vzduchem. Zároveň by platilo, že stejné body spolu susedí po celou dobu trvání výpočtu. Ani jedna z těchto vlastností v dynamickém modelu neplatí a je potřeba určitým způsobem předeepsat funkci, která určí který bod se kterým susedí a na jaké ploše.

Možným řešením tohoto problému je vytvoření množiny intervalů  $a$  a množiny dynamických intervalů  $b$ . Necht  $a$  je množina intervalů

$$a = \left\{ \left( 0, \frac{\Delta z}{2} \right), \left( \frac{\Delta z}{2}, \frac{3\Delta z}{2} \right), \dots, \left( \frac{\Delta z}{2} + (i-1)\Delta z, \frac{\Delta z}{2} + i\Delta z \right), \right. \\ \left. \left( \frac{\Delta z}{2} + i\Delta z, \frac{\Delta z}{2} + (i+1)\Delta z \right), \left( h - \frac{3\Delta z}{2}, h - \frac{\Delta z}{2} \right), \left( h - \frac{\Delta z}{2}, h \right) \right\}. \quad (3.29)$$

Množina intervalů  $a$  není časově proměnná. Přísluší PCM tělesu a je přímo závislá na jeho diskretizaci a to konkrétně na diskretizaci ve směru osy  $z$ . Indexy jednotlivých uzlových bodů jsou  $i = 0, 1, \dots, N_z - 1$ . Tato množina intervalů je definována během inicializace programu a zůstává pro celou dobu programu neměnná.



Obr. 3.11: Schéma intervalů

Množina intervalů  $b$  vytvořena obdobně, ale pouze ve smyslu konstrukce. Hlavním rozdílem je vlastní dělení, nezávislé na dělení PCM tělesa  $-\Delta z_{vz}$ . Index  $j$  nabývá hodnot  $j = 0, 1, \dots, N_{zv} - 1$ . Tedy inicializace intervalu  $b$  bude mít tvar

$$b = \left\{ \left( 0, \frac{\Delta z_{vz}}{2} \right), \left( \frac{\Delta z_{vz}}{2}, \frac{3\Delta z_{vz}}{2} \right), \dots, \left( \frac{\Delta z_{vz}}{2} + (j-1)\Delta z_{vz}, \frac{\Delta z_{vz}}{2} + j\Delta z_{vz} \right), \right. \\ \left. , \left( \frac{\Delta z_{vz}}{2} + j\Delta z_{vz}, \frac{\Delta z_{vz}}{2} + (j+1)\Delta z_{vz} \right), \left( h - \frac{3\Delta z_{vz}}{2}, h - \frac{\Delta z_{vz}}{2} \right), \left( h - \frac{\Delta z_{vz}}{2}, h \right) \right\}. \quad (3.30)$$

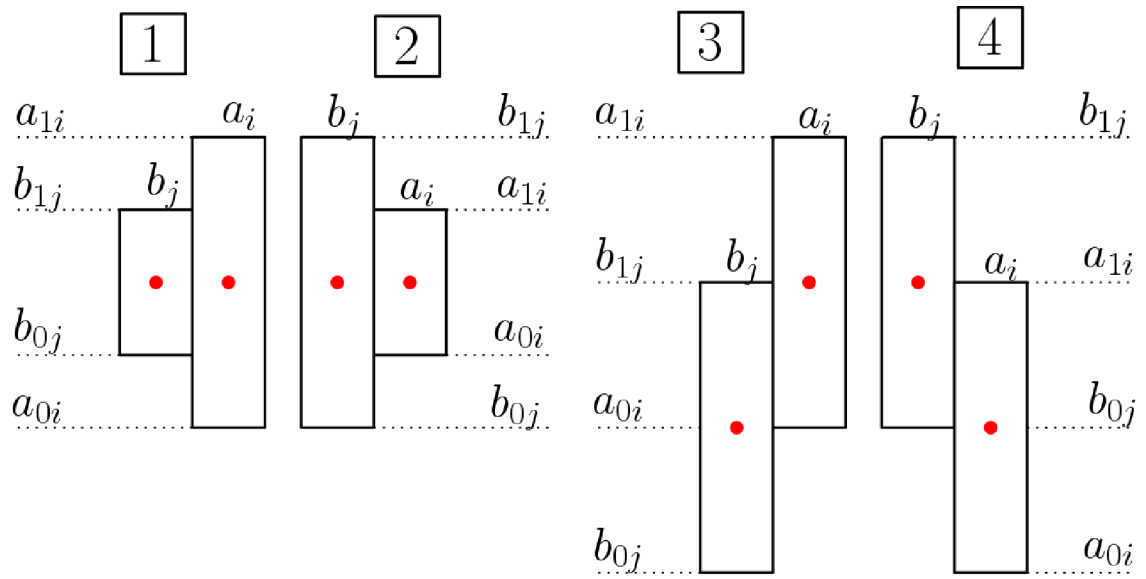
Pokud bude uvažován jeden konkrétní interval z množiny intervalů  $a$ , pak jeho nejvyšší a nejnižší hodnotu označíme  $a_{ci}$ , kde index

$$c = \begin{cases} 0 & \text{pro nejnižší hodnotu} \\ 1 & \text{pro nejvyšší hodnotu} \end{cases}$$

a index  $i$  značí uzlový bod příslušný tomuto intervalu. Pro intervaly  $b$  je tvrzení analogické, značení bude  $b_{cj}$ . Značení pouze s jedním indexem značí celý interval pro konkrétní uzlový bod, např.  $a_0 = (0, \frac{\Delta z}{2})$ .

Nyní lze odvodit samotný průběh algoritmu. Cílem je nalezení matice sousednosti `neighField`, která má rozměry  $N_z \times N_{zv}$ . Uvažujme že uzlový bod  $i = 1$  sousedí s uzlovými body  $j = 0$  a  $j = 1$  popořadě na hranici 0, 1 a 0, 2. Tuto skutečnost je možné zapsat jako `neighField[1, 0] = 0, 1`, `neighField[1, 1] = 0, 2`.

Algoritmus pro nalezení takové matice probíhá ve dvou for cyklech, jeden pro  $i = 0, 1, \dots, N_z - 1$  a druhý pro  $j = 0, 1, \dots, N_{zv} - 1$ . Uvnitř kódu se ověřuje o který ze 4 případů z obr. 3.12 se jedná.



Obr. 3.12: Případy překryvu

1. Pokud platí podmínka  $a_{1i} \geq b_{1j} \wedge a_{0i} \leq b_{0j}$ , pak výstupem z funkce je celá délka intervalu

$$\text{neighField}[i, j] = ]b_j = b_{1j} - b_{0j}.$$

2. Pokud je splněno  $a_{1i} \leq b_{1j} \wedge a_{0i} \geq b_{0j}$ , potom je výstup

$$\text{neighField}[i, j] = a_i = a_{1i} - a_{0i}.$$

3. Pokud platí  $a_{1i} \geq b_{1j} \wedge a_{0i} \leq b_{1j}$ , pak je překryv roven

$$\text{neighField}[i, j] = b_{1j} - a_{0i}.$$

4. Posledním případem je podmínka  $a_{1i} \leq b_{1j} \wedge a_{1i} \leq b_{0j}$  pro kterou je výsledkem

$$\text{neighField}[i, j] = a_{1i} - b_{0j}.$$

Výstupem programu je matice `neighField` rozměru  $N_z \times N_{zv}$ . Jednoduchým příkladem může být  $N_z = 5$ ,  $N_{zv} = 6$ ,  $h = 1$ . Pak

$$a = \{(0; 0, 125), (0, 125; 0, 375), (0, 375; 0, 625), (0, 625; 0, 875), (0, 875; 1)\},$$

$$b = \{(0; 0, 1), (0, 1; 0, 3), (0, 3; 0, 5), (0, 5; 0, 7), (0, 7; 0, 9), (0, 9; 1)\}.$$

Tedy výstup z programu je

$$\text{neighField} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,175 & 0,075 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,125 & 0,125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,075 & 0,175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,025 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

### 3.5.3 Pohybová funkce – `moveFun`

Pomocí `neighFun` funkce lze nyní jednoduše vyjádřit sousednosti uzlových bodů, ale pro správný chod modelu je nutné aby docházelo k pohybu. Toho lze dosáhnout vhodnou manipulací s intervaly a posunem dat. Je nově zadána rychlost proudění vzduchu  $v$ . Zřejmě platí  $\Delta z_p = \Delta t v$ , což vyjadřuje posunutí uzlových bodů vzduchu ve směru osy  $z$  za jeden časový diskretizační krok. Musí platit podmínka  $\Delta z_p \leq \Delta z$ , jinak by došlo k přeskokování některých kontrolních objemů PCM materiálu a tím by nedošlo k přenosu tepla na tomto úseku. V literatuře se tato podmínka nazývá Courant–Friedrich–Lewyho podmínka nebo také zkráceně CFL podmínka [24].

Principem funkce `moveFun` je posun intervalů o  $\Delta z_p$ , tedy dochází k manipulaci s množinou intervalů  $b$ . Pokud nastane případ, že krajní uzlový bod vzduchu přestane sousedit s PCM, je vyřazen a na vstup je přidán nový uzlový bod. V první části algoritmu dojde k posunutí:

$$\begin{aligned} b_{1j} &= b_{1j} + \Delta z_p \text{ pro } j = 0, 1, \dots, N_{zv} - 2, \\ b_{0j} &= b_{0j} + \Delta z_p \text{ pro } j = 1, 2, \dots, N_{zv} - 1. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Během posouvání je zároveň kontrolována podmínka

$$b_{0,j} \geq d, \quad (3.32)$$

pokud tato podmínka nastane, je navýšena hodnota čítače  $nout = nout + 1$ , jehož startovní hodnota je nulová. Pokud platí (3.32), znamená to, že jeden z kontrolních objemů vzduchu přestal být v kontaktu s jakýmkoliv kontrolním objemem PCM materiálu. Hodnotu teploty tohoto uzlového bodu je vhodné si následně uložit.



Po tom co dojde k posunu intervalů (3.31) je potřeba zkonstruovat interval nový. Pokud je  $nout = 0$ , pak posunuté intervaly  $b$  jsou výsledkem. Pokud je  $nout \geq 1$ , pak algoritmus pokračuje dál. Hodnota posunutého  $b$  je duplikována a uložena jako  $b^1$  pro další výpočet. Pythonová knihovna `numpy` nabízí ideální funkci `roll`, která usnadní další výpočty. Je využito příkazu

```
b2 = np.roll(b1, nout, axis=1),
```

kde  $b2$  je mezi výpočet a možnost `axis = 1` značí posunutí celého pole okolo osy  $y$ . Příkladem může být pole

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,7 & 0,9 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,7 & 0,9 \end{pmatrix},$$

které by přešlo na

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,7 & 0,9 \\ 0,9 & 0 & 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Jediné co nyní zbývá udělat je dopočítat nové hodnoty.

$$\begin{aligned} b_{0(j+1)} &= b_{01}^1 + (-nout + j)\Delta z_v, \\ b_{1j} &= b_{10}^1 + (-nout + j)\Delta z_v, \\ b_{00} &= 0, \\ b_{1(N_{z_v}-1)} &= 1. \end{aligned} \tag{3.33}$$

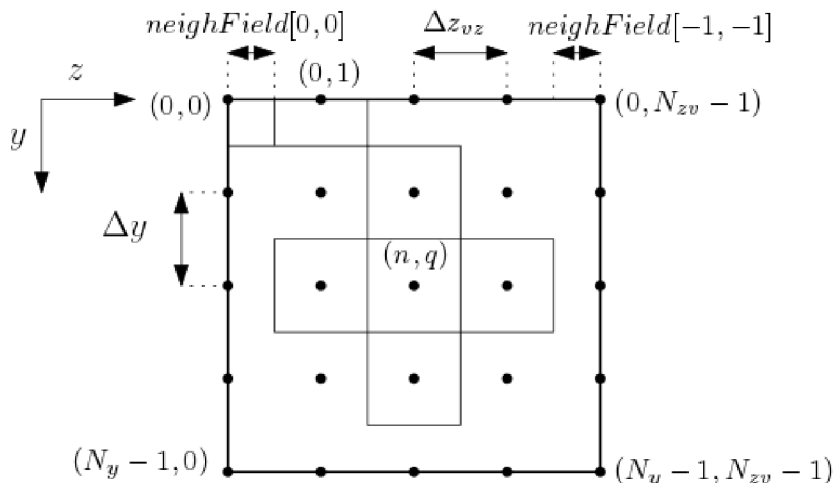
Pokud  $nout \geq 1$ , pak  $j = 0, 1, \dots, nout-1$ , jinak výpočet neproběhne, protože žádný bod vzduchu nepřekročil v celém svém objemu hranici PCM materiálu. Výsledkem je upravený interval  $b$ .

Aby hodnoty intervalů korespondovaly s teplotami diskretizované vrstvy vzduchu, je nutné provést obdobnou operaci posunutí i na hodnoty teploty  $T_{vz}$ . Jedna z možností jak to udělat, je vytvořit dostatečně velké pole rozměrů např.  $N_y \times 10000$ , které bude mít startovní hodnoty pouze počáteční podmínku. Jakmile dojde k překročení hranice PCM materiálu u jednoho nebo více uzlových bodů, pak se celé pole „přeroluje“ o  $nout$  pozic přes osu  $y$ .

```
Tvz[:, :, p + 1] = np.roll(Tvz[:, :, p + 1], nout, axis=1)
Tvz[:, :, p + 2] = np.roll(Tvz[:, :, p + 1], nout, axis=1)
```

## 3.6 Numerické řešení proudícího vzduchu

Odvození rovnic pro jednotlivé uzlové body vzduchu probíhá stejně jako u PCM materiálu. Použitou metodou je metoda kontrolních objemů ve své explicitní formě. Diskretizace je určena dělením  $N_y, N_{zv}$  v osách  $y, z$ . Je získáno 9 druhů uzlových bodů, které mají svou vlastní rovnici.



Obr. 3.13: Diskretizace vzduch

### 3.6.1 Tepelné toky prouděním

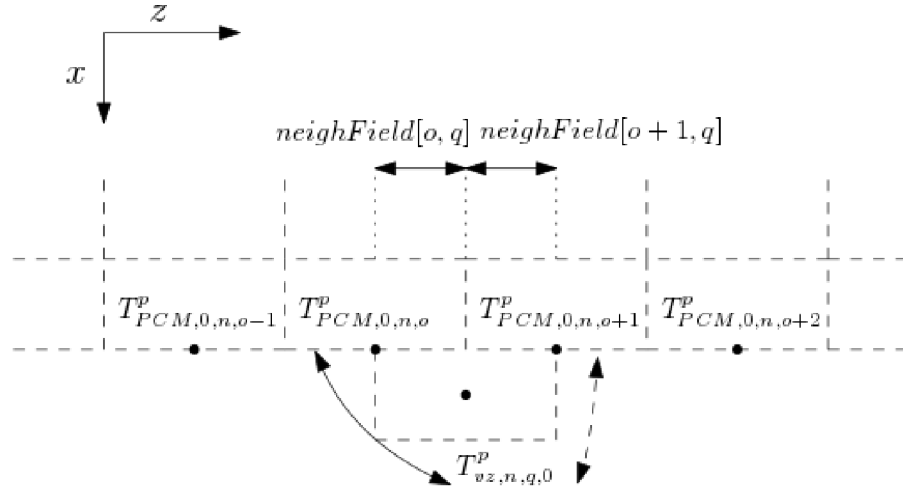
Dříve než bude odvozen finální tvar rovnic, je potřeba určit, čemu se rovnají tepelné toky  $\dot{Q}_{prl}$  a  $\dot{Q}_{prp}$ . Tepelný tok  $\dot{Q}_{prl}$  vyjadřuje množství tepla, které se přeneso prouděním ze všech uzlových bodů PCM materiálu do konkrétního uzlového bodu vzduchu během jedné sekundy. Pro pravou vrstvu vzduchu platí totéž a tepelný tok se nazývá  $\dot{Q}_{prp}$ . Z Newtonova ochlazovacího zákona plyne:

$$\dot{Q}_{pr} = \alpha S (T_{PCM} - T_{vz}). \quad (3.34)$$

Tento vztah je však moc obecný. Je tedy nutné určit předpis, která bude určovat tepelný tok prouděním, pro každý konkrétní uzlový bod vzduchu.

$$\dot{Q}_{prl}(n, q, p) = \alpha \Delta y \left( \text{neighField}[:, q]^p \cdot (T_{PCM,0,n,:}^p - T_{vz,n,q,0}^p) \right) \quad (3.35)$$

Tzn. pro konkrétní uzlový bod vzduchu s indexy  $n, q$  je vyjádřena sousednost se všemi krajními uzlovými body PCM materiálu –  $\text{neighField}[:, q]$ , což je vektor velikosti  $N_z$ . Dále od teploty každého uzlového bodu PCM materiálu s indexy  $0, n, :$ , tedy krajní uzlové body PCM materiálu ležící na stejném  $y$ -ovém indexu  $n$ , je odečtena teplota konkrétního uzlového bodu vzduchu  $n, q$ . Jedná se také o vektor o velikosti



Obr. 3.14: Interakce mezi uzlovými body proudícího vzduchu a PCM materiálu

$N_z$ . Skalární součin tedy zajišťuje, že pokud spolu některé z bodů nesousedí, pak jejich  $neighField = 0$  a nedojde k přenosu tepla. Pokud mají některé z uzlových bodů společnou hranici, pak k přenosu tepla dochází a to na jejich hranici s jejich příslušným rozdílem teplot. Obdobný vztah je obdržen pro pravou vrstvu vzduchu:

$$\dot{Q}_{prp}(n, q, p) = \alpha \Delta y \left( neighField[:, q]^p \cdot (T_{PCM, N_x-1, n, :}^p - T_{vz, n, q, 1}^p) \right). \quad (3.36)$$

Poslední index v teplotě vzduchu je roven 0, pokud se jedná o levou vrstvu a 1, pokud jde o vrstvu pravou.

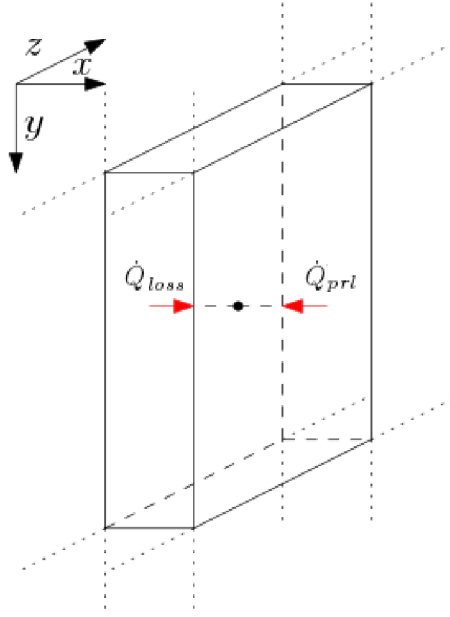
Analogicky, pokud chceme vyjádřit tepelný tok prouděním do konkrétního krajního uzlového bodu PCM materiálu, pak bude okrajová podmínka ve tvaru:

$$\dot{q}_L(n, o, p) = \frac{\alpha}{\Delta z} \left( neighField[o, :]^p \cdot (T_{vz, n, 0: N_{zv}-1, 0}^p - T_{PCM, 0, n, o}^p) \right) + I_G \tau \alpha_1, \quad (3.37)$$

$$\dot{q}_P(n, o, p) = \frac{\alpha}{\Delta z} \left( neighField[o, :]^p \cdot (T_{vz, n, 0: N_{zv}-1, 1}^p - T_{PCM, N_x-1, n, o}^p) \right). \quad (3.38)$$

### 3.6.2 Vnitřní uzlové body

Vnitřní uzlové body jsou popsány indexy  $n = 1, 2, \dots, N_y - 2$  a  $q = 1, 2, \dots, N_{zv} - 2$ . Postup je analogický k odvození rovnic u PCM materiálu, proto bude uveden jen pro vnitřní uzlové body. U ostatních typů uzlových bodů budou přidány pouze nutné komentáře. Tepelné toky, které vstupují do kontrolního objemu jsou pouze  $\dot{Q}_{prl}(n, q, p)$  a  $\dot{Q}_{loss}$ .  $\dot{Q}_{loss}$  vyjadřuje tepelný tok ztrátami do okolí a  $\dot{Q}_{prl}(n, q, p)$  tepelný tok prouděním mezi PCM a vzduchem. Jelikož je součinitel tepelné vodivosti vzduchu velice malý, jsou zanedbány tepelné toky mezi kontrolními objemy vzduchu ve směru proudění.



Obr. 3.15: Vnitřní uzlový bod vzduchu

Rovnice energetické bilance má tvar:

$$\dot{Q}_{prl}(n, q, p) + \dot{Q}_{loss} = \Delta x \Delta y \Delta z_{vz} c_v \rho_v \frac{T_{vz,n,q,0}^{p+1} - T_{vz,n,q,0}^p}{\Delta t}. \quad (3.39)$$

Pak tedy platí

$$T_{vz,n,q,0}^{p+1} = T_{vz,n,q,0}^p + \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y \Delta z_{vz} c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(n, q, p) + \dot{Q}_{loss} \right). \quad (3.40)$$

### 3.6.3 Rohové uzlové body

Rohové uzlové body jsou dány indexy  $(0, 0)$ ,  $(0, N_{zv} - 1)$ ,  $(N_y - 1, 0)$ ,  $(N_y - 1, N_{zv} - 1)$  a jejich rovnice jsou popořadě:

$$T_{vz,0,0,0}^{p+1} = T_{vz,0,0,0}^p + \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y \text{neighField}[0, 0] c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(0, 0, p) + \dot{Q}_{loss} \right) \quad (3.41)$$

$$T_{vz,N_y-1,0,0}^{p+1} = T_{vz,N_y-1,0,0}^p + \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y \text{neighField}[0, 0] c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(N_y - 1, 0, p) + \dot{Q}_{loss} \right) \quad (3.42)$$

$$T_{vz,0,N_{zv}-1,0}^{p+1} = T_{vz,0,N_{zv}-1,0}^p + \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y \text{neighField}[N_y - 1, N_{zv} - 1] c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(0, N_{zv} - 1, p) + \dot{Q}_{loss} \right) \quad (3.43)$$

$$T_{vz, N_y-1, N_{zv}-1, 0}^{p+1} = T_{vz, N_y-1, N_{zv}-1, 0}^p + \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y \text{neighField}[N_y-1, N_{zv}-1] c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(N_y-1, N_{zv}-1, p) + \dot{Q}_{loss} \right) \quad (3.44)$$

### 3.6.4 Hranové uzlové body

Hranové uzlové body jsou popsány indexy  $(n = 0, q = 1, 2, \dots, N_{zv} - 2)$ ,  
 $(n = N_y - 1, q = 1, 2, \dots, N_{zv} - 2), (n = 1, 2, \dots, N_y - 2, q = 0)$ ,  
 $(n = 1, 2, \dots, N_y - 2, q = N_{zv} - 1)$ , jejichž příslušné rovnice jsou popořadě:

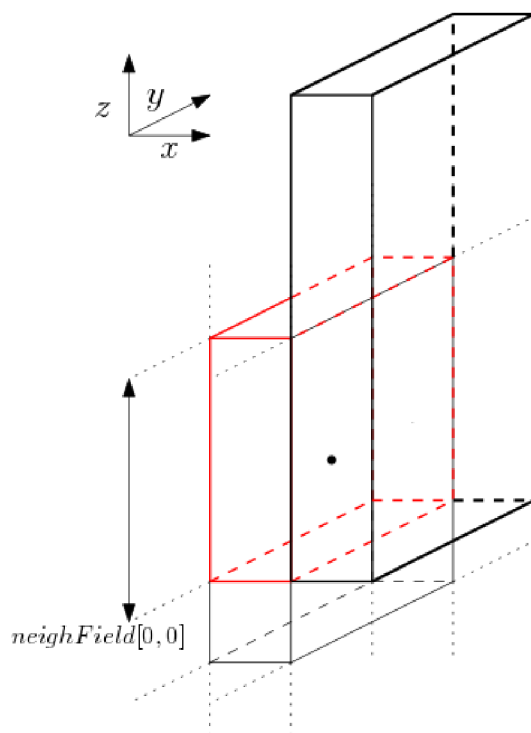
$$T_{vz, 0, q, 0}^{p+1} = T_{vz, 0, q, 0}^p + \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y \Delta z_{vz} c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(0, q, p) + \dot{Q}_{loss} \right) \quad (3.45)$$

$$T_{vz, N_y-1, q, 0}^{p+1} = T_{vz, N_y-1, q, 0}^p + \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y \Delta z_{vz} c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(N_y-1, q, p) + \dot{Q}_{loss} \right) \quad (3.46)$$

$$T_{vz, n, 0, 0}^{p+1} = T_{vz, n, 0, 0}^p + \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y \text{neighField}[0, 0] c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(n, 0, p) + \dot{Q}_{loss} \right) \quad (3.47)$$

$$T_{vz, n, N_{zv}-1, 0}^{p+1} = T_{vz, n, N_{zv}-1, 0}^p + \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y \text{neighField}[N_y-1, N_{zv}-1] c_v \rho_v} \left( \dot{Q}_{prl}(n, N_{zv}-1, p) + \dot{Q}_{loss} \right) \quad (3.48)$$

U rohových a hranových uzlových bodů dochází ke změně velikosti kontrolního objemu, protože není počítáno s objemem, který přesahuje přes PCM materiál viz obr. 3.16. Tato vlastnost se dá jednoduše ošetřit pomocí funkce sousednosti, což lze vidět na rovnicích (3.41)-(3.44) a (3.47), (3.48).



Obr. 3.16: Změna velikosti kontrolního objemu

Rovnice pro pravou vrstvu vzduchu jsou odvozeny analogicky, jedinou změnou je poslední dolní index u teploty vzduchu a tepelný tok  $\dot{Q}_{prt}$  je nahrazen už předem nadefinovaným tepelným tokem  $\dot{Q}_{prp}$ .

### 3.7 Programové řešení

Zdrojový kód je napsán v programovacím jazyku Python. Byl využit software od české firmy JetBrains s názvem PyCharm, který je velmi oblíbený v komunitě programátorů v Pythonu. Celkový program se skládá ze dvou částí – spouštěcího skriptu a knihovny, která byla vytvořena v rámci této diplomové práce a obsahuje všechny potřebné funkce k výpočtu.

## 4 NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ FÁZOVÉ PŘEMĚNY

V třetí kapitole byl odvozen 3D model PCM materiálu a vzduchové vrstvy proudící okolo něj, avšak v reálném případě je nutné brát v potaz fázovou přeměnu PCM materiálu a počítat s ní při tvorbě modelu. Během fázové přeměny je akumulována (resp. uvolňována) energie ve formě latentního tepla, které je využíváno k přeměně fáze materiálu. Způsoby jakými lze tuto skutečnost matematicky modelovat budou probrány v této kapitole a nejvhodnější z nich bude vybrán a implementován do výsledného modelu. V této kapitole bylo čerpáno z [22].

### 4.1 Metoda efektivní tepelné kapacity

První metodou pro modelování fázové přeměny materiálu je metoda efektivní tepelné kapacity. Tato metoda zahrnuje latentní teplo do měrné tepelné kapacity materiálu. Je zřejmé, že pokud bude měrná tepelná kapacita vyšší, bude zpomalen přenos tepla, což koresponduje s reálnou situací. Efektivní tepelná kapacita bude dále značena  $c_{\text{eff}}$ .

Vztah mezi efektivní tepelnou kapacitou PCM materiálu  $c_{\text{eff}}$  a energií, která je uložena a uvolněna během fázové přeměny, je přímo úměrný. Naopak pokud bude zvětšen rozsah intervalu teploty tání a tuhnutí, pak dojde k poklesu hodnoty efektivní tepelné kapacity [6].

Jednou z možností jak efektivní tepelnou kapacitu předepsat je tedy lineárně rozložit latentní teplo na intervalu teploty tání a tuhnutí [3].

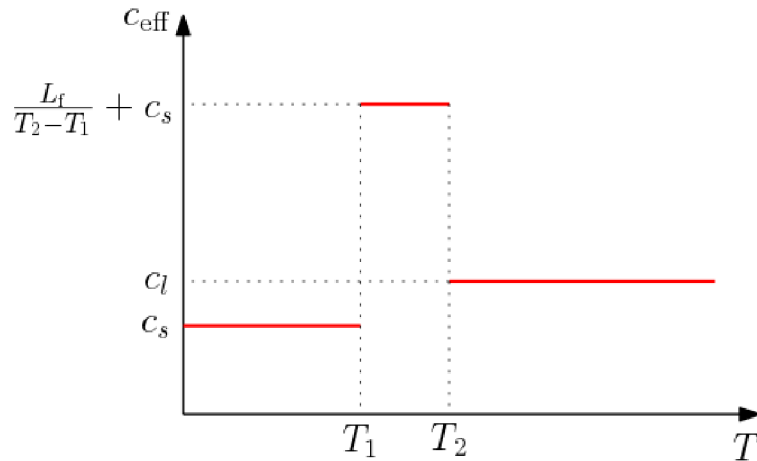
$$c_{\text{eff}} = \frac{L_f}{T_2 - T_1} + c_s, \quad (4.1)$$

kde  $T_1$  je teplota počátku tání resp. tuhnutí a  $T_2$  je teplota, při které je PCM na konci procesu fázové přeměny, tedy těleso je celé v tekuté resp. tuhé fázi.

Pokud bude uvažován předchozí po částech konstantní případ a zároveň bude cílem rozlišit měrnou tepelnou kapacitu pro pevnou a kapalnou fázi, pak má funkce  $c_{\text{eff}}$  následující tvar

$$c_{\text{eff}} = \begin{cases} c_s, & T < T_1 & \text{pevná fáze} \\ \frac{L_f}{T_2 - T_1} + c_s, & T_1 \leq T \leq T_2 & \text{přechodná fáze} \\ c_l, & T > T_2 & \text{kapalná fáze,} \end{cases} \quad (4.2)$$

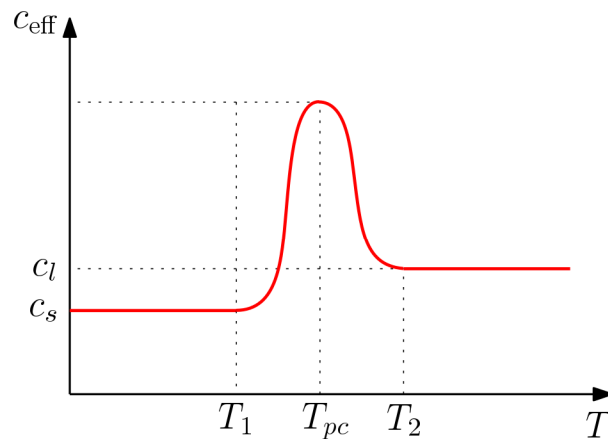
kde  $c_s$  je značena měrná tepelná kapacita pevné fáze a  $c_l$  je měrná tepelná kapacita tekuté fáze.



Obr. 4.1: Efektivní tepelná kapacita

Zřejmě tento způsob je na implementaci tím nejjednodušším a v praxi by bylo vhodné najít jiný tvar funkce  $c_{\text{eff}}$ , který by lépe vystihoval reálnou podstatu fázové přeměny PCM materiálů. Pokud by byla uvažována efektivní tepelná kapacita podle rovnice (4.2) viz obr. 4.1, docházelo by k tzv. izotermické fázové přeměně, která je typická např. pro ocel [25]. Cílem je nalézt nějakou obdobnou funkci, avšak nejlépe spojitou a hladkou aby byl lépe vystižen charakter fázové přeměny PCM materiálu.

Jedno z možných řešení nabízí Gaussova funkce. Pokud bude efektivní tepelná kapacita  $c_{\text{eff}}$  uvažována ve tvaru Gaussovy funkce, přechod mezi pevnou a kapalnou fází se stane plynulejší. Jako příklad bude uvedena efektivní tepelná kapacita materiálu Rubitherm RT 22HC [9], který může být uvažován i ve výsledném modelu, avšak záleží na konkrétních požadavcích na zařízení. Zároveň, jelikož se liší měrná tepelná kapacita tuhé a kapalné fáze, je vhodné navrhnout  $c_{\text{eff}}$  jako kombinaci dvou Gaussových funkcí, které na sebe navazují v teplotě fázové přeměny.



Obr. 4.2: Efektivní tepelná kapacita ve tvaru Gaussovy funkce



Takto vytvořená měrná tepelná kapacita jako funkce teploty je dosazena do parciální diferenciální rovnice vedení tepla v 3D, tedy platí

$$\rho c_{\text{eff}}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (4.3)$$

což je tvar, který nelze analyticky řešit a je zapotřebí využít numerických metod.

Je nutné modifikovat současný model tak, aby zvládal modelovat fázovou přeměnu ve smyslu metody efektivní tepelné kapacity. Je definována funkce

$$c_{\text{eff}} = 2000 + 43770 \exp \left\{ \frac{-(T - 22)^2}{4.8} \right\}, \quad (4.4)$$

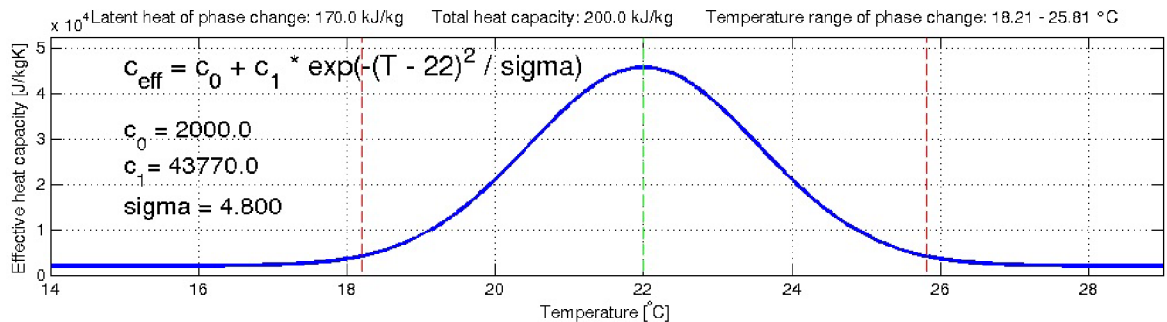
kde  $c_0 = 2000$  je konstantou určující měrnou tepelnou kapacitu pevné a kapalné fáze, konstanty  $c_1 = 43770$  a  $\sigma = 4,8$  popisují popořadě maximální hodnotu a tvar křivky  $c_{\text{eff}}$ . Člen  $(T - 22)$  definuje teplotu fázové přeměny  $T_{pc} = 22 \text{ °C}$ .

Programové řešení spočívá pouze v přechodu z konstantní měrné tepelné kapacity  $c$  na funkci

def c(T):

```
return 2000 + 43770 * np.exp(-(T - 22) ** 2 / 4.8),
```

tedy je nahrazena každá měrná tepelná kapacita PCM materiálu  $c$  funkcí  $c(T)$ . Tato Gaussova křivka odpovídá konkrétnímu materiálu, a to již zmíněnému Rubitherm RT 22HC [9].



Obr. 4.3: Efektivní tepelná kapacita materiálu RT 22 HC [9]

## 4.2 Metoda entalpie

Alternativním způsobem modelování fázové přeměny je tzv. metoda entalpie. Principem metody entalpie je zavedení nové termodynamické veličiny – entalpie, která do sebe umožňuje zahrnout i latentní teplo [6]. Objemovou entalpie lze definovat jako Entalpie může být považována za formu energie, které obsahuje latentní i citelné teplo a je definována jako funkcionál [26]

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^T \left( \rho c - \rho L_f \frac{\partial f_s}{\partial \xi} \right) d\xi, \quad (4.5)$$

kde  $L_f$  je množství latentního tepla,  $T_{ref}$  je referenční teplota a  $f_s \in \langle 0, 1 \rangle$  je podíl tuhé fáze. Lze jej vyjádřit jako  $f_s = \frac{V_s}{V_s + V_l}$ , kde  $V_s$  je objem tuhé fáze a  $V_l$  je objem kapalné fáze uvažovaného elementu.

Pokud bude zavedena entalpie do rovnice vedení tepla ve 3D (2.14) získáme [27]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div}(k \nabla T).$$

Matematická formulace této úlohy je tím kompletní a může být vyřešena vhodnou numerickou metodou. Na druhou stranu, namísto neznámé teploty je nyní v první fázi hledána entalpie a pomocí entalpie určena teplota v následujícím časovém diskretizačním kroku. Řešení je tedy výpočetně náročnější. Naopak výhodou metody entalpie je numerická stabilita [26].

## 4.3 Metoda zotavující se teploty

Metoda zotavující se teploty byla vytvořena na řešení problémů s izotermickou fázovou přeměnou. Jejím principem je zavedení pomocné proměnné pro každý uzel, která slouží k uchování informace o „čerpání“ latentního tepla [22]. Při numerickém řešení se rovnice vedení tepla uvažuje bez latentního tepla. Pokud by došlo v daném uzlu k překročení teploty fázové přeměny, teplota je zkorigována na teplotu fázové přeměny a informace o množství vyčerpaného nebo dodaného tepla je uložena do pomocné proměnné [7]. Teplota v daném uzlu může opustit teplotu fázové přeměny až v tom okamžiku, kdy je veškeré množství latentního tepla z pomocné proměnné vyčerpáno resp. odvedeno, v závislosti na tom jestli dochází k ohřevu nebo ochlazování.

Pro výsledný model byla zvolena metoda efektivní tepelné kapacity, jelikož není tolik výpočetně náročná. Tato skutečnost byla velmi důležitá, a to především protože některé výpočty trvaly řádově až desítky hodin.

## 5 OPTIMALIZACE

### 5.1 Úvod

Cílem této kapitoly je optimalizace modelu solárního kolektoru, který byl popsán v předchozím textu. Vzhledem ke komplexnosti modelu se jedná o optimalizaci tzv. black box funkce, což znamená, že víme jaké jsou vstupy a výstupy z funkce, ale nemáme představu co se děje uvnitř. V případě modelu solárního kolektoru se může jednat o vstupy ve formě parametrů modelu – rozměry, fyzikální parametry a výstupem je např. akumulovaná energie.

Optimalizace takové funkce je obecně velmi náročnou úlohou, především protože na ní většinou selhává klasická teorie optimalizace. Nemůžeme totiž ve většině případů předpokládat jakékoliv vlastnosti na účelovou funkci typu linearita nebo konvexnost. Tedy jedinou možnou cestou jak tyto optimalizační problémy řešit je využití metaheuristik nebo metod bez využití derivace. Heuristické optimalizační metody fungují na principu zkusemého řešení problémů, které je často založené na intuici, zkušenosti nebo na principech odpozorovaných v přírodě. Heuristický algoritmus postupně hledá lepší a lepší řešení, avšak bez záruky jakéhokoliv tvrzení o jeho optimalitě.

Optimalizace bude realizována, stejně jako samotný model, v programovacím jazyce Python. Bude provedena rešerše vybraných heuristických optimalizačních metod a jejich implementací v prostředí jazyka python. Důležitým aspektem těchto algoritmů je také paralelizace, jelikož řešení úlohy i při rozumném dělení a časové diskretizaci je velmi časově náročné. Tato skutečnost plyne především z toho, že byl vytvořen 3D model a platí určitá omezení na velikost časového kroku ve formě podmínek stability a rychlosti proudění vzduchu. Jednou z možností jak se s tímto problémem vypořádat by byla paralelizace samotného kódu programu, jelikož při jedné časové iteraci je možné počítat teploty jednotlivých uzlových bodů paralelně. Další možností, která bude u některých algoritmů využita v této práci, je paralelizace optimalizačního algoritmu, protože většina heuristických algoritmů počítá účelovou funkci pro určitou skupinu parametrů nezávisle na sobě. Pro tyto účely byl autorovi práce zapůjčen přístup k výpočetní stanici, čímž se značně urychlil výpočet některých úloh. K výpočtu jsou využívány dva 16ti jádrové procesory Intel® Xeon® Processor E5-2650, které dohromady zvládnou až 32 vyčíslení účelové funkce zároveň. RAM paměť výpočetní stanice je 128GB.

## 5.2 Evoluční metody

Evoluční metody jsou relativně mladé odvětví optimalizačních algoritmů. Jejich počátky vznikly v 90. letech. Tato skutečnost plyne především z nástupu moderních a výkonnějších počítačů, které jsou pro tyto algoritmy stěžejní. Jedná se, stejně jako u velkého množství heuristických algoritmů, o implementaci principů odpozorovaných z přírody. V tomto případě je hlavní myšlenkou, že vždy přežijí jen ti nejsilnější jedinci. Množina potenciálních řešení se nazývá populace. Tato populace se vyvíjí z generací na generaci a to s využitím operátorů mutace, výběru a migrace. Prvky populace jsou v každém okamžiku běhu algoritmu potenciálními řešeními optimalizačního problému [28].

### 5.2.1 Algoritmus diferenciální evoluce

Algoritmus diferenciální evoluce (DE) je velmi efektivním a relativně jednoduchým algoritmem. Tyto vlastnosti z něj dělají velmi oblíbený a v praxi používaný algoritmus. Stejně jako většina genetických algoritmů má počátky v polovině devadesátých let, což z něj činí relativně mladý algoritmus [29].

Algoritmus pracuje s uspořádanou  $N$ -ticí bodů prohledávaného stavového prostoru  $S$ , která se nazývá populace a je značena jako  $P$ . Každý z bodů populace  $P$  je potenciálním adeptem na optimální řešení. Populace se v průběhu algoritmu vyvíjí s každou generací, tedy populace v generaci  $g$  přejde na populaci v generaci  $g + 1$ . Na tuto skutečnost se dá nahlížet i tak, že každý z jedinců v populaci se vyvíjí s generacemi, hledá tedy v průběhu algoritmu stále lepší a lepší umístění ve stavovém prostoru.

Vývoj populace pobíhá pomocí evolučních operátorů – mutace, křížení a výběru [29]. Na začátku algoritmu je vytvořena počáteční populace  $P_0$ , skládající se z  $N$  bodů. Počáteční populace  $P_0$  je vytvořena náhodně v oblasti stavového prostoru pomocí rovnoměrného rozdělení. Ve všech takto vytvořených bodech počáteční populace je vyčíslena hodnota účelové funkce. Poté probíhá cyklus, ve kterém se z aktuální generace populace  $P_g$  vytváří generace nová  $Q_g$ . Jakmile dojde k vytvoření všech prvků populace, tato generace se stane další generací populace  $P_{g+1}$  a algoritmus pokračuje stejným způsobem dále, než dojde k ukončení formou vhodné ukončovací podmínky.

Generace  $Q_g$  je vytvořena následovně. Pro každý bod  $\mathbf{x}_i$  ze současné generace  $P_g$  je vytvořen konkurent  $\mathbf{y}$ . Tento konkurent je výsledkem postupného využití operací mutace a křížení některých bodů generace  $P_g$ . Následně je vyhodnocena účelová funkce konkurenta  $\mathbf{y}$ . Do nové generace  $Q_g$  však vstupuje pouze lepší, z hlediska optimalizace, z bodů  $\mathbf{x}_i$  a  $\mathbf{y}$ . Pokud se jedná o minimalizaci, můžeme říct, že do  $Q_g$

vstoupí ten z bodů, který má nižší hodnotu účelové funkce  $f(\mathbf{x}_i)$ ,  $f(\mathbf{y})$ . Tedy platí:

$$\mathbf{x}_{i,g+1} = \begin{cases} \mathbf{y} & \text{pokud } f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}_i), \\ \mathbf{x}_i & \text{jinak.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Konkurent  $\mathbf{y}$  bodu  $\mathbf{x}_i$  je vytvořen pomocí operací mutace a křížení. Princip vytváření konkurenta začíná  $\mathbf{y}$  mutací, která může proběhnout mnoha různými způsoby. Dojde tedy k vytvoření mutantu  $\mathbf{u}$ , který následně křížením s bodem  $\mathbf{x}_i$  vytvoří konkurenta  $\mathbf{y}$ . Kombinace konkrétní mutace a křížení se nazývá DE–strategie [28].

Jakmile dojde ke splnění ukončovací podmínky tak je přerušena tvorba další generace a je vybrán nejlepší jedinec z poslední generace populace  $P$  ve smyslu optimalizačního kritéria. Pokud se tedy bude jednat o minimalizaci, výsledkem bude jedinec s nejnižší hodnotou účelové funkce.

## Mutace

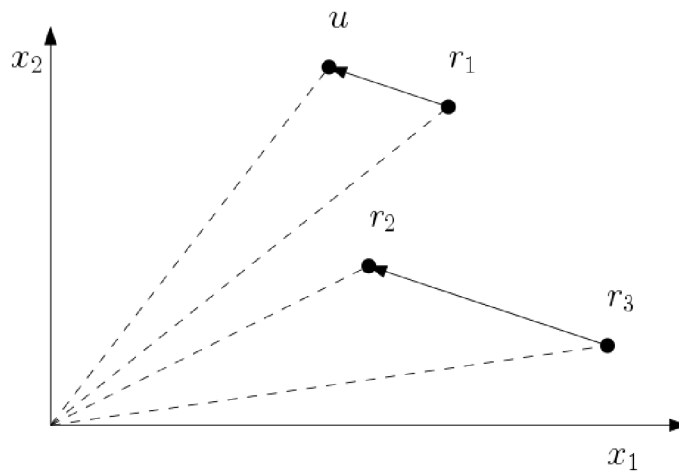
Mutací vzniká pro bod  $\mathbf{x}_i$  populace jeho mutant  $\mathbf{u}$ . Existuje mnoho druhů mutace [28], avšak uvedeny budou pouze některé z nich. Body  $\mathbf{r}_i$  jsou náhodně vybrané body ze současné generace populace  $P_g$  a bod  $\mathbf{x}_{best}$  je nejlepším bodem současné generace populace  $P_g$ . Způsob provedení mutace bude značen  $a/b$ , kde  $a$  je použitý typ mutace a  $b$  je počet diferencí náhodně vybraných bodů ( $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$  apod.) [28].

Typy mutací:

- rand/1

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 + F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3), \quad (5.2)$$

kde  $F \geq 0$  je vstupním parametrem algoritmu. Jedná se v praxi o nejvyužívanější způsob mutace.



Obr. 5.1: Mutace rand/1

- best/1

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_{best} + F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (5.3)$$

Je zřejmé, že mutace best/1 bude více „hladový“, jelikož nové body budou mít mnohem větší tendenci tíhnout k nejlepšímu bodu populace. Tato skutečnost může značně urychlit konvergenci, avšak na druhou stranu může algoritmus stáhnout do lokálního minima.

- best/2

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_{best} + F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + F(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \quad (5.4)$$

Dále existuje velké množství mutačních strategií. Jejich volba má velký vliv na optimalitu výsledného řešení a na každý typ úlohy může být vhodná jiná strategie.

## Křížení

Cílem křížení je vhodným způsobem získat konkurenta  $\mathbf{y}$  z mutanta  $\mathbf{u}$  příslušícího bodu  $\mathbf{x}_i$ . Toho dosáhneme záměnou některých souřadnic bodu  $\mathbf{x}_i$  za hodnoty příslušných souřadnic mutanta  $\mathbf{u}$ . Jsou dva základní typy křížení – binomické a exponenciální, kde binomické je v praxi využívanější [28].

### Binomické křížení

Binomické křížení je určeno následovně [28]:

$$y_j = \begin{cases} u_j & \text{pokud } U_j \leq C_R \vee j = l \\ x_{ij} & \text{pokud } U_j > C_R \wedge j = l, \end{cases} \quad (5.5)$$

kde  $j = 1, 2, \dots, N$  jsou indexy jedinců,  $l$  je náhodně vybrané číslo z množiny  $1, 2, \dots, N$ ,  $U_j$  jsou nezávislé náhodné proměnné s rozdělením pravděpodobnosti  $U(0, 1)$  a  $C_R \in \langle 0, 1 \rangle$  je vstupní parametr křížení, který ovlivňuje kolik souřadnic bodů z mutanta  $\mathbf{u}$  bude převzato do konkurenta  $\mathbf{y}$ . Je vhodné si povšimnout, že i pokud bude parametr  $C_R$  zvolen nulový, konkurent  $\mathbf{y}$  přesto převezme alespoň jednu souřadnici z  $\mathbf{u}$ . Tedy je zřejmé, že to, jestli u daných souřadnic konkurenta  $\mathbf{y}$  dojde k převzetí příslušných souřadnic z mutanta  $\mathbf{u}$  je určeno náhodně pomocí rovnoměrného rozdělení [29].

Pro řešení optimalizačních úloh v této práci je využita implementace metody diferenciální evoluce knihovny SciPy v Pythonu.

## 5.3 Optimalizace hejnem částic

Particle swarm optimization (PSO) neboli optimalizace hejnem částic je relativně nová populační optimalizační metoda. Metoda byla navržena roku 1995 autory Kennedym a Eberhartem [30]. Aby bylo nalezeno řešení, každá částice upravuje svou pozici na základě své vlastní zkušenosti a zkušenosti částic ostatních. Základní PSO algoritmus se skládá z hejna částic, které se pohybují v  $n$ -dimenzionálním stavovém prostoru možných řešení.

Každá z  $i$  částic v čase  $t$  má následující charakteristiky:

- $X_{i,t}$ ,  $V_{i,t}$  jsou pozice a vektor rychlosti.
- $P_{i,t}$  je malá paměť ukládající prozatímní nejlepší hodnotu částice.
- $G_{i,t}$  je nejlepší pozice.

V každém časovém kroku  $t$  algoritmu je upravena rychlost a částice je posunuta na novou pozici. Tato pozice se jednoduše vypočítá jako součet předchozí pozice a nové rychlosti:

$$X_{i,t+1} = X_{i,t} + V_{i,t+1}. \quad (5.6)$$

Úprava rychlosti je dána předpisem:

$$V_{i,t+1} = d_1 V_{i,t} + d_2 r_2 (P_{i,t} - X_{i,t}) + d_3 r_3 (G_{i,t} - X_{i,t}), \quad (5.7)$$

kde  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  jsou parametry algoritmu a  $r_1$ ,  $r_2$  jsou náhodné parametry.

Průběh PSO algoritmu lze popsat v následujících krocích [30]:

1. Inicializace
2. Uprav rychlosti
3. Uprav pozice
4. Urči nejlepší pozici částice
5. Urči nejlepší částici v hejnu
6. Pokud je splněno ukončovací kritérium, algoritmus končí. Jinak zpět do 2.

Pro řešení optimalizačních úloh byla využita implementace algoritmu v Pythonu od autora Toma Jansona [32].

## 5.4 Blackbox optimalizace

Další metodou která byla využita pro výpočty v rámci této práce je blackbox metoda (BB) od autora Paula Knyshe a Yannise Korkolise [31]. Tato procedura byla vytvořena pro efektivní optimalizaci black-box funkcí náročných na výpočetní čas. Využívá metodologie odezvové plochy s využitím radiální bázové funkce jako odezvového modelu. Počáteční hodnoty algoritmu jsou určeny pomocí metody založené na Latinských hyperkrychlich. Pro určení dalších hodnot pak využívá upraveného

CORS algoritmu [31]. Výhoda tohoto algoritmu oproti ostatním uvedeným v této kapitole je možnost paralelizace výpočtu.

## 5.5 Energetická optimalizace solárního kolektoru

Na optimalizaci solárního kolektoru lze nahlížet např. z hlediska energetického. Zajímavou otázkou je, jaké by byly optimální parametry modelu tak, aby hodnota veškeré energie ve formě tepla, která vstoupí do PCM materiálu, byla co největší. Jako proměnná je brána šířka CSM panelu  $l$ . Neznámou je tedy ideální tloušťka CSM panelu, která pro danou úlohu umožní uložení co největšího množství tepla.

Účelová funkce je vyjádřena jako záporná hodnota energie, která vstupuje do PCM materiálu přes jeho povrch během času experimentu. Záporná hodnota je zvolena, jelikož cílem je maximalizovat energii, tedy minimalizovat zápornou hodnotu energie. Předpis účelové funkce plyne z funkcí  $\dot{q}_L(n, o, p)$  a  $\dot{q}_R(n, o, p)$  – umožňuje vyjádřit množství energie procházející povrchem PCM tělesa.

$$\begin{aligned} \min W \left( \sum_{p=0}^{\frac{t_{max}}{\Delta t}} \sum_{n=0}^{N_y-1} \sum_{o=0}^{N_z-1} \left( \frac{\alpha}{\Delta z} \left( \text{neighField}[o, :]^p \cdot (T_{vz,n,0:Nzv-1,0}^p - T_{PCM,0,n,o}^p) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha}{\Delta z} \left( \text{neighField}[o, :]^p \cdot (T_{vz,n,0:Nzv-1,1}^p - T_{PCM,Nx-1,n,o}^p) \right) \right) y_{out}(n) \Delta t + \right. \\ \left. + I_G \tau \alpha_1 h d t_{max} \right) + (1 - W) l d h \rho, \end{aligned} \quad (5.8)$$

kde  $y_{out}(n)$  je funkce přiřazující hranici  $\Delta y$  a nebo  $\frac{\Delta y}{2}$ , pro příslušné uzlové body v závislosti na  $n$  a  $W \in \langle 0, 1 \rangle$  je váhová konstanta určující důležitost příslušných členů účelové funkce v dané úloze. Výraz u členu  $(1 - W)$  značí penalizaci vzhledem k množství materiálu. Vystupuje zde tedy určitý ekonomický prvek, který vyjadřuje cenu za dané množství materiálu. Dále část rovnice (5.8) u clene  $W$  vyjadřuje množství tepla v [J], které je konvektivně přeneseno povrchem PCM tělesa, během celého času experimentu v součtu s množstvím tepla, které PCM těleso vstřebává ze slunečního záření přes celý jednostranný povrch CSM panelu, za dobu experimentu  $t_{max}$ . Je vhodné poznamenat, že  $\text{neighField}$  je kromě indexů  $n, o$  zároveň i funkcí času, avšak v důsledku implementace jsou jeho hodnoty uvnitř časového cyklu přepisovány.

Omezení je vyjádřeno jako

$$l_l \leq l \leq l_u, \quad (5.9)$$

kde indexy  $l$  a  $u$  značí dolní a horní mez proměnné. Úloha (5.8) spolu s podmínkou (5.9) tvoří kompletní optimalizační úlohu.



## Úloha 1

První úlohou je optimalizace energie vstupující do CSM panelu v závislosti na jeho šířce. Jako penalizace do účelové funkce vstupuje množství materiálu, které ovlivňuje jeho cenu. Jedná se tedy i o určitý typ ekonomické optimalizace, kdy je cílem dosáhnout co největšího množství energie a to za co nejmenší možnou cenu. Je řešena úloha (5.8) s konkrétními hodnotami z tabulky 5.1, vzhledem k

$$0.005 \leq l \leq 0.1. \quad (5.10)$$

Solární kolektor je zahřátý na teplotu  $40^\circ\text{C}$  a kolem něj proudí oboustranně vzduch o teplotě  $18^\circ\text{C}$  na vstupu do kolektoru. Materiál má teplotu fázové přeměny  $43^\circ\text{C}$ . Celá simulace probíhá po dobu  $t_{max} = 1800$  s. Všechny ostatní parametry úlohy jsou uvedeny v tabulce 5.1. Cílem optimalizační úlohy, je nalézt ideální tloušťku materiálu  $l$  tak, aby hodnota energie vstřebané materiálem byla co nejvyšší a zároveň nebyly velké náklady na materiál.

Tab. 5.1: Hodnoty parametrů pro energetickou optimalizaci 1

Parametr	Hodnota	Jednotka	Parametr	Hodnota	Jednotka
$h$	1	[m]	$\Delta t$	0,05	[s]
$d$	1	[m]	$t_{max}$	1800	[s]
$l$	–	[m]	$v$	1,7	[m s <sup>-1</sup> ]
$\dot{q}_H, \dot{q}_D, \dot{q}_L, \dot{q}_P$	0	[W m <sup>-2</sup> ]	$\dot{q}_{loss}$	–5	[W m <sup>-2</sup> ]
$\rho$	760	[kg m <sup>-3</sup> ]	$e$	0,03	[m]
$\rho_v$	1,1614	[kg m <sup>-3</sup> ]	$c_v$	1007	[J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$\lambda$	0,2	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\mu$	$184,6 \times 10^{-7}$	[N s m <sup>-2</sup> ]
$T_{0p}$	40	[°C]	$k$	0,0272	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$N_x$	8	[–]	$\nu$	$15,52 \times 10^{-6}$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$N_y$	6	[–]	$N_{zv}$	7	[–]
$N_z$	6	[–]	$T_{vz,in}$	18	[°C]
$c_1$	43770	[–]	$\sigma$	4,8	[–]
$T_{pc}$	43	[°C]			

Zřejmě bude vždy existovat konečná hodnota  $l$  taková, že pro každou větší hodnotu se již účelová funkce nezlepší – neakumuluje se více tepla, naopak účelová funkce bude penalizována za zbytečně velké množství materiálu. K optimalizaci byla využita metoda diferenciální evoluce, optimalizace hejnem částic a metoda blackbox optimalizace.

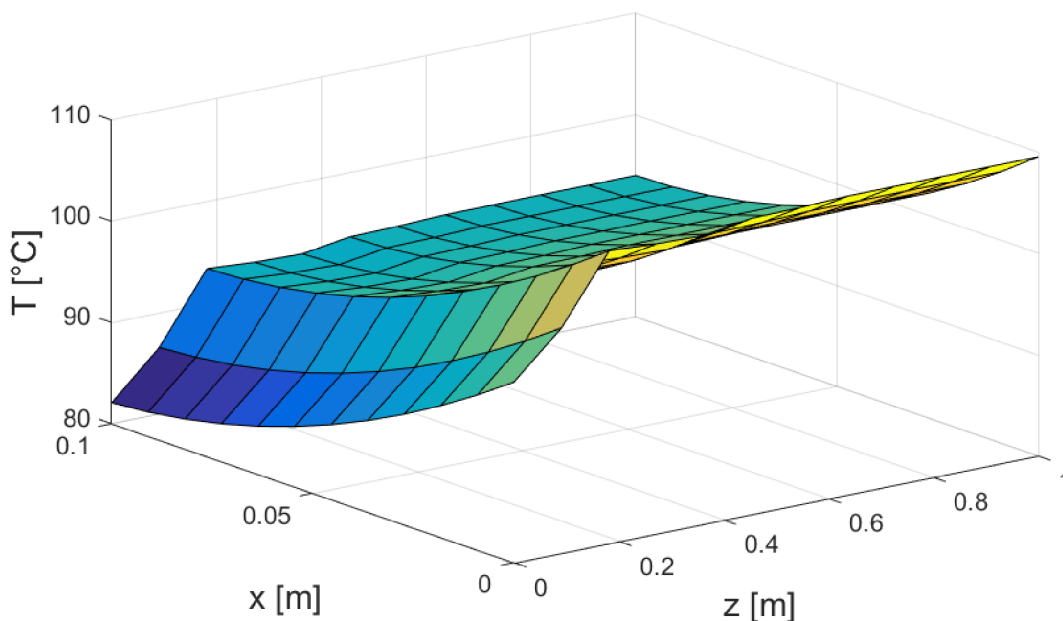
## Výsledky úlohy 1

Tab. 5.2: Výsledky optimalizační úlohy 1

	Diferenciální evoluce	Optimalizace hejnem částic	Black-box optimalizace
$l_{opt}$	0,00712m	0,00721m	0,00720m
$f(x)$	27,69	27,70	27,70

Výsledky úlohy jsou uvedeny v tabulce 5.2. Výsledky všech tří metod se shodují na stejné hodnotě  $l = 0,007$  m, což je tedy optimální tloušťka materiálu vzhledem k maximalizaci energie absorbované PCM materiálem, která je optimální i vzhledem k množství materiálu.

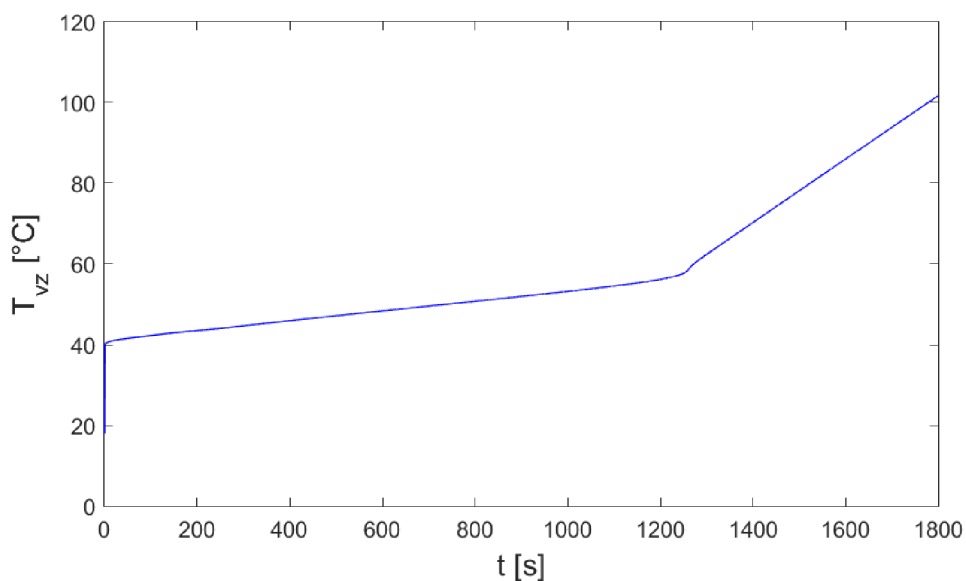
### Vizualizace



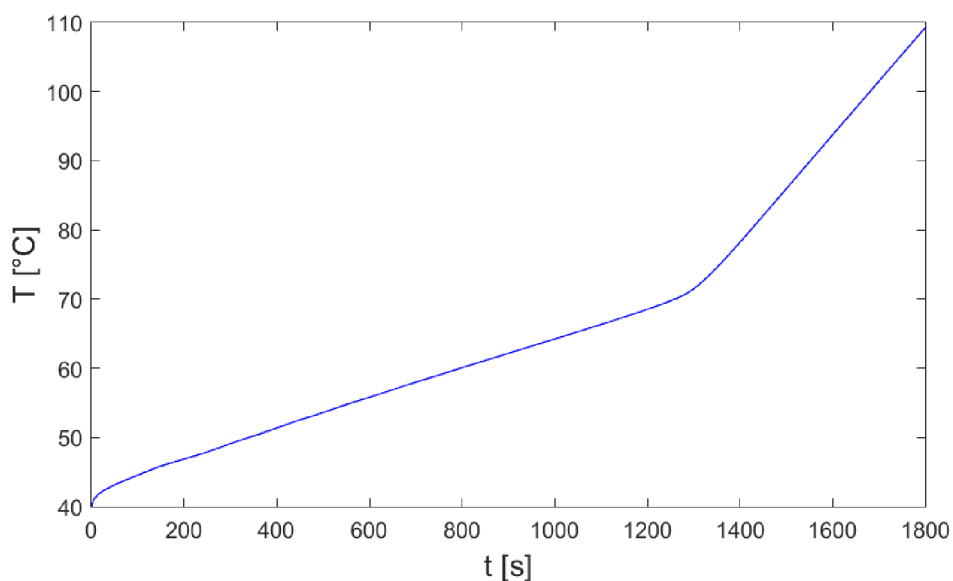
Obr. 5.2: Teplota řezu PCM materiálu v čase  $t = 1800$ s pro  $y = 0,5$ m.

Na obr. 5.2 lze vidět předpokládané rozložení teploty v řezu  $y = 0,5$ m PCM materiálu v čase  $t = 1800$  s. Sluneční záření dopadá na povrch, tedy na body s indexy  $m = 0$ , což vysvětluje teplotní profil ve směru osy  $x$ . Vzduch proudí podél osy  $z$  a ochlazuje PCM materiál oboustranně. Toto ochlazování klesá se vzdáleností od vstupu vzduchu, jelikož teplejší vzduch již tolik PCM materiál neochladí. Obr.

5.3 a obr. 5.4 spolu úzce souvisí. Za povšimnutí stojí souvislost fázové přeměny PCM materiálu a teploty vzduchu na výstupu.



Obr. 5.3: Závislost teploty vzduchu na výstupu na čase



Obr. 5.4: Závislost teploty konkrétního bodu CSM panelu na čase

Vzduch se ohřívá pozvolna v čase od 0 do 1200 sekund, jelikož materiál prochází fázovou přeměnou a akumuluje energii ve formě latentního tepla. Jakmile se veškerý PCM materiál přejde do kapalné fáze, začne se ohřívát. Nárůst teplotního rozdílu zvýší tepelný tok prouděním z tělesa a tím naroste i teplota vzduchu na výstupu.

## Úloha 2

Úloha energetické optimalizace má smysl i vzhledem parametrům materiálu. Určitě má smysl se ptát na otázku, jaký by byl nejvhodnější materiál pro daný typ úlohy. Praktický význam této optimalizační úlohy může být např. ve tvorbě nových materiálů se specifickými vlastnostmi.

Proměnné pro tuto optimalizační úlohu budou parametry funkce efektivní tepelné kapacity  $c_{\text{eff}} - T_{pc}$ ,  $c_1$  a  $\sigma$  ze vztahu

$$c_{\text{eff}} = 2000 + c_1 \exp \left\{ \frac{-(T - T_{pc})^2}{\sigma} \right\}. \quad (5.11)$$

Účelová funkce je ve tvaru

$$\begin{aligned} \min W \left( \sum_{p=0}^{\frac{t_{max}}{\Delta t}} \sum_{n=0}^{N_y-1} \sum_{o=0}^{N_z-1} \left( \frac{\alpha}{\Delta z} \left( \text{neighField}[o, :]^p \cdot (T_{vz,n,0:N_{zv}-1,0}^p - T_{PCM,0,n,o}^p) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha}{\Delta z} \left( \text{neighField}[o, :]^p \cdot (T_{vz,n,0:N_{zv}-1,1}^p - T_{PCM,N_x-1,n,o}^p) \right) \right) y_{out}(n) \Delta t + \right. \\ \left. + I_G \tau \alpha_1 h d t_{max} \right) + (1 - W) (c_1 l h d + \sigma l h d), \end{aligned} \quad (5.12)$$

kde oproti úloze první přibyl člen penalizující za množství materiálu v součinu s parametry funkce  $c_{eff}$ .

Úloha je tedy definovaná následovně: Najdi ideální parametry  $T_{pc}$ ,  $c_1$  a  $\sigma$  pro které nabývá účelová funkce nejnižších hodnot vzhledem k

$$T_{pc,l} \leq T_{pc} \leq T_{pc,u}, \quad (5.13)$$

$$c_{1,l} \leq c_1 \leq c_{1,u}, \quad (5.14)$$

$$\sigma_l \leq \sigma \leq \sigma_u. \quad (5.15)$$

Cílem je tedy najít ideální PCM materiál, který umožní při dané úloze akumulaci co největšího množství energie. Zároveň zde působí ekonomické hledisko, které penalizuje za kvalitu zvoleného materiálu a jeho množství. Tedy čím lepší má PCM materiál parametry, tím bude i dražší.

Do tabulky 5.3 jsou zaznamenány jen hodnoty, které jsou rozdílné nebo jsou podstatné pro představu úlohy. Ostatní parametry jsou totožné jako v tabulce 5.1.

Tab. 5.3: Hodnoty parametrů pro energetickou optimalizaci 2

Parametr	Hodnota	Jednotka	Parametr	Hodnota	Jednotka
$h$	1	[m]	$\Delta t$	0,1	[s]
$d$	1	[m]	$t_{max}$	60	[s]
$l$	0,1	[m]	$v$	1,7	[m s <sup>-1</sup> ]
$T_{vz,in}$	18	[°C]	$T_{0p}$	40	[°C]
$c_1$	-	[-]	$\sigma$	-	[-]
$T_{pc}$	-	[°C]	$W$	0,1	[-]
$T_{pc,l}$	20	[°C]	$T_{pc,u}$	60	[°C]
$c_{1,l}$	20000	[-]	$c_{1,u}$	60000	[-]
$\sigma_l$	3	[-]	$\sigma_u$	250	[-]

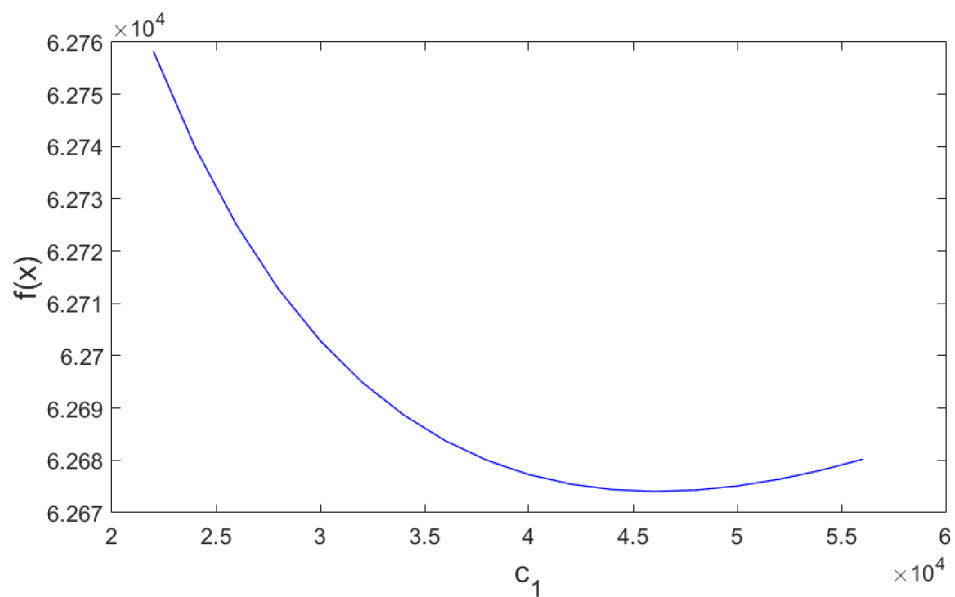
### Analýza problému

Dříve než bude úloha řešena, je bude poznamenáno několik zajímavých věcí ohledně účelové funkce tohoto problému a její analýza.

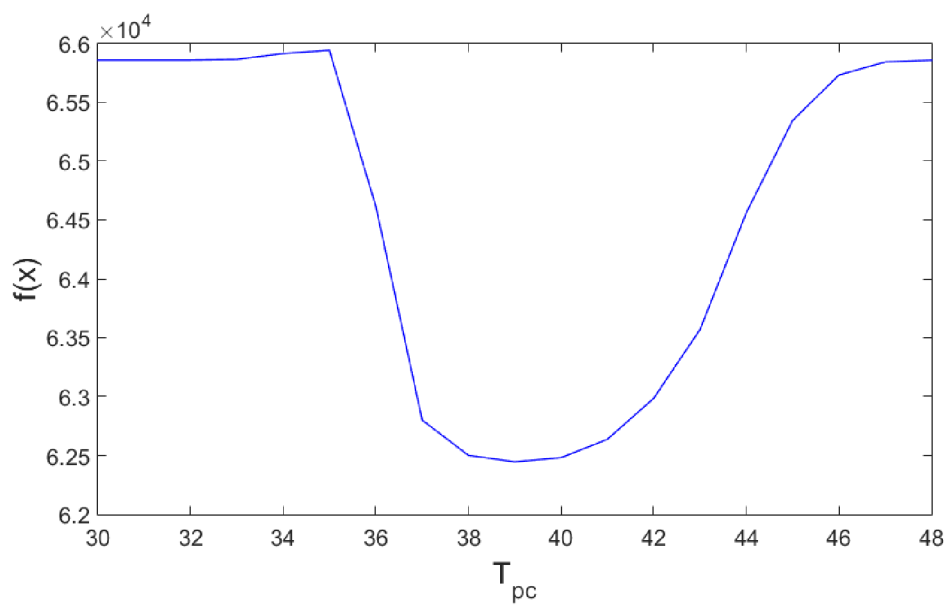
Zřejmě pro hodnotu fázové přeměny hledaného materiálu  $T_{pc}$  bude existovat optimální hodnota vždy a to i pro  $W = 1$ . To že bude materiál procházet fázovou přeměnou totiž vždy zlepšuje hodnotu účelové funkce, tedy množství akumulované energie. Pokud bude hodnota  $T_{pc}$  zcela mimo rozsah teplot experimentu, pak hodnota účelové funkce nebude ovlivněna. Parametry  $c_1$  a  $\sigma$  popisují kvalitu PCM materiálu. Dá se předpokládat, že s jejich nárůstem poroste i velikost akumulované energie. Proto je důležitá volba vhodného penalizačního členu a konstanty  $W$ .

Pokud bude nadělen stavový prostor rovnoměrně pro každou z proměnných, je možné si představit co za funkci je zhruba optimalizováno. Účelová funkce je zobrazení  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ , proto bude vizualizace vytvořena pro každou z proměnných zvlášť.

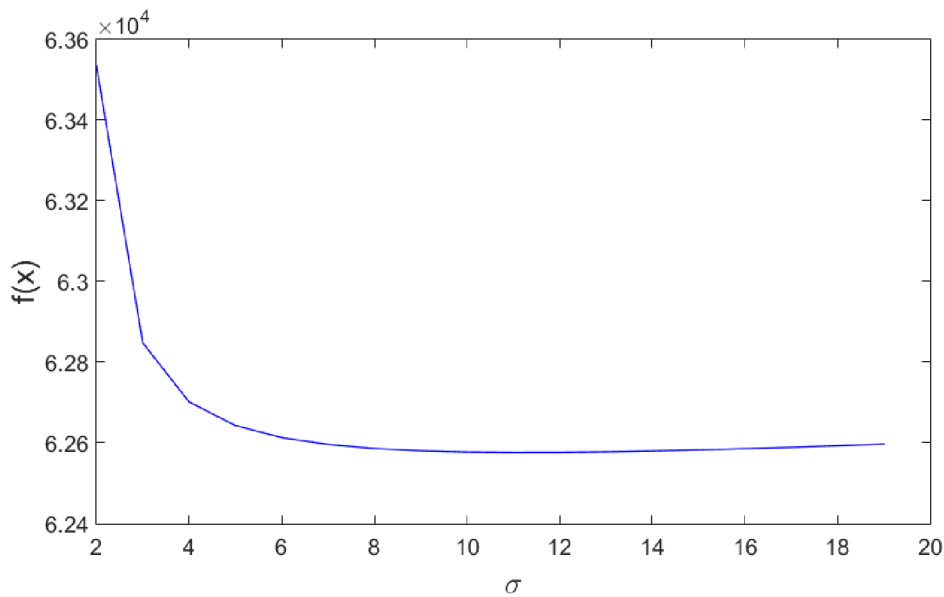
## Vizualizace



Obr. 5.5: Závislost účelové funkce na  $c_1$ , řez pro  $T_{pc} = 39^\circ C$  a  $\sigma = 3,8$



Obr. 5.6: Závislost účelové funkce na  $T_{pc}$ , řez pro  $c_1 = 46000$  a  $\sigma = 3,8$



Obr. 5.7: Závislost účelové funkce na  $\sigma$ , řez pro  $c_1 = 20000$  a  $T_{pc} = 39^\circ C$

Na obr. 5.5 - obr. 5.7 lze vidět existence minima, avšak jedná se pouze o řezy stavového prostoru a tyto funkce můžou pro jiné řezy vypadat rozdílně. Ve více dimenzích naopak je dost možné, že funkce bude mít více lokálních extrémů. Podstatou těchto grafů je ukázat, že úloha má určitě pro určité rozmezí parametrů smysl a hledané řešení může být uvnitř mezí pro jednotlivé proměnné.

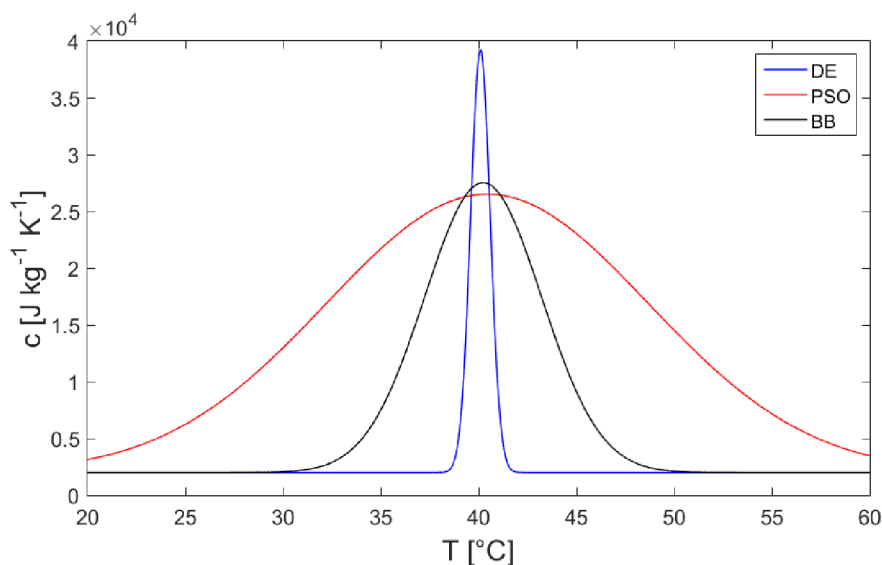
## Výsledky úlohy 2

Tab. 5.4: Výsledky optimalizace úlohy 2

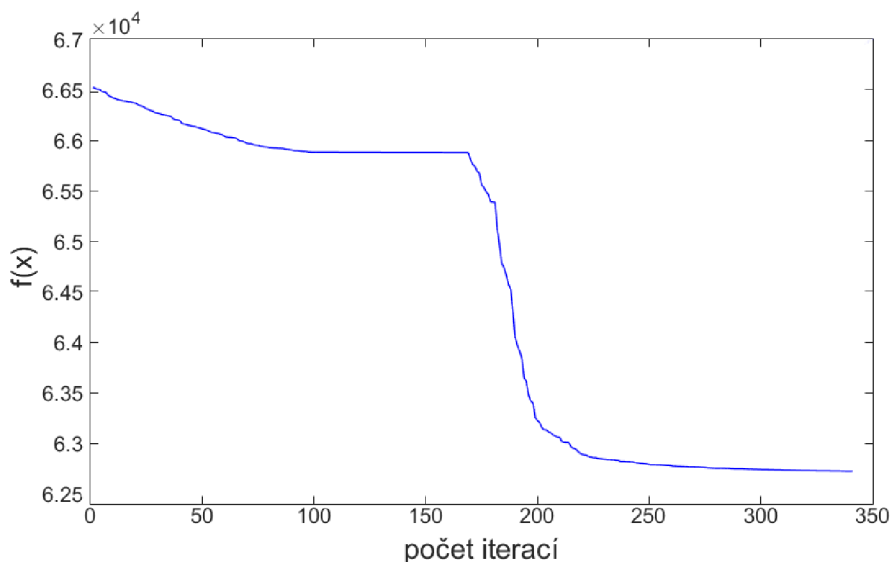
	DE	PSO	BB
$T_{pc}$	40,09 °C	40,44 °C	40,23 °C
$c_1$	37228,79	24508,47	25517,69
$\sigma$	0,50	136,02	17,85
$f(x)$	62852,99	62829,93	62817,95
počet iterací	25	25	340
velikost populace	15	15	-

Výsledky všech tří metod se téměř shodují v účelové funkci, ale liší se ve svém řešení. Tato skutečnost je způsobena existencí většího počtu lokálních extrémů – v případě této úlohy lokálních minim. Výsledkem jsou tedy tři různé materiály,

kteřé mají rozdílné fyzikální vlastnosti viz obr. 5.8. Přesto, že jsou materiály odlišné ve svých vlastnostech, dokážou při dané úloze akumulovat téměř stejné množství tepla. Teplota fázové přeměny materiálu  $T_{pc}$  je celkem podobná, avšak značně se liší parametry  $\sigma$  a  $c_1$ . Lze však všimnout, že pokud je velké  $c_1$ , dochází penalizaci  $\sigma$  a naopak. Tedy žádný materiál nevykuká v obou parametrech současně a to z důvodu ceny materiálu. Byly tedy nalezeny dvě řešení, které vynikají v jednom z parametru  $\sigma$ ,  $c_1$  a jedno řešení, které je v obou průměrné.



Obr. 5.8: Výsledné tvary funkce  $c_{\text{eff}}$ .



Obr. 5.9: Průběh řešení blackbox algoritmu

Pro výpočet byla využita strategie best/1, která má z definice tendenci tíhnout k nejlepšímu současnému řešení, tedy existuje riziko zapadnutí do lokálního minima.



Nejlépe ze všech metod vyšla metoda BB, která je díky své paralelizaci schopna pracovat 32krát rychleji než ostatní metody. Jelikož průběžná řešení BB metody jsou nezávislá, lze rozložit jednotlivá vyčíslení účelové funkce mezi jádra procesoru. Průběh jejího řešení lze vidět na obr. 5.9.

Fyzikálně nejlépe opodstatněné řešení je metodou diferenciální evoluce, jelikož tvar funkce  $c_{\text{eff}}$  pro její řešení by mohl odpovídat konkrétnímu materiálu. Ostatní dvě řešení jsou sice lepší z hlediska hodnoty účelové funkce, ale rozsah teplot počátku a konce průběhu fázové přeměny nedává fyzikálně smysl, jelikož např. řešení metodou PSO by začalo měnit fázi při teplotě zhruba  $22^\circ\text{C}$  a přestalo až při  $58^\circ\text{C}$ . Úlohu by tedy bylo vhodné přeformulovat z hlediska podmínky (5.15), čili zmenšit horní hranici  $\sigma_u$  na fyzikálně realizovatelnou hodnotu.

## 5.6 Optimalizace z hlediska stabilní teploty na výstupu

Jedním z možných využití solárního kolektoru z PCM materiálu je např. sušení bylinek [10]. Při takové úloze by bylo možné uvažovat jako účel co nejvíce stabilní teplotu vzduchu na výstupu ze solárního kolektoru, jelikož různé změny v teplotě by mohly ovlivnit efektivitu sušení [11].

Stabilizace teploty lze uskutečnit např. změnou parametrů, které charakterizují vrstvu proudícího vzduchu. Jelikož je vzduch nasáván ventilátorem v horní části solárního kolektoru, je možné dosáhnout různých hodnot jeho rychlosti. Rychlost vzduchu ovlivňuje velikost součinitele přestupu tepla, což poskytne možnost hledání optimální rychlosti vzduchu pro stabilní teplotu na výstupu.

Účelová funkce lze vyjádřit následovně. V jednotlivých časových iteracích je sečtena teplota levé a pravé vzduchové vrstvy a vypočítán průměr. Tato hodnota je považována za průměrnou teplotu vzduchu na výstupu. Dále je od této teploty odečtena zadaná teplota  $T_g$ , což je hodnota teploty požadovaná na výstupu, a je vytvořena absolutní hodnota tohoto rozdílu. Součtem přes každou časovou iteraci je získán člen, který vyjadřuje míru toho jak moc se teplota vzduchu na výstupu řešení liší od teploty požadované.

Úloha zní: Hledáme ideální rychlost proudění  $v$ , tedy

$$\min \sum_{p=0}^{\frac{t_{\text{max}}}{\Delta t}} \text{abs} \left( \left( T_{vz, \text{floor}(\frac{N_y}{2}), N_{zv}-1, 0}^p - T_{vz, \text{floor}(\frac{N_y}{2}), N_{zv}-1, 1}^p \right) / 2 - T_g \right), \quad (5.16)$$

kde  $T_g$  je požadovaná teplota na výstupu. Omezení je ve tvaru

$$v_l \leq v \leq v_u. \quad (5.17)$$

Úloha je nastavena tak, že pro rozsah rychlosti (5.17) se jedná o turbulentní proudění. Tedy s rostoucí rychlostí poroste i hodnota součinitele přestupu tepla  $\alpha$ , bude tedy existovat rychlost pro kterou dojde k přehřátí vzduchu a naopak i k nedohřátí na cílovou teplotu. Cílem této optimalizační úlohy je nalézt takovou rychlost  $v$ , pro kterou bude vzduch na výstupu ze solárního kolektoru (vzhledem ke zvolené normě vzdálenosti) nejbližší k požadované teplotě.

## Úloha 3

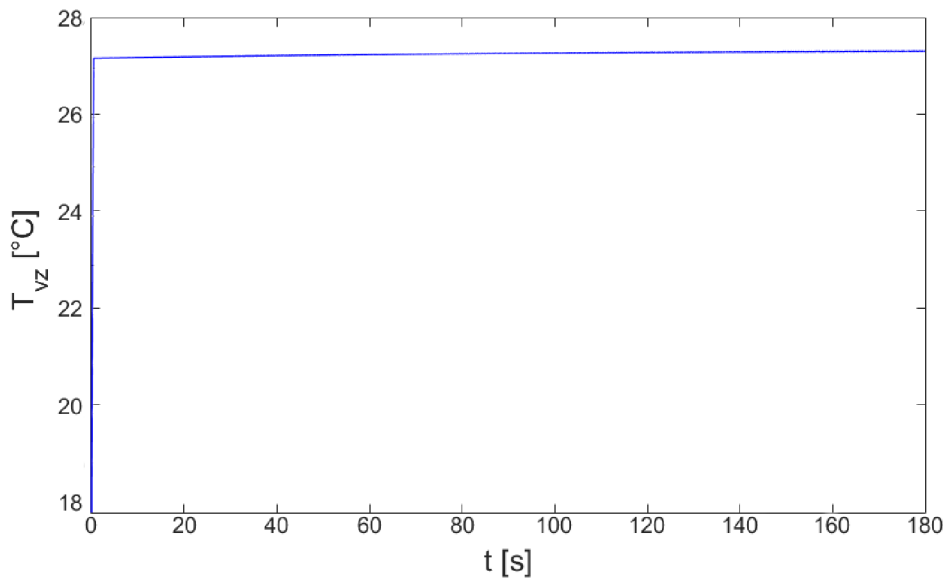
Je řešena úloha (5.16) vzhledem k

$$1,2 \leq v \leq 2. \quad (5.18)$$

Tab. 5.5: Hodnoty parametrů pro optimalizaci teploty vzduchu na výstupu

Parametr	Hodnota	Jednotka	Parametr	Hodnota	Jednotka
$h$	1	[m]	$T_g$	27,3	[°C]
$d$	1	[m]	$t_{max}$	180	[s]
$l$	0,1	[m]	$v$	-	[m s <sup>-1</sup> ]
$T_{vz,in}$	18	[°C]	$T_{0p}$	40	[°C]
$c_1$	43770	[-]	$\sigma$	3,8	[-]
$T_{pc}$	42	[°C]			

K vyřešení úlohy byl použit BB algoritmus, který došel k řešení  $v = 1,91 \text{ m s}^{-1}$  s hodnotou účelové funkce  $f(x) = 67,49$ . Na obr. 5.10 lze vidět, že teplota vzduchu na výstupu byla skutečně ustálena na téměř stabilní hodnotu  $T_g = 27,3^\circ\text{C}$ . Tato hodnota byla stanovena odhadem tak, aby byla zvládnutelná za čas průběhu simulace  $t_{max} = 180 \text{ s}$ . Nemělo by totiž smysl hledat optimální parametry úlohy, pro kterou by nebylo možné volbou parametrů dosáhnout požadované teploty.



Obr. 5.10: Závislost teploty vzduchu na výstupu na čase

## Úloha 4

Stabilizaci teploty vzduchu na výstupu značně ovlivňuje i volba materiálu. Pokud bude v konkrétní úloze zvolen vhodný materiál, dojde k uložení energie do PCM materiálu ve formě latentního tepla a tím i k ustálení teploty vzduchu na výstupu. Nabízí se tedy optimalizační úloha, kde jako proměnné jsou rychlost proudění  $v$  a teplota fázové přeměny materiálu  $T_{pc}$ , kterou lze formulovat jako (5.16) vzhledem k

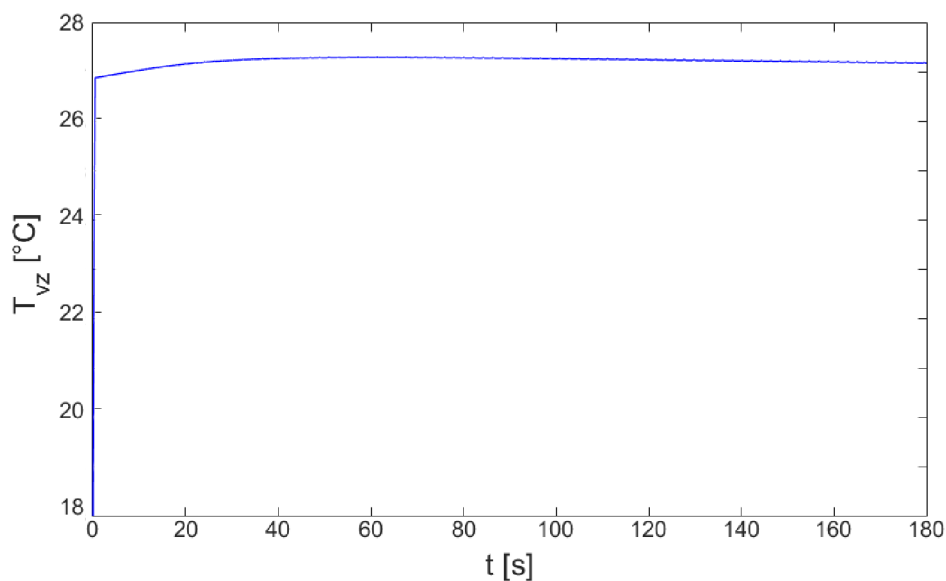
$$1, 2 \leq v \leq 2, \quad (5.19)$$

$$10 \leq T_{pc} \leq 50, \quad (5.20)$$

kde všechny ostatní parametry jsou stejné jako u úlohy 3.

Řešení úlohy bylo provedeno metodou blackbox a nabývá hodnot  $v = 1,82 \text{ m s}^{-1}$  a  $T_{pc} = 46,31^\circ\text{C}$  s  $f(x) = 106,6386$ . Řešení je tedy mírně horší než v případě úlohy 3, což je zjevné z obr. 5.10 a obr. 5.11. Algoritmus tedy nejspíš našel lokální minimum a bylo by vhodné provést více iterací.

Z obr. 5.11 opět plyne, že se povedlo docílit relativně stabilní teploty vzduchu na výstupu ze solárního kolektoru. Požadovaná teplota byla opět  $T_g = 27,3^\circ\text{C}$ . V porovnání s úlohou 3 byl nalezen vhodnější materiál, což umožnilo menší rychlost proudění vzduchu.



Obr. 5.11: Závislost teploty vzduchu na výstupu na čase

## 5.7 Zhodnocení optimalizace

Všechny tři uvedené optimalizační metody se shodují v řešení první úlohy. To je nejspíš v důsledku její nenáročnosti. Tato úloha byla naopak velmi náročná na výpočetní čas, jelikož pro čas průběhu simulace  $t_{max} = 1800s$  a rozumné dělení trval výpočet řádově desítky hodin. Byla tedy nalezena optimální šířka CSM panelu vzhledem k maximalizaci uložené energie.

U druhé optimalizační úlohy bylo cílem nalezení ideálního materiálu pro maximalizaci uložené energie. Doba průběhu simulace modelu byla u této úlohy zvolena na  $t_{max} = 60s$  z důvodu velikosti stavového prostoru, avšak provedené úvahy platí obecně i pro libovolně dlouhý průběh. Všechny tři metody se téměř shodují v účelové funkci, avšak řešení jsou různá. Tento fakt je nejspíš způsobem velkým množstvím lokálních extrémů. Nejlépe z uvedených metod z hlediska účelové funkce vyšla metoda blackbox optimalizace, avšak jediné fyzikálně realizovatelné řešení bylo obdrženo metodou diferenciální evoluce.

Třetí a čtvrtá úloha se zabývaly optimalizací parametrů solárního kolektoru vzhledem ke stabilizaci teploty vzduchu na výstupu. Nejprve byla řešena úloha pouze pro jednu proměnnou a to rychlost proudění vzduchu, následně pak i z hlediska materiálového. Pro obě úlohy byla doba průběhu simulace  $t_{max} = 180s$  a využita metoda blackbox optimalizace. V úloze třetí byla nalezena optimální rychlost a v úloze čtvrté kombinace optimální rychlosti proudění vzduchu a teploty fázové přeměny PCM materiálu. Výsledky obou úloh dávají fyzikálně smysl a úlohu lze opět obecně rozšířit na libovolnou dobu průběhu simulace.

## 6 ZÁVĚR

V úvodní části diplomové práce byla provedena rešerše základních termodynamických pojmů, které dávají teoretický základ pro tvorbu modelu solárního kolektoru. Rešerše byla provedena na přenos tepla vedením, prouděním i zářením, jelikož model solárního kolektoru kombinuje všechny uvedené způsoby přenosu tepla.

Pro vytvoření modelu solárního kolektoru byla využita časově explicitní metoda kontrolních objemů a odvozeny diskretizační rovnice pro jednotlivé uzlové body modelu 3D tělesa. Součástí modelu solárního kolektoru je i vrstva proudícího vzduchu, pro kterou byly v rámci této diplomové práce vytvořeny specifické procedury, popisující její pohyb a charakterizující její vztah sousednosti vzhledem k PCM tělesu. Programová implementace metody kontrolních objemů byla provedena v prostředí softwaru Python jako součást této diplomové práce.

Z metod pro modelování fázové přeměny z kapitoly 4 byla zvolena metoda efektivní tepelné kapacity. Důvody pro tuto volbu byly jednoduchost implementace a především nenáročnost na výpočetní čas, což bylo pro model velmi podstatné. Některé výpočty totiž trvaly řádově až desítky hodin a řešení např. metodou entalpie by výpočetní čas ještě prodloužilo.

Nejdůležitější částí této diplomové práce byla optimalizace výsledného modelu solárního kolektoru. Byla provedena rešerše metaheuristických metod, které v poslední době nabývají na popularitě. To především jelikož mnoho komplexních modelů má chování black-box funkce a tudíž je nelze efektivně optimalizovat pomocí klasických metod. Pro optimalizaci byly využity metody diferenciální evoluce, optimalizace hejnem částic a blackbox optimalizační metoda. Byly vytvořeny celkem čtyři optimalizační úlohy. První dvě úlohy měly za úkol hledání ideálních parametrů modelu tak, aby byla energie absorbovaná PCM materiálem co nejvyšší. Těmito parametry byly – šířka CSM panelu pro první úlohu a parametry charakterizující PCM materiál uložený v CSM panelu v úloze druhé. V dalších dvou úlohách bylo cílem nalézt ideální parametry tak, aby teplota vzduchu na výstupu byla co nejstabilnější na zadané hodnotě. Toho bylo dosaženo nalezením optimální rychlosti proudění vzduchu a teploty fázové přeměny PCM materiálu.

Model vytvořený v této práci by mohl v praxi sloužit k určování ideálních parametrů skutečného zařízení. I když se jedná pouze o přibližný model skutečnosti, výsledky jeho optimalizace nám mohou mnoho napovědět o charakteru chování zařízení.



## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] BERGMAN, T. L. a Frank P. INCROPERA. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 7th ed. /. Hoboken, NJ: Wiley, c2011. ISBN 978-047-0501-979.
- [2] FRANČŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice*. 4., dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4399-0.
- [3] HONG, C. P., T. UMEDA a Y. KIMURA. Numerical models for casting solidification: Part II. Application of the boundary element method to solidification problems. *Metallurgical Transactions B* [online]. 1984, **15**(1), 101-107 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1007/BF02661067. ISSN 0360-2141. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/BF02661067>
- [4] KALČÍK, Josef. *Technická termomechanika*. Praha: ČAV, 1960, 514 s.
- [5] LEE, Kyoung Ok a Mario A. MEDINA. Using phase change materials for residential air conditioning peak demand reduction and energy conservation in coastal and transitional climates in the State of California. *Energy and Buildings* [online]. 2016, **116**, 69-77 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.enbuild.2015.12.012. ISSN 03787788. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378778815304485>
- [6] LIU, Shuli, Yongcai LI a Yaqin ZHANG. Mathematical solutions and numerical models employed for the investigations of PCMs phase transformations. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* [online]. Elsevier Ltd, 1405, **33**, 659-674 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.rser.2014.02.032. ISSN 13640321.
- [7] MOCHNACKI, Bohdan a Sylwia LARA. Application of generalized finite difference method in numerical modelling of moving boundary problems. *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*. 2003, **2**, 129-143.
- [8] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011, 192 s. ISBN 9788021443006.
- [9] Produktový list Rubitherm RT 22 HC.  
Dostupné z [http://www.rubitherm.eu/media/products/datasheets/Techdata\\_RT22HC\\_EN.PDF](http://www.rubitherm.eu/media/products/datasheets/Techdata_RT22HC_EN.PDF) [online] 25.5.2016 [cit. 2018-05-23].
- [10] KHADRAOUI, Aymen El. Thermal Behavior of Indirect Solar Dryer: Nocturnal Usage of Solar Air Collector with PCM. *Journal of Cleaner Production*, vol. 148, 2017, pp. 37–48., doi:10.1016/j.jclepro.2017.01.149. ISSN 0959-6526.

- [11] GHIAMI, Amir a GHIAMI Shamsoddin. Comparative study based on energy and exergy analyses of a baffled solar air heater with latent storage collector. *Applied Thermal Engineering*. Volume 133, 2018, Pages 797-808, ISSN 1359-4311, <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2017.11.111>.
- [12] KLIMEŠ, L., CHARVÁT, P.; HEJČÍK, J. Comparison of the Energy Conversion Efficiency of a Solar Chimney and a Solar PV-Powered Fan for Ventilation Applications. *Energies*, 2018, 11, 912.
- [13] WILHELM E., RICHTER C., RAPP B. E. Phase change materials in microactuators: Basics, applications and perspectives, *Sensors and Actuators A: Physical*. Volume 271, 2018, Pages 303-347, 0924-4247, <https://doi.org/10.1016/j.sna.2018.01.043>.
- [14] PATANKAR, Suhas V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Bristol, PA: Taylor, 1980, xiii, 197 s. : il. ISBN 0-89116-522-3.
- [15] ÇENGEL, Yunus A a Afshin J. (Afshin Jahanshahi) GHAJAR. *Heat and mass transfer: fundamentals applications*. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2011, xix, 924 s. : ill. ; 27 cm. 1 CD-ROM. ISBN 0-07-339812-8.
- [16] LI, X. *Green energy: Basic Concepts and Fundamentals*. 1st ed. Springer, New York, 2011. DOI 10.1007/978-1-84882-647-2
- [17] RYMS, Michał, Witold M. LEWANDOWSKI, Ewa KLUGMANN-RADZIEMSKA, Hubert DENDA a Patrycja WCISŁO. The use of lightweight aggregate saturated with PCM as a temperature stabilizing material for road surfaces. *Applied Thermal Engineering* [online]. Elsevier, 2015, **81**(C), 313-324 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2015.02.036. ISSN 1359-4311.
- [18] HU, Yue a Per Kvols HEISELBERG. A new ventilated window with PCM heat exchanger—Performance analysis and design optimization. *Energy Buildings* [online]. Elsevier B.V, 2018, **169**, 185-194 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.enbuild.2018.03.060. ISSN 0378-7788.
- [19] WILHELM, E., C. RICHTER a B.E. RAPP. Phase change materials in microactuators: Basics, applications and perspectives. *Sensors Actuators: A. Physical* [online]. Elsevier B.V, 2018, **271**, 303-347 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.sna.2018.01.043. ISSN 0924-4247.
- [20] GANATRA, Yash, Javieradrian RUIZ, John A. HOWARTER a Amy MARCONNET. Experimental investigation of Phase Change Materials for thermal management of handheld devices. *International Journal of Thermal Sciences*



- [online]. Elsevier Masson SAS, 2018, 129, 358-364 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.03.012. ISSN 1290-0729.
- [21] PCM RT-LINE. *Rubitherm* [online]. [cit. 2018-05-23]. Dostupné z: <https://www.rubitherm.eu/en/index.php/productcategory/organische-pcm-rt>
- [22] ZÁLEŠÁK, Martin. *Počítačové modelování úloh přenosu tepla s fázovými přeměnami v MATLABu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2016. Bakalářská práce.
- [23] KANNAN, Nadarajah a Divagar VAKEESAN. Solar energy for future world: - A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* [online]. Elsevier, 2016, **62**(C), 1092-1105 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.rser.2016.05.022. ISSN 1364-0321.
- [24] FEISTAUER, M, J FELCMAN a I STRAŠKRABA. *Mathematical and computational methods for compressible flow*. Oxford: Clarendon Press, 2003, 535 s. ISBN 0-19-850588-4.
- [25] HLINÍK, Juraj. *Optimalizace návrhu tepelného výměníku využívající materiál se změnou fáze pro akumulaci tepla*. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2017.
- [26] KLIMEŠ, Lubomír, Tomáš MAUDER, Pavel CHARVÁT a Josef ŠTĚTINA. Front tracking in modelling of latent heat thermal energy storage: Assessment of accuracy and efficiency, benchmarking and GPU-based acceleration. *Energy* [online]. Elsevier, 2018, **155**, 297-311 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.energy.2018.05.017. ISSN 0360-5442.
- [27] SWAMINATHAN C.R., VOLLER V.R. On the enthalpy method. *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*. 1993, Vol. 3 Issue: 3, pp.233-244, <https://doi.org/10.1108/eb017528>
- [28] POLÁKOVÁ, Radka. *Adaptace v algoritmu diferenciální evoluce*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě. Přírodovědecká fakulta, 2014. Doktorská disertační práce.
- [29] SUCHOMEL, Ondřej a Tomáš HYHLÍK. *Optimalizační metody v CFD – diferenciální evoluce* [online]. , 11 [cit. 2018-05-23]. Dostupné z:<http://www.suchomel.org/files/Optimalizace-v-CFD.pdf>

- [30] KEMMOÉ TCHOMTÉ, Sylverin a Michel GOURGAND. Particle swarm optimization: A study of particle displacement for solving continuous and combinatorial optimization problems. *International Journal of Production Economics* [online]. Elsevier B.V, 2009, **121**(1), 57-67 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1016/j.ijpe.2008.03.015. ISSN 0925-5273.
- [31] KNYSH, Paul a Yannis KORKOLIS. *Blackbox: A procedure for parallel optimization of expensive black-box functions* [online]. 2016 [cit. 2018-05-23]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1605.00998.pdf>
- [32] JANSON, Tom. *Heuristic optimization* [online]. [cit. 2018-05-23]. Dostupné z: [https://github.com/tjanson/heuristic\\_optimization](https://github.com/tjanson/heuristic_optimization)

## SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

Symbol	Rozměr	Veličina
$a, b$	[ ]	množiny intervalů
$c$	[J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	měrná tepelná kapacita
$c_1$	[ ]	parametr funkce efektivní tepelné kapacity
$c_{\text{eff}}$	[J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	efektivní tepelná kapacita
$d$	[m]	tloušťka desky
$D_h$	[m]	charakteristický rozměr
$dV$	[m <sup>3</sup> ]	elementární objem
$e$	[m]	šířka vzduchové mezery
$\dot{E}_{in}$	[W]	tok energie vstupující do kontrolního objemu
$\dot{E}_g$	[W]	tok energie generovaný v kontrolním objemu
$\dot{E}_{out}$	[W]	tok energie vystupující z kontrolního objemu
$\dot{E}_{st}$	[W]	tok energie akumulované v kontrolního objemu
$f_s$	[ ]	zlomek podílu tuhé fáze
$g$	[m s <sup>-2</sup> ]	gravitační zrychlení
$h$	[m]	výška desky
$H$	[J m <sup>-3</sup> ]	objemová entalpie
$HC, DC, LC,$ $PC, FC, BC$	[ ]	indexy tepelného toku vedením mezi KO
$H, D, L, P, F, B$	[ ]	indexy tepelného toku v případě podmínky
$i, j$	[ ]	index polohy uzlových bodů
$k$	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	součinitel tepelné vodivosti vzduchu
$l$	[m]	délka desky
$L_f$	[J kg <sup>-1</sup> ]	latentní teplo fázové přeměny
$m$	[kg]	hmotnost
$(m, n, o)$	[ ]	trojice indexů polohy uzlových bodů 3D tělesa
$N_x, N_y, N_z, N_{zv}$	[ ]	počet uzlových bodů PCM tělesa ve směru $x, y, z$ a vzduchu ve směru $z$
$\dot{q}$	[W m <sup>-2</sup> ]	hustota tepelného toku
$\dot{Q}$	[W]	tepelný tok
$S$	[m <sup>2</sup> ]	plošný obsah
$t$	[s]	čas
$t_{max}$	[s]	doba trvání simulace
$\Delta t$	[s]	časový diskretizační krok
$T$	[°C, K]	teplota
$T0p$	[°C, K]	počáteční podmínka pro PCM

Symbol	Rozměr	Veličina
$T_g$	[°C, K]	cílová teplota na výstupu
$T_{vz}$	[°C, K]	teplota vzduchu
$T_{vz,in}$	[°C, K]	teplota vzduchu na vstupu
$T_{vz,out}$	[°C, K]	teplota vzduchu na výstupu
$T_{pc}$	[°C, K]	teplota fázové přeměny
$T_\infty$	[°C, K]	teplota okolí
$\Delta T$	[°C, K]	teplotní rozdíl
$v$	[m s <sup>-1</sup> ]	rychlost proudění
W	[ ]	váhová konstanta
$(x, y, z)$	[m, m, m]	souřadnice kartézského souřadného systému
$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta z_{vz}, \Delta z_p$	[m]	diskretizační kroky
$\alpha$	[W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]	součinitel přestupu tepla
$\alpha_1$	[ ]	absorptivita
$\kappa$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	součinitel teplotní vodivosti
$\lambda$	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	součinitel tepelné vodivosti
$\mu$	[N m s <sup>-1</sup> ]	dynamická viskozita
$\nu$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	kinematická viskozita
$\rho$	[kg m <sup>-3</sup> ]	hustota
$\rho_v$	[kg m <sup>-3</sup> ]	hustota vzduchu
$\sigma$	[ ]	koeficient metody efektivní tepelné kapacity
$\tau$	[ ]	transmitance

# SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	TQ diagram . . . . .	18
1.2	CSM panel . . . . .	19
1.3	Solární kolektor . . . . .	20
2.1	Schéma kontrolního objemu . . . . .	23
2.2	Schéma kontrolního objemu [22] . . . . .	24
3.1	Diskretizace tělesa [1] . . . . .	31
3.2	Typy uzlových bodů . . . . .	33
3.3	Centrální uzlový bod . . . . .	34
3.4	Rohový uzlový bod . . . . .	36
3.5	Hranový uzlový bod . . . . .	38
3.6	Stranový uzlový bod . . . . .	39
3.7	Stabilita uzlového bodu . . . . .	41
3.8	Proudění vzduchu . . . . .	43
3.9	Diskretizace vzduchu . . . . .	44
3.10	Diagram programu . . . . .	45
3.11	Schéma intervalů . . . . .	46
3.12	Případy překryvu . . . . .	47
3.13	Diskretizace vzduch . . . . .	50
3.14	Interakce mezi uzlovými body proudícího vzduchu a PCM materiálu . . . . .	51
3.15	Vnitřní uzlový bod vzduchu . . . . .	52
3.16	Změna velikosti kontrolního objemu . . . . .	54
4.1	Efektivní tepelná kapacita . . . . .	56
4.2	Efektivní tepelná kapacita ve tvaru Gaussovy funkce . . . . .	56
4.3	Efektivní tepelná kapacita materiálu RT 22 HC [9] . . . . .	57
5.1	Mutace rand/1 . . . . .	61
5.2	Teplota řezu PCM materiálu v čase $t = 1800s$ pro $y = 0,5m$ . . . . .	66
5.3	Závislost teploty vzduchu na výstupu na čase . . . . .	67
5.4	Závislost teploty konkrétního bodu CSM panelu na čase . . . . .	67
5.5	Závislost účelové funkce na $c_1$ , řez pro $T_{pc} = 39^\circ C$ a $\sigma = 3,8$ . . . . .	70
5.6	Závislost účelové funkce na $T_{pc}$ , řez pro $c_1 = 46000$ a $\sigma = 3,8$ . . . . .	70
5.7	Závislost účelové funkce na $\sigma$ , řez pro $c_1 = 20000$ a $T_{pc} = 39^\circ C$ . . . . .	71
5.8	Výsledné tvary funkce $c_{eff}$ . . . . .	72
5.9	Průběh řešení blackbox algoritmu . . . . .	72
5.10	Závislost teploty vzduchu na výstupu na čase . . . . .	75
5.11	Závislost teploty vzduchu na výstupu na čase . . . . .	76



## OBSAH ELEKTRONICKÉ PŘÍLOHY

Obsahem elektronické přílohy jsou veškeré použité skripty a funkce vytvořené v Pythonu v rámci této diplomové práce. Byly využity následující optimalizační skripty

Skript	Popis
finalOPT1BB.py	skript slouží k optimalizaci první úlohy metodou BB optimalizace
finalOPT1DE.py	skript slouží k optimalizaci první úlohy metodou DE
finalOPT1PSO.py	skript slouží k optimalizaci první úlohy metodou PSO
finalOPT2BB.py	skript slouží k optimalizaci druhé úlohy metodou BB optimalizace
finalOPT2DE.py	skript slouží k optimalizaci druhé úlohy metodou DE
finalOPT2PSO.py	skript slouží k optimalizaci druhé úlohy metodou PSO
finalOPT3BB.py	skript slouží k optimalizaci třetí úlohy metodou BB optimalizace
finalOPT4BB.py	skript slouží k optimalizaci čtvrté úlohy metodou BB optimalizace
heat/fun.py	knihovna funkcí vytvořená v diplomové práci