

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Optimalizace skladových zásob údržby v  
Miele technika s.r.o.



**Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky**

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Tomáš Fürst, Ph.D.**

Vypracoval(a): **Bc. Rostislav Abraham**

Studijní program: N0541A170026 – Aplikovaná matematika

Studijní obor: Aplikovaná matematika

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2024

## BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** Bc. Rostislav Abraham

**Název práce:** Optimalizace skladových zásob údržby v Miele technika s.r.o.

**Typ práce:** Diplomová práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** RNDr. Tomáš Fůrst, Ph.D.

**Rok obhajoby práce:** 2024

**Abstrakt:** Cílem diplomové práce je modelovat odběr materiálu ze skladu náhradních dílů s následným doporučením optimální hladiny u jednotlivých položek. Důraz je kladen na zabránění „stock-outu“, tj. situace, kdy firma nemá díly v potřebném čase.

**Klíčová slova:** spotřeba, model, stock-out, optimální hladina, údržba, náhradní díly

**Počet stran:** 55

**Počet příloh:** 1

**Jazyk:** český

## BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** Bc. Rostislav Abraham

**Title:** Inventory optimization of Maintenance in Miele technika s.r.o.

**Type of thesis:** Master's

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

**Supervisor:** RNDr. Tomáš Fürst, Ph.D.

**The year of presentation:** 2024

**Abstract:** The aim of the thesis is to model consumption of material (spare parts) used by Maintenance Department of Miele Technika s.r.o. and subsequently to recommend optimal levels for individual items. The focus is to avoid "stock-out", which is a situation where the company does not have parts in time.

**Key words:** consumption, model, stock-out, optimal level, maintenance, spare parts

**Number of pages:** 55

**Number of appendices:** 1

**Language:** Czech

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně pod vedením RNDr. Tomáše Fürsta, Ph.D., a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne .....  
.....  
podpis

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>1 Miele technika s.r.o.</b>	<b>10</b>
<b>2 Průzkumová analýza</b>	<b>11</b>
2.1 Data a jejich struktura . . . . .	11
2.1.1 Pohyby na skladě . . . . .	11
2.1.2 Stav na skladě . . . . .	13
2.1.3 A díly . . . . .	14
2.2 Data dle počtu odběrů . . . . .	14
2.3 Pohled na odběry v čase . . . . .	16
2.4 Průměrný počet kusů v jednom odběru a průměrný počet kusů na skladě . . . . .	17
2.5 Grafy vývoje počtu kusů na skladě . . . . .	20
<b>3 Teoretická část</b>	<b>22</b>
3.1 Základní pojmy . . . . .	22
3.2 Odvození rozdělení počtu odběrů za určitý časový úsek . . . . .	29
3.3 Konkrétní příklad . . . . .	33
<b>4 Modely</b>	<b>34</b>
4.1 Model 1 . . . . .	36
4.2 Další modely . . . . .	39
4.2.1 Doporučené množství k objednávání . . . . .	39
4.2.2 Minimální hladiny počtu kusů na skladě . . . . .	40
4.3 Srovnání modelů . . . . .	46
<b>Závěr</b>	<b>49</b>
<b>Seznam obrázků a grafů</b>	<b>51</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>52</b>
<b>Přílohy</b>	<b>53</b>



## **Poděkování**

Rád bych poděkoval vedoucímu své diplomové práce RNDr. Tomášovi Fůrstovi, Ph.D., za trpělivost, ochotu, vstřícnost a profesionalitu na konzultačních hodinách a za cenné rady při psaní této práce.

# Úvod

Řízení skladových zásob v jednotlivých odděleních firem je důležitý, zároveň ale složitý úkol. V malých firmách tato problematika nemusí být náročná a řízení skladu může provádět třeba i jediný zaměstnanec. Náročnost tohoto úkolu ale pochopitelně roste s velikostí firmy, která pak může mít i více skladů. Zároveň s velikostí firmy roste například i počet strojů a úměrně tomu se musí zvyšovat zásoby nejen materiálu, který se používá ve výrobě, ale i náhradních dílů, které lze často najít na skladu údržby.

Cena zastavení výroby je často velmi vysoká a firma se chce vyhnout stock-outu, což je situace, kdy firma potřebuje materiál, který v té chvíli ale nemá na skladě. V takovém případě se výroba musí zastavit. Na druhé straně problému je ale omezená velikost skladu. Nakupovat vysoké množství každého typu materiálu by bylo náročné nejen prostorově, ale i finančně. V případě například pryžových částí by mohlo dojít i k tomu, že se materiál nepoužije dostatečně často, zkaží se a bude nutné ho zlikvidovat a nakoupit nový. Je proto rozumné modelovat spotřebu materiálu a následně doporučit množství, při kterém se udělá nová objednávka. I ono dokupované množství je nutné volit chytře, jelikož samotná doprava stojí nějaké peníze a ve většině případů proto není rozumné objednávat materiál každý druhý den.

Více informací než matematické modelování zásob může ale firmám často poskytnout dobrá vizualizace skladových dat. Tuto možnost totiž systémy řídicí sklad nemusí umět nabídnout. Zároveň takové grafické zpracování řekne zaměstnancům firmy, kteří už znají výrobní procesy a jednotlivý materiál, více než někomu, kdo ve firmě nepracuje a nedokáže si proto pod daty představit něco konkrétního (např. přístroje, na kterých se materiál používá, rozměry materiálu, atd.).



Dalším problémem, který se více projevuje u větších firem, je materiál, který se přestane používat, popřípadě se nahradí jiným (levnějším, novějším) typem. Při velkém počtu různých materiálů se na ten nepoužívaný může zapomenout. Ten pak zabírá místo na skladu a zároveň může časem ztrácet hodnotu. Rozumné je tedy takový materiál identifikovat a následně s ním nějak naložit – například ho prodat.

V této práci nejdříve krátce představím výrobní závod Miele technika s.r.o., následně uvedu různé možnosti vizualizace dat ze skladu údržby a také se pokusím vytipovat takový materiál, který se nejspíš už přestal používat a bylo by rozumné prověřit, zda tomu tak skutečně je, a následně ho například prodat. Zbytek práce je věnován modelování spotřeby nejvíce používaného materiálu. Navrhnou a následně srovnám několik modelů řízení skladových zásob. Tyto modely budou spočívat v různém způsobu výpočtu optimálních hladin.

# Kapitola 1

## Miele technika s.r.o.

Miele technika s.r.o. je největším závodem německé rodinné firmy Miele & Cie. KG, která byla založena už v roce 1899 pány Carlem Mielem a Reinhardem Zinkannem a její sídlo se nachází v městě Gütersloh.



Obrázek 1.1: Logo firmy Miele [1]

Tento výrobní závod se nachází v Uničově a zahájení jeho výstavby započalo v roce 2003. V průběhu let byla výroba rozšířena o několik výrobních hal a původní sortiment praček a sušiček se rozrostl o výrobu myček nádobí, bubnů pro sušičky a mnoho dalšího. V závodu pracuje přes 2000 zaměstnanců, z nichž přibližně 85% má dělnickou pozici.

Firma podporuje různými způsoby mladé talenty a nabízí jak středoškolské, tak i vysokoškolské praxe.

# Kapitola 2

## Průzkumová analýza

Cílem této kapitoly bude seznámit čtenáře se strukturou dat skladu údržby v Miele technika s.r.o., rozumně data graficky zpracovat a identifikovat například položky, které se dlouhou dobu nepoužily a je tedy možné, že už se nepoužívají a nemá cenu je držet na skladě, či položky, které mají ve velkém nepoměru průměrný počet odebíraných kusů a průměrný počet kusů na skladě. Sklad má několik tisíc různých typů materiálu a programy používané v rámci firmy nedokáží skladová data vizualizovat. I jednoduché zobrazení dat proto může zásadně pomoci ve vedení skladu.

### 2.1. Data a jejich struktura

K dispozici mám celkem tři soubory. Nyní čtenáře s daty seznámím a popíši, co jednotlivé proměnné představují.

#### 2.1.1. Pohyby na skladě

V prvním souboru (tím je Pohyby\_na\_sklade.xlsx) se nacházejí data o pohybech na skladě za dobu od 6.9.2021 do 6.9.2023. Soubor obsahuje 11500 řádků a 4 sloupce (Materiál, Zakázka, Datum účtování, Množství v MJZM), jejichž obsah dále přiblížím.

V prvním zmíněném sloupci se nachází kód materiálu. Jedná se o unikátní identifikátor. Takových identifikátorů je v tomto souboru celkem 1822.

Následující sloupec obsahuje informaci o zakázce. Z tohoto sloupce se dá získat jedna důležitá informace a tou je skutečnost, zda se jedná o odběr na projekt – může se jednat například o stavbu nové linky. O odběr na projekt se jedná ve chvíli, kdy číslo v tomto sloupci začíná číslicemi 57. V případě projektu skladník o odběru dopředu ví a objedná si kusy zvlášť a s předstihem. Nebylo by tedy rozumné takové řádky v modelování spotřeby uvažovat a neuvažují je ani v této kapitole, aby měly grafy a například informace o časem váženém průměrném počtu na skladě větší výpovědní hodnotu.

Ve třetím sloupci je obsažena informace o datu účtování. Jedná se o odběry za celkem 2 roky. V kódu si formát datumu převedu na formát číselný, aby se nám s ním lépe pracovalo.

V posledním sloupci je obsažena informace o obdržení či odebraném množství. V případě přijatého materiálu je hodnota ve sloupci kladná, pokud je hodnota záporná, tak to značí odběr ze skladu.

	A	B	C	D
1	<b>Materiál</b>	<b>Zakázka</b>	<b>Datum účtování</b>	<b>Množství v MJZM</b>
2	D4986	90945	30.08.2023	-1
3	D50231		30.08.2023	2000
4	D50515	5726	30.08.2023	-1
5	D50716		30.08.2023	2
6	D50850		30.08.2023	-2
7	D50851		30.08.2023	-2
8	D51140		30.08.2023	5
9	D51197	5726	30.08.2023	-1
10	D51357		30.08.2023	20
11	D51711	91175	30.08.2023	-10
12	D51738	91175	30.08.2023	-1
13	D51738	91175	30.08.2023	-4

**Obrázek 2.1:** Struktura souboru Pohyby\_na\_sklade.xlsx

Pro lepší pochopení ještě popíšu první dva řádky. První řádek znamená, že se materiál D4986 odebral 30. srpna 2023 v množství 1 kus. Ten byl použit na zakázku 90945. Druhý řádek zase říká, že 30. srpna 2023 přišlo na sklad 2000 kusů položky D50231.

Po konzultaci se skladníkem se jevílo jako rozumné ještě dodatečně záznamy upravit tak, aby v každý den proběhl maximálně jeden odběr a maximálně jeden příjem. Někdy se totiž stane, že se počet kusů v příjmu či odběru zapíše chybně a proto se potom musí udělat druhý záznam, aby počet kusů v systému seděl s realitou (záznam bohužel nejde jenom přepsat v SAPu). Pokud bych tak neučinil, tak by se uměle počet odběrů navýšil a bohužel není možné chybné zápisy rozlišit od těch správných. Pokud se tedy jeden typ materiálu odebral dvakrát v jeden den v počtech například 4 a 6, tak druhý záznam odstraním a u prvního změním počet odebraných kusů na 10.

### **2.1.2. Stav na skladě**

V druhém souboru, kterým je ZasobaSkladu.xlsx, používám pouze 2 sloupce. Je tím znovu kód materiálu, který spojuje informace z prvního a druhého souboru, a stav na skladu (tj. počet kusů) k poslednímu dni, tj. 6.9.2023. Díky němu jsem schopen dopočítat počty kusů na skladě v jednotlivých dnech, časem vážené průměrné kusy na skladě a také například sestavit grafy popisující vývoj na skladě za poslední 2 roky.

Na skladě je evidováno celkem 3873 položek. Je tedy zřejmé, že budou existovat položky, které v seznamu položek na skladě už nejsou, ale v minulosti se použily, ale i takové, které na skladě jsou a nepoužily se. První zmíněné není třeba uvažovat, protože už byly vyřazeny. Seznam druhých zmíněných lze najít v příloze, je jich ale poměrně dost (přes 2000) a nebude je jednoduché protřídit. Mohou to totiž být takové díly, které se kazí velmi pomalu a proto nebylo třeba je dlouhou dobu vyměňovat. Zároveň tam ale budou i díly, které už se přestaly používat, ale zapomnělo se na ně a stále leží na skladě.

	A	B
1	<b>Materiál</b>	<b>Volně použitelná</b>
2	A8880	4
3	A8912	2
4	B2638	46
5	B2639	53
6	B2655	0
7	B4512	1
8	B6163	1
9	C6512	5
10	D10001	40
11	D10002	25
12	D10003	4

Obrázek 2.2: Struktura souboru ZasobaSkladu.xlsx

### 2.1.3. A díly

Posledním souborem je seznam „A dílů“. Mělo by se jednat o materiál, který je nějakým způsobem stěžejní pro údržbu. Později se ale ukázalo, že tam jsou i položky, které tak důležité nejsou, zároveň seznam ale neobsahuje některé položky, které by tam být měly. Pozornost takovým položkám tedy nebude kladena o moc větší než ostatním.

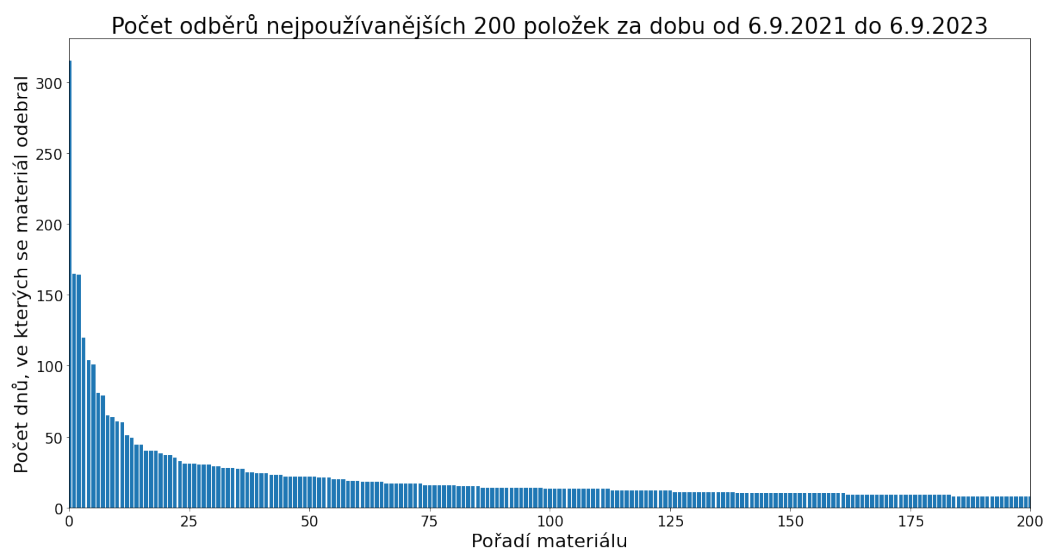
Důležité je ale zmínit, že už jen toto zjištění je jistým krokem vpřed. Jde totiž o impuls zrevidovat seznam A dílů, díky čemuž může být v budoucnosti věnováno více pozornosti dílům, které jsou pro chod strojů skutečně zcela nezbytné.

## 2.2. Data dle počtu odběrů

Důležitou informací, kterou jsem z prvního souboru schopen získat, je počet odběrů jednotlivých materiálů (tj. kolikrát se materiál použil). Z následujícího grafu (2.3) lze vidět, že většina materiálu se používá jen zřídka (pouze několikrát za rok, některé dokonce i méně) a pokles v počtu použití je velmi

rychlý. Později (v kapitole 4) se budu zabývat jen takovými materiály, které se odebraly v dostatečném počtu (průměrně aspoň jednou za dva měsíce). Pouze 6 položek se za poslední 2 roky použilo více než 100krát a jen 139 se jich odebralo více než desetkrát. Už nyní lze tedy vidět, že většina položek se nepoužívá moc často. Počet odběrů je jeden z faktorů, který pomůže identifikovat „ležáky“ – materiál, který se už nepoužívá (buď kvůli tomu, že byl nahrazen novějším, nebo třeba kvůli tomu, že se jednalo o součástku na stroj, který už se nepoužívá vůbec). To může firmě pomoci tím, že takový materiál může třeba prodat, čímž se jí na skladě uvolní místo a zároveň získá finanční prostředky.

Třemi nejpoužívanějšími materiály jsou konkrétně D51711, D70677 a D50851.



**Obrázek 2.3:** Počet odběrů nejpoužívanějších 200 položek

Paretovo pravidlo, známé také jako pravidlo 80/20, nám říká, že 20% důvodů způsobuje 80% důsledků. V tomto případě by se to dalo interpretovat tak, že 80% všech odběrů ze skladu způsobuje právě 20% nejvíce odebíraných položek. V datech je tomu tak, že 20% nejpoužívanějšího materiálu způsobilo přibližně 70% všech odběrů. V této práci se i z tohoto důvodu zajímám o právě ty nejvíce používané položky.

## 2.3. Pohled na odběry v čase

V této podkapitole se podívám na odběry jednotlivých položek v čase.

Pro A díly je graf zobrazen níže (obrázek 2.4). Lze zde vidět například to, že některé díly se používají spolu – může se jednat třeba o pravidelné výměny, ale může to být tím, že jsou položky komplementární a nedá se vyměnit pouze jedna. Zajímavější je ale pozorovat, že některé se už nepoužily delší dobu, popřípadě vůbec.

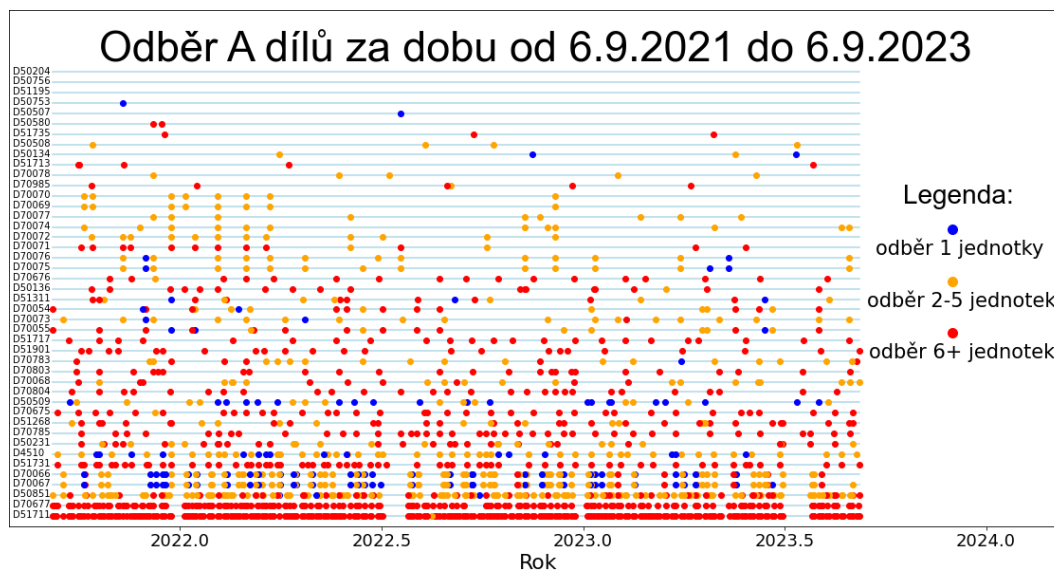
Obdobný graf jsem vytvořil i pro všechny položky, které se odebraly alespoň jednou. Je poměrně dlouhý a proto bude obsažen až v příloze, nikoliv v samotném textu práce. Je ale rozumné zmínit, jakým způsobem jsou v něm položky seřazeny. Nejprve jsou seřazeny podle počtu použití a poté podle času posledního odběru. Lze tak dobře vidět, které položky se používaly častěji a poté už se nepoužily dlouhou dobu.

Bude se nejspíše jednat o zmíněné „ležáky“, ale to už budou muset ověřit zaměstnanci firmy, kteří mají o jednotlivých typech materiálu expertní znalost – ta bohužel není obsažena v datech.

Z tohoto grafu nelze získat mnoho informací o materiálu, který se používá často. To ale nevadí, jelikož se jeho modelováním budu zabírat později zvlášť.

Příloha 1 navíc obsahuje seznam, ve kterém jsou uvedeny všechny položky, které se nepoužily déle než rok. To ale nemusí nutně znamenat, že už se nepoužívají vůbec. Proto lze v příloze najít také seznam takových položek, které se v prvním roce použily aspoň třikrát a v druhém roce se nepoužily vůbec. U těch se dá spíše očekávat, že došlo k jejich nahrazení jiným a novějším typem materiálu, případně se přestaly používat úplně.





Obrázek 2.4: Odběry A dílů (viz kapitola 2.1.3.) za poslední 2 roky

## 2.4. Průměrný počet kusů v jednom odběru a průměrný počet kusů na skladě

Dalším způsobem, jak se podívat na data a identifikovat potenciálně problematické položky, je využít informaci o průměrném počtu kusů odebraných při jednom odběru a o časem váženém průměrném počtu kusů na skladě. Dalo by se očekávat, že první zmíněný by měl být menší než ten druhý, jelikož v opačném případě by mohlo často docházet ke stock-outu. To je situace, kdy firma potřebuje nějaký materiál, ten ale není v dostatečném počtu na skladě a musí se tedy čekat na jeho dodávku.

Průměrný počet kusů odebraných v jednom odběru není složité spočítat pomocí vzorce

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \quad (2.1)$$

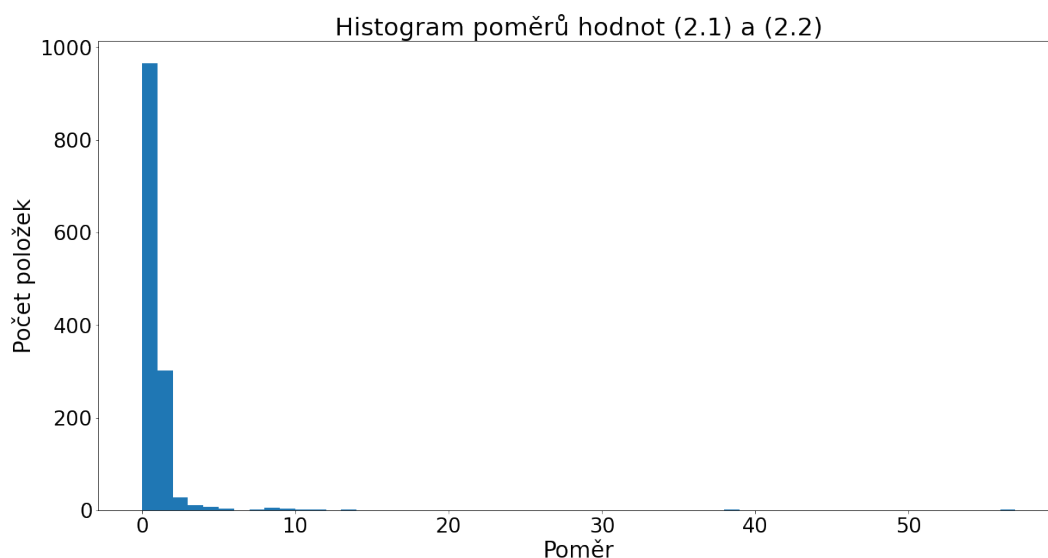
kde  $n$  je počet odběrů a  $m_i$  je počet kusů odebraných v  $i$ -tém odběru.

Časem vážený průměrný počet kusů na skladě lze získat ze vztahu

$$\frac{1}{t_{n+1} - t_0} \sum_{i=0}^n s_i \cdot (t_{i+1} - t_i), \quad (2.2)$$

kde  $s_i$  je počet kusů na skladě mezi časy  $t_i$  a  $t_{i+1}$ . Hodnota  $t_i$  představuje čas, při kterém nastal  $i$ -tý odběr. Dodefinovat je třeba  $t_0$ , což je začátek sledované doby (první datum v datech), a  $t_{n+1}$ , což je její konec.

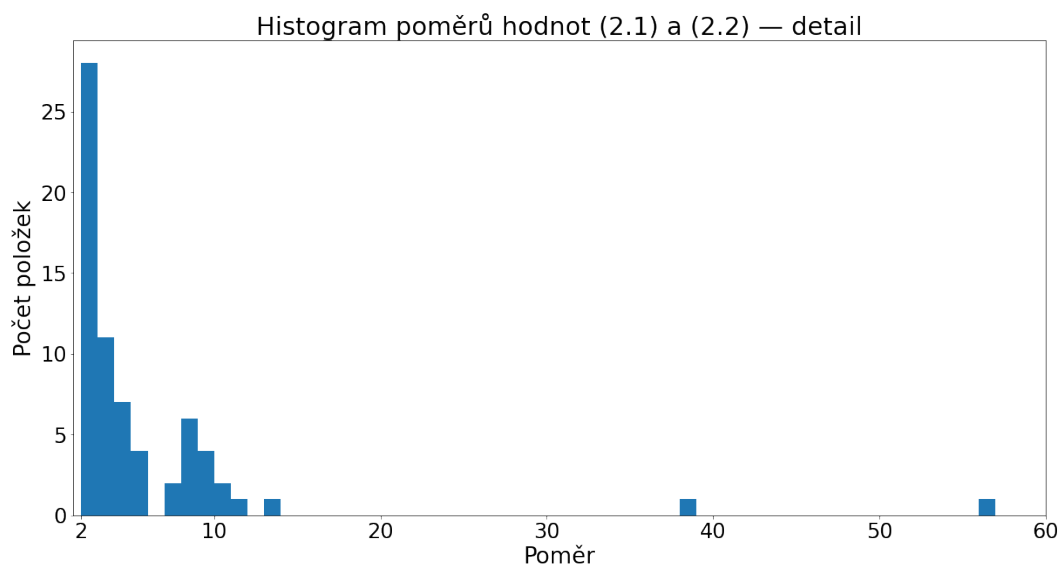
Tyto hodnoty jsem vypočítal pro všechny materiál evidovaný na skladě, který se použil alespoň jednou (až na takový, který se používal jenom na projekty – ten nemá význam uvažovat) a následně si mohu vykreslit histogram poměrů těchto dvou hodnot (v takovém pořadí, v jakém jsou uvedené v textu):



**Obrázek 2.5:** Histogram poměrů vypočtených hodnot

Není překvapivé, že většina vypočítaných poměrů je menší než jedna – to totiž znamená, že časem vážený průměrný počet kusů na skladě je větší než průměrný počet kusů odebraných v jednom odběru. Jinými slovy to lze interpretovat i tak, že v průměru je na skladě více kusů, než kolik se v průměru naráz odebírá.

Konkrétně je tento poměr v intervalu  $[0, 1)$  u 965 položek z celkových 1335, dále pak 302 položek má hodnotu tohoto poměru mezi čísly 1 a 2. Znepokojivé hodnoty (například větší než dva) jsou u 68 položek.



**Obrázek 2.6:** Histogram poměrů vypočtených hodnot – detail

Část z nich není složité vysvětlit – jedná se o takový materiál, který se postupně dobral a na skladě je nyní v počtu 0. Firma ho už tedy nedokupuje, jelikož se přestal používat.

Zbývá celkem 26 položek, jejichž seznam bude možné najít v příloze. Některé z nich mají vysoký poměr kvůli tomu, že se začaly používat teprve nedávno, kvůli čemuž je jejich časem vážený průměrný počet kusů na skladě nízký.

Položky s největším poměrem jsou D71223, D52156 a D52147. První zmíněná je v nulovém množství na skladě, tudíž se nejspíš přestala používat a už se neobjednává. Druhý a třetí zmíněný materiál se začal používat teprve nedávno a časem vážené průměrné množství na skladě je proto uměle zvýšené, žádný problém ale nejspíše nenastal.

Pro pracovníka firmy by nemělo být složité takový nízký počet položek projít a ověřit, zda se jedná o ležáky, nebo zda například nastal problém v nastavení hladin pro objednávání.

## 2.5. Grafy vývoje počtu kusů na skladě

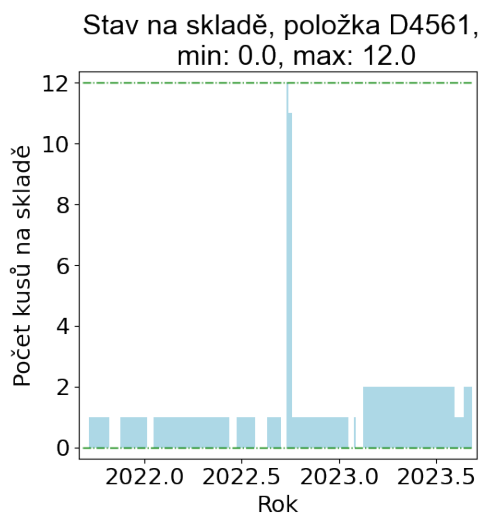
V poslední podkapitole se pokusím veškerá skladová data jednoduše zanást do grafů. Jak už bylo zmíněno na začátku kapitoly, SAP bohužel vizualizovat skladová data nedokáže.

V příloze proto budou grafy zobrazující stav na skladě v průběhu posledních 2 let pro všechny položky, které se použily aspoň jednou na neprojektovou zakázku. Zároveň nezobrazují položky, které měly v průběhu posledních 2 let na skladě žádný nebo 1 kus (na skladě je jen jeden kus a pokud se použije, tak se dokoupí znovu jeden – takové položky nejsou z hlediska modelování spotřeby zajímavé a není potřeba poskytnout žádnou radu ohledně optimálních hladin, protože takto nastavené množství je kvůli velkým rozměrům materiálu či jeho ceně).

Jedná se o celkem 5 souborů, každý obsahuje přibližně 240 grafů zobrazujících počet kusů na skladě v posledních 2 letech. Položky jsou pro větší přehlednost seřazeny abecedně.

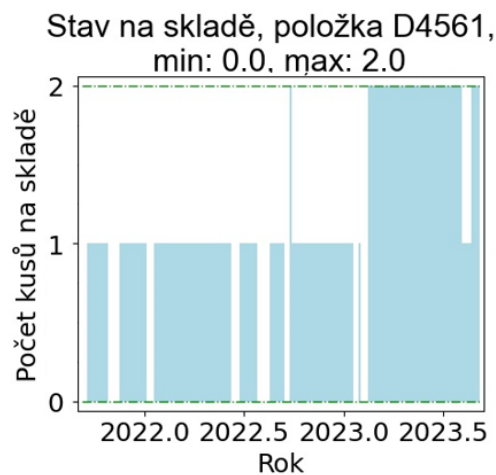
Z grafu lze jednoduše vyčíst, kdy, v jakém množství a jak často se materiál ze skladu odebíral, nejmenší a největší počet kusů na skladě a pochopitelně je také uveden kód materiálu. Rychlým pohledem na uvedené grafy lze najít například položky, které se používají málo a hladiny byly původně zaneseny do systému zbytečně vysoké, nebo třeba takové položky, které jsou na skladě dlouhodobě v podezřele velkém počtu a je tedy možné, že se přestaly používat.

U následujících grafů (2.7, 2.8) je možné pozorovat vliv úpravy vstupních dat – konkrétně odstranění záznamů, při kterých se materiál použil na projekt. V prvním případě lze vidět vysoký peak, který ale není třeba (a ani by to nebylo možné) predikovat, jelikož firma o něm dopředu ví a na takovou situaci se předzásobí.



**Obrázek 2.7:** Stav skladu (před úpravou dat)

Druhý graf už více vypovídá o nahodilé spotřebě zmíněného materiálu.



**Obrázek 2.8:** Stav skladu (po úpravě dat)

# Kapitola 3

## Teoretická část

Důležitým úkolem této kapitoly bude nadefinovat si potřebný aparát pro kapitolu 4, ve které se budu věnovat modelování spotřeby, resp. odhadem minimálních hladin (takové množství kusů na skladě, při kterém dojde k vytvoření požadavku na objednání dalších kusů) a také ono zmíněné množství, které se bude dokupovat.

### 3.1. Základní pojmy

**Definice 1** (Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny (viz [2])). Nechť  $X$  je diskrétní náhodná veličina s rozdělením  $x_n, p_n$ . Je-li

$$\sum_n |x_n| p_n = \sum_n |x_n| P(X = x_n) < \infty,$$

nazveme součet řady

$$\sum_n x_n p_n = \sum_n x_n P(X = x_n),$$

*střední hodnotou*  $E(X)$  *náhodné veličiny*  $X$ . Pokud není uvedena podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina  $X$  nemá střední hodnotu.

**Definice 2** (Střední hodnota spojitě náhodné veličiny (viz [2])). Nechť  $X$  je spojitá náhodná veličina s hustotou  $f_X(x)$ . Je-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f_X(x)dx < \infty,$$

nazveme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx,$$

střední hodnotou  $E(X)$  náhodné veličiny  $X$ . Není-li podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina  $X$  nemá střední hodnotu.

**Definice 3** (Rozptyl náhodné veličiny (viz [2])). Druhý centrální moment náhodné veličiny  $X$  se nazývá *rozptyl náhodné veličiny  $X$* . Obvykle se označuje

$$\text{var}(X) = E[X - E(X)]^2.$$

**Věta 1** (viz [2, Věta 2.8]). *Nechť  $X$  má druhý moment. Platí*

1.  $\text{var}(a + bX) = b^2\text{var}(X)$ ,
2.  $\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .

Pro modelování času mezi odběry budu využívat posunutě exponenciální rozdělení. Pro jeho odvození budu ale potřebovat nejprve nadefinovat exponenciální rozdělení ([3]).

Náhodná veličina  $W$  s exponenciálním rozdělením a parametrem  $\lambda$  má hustotu

$$f_W(w) = \begin{cases} 0, & \text{pro } w \leq 0, \\ \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}w}, & \text{pro } w > 0, \end{cases}$$

a distribuční funkci

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & \text{pro } w \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}w}, & \text{pro } w > 0. \end{cases}$$

Označím  $W \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Platí, že  $\lambda > 0$  a nosičem funkcí  $f_W(w)$  a  $F_W(w)$  je interval  $(0, \infty)$ .

Střední hodnota této náhodné veličiny se spočítá následovně:

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} w f_W(w) dw = \int_0^{\infty} w \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}w} dw = \\ &= [-w e^{-\frac{1}{\lambda}w}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}w} dw = [-\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}w}]_0^{\infty} = 0 + \lambda = \lambda, \end{aligned}$$

kde jsem využil informaci o nosiči, o parametru  $\lambda$ , a l'Hospitalovo pravidlo.

Pro výpočet rozptylu spočítám

$$\begin{aligned} E(W^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} w^2 f_W(w) dw = \int_0^{\infty} w^2 \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}w} dw = \\ &= [-w^2 e^{-\frac{1}{\lambda}w}]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} w e^{-\frac{1}{\lambda}w} dw = 2[w \cdot \lambda e^{-\frac{1}{\lambda}w}]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} \lambda e^{-\frac{1}{\lambda}w} dw = \\ &= 2[-\lambda^2 e^{-\frac{1}{\lambda}w}]_0^{\infty} = 2\lambda^2. \end{aligned}$$

Využitím Věty 1 získám

$$\text{var}(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2.$$

Ve skladových datech je ale nejmenší možná vzdálenost mezi odběry ze skladu rovna jedné, definuji tedy náhodnou veličinu  $X = W + 1$  – ta vznikla posunutím náhodné veličiny  $W$ . Její střední hodnota je

$$E(X) = E(W + 1) = E(W) + 1 = \lambda + 1.$$

Využitím Věty 1 získám její rozptyl

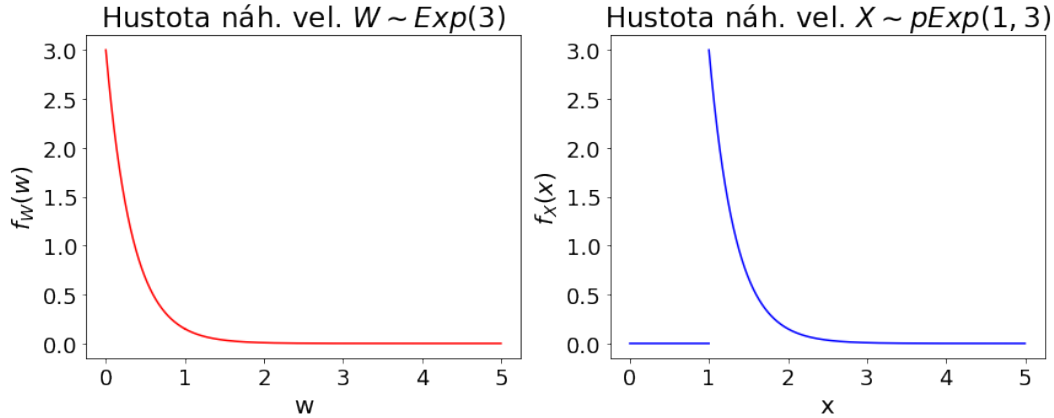
$$\text{var}(X) = \text{var}(W + 1) = \text{var}(W) = \lambda^2.$$

Označím  $X \sim \text{pExp}(1, \lambda)$ . Bude popisovat čas mezi odběry a její nosič je interval  $(1, \infty)$ . Její hustota a distribuční funkce jsou

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq 1, \\ \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x-1)}, & \text{pro } x > 1, \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq 1, \\ 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}(x-1)}, & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$



**Obrázek 3.1:** Srovnání hustot náhodných veličin  $W$  a  $X$

Parametr  $\lambda$  budu odhadovat metodou největší věrohodnosti. Pozorování budou v tomto případě časy mezi odběry a označím je  $\{\Delta t_i\}$ . Z časů odběrů  $\{t_i\}$  je získám pomocí vztahu  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, i = 1, \dots, n - 1$ .

Věrohodnostní funkce bude ve tvaru

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-1} f_X(\Delta t_i; \lambda),$$

její logaritmus bude

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} \ln f_X(\Delta t_i; \lambda).$$

Dosazením za hustotu náhodné veličiny  $X$  obdržím

$$\begin{aligned} \ln L(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left( \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(\Delta t_i - 1)} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \ln \frac{1}{\lambda} + \ln e^{-\frac{1}{\lambda}(\Delta t_i - 1)} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}(\Delta t_i - 1) \right] = (n - 1) \ln \frac{1}{\lambda} + \frac{n - 1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t_i \end{aligned}$$

Parametr  $\hat{\lambda}$  získám jako

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} L(\lambda), \text{ resp.}$$

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} \ln L(\lambda).$$

Výpočet parametru vychází z rovnice

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

kterou dále upravím a vyjádřím z ní  $\lambda$ . Postup je následující

$$(n-1)\lambda \frac{-1}{\lambda^2} - \frac{n-1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t_i = 0,$$

$$(n-1)(\lambda+1) = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t_i,$$

$$\hat{\lambda} = \overline{\Delta t} - 1,$$

kde  $\overline{\Delta t}$  označuje aritmetický průměr hodnot  $\Delta t_i$ .

**Definice 4** ( $\alpha$ -kvantil náhodné veličiny  $X$  (viz [2])). Necht'  $\alpha \in (0, 1)$ .  $\alpha$ -kvantil náhodné veličiny  $X$  je takové reálné číslo  $q_\alpha(X)$ , pro které platí

$$P(X \leq q_\alpha(X)) \geq \alpha \wedge P(X \geq q_\alpha(X)) \geq 1 - \alpha.$$

*Poznámka 1.*  $\alpha$ -kvantil není obecně určen jednoznačně a může existovat celý interval, který splňuje danou podmínku. Pokud tato situace nastane, tak za  $q_\alpha(X)$  budu uvažovat horní hranici zmíněného intervalu.

Dalším rozdělením potřebným pro modelování bude gama rozdělení ([3]). Pomocí něj je možné modelovat čas, který uběhne do  $n$ -tého odběru.

Hustota náhodné veličiny  $G_n$ , která má gama rozdělení s parametry  $n$  a  $\lambda$ , je v „shape–scale“ parametrizaci

$$f_{G_n}(g) = \begin{cases} 0, & \text{pro } g \leq 0, \\ \frac{g^{n-1} e^{-\frac{g}{\lambda}}}{\Gamma(n)\lambda^n}, & \text{pro } g > 0. \end{cases}$$

Označím  $G_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ . Oba parametry jsou kladné a nosičem funkce je interval  $(0, \infty)$ .

*Poznámka 2* (viz [4]). Speciálním případem gama rozdělení je Erlangovo rozdělení. V takovém případě musí být  $n$  nejen kladné, ale i celé (celkem tedy  $n \in \mathbb{N}$ ). Pro takové hodnoty  $n$  pak platí  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ .

**Věta 2** (viz [2, Věta 3.13]). *Jsou-li  $X_1, X_2$  nezávislé, spojité náhodné veličiny s hustotami  $f_1, f_2$ , je  $Y = X_1 + X_2$  spojitá náhodná veličina a pro její hustotu  $g(y)$  platí*

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(y - t)dt.$$

**Věta 3.** *Nechť  $X_j$  jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny,  $X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Potom  $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ .*

Důkaz provedu matematickou indukcí:

Pro  $k = 1$ :

$$f_{\sum_{i=1}^1 X_i}(x) = f_{X_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq 0, \\ \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}, & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Zároveň vidím, že pro  $G_1 \sim \Gamma(1, \lambda)$  platí

$$f_{G_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq 0, \\ \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}, & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Hustoty jsou tedy stejné a  $X_1$  a  $G_1$  jsou proto stejně rozdělené.

S pomocí Věty 2 a informací o nosiči hustot  $f_{X_1}, f_{X_2}$  lze ověřit i pro  $k = 2$ :

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(t)f_{X_2}(x - t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 f_{X_1}(t)f_{X_2}(x - t)dt + \int_0^x f_{X_1}(t)f_{X_2}(x - t)dt + \int_x^{\infty} f_{X_1}(t)f_{X_2}(x - t)dt = \\ &= \int_0^x f_{X_1}(t)f_{X_2}(x - t)dt = \\ &= \int_0^x \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-t)}dt = \frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x}{\lambda}} \int_0^x dt = \frac{xe^{-\frac{x}{\lambda}}}{\lambda^2}, \text{ pro } x > 0. \end{aligned}$$

To je zároveň hustota náhodné veličiny  $G_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$  a platí tedy  $G_2 = X_1 + X_2$ .

Nyní předpokládám, že Věta 3 platí pro nějaké  $k \in \mathbb{N}$ , tj. platí  $G_k = \sum_{i=1}^k X_i \sim \Gamma(k, \lambda)$ . Pro  $k + 1$  pak získám

$$\begin{aligned}
 f_{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}(x) &= f_{\sum_{i=1}^k X_i + X_{k+1}}(x) = f_{G_k + X_{k+1}}(x) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{G_k}(t) f_{X_{k+1}}(x-t) dt = \int_0^x f_{G_k}(t) f_{X_{k+1}}(x-t) dt = \\
 &= \int_0^x \frac{t^{k-1} e^{-\frac{t}{\lambda}}}{\Gamma(k) \lambda^k} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x-t)} dt = \int_0^x \frac{t^{k-1} e^{-\frac{t}{\lambda}}}{(k-1)! \lambda^k} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x-t)} dt = \\
 &= \frac{1}{(k-1)! \lambda^{k+1}} e^{-\frac{x}{\lambda}} \int_0^x t^{k-1} dt = \frac{1}{(k-1)! \lambda^{k+1}} e^{-\frac{x}{\lambda}} \left[ \frac{t^k}{k} \right]_{t=0}^{t=x} = \\
 &= \frac{x^k}{k! \lambda^{k+1}} e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{x^k e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\Gamma(k+1) \lambda^{k+1}}, \text{ pro } x > 0,
 \end{aligned}$$

což je zároveň hustota náhodné veličiny  $G_{k+1} \sim \Gamma(k+1, \lambda)$  a platí tedy  $\sum_{i=1}^{k+1} X_i = G_{k+1}$ . Tvrzení věty je dokázáno.  $\square$

### 3.2. Odvození rozdělení počtu odběrů za určitý časový úsek

Pro potřeby další kapitoly budu chtít odvodit rozdělení pravděpodobnosti počtu odběrů za určitý časový úsek. Délku tohoto časového úseku označím  $t^1$  ( $t^1 \in \mathbb{N}$ ) a náhodnou veličinou popisující počet odběrů za dobu  $t^1$  dní označím  $Z_{t^1}$ . Čas od  $i$ -tého do příštího odběru je náhodná veličina  $X_i \sim \text{pExp}(1, \lambda)$ , speciálně  $X_0$  je čas do prvního odběru, a tyto náhodné veličiny jsou nezávislé. Nyní odvodím pravděpodobnosti konkrétních počtů odběrů:

$$\begin{aligned} P(X_0 > t^1) &= P(Z_{t^1} = 0), \\ P(X_0 + X_1 > t^1) &= P(Z_{t^1} \leq 1), \\ P(X_0 + X_1 + X_2 > t^1) &= P(Z_{t^1} \leq 2), \\ &\dots \\ P\left(\sum_{i=0}^k X_i > t^1\right) &= P(Z_{t^1} \leq k). \end{aligned}$$

Pravděpodobnosti na levé straně je možné si vyjádřit v řeči exponenciálně rozdělených náhodných veličin  $W_i$  ( $X_i = W_i + 1$ ,  $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ):

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=0}^k X_i > t^1\right) &= P\left(\sum_{i=0}^k (W_i + 1) > t^1\right) = P\left(\sum_{i=0}^k W_i + (k + 1) > t^1\right) = \\ &= P\left(\sum_{i=0}^k W_i > t^1 - (k + 1)\right) = P(G_{k+1} > t^1 - (k + 1)) = \\ &= 1 - F_{G_{k+1}}(t^1 - (k + 1)), \end{aligned}$$

kde  $G_{k+1} \sim \Gamma(k + 1, \lambda)$ . Využil jsem přitom Větu 3.

Distribuční funkce náhodné veličiny  $Z_{t^1}$  je tedy:

$$\begin{aligned}
 F_{Z_{t^1}}(0) &= P(Z_{t^1} \leq 0) = 1 - F_{G_1}(t^1 - 1), \\
 F_{Z_{t^1}}(1) &= P(Z_{t^1} \leq 1) = 1 - F_{G_2}(t^1 - 2), \\
 F_{Z_{t^1}}(2) &= P(Z_{t^1} \leq 2) = 1 - F_{G_3}(t^1 - 3), \\
 &\dots \\
 F_{Z_{t^1}}(k) &= P(Z_{t^1} \leq k) = 1 - F_{G_{k+1}}(t^1 - (k + 1)).
 \end{aligned}$$

Pravděpodobností funkci už není složité odvodit:

$$\begin{aligned}
 P(Z_{t^1} = 0) &= P(X_0 > t^1) = 1 - F_{G_1}(t^1 - 1), \\
 P(Z_{t^1} = 1) &= P(Z_{t^1} \leq 1) - P(Z_{t^1} = 0) = \\
 &= P(X_0 + X_1 > t^1) - P(X_0 > t^1) = \\
 &= 1 - F_{G_2}(t^1 - 2) - (1 - F_{G_1}(t^1 - 1)) = \\
 &= F_{G_1}(t^1 - 1) - F_{G_2}(t^1 - 2).
 \end{aligned}$$

Obecně:

$$\begin{aligned}
 P(Z_{t^1} = k) &= P(Z_{t^1} \leq k) - P(Z_{t^1} \leq k - 1) = \\
 &= P\left(\sum_{i=0}^k X_i > t^1\right) - P\left(\sum_{i=0}^{k-1} X_i > t^1\right) = \\
 &= 1 - F_{G_{k+1}}(t^1 - (k + 1)) - (1 - F_{G_k}(t^1 - k)) = \\
 &= F_{G_k}(t^1 - k) - F_{G_{k+1}}(t^1 - (k + 1)),
 \end{aligned}$$

pro  $k = 1, \dots, t^1$ . Celkem tedy může nastat 0 až  $t^1$  odběrů.

Není složité dokázat, že se jedná o rozdělení pravděpodobnosti. Nejdříve ověřím, zda se jednotlivé pravděpodobnosti sečtou na 1:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{t^1} P(Z_{t^1} = k) &= 1 - F_{G_1}(t^1 - 1) + \sum_{k=1}^{t^1} (F_{G_k}(t^1 - k) - F_{G_{k+1}}(t^1 - (k + 1))) = \\
 &= 1 - F_{G_1}(t^1 - 1) + F_{G_1}(t^1 - 1) - F_{G_2}(t^1 - 2) + F_{G_2}(t^1 - 2) + \\
 &+ \dots - F_{G_{t^1}}(0) + F_{G_{t^1}}(0) - F_{G_{t^1+1}}(-1) = 1 - F_{G_{t^1+1}}(-1) = 1.
 \end{aligned}$$

Využil jsem přitom vlastnosti distribuční funkce gama rozdělení (její nosič je totiž  $(0, \infty)$ ).

Ověření nezápornosti je možné provést se znalostmi předpisu gama funkce  $(\Gamma(l))$ , kde  $l \in \mathbb{N}$ , dolní (neúplné) gama funkce  $(\gamma(l, x))$  a vztahu, který ji obsahuje. Zároveň také budu potřebovat vztah pro distribuční funkci náhodné veličiny  $G_l$  s gama rozdělením s parametry  $l, \lambda$  ( $G_l \sim \Gamma(l, \lambda)$ ). Pro uvedené proměnné platí  $l \in \mathbb{N}$  a  $\lambda > 0$ . Použité vzorce a vztahy jsou následující:

$$\begin{aligned}\Gamma(l) &= (l-1)!, \\ \gamma(l, x) &= \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq 0, \\ \int_0^x t^{l-1} e^{-t} dt, & \text{pro } x > 0, \end{cases} \\ F_{G_l}(x) &= \begin{cases} 0, & \text{pro } x \leq 0, \\ \frac{\gamma(l, \frac{x}{\lambda})}{\Gamma(l)}, & \text{pro } x > 0, \end{cases} \\ \gamma(l+1, x) &= l\gamma(l, x) - x^l e^{-x}.\end{aligned}$$

Poslední uvedený vztah není složité dokázat s pomocí metody per partes pro určitý integrál. Pro  $x > 0$  platí totiž

$$\begin{aligned}\gamma(l+1, x) &= \int_0^x t^l e^{-t} dt = [-e^{-t} t^l]_0^x - l \int_0^x t^{l-1} (-e^{-t}) dt = \\ &= l\gamma(l, x) - e^{-x} x^l. \quad \square\end{aligned}$$

Nyní už k samotnému ověření nezápornosti pravděpodobnostní funkce  $P(Z_{t^1} = k)$ , kde  $k = 0, 1, \dots, t^1$ , náhodné veličiny  $Z_{t^1}$ . Pro  $k = 0$  platí

$$P(Z_{t^1} = 0) = 1 - F_{G_1}(t^1 - 1).$$

Jelikož je  $G_1$  náhodná veličina, tak její distribuční funkce  $F_{G_1}(x)$  nabývá hodnot z intervalu  $[0; 1]$ . Hodnota  $P(Z_{t^1} = 0)$  je tedy nezáporná.

Pro  $k = t^1$  zase platí

$$P(Z_{t^1} = t^1) = F_{G_{t^1}}(t^1 - t^1) - F_{G_{t^1+1}}(t^1 - (t^1 + 1)) = F_{G_{t^1}}(0) - F_{G_{t^1+1}}(-1) = 0.$$

Použil jsem při tom informaci o nosiči distribuční funkce náhodné veličiny s gama rozdělením s libovolnými parametry. I pro  $k = t^1$  je tedy splněn požadavek na nezápornost.

Pro libovolné  $k = 1, \dots, t^1 - 1$  platí

$$\begin{aligned}
P(Z_{t^1} = k) &= F_{G_k}(t^1 - k) - F_{G_{k+1}}(t^1 - (k + 1)) = \\
&= \frac{\gamma\left(k, \frac{t^1 - k}{\lambda}\right)}{\Gamma(k)} - \frac{\gamma\left(k + 1, \frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}\right)}{\Gamma(k + 1)} = \\
&= \frac{\gamma\left(k, \frac{t^1 - k}{\lambda}\right)}{\Gamma(k)} - \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(k + 1)} \left[ k \gamma\left(k, \frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}\right) - \left(\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}\right)^k e^{-\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}} \right] = \\
&= \frac{\gamma\left(k, \frac{t^1 - k}{\lambda}\right) - \gamma\left(k, \frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}\right)}{\Gamma(k)} + \frac{\left(\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}\right)^k e^{-\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}}}{\Gamma(k + 1)}.
\end{aligned}$$

Čitatel prvního zlomku označím  $I_1$  a čitatel druhého zlomku  $I_2$ . Vzhledem k tomu, jak je pro  $l \in \mathbb{N}$  definován výraz  $\Gamma(l)$ , stačí už jen ověřit, zda jsou hodnoty  $I_1, I_2$  nezáporné. První hodnotu ještě upravíme:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \gamma\left(k, \frac{t^1 - k}{\lambda}\right) - \gamma\left(k, \frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}\right) = \\
&= \int_0^{\frac{t^1 - k}{\lambda}} t^{k-1} e^{-t} dt - \int_0^{\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}} t^{k-1} e^{-t} dt = \\
&= \int_0^{\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}} t^{k-1} e^{-t} dt + \int_{\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}}^{\frac{t^1 - k}{\lambda}} t^{k-1} e^{-t} dt - \int_0^{\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}} t^{k-1} e^{-t} dt = \\
&= \int_{\frac{t^1 - (k + 1)}{\lambda}}^{\frac{t^1 - k}{\lambda}} t^{k-1} e^{-t} dt.
\end{aligned}$$

Horní mez integrálu je zřejmě větší než dolní mez a integrovaná funkce je na vymezeném intervalu nezáporná. Hodnota integrálu  $I_1$  je tedy také nezáporná.



Hodnota výrazu  $I_2$  je také nezáporná, jelikož pro uvažovaná  $k$  a kladné  $\lambda$  vznikne jako součin dvou nezáporných hodnot.

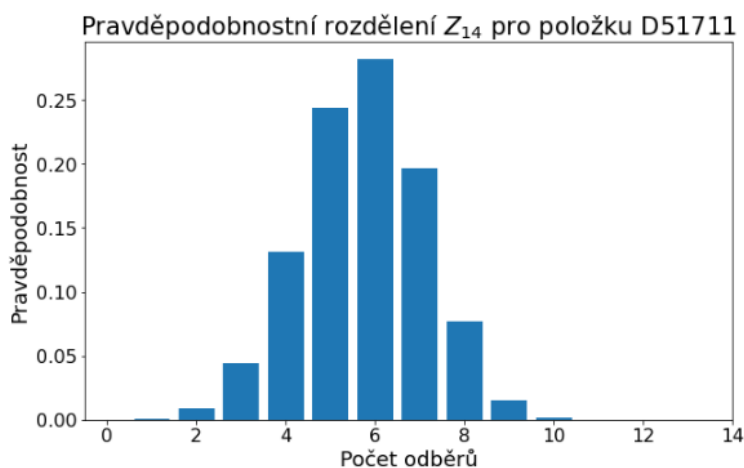
Uvedené vzorce pro rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny  $Z_{t^1}$  tedy splňují požadavky na nezápornost a součet těchto pravděpodobností je roven jedné.

Pokud by bylo možné hladiny na skladě automaticky aktualizovat, pak by bylo rozumné použít informaci o tom, jak dlouho už se materiál nepoužil. Tak tomu ale není a cílem je pouze jednorázově nastavit nové hladiny.

*Poznámka 3.* V případě  $m_i = m_j = m, \forall i, j = 1, \dots, n$ , by bylo možné jednoduše sestrojít náhodnou veličinu popisující počet odebraných kusů v časovém úseku délky  $t^1$  (tu označím  $K_{t^1}$ ) a ta by byla určena vztahem  $K_{t^1} = m \cdot Z_{t^1}$ . Její pravděpodobnostní funkce by pak byla ve tvaru  $P(K_{t^1} = i) = P(m \cdot Z_{t^1} = i) = P(Z_{t^1} = \frac{i}{m})$  pro  $i \in \mathbb{N}_0$ .

### 3.3. Konkrétní příklad

V rychlosti ukážu, jak vypadá takové rozdělení pravděpodobnosti pro konkrétní položku. Pro čas mezi odběry v tomto případě platí  $X \sim \text{pExp}(1; 1, 39)$ .



**Obrázek 3.2:** Pravděpodobnosti počtu odběrů ve 14denním časovém úseku

# Kapitola 4

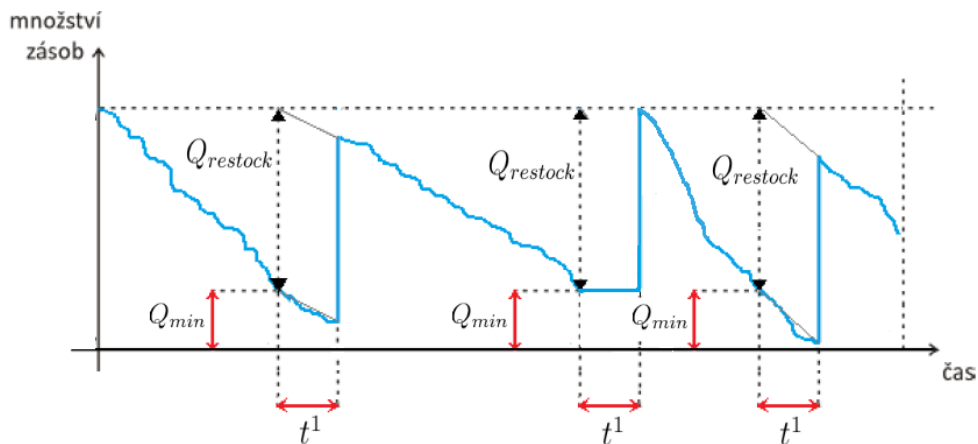
## Modely

V této kapitole vyzkouším několik různých přístupů pro nastavení minimální hladiny počtu kusů ( $Q_{min}$ ) a také určení množství  $Q_{restock}$ , které se dokoupí ve chvíli, kdy počet kusů na skladě klesne na (případně pod) minimální hladinu. Pokud tedy počet kusů na skladě klesne na (případně pod)  $Q_{min}$ , tak dojde k objednání  $Q_{restock}$  kusů.

U položek, které se odebírají v průměru alespoň jednou měsíčně budu uvažovat doručovací dobu  $t^1 = 7$  dní. U ostatních položek položím  $t^1 = 14$ . Doručovací doba  $t^1$  znamená, že po  $t^1$  dnech od vytvoření objednávky (což proběhne ve chvíli, kdy počet kusů na skladě klesne na (nebo pod) hodnotu  $Q_{min}$ ) přijde na sklad objednaný počet kusů (tj.  $Q_{restock}$ ).

Jak už bylo zmíněno, tak hladiny budu doporučovat jen pro položky, které se použily průměrně aspoň jednou za dva měsíce.

Modely natrénuji na ročních datech (konkrétně od 6.6.2022 do 6.6.2023), poslední 3 měsíce (tedy od 7.6.2023 do 6.9.2023) použiji pro ověření funkčnosti modelu (tedy k ověření, že v průběhu testovacího období nedojde ke stock-outu) a následně vyberu nejlepší z modelů.



**Obrázek 4.1:** Znázornění významu jednotlivých hladin [5, upraveno]

Počet kusů na skladě na počátku testovacího období dokáží spočítat z informací o stavu skladu (k 6.9.2023, ze souboru ZasobaSkladu.xlsx) a pohybech na skladě. Odběry budou probíhat tak, jak jsou v testovacích datech.

Pokud je modelů, u kterých v průběhu testovacího období nedošlo ke stock-outu, více, tak zvolím takový model, u kterého je nejmenší časem vážený průměrný počet kusů na skladě. Pokud by více modelů mělo tuto hodnotu stejnou (a byl mezi nimi i benchmarkový Model 1), tak budu za nejlepší považovat právě Model 1 kvůli jeho jednoduchosti.

Hodnota  $Q_{restock}$  bude nastavena tak, aby stačilo objednávat materiál průměrně jen jednou za  $t^2$  dní (2 značí horní index, nikoliv mocninu). Tuto hodnotu nastavím jako  $t^2 = 2t^1$ . Voleno je tak proto, aby dokupování nemuselo probíhat příliš často, jelikož samotná doprava totiž není zdarma. Zároveň ale sklad není „nafukovací“ a nebylo by tedy rozumné (a ani možné) objednávat příliš vysoký počet kusů od každé položky.

**Důležité je ale říci, že vypočítané hladiny slouží jako doporučení pro skladníka a nemusí být rozumné je všechny nastavit takové, jaké jsou vypočítané.** Některé výrobky mohou zabírat málo místa a je proto pohodlnější jich vzít víc. Jiné se zas objednávají např. po 100 (či násobcích stovky) kusech a doporučené hladiny bude třeba zaokrouhlit.

## 4.1. Model 1

První model nebude využívat poznatky z Kapitoly 3 a bude se jednat o velmi jednoduchý model.

Minimální hladina bude vycházet z veličiny, kterou označím  $m(t^1, t_j)$ . Spočítám ji pomocí vztahu

$$m(t^1, t_j) = \sum_{i: t_i \in [t_j - t^1, t_j]} m_i. \quad (4.1)$$

Lze si ji představit tak, že se podívám na úsek od  $t_j - t^1$  do  $t_j$  a zjistím celkový počet kusů použitých v tomto období.

Minimální hladina pak bude

$$Q_{min} = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} m(t^1, t_j). \quad (4.2)$$

Takto přísnou minimální hladinou se chci vyvarovat tomu, že dojde ke stock-outu v době, kdy má firma objednávku na cestě do skladu.

Důvodem, proč není rozumné nastavit minimální hladinu jako pouhé maximum z hodnot  $m_i$  je skutečnost, že pokud by se odebralo velké množství kusů ve dnech vzdálených méně než  $t^1$ , tak by se to na hodnotě  $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} m_i$  nijak neprojevalo. Tomu se chci pochopitelně vyhnout, jelikož by mohlo docházet často ke stock-outu.

K výpočtu hodnoty  $Q_{restock}$  přistoupím obdobně, akorát místo  $t^1$  použiji  $t^2$  a místo maxima se spokojím s průměrem. Platí tedy

$$Q_{restock} = \left\lceil \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m(t^2, t_j) \right\rceil. \quad (4.3)$$

Hodnota je navíc tedy zaokrouhlena nahoru, abych byl počet kusů celé číslo. Tento model bude sloužit jako benchmark vůči kterému budu srovnávat další modely. Pokud by složitější modely nepřinášely znatelný přínos, tak je pochopitelně nemá cenu uvažovat a spokojím se s tímto základním modelem.

## Konkrétní příklad

Pro jednoduchost a lepší srozumitelnost budu u každého modelu ukazovat výpočet hladin  $Q_{min}$  a  $Q_{restock}$  pro konkrétní položku. Tou bude D4612.

Data odběrů a počty odebraných kusů v období od 6.6.2022 do 6.6.2023 jsou následující:

```
['D4612', Timestamp('2023-05-25 00:00:00'), -1.0]
['D4612', Timestamp('2023-05-23 00:00:00'), -1.0]
['D4612', Timestamp('2023-05-04 00:00:00'), -2.0]
['D4612', Timestamp('2023-04-26 00:00:00'), -1.0]
['D4612', Timestamp('2023-04-20 00:00:00'), -2.0]
['D4612', Timestamp('2023-04-11 00:00:00'), -2.0]
['D4612', Timestamp('2023-03-22 00:00:00'), -1.0]
['D4612', Timestamp('2023-03-02 00:00:00'), -2.0]
['D4612', Timestamp('2023-02-06 00:00:00'), -1.0]
['D4612', Timestamp('2023-01-30 00:00:00'), -1.0]
['D4612', Timestamp('2023-01-23 00:00:00'), -2.0]
['D4612', Timestamp('2022-12-19 00:00:00'), -2.0]
['D4612', Timestamp('2022-11-07 00:00:00'), -2.0]
['D4612', Timestamp('2022-10-12 00:00:00'), -2.0]
['D4612', Timestamp('2022-08-08 00:00:00'), -1.0]
['D4612', Timestamp('2022-07-27 00:00:00'), -1.0]
['D4612', Timestamp('2022-06-29 00:00:00'), -3.0]
```

Obrázek 4.2: Odběry položky D4612

Tento materiál se odebral v průměru aspoň jednou za měsíc a proto u něj uvažuji  $t^1 = 7$  dní (dodací doba) a  $t^2 = 14$  dní (doba, po které chce firma v průměru objednávat znovu).

Podle vzorce (4.1) spočítám hodnoty  $m(t^1, t_j)$  a  $m(t^2, t_j)$ ,  $j = 1, \dots, 17$ . Z nich už pak není složité spočítat konkrétní hladiny podle vzorců (4.2) a (4.3):

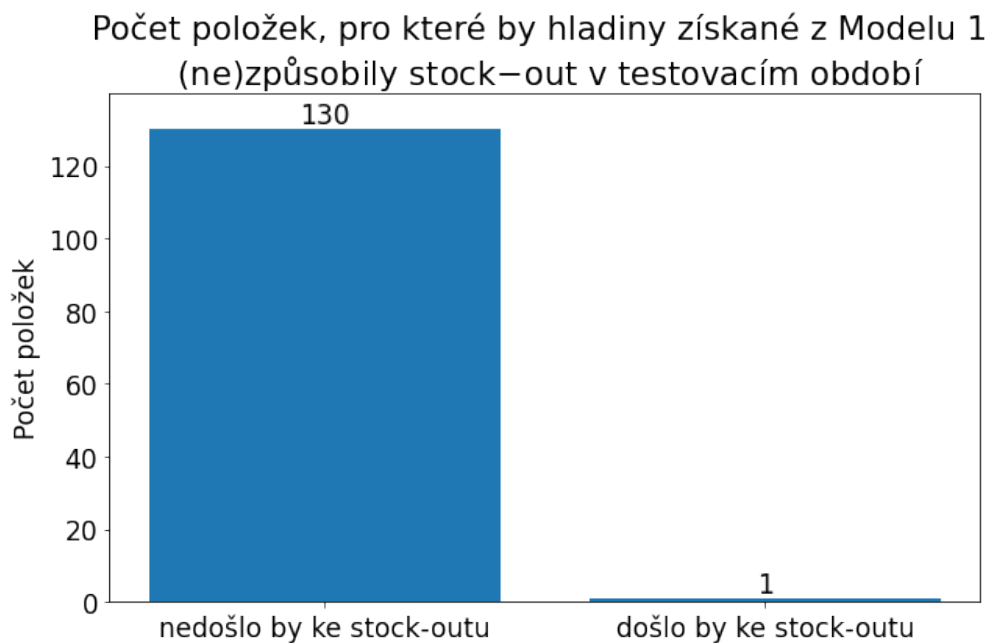
$$Q_{min} = \max\{3, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 2, 1, 2\} = 3,$$
$$Q_{restock} = \left\lceil \frac{3 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 2 + 1 + 2 + 4 + 3 + 5 + 1 + 2}{17} \right\rceil =$$
$$= \lceil 2,41 \rceil = 3.$$

Tyto hodnoty se tedy dají chápat tak, že pokud klesne počet kusů na skladě na (nebo pod) 3 ( $Q_{min}$ ) kusy, tak se objednájí 3 ( $Q_{restock}$ ) kusy. Ty přijdou na sklad po 7 dnech. Díky konstrukci hodnoty  $Q_{min}$  by s vysokou pravděpodobností nemělo dojít v těchto sedmi dnech ke stock-outu. Hodnota  $Q_{restock}$  je zas vytvořena tak, aby bylo v průměru potřeba objednávat až po dalších 14 dnech.

Vypočtené hladiny jsem použil pro testovací období a zjistil jsem, že by skutečně nedošlo ke stock-outu a že časem vážený průměrný počet kusů na skladě by byl 4,96.

### Vyhodnocení modelu

Hladiny nastavené tímto benchmarkovým modelem by nezpůsobily stock-out (tedy aspoň v testovacím období) pro všechny kromě jedné položky.



Obrázek 4.3: Performance Modelu 1

To ale neznamená, že takové hodnoty  $Q_{min}$  a  $Q_{restock}$  jsou optimální a že není možné dosáhnout nižšího průměrného počtu kusů na skladě a zároveň se stále vyvarovat stock-outům. Takovou možnost prozkoumám v následující podkapitole.

## 4.2. Další modely

V dalších modelech už budu používat poznatky z Kapitoly 3. Parametr  $\hat{\lambda}$  odhadnu metodou největší věrohodnosti z hodnot  $\Delta t_i$ , které získám z trénovacích dat.

K hladině  $Q_{restock}$  přistoupím ve všech modelech stejně, proto jí věnuji jednu podkapitulu. Další podkapitoly se budou týkat minimální hladiny u jednotlivých modelů – k té totiž bude přistupováno různými způsoby.

### 4.2.1. Doporučené množství k objednávání

Jak už jsem uvedl dříve, tak výpočet množství  $Q_{restock}$  bude volen tak, že by kusy měly vydržet průměrně  $t^2$  dní.

Střední hodnotu počtu odběrů za dobu  $t^2$  dnů (zaokrouhlenou nahoru) vynásobím průměrným počtem kusů odebraných v jednom odběru (také zaokrouhleným nahoru). Vzorcem to tedy bude

$$Q_{restock} = \lceil E(Z_{t^2}) \rceil \cdot \left\lceil \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j \right\rceil.$$

Jinak řečeno tedy očekávám, že průměrná spotřeba za  $t^2$  bude přibližně rovna průměrnému počtu odběrů za  $t^2$  dní vynásobeného průměrným počtem kusů v jednom odběru.

Výpočet rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny  $Z_{t^2}$  vychází z poznatků v podkapitole 3.2.

### 4.2.2. Minimální hladiny počtu kusů na skladě

Následovat budou tři heuristiky, kterými vypočítám minimální množství počtu kusů na skladě. Modely se liší „přísností“ na buď počet odběrů, počet kusů v jednom odběru, případně obojí.

#### Model 2

V tomto modelu využiji mimo jiné 0,99–kvantil náhodné veličiny  $Z_{t^1}$ , který označím  $q_{0,99}(Z_{t^1})$ . Platí tedy nerovnost

$$P(Z_{t^1} \geq q_{0,99}(Z_{t^1})) \leq 0,01,$$

což se dá interpretovat tak, že s pravděpodobností menší než 0,01 nedojde k tomu, že by se v následujících  $t^1$  dnech skutečně odebral materiál vícekrát než  $q_{0,99}(Z_{t^1})$ –krát.

Takto zvolený počet odběrů vynásobím zaokrouhleným průměrným počtem kusů za jeden odběr a získám tím minimální hladinu  $Q_{min}$ . Vzorcem je možné hodnotu zapsat jako

$$Q_{min} = q_{0,99}(Z_{t^1}) \cdot \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j \right].$$

Model tedy kombinuje poměrně ostrý požadavek na počet odběrů s nepřís-  
ným požadavkem na počet kusů. Nabízí se možnost k tomuto přistoupit i  
„naopak“ – s takovou myšlenkou budu pracovat v dalším modelu.

#### Konkrétní příklad

Pro přiblížení výpočtu minimální hladiny použiji znovu materiál D4612, pro který jsem dříve vypočítal hladiny v Modelu 1.



Pro odhad parametru  $\lambda$  rozdělení popisujícího čas mezi odběry ze skladu musím nejprve vypočítat hodnoty  $\Delta t_i$ ,  $i = 1, \dots, 16$ . Podle vzorce z kapitoly 3.1. pak platí

$$\hat{\lambda} = \frac{28 + 12 + 65 + 26 + 42 + 35 + 7 + 7 + 24 + 20 + 20 + 9 + 6 + 8 + 19 + 2}{16} - 1 = 19,625.$$

Rozdělení počtu odběrů za časový úsek  $t^1 = 7$  dní vypadá následovně:



**Obrázek 4.4:** Pravděpodobnosti počtu odběrů v 7denním časovém úseku

I z obrázku je zřejmé, že hodnota  $q_{0,99}(Z_7) = 2$ . Průměrný počet kusů odebraných v jednom odběru je 1,59 a minimální hladina je tedy

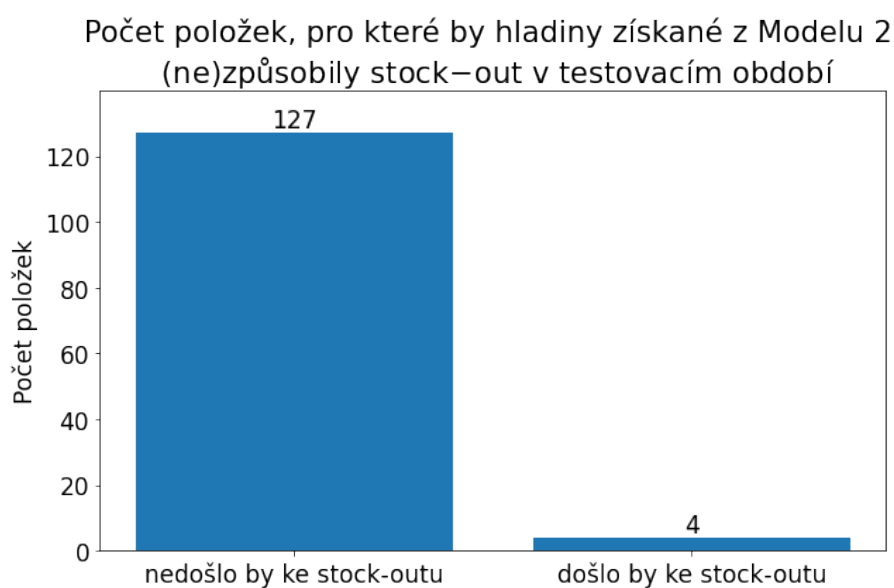
$$Q_{min} = 2 \cdot \lceil 1,59 \rceil = 4.$$

Dopočítám ještě hladinu  $Q_{restock}$  a ta je rovna 2.

S takto nastavenými hladinami v testovacím období by znovu nedošlo ke stock-outu a časem vážený průměrný počet kusů na skladě by byl 4,54. Došlo tedy k malému zlepšení oproti benchmarkovému modelu.

## Vyhodnocení modelu

Hladiny  $Q_{min}$  a  $Q_{restock}$  nastavené tímto modelem by v testovacím období nezpůsobily stock-out pro většinu položek. Počet takových, u kterých by ke stock-outu došlo, ale mírně narostl. Pro některý materiál ale může být tato nákupní strategie lepší z pohledu průměrného počtu kusů na skladě. Srovnání týkající se tohoto kritéria ale provedu až pro všechny modely zářez.



Obrázek 4.5: Performance Modelu 2

## Model 3

Třetí model přistupuje ke stanovení minimálního počtu kusů na skladě „naopak“. Minimální hladinu totiž nastaví jako

$$Q_{min} = \lceil E(Z_{t^1}) \rceil \cdot \max_{j \in \{1, \dots, n\}} m_j.$$

Při výpočtu  $Q_{min}$  už tedy není tak přísný na počet odběrů za dobu  $t^1$  (tj.  $Z_{t^1}$ ) a bere pouze jeho střední hodnotu zaokrouhlenou nahoru. Tu pak násobí maximem z hodnot  $m_j$  (počet kusů odebraných v  $j$ -tém odběru).

Taková strategie by mohla nabídnout lepší schopnost vyhnout se stock-outu v případě, kdy hodnoty  $m_j$  nejsou koncentrované blízko průměru těchto hodnot.

### Konkrétní příklad

Model budu demonstrovat na stejné položce, tedy D4612. Odhad parametru  $\lambda$  a tedy i rozdělení  $Z_7$  vypadá tedy stejně jako u předchozího modelu.

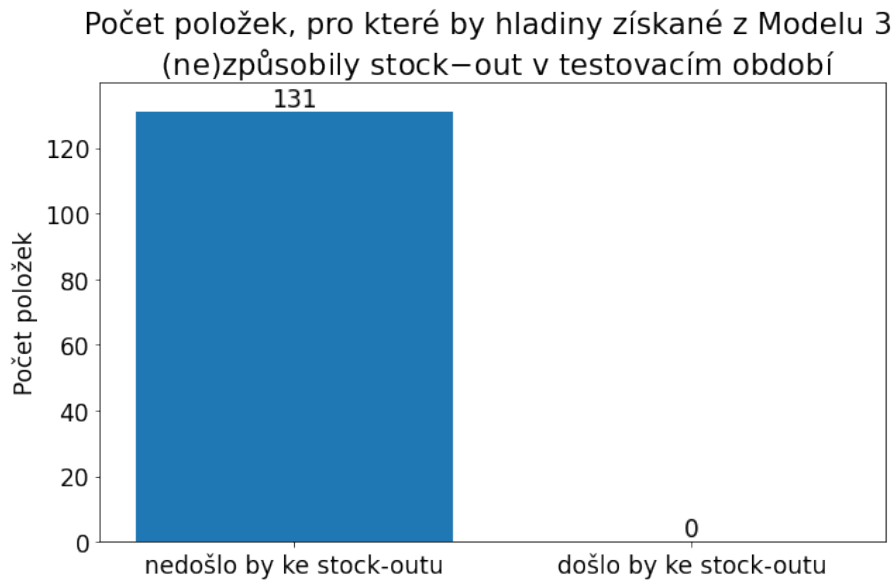
Hladiny vypadají následovně:

$$Q_{min} = \lceil E(Z_7) \rceil \cdot \max_{j \in \{1, \dots, 17\}} m_j = 1 \cdot 3 = 3,$$
$$Q_{restock} = \lceil E(Z_{14}) \rceil \cdot \left\lceil \frac{1}{17} \sum_{j=1}^{17} m_j \right\rceil = 1 \cdot 2 = 2.$$

Minimální hladina je u tohoto materiálu nižší než v Modelu 2, což způsobilo nižší průměrný počet kusů na skladě (konkrétně 3,96). I přes to nedošlo v testovacím období ke stock-outu a tento model (resp. takto nastavené hladiny) jsou tedy lepší než oba předchozí modely.

### Vyhodnocení modelu

Vypočtené hodnoty  $Q_{min}$ ,  $Q_{restock}$  a jejich ověření na testovacím období dopadlo velmi dobře, jelikož nedošlo ani k jednomu stock-outu.



**Obrázek 4.6:** Performance Modelu 3

#### Model 4

Poslední model kombinuje přístup z Modelu 2 a Modelu 3. Klade totiž přísný požadavek na oba činitele, pomocí nichž počítám minimální hladinu. Konkrétně se spočítá jako

$$Q_{min} = q_{0,99}(Z_{t1}) \cdot \max_{j \in \{1, \dots, n\}} m_j.$$

To ale pochopitelně způsobí to, že minimální hladina bude vysoká a model tedy nebude nejspíš zvolen jako nejlepší pro žádný materiál.

#### Konkrétní příklad

Všechny hodnoty potřebné pro výpočet hladin pro výrobek D4612 jsem spočítal už v předchozích příkladech a hladiny tedy jsou

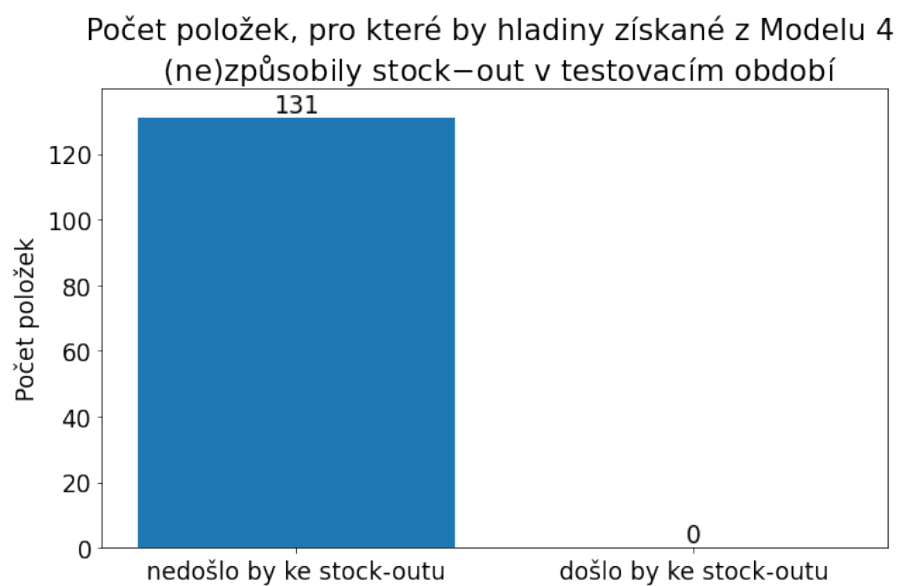
$$Q_{min} = 2 \cdot 3 = 6,$$

$$Q_{restock} = 2.$$

Minimální hladina je nejvyšší ze všech modelů a vysoký je i průměrný počet kusů na skladě v testovacím období (6,54). Dobrým zjištěním je ale samozřejmě skutečnost, že nedošlo ke stock-outu.

### Vyhodnocení modelu

Zlepšení oproti Modelu 3 už ani nemohlo nastat a i tento model zajistil, že nedošlo v testovacím období k žádnému stock-outu.



Obrázek 4.7: Performance Modelu 4

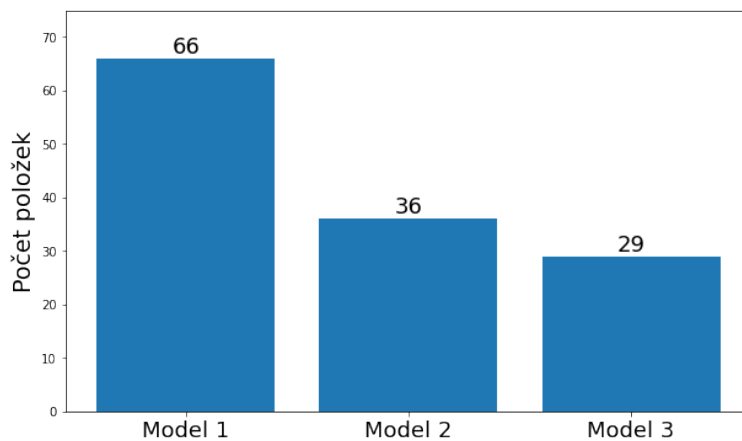
### 4.3. Srovnání modelů

Pro přehlednost uvádím stručně v tabulce 4.1 vzorce pro výpočet jednotlivých hladin u konkrétních modelů.

	Doporučená minimální hladina ( $Q_{min}$ )	Doporučené dokupované množství ( $Q_{restock}$ )
Model 1	$\max_j(m(t^1, t_j))$	$\lceil \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m(t^2, t_j) \rceil$
Model 2	$q_{0,99}(Z_{t^1}) \cdot \lceil \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j \rceil$	$\lceil E(Z_{t^2}) \rceil \cdot \lceil \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j \rceil$
Model 3	$\lceil E(Z_{t^1}) \rceil \cdot \max_j m_j$	$\lceil E(Z_{t^2}) \rceil \cdot \lceil \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j \rceil$
Model 4	$q_{0,99}(Z_{t^1}) \cdot \max_j m_j$	$\lceil E(Z_{t^2}) \rceil \cdot \lceil \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j \rceil$

**Tabulka 4.1:** Srovnání výpočtu minimálních hladin a objednaného množství pro různé modely

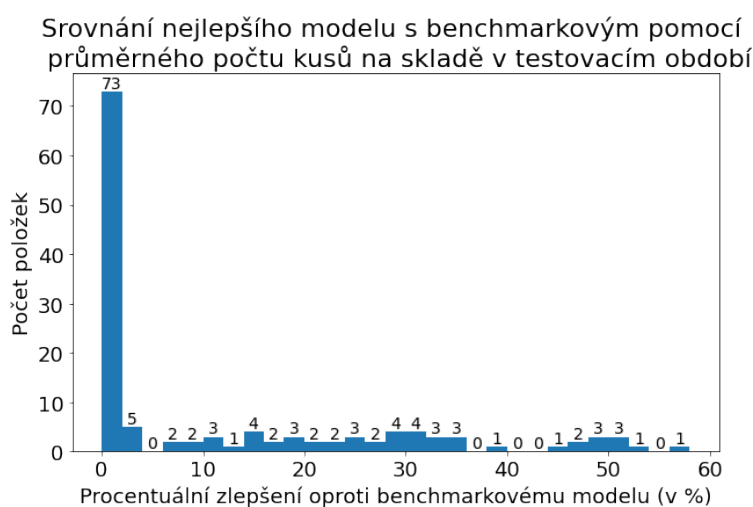
Jak už jsem uvedl, tak ze všech modelů, které nezpůsobily v průběhu testovacího období stock-out, vyberu jako nejlepší ten, který má nejnižší časem vážený průměrný počet kusů na skladě. Počty zvolení jednotlivých modelů jsou následující:



**Obrázek 4.8:** Počty zvolení modelů

Pro přibližně polovinu všech modelovaných položek jsou nejrozumnější hladiny zvolené benchmarkovým modelem. Model 4 není nejlepší volbou pro žádný materiál.

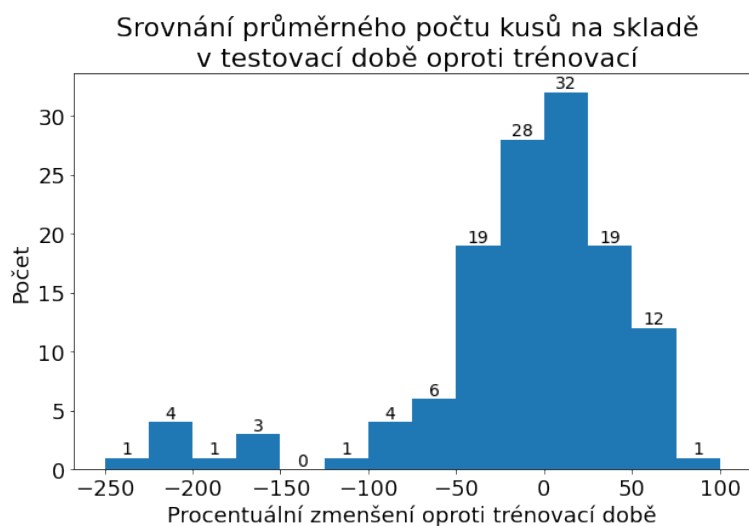
Další otázkou ale je, jak velkého zmenšení časem váženého průměrného počtu kusů na skladě dosáhnou využitím Modelů 2 a 3 ve srovnání s Modelem 1.



**Obrázek 4.9:** Srovnání nejlepšího modelu s benchmarkovým

Z grafu lze vidět, že pro většinu položek je zlepšení minimální, resp. žádné. To je dáno tím, že jako nejlepší model byl u 66 položek vybrán benchmarkový Model 1 a zlepšení je tedy 0%. U některých položek jsem ale dokázal navolit hladiny tak, že se výrazným způsobem zredukoval průměrný počet kusů na skladě, zároveň ale v testovacím období nedošlo ke stock-outu. Průměrné snížení je přibližně 11,5%.

Nyní zbývá už jen srovnat průměrný počet kusů na skladě v testovacím období, ve kterém uvažuji používání vypočtených hladin, s obdobím trénovacím.



**Obrázek 4.10:** Srovnání průměrného počtu kusů na skladě v testovacím a trénovacím období

Kladné hodnoty znamenají zmenšení průměrného počtu kusů na skladě po nastavení nových hladin oproti trénovacímu období, což je samozřejmě žádoucí. Ani záporné hodnoty (tedy navýšení průměrného počtu kusů na skladě) ale nepředstavují nutně problém, jelikož to může znamenat, že dosavadní nákupní strategie není rozumná a mohlo by brzy dojít ke stock-outu. Hladiny (a tím tedy ty průměrný počet kusů na skladě) jsem tedy navýšil, zároveň jsem tím ale zmenšil pravděpodobnost, že nastane stock-out.

U necelé poloviny (64 ze 131 položek) jsem průměrný počet kusů na skladě snížil, u zbytku tomu bylo naopak. Položky s největším zvětšením průměrného počtu kusů na skladě jsou D50802, D6564, D9578, D9581 a D9653. Těm by při změně hladin měla být věnována větší pozornost. Průměrné navýšení průměrného počtu kusů na skladě je necelých 14%.

Napočítané hladiny bude možné dohledat v příloze.



# Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámit čtenáře se skladovými daty z oddělení údržby výrobního závodu Miele technika s.r.o., následně data vhodně vizualizovat pro potřeby zaměstnanců skladu, identifikovat materiál, který už se přestal používat, a nakonec doporučit optimální hladiny pro často používané položky pomocí vybraného modelu.

V první kapitole byl krátce představen samotný výrobní závod a jeho stručná historie.

V druhé kapitole byl čtenář seznámen s obsahem jednotlivých souborů, které jsem v práci používal. Uvedl jsem různé možnosti vizualizace skladových dat, jejich rozdělení podle různých hledisek a také několik způsobů pro identifikaci ležáků, jejichž vyhodnocení bude muset následně provést zaměstnanec skladu.

Ve třetí kapitole jsem představil základní pojmy, věty a rozdělení, které sloužily jako teoretický základ pro modelování spotřeby nejvíce používaných položek. To bylo poté demonstrováno na konkrétním materiálu pro konkrétní délku pozorovaného časového úseku.

Závěrečná kapitola byla věnována samotnému modelování spotřeby. Byly představeny 4 modely, z nichž jeden sloužil jako benchmark. V každé podkapitole byl nejdříve uveden způsob výpočtu konkrétních hladin, což bylo následně doplněno o výpočet parametrů rozdělení a jednotlivých hladin pro konkrétní položku pro lepší pochopení průběhu výpočtu. Na konci každého modelu proběhl komentář k jeho performanci v průběhu testovacího období

pro všechny položky, což bylo i graficky znázorněno. Dále byl čtenář seznámen se způsobem výběru nejlepšího z modelů a následně také s celkovým zastoupením každým z nich. Nakonec byl vybraný model porovnán s modelem benchmarkovým podle časem váženého průměrného počtu kusů na skladě a také se skutečnými hodnotami této veličiny v průběhu trénovacího období.

Vypočtené hladiny pro několik položek jsem prodiskutoval se skladníkem. U některých byly hodnoty přenastaveny na ty vypočtené, u jiných se musely zaokrouhlit (lze je totiž nakupovat jen po baleních). Pro některý materiál skladník ponechal původní hladiny, které jsou sice vyšší, ale jelikož je velikost jednoho kusu (a i jeho cena) malá, tak není problém mít na skladě více kusů. Zbytek skladník projde sám.

Téma diplomové práce pro mě mělo velký přínos z hlediska práce s reálnými daty a využití znalostí získaných v průběhu studia při řešení praktického problému.

# Seznam obrázků a grafů

1.1	Logo firmy Miele . . . . .	10
2.1	Struktura souboru Pohyby_na_sklade.xlsx . . . . .	12
2.2	Struktura souboru ZasobaSkladu.xlsx . . . . .	14
2.3	Počet odběrů nejpoužívanějších 200 položek . . . . .	15
2.4	Odběry A dílů za poslední 2 roky . . . . .	17
2.5	Histogram poměrů vypočtených hodnot . . . . .	18
2.6	Histogram poměrů vypočtených hodnot – detail . . . . .	19
2.7	Stav skladu (před úpravou dat) . . . . .	21
2.8	Stav skladu (po úpravě dat) . . . . .	21
3.1	Srovnání hustot náhodných veličin W a X . . . . .	25
3.2	Pravděpodobnosti počtu odběrů ve 14denním časovém úseku . . . . .	33
4.1	Znázornění významu jednotlivých hladin . . . . .	35
4.2	Odběry položky D4612 . . . . .	37
4.3	Performance Modelu 1 . . . . .	38
4.4	Pravděpodobnosti počtu odběrů v 7denním časovém úseku . . . . .	41
4.5	Performance Modelu 2 . . . . .	42
4.6	Performance Modelu 3 . . . . .	44
4.7	Performance Modelu 4 . . . . .	45
4.8	Počty zvolení modelů . . . . .	46
4.9	Srovnání nejlepšího modelu s benchmarkovým . . . . .	47
4.10	Srovnání průměrného počtu kusů na skladě v testovacím a trénovacím období . . . . .	48

# Seznam tabulek

4.1 Srovnání výpočtu minimálních hladin a objednaného množství pro různé modely . . . . .	46
--	----

# Přílohy

V příloze 1 pojmenované Prilohy-DP-Abraham.zip bude možné najít všechny tři soubory obsahující vstupní data. Zároveň zde budou i slíbené grafy a seznamy (viz kapitola 2 a 4).

# Literatura

- [1] Miele. Online. Dostupné z: <https://www.miele.cz/>. [cit. 2024-04-05].
- [2] HRON, Karel; KUNDEROVÁ, Pavla a VENCÁLEK, Ondřej. *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky*. 3. Univerzita Palackého v Olomouci, 2018. ISBN 9788024453989.
- [3] HOGG, Robert V.; MCKEAN, Joseph W. a CRAIG, Allen T. *Introduction to Mathematical Statistics*. Online. 8. Pearson, 2019. ISBN 978013468699. Dostupné z: <https://minerva.it.manchester.ac.uk/~saralees/statbook2.pdf>. [cit. 2024-04-05].
- [4] IBE, Oliver C. *Fundamentals of Applied Probability and Random Processes*. 1. Elsevier Academic Press, 2005. ISBN 9780120885084.
- [5] Stochastické modely zásob. Online. In: . S. 13. Dostupné z: [https://moodle.upol.cz/pluginfile.php/1384826/mod\\_resource/content/3/Sekce6\\_Modely\\_zasob-Stochastick%C3%A9.pdf](https://moodle.upol.cz/pluginfile.php/1384826/mod_resource/content/3/Sekce6_Modely_zasob-Stochastick%C3%A9.pdf). [cit. 2024-04-05].
- [6] DEGROOT, Morris H. a SCHERVISH, Mark J. *Probability and Statistics*. 4. Pearson, 2012. ISBN 9780321500465.
- [7] TOOMEY, John W. *INVENTORY MANAGEMENT: Principles, Concepts and Techniques*. 1. Kluwer Academic Publishers, 2000. ISBN 0792383249.
- [8] CIPRA, Tomáš. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. 1. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1986.
- [9] HILLIER, Frederick S. a LIEBERMAN, Gerald J. *Introduction to Operations Research*. 11. McGraw-Hill Education, 2021. ISBN 9781260575873.

- [10] MACKAY, David J.C. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Online. 4. Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521642989. Dostupné z: <https://www.inference.org.uk/itprnn/book.pdf>. [cit. 2024-04-05].
- [11] *Scipy.stats.expon* - *SciPy v1.13.0 Manual*. Online. Dostupné z: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.expon.html>. [cit. 2024-04-05].
- [12] *Scipy.stats.gamma* - *SciPy v1.13.0 Manual*. Online. Dostupné z: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.gamma.html>. [cit. 2024-04-05].