



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**MODELOVÁNÍ ÚČINKU ZEMĚTŘESENÍ NA BUDOVU  
POMOCÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC**

MODELLING OF EFFECT OF AN EARTHQUAKE ON A BUILDING WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Dan Juříček

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.

BRNO 2018



# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	<b>Dan Juříček</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Modelování účinku zemětřesení na budovu pomocí diferenciálních rovnic**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Působení zemětřesení na vícepatrovou budovu je možno modelovat pomocí systému těles spojených na pružinách, který se chová podle Hookova zákona. Kde jednotlivá patra budovy jsou považována za hmotná tělesa a spoje mezi patry mají role pružin. V závislosti na parametrech budovy dostáváme její přirozené periody, tyto by měly být mimo rozmezí obvyklých period otřesů vyvolaných zemětřesením.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Sestavení systémů diferenciálních rovnic druhého řádu, které modelují účinky zemětřesení na vícepatrovou budovu v horizontálním směru.
2. Analýza těchto systémů, výpočet přirozených frekvencí a period budov vzhledem k jejich parametrům.

### **Seznam doporučené literatury:**

ZILL, Dennis G. A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. 8th ed. Brooks/Cole, 2005. ISBN 0-534-41878-3.

DIBLÍK, Josef a Miroslava RŮŽIČKOVÁ. Obyčejné diferenciální rovnice. Žilina: EDIS, 2008. ISBN 978-80-8070-891-7.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá popisem a řešením soustav diferenciálních rovnic, které popisují účinky zemětřesení na budovy. Cílem této bakalářské práce je sestavení systémů diferenciálních rovnic druhého řádu, vhodného k modelování účinků zemětřesení na vícepatrové budovy v horizontálním směru. Práce si dále klade za cíl analyzovat tyto systémy, vypočítat přirozené frekvence a periody těchto budov.

## **Summary**

This bachelor's thesis is concerning with the description and solution of system of differential equations which describe effects of an earthquake on buildings. The aim of this thesis is to build systems of second-order differential equations suitable to model the effects of an earthquake on multi-story buildings in horizontal movement. Further, the thesis deals with analyze of these systems and finding a solution of natural frequencies and period of these buldings.

## **Klíčová slova**

soustava obyčejných diferenciálních rovnic, účinky zemětřesení

## **Keywords**

system of ordinary differential equations, effects of an earthquake

JUŘÍČEK, D. *Modelování účinku zemětřesení na budovu pomocí diferenciálních rovnic*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 31 s. Vedoucí Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem *Modelování účinku zemětřesení na budovu pomocí diferenciálních rovnic* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Viery Štoudkové Růžičkové, Ph.D., s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Dan Juříček





Rád bych poděkoval vedoucí své práce Mgr. Vieri Štoudkové Růžičkové, Ph.D. za její odborné vedení plné cenných rad a nápadů a za veškerý čas, který mi věnovala v průběhu vypracování této práce. Dále bych také rád poděkoval své rodině a přátelům, kteří mě během mého studia podporovali.

Dan Juříček



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Matematický aparát</b>	<b>4</b>
2.1	ODR . . . . .	4
2.2	Soustava ODR1 . . . . .	5
2.2.1	Soustava lineárních ODR1 . . . . .	6
2.3	Metody řešení soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty . . . . .	7
2.3.1	Homogenní soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty . . . . .	7
2.3.2	Nehomogenní soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Model zemětřesení</b>	<b>10</b>
3.1	Model jednopatrového domu . . . . .	10
3.1.1	Zjednodušený model bez působení vnější síly . . . . .	10
3.1.2	Zjednodušený model za působení vnější síly . . . . .	11
3.1.3	Přesnější model bez působení vnější síly . . . . .	13
3.1.4	Přesnější model za působení vnější síly . . . . .	14
3.2	Model vícepatrového domu . . . . .	16
3.2.1	Zjednodušený model bez působení vnější síly . . . . .	16
3.2.2	Zjednodušený model za působení vnější síly . . . . .	18
3.2.3	Přesnější model bez působení vnější síly . . . . .	21
3.2.4	Přesnější model za působení vnější síly . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Aplikace na konkrétním příkladu</b>	<b>24</b>
4.1	Zjednodušený model za působení vnější síly . . . . .	24
4.2	Přesnější model za působení vnější síly . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	<b>31</b>

# 1. Úvod

Diferenciální rovnice hrají důležitou roli při řešení mnoha reálných problémů a také přírodních jevů. Modelování účinků zemětřesení na budovy lze popsat pomocí soustavy diferenciálních rovnic druhého řádu s počátečními podmínkami.

Tato bakalářská práce se zabývá odvozením, popisem a řešením právě těchto rovnic. Řešení těchto problémů je vhodné pro modelování toho, co se může během těchto přírodních katastrof stát a především, jak se vyvarovat trvalým škodám nebo dokonce zničením těchto budov. Tyto rovnice také mohou po úpravě sloužit jako modely účinků jednotlivých impulzů jako jsou například nárazy automobilů, rázových vln atd. Při řešení návrhů budov by se zejména mělo dbát, aby přirozené frekvence jednotlivých pater budovy neměly stejnou přirozenou frekvenci jako je frekvence zemětřesení. Jestliže tak nastane, pak dochází k jevu zvanému rezonance, kdy výchylka těchto pater teoreticky roste do nekonečna. V reálném případě však trámy těchto budov nejsou dokonale elastické a v určitém okamžiku dojde k přerušení vazeb a zhroucení. Každé zemětřesení má však vlastní frekvenci, a proto není možné, aby budovy odolaly všem zemětřesením. Proto se při návrhu domu snažíme alespoň předejít zhroucení systému pro zemětřesení, jejichž frekvence jsou v dané lokalitě nejčastější.

Struktura této práce je následující: druhá kapitola shrnuje matematický aparát, který je potřebný k popisu diferenciálních rovnic. Třetí kapitola se zabývá odvozením a popisem těchto soustav diferenciálních rovnic. Nejdříve se zaměříme na jednodušší problém a sice jednopatrovou budovu. Následovat bude doplnění složitějšího případu, vícepatrové budovy. V další kapitole uvádíme řešení příklad.

## 2. Matematický aparát

Nyní si uvedeme definice a věty, které budeme potřebovat v následných výpočtech. Zdroje pro tuto kapitolu jsou [1] a [2].

### 2.1. ODR

**Definice 2.1.1.** a) *Obyčejnou diferenciální rovnici* (ODR) nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje (či vyskytují) derivace hledané funkce jedné proměnné.

b) *Řádem* diferenciální rovnice nazýváme největší řád derivace hledané funkce v uvažované diferenciální rovnici.

c) Diferenciální rovnici nazýváme *lineární*, je-li tato rovnice lineární vzhledem ke hledané funkci i její derivaci (případně derivacím). Zkratka LODR.

d) Označení ODR1 (či LODR1) značí obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu (či LODR prvního řádu). Zkratky  $ODR_n$  a  $LODR_n$  značí ODR a LODR  $n$ -tého řádu.

**Definice 2.1.2.** a) *Řešením*  $ODR_n$  nazýváme každou  $n$ -krát spojitě derivovatelnou funkci na nějakém intervalu  $I$ , která vyhovuje dané rovnici, takže po dosazení této funkce a jejích derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu  $I$  identickou rovnost.

b) ODR budeme považovat za vyřešenou, budeme-li znát všechna její řešení.

c) Křivku, která znázorňuje některé řešení dané ODR, nazýváme *integrální křivkou* diferenciální rovnice. Samotné řešení nazýváme také *integrálem* diferenciální rovnice.

**Definice 2.1.3.** Uvažujme  $ODR_n$  v tzv. *normálním tvaru*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.1)$$

kde  $f$  je reálná funkce definovaná na  $(n+1)$ -rozměrné oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Daná rovnice je tedy v normálním tvaru explicitně rozřešena vzhledem k derivaci nejvyššího řádu.

Dále nechť  $(x_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \Omega$ . Úloha určit řešení rovnice (2.1), které vyhovuje  $n$  počátečním podmínkám

$$y(x_0) = \xi_0, \quad y'(x_0) = \xi_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \xi_{n-1}, \quad (2.2)$$

se nazývá *počáteční úloha* (nebo také *Cauchyho úloha*).

**Definice 2.1.4.** a) *Obecným řešením* rovnice (2.1) rozumíme funkci závislejší na  $n$  obecných parametrech  $C_1, \dots, C_n$  takových, že každou (přípustnou) volbou  $C_1, \dots, C_n$  lze získat řešení nějaké počáteční úlohy (2.1), (2.2).

b) *Partikulární řešení* rovnice (2.1) je takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant  $C_1, \dots, C_n$ .

## 2.2. Soustava ODR1

**Definice 2.2.1.** a) Soustavu  $n$  diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde funkce  $f_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) jsou definovány na  $(n + 1)$ -rozměrné oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , nazýváme *normální soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (SODR1)*.

b) *Řešením* normální soustavy (2.3) nazýváme každou skupinu  $n$  funkcí tvaru

$$y_1 = u_1(x), \quad y_2 = u_2(x), \quad \dots, \quad y_n = u_n(x), \quad (2.4)$$

kteřé jsou spojitě derivovatelné v nějakém intervalu  $I$  a po dosazení vyhovují dané soustavě (2.3) pro všechna  $x \in I$ .

c) Úlohu určit řešení soustavy (2.3), které vyhovuje  $n$  počátečním podmínkám

$$y_1(x_0) = \xi_1, \quad y_2(x_0) = \xi_2, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = \xi_n, \quad (2.5)$$

kde  $(x_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega$  je libovolný, ale pevně daný bod, nazýváme *počáteční úlohou*.

d) *Obecným řešením* soustavy (2.3) budeme rozumět skupinu  $n$  funkcí závisejících na  $n$  obecných parametrech  $C_1, \dots, C_n$  takových, že každou (přípustnou) volbou těchto konstant obdržíme řešení nějaké počáteční úlohy (2.3), (2.5).

e) *Partikulárním řešením* soustavy (2.3) nazveme takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant  $C_1, \dots, C_n$ .

f) *Výjimečným řešením* soustavy (2.3) nazveme takové řešení, které nelze z obecného řešení získat žádnou volbou konstant  $C_1, \dots, C_n$ .

*Poznámka.* Všechny SODR $n$  se dají převést na SODR1.

**Věta 2.2.2.** *Nechť všechny funkce  $f_k$  ( $k=1, \dots, n$ ), vystupující v (2.3), splňují tyto dva předpoklady:*

(P1<sup>n</sup>) *Jsou spojitě na nějakém okolí  $O \subset \mathbb{R}^{n+1}$  bodu  $(x_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ ;*

(P2<sup>n</sup>) *Mají na  $O$  ohraničené parciální derivace*

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_1}, \frac{\partial f_k}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y_n}.$$

*Potom má počáteční úloha (2.3),(2.5) právě jedno řešení  $y_1 = u_1(x), \dots, y_n = u_n(x)$ , které je definované v nějakém intervalu obsahujícím počáteční bod  $x_0$  ve svém vnitřku.*

## 2.2. SOUSTAVA ODR1

### 2.2.1. Soustava lineárních ODR1

**Definice 2.2.3.** Soustavou lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (SLODR1) rozumíme soustavu

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\&\quad \dots \\y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Funkce  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  nazýváme *koeficienty soustavy*,  $n$ -tici funkcí  $b_1, \dots, b_n$  nazýváme *pravou stranou soustavy*, a o všech těchto funkcích předpokládáme, že jsou definovány na nějakém intervalu  $I$  a jsou zde spojité.

Jsou-li všechny funkce  $b_1, \dots, b_n$  nulové na celém intervalu  $I$ , pak hovoříme o *homogenní* soustavě, v opačném případě, tj. je-li alespoň jedna funkce  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) nenulová, o *nehomogenní* soustavě.

*Poznámka.* Pro další části, v maticovém zápisu budeme chápat

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

jako

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_x = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

**Věta 2.2.4.** *Nechť matice koeficientů  $\mathbf{A}$  a pravá strana  $\mathbf{b}$  jsou spojité na intervalu  $I$ , a nechť  $x_0 \in I$ . Pak počáteční úloha (2.6), (2.5) má jediné řešení, definované na celém intervalu  $I$ .*

### Homogenní soustava lineárních ODR1

V této soustavě je  $\mathbf{b}(x) = \mathbf{0}$  pro každé  $x \in I$ . Daná SLODR1 se tedy redukuje na tvar

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}.\tag{2.7}$$

**Věta 2.2.5.** *Nechť vektorové funkce  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  ( $k$  je libovolné přirozené číslo) jsou řešeními soustavy (2.7). Potom jejich lineární kombinace*

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{u}_1 + C_2\mathbf{u}_2 + \cdots + C_k\mathbf{u}_k$$

*je také řešením rovnice (2.7).*

**Definice 2.2.6.** Nechť  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  jsou vektorové funkce o  $n$  složkách definované na intervalu  $I$ . Řekneme, že tyto funkce jsou na  $I$  *lineárně nezávislé*, jestliže rovnost

$$C_1\mathbf{f}_1(x) + C_2\mathbf{f}_2(x) + \cdots + C_n\mathbf{f}_n(x) = \mathbf{0}\tag{2.8}$$

platí na intervalu  $I$  pouze v případě, kdy  $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ .

**Věta 2.2.7.** *Nechť  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  jsou vektorové funkce o  $n$  složkách definované na intervalu  $I$ . Je-li*

$$\det(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_{1,1}(x) & f_{2,1}(x) & \dots & f_{n,1}(x) \\ f_{1,2}(x) & f_{2,2}(x) & \dots & f_{n,2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,n}(x) & f_{2,n}(x) & \dots & f_{n,n}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

*v alespoň jednom bodě  $x \in I$ , pak  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  jsou lineárně nezávislé na  $I$  ( $f_{i,j}$  značí  $j$ -tou složku vektorové funkce  $\mathbf{f}_i$ ).*

**Věta 2.2.8.** *Nechť vektorové funkce  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  řeší soustavu (2.7) na intervalu  $I$ . Pak jsou lineárně nezávislé na  $I$ , právě když*

$$\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)(x) \neq 0$$

*pro všechna  $x \in I$ .*

**Věta 2.2.9.** *Nechť  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou partikulárními řešeními homogenní SLODR1 (2.7) na  $I$ , která jsou zde lineárně nezávislá. Potom každé řešení  $\mathbf{y}$  této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru*

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{u}_1(x) + C_2 \mathbf{u}_2(x) + \dots + C_n \mathbf{u}_n(x),$$

*kde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  jsou vhodné konstanty.*

Libovolnou  $n$ -tici lineárně nezávislých řešení soustavy (2.7) (která má  $n$  rovnic) nazýváme *fundamentální systém řešení* této soustavy. Uspořádáme-li tato řešení do sloupců, pak vzniklou matici nazýváme *fundamentální maticí řešení* a označujeme ji  $\mathbf{U}(x)$ .

## Nehomogenní soustava lineárních ODR1

V případě nehomogenní SLODR1, tj. soustavy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \quad (2.9)$$

kde  $\mathbf{b}(x) \neq 0$  na  $I$  platí analogie věty (2.7).

**Věta 2.2.10.** *Nechť  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  je fundamentální systém řešení homogenní SLODR1 (2.7) a  $y_p$  je nějaké partikulární řešení nehomogenní SLODR1 (2.9). Pak obecné řešení rovnice (2.9) lze napsat ve tvaru*

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{u}_1(x) + C_2 \mathbf{u}_2(x) + \dots + C_n \mathbf{u}_n(x) + y_p(x).$$

## 2.3. Metody řešení soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty

### 2.3.1. Homogenní soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty

Homogenní SLODR1 s konstantními koeficienty rozumíme soustavu (2.7), ve které je matice soustavy konstantní, tj.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}. \quad (2.10)$$

Pro řešení soustavy (2.10) přináší efektivní nástroj metoda vlastních čísel.



**Metoda vlastních čísel (Eulerova)**

V principu se jedná o podobný postup jako při hledání fundamentálního systému řešení v případě LODR $n$ . Nicméně, poněvadž se pohybujeme ve vyšší dimenzi, je z teoretického hlediska náročnější.

Řešení hledáme ve tvaru  $\mathbf{u} = \mathbf{h}e^{\lambda x}$ , kde  $\mathbf{h}$  je číselný vektor (jeho složky mohou být i komplexní čísla). Potřeba je ale zdůraznit, že tento vektor musí být nenulový, neboť nulové řešení nemůže být součástí fundamentálního systému řešení. Dosazením do (2.10) dostáváme

$$\lambda \mathbf{h}e^{\lambda x} = \mathbf{A} \mathbf{h}e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \mathbf{h} - \lambda \mathbf{h} = \mathbf{0},$$

což po vylnutí vektoru  $\mathbf{h}$  dává soustavu lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h} = \mathbf{0} \tag{2.11}$$

( $\mathbf{E}$  je jednotková matice).

Z lineární algebry je známo, že taková soustava má nenulové řešení (ne jediné) pouze v případě, je-li matice  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$  singulární, tj.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

Hodnoty  $\lambda$ , pro které platí poslední vztah, se nazývají *vlastní čísla* matice  $\mathbf{A}$  a příslušné vektory  $\mathbf{h}$ , které získáme jako řešení soustavy (2.11), se nazývají *vlastní vektory*. Samotná rovnice (2.11) se nazývá *charakteristická rovnice* matice  $\mathbf{A}$ . Jejím řešením je  $n$  (obecně komplexních) vlastních čísel (včetně vícenásobných).

**Případ  $n=2$** 

- a) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má dvě různá (reálná) vlastní čísla  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Potom soustava (2.10) má dvě lineárně nezávislá řešení

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_1 x}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_2 x},$$

kde  $\mathbf{h}_1$  (resp.  $\mathbf{h}_2$ ) je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ). Lineární nezávislost lze snadno ověřit pomocí věty 2.2.7.

- b) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má jeden reálný dvojnásobný kořen  $\lambda_{1,2} = \lambda_*$ . V tomto případě je potřeba dále rozlišit, zda je defekt matice  $(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E})$  roven jedné nebo dvěma. Defekt matice  $(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E})$  je číslo

$$d(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}) = n - h(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}),$$

kde  $n$  je počet řádků a  $h(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E})$  je hodnota matice  $(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E})$ . Toto číslo udává maximální počet lineárně nezávislých řešení  $\mathbf{h}$  soustavy  $(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}) \mathbf{h} = \mathbf{0}$ .

Odtud plyne, že je-li defekt matice roven dvěma, podaří se nám nalézt dva lineárně nezávislé vlastní vektory  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ , ke kterým dostaneme dvě lineárně nezávislá řešení

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{h}_2 e^{\lambda_* x}.$$

Je-li defekt roven jedné, podaří se nám určit pouze jeden vlastní vektor  $\mathbf{h}_1$  (jakýkoliv další by již byl lineárně závislý s vektorem předcházejícím). Potom dvě lineárně nezávislá řešení lze psát ve tvaru

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{h}_1 e^{\lambda_* x}, \quad \mathbf{u}_2 = (\mathbf{h}_1 x + \mathbf{h}_2) e^{\lambda_* x}, \quad (2.12)$$

kde vektor  $\mathbf{h}_2$  (někdy nazývaný jako zobecněný vlastní vektor) lze určit jako řešení soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda_* \mathbf{E}) \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1. \quad (2.13)$$

- c) Matice soustavy  $\mathbf{A}$  má dvě komplexně sdružená vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ . K těmto komplexně sdruženým číslům existují komplexně sdružené vlastní vektory  $\mathbf{h}_{1,2} = \mathbf{r} \pm i\mathbf{s}$ . Příslušnou dvojici lineárně nezávislých řešení lze potom napsat ve tvaru

$$\mathbf{u}_{1,2}^* = (\mathbf{r} \pm i\mathbf{s}) e^{(a \pm ib)x} = e^{ax} [(\mathbf{r} \cos bx - \mathbf{s} \sin bx) \pm i(\mathbf{s} \cos bx + \mathbf{r} \sin bx)].$$

Abychom se tomuto komplexnímu řešení vyhnuli, provedeme úpravu. Lineárními kombinacemi  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2^*)$  a  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}_2^*)$  dostaneme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení

$$\mathbf{u}_1 = e^{ax} (\mathbf{r} \cos bx - \mathbf{s} \sin bx), \quad \mathbf{u}_2 = e^{ax} (\mathbf{s} \cos bx + \mathbf{r} \sin bx). \quad (2.14)$$

### 2.3.2. Nehomogenní soustavy lineárních ODR1 s konstantními koeficienty

Věnujme se nyní nehomogenní soustavě

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \quad \mathbf{b}(x) \neq 0 \text{ na } I. \quad (2.15)$$

Podle věty 2.2.10 víme, že její obecné řešení lze psát ve tvaru

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{u}_1 + C_2 \mathbf{u}_2 + \dots + C_n \mathbf{u}_n + \mathbf{y}_p,$$

kde  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  je fundamentální systém řešení příslušné homogení SLODR1 a  $\mathbf{y}_p$  je libovolné partikulární řešení soustavy (2.15).

#### Metoda neurčitých koeficientů

Tuto metodu lze použít v případě, kdy vektor pravé strany  $\mathbf{b}$  je ve tvaru

$$\mathbf{b}(x) = e^{ax} (\mathbf{P}_r(x) \cos bx + \mathbf{Q}_s(x) \sin bx), \quad (2.16)$$

kde  $\mathbf{P}_r$  resp.  $\mathbf{Q}_s$  jsou vektory polynomů stupně nejvýše  $r$ , resp.  $s$ . Řešení  $\mathbf{y}_p$  potom hledáme ve tvaru

$$\mathbf{y}_p = e^{ax} \left( \tilde{\mathbf{P}}_{t+k}(x) \cos bx + \tilde{\mathbf{Q}}_{t+k}(x) \sin bx \right), \quad (2.17)$$

kde  $t = \max\{r, s\}$ ,  $k$  je násobnost vlastního čísla  $\lambda = a + ib$  (pokud tato hodnota není vlastním číslem, klademe  $k = 0$ ) a  $\tilde{\mathbf{P}}_{t+k}, \tilde{\mathbf{Q}}_{t+k}$  jsou polynomy stupně  $t + k$ , ve kterých vystupují zatím neurčené koeficienty.

## 3. Model zemětřesení

Proměnnou  $y(x)$  nyní přeznačíme na proměnnou  $x(t)$  abychom dali najevo, že relativní výchylka bude v horizontálním a ne svislém směru. Řešení těchto rovnic však bude stejné jako uvedené v kapitole 2 Matematický aparát. V této kapitole jsem čerpal z [1], [3] a [4].

### 3.1. Model jednopatrového domu

#### 3.1.1. Zjednodušený model bez působení vnější síly

Uvažujme nejprve jednoduchý příklad jednopatrového domu. Při zemětřesení působí na dům síla, která vychyluje dům v horizontálním směru  $x$ . Předpokládejme, že patro je propojeno se zemí elasticky. Síla, která působí proti změně vychýlení, je úměrná výchylce z rovnovážné polohy a působí proti směru této výchylky.

Platí tedy Hookův zákon

$$F = -kx,$$

kde  $k$  je konstanta úměrnosti, která je závislá na materiálu, ze kterého jsou trámy budovy vyrobeny. Tedy fyzikálně odpovídá tuhosti trámu.

Užitím Newtonových zákonů dostáváme

$$ma = -kx,$$

kde zrychlení  $a$  je druhou derivací polohy  $x$  v čase  $t$ . Po úpravě dostáváme diferenciální rovnici druhého řádu

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0, \quad (3.1)$$

kde  $m > 0$  je hmotnost patra budovy.

Dále označme  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , kde  $\omega > 0$  fyzikálně odpovídá přirozené frekvenci kmitů rovnice (3.1).

Tedy rovnice

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad (3.2)$$

popisuje chování netlumeného harmonického pohybu jednopatrové budovy.

Řešíme tuto ODR2 pomocí charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

tedy

$$\lambda = \pm i\omega$$

dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Konstanty  $c_1$  a  $c_2$  závisí na počátečních podmínkách. Hodnotu  $\omega$  označíme jako tzv. *přirozenou frekvenci budovy*.

### 3.1.2. Zjednodušený model za působení vnější síly

Nyní uvažujme, že na budovu působí periodická síla o frekvenci  $\gamma$ . Dostáváme nehomogenní ODR2

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \gamma t. \quad (3.3)$$

Homogenní část, rovnici (3.2), již máme vyřešenou. Dále vyřešíme partikulární část rovnice (3.3) pro dva případy

a)  $\gamma \neq \omega$

V tomto případě hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$x_p = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t,$$

kde konstanty  $A$  a  $B$  závisí na hodnotách  $F_0$  a  $m$ . Po dosazení  $x_p''$  za  $x''$  a  $x_p$  za  $x$  do rovnice (3.3) dostáváme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} -\gamma^2 A + \omega^2 A &= \frac{F_0}{m} \\ -\gamma^2 B + \omega^2 B &= 0. \end{aligned}$$

Úpravou získáme

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)}, \quad B = 0.$$

Tedy výsledné partikulární řešení pro  $\gamma \neq \omega$  je tvaru

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t.$$

Obecné řešení pro rovnici (3.3) v tomto případě má tedy tvar

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t.$$

b)  $\gamma = \omega$

Jelikož homogenní rovnice má řešení

$$x_h = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

partikulární řešení nemůže být stejného tvaru. V tomto případě hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$x_p = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t.$$

Po dosazení  $x_p''$  za  $x''$  a  $x_p$  za  $x$  do rovnice (3.3) dostáváme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} -2\omega A &= 0 \\ 2\omega B &= \frac{F_0}{m}. \end{aligned}$$

Úpravou získáme

$$A = 0, \quad B = \frac{F_0}{2m\omega}.$$

### 3.1. MODEL JEDNOPATROVÉHO DOMU

Tedy výsledné partikulární řešení pro  $\gamma = \omega$  je tvaru

$$x_p = \frac{F_0 t}{2m\omega} \sin \omega t.$$

Obecné řešení pro rovnici (3.3) v tomto případě má tedy tvar

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0 t}{2m\omega} \sin \omega t.$$

Díky tomu, že amplitudu výchylky násobíme časem  $t$  bude toto obecné řešení neohraničené. Tedy s rostoucím časem bude výchylka budovy stoupat až do nekonečna. Jev kdy přirozená frekvence budovy se rovná frekvenci zemětřesení se nazývá rezonance. Tomuto jevu se však snažíme vyvarovat. Při rezonanci, i jen po krátkou dobu, hrozí ke katastrofálním důsledkům pro budovu.

Toto je však pouze zjednodušené řešení pro netlumený harmonický pohyb. Reálně se budova v nějakém čase  $\tau$  ustálí v původní poloze (pokud se důsledkem zemětřesení nezboří). Pro získání přesnějšího modelu přidáváme sílu, která působí proti směru výchylky.

### 3.1.3. Přesnější model bez působení vnější síly

Přidáváme tedy sílu, která reprezentuje odpor prostředí, u níž předpokládáme, že je úměrná rychlosti daného objektu.

$$F = -lx',$$

kde  $l$  je konstanta úměrnosti, která závisí zejména na hustotě prostředí.

Podle Newtonova zákona

$$mx'' = -kx - lx'$$

po úpravě dostáváme

$$x'' + 2bx' + \omega^2 x = 0, \quad (3.4)$$

kde  $b = \frac{l}{2m}$ . Dostáváme rovnici jednoduchého tlumeného harmonického pohybu. Předem uvedenou ODR2 řešíme pomocí charakteristického polynomu

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0.$$

Pak diskriminant

$$D = 4b^2 - 4\omega^2$$

$$D = 4(b^2 - \omega^2)$$

závisí na hodnotách  $b$  a  $\omega$ . Mohou tedy nastat tři případy

a)  $|b| > |\omega|$

V tomto případě má charakteristická rovnice dva reálné kořeny  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ , kde  $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{(b^2 - \omega^2)}$ . Obecné řešení tohoto případu je ve tvaru  $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ . Řešení rovnice lze také přepsat na tvar

$$x = e^{-bt} \left( c_1 e^{\sqrt{b^2 - \omega^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{b^2 - \omega^2} t} \right).$$

Tato rovnice popisuje tzv. *nadkritický útlum*. Z tohoto tvaru lze také odvodit, co se fyzikálně bude se soustavou dít. S postupem času, tedy pro  $t \rightarrow \infty$  se bude výchylka  $x$  díky funkci  $e^{-bt}$  exponenciálně blížit k nule  $x \rightarrow 0$ . Tedy dům se poměrně rychle přiblíží původní polohy.

b)  $|b| = |\omega|$

Nyní má charakteristická rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen  $\lambda$ . Obecné řešení tohoto případu je ve tvaru  $x = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$ . V upraveném tvaru

$$x = e^{-bt} (c_1 + c_2 t).$$

Tato rovnice popisuje tzv. *kritický útlum*.

c)  $|b| < |\omega|$  V tomto případě jsou výsledkem charakteristické rovnice dva komplexně sdružené kořeny  $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$ . Po úpravě dostáváme  $\lambda_{1,2} = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$ . Pak obecné řešení je tvaru

$$x = e^{-bt} \left( c_1 \cos \left( \sqrt{\omega^2 - b^2} t \right) + c_2 \sin \left( \sqrt{\omega^2 - b^2} t \right) \right)$$

kteří popisuje tlumený harmonický pohyb. Přirozená frekvence budovy je v tomto případě  $\sqrt{\omega^2 - b^2}$ . Tato rovnice popisuje tzv. *podkritický útlum* nebo také tzv. *oscilatorický útlum*.

### 3.1. MODEL JEDNOPATROVÉHO DOMU

Nyní se zabýváme případem c), který má nejhorší následky pro budovy z důvodu oscilujícího pohybu kolem rovnovážné polohy. Z podmínky  $|b| < |\omega|$  po dosazení a úpravě dostáváme nerovnost  $k > \frac{l^2}{4m}$ , tedy nutnou podmínku ke vzniku oscilujícího pohybu.

#### 3.1.4. Přesnější model za působení vnější síly

Dále uvažujme, že daný harmonický pohyb je ovlivňován budící periodickou silou o frekvenci  $\gamma$ . Daný model je pak tvaru

$$x'' + 2bx' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \gamma t, \quad (3.5)$$

kde  $\frac{F_0}{m}$  je amplituda síly působící na budovu vyvolaná zemětřesením. Dostáváme tedy nehomogenní ODR2 s konstantními koeficienty.

Již zmíněné řešení homogenní části rovnice má tvar

$$x_h = c_1 e^{-bt} \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + c_2 e^{-bt} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t.$$

Díky tvaru rovnice (3.5) bude v našem řešení vždy figurovat člen  $e^{-bt}$  ( $b > 0$ ). Tento člen zaručí, že se výsledné homogenní řešení bude exponenciálně blížit k nule.

Pokud  $F_0$  bude konstantní, tak oproti zjednodušené rovnici (3.3) může nastat pouze jeden případ. Partikulární řešení vždy dostaneme ve tvaru součtu funkcí sinus a kosinus

$$x_p = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t$$

kde konstanty  $A$  a  $B$  závisí na hodnotě  $\frac{F_0}{m}$ .

Dále hledíme partikulární řešení. Jestliže vypočítáme první a druhou derivaci  $x_p$  a dosadíme je do rovnice (3.5), pak dostaneme soustavu dvou rovnic. Hledáme řešení pro  $A$  a  $B$ .

$$\begin{aligned} -\gamma^2 A + 2b\gamma B + \omega^2 A &= \frac{F_0}{m} \\ -\gamma^2 B - 2b\gamma A + \omega^2 B &= 0 \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme

$$A = \frac{F_0 (\omega^2 - \gamma^2)}{m ((2b\gamma)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)^2)}, \quad B = \frac{2F_0 b\gamma}{m ((2b\gamma)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)^2)}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$x_p = \frac{F_0 (\omega^2 - \gamma^2)}{m ((2b\gamma)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)^2)} \cos \gamma t + \frac{2F_0 b\gamma}{m ((2b\gamma)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)^2)} \sin \gamma t.$$

Díky identitě

$$p \cos \gamma t + q \sin \gamma t = \sqrt{p^2 + q^2} \sin \left( \gamma t + \arctan \frac{p}{q} \right), \quad (3.6)$$

toto řešení lze také ekvivalentně zapsat jako

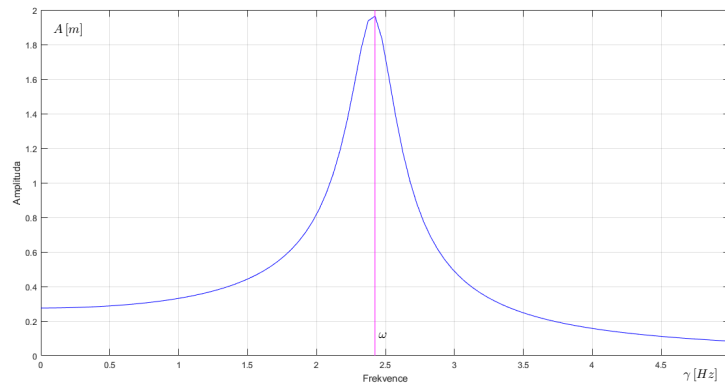
$$x_p = \frac{F_0}{m \sqrt{(2b\gamma)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)^2}} \sin \left( \gamma t + \arctan \frac{\omega^2 - \gamma^2}{2b\gamma} \right).$$

Obecné řešení pro rovnici (3.5) v tomto případě má tedy tvar

$$x = c_1 e^{-bt} \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + c_2 e^{-bt} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t + \frac{F_0}{m \sqrt{(2b\gamma)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)^2}} \sin \left( \gamma t + \arctan \frac{\omega^2 - \gamma^2}{2b\gamma} \right).$$

Nyní hledíme frekvenci  $\gamma$  pro maximální hodnotu amplitudy

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(2b\gamma)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)^2}}. \quad (3.7)$$



Obrázek 3.1: Hodnoty amplitudy pro funkci (3.7) při změně frekvence  $\gamma$ . Volba parametrů  $F_0 = 10000$ ,  $\omega = 2,42$ ,  $b = 4,4 \cdot 10^{-3}$ ,  $m = 6200$ .

Po derivaci výrazu pod odmocninou získáme

$$8b^2\gamma - 4\omega^2\gamma + 4\gamma^3 = 0.$$

Úpravou na

$$\gamma^2 + 2b^2 - \omega^2 = 0$$

zjistíme, že maximální výchylka nastává pro frekvenci

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}.$$



## 3.2. Model vícepatrového domu

Nyní přejdeme v úvahách ke složitějšímu případu a to  $n$ -patrovému domu.

### 3.2.1. Zjednodušený model bez působení vnější síly

Předpokládáme, že patra jsou propojena elasticky, tedy síla působící mezi dvěma sousedícími patry, patrem  $i$  a  $i + 1$ , je úměrná výchylce z rovnovážné polohy a působí proti směru této výchylky. To odpovídá Hookovu zákonu ve tvaru

$$F = -k_i (x_{i+1} - x_i),$$

kde rozdílem  $(x_{i+1} - x_i)$  rozumíme relativní výchylku patra  $i + 1$  vůči patru  $i$ . Konstanta  $k_i$  závisí na tuhosti trámů mezi jednotlivými patry. Také předpokládáme podobnou reakci mezi prvním patrem a zemí. Tedy jako v případě jednopatrového domu, síla podle Hookova zákona má tvar

$$F = -k_0 x.$$

Aplikováním druhého Newtonova pohybového zákona  $F = ma$  na každé patro dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_0 x_1 + k_1 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_1 (x_2 - x_1) + k_2 (x_3 - x_2) \\ &\dots \\ m_n x_n'' &= -k_{n-1} (x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Konstanty  $m_i$  vyjadřují hmotnost jednotlivých pater.

Pro lepší přehlednost budeme tyto soustavy zapisovat maticově. Označme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-2} & k_{n-2} + k_{n-1} & -k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé členy matice dostaneme jako násobky příslušných proměnných  $x_i$  pro  $i$ -tý sloupec, tento tvar dostaneme po roznásobení předešlé soustavy lineárních rovnic.

V maticovém zápisu tedy dostáváme

$$\mathbf{MX}'' = -\mathbf{KX}. \tag{3.9}$$

Po roznásobení maticí  $\mathbf{M}^{-1}$  zleva

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{K})\mathbf{X},$$

kde matice  $\mathbf{M}^{-1}$  má tvar

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} m_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Při označení  $-\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{K})$  dostáváme soustavu lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s konstantními koeficienty pro harmonický netlumený pohyb

$$\mathbf{X}'' = -\mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (3.10)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{k_0+k_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{k_{n-2}}{m_{n-1}} & \frac{k_{n-2}+k_{n-1}}{m_{n-1}} & -\frac{k_{n-1}}{m_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{k_{n-1}}{m_n} & \frac{k_{n-1}}{m_n} \end{pmatrix}.$$

Nyní hledíme řešení rovnice (3.10) ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}e^{\alpha t},$$

kde  $\mathbf{h}$  je nenulový číselný vektor (obecně komplexní).

Po zderivování a dosazení do rovnice dostáváme

$$\alpha^2 \mathbf{h}e^{\alpha t} = -\mathbf{A}\mathbf{h}e^{\alpha t}.$$

Pak

$$\mathbf{A}\mathbf{h} + \alpha^2 \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

a po vytknutí vektoru  $\mathbf{h}$  dostáváme soustavu kvadratických rovnic

$$(\mathbf{A} + \alpha^2 \mathbf{E}) \mathbf{h} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{E}$  je jednotková matice.

Aby tato rovnice měla nenulové řešení, je potřeba (díky poznatkům z lineární algebry), aby matice  $(\mathbf{A} + \alpha^2 \mathbf{E})$  byla singulární. Tedy

$$\alpha_j = \pm \sqrt{-\lambda_j}.$$

Hodnoty  $\lambda = -\alpha^2$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ , které lze dopočítat z charakteristické rovnice  $\det(\mathbf{A} + \alpha^2 \mathbf{E}) \mathbf{h} = \mathbf{0}$ .

Pak řešení má tvar

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{h}_j e^{\sqrt{-\lambda_j} t}, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{g}_j e^{-\sqrt{-\lambda_j} t}.$$

Jednotlivé subdeterminanty matice  $\mathbf{A}$  jsou vždy kladné, tedy při aplikování Sylvestrova kritéria zjistíme, že matice  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní. Díky této skutečnosti víme, že všechna

### 3.2. MODEL VÍCEPATROVÉHO DOMU

charakteristická čísla  $\lambda_j$  jsou kladná. Celý determinant matice  $\mathbf{A}$  se pak rovná  $D_n = \frac{\prod_{l=0}^{n-1} k_l}{\prod_{l=1}^n m_l}$ .

Pokud navíc matice  $\mathbf{A}$  bude symetrická, tedy pokud  $m = m_1 = m_2 = \dots = m_n$ , pak všechna charakteristická čísla jsou reálná. Tedy všechny hodnoty  $\alpha_j$  jsou ryze imaginární,  $\alpha_j = i\sqrt{\lambda_j}$ . Hodnoty  $\sqrt{\lambda_j}$  nazveme *přirozená frekvence pater budovy*. Díky Sturmově vlastnosti pro třídiagonální matice navíc dokážeme odvodit, že všechna vlastní čísla jsou od sebe ostře oddělena. Pak řešení této soustavy budou ve tvaru

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{r}_j \cos \sqrt{\lambda_j}t - \mathbf{s}_j \sin \sqrt{\lambda_j}t, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{s}_j \cos \sqrt{\lambda_j}t + \mathbf{r}_j \sin \sqrt{\lambda_j}t,$$

pro každé  $j = 1, 2, \dots, n$ . Vektory  $\mathbf{r}_j$  a  $\mathbf{s}_j$  dostaneme jako reálnou a imaginární část vlastního vektoru  $\mathbf{h}_j$ . Obecné řešení je ve tvaru

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{u}_1 + C_2\mathbf{u}_2 + \dots + C_n\mathbf{u}_n + C_{n+1}\mathbf{v}_1 + C_{n+2}\mathbf{v}_2 + \dots + C_{2n}\mathbf{v}_n.$$

#### 3.2.2. Zjednodušený model za působení vnější síly

Při zemetřesení na budovu působí síla, která ji vychyluje z rovnovážné polohy, tu popíšeme  $F = F_0 \cos(\gamma t)$ . Aplikuje se však pouze na první patro a ne na celou budovu, proto maticový zápis má tvar

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_0$ .

Nehomogenní soustava rovnic zjednodušeného modelu má tedy tvar

$$\mathbf{X}'' = -\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F} \cos \gamma t. \quad (3.11)$$

Tato SODR2 popisuje harmonický pohyb  $n$ -patrové budovy.

Homogenní část rovnice (3.10) již máme vyřešenou. Dále vyřešíme partikulární část rovnice (3.11) pro dva případy

a)  $\gamma \neq \sqrt{\lambda_j}, \forall j$

V tomto případě hledáme partikulární řešení v tvaru

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{P} \cos \gamma t + \mathbf{Q} \sin \gamma t.$$

Po dosazení  $\mathbf{x}_p''$  za  $\mathbf{x}''$  a  $\mathbf{x}_p$  za  $\mathbf{x}$  do rovnice (3.11) dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -\gamma^2\mathbf{P} &= -\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{F} \\ -\gamma^2\mathbf{Q} &= -\mathbf{A}\mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Úpravou získáme

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A} - \gamma^2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{F}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

kde

$$\det(\mathbf{A} - \gamma^2\mathbf{E}) \neq 0.$$

Tedy výsledné partikulární řešení pro  $\gamma \neq \sqrt{\lambda}$  je tvaru

$$\mathbf{x}_p = (\mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{F} \cos \gamma t.$$

Obečné řešení pro rovnici (3.11) v tomto případě má tedy tvar

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{u}_1 + C_2 \mathbf{u}_2 + \dots + C_n \mathbf{u}_n + C_{n+1} \mathbf{v}_1 + C_{n+2} \mathbf{v}_2 + \dots + C_{2n} \mathbf{v}_n + (\mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{F} \cos \gamma t,$$

kde

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{r}_j \cos \sqrt{\lambda_j} t - \mathbf{s}_j \sin \sqrt{\lambda_j} t, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{s}_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + \mathbf{r}_j \sin \sqrt{\lambda_j} t.$$

b)  $\gamma = \sqrt{\lambda}$ , kde  $\lambda = \lambda_j$  je jedno z vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$

Jelikož homogenní rovnice má řešení tvaru

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{P} \cos \sqrt{\lambda} t + \mathbf{Q} \sin \sqrt{\lambda} t,$$

partikulární řešení musí být ve tvaru

$$\mathbf{x}_p = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 t) \cos \sqrt{\lambda} t + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 t) \sin \sqrt{\lambda} t.$$

Po dosazení  $x_p''$  za  $x''$  a  $x_p$  za  $x$  do rovnice (3.11) dostáváme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} -\lambda (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 t) + 2\sqrt{\lambda} \mathbf{Q}_2 &= -\mathbf{A} (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 t) + \mathbf{F} \\ -2\sqrt{\lambda} \mathbf{P}_2 - \lambda (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 t) &= -\mathbf{A} (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 t). \end{aligned}$$

Úpravou získáme

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 t) &= -2\sqrt{\lambda} \mathbf{Q}_2 + \mathbf{F} \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 t) &= 2\sqrt{\lambda} \mathbf{P}_2. \end{aligned}$$

Z toho dostáváme 4 rovnice:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{P}_2 = 0 \tag{1}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{Q}_2 = 0 \tag{2}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{P}_1 = -2\sqrt{\lambda} \mathbf{Q}_2 + \mathbf{F} \tag{3}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{Q}_1 = 2\sqrt{\lambda} \mathbf{P}_2 \tag{4}$$

Označme  $\mathbf{h}$  vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  k vlastnímu číslu  $\lambda$ .

Z rovnice (1) dostáváme

$$\mathbf{P}_2 = p \mathbf{h}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Z rovnice (2)

$$\mathbf{Q}_2 = q \mathbf{h}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Poté z rovnice (4) vyplývá

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{Q}_1 = 2\sqrt{\lambda} p \mathbf{h}.$$

Pak mohou nastat dva případy. Buď  $p = 0$  a  $\mathbf{Q}_1$  je vlastní vektor a nebo  $\mathbf{Q}_1$  je zobecněný vlastní vektor. Předpokládáme však, že každé vlastní číslo není násobné. Z toho plyne, že  $\mathbf{Q}_1 = q_1 \mathbf{h}$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$ . Z rovnice (3) vyplývá

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{P}_1 = -2\sqrt{\lambda} q_1 \mathbf{h} + \mathbf{F}. \tag{5}$$

### 3.2. MODEL VÍCEPATROVÉHO DOMU

Označme  $-2\sqrt{\lambda}q = q^*$ . Pokud  $\mathbf{P}^*$ ,  $q = q^*$  je řešení rovnice

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{P}^* + \mathbf{h}q^* = \mathbf{F}, \quad (6)$$

pak

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}^* + p_1\mathbf{h}, \quad q = -\frac{q^*}{2\sqrt{\lambda}}$$

je řešením rovnice (5)  $\forall p_1 \in \mathbb{R}$ .

Abychom vyřešili rovnici (6), uvažujme soustavu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^* \\ q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Ukažme nejprve, že tato soustava má právě jedno řešení. Nechť

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

pak  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} + \mathbf{h}x = \mathbf{0}$ , z toho opět dostáváme  $x = 0$ ,  $\mathbf{X} = k\mathbf{h}$ .

Dále  $\mathbf{h}^T\mathbf{X} = 0$ , z toho  $\mathbf{h}^T\mathbf{h}k = 0$ , tedy  $k = 0$ . Tedy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy  $\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & 0 \end{pmatrix}$  je regulární a soustava (7) má právě jedno řešení

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}^* \\ q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Toto řešení splňuje rovnici (6).

Tedy výsledné partikulární řešení pro  $\gamma = \sqrt{\lambda}$  je tvaru

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{P}^* \cos \sqrt{\lambda}t - \frac{q^*}{2\sqrt{\lambda}}\mathbf{h}t \sin \sqrt{\lambda}t + p_1\mathbf{h} \cos \sqrt{\lambda}t + q_1\mathbf{h} \sin \sqrt{\lambda}t, \quad p_1, q_1 \in \mathbb{R}.$$

Jako u jednopatrového modelu si můžeme všimnout, že amplitudu výchylky násobíme časem  $t$ . Tedy s rostoucím časem bude výchylka alespoň jednoho patra stoupat až do nekonečna. Tedy našli jsme frekvenci, při které nastává rezonance, pokud  $q^* \neq 0$ . Dá se dokázat, že pro takovéto  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{F}$  je  $q^*$  vždy různé od 0.

Nyní pojďme uvažovat o přesnějším modelu. Opět přidáme sílu, působící proti směru výchylky, abychom získali tlumený harmonický pohyb.

### 3.2.3. Přesnější model bez působení vnější síly

Přesnějšího modelu opět docílíme přidáním síly odpovídající odporu prostředí do každé rovnice. Jako v minulé kapitole síla má tvar  $F = -lx'$ . V maticovém zápisu tedy dostáváme

$$\mathbf{X}'' = -\mathbf{A}\mathbf{X} - 2\mathbf{B}\mathbf{X}', \quad (3.12)$$

kde  $2\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$ ,

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_n \end{pmatrix}.$$

Maticе  $\mathbf{B}$  je tedy

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{2m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{2m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{l_n}{2m_n} \end{pmatrix}.$$

Nyní hledejme řešení rovnice (3.12) ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}e^{\alpha t},$$

kde  $\mathbf{h}$  je nenulový číselný vektor (obecně komplexní).

Po zderivování a dosazení do rovnice dostáváme

$$\alpha^2 \mathbf{h}e^{\alpha t} = -\mathbf{A}\mathbf{h}e^{\alpha t} - 2\alpha \mathbf{B}\mathbf{h}e^{\alpha t}.$$

Pak

$$\alpha^2 \mathbf{h} + 2\alpha \mathbf{B}\mathbf{h} + \mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

a po vytknutí vektoru  $\mathbf{h}$  dostáváme soustavu kvadratických rovnic

$$(\alpha^2 \mathbf{E} + 2\alpha \mathbf{B} + \mathbf{A}) \mathbf{h} = \mathbf{0}.$$

Pokud dále budeme uvažovat případ, kdy hmotnosti jednotlivých pater se sobě rovnají  $m = m_1 = m_2 = \dots = m_n$  a také konstanty úměrnosti prostředí  $l = l_1 = l_2 = \dots = l_n$ , pak matici  $\mathbf{B}$  můžeme přepsat na tvar  $\mathbf{B} = 2\frac{l}{m}\mathbf{E}$ . Soustava pak má tvar

$$\left( \left( \alpha^2 + 2\frac{l}{m}\alpha \right) \mathbf{E} + \mathbf{A} \right) \mathbf{h} = \mathbf{0}.$$

Aby tato rovnice měla nenulové řešení, je potřeba (díky poznatkům z lineární algebry), aby matice  $\left( \left( \alpha^2 + 2\frac{l}{m}\alpha \right) \mathbf{E} + \mathbf{A} \right)$  byla singularární. Hodnoty  $\lambda_j = -\alpha_j^2 - \alpha_j 2\frac{l}{m}$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$ . Tedy

$$\alpha_j = -\frac{l}{m} \pm \sqrt{\frac{l^2}{m^2} - \lambda_j}.$$

Pak řešení má tvar

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{h}_j e^{-\frac{l}{m} + \sqrt{\frac{l^2}{m^2} - \lambda_j} t}, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{g}_j e^{-\frac{l}{m} - \sqrt{\frac{l^2}{m^2} - \lambda_j} t}.$$

### 3.2. MODEL VÍCEPATROVÉHO DOMU

Všechna charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou kladná, reálná a od sebe ostře oddělená. Podobně jako v jednorozměrném případě může nastat možnost, že  $\frac{l^2}{m^2} > \lambda_j$  a pak  $\alpha_j$  je reálná, ale hodnoty  $\frac{l^2}{m^2}$  bývají tak malé, že reálně tato možnost nenastane. Zaměříme se tedy pouze případem, kdy  $\frac{l^2}{m^2} < \lambda_j, \forall j$ . Hodnoty  $\sqrt{\lambda_j - \frac{l^2}{m^2}}$  nazveme *přirozené frekvence* jednotlivých pater. Pak řešení této soustavy budou ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= e^{-\frac{l}{m}t} \left( \mathbf{r}_j \cos \sqrt{\lambda_j - \frac{l^2}{m^2}}t - \mathbf{s}_j \sin \sqrt{\lambda_j - \frac{l^2}{m^2}}t \right), \\ \mathbf{v}_j &= e^{-\frac{l}{m}t} \left( \mathbf{s}_j \cos \sqrt{\lambda_j - \frac{l^2}{m^2}}t + \mathbf{r}_j \sin \sqrt{\lambda_j - \frac{l^2}{m^2}}t \right). \end{aligned}$$

Vektory  $\mathbf{r}_j$  a  $\mathbf{s}_j$  dostaneme jako reálnou a imaginární část vlastního vektoru  $\mathbf{h}_j$ . Obecné řešení je ve tvaru

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{u}_1 + C_2 \mathbf{u}_2 + \dots + C_n \mathbf{u}_n + C_{n+1} \mathbf{v}_1 + C_{n+2} \mathbf{v}_2 + \dots + C_{2n} \mathbf{v}_n.$$

#### 3.2.4. Přesnější model za působení vnější síly

Při zemětřesení na budovu působí síla, která ji vychyluje z rovnovážné polohy, tu popíšeme  $F = F_0 \cos(\gamma t)$ . Aplikuje se však pouze na první patro a ne na celou budovu, proto maticový zápis má tvar

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}_0$ .

Finální soustava rovnic má tedy tvar

$$\mathbf{X}'' = -\mathbf{A}\mathbf{X} - 2\mathbf{B}\mathbf{X}' + \mathbf{F} \cos \gamma t. \quad (3.13)$$

Tato SODR2 popisuje tlumený harmonický pohyb  $n$ -patrové budovy.

Opět uvažujme s případem, kdy hmotnosti jednotlivých pater a konstanty úměrnosti prostředí se sobě rovnají, pak tedy  $\mathbf{B} = 2\frac{l}{m}\mathbf{E}$ . Již zmíněné řešení homogenní části rovnice má tvar

$$\mathbf{x}_h = e^{-\frac{l}{m}t} \left( \mathbf{P} \cos \sqrt{\lambda_j - \frac{l^2}{m^2}}t + \mathbf{Q} \sin \sqrt{\lambda_j - \frac{l^2}{m^2}}t \right).$$

Díky tvaru rovnice (3.12) bude v našem řešení vždy figurovat člen  $e^{-\frac{l}{m}t}$  ( $\frac{l}{m} > 0$ ). Tento člen zaručí, že se výsledné homogenní řešení bude exponenciálně blížit k nule.

Pokud  $F_0$  bude konstantní, tak oproti zjednodušené rovnici (3.11) může nastat pouze jeden případ. Partikulární řešení vždy dostaneme ve tvaru součtu funkcí sinus a kosinus

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{P} \cos \gamma t + \mathbf{Q} \sin \gamma t.$$

Dále hledejme partikulární řešení. Jestliže vypočítáme první a druhou derivaci  $\mathbf{x}_p$  a dosadíme je do rovnice (3.12), pak dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} -\gamma^2 \mathbf{P} &= -\mathbf{A}\mathbf{P} - 2\gamma \frac{l}{m} \mathbf{Q} + \mathbf{F} \\ -\gamma^2 \mathbf{Q} &= -\mathbf{A}\mathbf{Q} + 2\gamma \frac{l}{m} \mathbf{P} \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= (\mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{E}) \left( \left( \frac{2\gamma l}{m} \right)^2 \mathbf{E} + (\mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{E})^2 \right)^{-1} \mathbf{F}, \\ \mathbf{Q} &= \left( \left( \frac{2\gamma l}{m} \right)^2 \mathbf{E} + (\mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{E})^2 \right)^{-1} 2\mathbf{F}\gamma \frac{l}{m}.\end{aligned}$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$\begin{aligned}x_p &= (\mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{E}) \left( \left( \frac{2\gamma l}{m} \right)^2 \mathbf{E} + (\mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{E})^2 \right)^{-1} \mathbf{F} \cos \gamma t + \\ &+ \left( \left( \frac{2\gamma l}{m} \right)^2 \mathbf{E} + (\mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{E})^2 \right)^{-1} 2\mathbf{F}\gamma \frac{l}{m} \sin \gamma t.\end{aligned}$$

Díky identitě (3.6) lze partikulární řešení přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p &= \mathbf{P} \cos \gamma t + \mathbf{Q} \sin \gamma t = \begin{pmatrix} p_1 \cos \gamma t + q_1 \sin \gamma t \\ \vdots \\ p_n \cos \gamma t + q_n \sin \gamma t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{p_1^2 + q_1^2} \sin \left( \gamma t + \arctan \frac{p_1}{q_1} \right) \\ \vdots \\ \sqrt{p_n^2 + q_n^2} \sin \left( \gamma t + \arctan \frac{p_n}{q_n} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \sin (\gamma t + \phi_1) \\ \vdots \\ A_n \sin (\gamma t + \phi_n) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Tedy amplitudy zemětřesení jsou

$$\mathbf{A}_j = \sqrt{p_j^2 + q_j^2}.$$

Maximum  $\mathbf{A}_j$  nalezneme vyřešením

$$\left[ \text{diag} (\mathbf{P}\mathbf{P}^T + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)' \right]_j = 0.$$



## 4. Aplikace na konkrétním příkladu

Pro příklad využijeme parametrů skutečné 3-patrové budovy. Stěny tohoto domu jsou postaveny ze svisle děrovaných cihel Porotherm 30 AKU SYM, díky kterým je tuhost všech pater

$$k = k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 4,5 \cdot 10^6 \frac{N}{m}.$$

Při použití více pilířů (nebo nosných stěn) v jednom patře budeme celkovou tuhost uvažovat jako součet tuhostí jednotlivých pilířů  $k = \sum_{i=1}^j k_i$ . Konstanta  $j$  v tomto případě značí počet pilířů v jednotlivých patrech. Tato konstanta především záleží na rozloze budovy. V našem případě budeme uvažovat 2 nosné stěny, tedy  $j = 2$ . Tedy

$$k = 9 \cdot 10^6 \frac{N}{m}.$$

Zatížení jednotlivých pater je

$$m = m_1 = m_2 = m_3 = 6,2 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

Dále potřebujeme konstantu úměrnosti prostředí, pro vzduch ze běžného atmosférického tlaku a normální teploty má hodnotu

$$l_{vzduch} = 5,4 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{s}.$$

Budeme uvažovat, že tato hodnota je konstantní pro všechny patra, při změně několika metrů je pro vzduch změna  $l_i$  zanedbatelná.

Pro hodnoty zemětřesení použijeme hodnotu frekvence

$$\gamma = 0,5 \text{ Hz}$$

jako nejčastěji se vyskytující se frekvence zemětřesení. Amplitudu zemětřesení zvolíme hodnotu pro středně silné zemětřesení

$$F_0 = 1000 \text{ N}.$$

### 4.1. Zjednodušený model za působení vnější síly

Z části 3.2.2 již víme, že daný problém popíšeme soustavou

$$\mathbf{X}'' = -\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F} \cos \gamma t.$$

Tedy

$$\mathbf{A} = 1452 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0,1613 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{pmatrix} \cos \frac{t}{2}.$$

#### 4. APLIKACE NA KONKRÉTNÍM PŘÍKLADU

Nejdříve vypočítáme vlastní čísla pro matici  $\mathbf{A}$ , ty nabývají hodnot

$$\lambda = 10^3 \begin{pmatrix} 0,2875 \\ 2,2572 \\ 4,7134 \end{pmatrix}.$$

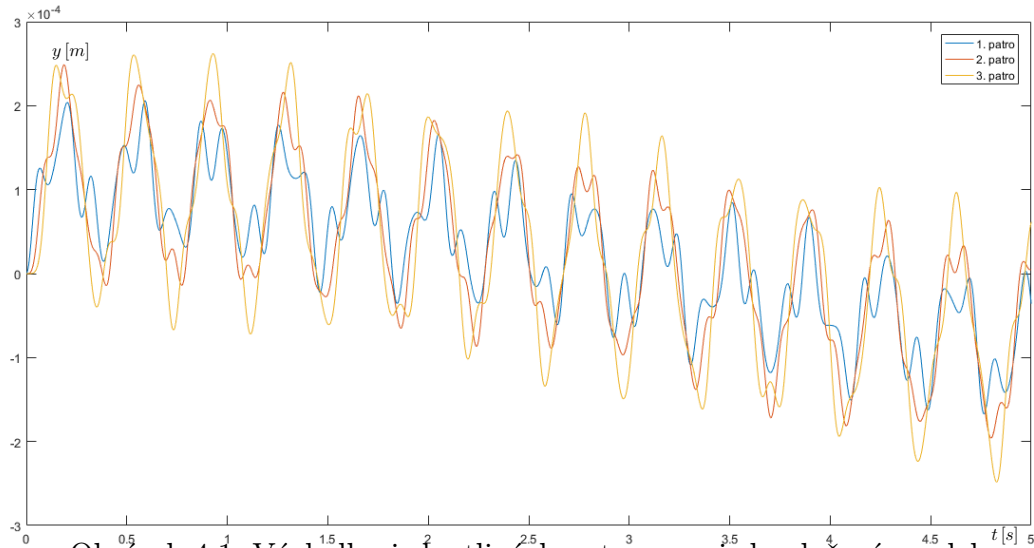
Z teorie již víme, že *přirozené frekvence* jednotlivých pater získáme jako odmocninu z jednotlivých vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$

$$\sqrt{\lambda} = \begin{pmatrix} 16,9561 \\ 47,5100 \\ 68,6539 \end{pmatrix} \text{ Hz}.$$

Převrácenou hodnotou *přirozených frekvencí* jednotlivých pater získáme jejich periodu  $\mathbf{T}$

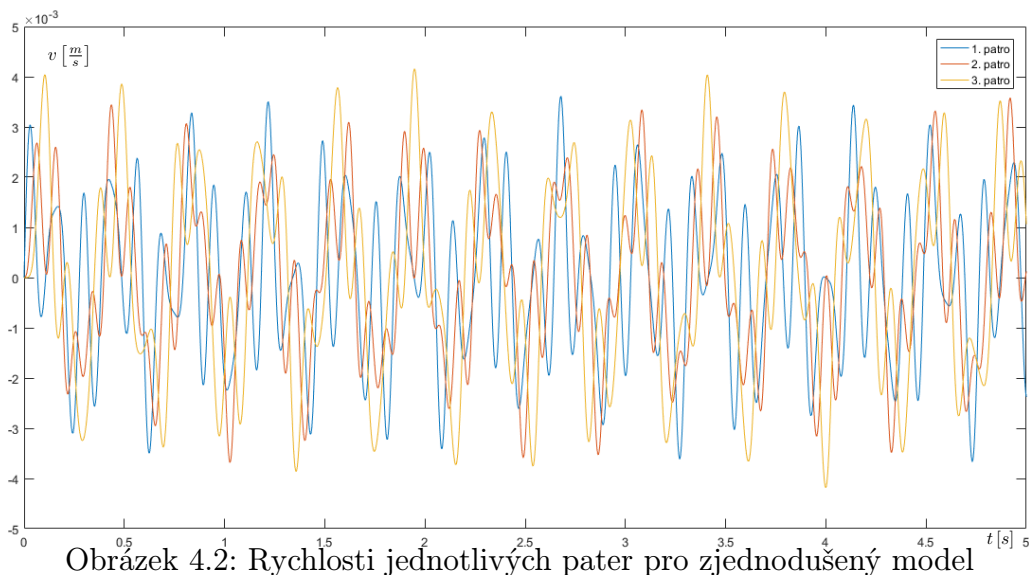
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,0590 \\ 0,0210 \\ 0,0146 \end{pmatrix} \text{ s}.$$

Už na první pohled vidíme, že *přirozená frekvence* pater domu a frekvence zemětřesení se sobě ani neblíží. Z teorie tedy nečekáme přítomnost *rezonance* a budova by se tedy neměla moc vychýlit ze své rovnovážné polohy.



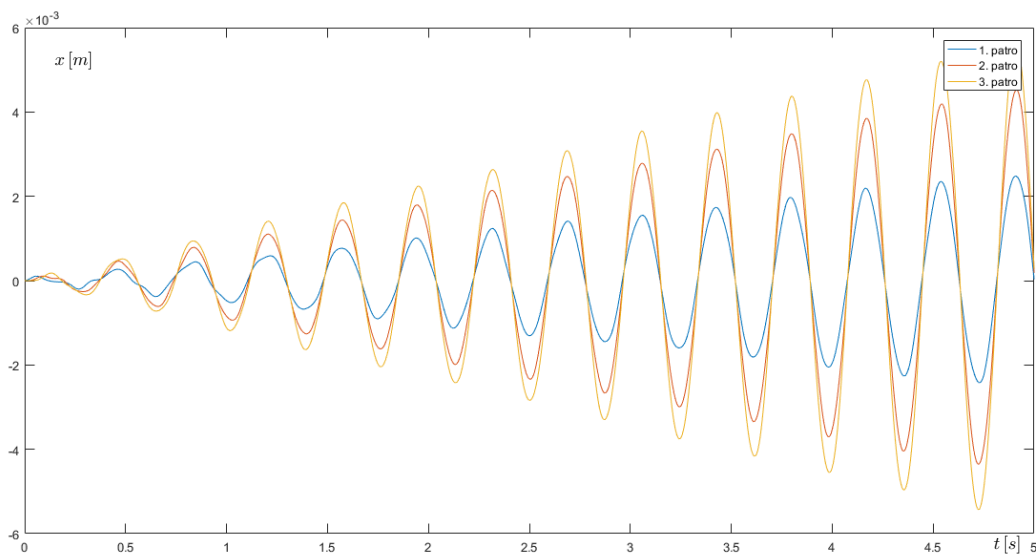
Obrázek 4.1: Výchylky jednotlivých pater pro zjednodušený model

#### 4.1. ZJEDNODUŠENÝ MODEL ZA PŮSOBENÍ VNĚJŠÍ SÍLY

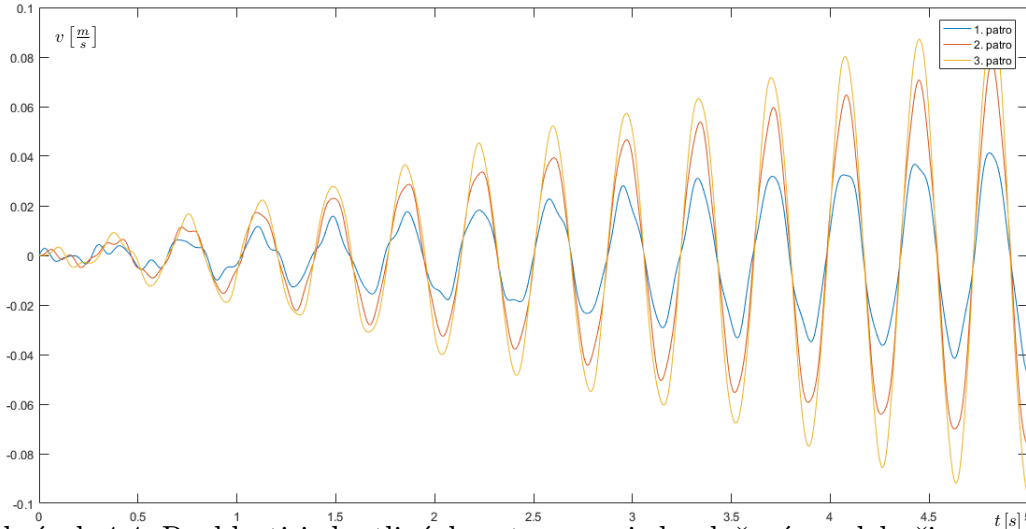


Obrázky 4.1 a 4.2 popisují řešení průběhu výchylek a rychlostí jednotlivých pater pro zadaný příklad. Z obrázku 4.1 je dobře vidět, že výchylky budovy jsou v řádu  $10^{-4}$  m. Tedy výchylky jednotlivých pater budou opravdu malé a neměli by způsobit žádné větší škody. Velikost výchylek je zejména daná velkou hodnotou podílu  $\frac{k}{m}$  a velikostí amplitudy zemětřesení  $\mathbf{F}$ .

Kdyby však frekvence zemětřesení byla stejná jako jedna z *přirozených frekvencí* patra budovy, pak by došlo k *rezonanci* a jednotlivé výchylky pater budovy by postupem času rostli přes všechny meze.



#### 4. APLIKACE NA KONKRÉTNÍM PŘÍKLADU



Obrázek 4.4: Rychlosti jednotlivých pater pro zjednodušený model při rezonanci

Obrázky 4.3 a 4.4 popisují řešení průběhu výchylek a rychlostí jednotlivých pater pro případ, kdy by frekvence zemětřesení byla  $\gamma = 16,9561 \text{ Hz}$ .

### 4.2. Přesnější model za působení vnější síly

Z části 3.2.4 již víme, že daný problém popíšeme soustavou

$$\mathbf{X}'' = -\mathbf{A}\mathbf{X} - 2\mathbf{B}\mathbf{X}' + \mathbf{F} \cos \gamma t.$$

Tedy

$$\mathbf{A} = 1452 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = 4,3548 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0,1613 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{pmatrix} \cos \frac{t}{2}.$$

Nejdříve vypočítáme vlastní čísla pro matici  $\mathbf{A}$ , ty nabývají hodnot

$$\lambda = 10^3 \begin{pmatrix} 0,2875 \\ 2,2572 \\ 4,7134 \end{pmatrix}.$$

Z teorie již víme, že *přirozené frekvence* jednotlivých pater získáme ze vzorce  $\sqrt{\lambda - \frac{l^2}{m^2}}$ , tedy

$$\sqrt{\lambda - \frac{l^2}{m^2}} = \begin{pmatrix} 16,9561 \\ 47,5100 \\ 68,6539 \end{pmatrix} \text{ Hz}.$$

#### 4.2. PŘESNĚJŠÍ MODEL ZA PŮSOBENÍ VNĚJŠÍ SÍLY

Také perioda  $T$  má stejné hodnoty jako u zjednodušeného modelu

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,0590 \\ 0,0210 \\ 0,0146 \end{pmatrix} s.$$

Pokud porovnáme tyto hodnoty s hodnotami  $\sqrt{\lambda}$ , tak vidíme, že se na prvních čtyřech desetinných místech neliší. Je to způsobeno malou hodnotou konstantu úměrnosti prostředí pro vzduch  $l_{vzduch}$  a v porovnání velkou hmotností patra budovy  $m$ . Tato změna je dokonce tak malá, že při řešení tohoto problému dostáváme stejné hodnoty a stejné průběhy výchylek a rychlostí jednotlivých pater. Pro řešení tohoto problému je tedy více než dostačující řešit pouze případ pro zjednodušený problém.

## 5. Závěr

Jeden z cílů této práce bylo sestavení systémů diferenciálních rovnic druhého řádu, které modelují účinky zemětřesení na vícepatrovou budovu v horizontálním směru. To bylo provedeno v kapitole 3. Nejdříve se odvodil pouze zjednodušený model, který se dále rozvíjel, až jsme dostali obecnou podobu tohoto systému. Tento model jsme začali pro jednopatrovou budovu

Druhým cílem byla analýza těchto systémů a výpočet přirozených frekvencí a period budov vzhledem k jejich parametrům. Tato analýza byla provedena z části v kapitole kapitole 3., další část byla v kapitole 4. při samotném řešení na konkrétním příkladu.

Ve čtvrté kapitole byl řešen konkrétním příklad. Řešila se reálná 3-patrová budova. Nejprve se hledali hodnoty přirozených frekvencí jednotlivých pater, dále samotné řešení výchylek a rychlostí jednotlivých pater. Pro názornost se dále vyřešil příklad, kdy se použila jedna z přirozených frekvencí jako frekvence zemětřesení. Výsledné řešení, podle očekávání, rezonovalo. Dále se řešil ten samý příklad, pouze přesnějším modelem. Kvůli hodnotám prostředí se však ukázalo, že výsledná řešení se liší tak málo, že to ani nelze poznat. Tedy pro kontrolu výchylek budovy je zcela postačující použít zjednodušený model. Výpočty a obrázky v této kapitole byly provedeny v programu Matlab.

Vlastním přínosem autora byla zejména analýza přesnějšího modelu pro vícepatrovou budovu, která v knihách není nebo je málo řešena.

# Literatura

- [1] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [2] DIBLÍK, Josef a Miroslava RŮŽIČKOVÁ. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Žilina: EDIS, 2008. ISBN 978-80-8070-891-7.
- [3] FERTIS, Demeter G. *Dynamics and vibration of structures*. New York: Wiley, 1973. ISBN 0-471-25777-x.
- [4] ZILL, Dennis G. *A first course in differential equations with modeling applications*. 10th ed. Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning, c2013. ISBN 978-1-111-82705-2.

## 6. Seznam použitých zkratek a symbolů

ODR1	obyčejná diferenciální rovnice 1-řádu
ODR $n$	obyčejná diferenciální rovnice $n$ -řádu
SODR1	soustava obyčejných diferenciálních rovnic 1-řádu
SODR $n$	soustava obyčejných diferenciálních rovnic $n$ -řádu
$a = x''(t)$	zrychlení
$F$	síla
$k$	tuhost
$l$	konstanta úměrnosti prostředí
$m$	hmotnost
$t$	čas
$T$	perioda
$x(t)$	výchylka
$\gamma$	přirozená frekvence zemětřesení
$\lambda$	kořen charakteristického polynomu