UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Nositel Nobelovy ceny za ekonomii Jan Tinbergen

Vedoucí bakalářské práce:
prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Ivana Růžičková
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení prof. RNDr. dr hab. Jana Andrese, DSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 19. dubna 2011

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. dr hab. Janu Andresovi, DSc. za spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Také děkuji své rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

Jan Tibenbergen byl (s Ragnarem Frischem) prvním nositelem Nobelovy ceny za ekonomii. V jejich době se ekonomická věda neobyčejně rozvinula ve směru matematické specifikace a statistické kvantifikace ekonomických problémů. Takto orientovaná vědecká analýza se používá k vysvětlení tak složitých ekonomických hospodářských procesů jako jsou hospodářský růst, cyklické fluktuace a realokace hospodářských zdrojů pro rozličné účely. Jejich cílem bylo poskytnout ekonomické teorii matematickou přesnost a prezentovat ji ve formě, která dovoluje empirickou kvantifikaci a statistické testování hypotéz. (viz.[6]).

Cíl práce spočívá v seznámení s Tinbergenovým životopisem a matematickými aspekty jeho ekonomického díla. Vzhledem k doporučenému rozsahu práce jsem se rozhodla tento cíl snížit v omezení se na jeho partie z knihy *Mathematical models of economic growth* [1].

V této práci se zaměříme právě na matematickou část díla Jana Tinbergena. V první kapitole (převzaté z [2][5][6][8][7][13][14][15]) uvedeme jeho životopis, s hlavním důrazem na jeho profesní část. Také zde stručně popíšeme jeho hlavní díla, ve kterých najdeme jeho ekonomickou i matematickou práci. Ve druhé kapitole, vycházející z [1] blíže čtenáře seznámíme s jeho modely ekonomického růstu. Na závěr uvedeme pro snazší přehlednost výčet základních pojmů použité v této práci. Protože budeme čerpat především z anglické literatury, uvedeme zde i jejich anglické názvy.

1 Jan Tinbergen

1.1 Životopis a portrét

Nizozemský ekonom a ekonometr Jan Tinbergen se narodil 12. dubna 1903 v Haagu. Pocházel z intelektuální rodiny. Jeho otec byl učitel gramatiky a historie na základní škole. Byl nejstarší z pěti sourozenců. Jeho bratr Nicolas získal Nobelovu cenu za biologii v roce 1973. Nejmladší bratr Luuk byl známý ornitolog. Jan Tinbergen zasvětil vědě celý svůj život, aktivně pracoval téměř až do své smrti v roce 1994.

V letech 1922 až 1926 studoval fyziku na universitě v Leydenu. Po studiích se stal asistentem profesora Ehrenfesta. Doktorskou disertaci „Minimum problems in physics and economics“ obhájil v roce 1929, kdy se přeorientovával z fyziky na ekonomii. Ve své době byl jediným fyzikem-ekonomem, který slučoval matematické metody s ekonomickými problémy.

Poté přešel z funkce asistenta na universitě v Leydenu do holandského Ústředního statistického úřadu, kde setrval až do roku 1945. Výzkumná činnost v byla této době zaměřena na metodologické a aplikační problémy ekonometrie. Jimi dospěl k pokusu o sestavení modelu hospodářského cyklu v holandské ekonomice. V tomto dvaceti čtyř rovnicovém modelu z roku 1936 jako první usiloval o sjednocení a ověření často nematematicky formulovaných poznatků ekonomie. V modelu jsou předvídány některé poznatky Keynesovy Obecné teorie a svým způsobem jsou statisticky ověřovány.

V letech 1936 až 1938 působil v rámci Společnosti národů v Ženevě. I zde se věnoval ekonometrickému vysvětlování hospodářského cyklu. Jeho práci se však dostalo skutečného uznání teprve po válce, v souvislosti s obecným trendem používání matematických metod v ekonomii, s rozmachem ekonometrie a s nástupem věku počítačů.

V letech 1945 až 1955 zastával post ředitele Holandského centrálního plánovacího úřadu, poradního orgánu vlády pro otázky makroekonomické politiky. Zde se zabýval problémy poválečné obnovy holandské ekonomiky, krátkodobou hospodářskou politikou a otázkami světové ekonomiky. V tomto kontextu se zrodily jeho myšlenky a úvahy o teorii hospodářské politiky a otázkách blahobytu, které jsou shrnuty v několika knihách, ve kterých navazoval na práce R. Frische.

V roce 1933 se stal profesorem na Netherlands School of Economics, kde od roku 1956 pracoval na plný úvazek a vyučoval programování rozvoje.

Jan Tinbergen přispěl rovněž k rozpracování ekonomiky blahobytu, kde se zaměřil na hledání optimálního režimu, tj. vytvoření institucionálních podmínek, při nichž je maximalizována funkce společenského blahobytu. Dospěl k závěru, že ekonomický systém musí být zřízen jako smíšený, neboť optimální decentralizovaná rozhodnutí by měla být v důsledku externalit ve výrobě doprovázena centralizovaným rozhodováním.

Zhruba v polovině 50. let 20. století rezignoval na svou funkci, aby se mohl plně věnovat otázkám teorie a plánování hospodářského rozvoje. V akademickém roce 1956 - 1957 byl hostujícím profesorem Harvardovy univerzity.

Počátkem 60. let Jan Tinbergen, ve svých pracích pro OECD a UNESCO, vyvinul kvantitativní modely pro plánování výchovy a vzdělání, které navázaly na problémy hospodářského rozvoje.

V roce 1969 mu byla udělena (společně s R. A. K. Frischem) Nobelova cena za ekonomii, za rozvoj a aplikaci dynamických modelů při analýze ekonomických procesů. Soustředil se hlavně na porovnání dynamické ekonomické teorie se statistickými aplikacemi. Průkopnickou prací v tomto směru je jeho ekonometrická studie o cyklických fluktuacích v USA.

Působil jako poradce Světové banky a vlád mnoha rozvojových zemí. Byl členem Královské nizozemské akademie věd a nositelem čestných doktorátů předních světových univerzit.

Sepsal mnoho pojednání a knih hlavně v oblasti zkoumání konjunktury, ekonometrie a hospodářské politiky, mezinárodních hospodářských vztahů a problémů rozvojových zemí.

[2][5][6][8][7][13][14][15]

Obr.1: Jan Tinbergen

1.2 Hlavní díla

1.2.1 Mathematical models of economic growth

V této knize je uvedeno množství matematických modelů, které mohou být užitečné pro navrhování rozvojové politiky a zejména k plánování rozvoje. Rostoucí počet zemí - jak málo rozvinutých tak i vyspělých - sledují rozvojovou politiku. To opravňuje k bližšímu studiu mechanismu optimální rozvojové politiky. Modely mohou být použity jak pro řešení analytických, tak i politických problémů. V této knize je kladen hlavní důraz na problémy politické.

V mé práci jsem se zaměřila na vybrané kapitoly právě z tohoto díla. [1]

1.2.2 Econometric models of education

Tato práce pojednává o modelu plánování vzdělávání. Zahrnuje jak různé starší jednodušší verze, tak i verze novější a komplikovanější. Tento model má představovat spojitosti mezi hospodářským rozvojem a vzdělávací soustavou národa.

Vzdělávací vývoj musí prokázat jak kvalitativních, tak kvantitativních aspektů. Kvalitativní aspekty odkazují na změny metod a předmětu výuky, kvantitativní aspekty odkazují na změny v rozměrech a složení vzdělávacího systému. Tato studie nebere v úvahu kvalitativní aspekty s výjimkou případů, kdy je v kombinaci s kvantitativními aspekty, např. číselné hodnoty některých koeficientů. [4]

1.2.3 Central Planning

V této práci Jan Tinbergen pojednává o procesu centrálního hospodářského plánování. V první kapitole popisuje proces centrálního plánování považovaného za jednu z průmyslových služeb moderního hospodářství. Ve druhé a třetí kapitole analyzuje tlak centrálního plánovaní na všeobecný hospodářský proces. V poslední čtvrté kapitole se snaží určit optimální rozsah a techniku ústředního plánování. [3]

1.2.4 Business Cycles in the USA

Tato práce je významnou studií cyklických výkyvů v ekonomice USA, ve které Tinbergen identifikoval a kvantifikoval význam různých faktorů. Sestavil zde ekonometrický systém, který zahrnoval 48 rovnic, a za pomoci statistické analýzy vypočítal koeficienty odezvy a určil tzv. "předstihy a zpoždění". [16] [18] [7]

1.2.5 Economic Policy: Principles and Design

Hospodářská politika: zásady a tvorba je jediná práce Jana Tinbergena, která byla přeložena do českého jazyka.

Tato kniha vznikla hlavně ze zkušeností Jana Tinbergena v Nizozemském ústředním plánovacím úřadě a z jeho podílu na diskuzích o základních otázkách ekonomické politiky. Pokouší se zde soustavně pojednávat o hlavních směrech hospodářské politiky, nikoli o jejích podrobnostech. Zabývá se zde především kvantitativní hospodářskou politikou a v menší míře také politikou kvalitativní. V příkladech této knihy používá jednoduchou algebru. [2]

2 Modely ekonomického růstu

Hospodářským růstem rozumíme růst potenciálního produktu ekonomiky. Potencionální produkt je na jedné straně determinován agregátní produkční funkcí, která je definována při nějaké úrovni technologie, a na druhé straně množstvím zapojených výrobních faktorů.

Hospodářský růst může být dvojího typu:

- extenzivní růst - jako důsledek zvětšování množství zapojených výrobních faktorů (větší objem zapojené práce a kapitálu)
- intenzivní růst - jako důsledek efektivnějšího využívání stávajícího množství zapojených výrobních faktorů (vyšší technologická úroveň)

Hospodářský růst je ovlivněn řadou dalších faktorů. Mezi takové faktory můžeme zařadit například vyspělost institucí, míru státních zásahů do ekonomiky, vymahatelnost dodržování pravidel apod. Krátkodobě může na velikost reálného produktu působit provádění hospodářské politiky, ovšem dlouhodobé účinky jsou na produkt nulové. Za růstem potenciálního produktu se budou skrývat faktory ovlivňující produkční funkci.

Růstových teorií existuje celá řada, neboť teorie hospodářského růstu je předmětem zkoumání již po celá století. Moderní růstové teorie se opírají jednak o využití produkční funkce, jednak se jejich autoři snaží vysvětlit, co je zdrojem technologického pokroku. [10] [11]

2.1 Makromodel bez přerušení produkce a bez znehodnocení

Tato kapitola, která byla celá převzata z [1], pojednává o nejjednodušších modelech, jejichž podstatou je zobrazit shromažďování kapitálu, tedy jev, který je pro rozvoj nejcharakterističtější. Jediným vzácným faktorem, braným do úvahy, je kapitál. Nebudeme zde uvažovat přerušení produkce ani znehodnocení.

Přestože jsou tyto modely zjevně jednoduché, můžeme je použít

- k prvnímu hrubému průzkumu rozvojových procesů v zemi
- k demonstraci některých základních vztahů.

Budeme předpokládat, že bez přerušení produkce a bez znehodnocení je tempo růstu $\dot{k}(= dk/dt)$ základního kapitálu rovno investicím. Tedy $\dot{k} = j$, kde k je základní kapitál a j jsou investice.

Dále předpokládáme velmi jednoduchou produkční funkci

$$k = \kappa y, \tag{1}$$

kde κ je fixní kapitálový koeficient a y je národní důchod.

Rovnice

$$j = \sigma y \tag{2}$$

říká, že investice (rovnající se úsporám) jsou přímo úměrné příjmům. Kde σ vyjadřuje tzv. míru úspor.

Tento model připouští velmi jednoduché řešení svého systému rovnic, informuje nás o rychlosti vývoje. Dojdeme k

$$\sigma y = j = \dot{k} = \kappa \dot{y},$$

nebo

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\sigma}{\kappa}. \tag{3}$$

To znamená, že tempo růstu příjmů (a tedy obou dalších proměnných) se rovná σ/κ. Příklad: Máme $\sigma = 0,12$ a $\kappa = 3$ roky. Potom $\dot{y}/y = 0,04$ ročně. Příjmy, kapitál a investice tedy rostou o 4% ročně.

Vývoj příjmů v čase může být vyjádřen jako $y_t = y_0 e^{\sigma t/\kappa}$, kde y_o jsou příjmy v čase $t = 0$. Aby bylo možné určit průběh rozvoje, musí být dán příjem, eventuálně počáteční hodnota kapitálu k_0 nebo investic j_0.

Vzorce mohou být vykládány jako řešení analytických problémů, v kterých σ a κ jsou známy a vyplývá z nich rychlost vývoje. Stejně tak může být těmito vzorci řešen politický problém zahrnutím požadované míry rozvoje příjmu ω, která je dána, a vypočítáním požadované míry úspor σ':

$$\sigma' = \omega\kappa. \tag{4}$$

Model může být doplněn dalšími proměnnými a rovnicemi, které ale uvedené vztahy nemění. To platí v případě, že nové proměnné jsou závislé na proměnných výše zmíněných a nedojde ke změně uvedených rovnic. Nejjednodušším příkladem je přidání proměnné c vyjadřující spotřebu a splňující vztah $c = y - j$.

Další proměnné mohou být přidány pro otevřenou ekonomiku, kde budeme uvažovat import i, export e a hrubý produkt v. Přidané vztahy mohou být

$$\begin{aligned} i &= \omega \\ v = y + i &= c + j + e \\ e &= i \end{aligned}$$

POZNÁMKA: Pojem "hrubý"zde znamená produkt ve své konečné fázi, tzn. tak, jak se dostane ke svému spotřebiteli, investorovi nebo do země, do které je exportován. Pro národ jako celek vyjadřuje v tzv. celkové zdroje.

Poslední uvedená rovnice vychází z našeho předpokladu, že $c = y - j$ a vyjadřuje známou ekvivalenci mezi vnitřní finanční rovnováhou a rovnováhou bilancí plateb. Je nutno poznamenat, že pro tyto rovnice existuje implicitní předpoklad, a to, že objem exportu e je prodatelný za předpokládanou hladinu cen.

2.2 Makromodel bez přerušení produkce, s opotřebením a obnovou

Modely, kterými se budeme zabývat v následující kapitole, jsou charakteristické předpokladem dočasné životnosti Θ všech kapitálových statků. Na základě tohoto předpokladu rozlišujeme mezi zásobou zařízení nebo kapitálových statků b a zásobou kapitálu k. Rozdíl mezi těmito dvěma koncepty spočívá v tom, že jednotlivé stroje zachovávají svůj objem zařízení, dokud nejsou zlikvidovány, avšak jejich přínos kapitálových statků klesá, v důsledku jejich opotřebení. Náš předpoklad implikuje, že nedochází k zastarávání. V opačném případě by přínos k objemu zařízení nemohl být konstantní. Abychom předešli přílišné složitosti modelu, uvažujeme pouze lineární opotřebení. Za těchto podmínek přináší model zajímavé vlastnosti vývoje.

Použité proměnné jsou:

b... objem zařízení

k... objem kapitálu

v... hrubý produkt

d... oprávky k investičnímu majetku (souhrn odpisů k investicím)

r... obnova

c... spotřeba

s... úspory

j^G... hrubé investice

j... čisté investice

y... čistý produkt

Nyní uvedeme základní rovnice tohoto modelu.

Rovnice

$$\dot{b} = j^G - r \tag{5}$$

nám říká, že čistý nárůst zásob zařízení lze zjistit odečtením obnovy z hrubých investic.

Čistý nárůst kapitálu je roven úsporám

$$\dot{k} = s. \tag{6}$$

Hrubý produkt je úměrný objemu zařízení, kde κ' vyjadřuje koeficient hrubého kapitálu

$$b = \kappa' v.$$

Čisté investice se rovnají hrubým investicím po odečtení odpisů, tedy

$$j = j^G - d. \tag{7}$$

Obnova je rovna hrubým investicím v plné životnosti

$$r_t = j^G_{t-\Theta}.$$

Oprávky k investičnímu majetku vyjadřují novou hodnotu všeho zařízení vydělenou životností

$$d = \frac{b}{\Theta}.$$

To, co zde nazýváme novou hodnotou, je hodnota bez odečtení odpisů.

Příjem je roven hrubému produktu po odečtení odpisů

$$y = v - d,$$

jelikož se v tomto modelu nepočítá s importem, není třeba jej odečítat.

Z pohledu výdajů je příjem roven součtu spotřeby a úspor

$$y = c + s.$$

V tomto vztahu se nepočítá s žádnou prodlevou.

Úspory jsou rovné čistým investicím

$$s = j.$$

Úspory jsou částí příjmu, kde σ je míra úspor

$$s = \sigma y. \tag{8}$$

Tento systém také připouští poměrně jednoduché řešení, ačkoli ne tak jednoduché jako předchozí model. Protože se jedná o systém lineární, vystačíme si s obvyklou metodou sestávající se z řešení ve tvaru

$$j^G = j^G_0 e^{\omega t} \tag{9}$$

kde j^G_0 je libovolná konstanta vyjadřující počáteční hodnotu j^G a j^G je konstanta, která musí splňovat podmínky vyplývající ze systému rovnic.

Snadno lze zjistit, že

$$r_t = j^G_{t-\Theta} = j^G_0 e^{\omega(t-\Theta)}$$

$$\dot{b} = j^G - r = j_0^G e^{\omega t} - j_0^G e^{\omega(t-\Theta)} = j_0^G e^{\omega t} - j_0^G \frac{e^{\omega t}}{e^{\omega\Theta}} = j_0^G e^{\omega t}(1 - e^{-\omega\Theta}) \tag{10}$$

z čehož vyplývá, že

$$b = \frac{1}{\omega} j_0^G e^{\omega t}(1 - e^{-\omega\Theta}). \tag{11}$$

Hodnoty v a d lze odvodit z b:

$$v = \frac{b}{\kappa'}, \qquad d = \frac{b}{\Theta}$$

což vede k

$$j^G - d = j = s = \sigma y = \sigma(v - d) = \sigma\Big(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\Theta}\Big)b. \tag{12}$$

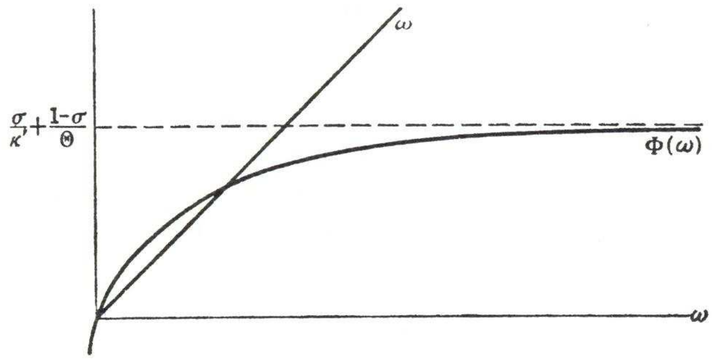
Doplněním výrazu j^G, d a b:

$$\begin{aligned}
j_0^G e^{\omega t} - \frac{b}{\Theta} &= \sigma\Big(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\Theta}\Big)b \\
\frac{j_0^G e^{\omega t}}{b} - \frac{1}{\Theta} &= \sigma\Big(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\Theta}\Big) \\
\frac{j_0^G e^{\omega t}}{1/\omega j_0^G e^{\omega t}(1 - e^{-\omega t})} &= \frac{\sigma}{\kappa'} - \frac{\sigma}{\Theta} + \frac{1}{\Theta} \\
\frac{\omega}{(1 - e^{-\omega t})} &= \Big(\frac{\sigma}{\kappa'} + \frac{1 - \sigma}{\Theta}\Big)
\end{aligned}$$

dojdeme k podmínce

$$\omega = \Big(\frac{\sigma}{\kappa'} + \frac{1 - \sigma}{\Theta}\Big)(1 - e^{-\omega\Theta}). \tag{13}$$

Úplné řešení j^G a dalších proměnných se skládá z tolika členů tvaru zobrazeného v (9), kolik je kořenů rovnice (13). Kořeny mohou být reálné nebo komplexní. Komplexní kořeny odpovídají fluktuujícím pohybům proměnných. Vlastnosti reálných kořenů, pokud je $\omega > 0$, kterým odpovídají postupně stoupající hodnoty proměnných, jsou zobrazeny v obr. 2.



Obr.2

Nechť je pravá strana rovnice (13) vyjádřena

$$\Phi(\omega) = \Big(\frac{\sigma}{\kappa'} + \frac{1-\sigma}{\Theta}\Big)(1 - e^{-\omega\Theta}),$$

pak kořen ω_0 bude vyjádřen bodem protnutí mezi přímkou se směrnicí 1 (jejichž ordináty jsou ω) a křivkou s ordináty $\Phi(\omega)$. Můžeme ukázat, že pro $\sigma > 0$ a $\Theta > \kappa'$, což jsou v obou případech reálné podmínky, vždy najdeme takovýto průsečík. Explicitní řešení není možné, ale pro malé hodnoty $\omega\Theta$ výraz $e^{-\omega\Theta}$ může být aproximován $1 - \omega\Theta + 1/2\omega^2\Theta^2 \cdots$ což vede k

$$\omega = \Big(\frac{\sigma}{\kappa'} + \frac{1-\sigma}{\Theta}\Big)(\omega\Theta + \frac{1}{2}\omega^2\Theta^2),$$

nebo

$$\omega = 2\sigma\Big(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\Theta}\Big).$$

Na druhou stranu, pro vysoké hodnoty Θ dojdeme k Domar-Harrodově výsledku [Harrodův-Domarův model růstu je uveden v doplňku], což můžeme vidět z $\omega = \sigma/\kappa'$ (13). Žádné další reálné kořeny zjevně neexistují.

Řešení může být použito pro analytický problém k vysvětlení rozvoje, u kterého jsou hodnoty koeficientů dané, včetně míry úspor σ, a se známými počátečními hodnotami proměnných jako je j_0^G atd. V takovém problému budou hrát svoji roli také komplexní kořeny z rovnice (13). Analytický problém s danými počátečními hodnotami proměnných je možno řešit pouze tehdy, je-li uvedeno dostatečné množství členů obecného formátu (9). (kde, nicméně nejsou konstantní faktory identické s j_0^G, neboť to platí pouze, vezmeme-li jen jeden člen jako v (9)). Tyto počáteční hodnoty však mohou být takové, že umožní systému cyklické pokračování.

Při řešení politického problému je situace jiná. Je zde prostor považovat za cíl vzorec rozvoje bez cyklicky se opakujících poklesů. To v matematickém jazyku znamená, že je pro nás relevantní pouze jeden kořen, a to ten reálný rovnice (13). Následně platí rovnice (9) až (12) s hodnotou j_0^G rovnou hodnotě j^G, přičemž všechny ostatní hodnoty lze z toho vypočítat. To znamená, že abychom mohli zaručit necyklický pohyb, musí být naplněny určité vztahy mezi počátečními proměnnými. Pokud navíc požadujeme určitou míru rozvoje ω_0, míra úspor σ_0 může být odvozena z (13); mělo by platit

$$\sigma_0 = \frac{\omega_0/(1 - e^{-\omega_0\Theta}) - 1/\Theta}{1/\kappa' - 1/\Theta}.$$

0pět lze snadno vidět, že pro $\Theta = \infty$ se tento výraz shoduje s (4).

Pokud budeme vycházet z takovéhoto vzorce, bude mezi proměnnými fixní poměr. Toto je samozřejmě následek řady zjednodušujících podmínek implikovaných v našem modelu. Později zmíníme modely, kde bude tato poněkud nerealistická budoucnost odstraněna. Nicméně může být zajímavé počítat některé z poměrů, které mohou dávat smysl, i když jen přibližně v obecnějších podmínkách. Budeme počítat k/y, k/b, a r/d.

Začneme-li od (12), máme

$$\dot{k} = s = \sigma\Big(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\Theta}\Big)b.$$

Použitím (11), zjistíme

$$\dot{k} = \frac{\sigma}{\omega}\Big(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\Theta}\Big)j_0^G e^{\omega t}(1 - e^{-\omega\Theta}).$$

Integrací v čase a požadavkem, aby se k pro $t = -\infty$ blížilo k nule, kde vymizí i další doposud zvažované proměnné, máme

$$k = \frac{\sigma}{\omega^2}\Big(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\Theta}\Big)j_0^G e^{\omega t}(1 - e^{-\omega\Theta}).$$

Nyní můžeme vypočítat tři již zmíněné poměry:

$$\frac{k}{y} = \frac{\sigma}{\omega}, \qquad \frac{k}{b} = \frac{\sigma}{\omega}\Big(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\Theta}\Big), \qquad \frac{r}{d} = \frac{\omega\Theta}{e^{\omega\Theta} - 1}$$

Pro politický problém je výhodné vyjádřit je ve vztahu ω, což lze explicitně s pomocí rovnice (13); výsledkem je

$$\frac{k}{y} = \frac{1/(1 - e^{-\omega_0\Theta}) - 1/\omega\Theta}{1/\kappa' - 1/\Theta}, \qquad \frac{k}{b} = \frac{1}{1 - e^{-\omega_0\Theta}} - \frac{1}{\omega\Theta}, \qquad \frac{r}{d} = \frac{\omega\Theta}{e^{\omega\Theta} - 1}. \quad (14)$$

Pro velmi malé a velmi vysoké hodnoty $\omega\Theta$ mohou být tyto výrazy dále zjednodušeny. Výsledky jsou:

	k/y	k/b	r/d
$\omega\Theta$ malá	$\frac{1/2}{1/\kappa' - 1/\Theta}$	$1/2$	1
$\omega\Theta$ velká	κ'	1	0

Model zůstává jednodušší, pokud je místo rovnice (10), reprezentující čistě technologickou produkční funkci, zachován běžnější, ale méně jasný vztah

$$k = \kappa y. \qquad (15)$$

V tomto případě k, s, nebo j a y zůstávají vnitřním okruhem proměnných a pohyby jsou nezávislé na vnějších rovnicích (6), (8) a (15). Máme

$$\dot{k} = \frac{\sigma}{\kappa} k,$$

a tak platí $k = k_0 e^{\omega t}$ s:

$$\omega = \frac{\sigma}{\kappa}. \qquad (16)$$

Následně $y = (k_0/\kappa)e^{\sigma t/\kappa}$.

Abychom mohli vyjádřit zbývající proměnné, určíme nejdříve proměnnou b, která musí splňovat

$$\dot{b} = j^G - j^G_{t-\Theta} = \sigma y + \frac{b}{\Theta} - \sigma y_{t-\Theta} - \frac{b_{t-\Theta}}{\Theta}.$$

Toto je lineární nehomogenní diferenciální rovnice. Obecné řešení se skládá ze dvou částí:

1) obecné řešení homogenní rovnice

$$\Theta\dot{b}_t = b_t - b_{t-\Theta} \tag{17}$$

2) konkrétní řešení nehomogenní rovnice.

Lze snadno pozorovat, že obecné řešení rovnice (17) je

$$b_t = b^{00} + b^{01}t$$

Pokud ale požadujeme, aby se pro $t = -\infty$ veličina b_t rovnala nule, ukáže se toto řešení jako nepoužitelné. O konkrétní řešení nehomogenní rovnice se můžeme pokusit za předpokladu, že $b_t = b_0 e^{\omega t}$, kde $\omega = \sigma/\kappa$ jako v rovnici (16). Toto řešení je přípustné, jen pokud pro b_0 platí

$$\omega = (1 - e^{-\omega\Theta})\Big(\frac{\sigma}{\kappa}\frac{k_0}{b_0} + \frac{1}{\Theta}\Big).$$

Vzhledem k tomu, že σ musí být v politickém problému přizpůsobena požadované míře růstu ω, může být tento výraz upraven na

$$\frac{k_0}{b_0} = \frac{1}{1 - e^{\omega\Theta}} - \frac{1}{\omega\Theta}$$

Je zajímavé, že tento vzorec je identický se vzorcem pro k/b v (14). Zbývající proměnné lze odvodit z rovnic, které je spojují s proměnnými již určenými.

2.3 Makromodel s prodlevou v produkci, bez znehodnocení

Poněkud nerealistický znak doposud popsaných modelů je absence prodlevy v produkci. Předpokládá se, že každá jednotka investic, navyšuje základní kapitál. Nyní budeme počítat s časovou prodlevou θ, která vzniká mezi zahájením jakéhokoli investičního procesu a nárůstem základního kapitálu již dokončeného investičního majetku. Zavedení tohoto jevu vyžaduje přidání podmínky o investičním procesu během tohoto časového období. Nyní vytvoříme nejjednodušší možnou hypotézu, a to, že proces v tomto období θ vyžaduje rovnoměrný vstup úsilí. Je užitečné uvést „dokončené investice“ jako novou proměnnou označenou j'_t. Podle definice budeme pak mít

$$\dot{k}_t = j'_t. \tag{18}$$

Celková investiční aktivita j_t v jakémkoli čase t je nyní součtem aktivit započatých a nedokončených. Což znamená aktivit, jejichž čas dokončení je mezi t a $t+\theta$. Jelikož všechny tyto aktivity probíhají stejným tempem, aktivita j je pouze nevážený průměr:

$$j_t = \frac{1}{\theta}\int_t^{t+\theta} j' dt'.$$

Tento výraz může být také převeden s pomocí (18)

$$j_t = \frac{1}{\theta} k_{t'} \Big|_t^{t+\theta} = \frac{1}{\theta}(k_{t+\theta} - k_t). \tag{19}$$

Přidáme-li rovnice (2) a (1), dostaneme systém čtyř rovnic pro naše čtyři proměnné.

Řešení systému můžeme najít vyjádřením j_t ve vztahu ke k_t s pomocí dvou posledních rovnic, což vede k

$$j_t = \frac{\sigma}{\kappa} k_t = \frac{1}{\theta}(k_{t+\theta} - k_t),$$

a to můžeme přepsat jako

$$\frac{\sigma\theta}{\kappa} k_t = k_{t+\theta} - k_t,$$

$$k_{t+\theta} = \Big(1 + \frac{\theta\sigma}{\kappa}\Big) k_t.$$

Stejná rovnice bude platit i pro další proměnné. Během doby θ kapitál poroste mírou $1 + \theta\sigma/\kappa$. Nebereme-li v úvahu fluktuace období menších než θ, řešení je

$$k_t = k_0 \Big(1 + \frac{\theta\sigma}{\kappa}\Big)^{t/\theta},$$

z čehož lze odvodit

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{\theta\sigma}{\kappa}\right).$$

Můžeme snadno pozorovat, že pro malé hodnoty $\theta\sigma/\kappa$ se hodnoty shodují s σ/κ, což je míra rozvoje vycházející z rovnice (3), která platí pro model bez prodlevy v rozvoji. Pro vyšší hodnoty $\theta\sigma/\kappa$ může být odchylka od výše zmíněné míry značná a růst bude pomalejší.

Investiční proces může být různého typu. Jiným jednoduchým příkladem je vstupní bod na začátku prodlevy vývoje následovaný stejným výstupním bodem jako v předchozím případě. Dostaneme

$$j_t = j'_{t+\theta}.$$

Z čehož zjistíme, že

$$\dot{k}_t = j'_t = j_{t-\theta} = \frac{\sigma}{\kappa} k_{t-\theta},$$

a znovu pokud $k_t = k_0 e^{\omega t}$, pro ω musí platit

$$\omega = \frac{\sigma}{\kappa} e^{-\omega\theta}.$$

Znovu zjistíme, že pro malé hodnoty $\omega\theta$, $\omega = \sigma/\kappa$.

2.4 Optimální míra rozvoje

Rozhodnutí pro určitou míru růstu produkce je v praxi významným problémem. Je známým faktem, že v komunistických zemích je tato míra, a následně míra úspor, téměř dvojnásobná s porovnáním se zeměmi nekomunistickými, což znázorňuje důležitost procesu rozhodování. Můžeme se tedy ptát, zda-li ekonomická věda může dát vodítko numerickému výběru.

Snahy realizované současnými autory se kloní spíše k negativní odpovědi. Nicméně se jeví užitečným tyto pokusy a jejich výsledky popsat. Jedním z pokusů bylo interpretovat myšlenku, že optimální míra rozvoje je ta s maximální užitečností v čase, která zároveň zužitkuje snahy vynaložené na měření důležitých vlastností užitkové funkce. Maximalizace užitku jako nástroje je v každém případě nadřazená maximalizaci spotřeby, jež je zase lepší než maximalizace příjmů. Konkrétní výklad užitku je založen na domněnce, že užitek závisí pouze na spotřebě ve stejné časové jednotce. To může být sice příliš restriktivní, ale žádné měření závislosti užitku na spotřebě v jiných časových obdobích není dostupné.

Předpokládá se, že je několik typů užitkové funkce. Ukázalo se žádoucí, představit minimální hladinu spotřeby $\overline{c}$, pod kterou je mezní užitek nekonečně velký. Další zkoumání ukázalo, že je třeba představit také maximální míru saturace c^m nad $\overline{c}$, což je $c = c^m + \overline{c}$, kde je mezní užitek nulový. Užitková funkce, kterou budeme používat, je zapsána jako

$$u = \left(\frac{c^m}{c - \overline{c}} - 1\right)^v \tag{20}$$

kde u je mezní užitek a v je konstanta. Hodnota konstanty byla odvozena z velmi známých odhadů pružnosti mezního užitku podle Frische. K tomu, abychom dospěli k jediné hodnotě pro konstantu v, bylo nutné doplnit Frischovy odhady o několik dalších podmínek. Frisch odhadoval pružnost mezního užitku pro dvě skupiny pracovníků: Skupina Američanů, u kterých došel k -1 a skupina Francouzů, u kterých zjistil $-3,5$.

Předpokládáme, že

1) stejná užitková funkce platí pro obě skupiny

2) hladina spotřeby Francouzů byla v době měření oproti Američanům poloviční.

Pružnost, definována jako $(\partial u/\partial c)\ c/u$ je

$$-\frac{vc^m}{(c-\overline{c})^2}\left(\frac{c^m}{c-\overline{c}}-1\right)^{v-1}\frac{c}{[c^m/(c-\overline{c})-1]^v}=-\frac{vc^m c}{c^m+\overline{c}-c}\frac{1}{c-\overline{c}}$$

Znázorníme-li francouzskou spotřebu c^F a americkou $2c^F$, máme podle Frische

$$\frac{2c^m vc^F}{(c^m+\overline{c}-2c^F)(2c^F-\overline{c})}=1, \qquad \frac{c^m vc^F}{(c^m+\overline{c}-c^F)(c^F-\overline{c})}=3,5$$

Přidáním dalšího předpokladu, a to, že c^m je v porovnání s $2c^F$ větší, máme přibližně

$$\frac{2vc^F}{2c^F-\overline{c}}=1, \qquad \frac{vc^F}{c^F-\overline{c}}=3,5.$$

Z těchto rovnic vychází, že $v = 0,6$ a $\overline{c}/c^F = 5/6$. Tento druhý výsledek se nezdá být nereálný a také může přispět k věrohodnosti výsledku v.

Do budoucnosti se nepočítá se žádným diskontem ve víře, že pro plánování země by příští generace měly počítat stejně jako tyto. Podle této filosofie může být diskont reálný pro plánování jedince, ale ne nezbytně pro plánování země. Není složité představit diskonty pro budoucí spotřebu, pokud by to bylo třeba, ale pak vyvstává otázka, na jakou úroveň by diskont měl být kladen.

Předpokládá se, že populace zůstane konstantní. Ačkoliv není obtížné předpokládat určitou míru rozvoje π a podle toho vzorce pozměnit. V obecné rovině to pozvedne optimální míru úspor známým způsobem, což je o $\pi\kappa$, pokud předpokládáme stálý poměr kapitálových výstupů.

Toto je v podstatě produkční funkce užitku. Dokud je kapitál nejvzácnějším faktorem, může být tento předpoklad správným odhadem. Ukázalo se velmi obtížným, možná téměř nemožným, nalézt explicitní řešení, pokud se jedná o komplikovanější produkční funkce, například Cobb-Douglasovu funkci [viz. Dodatek].

Problému optimální míry rozvoje byl dán následující formální tvar. Je-li dán:

- počáteční příjem y_0
- podíl kapitálových výstupů κ (což implikuje počáteční kapitálovou zásobu $k_0 = \kappa y_0$)
- užitková funkce (20).

Jaký program spotřeby $c(t)$ (vyjadřující program úspor a tudíž kapitálového rozvoje) přináší maximální uspokojení v čase $\int_0^\infty U(t')dt'$, kde U je celkový užitek spotřeby v čase t'?

Maximum zjevně dosáhneme splněním vedlejší podmínky, a to, že v jakémkoli čase t (s použitím symbolů jako doposud), bude $c + s = y$ nebo s $s = j = \dot{k} = \kappa\dot{y}$ tedy:

$$c + \kappa\dot{y} = y. \tag{21}$$

Kromě této vedlejší podmínky bereme v úvahu také dvě hraniční podmínky, zejména

$$c \geq \overline{c}, \qquad s \geq 0. \tag{22}$$

Pokud tyto hraniční podmínky neplatí, (to znamená, je-li příjem rozdělen mezi nějaké kladné příjmy a objem spotřeby převyšuje životní minimum $\overline{c}$), maximum pro všechny časové jednotky, což je pro $0 \leq t \leq \infty$, vyžaduje, aby se mezní užitek ze spotřeby v momentě t rovnal celkovému meznímu užitku další spotřeby v budoucnosti, získané odebráním jedné jednotky spotřeby v čase t. Jelikož nárůst budoucí produkce je umožněn ubráním jedné jednotky spotřeby, je $1/\kappa$ do budoucna podmínkou

$$u_t = \frac{1}{\kappa}\int_t^\infty u_t dt'. \tag{23}$$

Nezáleží na tom, že tato budoucí produkce nemusí být spotřebována, ale částečně uložena. Toto rozhodnutí může být odděleno od toho vytvořeného v čase t. Pokud se toto budoucí rozhodnutí také řídí (23), mezní užitečnost korespondujícího přírůstku produkce může být měřena buďto na straně spotřeby nebo úspor - obě tyto strany se shodují.

Rovnice (23) může být nahrazena rovnicí se snadnějším řešením, a to nahrazením obou stran jejich deriváty s ohledem na čas. Později však musíme vyzkoušet, jestli platí také rovnice (23), což závisí na aplikované integrační konstantě. Nová rovnice bude

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{\kappa}. \tag{24}$$

Jelikož u závisí na t přes c, je vhodnější ji přepsat na

$$\kappa\frac{du}{dc}\dot{c} = -u.$$

Použitím (20) dostaneme

$$\dot{c}' = \frac{c^m - c'}{\kappa v c^m}c' \tag{25}$$

kde $c' = c - \overline{c}$. Jelikož tato rovnice obsahuje z našeho systému pouze proměnnou c', nikoli proměnnou y, může být její integrace provedena odděleně. Rovnice (25) je velmi známá diferenciální rovnice logistické křivky. Řešení může být zapsáno jako

$$c' = \frac{c^m}{1 + Be^{-t/\kappa v}},$$

kde $B = e^{t_0/\kappa v}$ je zástupná konstanta, která může být nahrazena t_0, časem ve kterém $c' = 1/2c^m$, což je poloviční úrovní asymptoty.

Náš výsledek znamená, že nakonec bude muset dojít ke spotřebě, která ale nikdy nebude muset dosáhnout úrovně saturace $c^m + \overline{c}$.

Další krok se stává z integrace rovnice (21) pro y, která může být nyní zapsána jako

$$y' - \kappa\dot{y}' = \frac{c^m}{1 + Be^{-t/\kappa v}}, \tag{26}$$

když

$$y' = y - \overline{c},$$

a evidentně reprezentuje nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Standardní metoda řešení levé strany rovnice, je vypočítat derivaci $y'e^{-t/\kappa}$

s ohledem na čas:

$$\frac{d}{dt} y' e^{-t/\kappa} = e^{-t/\kappa}\Big(\dot{y}' - \frac{y'}{\kappa}\Big).$$

Podle (26) musí být tento výraz shodný s

$$-\frac{c^m e^{-t/\kappa}}{\kappa(1 + Be^{-t/\kappa v})}.$$

Máme tedy

$$y' e^{-t/\kappa} = -\frac{c^m}{\kappa} \int \frac{e^{-t'/\kappa} dt'}{1 + Be^{-t'/\kappa v}}. \tag{27}$$

Zdá se možné provést tuto integraci explicitně pro celé hodnoty $1/v$. Jelikož náš odhad $v = 0,6$ je jen přibližnou hodnotou, zdá se užitečné provést integraci pro $v = 0,5$ nebo $1/v = 2$. To může být provedeno s pomocí substituce

$$Be^{-2t'/\kappa} = t''^2,$$

kde t'' je nová integrační proměnná. Z toho vyplývá, že $e^{-t'/\kappa}\sqrt{B} = t''$ a

$$-\frac{\sqrt{B}}{\kappa} e^{-t/\kappa} dt' = dt'',$$

Integrál (27) se nyní stane

$$\frac{\kappa}{c^m} y' e^{-t/\kappa} = \frac{\kappa}{\sqrt{B}} \int \frac{dt''}{1 + t''^2},$$

nebo

$$y' = \frac{c^m}{\sqrt{B}}\, e^{t/\kappa} \arctan t'' + \overline{y} = \frac{c^m}{\sqrt{B}}\, e^{t/\kappa} \arctan e^{-t/\kappa}\sqrt{B} + \overline{y},$$

kde $\overline{y}$ je zástupná konstanta, jejíž hodnota musí být určena s pomocí hraničních podmínek.

Přirozená hraniční podmínka se připojí k počáteční podmínce, že hodnota y_0 je dána, a že pro $t = \infty$ se y přibližuje k c. Přesněji řečeno, na hladině saturace to není nutné šetřit, protože není žádný důvod tuto hladinu překonat. Ekonomický rozvoj shledává dosažení saturace přirozeným koncem. Jelikož pro $t = \infty$

$$\frac{\arctan e^{-t/\kappa}\sqrt{B}}{e^{-t/\kappa}\sqrt{B}} = 1$$

je $y' = c^m + \overline{y}$ a tudíž $\overline{y} = 0$.

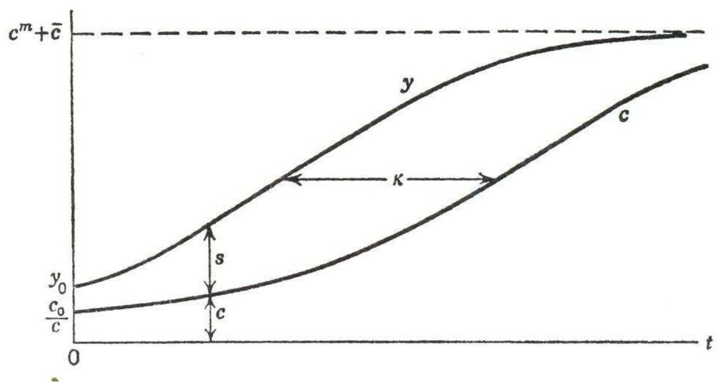
Řešení pro y je tedy

$$y_t = \frac{c^m}{e^{-t/\kappa}\sqrt{B}} \arctan e^{-t/\kappa}\sqrt{B} + \overline{c}. \tag{28}$$

To implikuje

$$y_0 = c^m \frac{\arctan \sqrt{B}}{\sqrt{B}} + \overline{c}.$$

Produkce, a tedy i kapitál, se podle (28) musí rozvíjet podle křivky, která je velmi podobná křivce logistické. Obě křivky jsou charakteristické mírným stoupáním v počátečních fázích zvyšující akceleraci až do určitého bodu a následným zpomalením a přiblížením se k horizontální asymptotě.



Obr.3

Podstata zjištěných pohybů může být ilustrována nahrazením poslední sekce náhradním uspořádáním, což se jeví více objasňující z matematického pohledu, ale zároveň se to nezdá být špatným nástinem z praktického, ekonomického úhlu pohledu. Dosadíme-li na místo $\dot{y}$ v rovnici (21) $(y_t - y_{t-\kappa})/\kappa$, což je průměrná míra vzestupu za poslední časové jednotky κ (v praxi dva nebo tři roky), zjistíme, že má tato rovnice obzvláště jednoduchý tvar

$$c_t + y_t - y_{t-\kappa} = y_t,$$

což okamžitě vede k řešení

$$y_{t-\kappa} = c_t,$$

nebo

$$y_t = c_{t+\kappa}.$$

Praktické opodstatnění pro toto alternativní uspořádání může spočívat v tom, že investice jsou založeny na míře vzrůstu příjmu v posledních třech nebo čtyřech letech. Spíše než na poslední malé časové jednotce, která je ve skutečnosti pro ekonoma nejatraktivnější. Podstata výsledku je pak velmi jednoduchá: Spotřeba i produkce se musí pohybovat podle logistiky. Jediným rozdílem mezi nimi je časová prodleva časových jednotek κ. Srovnejte s Obr. 3. Posun pro y musí být takový, aby zanechal intercept (y-ová souřadnice bodu, ve kterém přímka, křivka nebo plocha protíná y-ovou osu) na vertikální ose t_0.

Úspory se měří vertikální vzdáleností mezi těmito dvěma křivkami. Z počátku jsou velmi malé, postupně se mohou stát velmi výraznými. Absolutně i relativně vzato nakonec po překročení poloviční hladiny saturace u spotřeby, se sníží a postupně vymizí.

Nyní se pokusíme změřit míry úspor vycházející z našich vzorců za různých podmínek. Jako následek naší hraniční podmínky (22), kdykoli je $y_0 = \overline{c}$, nepočítáme s žádnými úsporami. Následkem toho nedochází k žádnému rozvoji a spotřeba i produkce zůstanou na základní úrovni. Počáteční úspory však budou kladné, bude-li $y_0 > \overline{c}$. Zpočátku mohou být malé, ale v plném proudu procesu rozvoje budou muset být výrazné. To lze ukázat vypočítáním maximální míry úspor vycházející ze vzorců. Je-li znovu

$$t'' = e^{-t/\kappa}\sqrt{B},$$

máme

$$c = \frac{c^m}{1 + t''^2} + \overline{c},$$

a

$$y = \frac{c^m \arctan t''}{t''} + \overline{c},$$

z čehož odvodíme míru úspor σ

$$\sigma = 1 - \frac{c}{y} = 1 - \frac{c^m/(1+t''^2) + \overline{c}}{(c^m/t'')\arctan t'' + \overline{c}}.$$

Jednodušší je představit $t''' = \arctan t''$ nebo $t'' = \tan t'''$. Pak pro $A = c^m/\overline{c}$ dostaneme

$$\sigma = \frac{1 - (\sin 2t''')/2t'''}{1 + \frac{1}{A}\frac{\tan t'''}{t'''}}. \tag{29}$$

Jelikož

$$y = \overline{c}\Big(A\frac{t'''}{\tan t'''} + 1\Big),$$

a $t'''/\tan t'''$ je klesající funkce t''', t''' má evidentně nejvyšší hodnotu při počátečních hodnotách y_0 a y pak klesá.

Jak lze vidět z (29), maximální hodnota σ závisí jen na A, přinejmenším tak dlouho, dokud y_0 je menší než hodnota y odpovídající maximální hodnotě σ. Pro nízké hodnoty y_0 v porovnání s $c^m + \overline{c}$, toto vždy platí. Výpočet ukazuje, že σ_{max} je poměrně vysoká, jak ukazují následující údaje.

A	σ_{max}
10	$0,63$
100	$0,86$
500	$0,94$

Z uvedených hodnot se zdá, že model vedl k nerealisticky vysokým hodnotám pro optimální míru úspor. V podstatě mají tyto vzorce tendenci doporučovat úsporná opatření s cílem dosáhnou hladiny saturace „co nejdříve“. To lze ilustrovat vypočítáním míry vzrůstu spotřeby pro hladinu $1/2c^m + \overline{c}$, což je na poloviční cestě mezi hranicí životního minima a hladinou saturace, a vystává otázka, jak dlouho to bude trvat při této míře vzrůstu, dosáhnout úrovně saturace. Ze vzorce (25) vyplývá, že $\dot{c} = \dot{c'} = c^m/2$ pro $c' = 1/2c^m$. To znamená, že při této rychlosti vzdálenost z $\overline{c}$ do $c^m + \overline{c}$ bude trvat 2κ roky nebo jen 6 až 8 let. Přestože skutečný čas bude delší, protože rychlost na poloviční cestě bude maximální, bude zahrnutá řádová hodnota zobrazena.

Zdá se, že jsou dva hlavní důvody, proč skutečné míry úspor jsou o tolik nižší. Na jednu stranu, ačkoliv jsme tento jev nebrali v úvahu, jednotlivci budoucí spotřebě nepřikládají váhu. Na druhou stranu, spořící programy vycházející z našich vzorců vždycky znamenají, že současná generace trpí pro ty nadcházející generace do takové míry, jaká se obecně považuje za patřičnou. Pokud by tedy do našeho konceptu užitku vstoupil element „větší spravedlnosti ve vztahu mezi generacemi“, optimální plán úspor by se snížil. Jelikož nám není znám žádný pokus o měření naznačených priorit, nepokoušeli jsme se naše poznatky v tomto směru zobecňovat. Náš závěr, co se týká otázky, zda-li ekonomická věda může indikovat optimální míru rozvoje, je tedy negativní. [1]

3 Základní pojmy

Aktivum (*Asset*) Fyzický majetek nebo nehmotný nárok mající ekonomickou hodnotu. Důležitými příklady jsou budovy, zařízení, půda, patenty, autorská práva a finanční nástroje, jako např. peníze nebo obligace.

Celkový užitek (*Total utility*) Celkové uspokojení odvozené ze spotřeby komodit.

Čisté investice (*Net investement*) Hrubé investice po odečtení kapitálových statků.

Diskontní sazba (*Discount rate*) (1) Úroková sazba účtována centrální bankou z jakékoli půjčky, kterou poskytuje komerční bance. (2) Sazba používaná k výpočtu dnešní hodnoty nějakého aktiva.

Důchod (*Income*) Tok mezd a platů, úrokových plateb, dividend a ostatních příjmů, jež dostává jednotlivec, nebo celá země.

Ekonometrie (*Econometrics*) Obor ekonomie, jenž používá statistické metody k měření a odhadu kvantitativních ekonomických vztahů.

Ekonomický růst (*Economic growth*) Proces neustálého zvyšování množství a kvality statků, které ekonomika vyrábí, během určitého období.

Ekonomie (*Economics*) Ekonomie studuje, jak se lidé rozhodují v podmínkách vzácnosti zdrojů a jaký vliv má jejich volba na společnost.

Ekonomie blahobytu (*Welfare economics*) Normativní analýza ekonomického systému, tj. studium toho, co je „špatné“ a co „dobré“ na fungování ekonomiky.

Externality (*Externalities*) Činnost, která ovlivňuje pozitivně nebo negativně jiné subjekty, aniž za to musí platit nebo jsou za tuto činnost odškodňovány.

Hospodářské cykly (*Business cycles*) Výkyvy celkové ekonomické aktivity vyznačující se současnou expanzí nebo kontrakcí produktu ve většině sektorů ekonomiky. K hospodářskému cyklu dochází, jestliže skutečný hrubý národní produkt vzhledem k potencionálnímu hrubému národnímu produktu roste (expanze) nebo klesá (kontrakce nebo recese).

Hrubý národní produkt (*Gross national product*) Hodnota všech finálních statků a služeb vyrobených občany dané země během určitého období vyjádřená v běžných tržních cenách (aniž se odečítá znehodnocení kapitálových statků).

Investice (*Investment*) Ekonomická činnost, při níž se subjekt vzdává současné spotřeby s výhledem zvýšení produktu v budoucnosti. Hlavními formami investic jsou investice do hmotného kapitálu (budovy, zařízení a zásoby) a nehmotné investice (vzdělání, výzkum a vývoj, zdraví).

Kapitál (kapitálové statky, kapitálové zařízení) (*Capital (capital goods, capital equipment))* Kapitál jsou statky dlouhodobého užití, jež se znovu používají při výrobě. Hlavními prvky kapitálu jsou výrobní zařízení, budovy a zásoby.

Makroekonomie (*Macroeconomics*) Analýza zabývající se chováním ekonomiky jako celku se zaměřením na produkt, důchod, cenovou hladinu a nezaměstnanost. Nutno odlišit od **mikroekonomie**, která se zabývá studiem jednotlivých firem, lidí a trhů.

Mezní užitek (*Marginal utility*) Dodatečné uspokojení, jež přináší spotřeba jedné dodatečné jednotky komodity, přičemž množství všech ostatních spotřebovávaných statků zůstává konstantní.

Ordináty (*Ordinates*) Hodnoty na svislé ose.

Otevřená ekonomika (*Open economy*) Ekonomika, která se zabývá obchodováním (tj. vývozy a dovozy) se statky a kapitálem s jinými zeměmi.

Proměnná (*Variable*) Veličina, kterou lze definovat a změřit. Mezi důležité proměnné v ekonomii patří ceny, výše úrokové sazby, měnové kursy, bohatství v peněžních jednotkách atd.

Rozvojové země (*Developing countries*) Země, v níž je národní důchod na obyvatele mnohem nižší než v „rozvinuté“ zemi (kam se obyčejně řadí Severní Amerika a většina území Evropy).

Saturace (*Saturation*) Saturace je nasycení, uspokojení.

Smíšená ekonomika (*Mixed economy*) Dominantní forma ekonomické organizace v nekomunistických zemích. Smíšené ekonomiky při vytváření svého ekonomického uspořádání spoléhají především na cenový systém, avšak používají nejrůznější vládní zásahy pro omezování makroekonomické nestability a tržních selhání.

Spotřeba (*Consumption*) V makroekonomii celkové výdaje jednotlivců nebo všech lidí v zemi na spotřební statky během daného období. Pod pojmem spotřeba bychom měli mít na mysli pouze takové statky, jež jsou úplně využity nebo zužitkovány během tohoto období. V praxi však spotřební výdaje zahrnují všechny nakoupené spotřební statky, přičemž životnost mnohých statků je delší než uvažované období - např. nábytek, oblečení, automobily.

Úspory (*Saving*) Rozdíl mezi disponibilním důchodem a výdaji na spotřebu.

Znehodnocení (aktiva) (*Depreciation (of an asset)*) Pokles hodnoty aktiva. V podnikovém účetnictví i v národním účetnictví se znehodnocením rozumí odhad rozsahu „využití“ či opotřebení kapitálu během zkoumaného období vyjádřený v peněžních jednotkách. V účetnictví národního důchodu je také nazýván náhradou za kapitálovou spotřebu (odpisy).

[9][10]

Doplněk

Cobb-Douglasova produkční funkce

Má-li produkční funkce tvar $f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$, potom říkáme, že se jedná o Cobb-Douglasovu produkční funkci. Parametr A určuje rozsah produkce, parametry a a b měří, jakým způsobem reaguje množství produkce na změny ve vstupech. [12]

Harrodův-Domarův model růstu

Klíčem k popisu Harrodova-Domarova modelu je vztah:

$$\frac{s}{G} = g + n,$$

kde s je konstantní míra úspor, C je konstantní poměr kapitálu k výstupu, n je konstantní tempo růstu pracovní síly a g je konstantní tempo technologického pokroku. Součet na pravé straně vyjadřuje přirozené tempo růstu (dané růstem efektivní pracovní síly), zatímco levá strana označuje zaručené tempo růstu (dané tempem akumulace kapitálu). Jen tehdy, platí-li uvedená rovnost mezi přirozeným a zaručeným tempem růstu, jsou všechny faktory plně využity a ekonomika se nachází v dynamickém optimu. [17]

Závěr

V této bakalářské práci jsme se zabývali osobností Jana Tinbergena, nositele Nobelovy ceny za ekonomii. Pozornost jsem věnovali jeho profesní části života, především ekonomické a matematické práci.

V první kapitole jsme se zaměřili na autorovu biografii, s důrazem na jeho studia a budoucí práci v oblasti ekonomie a matematiky. Dále jsme stručně popsali, čím se zabýval ve svých hlavních dílech.

Jeho dílo *Mathematical models of economic growth* je považováno za jedno ze stěžejnějších, proto jsme ho ve druhé kapitole blíže rozvedli. Nejdříve jsme krátce sepsali teorii k ekonomickému růstu a v dalších podkapitolách jsme vypsali modely ekonomického růstu podle Tinbergena. Začali jsme nejjednodušším makromodelem bez přerušení produkce a bez znehodnocení. Dále jsme uvedli jeho makromodel bez přerušení produkce a s opotřebením, který je charakteristický předpokladem dočasné životnosti všech kapitálových statků. V dalším makromodelu je zahrnuta i časová prodleva v produkci, ale tento model je bez znehodnocení. Jako poslední jsme přiblížili Tinbergenovu optimální míru rozvoje.

Protože je v této práci mnoho matematických a ekonomických pojmů, považovali jsme za vhodné je v poslední části mé práce shrnout. Tím by měl být text přehlednější a čitelnější.

Jan Tinbergen dostal Nobelovu cenu za ekonomii společně s R. A. K. Frischem. Přestože nebylo úmyslem psát o R. A. K. Frischovi, rádi bychom alespoň v závěru této práce o něm zmínili pár slov. Norský ekonom Ragnar Anton Kittel Frisch se narodil v roce 1895 v Oslu. Pocházel z rodiny zlatníků a stříbrotepců, proto se také vyučil zlatníkem. Jeho matka ale trvala na tom, aby se současně s ukončením učebního procesu zapsal na univerzitu. Rozhodl se proto studovat ekonometrii, protože dospěl k názoru, že to bude nejkratší a nejsnadnější studium. V roce 1919 ukončil univerzitní studia a odešel studovat ekonomii a matematiku do ciziny. Navštívil Francii, Německo, Velkou Británii, Spojené státy a Itálii. Doktorát získal v oboru matematické statistiky na univerzitě v Oslu v roce 1926. Zde byl také v roce 1925 ustanoven asistentem, roku 1928 docentem a roku 1931 řádným profesorem. Stal se ředitelem výzkumu Ekonomického ústavu univerzity v Oslu. Ještě než získal Nobelovu cenu, byla mu v roce 1961 udělena cena Antonia Feltrinelliho slavnou italskou Akademií Nazionale dei Lincei. [6] [7]

Do českého jazyka bylo přeloženo pouze jedno jeho dílo [2], které je navíc zaměřeno hlavně na ekonomii, proto jsem si ho nemohla vybrat pro bližší analýzu. Další jeho díla jsou k publikována hlavně v angličtině, což mi dělalo dost velké problémy. Jsem ale ráda, že jsem se díky této práci alespoň trochu zdokonalila v anglickém jazyce a naučila jsem se pracovat i s literaturou napsánou v jiném než rodném jazyce.

Literatura

[1] Jan Tinberger, Hendricus C. Bos. Mathematical models of economic growth. New York : McGraw-Hill, 1962

[2] Jan Tinbergen, Hospodářská politika: zásady a tvorba. Vyd. 1. Praha: Svoboda, 1972

[3] Jan Tinbergen, Central planning. Yale University Press, 1964

[4] Jan Tinbergen, Econometric models of education. Paris : Organisation for Economic Co-operation and Development, 1965

[5] Robert Weinlich. Laureáti Nobelovy ceny za ekonomii.Olomouc : Alda, 1999

[6] Jiří Jonáš a kol. Nobelova cena za ekonomii. Praha : Academia, 1993

[7] Milan Sojka. Kdo byl kdo : světoví a čeští ekonomové. Praha : Nakladatelství Libri, 2002

[8] Dagmar Marhoulová. O Tinbergenově pojetí centrálního plánování. Praha: Ekonomický ústav ČSAV, 1967

[9] Robert H. Frank, Ben S. Bernanke. Ekonomie. Praha: Grada Publishing, 2003

[10] Paul A. Samuelson, William D. Nordhaus. Ekonomie. Praha: Svoboda, 1995

[11] Veronika Hedija, Petr Musil. Praktikum makroekonomie. Plzeň: Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, 2009

[12] Hal R. Varian. Mikroekonomie: moderní přístup. Praha: Victoria Publishing, 1995

[13] Jan Tinbergen [online]. Dostupné z http://www.financnici.cz/jan-tinbergen

[14] Biografie Jan Tinbergen [online].

Dostupné z http://ciks.vse.cz/Edice/nobel/Tinbergen/tin_biografie.aspx

[15] Laureáti 1969: Exaktní metody mají zelenou [online]. Dostupné z http://www.ilist.cz/clanky/laureati-1969-exaktni-metody-maji-zelenou

[16] Jan Tinbergen (1903–1994) Biography [online]. Dostupné z http://biography.jrank.org/pages/7020/Jan-Tinbergen-(-1903-

[17] Od teorie růstu k politické ekonomii růstu. [online] Dostupné z http://journal.fsv.cuni.cz/storage/2597_199807mc.pdf

[18] Jan Tinbergen. [online]
Dostupné z http://www.econlib.org/library/Enc/bios/Tinbergen.html