UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Veronika Scheichenostová

Heuristické strategie při řešení úloh z matematiky na 1. stupni ZŠ

Olomouc 2023 vedoucí práce: doc. PhDr. Radka Dofková, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a pouze s využitím uvedené literatury v závěru práce.

V Olomouci 18. 4. 2023

Veronika Scheichenostová
....

Veronika Scheichenostová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat své vedoucí diplomové práce, doc. PhDr. Radce Dofkové, Ph.D., za odborné vedení a cenné rady, které mi při zpracování této práce poskytovala.

Dále děkuji své rodině a přátelům, kteří mi v průběhu studia a během psaní diplomové práce poskytovali podporu, oporu a pomoc.

OBSAH

ÚVOD

Tématem této diplomové práce jsou „Heuristické strategie při řešení úloh z matematiky na 1. stupni ZŠ“.

Jako dospělí lidé bychom měli být schopni efektivně řešit problémy. Řešení problémů je však dovednost, kterou musíme rozvíjet již od raného dětství, samozřejmě v situacích přiměřených věku. Významnou roli ve formování dítěte hraje škola. Neměla by tedy zapomínat na potřebu vychovávat schopné a samostatné jedince, kteří se po vstupu do životní reality neztratí. A taky že nezapomíná. Jedním z cílů základního vzdělávání je *„podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů“*. (MŠMT, 2021, s. 8) Záleží však, jakým způsobem bude tento cíl naplňován.

Právě zde nacházíme význam heuristiky. Její přístupy a strategie vzbuzují přirozenou zvídavost žáků a vedou je k aktivnímu a samostatnému objevování. Atraktivní matematické úlohy je vtáhnou do tématu a umožní jim hlubší pochopení dané problematiky. Heuristika klade důraz na aplikaci znalostí při řešení problémů, rozvoj logického myšlení a tvořivosti. Ačkoli se v rámci zvoleného tématu budeme pohybovat v oblasti matematických problémů, rozvíjené schopnosti jsou využitelné v mnoha dalších, nematematických situacích.

Potenciál heuristických strategií mě motivoval k rozhodnutí věnovat se tomuto tématu více do hloubky. Cílem této práce je analyzovat, jakým způsobem žáci 5. třídy ZŠ řeší matematické problémy, zda k řešení využijí heuristické strategie, případně které, a jak jsou při svém počínání úspěšní. Práce má dále identifikovat, zda existuje statisticky významný rozdíl v úspěšnosti chlapců a dívek při řešení nestandardních matematických úloh.

Diplomová práce se dělí na dvě části – teoretickou a praktickou. Teoretickou část tvoří pět kapitol. V první kapitole se budeme věnovat školnímu kurikulu, zejména Rámcovému vzdělávacímu programu pro základní vzdělávání (RVP ZV). Zaměříme se na části úzce související s heuristickými přístupy při výuce matematiky, neboť všechny výukové metody musí naplňovat výstupy a požadavky kurikula. Ve druhé kapitole vysvětlíme základní pojmy nezbytné pro orientaci v problematice heuristických strategií. Ve třetí kapitole se budeme věnovat heuristické metodě a její pozici v systému výukových metod. Popíšeme principy a zásady zařazování této metody do výuky. Čtvrtá kapitola pojednává o heuristických strategiích a vysvětluje jejich podstatu. Každá strategie je doplněna o řešený příklad, který čtenáři více přiblíží aplikaci daného způsobu řešení. Jelikož je tato diplomová práce zaměřena na matematiku 1. stupně, vybrali jsme pouze ty strategie, které považujeme za využitelné žáky 1. – 5. třídy. V poslední kapitole teoretické části zmíníme výhody a nevýhody heuristické metody a jejích strategií, dotkneme se také odborných výzkumů, které proběhly nejen v Česku, ale i v zahraničí.

Praktická část je zaměřena na analýzu dat výzkumného šetření, kterého se zúčastnilo 5 učitelů matematiky a 89 žáků, a to jak běžných, tak i nadaných tříd. Zvolili jsme smíšený design výzkumu, výzkumnými nástroji jsou interview s učiteli matematiky zúčastněných tříd, didaktický test a závěrečný dotazník pro žáky. Výzkumné otázky zodpovíme pomocí analýzy dat a testu dobré shody chí-kvadrát. Poslední kapitolu budeme věnovat shrnutí dosažených výsledků.

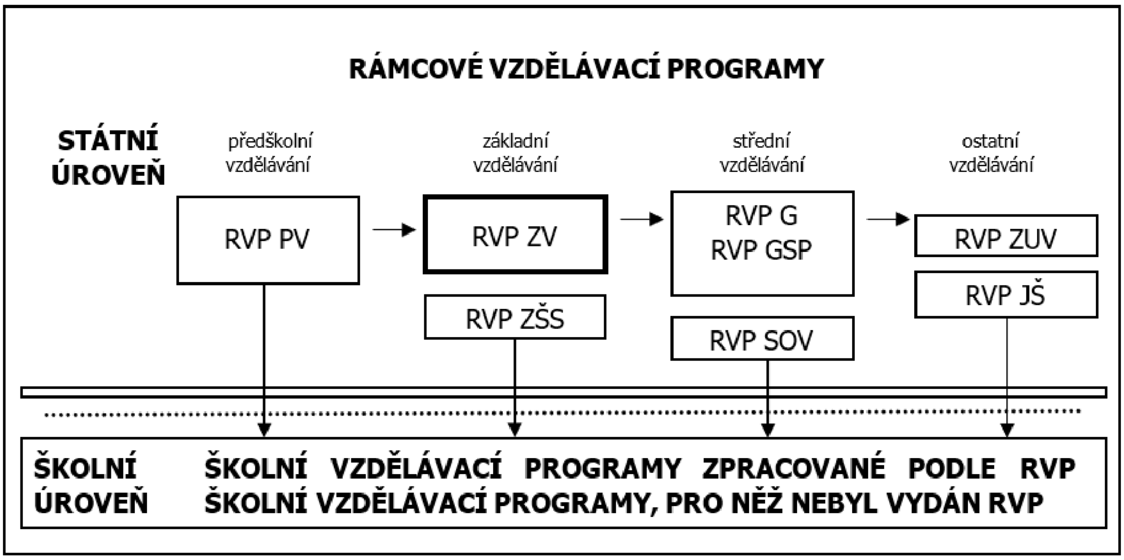
I. TEORETICKÁ ČÁST

1. Matematika na 1. stupni ZŠ

Nestandardní matematické úlohy, jejichž řešení je předmětem heuristiky, jsou součástí výuky matematiky již na 1. stupni ZŠ. Ta se stejně jako na dalších stupních vzdělání řídí závaznými dokumenty platnými pro všechny školy v České republice, tzv. Rámcovými vzdělávacími programy. Tyto kurikulární dokumenty pro vzdělávání žáků od 3 do 19 let vycházejí ze zákona č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). Dále pak z Národního programu rozvoje vzdělávání v ČR, tzv. Bílé knihy, což je vládní projekt, který obsahuje myšlenková východiska, obecné intence a rozvojové programy určující vývoj české soustavy vzdělávání. (MŠMT, 2021)

Máme 2 úrovně kurikulárních dokumentů – státní a školní (Obr. 1). Státní úroveň představují Rámcové vzdělávací programy (RVP). Ty jsou vytvořeny zvlášť pro předškolní, základní, základní umělecké, střední odborné vzdělání, pro gymnázia, jazykové školy i pro speciální vzdělávání a udávají závazný rámec vzdělávání v těchto obdobích. Obsahují cíle a formy výuky, její délku a povinný obsah, podmínky průběhu a ukončení vzdělání. Součástí jsou také pravidla pro výuku žáků se speciálními vzdělávacími potřebami.

Školní úroveň kurikulárních dokumentů představuje Školní vzdělávací program (ŠVP), který si zpracovává každá škola zvlášť podle příslušného RVP tak, aby byly oba dokumenty v souladu. Pro 1. stupeň ZŠ je tedy závazný Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV). (MŠMT, 2021)



Obrázek 1: Systém kurikulárních dokumentů (MŠMT, 2021, s. 5)

1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

RVP ZV je závazný kurikulární dokument, ze kterého vychází vzdělávání ve všech základních školách v ČR. Obsahuje obecné vzdělávací cíle, klíčové kompetence, jež by si žáci měli osvojit, učivo a očekávané výstupy ve formě vědomostí a dovedností, kterými by žáci měli po absolvování jednotlivých etap vzdělání disponovat. Školy pak v souladu s ním vytvářejí ŠVP přesně na míru dle svého zaměření a profilace. Podle tohoto dokumentu je v praxi realizována výuka.

RVP ZV je rozdělen na několik částí. Zaměříme se zde pouze na body, které přímo souvisejí s tématem diplomové práce.

Jedním z obecných cílů základního vzdělávání je *„podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů"*. (MŠMT, 2021, s. 8) Tento cíl je realizován prostřednictvím rozvíjení klíčových kompetencí. Ty představují souhrn vědomostí, dovedností, postojů a hodnot nezbytných pro osobní rozvoj jedince a jeho dobré uplatnění ve společnosti. V současné podobě RVP ZV mluvíme o sedmi klíčových kompetencích, které jsou rozvíjeny již na 1. stupni ZŠ.

Vzhledem k tématu diplomové práce je pro nás zásadní kompetence k řešení problémů, jelikož právě problémy jsou předmětem heuristiky. Dovolíme si zde předložit plné znění několika bodů:

> *„Žák vyhledává informace vhodné k řešení problému, nachází jejich shodné, podobné a odlišné znaky, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení problému.*
>
> *Žák samostatně řeší problémy; volí vhodné způsoby řešení; užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy.*
>
> *Žák ověřuje prakticky správnost řešení problémů a osvědčené postupy aplikuje při řešení obdobných nebo nových problémových situací, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problémů."* (MŠMT, 2021, s. 11)

Jednotlivé klíčové kompetence se vzájemně prolínají, tudíž i další z nich obsahují znalosti a dovednosti potřebné k uplatnění heuristiky. Kompetence k učení klade důraz na organizaci vlastního samostatného učení, rozvoj kritického myšlení, získávání informací, propojování znalostí a jejich aplikaci v běžném životě. Kompetence sociální a personální zase cílí na rozvoj schopnosti efektivní spolupráce ve skupině při řešení úkolu a na kvalitu mezilidské komunikace.

Nelze opomenout digitální kompetence, které byly do RVP ZV přidány až v roce 2021. Věnují se práci s digitálními technologiemi, práci s daty, jejich vyhledávání a kritickému posouzení jejich relevantnosti. Kladou důraz na využívání digitálních zařízení pro zefektivnění vlastní práce. Nacházejí význam také při aplikaci heuristických strategií, zejména strategie systematického experimentování. (MŠMT, 2021, s. 13)

RVP ZV je dokument, který je soustavně aktualizován v reakci na rozvoj a potřeby společnosti. V současné době probíhají další revize, které přinesou mimo jiné pojem gramotnost včetně jeho přesné definice. Gramotnost je chápána jako schopnost aplikovat získané vědomosti v běžném životě, přičemž její úroveň lze kvalitativně měřit. Budou stanoveny dvě základní gramotnosti – čtenářská a matematická. Ty mají sloužit jako základ pro rozvoj oborových gramotností.

Další novinkou, kterou hlavní revize RVP přinášejí, je zavedení kulturních kompetencí zaměřených na rozvoj tvořivosti žáků. Ta se má projevit nejen v umění, ale také při řešení problémů.

Dle revidovaného ZVP ZV budou moci školy učit od září 2024. O rok později se dokument stane závazným pro 1. a 6. ročník ZŠ. (MŠMT, 2022b)

1.2 Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace* je charakteristická především aktivními činnostmi, které se uplatňují při práci s matematickými objekty a aplikaci matematických dovedností v situacích, do kterých se dostáváme v běžném životě. Dochází tak k rozvoji matematické gramotnosti a matematického myšlení.

Vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace* je na 1. stupni ZŠ rozčleněna do čtyř tematických okruhů, přičemž každý z nich obsahuje očekávané výstupy, kterých by měl žák na konci 1. vzdělávacího období (1. – 3. ročník) a 2. vzdělávacího období (4. – 5. ročník) dosáhnout, a také učivo, které se k tematickému okruhu vztahuje. Těmito okruhy jsou:

- číslo a početní operace,
- závislosti, vztahy a práce s daty,
- geometrie v rovině a prostoru,
- nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Vzhledem k zaměření této diplomové práce je pro nás stěžejní poslední okruh, tedy *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, jejichž řešení vyžaduje logické myšlení. Právě ty jsou totiž předmětem heuristiky a jejích metod. Jedná se o okruh, jehož úlohy by měly prostupovat všemi ostatními, neboť rozvíjí schopnost řešit problémy nejen ve škole, ale i v běžných životních situacích. Učí žáky formulovat problém a pracovat s údaji, posiluje žákovu víru ve vlastní kvality v oblasti logického uvažování a zvyšuje pravděpodobnost úspěšného podchycení žáků, kteří v matematice často selhávají. (MŠMT, 2021)

Je to však jediný tematický okruh, jehož výstup je definován až pro 2. vzdělávací období, zatímco všechny ostatní jsou opatřeny výstupy pro obě období. Zmíněným výstupem je, že: *„žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky“*. (MŠMT, 2021, s. 34)

Učivem tohoto tematického okruhu jsou slovní úlohy, číselné a obrazové řady, magické čtverce a prostorová představivost.

Cílové zaměření vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* se orientuje na rozvíjení klíčových kompetencí matematickými prostředky. Vyzdvihneme ty cíle, které úzce souvisejí s heuristikou. Vzdělávání v této oblasti vede žáka k:

- *„rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů*
- *provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému*
- *poznání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby“*. (MŠMT, 2021, s. 31)

2. Vymezení základních pojmů

Tato diplomová práce je směřována k řešení úloh z matematiky pomocí heuristiky a jejích strategií, proto je nasnadě objasnit si základní pojmy vztahující se k této problematice.

2.1 Heuristika

Je široce rozšířen příběh, datovaný do období kolem 3. století př. n. l., o starořeckém matematikovi a fyzikovi Archimedovi, který dostal od syrakuského krále Hieróna II. za úkol zjistit, zda je jeho koruna vyrobena pouze ze zlata, či jej jeho zlatník ošidil a část zlata nahradil levnějšími kovy. Archimedes dlouze přemýšlel. Při návštěvě veřejných lázní si povšiml, že výška hladiny v kádi stoupá a klesá v závislosti na jeho ponoření. Díky tomu dostal zásadní nápad a okamžitě, ještě nahý, vyběhl směrem ke královskému paláci a křičel: „Heuréka!“ (Našel jsem! Objevil jsem!). Odtud pochází nejen dnes obecně známý Archimedův zákon o vztlaku, ale také celosvětově užívané slovo heuréka, které v mnoha zemích zazní jako zvolání při náhlém a nečekaném objevu. Od tohoto původem řeckého slova heuréka je pak odvozena heuristika. (Králová, 2007)

Pólya (2016, s.114) rozlišuje pojmy **heuristika** a **moderní heuristika**. Říká, že *„heuristika, nebo také heuretika nebo „ars inveniendi“ byl název jistého oboru výzkumu, ne zcela přesně popsaného, náležejícího k logice, filozofii nebo psychologii, často jen načrtnutého, zřídkakdy popsaného detailně a dnes téměř zapomenutého. Cílem heuristiky bylo studovat metody a zásady objevování a vynalézání.*“ Adjektivum „heuristický“ pak lze přeložit jako „sloužící objevování“.

Moderní heuristika se pak dle Pólyi (2016, s. 131) *„snaží pochopit proces řešení úloh, obzvláště pak typické mentální operace, které jsou v tomto procesu užitečné*“. Za základ heuristiky považuje zkušenosti, a to získané jak vlastním řešením rozličných úloh, tak i pozorováním činnosti a mentálních operací jiných řešitelů úloh.

V pojetí Zeliny (1990, s. 66-67) je heuristika *„metoda tvůrčího řešení problému“,* pro niž je *„charakteristická specifikace typových činností, které se uplatňují při objevování, vynalézání, tvoření a specifikování norem a postupů“.*

Profesor Kopka (1999) označuje heuristiku za umění objevu a považuje ji za vědní odvětví, jež se zabývá metodami a postupy, jak objevovat.

Dle Maňáka a Švece (2003, s. 113) je heuristika „*věda zkoumající tvůrčí myšlení, také heuristická činnost, tj. způsob řešení problémů*“. Vychází z faktu, že pro člověka je přirozené poznávat své okolí a zkoumat jej, snažit se mu porozumět a získat takové dovednosti, které mu umožní naplňovat vlastní potřeby.

Již z první definice heuristiky je zřejmé, že objevy a vynálezy prostupují všemi oblastmi vědy. Pro účely této práce se zaměříme na heuristiku při řešení úloh v matematice.

Lidé se setkávali s problémovými úlohami a řešili je již ve starověku. Významný řecký matematik Pappus, který žil přibližně ve 3. století př. n. l., se v jedné ze svých knih *Collectiones* zabýval oblastí studia pojmenovanou *analyomenos*, což se překládá jako „umění řešit úlohy“ nebo také „heuristika“. Navazuje zde na Euklidovy *Elementy* a vysvětluje proces analýzy a syntézy. V 17. stol. se systém heuristiky pokusil popsat matematik a filozof René Descartes, který líčí své nadšení pro samostatné objevování ve vědě, přičemž v tomto vlastním objevném počínání začal nacházet užívání jistých pravidel. Další významnou osobností popisující heuristiku je Bernard Bolzano, logik a matematik 19. století. Ten si pro své pojednání o tématu heuristiky v knize *Wissenschaftslehre* kladl za cíl vlastními silami jasně popsat pravidla a výzkumné postupy úspěšných lidí, kteří si těchto faktorů determinujících jejich zdar často ani nejsou vědomi. (Pólya, 2016)

Problematika heuristiky tedy byla v minulosti zkoumána, ale úvahy vzdělanců o ní zůstaly vždy jen v úzkém okruhu vědců, jež se jí zabývali. Tuto izolaci prolomil až matematik maďarského původu George Pólya, právem označován za otce heuristiky, se svou knihou *How to Solve It – A New Aspect of Mathematical Method*. Prostřednictvím této knihy dovedl zprostředkovat heuristiku nejen vědcům, ale také učitelům matematiky či dokonce samotným studentům a významně tak přispěl k nárůstu zájmu o tento obor. (Kopka, 1999) Knihu napsal velmi čtivým a dobře srozumitelným jazykem, tudíž i čtenáři bez matematických znalostí na vědecké úrovni jsou schopni pojmout její obsah a čerpat z něj ve své učitelské či studijní praxi. Na Pólyu pak navazují další matematici, jako jsou profesor Jan Kopka či Miron Zelina.

2.2 Úloha či problém

V publikacích autorů, kteří se zaměřují na problematiku heuristiky a jejího využití ve výuce, se setkáváme s různým označením předmětu zkoumání. Objevují se pojmy *úloha, problém, problémová situace*. Podívejme se tedy, jakým způsobem na ně matematikové nahlížejí.

Pólya (2016) mluví o **úlohách**. Rozlišuje 2 typy úloh:

1. *úloha něco najít,*
2. *úloha něco dokázat.*

„Úloha něco najít" nám vždy předkládá 3 parametry – údaje, podmínky a neznámou. Cílem řešitele tohoto typu úloh je nalézt určitý objekt, který představuje neznámou. V případě algebraických úloh je neznámou číslo, v geometrických úlohách hledáme obrázek. U logických hádanek může být hledaným objektem slovo. Údaje jsou veškeré informace, které jsou nám předloženy jako výchozí bod. Podmínky pak určují vztahy mezi údaji a neznámou.

Pro lepší názornost uvažujeme konstrukční geometrickou úlohu, která nám dává za úkol sestrojit trojúhelník ABC s délkami stran a, b, c. Neznámou zde představuje trojúhelník, údaje jsou tři délky a, b, c a podmínkou je, aby výsledný trojúhelník měl strany o délce právě a, b, c.

Řešitel **„úlohy něco dokázat"** má za úkol nezpochybnitelně určit, zda je předložené tvrzení za všech okolností pravdivé či nikoli. Cílem je tedy jasně dokázat, že je hypotéza pravdivá, nebo naopak nepravdivá. Tyto úlohy nám předkládají dva parametry – předpoklady a závěr věty, kterou máme verifikovat či vyvrátit. Pro žáky na 1. stupni ZŠ je vzhledem k jejich dosud nabytým znalostem příliš náročné provést úplný matematický důkaz (např. formou rovnice, kdy pomocí vhodných matematických úprav získáme stejnou hodnotu na její levé i na pravé straně), proto je běžnou praxí nalezení neúplného důkazu. Ten získáme dosazením několika náhodných hodnot, přičemž daná věta je stále pravdivá.

Pólya zmiňuje také rutinní úlohy, což jsou stále se opakující úlohy, které vyžadují pouhé dosazení do vzorce bez nutnosti aktivního přemýšlení. Tento typ úloh v matematice považuje za vhodný, v žádném případě však nesmí být jediný.

Kopka (2007) operuje s pojmem **„matematický problém"**. Navazuje na amerického didaktika matematiky Jeremyho Kilpatricka (1989), který považuje matematický problém za situaci, kdy přímá cesta k řešení je zablokovaná a k jejímu nalezení užíváme matematické pojmy a principy. Problém v pojetí profesora Kopky má 3 hlavní složky – výchozí situaci, cíl a cestu vedoucí od výchozí situace k cíli. Výchozí situace předkládá informace či údaje a vztahy mezi nimi. Cíl je řešení, kterého chce řešitel dosáhnout, a cesta je způsob, jak se dostat k cíli. Cesta může být pro řešitele známá, nebo ji naopak musí teprve nalézt. Toto je také určujícím faktorem, dle kterého Kopka dělí problémy do kategorií:

1. **Cvičení** či **rutinní problémy** – výchozí situace i cíl jsou jasně stanoveny a cesta je známá. Jestliže žák 5. třídy již ovládá dělení víceciferným číslem a učitel mu

zadá konkrétní příklad dělení víceciferným číslem k vyřešení, zadal mu rutinní problém.

2. **Úloha** či **nerutinní problém**, nebo také **skutečný problém** – výchozí situace i cíl jsou jasně stanoveny, avšak cestu musí řešitel sám teprve nalézt. Například provedení důkazu věty, který žáci nikdy neviděli, je pro ně nerutinním problémem, skutečným problémem. Právě tato kategorie úloh je předmětem heuristického bádání.

Mezi rutinním a nerutinním problémem je velmi nejasná hranice, která je závislá na znalostech žáka. Úloha, která je pro matematicky zdatnějšího žáka již rutinní, může být pro jiného nerutinní. U žáka samotného dochází v průběhu studia k posunu, kdy se pro něj nerutinní úlohy stávají úlohami rutinními.

Kopka se zaměřuje také na kategorii matematického zkoumání, kdy je přesně stanovena výchozí situace, ale cíl je zadán nepřesně nebo není zadán vůbec, tudíž cesta k němu je také neznámá.

Gahér a Marko (2017) vidí značný rozdíl mezi pojmy „úloha“ a „problém“ v závislosti na postupu řešení. **Úloha neboli zadání** je případ, kdy známe konkrétní algoritmus a jeho přesným následováním se dobereme požadovaného výsledku. Je podobná schématu, který řešitel již dobře zná. Úlohu zde plníme či vykonáváme, neboť tato činnost probíhá bez nutnosti rozhodování.

Problémem je v tomto pojetí situace, která neexistuje sama o sobě, ale musí se za ní skrývat subjekt, který se s daným problémem potýká. Subjekt má problém, když se nachází v určitém výchozím bodě A, chce se dostat do cílového bodu B, ale nezná postup, jak překonat překážku, která mezi body A a B stojí. Stěžejní vlastností problému je řešitelova motivace, a to nejen k tvoření hypotéz, ale i k dosažení cíle. Taková situace nevyžaduje pouhé plnění, ale zahájení procesu řešení, které vyžaduje zapojení myšlení a hledání nových postupů k dosažení cíle. Problém se může skládat z menších celků, které pro nás představují úlohy.

Při určení, zda se jedná o problémovou či bezproblémovou situaci se Gahér a Marko shodují s předchozími autory. Rozdíl určuje úroveň znalostí řešitele a jeho schopnost vytvořit si o problému správnou představu. Tento faktor se mění, proto získáváním nových zkušeností a seznamováním se s novými algoritmy řešení se z problémových situací stanou úlohy.

Maňák a Švec (2003) v souvislosti s heuristikou mluví o **problému**. Vychází z faktu, že v běžném životě řešíme problémy neustále, ať už jsou banální či vyžadují notnou dávku přemýšlení. Ve školním prostředí má problém své vyznačené hranice, je to navozená situace, kdy žák nezná jasný algoritmus řešení a pomocí svých aktuálních znalostí ji nedovede vyřešit. Problém je v tomto pojetí kombinací situace obtížné, nejasné a nové. Postupným objevováním hledáme odpovědi na otázky, pomocí kterých problém řešíme.

Princip problému vychází z přirozené potřeby člověka poznávat okolní svět, orientovat se v něm a chápat jevy, které ve světě pozorujeme. Jistě dobře známe velmi četné otázky malých dětí začínající slovem „proč“ (proč je tráva zelená, proč ve dne svítí Slunce a v noci Měsíc, proč v zimě sněží, ...). Objevování a hledání odpovědí na otázky, tudíž řešení problémů, je tedy přirozený proces, který započal již při našem narození a dál jej rozvíjíme i ve starším věku.

František Kuřina (2011) vidí rozdíl mezi **cvičením, úlohou** a **problémem**. Pro splnění cvičení nám stačí pouhá znalost postupu, který přímo vyplývá z textu úlohy. Úloha už vyžaduje kombinaci několika algoritmů, které musíme vhodně určit a použít k řešení. Dovednost řešit cvičení a úlohy je dle autora otázka matematické gramotnosti žáka, které by měl na určité úrovni dosáhnout po ukončení příslušné etapy vzdělání. Problém není řešitelný rutinními algoritmy, ale k jeho řešení je nutný tvořivý přístup, díky kterému najdeme svou vlastní, originální cestu k cíli.

Z uvedeného vyplývá, že terminologie v tomto ohledu není jednotná. Pro účely této diplomové práce budeme považovat pojmy úloha, problém a problémová situace za synonyma, a to ve významu nestandardních úloh, kdy neznáme algoritmus vedoucí k řešení, ale musíme jej hledat vlastními cestami. Právě tyto úlohy jsou předmětem zkoumání heuristiky.

2.3 Tvořivost

Jak vyplývá z RVP ZV, velký důraz je kladen na rozvoj tvořivosti žáků. Tvořivost je prostředkem seberealizace, díky tvořivosti dovedeme nalézat nová řešení problémů, se kterými se setkáváme, vytváříme nové originální dílo. S tvořivostí se neodmyslitelně pojí aktivita a samostatnost. Aktivitou ve školním prostředí rozumíme intenzivní činnost žáka ať už vlivem vnitřního zájmu nebo vědomého úsilí. Samostatnost pak vnímáme jako *„učební aktivitu žáků, při níž žáci získávají poznatky a dovednosti vlastním úsilím, relativně bez cizí pomoci, a to hlavně řešením problémů“*. (Maňák, 1998, s. 41) Tyto dva faktory jsou jakýmsi předstupněm tvořivosti, neboť bez samostatnosti nemůžeme tvořit a bez aktivity nemůžeme být samostatní.

Můžeme tedy tvrdit, že k tvořivosti dojdeme postupným následováním kroků aktivita → samostatnost → tvořivost.

Tvořivost se vyznačuje dvěma vlastnostmi, kterými jsou novost a užitečnost. Je pravděpodobné, že žák na 1. stupni nevytvoří něco naprosto nového z pohledu společnosti, ale může vytvořit něco nového ze subjektivního hlediska, něco nového pro žáka samotného nebo jeho vrstevníky. (Pecina, 2008)

Například pro studenty střední školy je naprosto rutinní záležitostí vypočítat obvod obdélníka pomocí vzorce $o = 2a + 2b$. Žáci v nižších ročnících 1. stupně ZŠ tento vzorec ještě neznají. Jestliže si však uvědomí, že obvod obdélníka získají sečtením všech jeho stran, vzorec sami vytvoří. Výrazně tak přispějí k rozšíření svých znalostí a k rozvoji vlastních dovedností. Vytvořený vzorec je tedy z pohledu žáka nový i užitečný. Slovy profesora Kopky (2007, s. 9): *„I žáci a studenti všech stupňů škol mají možnost poznat tvůrčí aspekt matematiky, pokud se s nimi matematika „dobře dělá“.“* Heuristická metoda svým přístupem provádí žáky všemi třemi jevy od aktivity až k tvořivosti.

3. Heuristická metoda v systému výukových metod

Pro lepší pochopení heuristické metody je nasnadě definovat, co to vlastně metoda je. Metoda vychází z řeckého slova „*methodos*“, což v překladu znamená *cesta, postup*. Ve školním prostředí mluvíme o výukové (vyučovací) metodě, kterou chápeme jako účelně stanovený model uspořádání činností učitele a žáka tak, aby došlo k optimálnímu osvojení učiva a dosažení výchovně-vzdělávacích cílů. (Skalková, 2007)

Existuje mnoho přístupů ke klasifikaci výukových metod dle různých faktorů. Abychom lépe porozuměli postavení heuristiky v systému metod, uvedeme si zde pojetí Maňáka a Švece (2003), kteří rozlišili výukové metody na metody klasické a aktivizující.

Klasické výukové metody dělí na:

1. metody slovní

Tyto metody jsou založeny na percepci a porozumění řeči, jež je základem myšlení, a osvojení nových poznatků. Základním prvkem je slovo mluvené či psané. Mluvená forma probíhá v podobě monologické, tj. takové, kdy učitel vykládá látku a žáci jej pasivně poslouchají, nebo dialogické, kdy se žáci aktivně zapojují do učebního procesu formou sdílení myšlenek, a to jak mezi učitelem a žákem, tak i mezi žáky navzájem. Patří zde vyprávění, vysvětlování, přednáška, dialog, rozhovor. Psaná forma je uskutečňována v podobě práce s učebnicí, knihou či jiným textovým materiálem, nebo vypracováním písemné práce.

2. metody názorně-demonstrační

Tyto metody vycházejí z didaktické zásady názornosti, známé již od dob J. A. Komenského. Žáci se dostávají do kontaktu s předměty a jevy, které jsou jim přímo předváděny či zobrazeny. Rozvíjí tak vlastní představy, konkretizují abstraktní pojmy a propojují školní učivo s reálnými životními skutečnostmi.

Mezi tyto metody řadíme předvádění a pozorování reálných předmětů a jevů, předvádění činností, pokusů a modelů. Dále pak práci s obrazem, a to buď statickým ve formě fotografií a schémat, nebo dynamickým v podobě projekce filmů či videí. Pozorování bývá spojeno s otázkami či úkoly, které žáky aktivizují a směřují jejich pozornost žádoucím směrem. Zařazujeme zde také instruktáž. Názorně-demonstrační metody jsou doplňovány slovními metodami, kdy je předváděný předmět doprovázen např. popisem.

3. **metody dovednostně-praktické**

Základem těchto metod je přímá činnost žáků vedoucí k rozvoji jejich psychomotorických a motorických dovedností. Jedná se o vytváření dovedností, napodobování, manipulování, laborování, experimentování. Součástí jsou také produkční metody realizované formou fyzické práce, přičemž výstupem je žákův vytvořený produkt, výtvor nebo výkon. Tyto metody se nejčastěji uplatňují ve výchovných předmětech (výtvarná výchova, pracovní činnosti, hudební výchova, tělesná výchova).

Za aktivizující (v některých publikacích *inovativní,* např. Zormanová, 2012) výukové metody jsou považovány takové postupy, pro které je charakteristické aktivní zapojení žáka do výchovně-vzdělávacího procesu s důrazem na myšlení a řešení problémů. (Jankovcová, Koudela, Průcha, 1989) K poznání dochází na základě žákova samostatného objevování, vyhledávání a zpracování informací. Akcent je kladen na rozvoj žákovy tvořivosti, nezávislosti a formování žákovy osobnosti.

Do této kategorie dle Maňáka (2003) řadíme diskusní, situační, inscenační metody, didaktické hry a také metody heuristické a problémové, kterými se z důvodu zaměření této práce budeme věnovat podrobněji v příští podkapitole.

Diskusní metody navazují na klasickou metodu didaktického rozhovoru a jsou založeny na komunikaci jak mezi učitelem a žáky, tak i žáky navzájem. Každý účastník diskuse má možnost vyjádřit vlastní názor na určitý problém vycházející z vlastní zkušenosti, podávat pro něj své argumenty a reagovat na argumenty ostatních. Touto cestou pak třída společně dochází k odpovědi na diskutovaný problém.

Situační metody rozvíjí schopnost žáků vypořádat se s konkrétními reálnými situacemi, které je mohou potkat v běžném životě. Problémový případ je doplněn o situační kontext, jsou jasně dány okolnosti a vztahy a řešení případu není zřejmé. Žáci se tak musí na základě předložených a vyhledaných informací rozhodnout a navrhnout postup řešení dané situace. V následné diskusi žáci vyberou nejlepší z vymyšlených návrhů. Do této skupiny metod řadíme metodu rozboru situace, řešení konfliktní situace, metodu incidentu a dynamickou situační metodu.

Inscenační metody spočívají v hraní rolí. Hlavním smyslem této metody je žákovo sociální učení ve vytvořených modelových situacích. Žáci jsou sami herci a dramaticky ztvárňují určitý typ člověka, zobrazují reálnou situaci ze života nebo kombinaci obou variant. Inscenace může být strukturovaná, tedy postavena na předem vytvořeném scénáři, nebo nestrukturovaná, kdy je určena pouze situace a žáci jsou nuceni improvizovat. Žáci tak prostřednictvím vlastního prožitku a jednání prohlubují nabyté znalosti, svou schopnost empatie, porozumění chování druhých, rozvíjí komunikativní, emocionální a sociální dovednosti, učí se vhodně reagovat v konkrétních situacích.

Didaktická hra vychází z faktu, že hra je jednou z hlavních a přirozených činností dětí. Hra je dobrovolná aktivita, která nemá speciální účel, ale cílem je samotná činnost. Didaktický rozměr nabývá ve chvíli, kdy je hrou sledován výchovně-vzdělávací cíl, nejčastěji upevnění učiva, a to ideálně tak, aby si žák ani neuvědomil, že se učí. Má motivační náboj, vzbuzuje zájem a spontánnost žáků. Rozvíjí jejich kooperaci, cit pro fair-play, zdravou míru soutěživosti, žáci jsou nuceni využívat své nabyté znalosti a dovednosti a vlastní zkušenosti.

3.1 Heuristická metoda

Jak jsme již předeslali, problémová a heuristická metoda je zařazena mezi aktivizační metody. Někteří autoři považují problémovou metodu za metodu využívající heuristický princip, jiní ji vnímají jako *„nejefektivnější a nejpropracovanější heuristickou výukovou strategii"*. (Maňák, Švec, 2003, s. 114) V současnosti společnost klade čím dál větší nároky na školu a její úlohu vychovávat žáky k aktivní a tvořivé činnosti. Výuka heuristickými metodami je součástí moderní koncepce výuky, která se od té tradiční velmi liší. V tradičním pojetí je učitel brán jako vševědoucí, své znalosti žákům sděluje a žák je pasivně přijímá. V heuristickém pojetí je právě žák tím aktivním činitelem. Učitel vede žáky k samostatné činnosti, k pátrání, má zde roli poradce a zejména v začátcích žákovo objevování řídí a usměrňuje. Klade žákům problémové otázky, předkládá atraktivní případy a problémové situace, které vzbudí pozornost žáků. (Maňák, Švec, 2003)

Rozvoj schopnosti žáků řešit úlohy je bezesporu jedním z cílů učitele matematiky. Jsou totiž obrazem situací, se kterými se žáci setkávají v běžném životě a mají být připraveni je úspěšně a efektivně vyřešit. Pólya (2016) označuje řešení úloh jako praktickou dovednost, kterou se žáci musí naučit, stejně jako plavání či lyžování, a každou takovou dovednost získáváme napodobováním a cvikem. Chceme-li se naučit plavat, nejprve pozorujeme plavce, jejich pohyby rukou a nohou a držení hlavy. Následně pohyby sami napodobujeme a opakovaným cvičením se naučíme plavat. S řešením matematických úloh je to analogicky stejné. Pozorováním jiných lidí, jak řeší úlohy a jakým způsobem u toho přemýšlí, a následným napodobováním jejich počínání se nakonec naučíme řešit úlohy samostatně.

Heuristická metoda patří k náročnějším způsobům výuky. Obzvláště pro začínající učitele může být těžkým úkolem řídit výuku tak, aby z ní žáci vytěžili maximální potenciál. Pro efektivitu takto vedené výuky je nutné, aby učitel heuristickou metodu dobře znal a dokázal ji vhodně realizovat. K tomu je nezbytné dodržování určitých zásad, které se týkají žáka, učitele i problémové úlohy. (Petty, 2013)

Základem tvořivého procesu při řešení problémů je zajištění vhodných podmínek. Žáci by se měli pohybovat v přátelském prostředí založeném na vzájemném respektu. Je důležité, aby učitel znal své žáky, měl s nimi dobrý vztah a vzbuzoval v nich vědomí, že mohou beze strachu vyjádřit své myšlenky. V takovém prostředí se žáci mnohem ochotněji a aktivněji zapojují do diskuse a jsou ochotni projevit i názory, které jsou něčím odlišné či nové. Teprve když se žáci nebojí přednést neobvyklé nápady, mohou nalézat nová řešení problémů. (Pecina, 2008)

Učitel by měl disponovat vhodnými osobními vlastnostmi i profesními dovednostmi. Jestliže chce vést žáky k řešení problémů, musí toho být sám schopen. Sám by se měl projevovat tvořivě, inspirativně a být pro žáky vzorem. Z profesního hlediska musí ovládat předmět, který vyučuje, v našem případě se jedná o matematiku. Jestliže chce u žáků rozvíjet mentální operace potřebné k úspěšnému řešení úloh, musí jim poskytnout příležitost k nápodobě a cvičení – dát jim dostatečné množství příležitostí řešit úlohy či pozorovat, jak úlohu řeší učitel. Když učitel řeší úlohu před třídou, měl by sám sobě nahlas klást otázky, které jej vedou k řešení. Jde o stejné otázky, které učitel klade žákům při řešení úlohy, když potřebují pomoct či postrčit. Žáci si tak postupným opakováním některé otázky zvnitřní a také se naučí, jak účinně klást další otázky a využívat nápovědy, které tyto otázky nabízejí. (Pólya, 2016)

Volba vhodné problémové úlohy je velmi náročná, ale o to více důležitá. Kritéria problémové úlohy zformuloval Pecina (2008, s. 43):

- *Problémová úloha musí být v logické návaznosti s dosavadními poznatky žáků.* Jak říká Pólya (2016), je těžké vyřešit úlohu, když víme o problematice málo, ale je to nemožné, nevíme-li o ní nic. Žáci musí disponovat znalostmi a dovednostmi potřebnými k vyřešení problému.
- *Musí být přiměřená jejich možnostem.* Úloha by pro žáky měla být adekvátně náročná. Příliš jednoduché úkoly nezaujmou jejich pozornost a příliš těžké je naopak odradí a žáci se tak do úlohy ani nepustí. Problém musí mít motivační charakter.
- *Musí mít povahu nového poznatku.* Každý vyřešený problém by měl žáka posunout o něco dál. Ať už tím, že získá výsledek, nový poznatek, nebo

nalezením cesty, určitého postupu, který k řešení vedl. Nabyté znalosti využije při řešení dalších problémů, které je vyžadují. (Kalhous, Obst a kol., 2009)

- *Musí u žáka vyvolat chuť poznávat.* Problém má pozitivně zapůsobit na vnitřní motivaci žáka. Problém musí být zajímavý, atraktivní a blízký prostředí, ve kterém se žák pohybuje. Ukázalo se, že žák, který jen stěží dovede vyřešit určitý problém, je úspěšný v řešení stejně těžkého úkolu, který se vztahuje k prostředí, ve kterém žije. (Kopka, 2013)

Učitel musí mít na zřeteli, že žáci nejsou na stejné intelektové úrovni, někteří se s problémem vypořádají rychleji než ostatní. Pro tyto žáky by měl mít v záloze úkoly, které dále pomohou žákovi prohloubit právě objevené.

V průběhu výuky musí učitel dobře odhadnout vhodnou míru řízení. Neexistuje obecně předepsaná míra. Každá třída je jiná a každý žák v ní má trochu odlišnou úroveň matematických dovedností. Když učitel učební činnost řídí příliš, žáci získávají pocit, že nemají prostor řešit problém samostatně. Jestliže však žákům chybí dostatečné vedení, začnou v úloze tápat, což vede k demotivaci a nechuti řešit matematické problémy. Učitel tedy musí bedlivě sledovat každého žáka, pružně reagovat na jeho dotazy a potřeby a ve správný čas podat pomocnou ruku např. ve formě otázek, které žáky nasměrují k řešení. V každém případě je nutné dát žákovi dostatečný časový prostor k samostatnému myšlení. Žáci si mohou vzájemně sdílet své postupy řešení a tím se utvrzovat v myšlence, že vždy existuje více řešení problémů než jen jedno. Na konci výuky by nemělo chybět shrnutí toho, co se žáci dozvěděli. (Petty, 2013)

Na některých školách, kde se vyučuje především tradičními metodami výuky, mohou mít žáci z počátku problém nastavit svou mysl na vlastní objevování poznatků a heuristická metoda pro ně může být náročná. Maňák a Švec (2003) proto doporučují začít metodou řízeného objevování, která zahrnuje hlubší a častější zásahy učitele, a postupně se propracovat k samostatnému objevování.

Proces objevování není důležitý jen pro získání nových poznatků a zkušeností. Žák by zejména měl zakusit radost z objevování a tím získat motivaci k poznávání a objevování v celoživotní praxi.

3.2 Fáze řešení úloh

Pólya (2016) rozlišuje čtyři kroky, kterými každý řešitel na cestě k řešení úlohy prochází. Jsou jimi:

1. *porozumění úloze,*
2. *navržení plánu řešení,*
3. *realizace plánu,*
4. *pohled zpět.*

Jako pomocného průvodce jednotlivými fázemi autor podává seznam otázek, který označuje jako „Seznam“. Jednotlivé otázky jsou právě podle těchto fází rozděleny. Níže se s některými z nich setkáme. Jedná se o pomocné otázky, hledáním odpovědí se posouváme krok po kroku k úspěšnému řešení. Dávají příležitost podívat se na úlohu z jiného pohledu a nabádají nás hledat nepřímé cesty, kudy bychom mohli obejít příliš obtížnou překážku. (Pólya, 2016)

Základem úspěšného zdolání úlohy je dané **úloze porozumět**, protože když nevíme, co se po nás požaduje, nelze tomu vyhovět. Hledáme odpovědi na otázky: „*Co je zde neznámá? Jaké jsou údaje? Jaké jsou podmínky?*“ (Pólya, 2016, s. XX) Uvažujeme, zda jsou podmínky dostačující či nedostačující pro nalezení neznámé, zda jim lze vyhovět či zda si neprotiřečí. V této fázi je nasnadě nakreslit si obrázek pro názornou vizualizaci úlohy a zvolit k němu vhodné a jednoznačné označení tak, aby nám bylo v porozumění úloze nápomocné.

Jakmile jsme úloze porozuměli, hledáme způsob, jak úlohu vyřešit, tedy **navrhneme plán řešení**. Abychom mohli plán sestavit, hledáme souvislosti mezi údaji a neznámou. Chytrý nápad ve smyslu náhlého pokroku směrem k řešení můžeme dostat hned, ale většinou se k němu musíme dostat postupně. Využíváme k tomu mnoha cest, na které nás mohou navádět otázky a nápovědy ze Seznamu. Základem je však alespoň základní znalost tématu, neboť „*je těžké se dopracovat k dobré myšlence, pokud víme málo o daném tématu. A je to zhola nemožné, pokud o něm nevíme nic. Dobré myšlenky jsou založeny na předchozích zkušenostech a předchozích znalostech.*“ (Pólya, 2016, s. 10–11)

Pólyův „Seznam“ napovídá otázkami: „*Znáte nějakou příbuznou/podobnou úlohu? […] Tady je úloha příbuzná té vaší, která již byla vyřešena. Můžete ji využít? Můžete využít její výsledek? Můžete využít její metodu? Uměli byste zavést nějaký pomocný prvek, abyste takové využití umožnili?*“ (Pólya, 2016, s. XX) Jako první tedy v naší paměti hledáme již dříve vyřešenou příbuznou úlohu, která má ideálně stejnou či podobnou neznámou, nebo již dříve dokázanou větu, která se k neznámé váže. Jestliže takovou úlohu či větu nenalezneme, zaměříme se stejným způsobem na údaje či podmínky. Ani to se však nemusí podařit. Pokusíme se tedy úlohu nějak pozměnit, přeformulovat. Tato transformace nás může odvést k nějaké pomocné úloze, která je odlišná od té původní, ale třeba budeme moci využít její výsledek k řešení zadané úlohy. Na závěr této fáze by se měl řešitel ohlédnout, zda použil všechny údaje a zda jeho návrh řešení naplňuje všechny podmínky vymezené v zadání.

Jakmile jsme sestavili plán řešení, je čas na jeho **realizaci**. Ta je podstatně jednodušší, hlavním předpokladem je trpělivost. Zkoumáme všechny detaily, dokud si nejsme jistí, že je úloha vyřešena správně a můžeme tak kladně odpovědět na Pólyovy otázky se „Seznamu“: *„Vidíte jasně, že tento krok je správný? Umíte dokázat, že je správný?“* (Pólya, 2016, s. XXI) Kontrolujeme korektnost každého kroku, a to buď intuitivně vhledem, nebo formálně důkazem. Žákům mladšího školního věku bude jistě bližší intuitivní kontrola, kdy se řešitel soustředí na určitý detail tak dlouho, dokud je o jeho správnosti skutečně přesvědčen.

V závěru fáze realizace plánu získáváme kompletní řešení úlohy. Neměli bychom však činnost ukončit, ale naopak **ohlédnout se zpět**. Při opětovné kontrole výsledku a kroků, jež k němu vedly, si upevňujeme způsob, jakým jsme postupovali, nabyté znalosti a také rozvíjíme naši schopnost řešit úlohy. Zvláště u náročnějších úloh existuje vyšší pravděpodobnost, že jsme udělali chybu, proto bychom se měli pokusit najít ještě i jiné řešení. „Seznam“ nám klade otázky typu: *„Umíte stejný výsledek získat jinak? Vidíte to na první pohled? Umíte použít výsledek nebo metodu na vyřešení jiné úlohy?“* (Pólya, 2016, s. XXI) Učíme se tak, že neexistuje pouze jedna cesta ke správnému výsledku. Další možností, jak těžit z vyřešené úlohy, je hledat souvislosti s jinými úlohami, při jejichž řešení bychom mohli aplikovat právě využitý postup či použít výsledek již zdolané úlohy.

Maňák a Švec (2003) uvádí pět fází řešení problému:

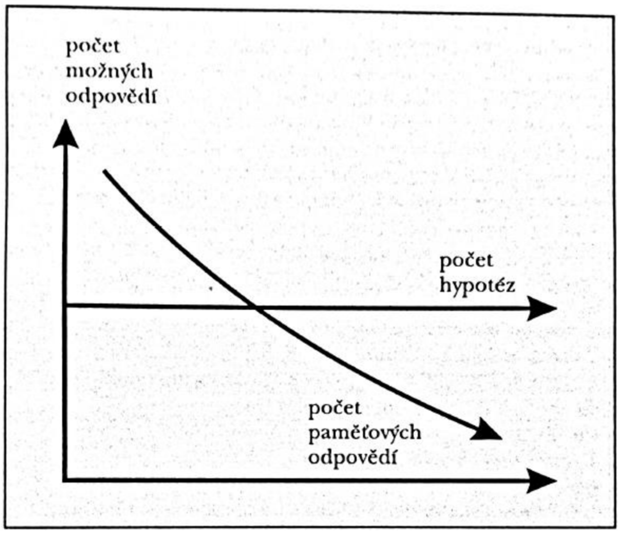
1. *identifikace problému, tj. jeho postižení, nalezení a vymezení,*
2. *analýza problémové situace, proniknutí do struktury problému, odlišení známých a potřebných, dosud neznámých informací,*
3. *vytváření hypotéz, domněnek, návrhy řešení,*
4. *verifikace hypotéz, vlastní řešení problému,*
5. *návrat k dřívějším fázím při neúspěchu řešení.*

První fáze **identifikace problému** je pro žáky počáteční bod, který jim však často dělá potíže, protože ačkoli čtou zadání slovo po slově, mají často problém pochopit jej jako celek, o co v něm jde a co se po nich vlastně chce. Učitelova role je zde pomoci žákům problém rozpoznat a vyjádřit.

Ve fázi **analýzy problémové situace** se žák snaží problém pochopit, jasně definovat cíl a uchopit a strukturovat zadané údaje. Přehledně rozřadí údaje známé a chybějící, pro získání řešení podstatné a nepodstatné a také určí, které údaje je nutné doplnit či odhadnout.

Po rozboru předložených faktů by žák měl **vytvořit hypotézu**. Tento krok je pro heuristickou metodu řešení naprosto zásadní a odlišuje ji tak od algoritmické cesty, která slepě následuje jasně daný sled kroků, který jsme si zapamatovali. Uplatňuje se zde heuristické uvažování, jakožto hledání postupů řešení problému různými způsoby práce s daty a hledáním souvislostí mezi nimi.

Četnost vytvořených hypotéz odráží tzv. Guilfordovo pravidlo (Obr. 2), které tvrdí, že v časovém úseku 12-16 minut je počet navržených hypotéz stále konstantní, a hypotézy dokonce postupně nabírají na kvalitě, zatímco počet odpovědí vycházejících z pamětních spojů rapidně klesá.



Obrázek 2: Guilfordovo pravidlo (Maňák, Švec 2003, s. 117)

Aby se hypotéza stala pravdivou, nesmí chybět **verifikace hypotézy**, tedy objektivní ověření její správnosti v praxi. V tomto procesu je zapotřebí kritického a logického myšlení. Mohou nastat tři případy. Prvním z nich je, že je hypotéza úspěšně ověřena a stává se tak platnou. Druhou možností je odložení verifikace kvůli nutnosti doplnit scházející informace. Poslední variantou je zamítnutí hypotézy, což by žáka nemělo vést k pocitu vlastního selhání, ale naopak k pohledu na věc jako na výzvu k hledání nové cesty. **Vrací se tak k dřívějším fázím** a postup zkouší znovu. Návrat k předchozím krokům slouží také jako zpětná vazba.

3.3 Hrozny problémů dle Jana Kopky

Profesor Kopka v mnoha svých publikacích mluví o hroznech problémů. Touto myšlenkou navazuje na slova Pólyi: *„Dobré úlohy a houby určitého druhu mají něco společného – rostou ve shlucích. Když jsme našli jednu, měli bychom se poohlédnout kolem. Máme velkou šanci, že jsou docela blízko nějaké další.“* (Pólya, 2016, s. 67) Jinými slovy, naše bádání bychom neměli ukončit získáním výsledku matematického problému, ale z každého úspěchu bychom měli čerpat co nejvíce. Pracovat s výsledkem úlohy, jejími podmínkami či s metodou jejího řešení a využít tak celý potenciál daného tématu.

Metoda tvoření hroznů problémů spočívá ve vytváření souboru vzájemně příbuzných matematických úloh. Učitel určí jeden vhodný základní problém, který společně s žáky vyřeší. Žáci musí mít dostatek prostoru pořádně pochopit problém i metodu, která vede k jeho řešení. Poté nastává čas pokusit se vytvořit problém podobný tomu, jenž třída právě vyřešila, tedy tvořit hrozen problémů. Jedná se o problém, při kterém žáci využijí znalosti a zkušenosti nabyté řešením základního problému. Může to být úloha, ve které jsou pouze změněny zadané číselné hodnoty, může tam být pozměněna jedna či více podmínek, později se mění dokonce i obsah problému. První nově vzniklé problémy se od základního problému liší jen minimálně, i metoda řešení je úplně nebo téměř beze změny. Čím více příbuzných problémů učitel s žáky vytváří, tím více žáci pronikají do dané problematiky a nalézají odlišnější problémy. Metoda řešení v návaznosti na nový problém také často vyžaduje obměny. Touto posloupností žák nakonec dovede vyřešit problém, se kterým by si před vyřešením předchozích problémů nebyl schopen poradit.

Po určité době pozorování žáci sami začnou vymýšlet vlastní modifikace problémů a vytvářet tak hrozny problémů. Je to pro ně velkým motivačním faktorem.

Výchozím bodem je tedy základní problém. Pomocí něj vytváříme podobné problémy, které společně s ním tvoří hrozen problémů. (Kopka, 1999)

4. Heuristické strategie

Matematika je považována za vědu ryze deduktivní, tedy vědu, která vychází z dokázaných axiomů a s jejich pomocí odvozuje a odůvodňuje platnost dalších matematických tvrzení. Deduktivní metoda v matematice spočívá v provádění důkazů, které jsou pro matematickou správnost nezbytné. V kontrastu k matematice stojí přírodní vědy, jejichž hlavní činností je opakované vykonávání experimentů, díky kterým odhalují obecné zákonitosti, jež považují za pravdivé. Tento způsob označujeme jako induktivní, tedy objevovací.

Matematika navzdory svému pojetí však zdaleka nepoužívá jen dedukci. Aby matematici mohli určitou větu dokázat, musí ji nejdříve objevit, a to lze pomocí pozorování, porovnávání a experimentování, což jsou nástroje indukce. Na základě pozorování těchto experimentů a zobecněním jejich výsledků vysloví hypotézu. Teprve tehdy přichází na řadu přesný důkaz, který tvrzení potvrdí nebo vyvrátí. Z toho vyplývá, že matematika je ve své výzkumné praxi vědou experimentálně induktivní a dedukcí tuto činnost završuje. Nejprve tedy prostřednictvím pokusů a neúplné indukce dojde k objevu a poté je jeho pravdivost deduktivně dokázána. (Kopka, 1999)

Nepleťme si ale indukci s matematickou indukcí. Matematická indukce je jedna z dokazovacích metod, tedy metoda deduktivní, která s indukcí (objevováním) nemá kromě názvu žádnou logickou spojitost. Jedná se o technický výraz pro způsob „důkazu od n k $n + 1$“ či „přechod k dalšímu číslu“. Důkaz v podobě rovnice, která je platná pro všechny číselné hodnoty o 1 větší než předchozí, přičemž dokazované tvrzení pro $n = 1$ platí. (Pólya, 2016)

Jak zde můžeme vidět, matematika se jako vědní obor neustále vyvíjí a prostřednictvím heuristické neboli objevné metody a jejích strategií žáci mohou na vlastní kůži poznat, jak vzniká. Žáci si sami vyzkoušejí matematické objevování, byť už dané věty dokázal někdo před nimi. Pochopí, že tento předmět není o pamětném memorování izolovaných pouček a vět, ale že jedna s druhou souvisí a navazují na sebe. Takové poznání má pozitivní vliv na motivaci žáků k řešení problémů v matematice.

Pod pojem heuristické strategie můžeme shrnout činnosti, které se uplatňují v procesu matematického zkoumání a při řešení problémů. Patří mezi ně pozorování, experimentování, porovnávání atd. Žák se má ve škole naučit řešit matematické problémy. K této dovednosti je velmi užitečný trénink výše uvedených charakteristických činností, které se při řešení matematických problémů často využívají. Kopka (2013) tyto činnosti neboli heuristické strategie vnímá jako *„nástroje, které nám pomáhají při hledání cesty k cíli"* či *„činnosti, které matematik dělá, když řeší nerutinní problémy či zkoumá"*. (Kopka, 1999)

Tyto strategie jsou úzce spjaty s heuristickým uvažováním. Jedná se o uvažování, jež nelze považovat za konečné a přesné, neboť nebylo ověřeno důkazem. Jsou to pouze věrohodné, experimentální, provizorní úvahy, avšak nezbytné pro hledání řešení problému. Heuristické uvažování slouží k získání přesného důkazu, neboť obsahuje jeho zárodky. Dokud však přesný důkaz nemáme, musí nám stačit tento věrohodný, nikoli však jistý odhad. (Pólya, 2016)

Při řešení problémů pomocí heuristických strategií se můžeme vydat třemi cestami. Jsou jimi:

- **aritmetická cesta** neboli numerická cesta – hledá řešení pomocí čísel, nezavádí neznámou,
- **algebraická cesta** neboli sestavení rovnice nebo soustavy rovnic s jednou nebo více neznámými – vyžaduje abstraktní myšlení a znalost algebry, proto je vhodná až na 2. stupeň ZŠ,
- **geometrická cesta** neboli grafické znázornění – zahrnuje v sobě ilustrační obrázek, řešitelský obrázek a využití grafu funkce.
  (Přibyl, Ondrušová, 2014; Kopka, 2013)

Dle Eisenmanna (2017) nejsou všechny heuristické strategie na stejné úrovni obtížnosti. Některé strategie mohou žáci díky svým dosavadním zkušenostem užívat spontánně bez předchozího nácviku, neboť jsou velmi jednoduché a intuitivní. Jiné strategie jsou naopak složitější na pochopení a aplikaci při řešení problémů.

Heuristických strategií je velké množství. Vzhledem k zaměření diplomové práce jsme vybrali ty, které považujeme za využitelné na 1. stupni ZŠ:

- pokus-omyl,
- pokus-ověření-korekce,
- systematické experimentování,
- grafické znázornění,
- analogie,
- zavedení pomocného prvku,
- cesta zpět.

4.1 Pokus-omyl

Heuristická strategie pokus-omyl je nejjednodušší a nejspontánnější metoda ze všech. Již v první třídě ZŠ ji žáci využívají naprosto intuitivně a bez potřeby jakéhokoli předchozího představení. Strategie spočívá v provádění pokusů, přičemž zkoušíme libovolné možnosti, dosazujeme náhodně vybrané hodnoty a doufáme, že se nám podaří získat správný výsledek. Následující pokus není nijak ovlivněn výsledkem pokusu předchozího. Jestliže v dalším pokusu zohledníme výsledek již provedeného pokusu, mluvíme o strategii pokus-ověření-korekce, která je popsána v příští podkapitole. Náhodné experimentování však může být velmi zdlouhavé a ne vždy nás dovede k žádanému výsledku.

Tato metoda ve školské matematice není příliš procvičovaná, spíše ji žáci využívají, když je nenapadá lepší postup. Navzdory tomu je metoda hojně využívána techniky a vědci přírodních věd a díky ní vzniklo za pomoci kvalitní výpočetní techniky mnoho technologických vynálezů. (Kopka, 2013)

4.2 Pokus-ověření-korekce

Jak vyplývá z předchozího odstavce, strategie pokus-ověření-korekce nebo také odhad-ověření-oprava vychází z metody pokus-omyl, ale s tím rozdílem, že každý pokus v řadě je ovlivněn předchozím experimentem. V úvodu odhadneme řešení problému. Odhad provádíme na základě našich předchozích znalostí a zkušeností. Následně provedeme pokus a ověříme, zda výsledek odpovídá požadavkům zadání či nikoli. Jestliže ano, máme hotovo. Druhá varianta, tedy neúspěch, je však častější a vyžaduje nový pokus. Vstupní hodnoty jsou pak ovlivněny výsledkem předchozího pokusu tak, abychom se ke správnému výsledku přiblížili. Tento proces opakujeme, dokud nezískáme správné řešení matematického problému.

Zejména při aritmetických úlohách je nápomocné zaznamenávání jednotlivých pokusů do tabulky. Její názornost nám usnadní objevení případné zákonitosti, která může urychlit proces hledání řešení. (Kopka, 2013)

Řešený problém 1:

Maminka má za týden narozeniny. Eliška se rozhodla, že jí koupí dárek za 10 korun. Zatím nemá našetřeno nic, ale tatínek jí každý den dává 2 koruny kapesného. Stihne Eliška našetřit dostatek peněz, aby mamince koupila dárek včas? Kolik dní bude šetřit?

K vyřešení problému musíme doplnit příklad $2 \cdot \square = 10$ (uvažujme, že žáci ještě neumí dělit). Číslo v obdélníku udává počet dní, které bude Eliška šetřit na dárek. Tento příklad také použijeme pro demonstraci rozdílu mezi strategiemi pokus-omyl a pokus-ověření-korekce. Při použití strategie pokus-omyl žáci do obdélníku dosazují náhodná čísla, ověří správnost výpočtem a v případě chybného dosazení zkoušejí další náhodná čísla. Pokud však po provedení prvního pokusu, např. po doplnění čísla 2, pochopí, že číslo na pravé straně rovnice je větší než na levé a v dalším pokusu tedy musí doplnit vyšší číslo, uplatňují strategii pokus-ověření-korekce.

Řešení příkladu pomocí strategie pokus-ověření-korekce by mohlo vypadat následovně:

1. pokus: 2 dny	$2 \cdot 2 = 4$	$4 < 10$	zvýšit počet dní
2. pokus: 4 dny	$2 \cdot 4 = 8$	$8 < 10$	zvýšit počet dní
3. pokus: 6 dní	$2 \cdot 6 = 12$	$12 > 10$	snížit počet dní
4. pokus: 5 dní	$2 \cdot 5 = 10$	$10 = 10$	správné řešení

Odpověď: Eliška stihne koupit mamince dárek včas, bude na něj šetřit 5 dní.

4.3 Systematické experimentování

Systematické experimentování je strategie, která spočívá v systematickém realizování pokusů, během kterých se řešitel postupně přibližuje k požadovanému výsledku. Vycházíme z jistoty, že řešení úlohy se nachází v řetězci výsledků, který systematickým prováděním pokusů vytvoříme.

Jako výchozí bod si zvolíme konkrétní vstupní hodnotu, kterou v každém dalším experimentu nepatrně změníme tak, abychom se ve vzniklé posloupnosti výsledků dostali až k tomu správnému, jež vyhovuje zadání úlohy. Během experimentování můžeme vyčerpat všechny vstupní hodnoty z uvažované množiny potenciálních výsledků a prozkoumat tak všechna možná řešení, nebo odhadnout hodnotu, která by mohla vyhovovat řešení problému, od ní se odrazit jako od výchozího bodu a dále pokračovat systematicky. Zkoumáme tedy pouze určitou podmnožinu možných řešení, tudíž počet experimentů je menší. Tato varianta je vhodná pouze v případě, kdy je jisté, že řešení je pouze jedno, tedy po jeho nalezení již není nutné prověřit ostatní varianty. Například jestliže ve výsledcích experimentů vypozorujeme jejich pravidelně stoupající hodnoty, můžeme po nalezení správného řešení ukončit proces a odůvodnit to argumentem, že hledaná hodnota se vzhledem ke stoupající tendenci v dalších pokusech již nemůže opakovat. (Eisenmann, Přibyl, 2013)

Pro tuto strategii je typické užívání tabulek a schémat, do kterých jsou jednotlivé možnosti systematicky a přehledně zaznamenávány. Takto uspořádaná data umožňují pozorování případných zákonitostí či posloupností a následné hledání odpovídajícího vzorce, kterým lze zákonitost vyjádřit. Objevení zákonitostí vede také k vyslovení hypotéz, které mohou být dále ověřovány. Díky sledování pravidelností, například zjistíme-li, že výsledek následujícího experimentu je vždy o 2 vyšší než toho předchozího, můžeme lépe odhadnout, jak daleko se nachází hledané řešení. (Kopka, 2013)

Pro vyšší efektivitu tohoto řešitelského procesu se hojně využívá výpočetní technika, zejména tabulkové procesory typu Microsoft Excel. Užití informačních technologií výrazně zkrátí dobu experimentování, obzvláště když je množina potenciálních řešení velká. Uživatel do tabulky vloží pouze vstupní hodnoty a požadovanou operaci a následně zkoumá výsledky. Oproti ručnímu výpočtu je tento způsob výrazně rychlejší. Užití počítače v rámci této strategie je označováno jako užití tzv. hrubé síly ve smyslu *„vyčerpávání jednotlivých možností z množiny všech potenciálních výsledků“*. (Eisenmann, Přibyl, 2013, s. 85)

Strategii systematického experimentování si ukážeme na stejném problému, jako v předchozím případě.

Řešený problém 1:

Maminka má za týden narozeniny. Eliška se rozhodla, že jí koupí dárek za 10 korun. Zatím nemá našetřeno nic, ale tatínek jí každý den dává 2 koruny kapesného. Stihne Eliška našetřit dostatek peněz, aby mamince koupila dárek včas? Kolik dní bude šetřit?

Pro lepší přehlednost vytvoříme tabulku (Tab. 1). První sloupec vyjadřuje počet dní, kdy Eliška šetří. Ve druhém sloupci počet dní vynásobíme dvěma, protože každý den získá 2 koruny. V posledním sloupci vyhodnotíme, zda se Elišce za daný počet dní podařilo získat potřebných 10 korun, či nikoli.

Tabulka 1: Řešený problém 1 - systematické experimentování

Počet dní	**Našetřené peníze**	**Našetřila dostatek?**
1	2	ne
2	4	ne
3	6	ne
4	8	ne
5	**10**	**ano**

V tab. 1 jasně vidíme, že počet našetřených korun se s každým dnem zvyšuje o 2. Není tedy nutné v systematickém experimentování pokračovat.

Odpověď: Eliška stihne koupit mamince dárek včas, bude na něj šetřit 5 dní.

4.4 Grafické znázornění

Grafické znázornění neboli geometrická cesta spočívá v nakreslení náčrtku. Ten je velmi důležitý pro vytvoření názorné představy, díky které je pro nás podstatně jednodušší problém pochopit a zformulovat. Obzvláště pro žáky na 1. stupni ZŠ je zásadní konkretizovat problém, neboť schopnost řešit problémy pouze pomocí abstraktního myšlení dovedou žáci až na 2. stupni ZŠ. Slovy Kopky (2013, s. 27): *„Vhodný obrázek je mnohdy lepší než tisíc slov."*

Pólya (2016) doporučuje načrtnutí obrázku v první fázi řešení všech problémů, a to nejen těch geometrických. Grafické znázornění si u velmi jednoduchých geometrických úloh stačí jen představit, ale jakmile zadání obsahuje více podmínek a my potřebujeme zkoumat detaily, nakreslení obrázku nám výrazně usnadní práci. Vidíme totiž všechny podmínky úlohy najednou a můžeme tak lépe pozorovat vzájemné souvislosti mezi prvky.

Při znázorňování vycházíme z předpokladu, že problém je řešitelný a je tedy možné vyhovět všem zadaným podmínkám. Tento předpoklad však nebereme jako jistou věc, to lze až po získání finálního řešení. Obrázek můžeme nakreslit jednoduše rukou, měl by však splňovat základní tvary, např. přímka by měla být přibližně rovná apod. Měl by být dostatečně obecný, neměly by z něj vyplývat vlastnosti, které nejsou pravdivé, např. jestliže 2 přímky nejsou rovnoběžné, neměly by tak být znázorněny. V náčrtku můžeme pro lepší orientaci užívat různé typy a tloušťky čar či více barev. Do obrázku zaznamenáme nejen údaje, ale také vlastní úvahy, poznámky, ke kterým se můžeme později vrátit. Obzvláště u složitějších či rozvětvených problémů nám zaznačené poznámky připomenou průběh našich úvah, vypozorované detaily a ušetří nás tak ztráty důležitých předchozích myšlenek. (Pólya, 2016)

S obrázky se pojí označení jejich prvků. Obrázky a symboly úzce souvisí s matematickým myšlením a jejich užití můžeme vnímat jako překlad z běžného jazyka do jazyka matematického. Volba vhodného označení nám může pomoci k lepšímu porozumění úloze, neboť musíme přemýšlet nad každým z jejích prvků zvlášť.

Vhodně zvolené označení musí mít určité kvality. Mezi ně patří zejména výstižnost a jednoznačnost. Bylo by pro nás velmi matoucí, kdybychom stejným symbolem označili v rámci jednoho problému různé objekty, proto každý z nich musí mít vlastní symbol. Znaky by měly být také snadno zapamatovatelné, aby nám jejich podoba přímo evokovala příslušné objekty a obráceně. Prvky často označujeme prvním písmenem jejich názvu, např. pata kolmice se běžně označuje písmenem P. Jestliže bychom však narazili na dva objekty, které se běžně popisují stejným symbolem, je nutné vytvořit alternativní znak. Objekty ve vzájemné relaci se vyplatí popisovat souvisejícími znaky, např. chceme-li vyjádřit souvislost mezi vrcholem trojúhelníka, jeho protější stranou a úhlem při tomto vrcholu, používáme označení A, a, α, tedy stejná písmena různých abeced. Měli bychom se také vyhnout označení, které má druhý, a dokonce tradiční význam. Jestliže např. chceme označit úhel kruhové výseče, vyhneme se symbolu π, které by se nám pletlo s Ludolfovým číslem π. Takovéto pevně zakotvené symboly je vhodné spojovat pouze s jejich tradičním významem. Stálé označení také přináší výhody při rozpomínání se na naše znalosti nabyté v konkrétním tvaru. (Pólya, 2016)

Negeometrické problémy můžeme znázornit pomocí diagramů či grafů, které vlastně mají geometrickou podstatu, tudíž i tyto problémy mohou být snadněji řešitelné, pokud vytvoříme obrázek. (Pólya, 2016)

Obrázek může být ilustrační nebo řešitelský. Další variantou je využití grafu funkce, ta je však použitelná až na 2. stupni ZŠ.

Ilustrační obrázek nám umožní vhled do problému a jeho lepší uchopení, vyznačíme v něm, co je dáno a co chceme získat. Můžeme z něj vyčíst údaje, které ze zadání nejsou na první pohled patrné. Samotným náčrtkem však nezískáme řešení daného problému a je nutné pokračovat v jeho hledání dalšími výpočty či jinými strategiemi. Často jej používáme při řešení geometrických úloh.

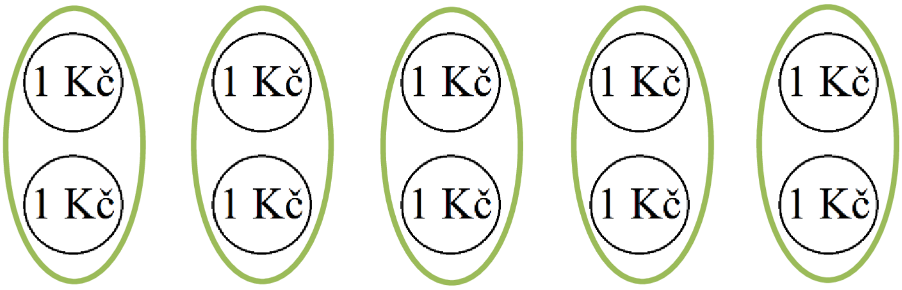
Druhou variantou je řešitelský obrázek, jehož samotným vytvořením a často také manipulací s ním (např. dokreslením pomocných prvků) nás napadne finální výsledek úlohy. (Novotná a kol., 2014)

Strategii budeme demonstrovat opět na problému 1, vytvoříme řešitelský obrázek.

Řešený problém 1:

Maminka má za týden narozeniny. Eliška se rozhodla, že jí koupí dárek za 10 korun. Zatím nemá našetřeno nic, ale tatínek jí každý den dává 2 koruny kapesného. Stihne Eliška našetřit dostatek peněz, aby mamince koupila dárek včas? Kolik dní bude šetřit?

Nakreslíme si 10 mincí, které Eliška potřebuje získat. Poté každé dvě koruny zakroužkujeme (Obr. 3). Počet kroužků nám pak udá počet dní, které bude Eliška šetřit.



Obrázek 3: Řešení problému 1: grafické znázornění

Odpověď: Eliška stihne koupit mamince dárek včas, bude na něj šetřit 5 dní.

4.5 Analogie

Analogie představuje určitý druh podobnosti mezi dvěma objekty. V mnoha oblastech života i vědy panuje předpoklad, že v podobných situacích najdeme podobné vztahy mezi jejími účastníky. Výzkumy v medicíně hojně využívají analogii mezi člověkem a zvířaty, když zkoumají účinky nového léku. Stejně tak i v matematice můžeme najít obrovské množství analogií. (Kopka, 2013) Učitel matematiky často vede žáky k tomu, aby využívali dovednosti a znalosti získané v rámci určitého tématu i u tématu nového, aby je aplikovali v jiné situaci. (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015a)

Strategie analogie vychází z předpokladu, že pokud jsou objekty podobné, pak jsou v určitém ohledu vzájemně shodné a shodují se tak i ve vztazích mezi některými jejich částmi.

Pro příklad uvedeme analogii mezi obdélníkem a kvádrem. Vztah mezi stranami obdélníku je podobný vztahu mezi stěnami kvádru. Všimněme si, že každá strana obdélníka je rovnoběžná právě s jednou další stranou a k ostatním je kolmá, stejně tak jako každá stěna kvádru je rovnoběžná s právě jednou další stěnou a k ostatním je kolmá. Označíme-li stranu obdélníka a stěnu kvádru společným názvem, např. „hraniční prvek“ útvaru, pak si můžeme dovolit vyslovit shrnující tvrzení, že každý hraniční prvek je rovnoběžný s právě jedním hraničním prvkem a k ostatním je kolmý. (Pólya, 2016)

Strategii velmi dobře využijeme v případě, kdy si nedovedeme poradit s řešením našeho problému, ale známe jednodušší analogický problém, který umíme vyřešit. Znalosti o jednom objektu můžeme převést na druhý analogický objekt. Jestliže získáme řešení analogického problému, pak máme vzor k následování – můžeme využít výsledek analogického problému, postup jeho řešení či obojí k vyřešení původního problému. (Pólya, 2016)

Jako příklad uvedeme situaci, kdy se žáci již seznámili s násobením číslem 2 a samostatně již vyřešili dostatečné množství slovních úloh. Jejich současným úkolem je odvodit násobení číslem 3 prostřednictvím následující úlohy:

Řešený problém 2:

Milan má 4 lízátka. Katka má 3krát více lízátek než Milan. Kolik lízátek má Katka?

Žáci v našem případě již znají princip této úlohy. Slovo „krát“ udává, že se jedná o případ násobení. Žáci ale ještě neznají násobení číslem 3.

Znají však velmi podobnou úlohu, kterou vyřešit umí. Analogická úloha může znít takto:

Milan má 4 lízátka. Katka má 2krát více lízátek než Milan. Kolik lízátek má Katka?

Žáci vědí, že v případě násobení číslem 2 se jedná o opakované sčítání. Řešení analogické úlohy je jednoduché:

$$4 + 4 = 8$$

Číslo 4 sečetli dvakrát. Metoda opakovaného sčítání žákům poslouží jako vzor k následování, který jim pomůže vyřešit originální problém. Analogickým postupem tedy přičtou číslo 4 třikrát:

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Odpověď: Katka má 12 lízátek.

Pomocí analogie žáci nejenže vyřešili matematickou úlohu, ale také odvodili násobení číslem 3, které využijí při řešení dalších matematických problémů.

Ačkoli je analogie základní řešitelskou strategií pro žáky na 1. stupni ZŠ, výzkumná část o ní pojednávat nebude, neboť předložené úlohy v didaktickém testu na ni necílí.

4.6 Zavedení pomocného prvku

Některé matematické problémy je obtížné vyřešit samy o sobě a je výhodné do nich vložit nový, tzv. pomocný prvek. Strategie zavedení pomocného prvku je ve školské matematice často využívaná, aniž by si to sami řešitelé uvědomovali. Jedná se o objekt, který se v originální podobě úlohy nevyskytuje, ale my jej do ní zavedeme s cílem usnadnit nalezení řešení. (Přibyl, Ondrušová, 2014) Pomocný prvek může mít různou podobu. U geometrických problémů mají své využití pomocné přímky a body, v algebraických strukturách si můžeme pomoci zavedením pomocné neznámé, při řešení úloh můžeme zavést pomocné číslo či pomocnou větu, kterou se snažíme dokázat. (Pólya, 2016)

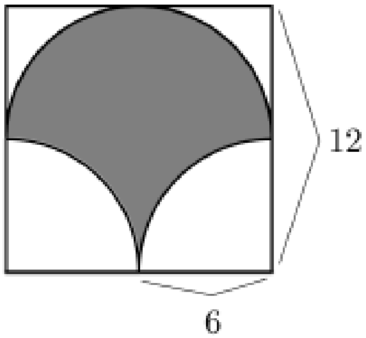
V některých případech se pomocný prvek v úloze již vyskytuje, avšak není explicitně vyjádřen v zadání. Jedná se často o objekty, které jsou samozřejmou součástí jiných objektů, např. úhlopříčka obdélníku. Tyto prvky jsou označovány jako skryté (pomocné) prvky. (Přibyl, Ondrušová, 2014)

Pro zavedení pomocného prvku je důležité mít důvod. Jedním z dobrých důvodů je zavedení takového prvku, který přetvoří původní úlohu do konkrétní podoby tak, abychom k jejímu vyřešení mohli využít znalost již vyřešené příbuzné úlohy. Příbuzná úloha nám může poskytnout vhled do té původní nebo přímo její řešení. Pomocný prvek působí jako most mezi původní úlohou a tou pomocnou. Pólya (2016) přímo definuje pojem pomocná úloha, a to ve smyslu takové úlohy, jejíž výsledek či metodu můžeme použít k řešení aktuálního matematického problému. Vytvoření pomocné úlohy přirovnává k využití kličky, kterou obejdeme překážku, jež není zdolatelná přímou cestou.

Jak jsme již předestřeli, v rámci geometrických úloh často zavádíme pomocný prvek v podobě přímek, úseček, bodů. Ukažme si to na následujícím příkladu:

Řešený problém 3:

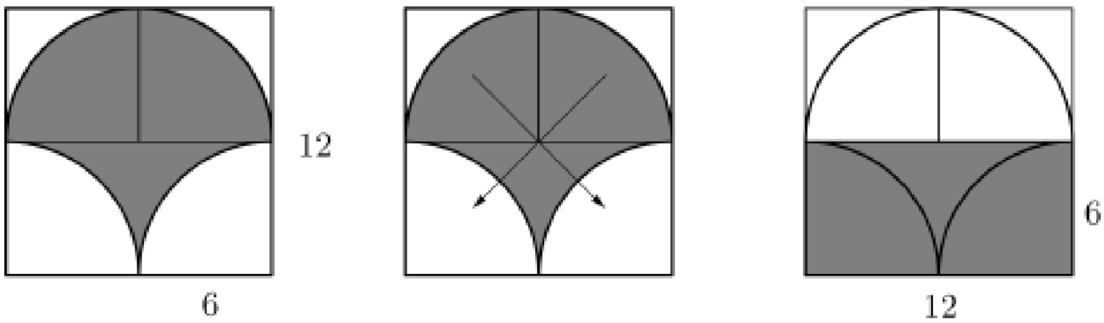
Vypočítejte obsah rovinného obrazce, jehož hranici tvoří vyznačené kružnicové oblouky (vybarven šedě). Údaje na obrázku 4 jsou udány v centimetrech. (Maláč, 1981)



Obrázek 4: Zadání řešeného problému 3

Tento problém má samozřejmě více způsobu řešení. Mohli bychom dojít k řešení pomocí vzorců pro obsah kruhu a čtverce. Použijeme-li však strategii zavedení pomocného prvku, ušetříme si mnoho výpočtů.

Naše řešení bude zahrnovat práci s obrázkem v zadání. Do něj nakreslíme dvě úsečky, kterými šedý útvar rozdělíme na tři části (Obr. 5). Pomyslným přemístěním těchto částí dokážeme, že obsah našeho útvaru je stejný jako obsah obdélníku se stranami o délce 6 a 12 centimetrů.



Obrázek 5: Řešení problému 3 – zavedení pomocného prvku (Přibyl, Ondrušová, 2014)

V tuto chvíli nám zbývá jen provést výpočet obsahu obdélníku: $S = 6 \cdot 12 = 72cm^2$. Obsah rovinného obrazce je tedy $72cm^2$. (Přibyl, Ondrušová, 2014)

Tento způsob řešení ukazuje, že ač to na první pohled nemusí být zřejmé, k vyřešení problému je potřebné znát pouze vzorec pro výpočet obdélníku, tedy učivo 1. stupně ZŠ.

4.7 Cesta zpět

Cesta zpět neboli strategie pracovat pozpátku je v matematice hojně využívaná metoda již na 1. stupni ZŠ. Metoda vychází z předpokladu, že co máme najít jsme již našli a co máme dokázat již platí (úloha je řešitelná). Máme zadaný počáteční stav, známe koncový stav a jdeme od konce směrem k počátku. Přemýšlíme od konečného výsledku směrem k předchozím krokům. Uvažujeme tedy, jaký krok je předstupněm koncového stavu a v tomto přemýšlení pokračujeme při hledání dalšího kroku, který předcházel tomu, na který jsme právě přišli. Takto postupujeme, dokud se nedostaneme do počátečního stavu problému. Jednotlivými kroky tak nalezneme konkrétní řetězec operací. Ten je však řazen opačně, než je skutečný postup řešení, a proto jej musíme celý obrátit. Poslední krok řetězce bude ve výsledku prvním a první krok bude posledním. Tímto získáme řešení problému, ať už se jedná o důkaz věty či nalezení neznámé. Obrácení toku myšlenek je obecně náročné, proto tento princip musí učitel žákům dobře vysvětlit. (Pólya, 2016)

Historie této strategie sahá až do doby před Kristem, kdy řecký matematik Pappus z Alexandrie popsal metodu analýzy a syntézy. V rámci analýzy (řešení odzadu) postupoval od koncového bodu problému k počátku, který známe, k bodu, který je vhodný pro začátek syntézy. Syntéza (postupné zdůvodňování) je přesným opakem analýzy. Vychází v bodě, kde analýza skončila a jde po jednotlivých krocích analýzy až k jejímu výchozímu bodu, tedy ke koncovému stavu. (Pólya, 2016)

Strategie cesta zpět se velmi často využívá při konstrukční geometrii. Jestliže máme za úkol sestrojit trojúhelník, začneme rozborem. Předpokládáme, že trojúhelník existuje a lze jej sestrojit. Uvažujeme, jak bychom mohli jednotlivé části sestrojit, naše myšlenky se ubírají od konečného útvaru k zadaným údajům. Snažíme se najít kroky, které musíme učinit, aby se nám podařilo útvar zkonstruovat. Následné narýsování trojúhelníka pak představuje vyřešení problému a postupuje od zadání ke konečnému výsledku. (Kopka, 2013)

Heuristická strategie cesta zpět je velmi efektivní při řešení úloh, u kterých se nám vyplatí použít inverzní operace k operacím uvedeným v zadání. Na jedné z nich předvedeme využití strategie cesta zpět.

Řešený problém 4:

Pavel a Jirka hráli kuličky. Pavel měl na začátku několik kuliček a při hře vyhrál 7 kuliček. Pak měl právě tolik kuliček jako Jirka. Dohromady měli 24 kuliček. Kolik kuliček měl Pavel na začátku hry? (Blažková, Matoušková, Vaňurová, 2009b, s. 60)

Pří řešení cestou zpět musíme začít od konečného stavu. Ten je zadán tak, že Pavel a Jirka mají dohromady 24 kuliček a oba jich mají stejně. Číslo 24 tedy vydělíme 2, abychom získali počet kuliček, které má na konci hry každý z nich.

$$24 \div 2 = 12$$

Každý z nich má na konci hry 12 kuliček. Jelikož víme, že Pavel vyhrál 7 kuliček, musíme na cestě zpět tyto kuličky od Pavlova konečného stavu odečíst, abychom se dostali k počátečnímu stavu hry. Použijeme tedy inverzní operaci ke sčítání.

$$12 - 7 = 5$$

Na závěr provedeme kontrolu cestou vpřed, zda jsme si při cestě zpět počínali správně.

$$5 + 7 = 12$$

$$12 \cdot 2 = 24$$

Odpověď: Pavel měl na začátku hry 5 kuliček.

5. Výhody a nevýhody heuristické metody

Stejně jako všechny metody, má i ta heuristická své přednosti a úskalí. Uvedeme si zde některé z nich.

5.1 Výhody

Jednou z nepopiratelných výhod výuky heuristickou metodou je rozvoj logického a kritického myšlení, tvořivosti žáků a podpory jejich přirozené zvídavosti. Žáci se učí rozpoznat problémy, vytvářet vlastní hypotézy, klást otázky, hledat na ně odpovědi, odhalovat různé způsoby řešení problémů. Uvědomují si, že existuje více cest k řešení jednoho problému, hledají je a porovnávají jejich efektivitu.

Při řešení problémů žáci vycházejí ze svých dosavadních znalostí a zkušeností a nové poznatky s nimi logicky propojují na základě vlastního pochopení. Žák tedy nepřijímá nové informace izolovaně, bez kontextu, ale na základě svého vlastního pochopení je začleňuje do svého osobního systému vědomostí, které na sebe vzájemně navazují. Tím dochází k jejich hlubšímu osvojení a dlouhodobějšímu uchování. Tato metoda vede k pochopení faktů, ne k jejich pouhému mechanickému memorování. Takto získaná fakta žák dokáže mnohem lépe aplikovat při řešení problémů jak ve škole, tak i v běžném životě. Heuristika vyžaduje myšlení vyššího řádu. (Petty, 2013) V Bloomově taxonomii kognitivních cílů úroveň osvojení dosahuje roviny aplikace. (Kalhous, Obst a kol., 2009)

Řešení zajímavého a atraktivního matematického problému zaujme žákovu pozornost, aktivizuje ho a je pro něj zábavná. Aktivní učení a radost z toho, že na něco přišel sám, mu dodává vnitřní motivaci, která je velmi důležitá pro celoživotní proces učení. Naopak případný neúspěch se žák učí brát jako výzvu. Učení považuje za činnost, kterou vykonává on sám, ne za něco, co na něm vykonává někdo zvenčí. (Petty, 2013)

Význam heuristické metody spočívá nejen v rozvoji znalostí, ale i dovedností a návyků. Dochází k rozvoji samostatnosti a kreativity žáků, učí se formulovat vlastní myšlenky, sdílet je s ostatními a reagovat na argumenty druhých, organizovat svou práci a přebírat za ni odpovědnost. Učí se rozpoznat a řešit problémy, aplikovat své znalosti při jejich řešení, pracovat s daty (vyhledávání, shromažďování, třídění), hodnotit výsledky. Tímto jsou rozvíjeny klíčové kompetence, zejména kompetence k řešení problémů.

Petty (2013) vidí největší přínos této metody právě v získání dovedností, které jsou v procesu učení pomocí objevování rozvíjeny. Tvrdí, že *„většinu faktů, které jsme se kdy v životě naučili, jsme v průběhu času zase zapomněli – pamatujeme si jen ty, které opakovaně užíváme. (...) Naproti tomu dovednosti, které jsme při učení těchto vědomostí užívali, obvykle zůstávají s námi, protože je užíváme skoro každý den."* (Petty, 2013, s. 313)

Kalhous (Kalhous, Obst a kol., 2009) vidí pozitivum heuristicky vedené výuky v tom, že učitel má možnost pozorovat kvality žáků, jako je jejich pohotovost, pružnost, originalita či schopnost vymyslet netradiční řešení.

Pecina (2008) zmiňuje, že řešení problémů jako vytrvalý proces, který vyžaduje trpělivost při zdolávání obtíží. Cvičení trpělivosti žáků považujeme za přínosný faktor.

Tato metoda přináší výhody i učiteli. Probouzí v něm tvořivost, zabraňuje tomu, aby zaplul do stereotypu a podněcuje jej k dalšímu sebevzdělávání a rozvoji, protože jestliže chce žáky naučit tvořivému myšlení a dovednosti řešit problémy, musí to sám uplatňovat.

5.2 Nevýhody

Maňák a Švec (2003) vidí limity heuristické metody zejména v její časové náročnosti. Proces objevování vyžaduje určité množství času a ve školním vyučování jej není dostatek pro všechna témata. Na některá témata je navíc nesnadné, či dokonce nemožné metodu aplikovat. Jedná se o témata, která jsou založena na faktech, jsou příliš složitá na to, aby na požadovanou informaci žáci přišli sami, nebo je téma zcela nové a žáci nemají opěrný bod, ze kterého by při řešení problémů mohli vycházet. Autoři zmiňují také vysoké nároky na znalosti a dovednosti žáků při řešení problémů, některým žákům se proto nepodaří uspět.

Tato metoda je velmi náročná na přípravu učitele, neboť je nutné, aby činnost důkladně promyslel, naplánoval a vhodně realizoval. Velmi důležitá je znalost žáků třídy, ve které výuka probíhá, a schopnost odhadnout vhodnou míru řízení činnosti konkrétních žáků. Učitel musí zvolit vhodnou problémovou úlohu, která bude pro žáky atraktivní a adekvátně náročná. Příliš jednoduchá úloha žáka nezaujme, příliš složitá zase odradí, protože v ní nebude schopen uspět. Pro rychlejší žáky musí mít učitel připraveny úkoly, které budou dále rozvíjet jeho poznání. Během výuky vhodným způsobem klade žákům otázky, reaguje na individuální potřeby žáků. Obzvláště začínající učitelé mohou mít potíže objevitelskou činnost dobře promyslet či zorganizovat. Tyto situace vedou kritiky k výtkám, že metoda nechává žáky objevovat nepravdivá zjištění a žáci jsou pak zmatení. Petty (2013) však argumentuje právě tím, že problém není v metodě jako takové, ale její nesprávné realizaci či nevhodné volbě metody vzhledem k cíli, který chce učitel naplnit.

Z uvedeného vyplývá, že heuristická metoda je ve školní praxi minimálně ze začátku náročná jak pro žáky, tak i pro učitele. Proto je dobré cvičit heuristické aktivity prostřednictvím metody řízeného objevování, která se vyznačuje vyšší mírou řízení ze strany učitele, dále pak metodu řízené diskuse, u které má učitel předem připravené otázky i závěry. Metoda odrazového můstku je také nápomocná při nácviku těchto objevitelských činností, zakládá se na předložení zajímavé informace se záměrem motivovat žáky. Učitel tak krok za krokem směřuje žáky v jejich činnosti od řízené aktivity přes samostatnost až k tvořivosti. *„Postupné vedení žáka k optimálnímu rozvoji jeho heuristických aktivit a tvořivých potencí představuje základní edukační orientaci každého pedagoga a vztahuje se na veškerý edukační proces.“* (Maňák, Švec, 2003, s. 114)

Mnozí odborníci a pedagogové se shodují, že heuristická metoda je efektivní způsob výuky, ale není samospasitelná. Je proto nezbytné kombinovat ji s dalšími výukovými metodami.

5.3 Relevantní výzkumy

V minulých letech proběhlo několik výzkumů týkajících se heuristiky, jejího začlenění do vyučovacího procesu, efektivity jejích heuristických strategií při řešení matematických problémů, používání těchto strategií žáky, jejich vliv na rozvoj schopností žáků apod. Tyto výzkumy byly realizovány jak v České republice, tak i v zahraničí. Uvedeme zde některé z nich.

5.3.1 České výzkumy

V ČR prováděli výzkumy užívání heuristických strategií při řešení úloh z matematiky kolegové z Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem. Respondenty většiny výzkumů jsou žáci 2. stupně ZŠ či studenti SŠ, to však nepovažujeme za překážku. Předpokládáme, že přínosy, jež heuristické strategie skýtají, platí i pro žáky 1. stupně.

Břehovský se svými kolegy provedl v lednu 2013 výzkum s názvem „Heuristické strategie při řešení problémů žáky ve věku 11-12 let“ (*Heuristic Strategies in Problem Solving* *of 11-12-Year-Old Pupils*). Experimentu se zúčastnilo 354 žáků, kteří měli za úkol vypořádat se s pěti nestandardními matematickými úlohami. Cílem bylo zjistit, jaké strategie žáci použijí při řešení těchto úloh a kterým se naopak vyhýbají, i když by pro daný problém byly vhodné. Autoři se zaměřili na řešitelské strategie analogie, grafické znázornění, pokus-oprava-korekce a zavedení pomocného prvku.

Z výzkumu vyplynulo, že žáci vesměs vybrali a využili strategii, která je pro daný problém typická. Hojně používali strategii grafického znázornění, která podporuje vizuální představivost a měla by tak být ve škole procvičována a rozvíjena. U úlohy na nalezení lichých činitelů zadaného součinu žáci úspěšně užívali metody pokus-ověření-oprava (úspěšnost 83 %) a systematické experimentování (úspěšnost dokonce 90 %). Autoři zastávají názor, že rozvíjením těchto strategií mají žáci větší šanci uspět při řešení dalších typů problémů. Úspěšně byla využita i strategie cesta zpět, jež měla u příslušné úlohy úspěšnost 83 %. Ukázalo se, že žáci měli potíže u úlohy, kde měli najít všechna možná řešení. Experimentovali, ale neznali způsob, jak zjistit, zda vyčerpali všechny možnosti. Poslední, dobrovolná úloha o zjištění obsahu draka (čtyřúhelníku) ukázala, že analogie a zavedení pomocného prvku jsou strategie, které žákům nejsou vlastní. (Břehovský a kol., 2013)

O rok později stejná skupina akademiků provedla tříměsíční experiment „Řešení problémů ve školní matematice na základě heuristických strategií“ (*Problem Solving in School Mathematics Based on Heuristic Strategies*). Jeho úkolem bylo zjistit, zda je možné za tuto krátkou dobu zlepšit schopnost žáků řešit nestandardní matematické úlohy pomocí vybraných heuristických strategií, případně kterých. Výzkumu se účastnilo 38 žáků dvou nižších středních škol (13 let) a 11 studentů dvou gymnázií (18 let). Sledované heuristické strategie jsou rozděleny pro dané věkové skupiny. Vzhledem k zaměření diplomové práce se budeme zabývat pouze mladší věkovou kategorií. U žáků ve věku 13 let byly sledovány tyto strategie: analogie, pokus-ověření-korekce, systematické experimentování a cesta zpět.

Během tří měsíců učitelé zadávali žákům problémy efektivně řešitelné pomocí daných strategií. S jejich využitím žáci často dospěli k řešení rychleji a bez nutnosti vynaložit větší úsilí, než kdyby šli přímou cestou. Své způsoby řešení mezi sebou žáci sdíleli a na pobídnutí učitele hledali další možnosti řešení.

Na počátku i konci experimentu žáci absolvovali test obsahující čtyři až pět problémových úloh. Limit k vyplnění byl 40 min., povolenými pomůckami byly kalkulačky a počítače.

Výsledek výzkumu v kategorii žáků ve věku 13 let ukázal, že tři měsíce je příliš krátká doba na výrazné zlepšení schopností řešit matematické problémy pomocí strategie analogie. Strategie systematické experimentování, pokus-ověření-korekce a cesta zpět však u žáků zapůsobila. Četnost jejich využívání se zvýšila o 30 %, a to s vysokou úspěšností dosažení správného řešení.

Výzkum byl doplněn o rozhovory s vyučujícími žáků zapojených do experimentu. Zaznamenali velmi pozitivní vliv využívání heuristických strategií při řešení úloh. Žáci se nevzdávali při řešení úloh, do kterých by se dříve vůbec nepustili, začali být aktivnější ve výuce, o daných problémech diskutovali a hledali více možných řešení, své postupy komentovali a zdůvodňovali. (Novotná a kol., 2014)

Na popsaný experiment navazuje výzkum „Vliv heuristických strategií na postoj žáků k řešení problémů“ (*Impact of Heuristic Strategies on Pupils' Attitudes to Problem Solving).* Zaměřuje se však zejména na heuristické strategie zavedení pomocného prvku a vynechání podmínky. Testuje žáky ve věku 12–18 let a zkoumá, zda jsou žáci schopni dosáhnout pokroku v řešení matematických úloh pomocí těchto dvou strategií během čtyř měsíců. Druhou otázkou je, zda časté užívání poměrně jednoduché strategie systematického experimentování skýtá jen výhody či je v něčem rizikové.

Žáci před experimentem a na jeho konci absolvovali test obsahující čtyři matematické úlohy řešitelné pomocí daných heuristických strategií. V průběhu čtyř měsíců učitelé svým žákům zadávali problémové úlohy (tři týdně). Žák, který dospěl k řešení nejrychleji, sdílel svůj postup se spolužáky, vysvětlil jim svou strategii. Následovalo sdílení strategií dalších úspěšných řešitelů. V případě absence správného řešení přišlo na řadu řešení učitele, které bylo následně aplikováno na další úloze za účelem zjistit, zda žáci postupu porozuměli.

Z výsledků experimentu celkově vyplývá, že schopnost řešit matematické problémy se během daného období zlepšila. Experimentální strategie a strategie zavedení pomocného prvku je možné naučit žáky používat již během několika měsíců, na strategii vynechání podmínky je však potřeba více času. U zavedení pomocného prvku byl nejvýraznější fakt, že si žáci začali dokreslovat pomocné prvky do náčrtků i při řešení běžných úloh.

Znalost a osvojení systematického experimentování může svádět k jeho příliš častému používání na úkor jednodušších početních operací. Na druhou stranu však vede žáky k lepšímu odhadu výchozí hodnoty.

Co se týče změny postoje k řešení problémových matematických úloh, přibližně u poloviny žáků zainteresovaných v experimentu došlo k pozitivnímu posunu. Žáci vynakládají větší úsilí v nalezení postupu řešení. Začali své postupy komentovat a zdůvodňovat, jejich vyjadřovací schopnosti ohledně vlastních myšlenek a názorů se zlepšily. (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015b)

Na strategii analogie se zaměřil výzkum „Analogie – přítel nebo ďábel při řešení matematických úloh?“ (*Analogy – a Friend od Fiend When Solving Math Problems?).* Během roku a půl byli žáci ve věku 12–18 let opakovaně vystavování úlohám, které lze řešit pomocí analogie. Analogii se za tu dobu naučila efektivně používat jedna třetina respondentů, a to nejčastěji tak, že k řešení původní úlohy použila analogickou úlohu s výhodnějšími čísly (či jinými objekty). Ukázalo se také, že u žáků, kteří si úspěšně osvojili metodu analogie, vzrostl index inteligence. Učitelé zapojení do výzkumu považují analogii za prospěšnou při řešení problémů i v jiných předmětech. (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015a)

Výzkumný experiment „Volba heuristických strategií v závislosti na věku“ se zabývá rozložením volby heuristických strategií při řešení úloh z matematiky žáků různých věkových skupin, konkrétně žáků 6. a 8. ročníku ZŠ a studentů 1. a 3. ročníku SŠ různých typů. Jedná se celkem o 584 respondentů, kterým byly zadány tři úlohy řešitelné pomocí relativně jednoduchých heuristických strategií (*Systematické experimentování = SE; Pokus-ověření-korekce = POK; Cesta zpět = CZ; Zavedení pomocného prvku = ZPP* u geometrických úloh). Úlohy jsou variovány pro dané věkové skupiny, liší se však pouze složitostí početních operací (číselných hodnot), princip úlohy zůstává stejný. Výzkumné otázky hledají odpověď na četnost použití vytipovaných strategií, vliv věku na jejich volbu, úspěšnost vyřešení úloh s využitím heuristických strategií a také vliv věku na rozhodnutí úlohu nechat bez řešení.

Z výzkumu vyplývá, že v souboru úloh byly využity všechny čtyři vytipované heuristické strategie. Co se týče vlivu věku na volbu strategií, na POK a ZPP vliv nemá a CZ se ukázala být velmi často spontánně zvolenou strategií. Žáci jsou při řešení jedné z úloh pomocí heuristických strategií výrazně úspěšnější než při aplikaci přímého způsobu. Vliv věku na rozhodnutí úlohu nechat bez řešení se projevil pouze u jedné úlohy, kde se počet takto rozhodnutých žáků s věkem zvyšoval. Platí také, že počet úspěšně vyřešených úloh se s věkem nezvyšuje.

Na základě provedeného experimentu lze tvrdit, že věk nemá vliv na volbu heuristických strategií. Naopak čím větším množstvím matematických znalostí žák disponuje, tím častěji používá naučené algoritmy pro výpočet úloh. (Eisenmann a kol., 2017)

5.3.2 Zahraniční výzkumy

V roce 2002 byl v Japonsku proveden výzkum „Hodnocení strategií studentů při nalezení několika metod řešení“ (*Students' Evaluation of Their Strategies When They Find Several Solution Methods*). Výzkum pracoval/ s 12 japonskými žáky 6. třídy, kteří se již od 2. třídy učili využívat strategie řešení problémů. Mezi mini byli rovnoměrně zastoupeni žáci podprůměrní, průměrní i nadprůměrní dle výsledků testu. V předešlých letech se žáci seznámili se sedmi strategiemi. Výzkumným nástrojem byl zvolen rozhovor s žáky, během něhož měli vyřešit dvě problémové úlohy alespoň dvěma způsoby a následně určit, který ze svých zvolených způsobů je lepší, případně jestli si myslí, že se daná metoda dá zlepšit.

První úloha byla zaměřena na společnou práci. Druhá úloha ukládala žákům určit, kolik rovnostranných trojúhelníků je potřeba na poskládání velkého trojúhelníku o sedmi úrovních. S oběma typy úloh se žáci již setkali a dovedou k jejich řešení využít různé jim známé strategie.

Během rozhovoru žáci uváděli důvody pro zvolení dané strategie a podali vysvětlení řešení úlohy. Odpovídali na otázky, kterou z metod považují za lepší a proč a zda si myslí, že je možné metodu ještě zlepšit. Poslední otázka směřovala na žákův názor na metodu, která je při řešení úlohy dobrá.

Všem žákům se podařilo najít alespoň jedno řešení na každou úlohu a většina z nich našla i řešení druhé. Ne všechna řešení však byla správná. Svůj výběr heuristické strategie žáci zdůvodňovali tím, že jim zprostředkovala odpověď rychle nebo efektivně, že je jednoduché danou strategii použít, nebo že je jednoduché ji pochopit. Žáci obecně nevolili, která metoda je lepší. Co se týče návrhů na zlepšení jimi použité metody, žáci je ve většině případů vůbec neměli. Ve dvou případech uvedli, že lepší by byla jiná metoda, na kterou dříve nepřišli. To bylo často způsobeno absencí dovedností k jejímu použití.

Žáci obecně volili mezi lepší metodou z matematického hlediska (efektivita výpočtů) či z hlediska praktického (jednodušší použití či snazší pochopení). Často volili řešení pomocí tabulky, pokusu-omylu a grafických nákresů. Žáci označovali za lepší metodu rozdílné strategie vzhledem k jejich subjektivnímu vnímání. Často však šlo o strategie, které je snadné pochopit, vysvětlit dalším spolužákům a jednoduše aplikovat. Velký vliv na výběr metody a označení té lepší měl žákův způsob myšlení a chápání vztahů mezi jednotlivými heuristickými strategiemi. (Ishida, 2002)

Následující nedávný výzkum s názvem „Heuristika matematického řešení problémů používaná studenty ve třídě College Algebra“ (*Mathematical Problem-Solving Heuristics Used by Students in College Algebra Class*) je sice z prostředí vysoké školy, avšak předkládá důkaz toho, jaké negativní dopady má absence nestandardních úloh a jejich řešení ve školské matematice. Výzkum byl proveden v roce 2021 v Indonésii a zaměřuje se na heuristické strategie využívané studenty prvního ročníku VŠ, kteří se zaměřují na studium matematiky.

Celkem 29 respondentů mělo za úkol vyřešit dvě nestandardní matematické úlohy. Z této skupiny bylo poté náhodně vybráno šest studentů, kteří absolvovali rozhovor. Následovala podrobná analýza postupů řešení matematických problémů. Cílem výzkumu bylo zjistit, jakou heuristickou strategii studenti běžně používají k řešení matematických problémů a jak moc studenti heuristické metody znají a využívají je při řešení problémů.

Z výzkumu vyplynulo, že většina účastníků má tendenci používat heuristické strategie, se kterými se setkali již dříve, v tomto případě se objevilo sestavení rovnice. Někteří studenti však nedovedli tímto způsobem problém vyřešit, protože se jim nepodařilo sestavit rovnici správně, nebo nebyli schopni sestavenou rovnici vypočítat. Výpovědi některých studentů prozradily, že na střední škole zpravidla neřešili úlohy bez předložení konkrétního výpočetního vzorce k řešení. Neznalost příslušného vzorce je proto příčinou neúspěchu při řešení úlohy. Nebyli zvyklí ani na fakt, že úloha může mít více řešení či způsobů, jak se k řešení dostat. Ze situace vyplývá, že studenti neumí používat kritické myšlení a heuristiku. To poukazuje na problém, že v očích mnoha studentů je matematika pouhé biflování vzorců a jediných správných postupů vedoucích k jednomu správnému řešení.

Druhou nejčastější heuristickou strategií byl pokus-ověření-korekce, kterou studenti aplikovali na úlohy, které pro ně byly nové. Tato strategie se totiž dá používat velmi intuitivně, jiné strategie vyžadují dlouhodobé procvičování.

Výzkum poukazuje na potřebu zavádět problémové úlohy do běžné školní praxe. Studenti se potřebují s těmito úkoly setkávat a učit se je řešit. Měli by si uvědomit, že neexistuje jen jeden správný způsob řešení, ale je mnoho cest, jak k řešení dojít, a je vhodné je mezi sebou porovnávat. Není taky vždy pravdou, že výsledné řešení je jen jedno. To vše vede k rozvoji kritického myšlení, které je velmi důležité v běžném životě. (Safarini, Nurashari, Lie, 2021)

II. PRAKTICKÁ ČÁST

6. Výzkumná část práce

V praktické části se budeme věnovat dovednosti žáků řešit matematické problémy. Provedeme výzkum, jehož cílem bude zjistit, zda žáci dovedou vyřešit nestandardní matematické úlohy, jaký způsob řešení zvolí a jak jsou při použití daných strategií úspěšní. Vzhledem k tématu diplomové práce se v rámci analýzy žákovských řešení zaměříme na heuristické strategie využitelné na 1. stupni ZŠ, tj. pokus-ověření-korekce, systematické experimentování, grafické znázornění, zavedení pomocného prvku a cesta zpět. Strategii pokus-omyl zahrneme do kategorie pokus-ověření-korekce, neboť tyto metody jsou si velmi podobné a vzhledem k použitým výzkumným nástrojům nelze určit, zda žák při provádění pokusů vychází z pokusů předchozích či experimentoval čistě náhodně. Výzkum také identifikuje, zda jsou chlapci a děvčata při řešení úloh stejně úspěšní.

6.1 Výzkumné otázky

Na základě hlavního výzkumného cíle jsme stanovili následující výzkumné otázky:

VO_1: Používají žáci heuristické strategie při řešení nestandardních matematických úloh?

VO_2: Jak jsou žáci úspěšní při řešení úloh pomocí jednotlivých heuristických strategií a při využití jiných způsobů řešení?

VO_3: Existuje statisticky významný rozdíl v úspěšnosti chlapců a dívek při řešení nestandardních matematických úloh?

6.2 Výzkumný vzorek

Výzkum byl zaměřen na žáky 5. ročníku ZŠ. Zúčastnilo se jej celkem 89 respondentů z pěti tříd. V rámci snahy o maximální rozmanitost žáků jsme vybírali třídy různého typu či umístění na vesnici či ve městě. Do výzkumného šetření se zapojily tyto třídy:

A. ZŠ Tršice, 5. třída (16 žáků) – vesnice, běžná třída

B. FZŠ Tererovo nám., Olomouc, 5. B (21 žáků) – město, běžná třída

C. FZŠ Hálkova, Olomouc, 5. B (20 žáků) – město, běžná třída
D. FZŠ Hálkova, Olomouc, 5. C (9 žáků) – město, nadaní žáci
E. ZŠ Křídlovická, Brno, 5. B (23 žáků) – město, výběrová třída Světa vzdělání, jež sdružuje talentované žáky na základě přijímacích zkoušek; třída disponuje rozšířenou výukou (hodiny logiky), matematika je vyučována Hejného metodou

Zastoupeni byli tedy žáci v matematice slabší, průměrní i nadaní. Slabšími žáky rozumíme žáky běžných tříd, kteří ve školské matematice nezažívají mnoho úspěchů, či žáky s potřebou podpůrných opatření. Mezi průměrné žáky řadíme ty, kteří jsou ve školské matematice úspěšní. Jako nadané chápeme žáky, kteří byli takto diagnostikováni pedagogicko-psychologickou poradnou (žáci třídy 5. C na FZŠ Hálkova) či úspěšně prošli talentovými zkouškami zaměřenými na logické myšlení a geometrickou představivost. To je případ žáků třídy 5. B na ZŠ Křídlovická.

Mezi zúčastněnými bylo 33 dívek a 55 chlapců. Jeden respondent pohlaví neuvedl. Jednotlivé třídy budou v další kapitole obsahující vyhodnocení dat označovány dle uvedeného pořadí jako třída A, třída B, třída C, třída D a třída E.

6.3 Výzkumné nástroje

Povaha předmětu zkoumání nás přivedla k volbě smíšeného designu výzkumu. Ten se vyznačuje tím, že kombinuje kvalitativní a kvantitativní metody. (Štěch, 2014) Prvky těchto metod kombinuje jak v rovině formulace výzkumných otázek, tak i v rovině sběru dat, jejich analýzy a interpretace. (Vlčková, 2011) Oba přístupy jsou prováděny současně a vzájemně se doplňují, což nám otevírá širší a komplexnější pohled na danou problematiku.

V rámci výzkumu jsme se zabývali zejména analýzou řešitelských strategií žáků. Stěžejním výzkumným nástrojem jsme stanovili didaktický test. Pro úplnost získaných dat jsme tento nástroj doplnili o interview s učiteli matematiky zúčastněných tříd a závěrečným reflexivním dotazníkem pro žáky. Tyto metody nám umožnily podívat se na zkoumanou problematiku očima zúčastněných učitelů i žáků.

Tímto jsme průběh výzkumu rozdělili do tří na sebe navazujících fází, kterými jsou:

1. interview s učiteli matematiky zúčastněných tříd (Příloha 1),

2. didaktický test (Příloha 2),
3. dotazník pro žáky (Příloha 3).

6.3.1 Interview s učiteli matematiky

Úvodní fázi výzkumného šetření tvoří strukturované interview s učiteli matematiky zúčastněných tříd. Chráska (2007, s. 182) popisuje strukturované interview jako metodu, při níž *„tazatel postupuje podle předem připraveného textu, jsou přesně určeny formulace otázek i jejich pořadí“*. Cílem této fáze je získat povědomí o schopnostech a dovednostech žáků jednotlivých tříd řešit matematické problémy. Zjistit, do jaké míry jsou ve třídě uplatňovány heuristické principy, zda se žáci ve škole již setkali s námi vytipovanými strategiemi a zda jsou zvyklí řešit nestandardní matematické úlohy. Všechny tyto faktory mají vliv na schopnost žáků řešit předložené úkoly.

Na začátku byli učitelé seznámeni s didaktickým testem. Po přečtení zadání jednotlivých úloh rozhodovali, zda jsou úlohy dle jejich názoru pro žáky obtížné či nikoli. Další dotazy směřovaly na vlastní zkušenost učitelů s heuristickými principy a řešitelskými strategiemi a intenzitu jejich zařazování do výuky matematiky. Učitelé také odpovídali na četnost zařazování nestandardních matematických úloh do výuky.

6.3.2 Didaktický test

Nejdůležitější část výzkumu představuje didaktický test. Cílem didaktického testu je zjistit, zda jsou žáci schopni vyřešit nestandardní matematické úlohy, a analyzovat postup jejich řešení. Zvláštní pozornost je věnována použití heuristických strategií a také úspěšnosti žáků při řešení úloh pomocí těchto strategií. Didaktický test dále zkoumá, zda jsou chlapci a dívky v řešení stejně úspěšní, nebo v jejich úspěšnosti existuje statisticky významný rozdíl.

Didaktický test se skládá ze tří testových položek – dvě nestandardní matematické úlohy a jedna dobrovolná bonusová úloha. Všechny jsou koncipovány jako otevřené široké úlohy. Jak již bylo řečeno, prostředkem vyhodnocení výsledků je analýza jednotlivých postupů žákovských řešení. Ta je možná pouze v případě, že žáci kromě finálních odpovědí také popíší jednotlivé kroky svého počínání při řešení úloh. Nízký počet úloh byl zvolen právě proto, aby žáci měli dostatek času svůj postup řešení zaznamenat.

Jednotlivé testové úlohy byly vybrány tak, aby byly řešitelné žáky 5. ročníku ZŠ a k jejich řešení byly dobře využitelné námi vytipované heuristické strategie. Tyto úlohy nemají pouze jeden „správný“ postup řešení, ale výsledek lze nalézt více způsoby s využitím těchto strategií či jejich kombinací. Celý soubor úloh umožňuje využít každou z vybraných strategií. Použití některých heuristických strategií je více intuitivní, použití jiných o něco méně.

Sběr dat žáků probíhal jednu vyučovací hodinu. Žáci měli na vyplnění didaktického testu limit 40 minut, závěrečnému dotazníku pak věnovali posledních 5 minut vyučovací hodiny. K dispozici měli pouze psací potřeby a pravítko.

Nyní si zde představíme jednotlivé úlohy a ukážeme si jejich řešení pomocí vhodných heuristických strategií. Pro získání kompletního přehledu některé úlohy doplníme ještě o další variantu možného řešení pro případ, že by se objevila v řešení respondentů.

Úloha 1: Krávy a slepice

Na statku jsou krávy a slepice. Dohromady mají 20 hlav a 68 nohou. Kolik je na statku krav?

Tato úloha je typickým příkladem diofantovské úlohy. Vyznačuje se tím, že její řešení lze získat pomocí algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty, přičemž řešení mohou také nabývat pouze celočíselných hodnot. V našem případě se jedná o jeden z nejjednodušších typů, a to lineární diofantovskou rovnici o dvou neznámých. Ta je definována jako rovnice ve tvaru $ax + bx = c$, přičemž $a, b, c \in Z$ a také neznámé $x, y \in Z$. (Habala, 2019)

Tuto úlohu jsme vybrali pro velké množství strategií, které lze při jejím řešení aplikovat. Jsou to **pokus-ověření-korekce**, **systematické experimentování** a **grafické znázornění**. Předpokládáme, že se u respondentů objeví všechny vyjmenované postupy. Další variantou je sestavení rovnice. Tuto možnost však považujeme za velmi nepravděpodobnou, neboť rovnice jsou učivem až 2. stupně ZŠ.

Řešení úlohy 1: Pokus-ověření-korekce

Ze zadání víme, že na statku je dohromady 20 hlav, tedy 20 zvířat. Každá kráva má 4 nohy, každá slepice má 2 nohy. Provedeme tedy pokus. Náhodně zvolíme počet krav a počet slepic tak, aby jich bylo dohromady 20, a vypočítáme, kolik mají dohromady nohou.

<u>Pokus 1</u>: 10 krav a 10 slepic

$$10 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 40 + 20 = 60$$

Zjistili jsme, že 10 krav a 10 slepic má dohromady 60 nohou. To je méně než 68, proto v dalším pokusu zvýšíme počet krav a snížíme počet slepic.

Pokus 2: 13 krav a 7 slepic

$$13 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 52 + 14 = 66$$

Pozorujeme, že jsme se dostali podstatně blíže k požadovanému počtu 68 nohou, ale ještě to nestačí. Zkusíme proto přidat ještě jednu krávu.

Pokus 3: 14 krav a 6 slepic

$$14 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 56 + 12 = 68$$

Opakováním pokusů se nám podařilo vyhovět všem podmínkám a dojít k výsledku. Nezbývá než napsat výslednou odpověď: **Na statku je 14 krav.**

Řešení úlohy 1: Systematické experimentování

Tato strategie spočívá v systematickém provádění pokusů, přičemž každý další pokus se od předchozího liší o nejmenší možnou hodnotu. Stejně jako u předchozí strategie si uvědomíme, že 20 hlav znamená 20 zvířat, přičemž každá kráva má 4 nohy a každá slepice má 2 nohy. Začneme případem, kdy je na statku 1 kráva a 19 slepic. V každém dalším pokusu přidáme jednu krávu a ubereme jednu slepici. Pro přehlednost si vytvoříme tabulku (Tab. 2), do které budeme hodnoty i výsledky zapisovat.

Tabulka 2: Řešení úlohy 1 - systematické experimentování

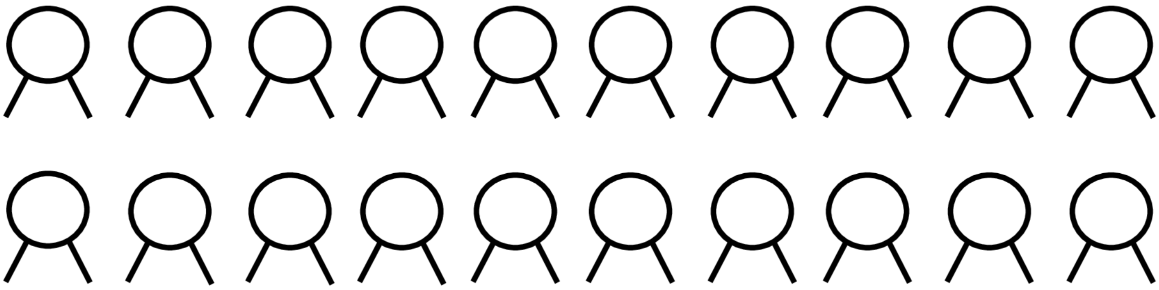
Počet krav	Počet slepic	Počet nohou dohromady	Jsou splněny podmínky?
1	19	42	ne
2	18	44	ne
3	17	46	ne
4	16	48	ne
5	15	50	ne
6	14	52	ne
7	13	54	ne
8	12	56	ne

9	11	58	ne
10	10	60	ne
11	9	62	ne
12	8	64	ne
13	7	66	ne
14	**6**	**68**	**ano**

Systematickým experimentováním jsme nalezli počet krav a počet slepic, které vyhovují podmínce, že na statku je dohromady 20 hlav a 68 nohou. Odpověď tedy stejně jako v prvním případě zní: **Na statku je 14 krav.**

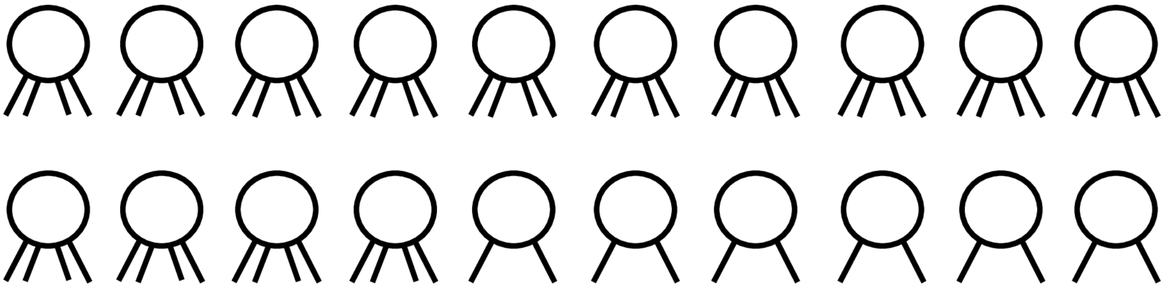
Řešení úlohy 1: Grafické znázornění

Pro vyřešení úlohy vytvoříme řešitelský obrázek. Na začátku zobrazíme 20 hlav, tedy 20 zvířat, které nám udává zadání. Uvědomíme si, že každá kráva má 4 nohy a každá slepice má 2 nohy. Můžeme tvrdit, že obě zvířata mají alespoň 2 nohy. Nakreslíme tedy ke každé hlavě jeden pár nohou (Obr. 6) a spočítáme, kolik nohou budeme ještě muset doplnit, abychom získali požadovaný počet.



Obrázek 6: Společné znaky krav a slepic

Spočítali jsme, že v případě, že by všechna zvířata měla pouze dvě nohy (jednalo by se tady o slepice), mají dohromady pouze 40 nohou. Nyní budeme k hlavám přidávat jednotlivé páry nohou, dokud nezískáme součet 68 nohou (Obr. 7).


Obrázek 7: Řešení úlohy 1 - grafické znázornění

Z obrázku nyní jasně určíme, že na statku se nachází 14 krav a 6 slepic. Odpověď tedy opět zní: **Na statku je 14 krav.**

Řešení úlohy 1: Rovnice

Přestože je velmi nepravděpodobné, že se řešení pomocí rovnice na 1. stupni ZŠ objeví, krátce nastíníme i tento postup řešení.

Zavedeme dvě neznámé, tj. x a y. Neznámou x označíme počet krav a neznámou y označíme počet slepic. Jestliže celkový počet zvířat je 20 a dohromady mají 68 nohou, pak platí tyto dvě rovnice:

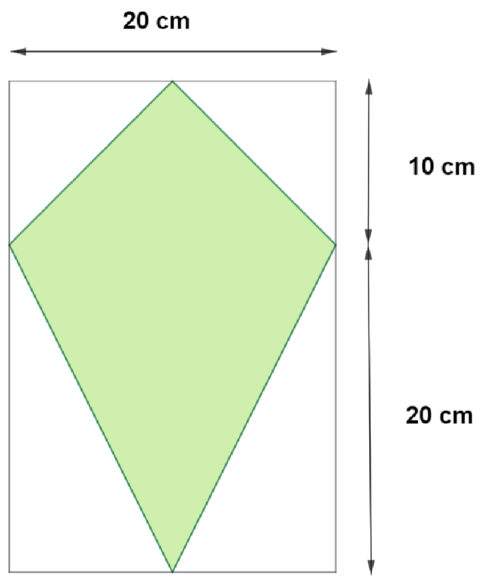
$$x + y = 20$$
$$4x + 2y = 68$$

Vyřešením této soustavy rovnic získáme pro neznámou x hodnotu 14 a pro neznámou y hodnotu 6. Z toho tedy vyplývá, že pro splnění podmínek musí být na statku 14 krav a 6 slepic. Odpověď je stejná jako u předchozích řešitelských postupů.

Úloha 2: Drak

Ondra se rozhodl vyrobit draka. Narýsoval ho na papír přesně tak, jak vidíš na obrázku (Obr. 8). Přišel za ním tatínek a řekl, že drak poletí jen v případě, pokud bude mít obsah alespoň 250 cm^2. Poletí Ondrův drak? Zdůvodni.

(volně dle Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015b, s. 21)



Obrázek 8: Zadání úlohy 2

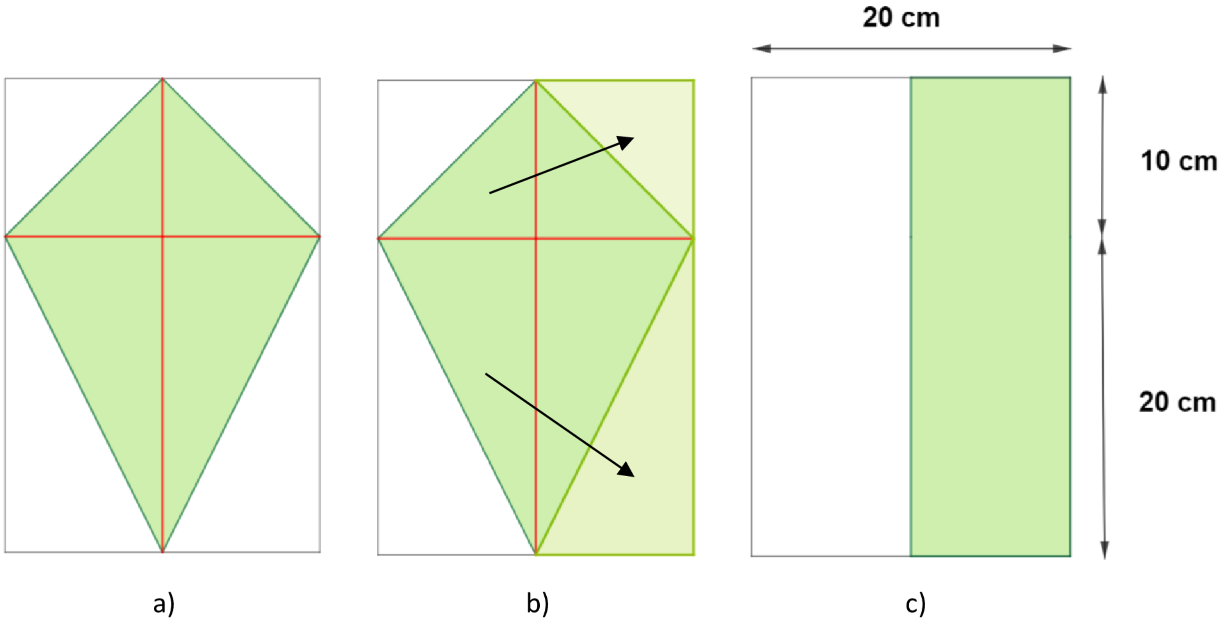
Tuto úlohu jsme vybrali pro její geometrický charakter. Její řešení vyžaduje práci s přiloženým obrázkem a geometrickou představivost, což může zaujmout žáky, které předchozí typ úlohy příliš neoslovil. Při tvorbě úlohy jsme se inspirovali úlohou, která byla použita ve výzkumu paní profesorky Novotné, jež se také týká využívání heuristických strategií. (Novotná, Eisenmann, Přibyl, 2015b) Originální úloha byla koncipována pro žáky ve věku 12 let. Naši úlohu jsme v zájmu jejího zjednodušení doplnili o zadaní v podobě problému a také o obrys papíru, na kterém je drak narýsován.

Žáci 5. ročníku ZŠ ještě neznají vzorec pro výpočet obsahu deltoidu, tj. $S = \frac{1}{2}ef$, přičemž proměnné e a f jsou úhlopříčky deltoidu. K nalezení řešení si však vystačí se znalostmi, kterými disponují. Opět zde můžeme nalézt více způsobů řešení uplatnitelných na 1. stupni ZŠ. Nejefektivnější heuristickou strategií pro řešení tohoto problému je strategie **zavedení pomocného prvku**, a to dokonce několika směry myšlení. Ačkoli žáci ještě neznají vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, jeden z uvažovaných směrů je přivede k jeho spontánnímu odvození ze vzorce pro výpočet obsahu čtverce a obdélníku. **Úvaha** s využitím geometrické představivosti nám pomůže nejen při řešení úlohy se zavedením pomocného prvku. Může být také hlavním nástrojem řešení.

Před zahájením samotného procesu řešení provedeme analýzu zadání. Ondrův tatínek tvrdí, že drak poletí jen v případě, že jeho obsah bude alespoň 250 cm^2. Z toho vyplývá, že jestliže bude mít obsah 250 cm^2 nebo více, poletí. V opačném případě nevzlétne. Naším cílem tedy bude zjistit obsah draka.

Řešení úlohy 2: Zavedení pomocného prvku – přesun částí draka

Jelikož neznáme vzorec pro výpočet obsahu deltoidu jako celku, rozdělíme jej na části pomocí jeho úhlopříček tak, jak vidíme na obr. 9a. Nyní vidíme, že útvar tvoří dvě dvojice shodných trojúhelníků. Přemístěním dvou trojúhelníků způsobem naznačeným na obr. 9b získáme obdélník o velikosti stran 10 cm a 30 cm (Obr. 9c).



Obrázek 9: Řešení úlohy 2 - zavedení pomocného prvku s přesunem částí draka

Použijeme vzorec pro obsah obdélníku:

$$S = a \cdot b$$

$$S = 10 \cdot 30$$

$$\boldsymbol{S = 300\ \mathrm{cm}^2}$$

Odpověď: **Ondrův drak poletí, protože jeho obsah činí 300 cm^2, tedy více než 250 cm^2.**

Řešení úlohy 2: Zavedení pomocného prvku – polovina čtverce a obdélníku

Další způsob, jak dojít k řešení úlohy, vede také cestou zavedení pomocného prvku, ale ukážeme si jiný směr toku myšlenek žáků než v předchozím případě.

Stejně jako v předchozím případě do Ondrova rysu přidáme 2 pomocné prvky – úhlopříčky deltoidu (Obr. 9a). Tentokrát však už s obrázkem nebudeme dále manipulovat.

Zaměříme se na fakt, že úhlopříčky rozdělily celý obrázek na 2 shodné čtverce o délce stran 10 cm a 2 shodné obdélníky s délkami stran 10 cm a 20 cm. Použijeme vzorce na výpočet obsahu čtverce $S_č$ a obdeníku S_o:

$$S_č = a \cdot a \qquad S_o = a \cdot b$$

$$S_č = 10 \cdot 10 \qquad S_o = 10 \cdot 20$$

$$S_č = 100 \text{ cm}^2 \qquad S_o = 200 \text{ cm}^2$$

Obrázek ukazuje, že vybarvená část tvoří vždy polovinu čtverce a polovinu obdélníku. Proto získané hodnoty vydělíme dvěma:

$$\frac{1}{2}S_č = 100 \div 2 \qquad \frac{1}{2}S_o = 200 \div 2$$

$$\frac{1}{2}S_č = 50 \text{ cm}^2 \qquad \frac{1}{2}S_o = 100 \text{ cm}^2$$

Získali jsme obsah poloviny čtverce a poloviny obdélníku. Jejich součtem získáme obsah jedné poloviny deltoidu. Pro výpočet obsahu celého deltoidu S musíme tedy tento součet ještě vynásobit dvěma:

$$S = (50 + 100) \cdot 2$$

$$\boldsymbol{S = 300 \text{ cm}^2}$$

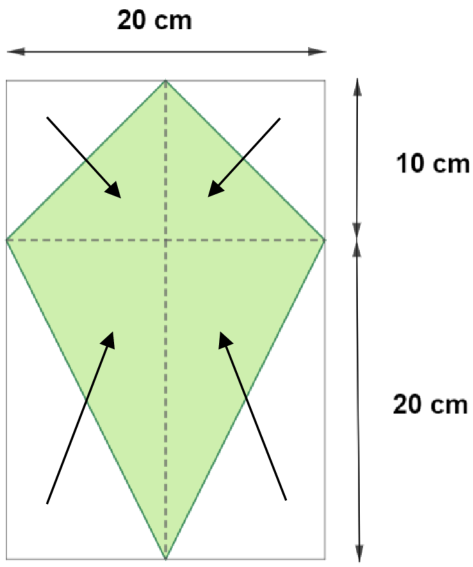
Odpověď: **Ondrův drak poletí, protože jeho obsah činí 300 cm^2, tedy více než 250 cm^2.**

Žák 2. stupně ZŠ by pro výpočet jistě využil naučený vzorec pro výpočet trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Nebylo by to nic obtížného, uvážíme-li, že u pravoúhlého trojúhelníku je jeho výška shodná s jeho odvěsnou, tedy platí vzorec $S = \frac{a \cdot b}{2}$, přičemž a a b jsou odvěsny trojúhelníku. Žáci 5. ročníku ZŠ s největší pravděpodobností ještě tento vzorec neznají, ale i přes to se k jeho podobě mohou popsaným logickým uvažováním při řešení této úlohy dopracovat, odvodit jej, aniž by to bylo jejich hlavním cílem.

Řešení úlohy 2: Úvaha

Úlohu můžeme vyřešit i bez zavedení pomocného prvku. Stačí nám geometrická představivost. Byť se tento způsob řešení nevyskytuje v našem seznamu heuristických strategií, uvedeme jej zde, neboť se domníváme, že se objeví i u žáků.

Ze zadání vyplývá, že Ondra bude svého draka jistě vystřihovat. Pracujme tedy s odstřižky. Poskládáme-li odstřižky papíru k sobě, zjistíme, že z nich dovedeme složit úplně stejného draka (Obr. 10).



Obrázek 10: Z odstřižků lze poskládat stejného draka

Jsou-li drak a odstřižky papíru stejné, pak mají i stejný obsah. Z toho vyplývá, že vypočítáme-li obsah celého papíru a vydělíme jej dvěma, získáme obsah draka:

$$\boldsymbol{S = a \cdot b \div 2}$$

$$\boldsymbol{S = 20 \cdot 30 \div 2}$$

$$\boldsymbol{S = 600 \div 2}$$

$$\boldsymbol{S = 300\ \mathrm{cm}^2}$$

Odpověď: **Ondrův drak poletí, protože jeho obsah činí 300 cm^2, tedy více než 250 cm^2.**

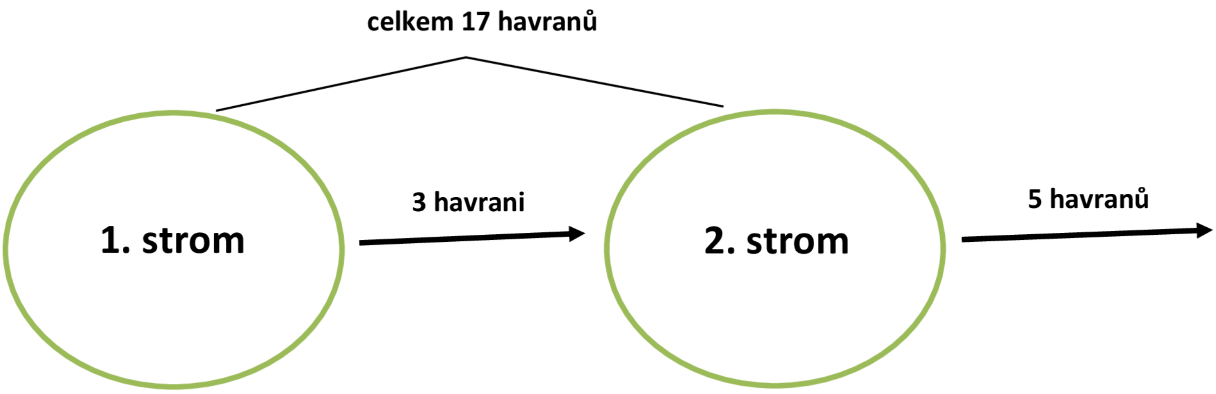
Bonusová úloha: Havrani

Na dvou stromech sedělo 17 havranů. Jestliže z prvního přeletěli na druhý strom 3 havrani a z druhého stromu odletělo celkem 5 havranů, zůstalo na prvním stromě dvakrát víc havranů než na druhém. Kolik havranů bylo původně na každém stromě? (Blažková, Matoušková, Vaňurová, 2009b)

Tuto úlohu jsme zvolili jako bonusovou. Vybrali jsme ji z toho důvodu, že ji lze opět řešit pomocí mnoha heuristických strategií, a to zejména strategií **cesta zpět**, která není vhodná pro řešení předchozích úloh. Dalšími vhodnými řešitelskými strategiemi jsou **pokus-ověření-korekce**, **systematické experimentování** či **grafické znázornění**. Řešení této úlohy pomocí jednotlivých strategií si následně popíšeme.

Řešení bonusové úlohy: Cesta zpět

Heuristická strategie cesta zpět se vyznačuje tím, že vycházíme ze známého koncového bodu a jdeme směrem k neznámému počátku. Koncový bod pro nás představuje 2 stromy, přičemž na prvním stromě sedí dvojnásobek havranů než na stromě druhém. Naším cílem je dostat se k počátečnímu stavu, tedy počtu havranů sedících na jednotlivých stromech před tím, než se dali do pohybu, přičemž havranů na obou stromech je dohromady 17. Pro lepší názornost vytvoříme náčrtek zobrazující pohyb havranů (Obr. 11).



Obrázek 11: Náčrtek zobrazující pohyb havranů

Máme tedy 17 havranů. Pět z nich odletělo úplně pryč. Tudíž na konci sedělo na obou stromech $17 - 5 = 12$ havranů. Jelikož na první stromě je dvakrát více havranů než na druhém, rozdělíme číslo 12 tak, aby platil poměr $2 : 1$, tedy dva díly počtu havranů patřily na 1. strom a jeden díl počtu havranů patřil na 2. strom. Číslo 12 proto vydělíme třemi.

$$12 \div 3 = 4$$

Na druhém stromě tedy v konečném stavu sedí 4 havrani a na prvním stromě sedí dvojnásobek, tudíž 8 havranů. Nyní budeme postupovat od konce zadání nazpátek, budeme sledovat přelety havranů a postupně se dostaneme až k počáteční situaci. Situaci můžeme sledovat na náčrtku (Obr. 11), přičemž při naší cestě zpět otočíme směr šipek.

Z druhého stromu odletělo 5 havranů. Abychom je dostali zpět na své místo, použijeme inverzní operaci k odčítání a těchto 5 havranů přičteme k havranům na druhém stromě, tedy $4 + 5 = 9$. Na prvním stromě nyní máme 8 havranů, na druhém stromě 9 havranů.

Postoupíme-li dále na cestě zpět zadáním, narazíme na 3 havrany, kteří přelétli z prvního stromu na druhý. Abychom je opět dostali na svá původní místa, odečteme 3 havrany z druhého stromu a přičteme je ke stromu prvnímu. Na prvním stromě tedy bude $8 + 3 = 11$ havranů a na druhém stromě bude $9 - 3 = 6$ havranů. Součtem výsledných čísel se ujistíme, že nám po cestě žádný havran neunikl. $11 + 6 = 17$ havranů. Tímto jsme splnili i poslední podmínku.

Pro kontrolu můžeme projít cestu od počátečního stavu ke konečnému:

1. strom $11 - 3 = 8$ havranů
2. strom $6 + 3 - 5 = 4$ havrani

Zkouška nám vyšla, můžeme se tedy přesunout k odpovědi.

Odpověď: **Původně bylo na 1. stromě 11 havranů a na 2. stromě 6 havranů.**

Řešení bonusové úlohy: Pokus-ověření-korekce

Další a možná tou nejintuitivnější variantou postupu řešení je strategie pokus-ověření-korekce. Ta spočívá v našem případě v provádění pokusů s odhadnutím počátečního počtu havranů na jednotlivých stromech.

Na začátku libovolně zvolíme počet havranů na prvním a druhém stromě tak, aby jejich součet byl 17. Poté od prvního stromu odečteme 3 havrany, kteří přeletěli na druhý strom. K druhému stromu tyto 3 havrany přičteme, a ještě od něj odečteme 5 havranů, kteří z druhého stromu odletěli pryč. Následně zkontrolujeme, zda výsledný počet havranů na jednotlivých stromech vyhovuje podmínce, která udává, že na prvním stromě je dvakrát více havranů než na druhém.

Pokus 1: První strom – 8 havranů, druhý strom – 9 havranů

1. strom $8 - 3 = 5$
2. strom $9 + 3 - 5 = 7$

Víme, že číslo 5 zcela jistě není dvojnásobkem čísla 7. V dalším experimentu proto zvýšíme počet havranů na 1. stromě a snížíme jej na druhém stromě.

Pokus 2: První strom – 10 havranů, druhý strom – 7 havranů

1. strom $10 - 3 = 7$
2. strom $7 + 3 - 5 = 5$

Jsme již znatelně blíže splnění dané podmínky, ale ještě splněna není. Zkusíme zvýšit počet havranů na 1. stromě ještě o jednoho havrana.

Pokus 3: První strom – 11 havranů, druhý strom – 6 havranů

1. strom $11 - 3 = 8$
2. strom $6 + 3 - 5 = 4$

Na prvním stromě je v tomto případě 8 havranů a na druhém stromě jsou 4 havrani, přičemž číslo 8 je dvojnásobkem čísla 4. Podmínka je splněna a my jsme získali řešení této úlohy.

Odpověď: **Původně bylo na 1. stromě 11 havranů a na 2. stromě 6 havranů.**

Řešení bonusové úlohy: Systematické experimentování

Podoba jednotlivých experimentů bude stejná jako v případě strategie pokus-ověření-korekce. Tentokrát však začneme krajní počáteční hodnotou, tj. 16 havranů na prvním stromě a 1 havran na druhém stromě. V každém dalším experimentu přesuneme jednoho havrana z prvního stromu na druhý. Pro přehlednost vytvoříme tabulku (Tab. 3), do které budeme jednotlivé hodnoty zapisovat. Výpočty budou vzhledem k zadání probíhat tímto způsobem:

1. strom Původní počet havranů $- 3 =$ konečný počet havranů
2. strom Původní počet havranů $+ 3 - 5 =$ konečný počet havranů

Tabulka 3: Řešení bonusové úlohy – systematické experimentování

Původní počet havranů na 1. stromě	Původní počet havranů na 2. stromě	Konečný počet havranů na 1. stromě	Konečný počet havranů na 2. stromě	Je splněna podmínka?
16	1	13	-1	ne
15	2	12	0	ne
14	3	11	1	ne
13	4	10	2	ne

12	5	9	3	ne
11	**6**	**8**	**4**	**ano**

Systematickým prováděním pokusů jsme došli k situaci, která splňuje všechny zadané podmínky.

Odpověď: **Původně bylo na 1. stromě 11 havranů a na 2. stromě 6 havranů.**

Řešení bonusové úlohy: Grafické znázornění

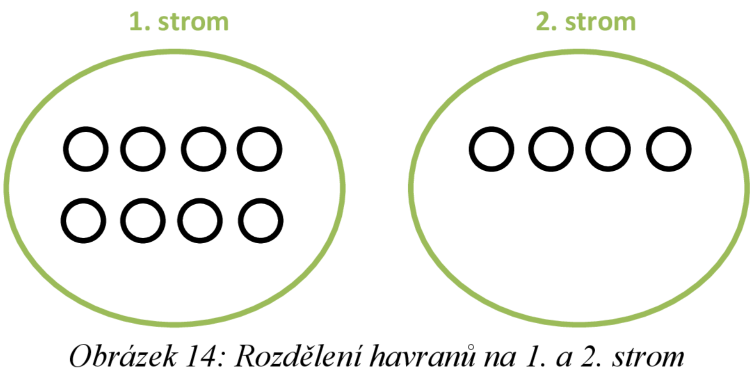
Nakreslíme si řešitelský obrázek, ve kterém budeme dle potřeb škrtat, dokreslovat a seskupovat kolečka označující jednotlivé havrany. Začneme tím, že nakreslíme všech 17 havranů dohromady, aniž bychom určili, na kterém stromě se nacházejí (Obr. 12).

Obrázek 12: 17 havranů bez určení jejich polohy

Následně ze skupiny oddělíme 5 havranů, kteří odletěli pryč, a zbylé havrany rozdělíme na 3 stejně početné skupiny (Obr. 13).

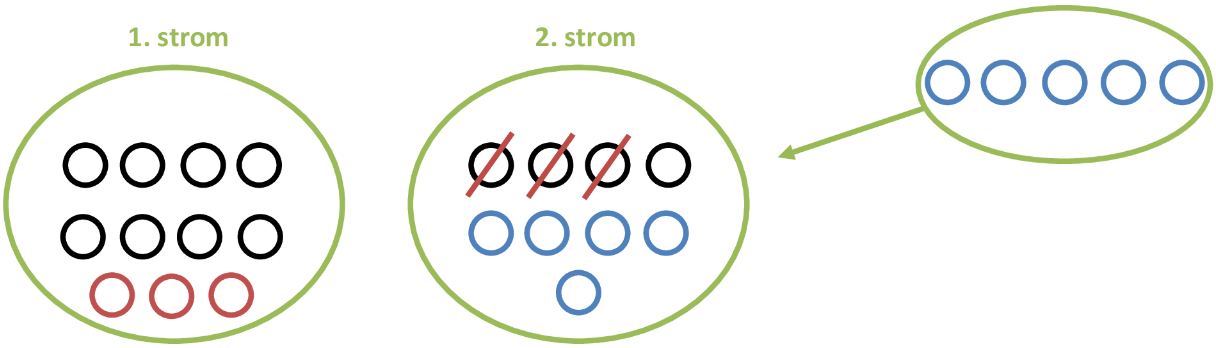
Obrázek 13: Rozdělení havranů do skupin

Víme, že na 1. stromě má být dvakrát více havranů než na druhém stromě. Proto 2 skupiny spojíme dohromady a označíme je jako první strom, třetí skupinu označíme jako druhý strom (Obr. 14).



Obrázek 14: Rozdělení havranů na 1. a 2. strom

Nyní začneme škrtat a dokreslovat havrany podle toho, jak přelétají či odlétají. Abychom havrany dostali na jejich původní místa, musíme směr jejich letu otočit. Tedy 5 havranů, kteří z druhého stromu odletěli, na něj dokreslíme. Naopak škrtneme 3 havrany, kteří na druhý strom přeletěli z prvního stromu a dokreslíme je právě na první strom (Obr. 15). Pak budou všichni havrani na svých původních místech a my jen spočítáme, kolik koleček máme na každém stromě nakreslených.



Obrázek 15: Řešení bonusové úlohy – grafické znázornění

Odpověď: **Původně bylo na 1. stromě 11 havranů a na 2. stromě 6 havranů.**

6.3.3 **Dotazník pro žáky**

Za účelem získat co nejkomplexnější vzorek výzkumných dat jsme jako doplňkový nástroj zvolili dotazník pro žáky. Jeho cílem je identifikovat postoj žáků k matematice a nestandardním matematickým úlohám. Slouží také jako sebehodnocení žáků. Dotazník obsahuje většinou polytomické položky s výběrem odpovědi.

Úvodní otázka směřuje na pohlaví dítěte. Další otázky zjišťují, zda žáky řešení úloh v didaktickém testu bavilo. Tato informace je pro nás cenná pro porovnání s další položkou dotazníku, která se ptá, zda žáky baví matematika obecně. Zjišťuje také, do jaké míry mají žáci zkušenost s řešením tohoto typu úloh, případně zda se s nimi dosud nesetkali.

Druhá část dotazníku se zaměřuje na sebehodnocení žáků. Na třístupňové škále určují, jak pro ně byly jednotlivé úlohy obtížné. Tyto otázky také slouží jako pomoc při analýze žákovských řešení úloh. Např. pokud žák uvede, že si s úlohou vůbec nevěděl rady, bude to pro nás signálem, že se nejspíše pokusil své řešení tipnout či odhadnout.

7. Prezentace výsledků výzkumného šetření

V této kapitole se budeme věnovat interpretaci výsledků na základě sesbíraných dat. Jelikož lze předpokládat, že způsob řešení nadaných žáků a žáků běžných tříd se liší, rozdělili jsme respondenty do dvou skupin.

1. Žáci běžných tříd:
   - třída A – ZŠ Tršice
   - třída B – FZŠ Tererovo nám., 5. B
   - třída C – FZŠ Hálkova, 5. B
2. Žáci nadaní:
   - třída D – FZŠ Hálkova, 5. C
   - třída E – ZŠ Křídlovická, 5. B (Oficiálně nelze mluvit o třídě nadaných žáků, neboť mnozí z nich nenavštívili pedagogicko-psychologickou poradnu, která by provedla příslušnou diagnostiku. Talentové přijímací zkoušky však zaručují, že do třídy nastoupili pouze vysoce inteligentní žáci. Z tohoto důvodu jsme si tuto třídu dovolili zařadit do skupiny nadaných žáků. Ve třídě je matematika vyučována Hejného metodou.)

Některé poznatky se vztahují na celý výzkumný vzorek bez ohledu na rozdělení do skupin, jiné jsou charakteristické pro konkrétní skupinu. Zpozorovali jsme také skutečnost, že se v některých třídách objevil způsob řešení, který se v dané třídě opakoval, ale nikde jinde jsme se s ním nesetkali.

7.1 Vyhodnocení interview s učiteli

Interview vždy proběhlo před vyučovací hodinou, ve které žáci absolvovali didaktický test. Dotazováno bylo 5 učitelů matematiky zúčastněných tříd. Učitelé vyučují matematiku v těchto třídách převážně 1. až 2. rokem, jedině třídu E vede stejný vyučující již 5 let.

Co se týče posouzení obtížnosti úloh pro žáky, většina učitelů se přikláněla k názoru, že úloha 1 v didaktickém testu bude pro žáky spíše jednoduchá, naopak úlohu 2 jednohlasně považovali za obtížnou. Třídní učitelka třídy C uvedla, že s výpočtem obsahu budou mít její žáci zcela jistě problém. U otázky týkající se obtížnosti úlohy 3 se názory učitelů rozcházely. Dva učitelé viděli úlohu jako spíše jednoduchou, ostatní se přikláněli k opačné variantě. Rozhodující není ani fakt, zda se jedná o žáky nadané či běžné. U nadaných však dle jejich vyučující hrozí ve vztahu ke všem zadaným úlohám riziko, že žáci mohou považovat úlohy za jednoduché a nebudou jim tudíž věnovat potřebnou pozornost. To má za následek zbrklost při práci, přehlédnutí důležitých pasáží zadání a numerické chyby.

Velký rozdíl mezi skupinami jsme zaznamenali v přístupu k vedení výuky matematiky. Učitelé obou tříd nadaných žáků uvedli, že nestandardní matematické úlohy žákům zadávají 3-4 dny v týdnu, kdežto v běžných třídách se žáci s těmito úlohami setkávají méně než jednou za týden. Paní učitelka třídy D dodala, že má v učebně na určeném místě soubor logických úloh, hádanek a luštěnek pro rychlíky, kteří by se nudili, zatím co zbytek třídy ještě pracuje.

S tím se pravděpodobně pojí to, jak často jsou při výuce v jednotlivých třídách uplatňovány heuristické přístupy. Nadaní žáci se s nimi dle výpovědí setkávají často, žáci běžných tříd jen zřídka. Paní učitelka třídy B tyto přístupy uplatňuje občas.

Nyní se dostáváme k heuristickým strategiím. Všichni učitelé jednoznačně znají a ve výuce uplatňují strategii pokus-ověření-korekce a grafické znázornění. Měly by tedy být žákům blízké. Vyučující nadaných žáků uvedli, že žáky vedou k užívání i všech ostatních strategií. Podobnou odpověď nám dala také paní učitelka běžné třídy B, která ve výuce vynechává z uvedených pouze strategii analogie. To nám dodává vyhlídky, že se při analýze didaktických testů setkáme se všemi vytipovanými způsoby řešení. Učitelé tříd A a C strategie systematické experimentování, cesta zpět, zavedení pomocného prvku a analogie do výuky nezavádějí.

7.2 Vyhodnocení didaktického testu

Každý test jsme podrobili důkladné analýze způsobů řešení žáků u jednotlivých úloh. Následně jsme tyto metody řešení rozdělili do vhodných kategorií podle použité heuristické strategie a dalších jevů, které se v testech opakovaly. Interpretaci dat jsme provedli dle dvou parametrů: nadání žáků a pohlaví. K interpretaci dle nadání jsme využili námi vytvořené skupiny žáků běžných tříd (třídy A, B, C) a žáků nadaných (třídy D a E).

Jednotlivé úlohy budou v této podkapitole vyhodnoceny zvlášť. U každé úlohy se nejprve zaměříme na žáky běžných tříd. Jaké řešitelské strategie využili, do jaké míry byli ve svém snažení úspěšní a kolik z nich se do řešení vůbec nepustilo. Za neřešenou úlohu považujeme takovou, u které žáci nechali pouze bílé místo či jasně vyjádřili, že si s úlohou vůbec nevědí rady. Stejným způsobem se budeme věnovat výsledkům druhé skupiny, tedy nadaných žáků. Ukážeme si také některá zajímavá žákovská řešení a zmíníme, jak si stojí všichni žáci dohromady jako jeden celek. V závěru každé úlohy se budeme zabývat častými chybami, které se v testech vyskytly.

Při interpretaci výsledků dle pohlaví se zaměříme pouze na úspěšnost dívek a chlapců při řešení nestandardních matematických úloh. Našim cílem v této oblasti je zjistit, zda mezi jejich úspěšností existuje statisticky významný rozdíl.

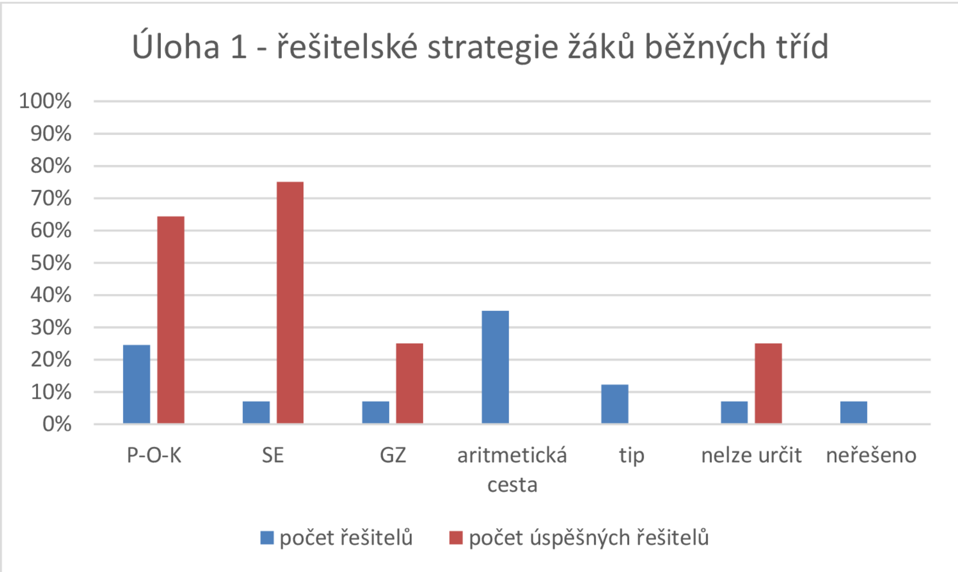
Přestože všichni žáci dostali instrukci, ať zapíší své myšlenkové procesy při řešení úloh, několik žáků tak neučinilo a napsalo jen výsledek. V těchto případech jsme mohli do vyhodnocení promítnout pouze jejich úspěšnost, nikoli však postup řešení.

Vyhodnocení úlohy 1: Krávy a slepice

Žáci běžných tříd

Při analýze této úlohy jsme se zaměřili na použití heuristických strategií pokus-ověření-korekce (P-O-K), systematické experimentování (SE) a grafické znázornění (GZ) v podobě řešitelského obrázku. Objevily se samozřejmě další způsoby řešení žáků, které do těchto kategorií nelze zařadit. Úlohu 1 dovedlo vyřešit celkem 25 % žáků běžných tříd. V grafu 1 můžeme pozorovat četnost využití jednotlivých řešitelských strategií žáků včetně úspěšnosti při jejich aplikaci.

Graf 1: Úloha 1 - řešitelské strategie žáků běžných tříd



Celkový počet žáků běžných tříd, kteří úlohu řešili pomocí vytipovaných heuristických strategií, činí 39 % s úspěšností 59 %.

Strategii P-O-K využilo 25 % žáků, přičemž 64 % z nich došlo ke správnému výsledku.

Méně častou experimentální strategií bylo SE, které využilo sice jen 7 % žáků, avšak 75 % těchto řešitelů úlohu vyřešilo správně. Nikdo z těchto žáků k zápisu nevyužil tabulku.

Objevilo se také několik řešení pomocí strategie GZ ve formě řešitelského obrázku. Úspěšných však bylo pouze 25 % z nich.

V mnoha případech si žáci s úkolem nevěděli rady, a tak zvolili řešení aritmetickou cestou, kdy hledali vztahy mezi zadanými číselnými údaji a vytvářeli různé příklady. Toto se týkalo 35 % žáků. Často se objevoval příklad $68 \div 4 = 17$. Číslo 68 je celkový počet nohou, číslo 4 počet nohou 1 krávy. Výsledkem tohoto postupu byla odpověď: „*Na statku je 17 krav.*" Žáci však v tomto případě již nehleděli na podmínku, že vzhledem k počtu hlav se na statku nachází 20 zvířat. Nikdo v této kategorii nezískal správný výsledek.

Další skupinu řešitelů s četností 12 % tvoří žáci, kteří si jednoduše tipnuli výsledek. Na papíře se většinou objevil pouze výsledek bez jakýchkoli výpočtů. Žáci nejčastěji rozdělili počet zvířat na statku napůl, tudíž odpověď zněla: „*Na statku je 10 krav a 10 slepic*." S touto strategií také nikdo neuspěl.

Jak jsme již zmiňovali, někteří žáci nepopsali svůj postup řešení, tudíž nelze určit strategii, kterou při řešení problému použili. Těchto žáků bylo 7 %, přičemž 25 % z nich dosáhlo úspěchu.

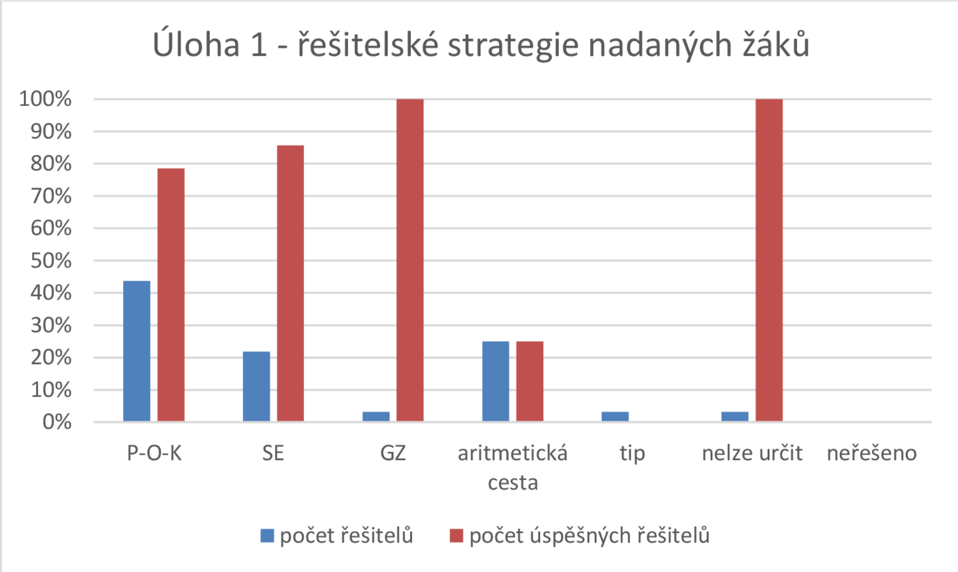
Poslední kategorii tvoří 7 % žáků, kteří se do řešení úlohy vůbec nepustili. Důvodem je dle našeho mínění skutečnost, že netušili, jak se s úlohou vypořádat. Někteří žáci se pokusili alespoň napsat zápis, ale tím jejich počínání skončilo.

Opomeneme-li žáky, u kterých nelze určit řešitelskou strategii, pak z uvedeného vyplývá, že žáci běžných tříd byli při řešení úlohy 1 úspěšnými řešiteli pouze při použití heuristických strategií. Jiné řešitelské strategie těchto žáků se setkaly s nezdarem.

Nadaní žáci

Postup analýzy didaktických testů probíhal stejně jako v předchozím případě, kategorie se také nemění. Ke správnému řešení úlohy 2 dospělo celkem 66 % nadaných žáků. Graf 2 ukazuje četnost využití jednotlivých strategií při řešení úlohy 1 nadanými žáky a jejich úspěšnost.

Graf 2: Úloha 1 - řešitelské strategie nadaných žáků

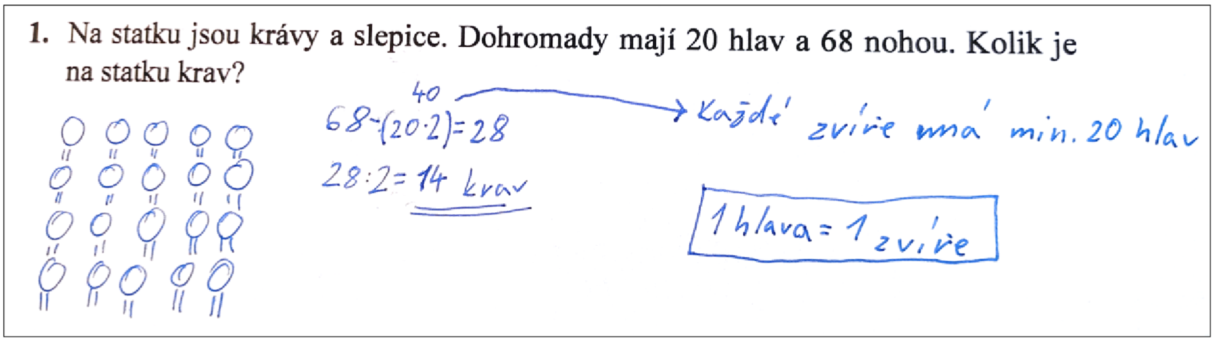


Některou z heuristických strategií při řešení úlohy využilo celkem 69 % nadaných žáků, což je podstatně vyšší procento než u žáků běžných tříd. Úspěšnými řešiteli se přitom stalo 82 % z nich.

Nejčastěji zvolenou heuristickou strategií se ukázala být strategie P-O-K, kterou použilo 44 % nadaných žáků, přičemž 79 % z nich v opakovaných pokusech uspělo. Někteří provedli mnoho pokusů, než se dostali k závěru, jiným se podařilo odhadnout správný počet krav napoprvé.

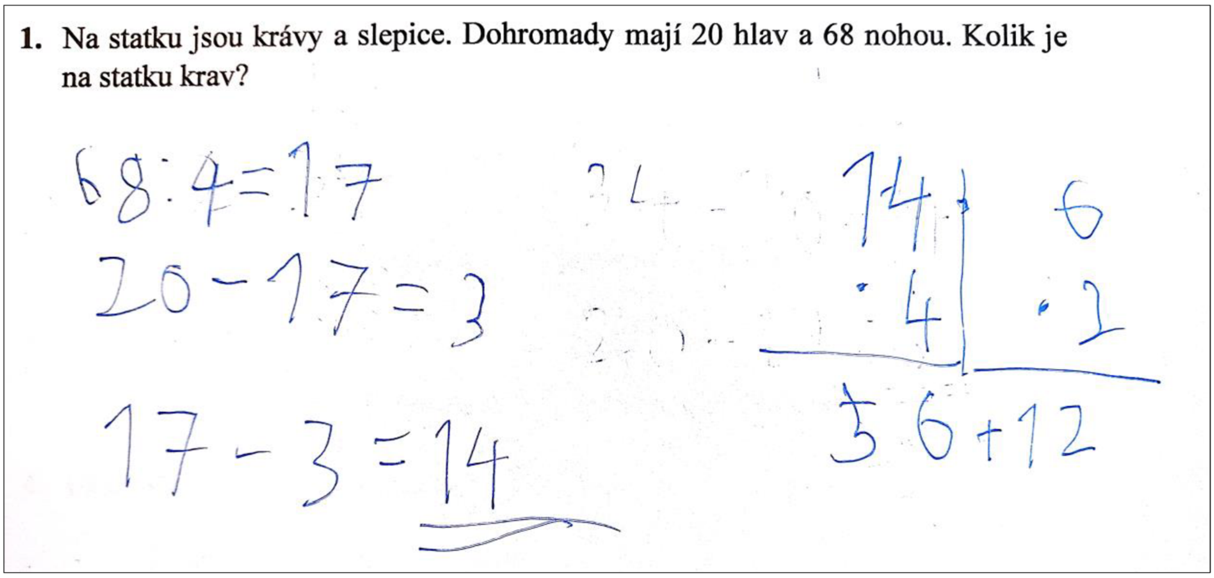
Méně často žáci využívali strategii SE, při její aplikaci však byli velmi úspěšní. Z 22 % žáků úlohu správně vyřešilo až 86 %. Pouze v jednom případě žákyně zapisovala experimenty do tabulky.

Jeden žák zvolil postup řešení geometrickou cestou, kterou dále doplnil aritmetickým výpočtem (Obr. 16). Nejprve graficky znázornil společné znaky krav a slepic, kterými jsou 1 hlava a 2 nohy. Poté pokračoval výpočtem – zjistil, kolik nohou mu zbude, jestliže by na statku byly pouze slepice. Výsledných 28 nohou pak vydělil dvěma, tedy párem nohou, které má kráva oproti slepicím navíc. Jelikož měli žáci instrukci, že mají co nejlépe popsat postup svého řešení, přidal tento žák k výpočtu také úsměvný popisek. Domníváme se, že jím chtěl vyjádřit, že každé zvíře má min. 2 nohy. Nicméně úlohu vyřešil správně.



Obrázek 16: Žákovské řešení úlohy 1 - GZ + aritmetická cesta

Řešení aritmetickou cestou si vybralo 25 % žáků, z nichž 25 % dospělo ke správnému řešení. Tito úspěšní řešitelé nehledali naslepo vztahy mezi zadanými čísly jako ostatní, ale zvolili algoritmus, který dle našeho mínění již znali. Jedná se o žáky ze třídy E, kteří se s diofantovskými úlohami setkávají v hodinách logiky již od 2. třídy. První z nich vyřešil úlohu totožným postupem jako žák, jehož řešení vidíme na obr. 16, pouze s tím rozdílem, že vynechal fázi kreslení obrázku. Druhý úspěšný řešitel zvolil vlastní algoritmus, který můžeme vidět na obr. 17. Počet všech nohou (68) vydělil číslem 4, jež vyjadřuje počet nohou jedné krávy. Výsledný podíl (17) odečetl od celkového počtu zvířat (20) na statku a získaný rozdíl (3) dále odečetl od podílu prvního příkladu (17). Tímto způsobem se dostal k počtu 14 krav, jehož správnost ověřil zkouškou. Tento algoritmus je funkční pro všechny hodnoty zadaných dat.



Obrázek 17: Žákovské řešení úlohy 1 - aritmetická cesta

Pouze 1 žák (3 %) se pokusil vyřešit úlohu tipem, bohužel bez úspěchu. Poslední žák ze zúčastněných úlohu vyřešil správně, nelze však určit, jakou řešitelskou metodu použil.

Nutno vyzdvihnout, že mezi nadanými se nenašel nikdo, kdo by nechal úlohu bez povšimnutí. Všichni nadaní žáci se o její zvládnutí alespoň pokusili, což považujeme za velmi pozitivní jev.

Celkově tuto úlohu vyřešilo 66 % nadaných žáků, přičemž 85 % z nich ji řešilo pomocí heuristických strategií.

Jestliže bychom se měli podívat na celkovou úspěšnost všech žáků, dojdeme k číslu 39 %, přičemž 35 % žáků k řešení použilo jednu z heuristických strategií. Rozdíl 4 % tvoří žáci s úspěšným aritmetickým řešením a žáci, jejichž metoda řešení je neznámá.

Časté chyby

Podívejme se nyní na chyby, které se v řešení žáků opakovaly. Nejčastější chybou bylo opomenutí či přehlédnutí některé z podmínek v zadání. Žákům seděly nohy, ale zapomněli na to, že 20 přítomných hlav vyžaduje 20 zvířat. To se týká nejčastěji výše popsaného příkladu řešení aritmetickou cestou, kdy žáci počet všech nohou vydělili čtyřmi a odpověděli, že na statku je 17 krav. Tím vyčerpali počet všech nohou na statku, ale 3 hlavy jim scházely. Setkávali jsme se také s odpověďmi typu: *„Na statku je 56 krav." „Na statku je 20 krav a jedna slepice bez hlavy." „Na statku je 18 slepic a 8 krav." „13 krav, 3 slepice." „Na statku je 1360 krav."* Tyto odpovědi byly nejčastěji výsledkem aritmetické cesty řešení.

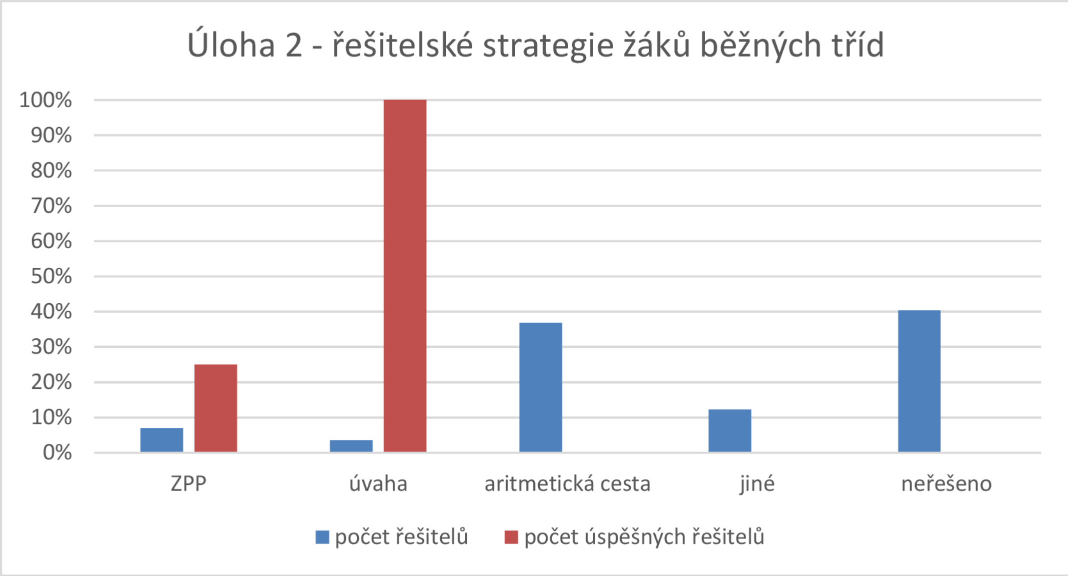
Někteří žáci se při řešení vydali správnou cestou, ale výsledek jim unikl vinou numerické chyby, a to jak u žáků běžných tříd, tak i nadaných.

Vyhodnocení úlohy 2: Drak

Žáci běžných tříd

Tato úloha dala žákům běžných tříd výrazně zabrat. Dovedlo ji vyřešit pouze 5 % z nich. Potvrdila se tedy předpověď třídních učitelů, že úloha bude pro žáky spíše náročná, ne-li dokonce rozhodně náročná. Při analýze této úlohy jsme se zaměřili na výskyt heuristické strategie zavedení pomocného prvku (ZPP) a také na řešení pomocí úvahy s využitím geometrické představivosti. Další kategorii tvoří žáci, kteří se vydali aritmetickou cestou a pokusili se najít určité vztahy mezi zadanými číselnými údaji. Kategorie „jiné" obsahuje další, méně frekventované postupy řešení žáků. Nechybí ani skupina žáků, kteří se do řešení vůbec nepustili. Četnost zvolených řešitelských strategií včetně jejich úspěšnosti si můžeme prohlédnout v grafu 3.

Graf 3: Úloha 2 - řešitelské strategie žáků běžných tříd



Na první pohled vidíme, že naše dříve odhadnuté strategie řešení byly jediné, které žáky dovedly ke správnému řešení.

Z heuristických strategií zde má zastoupení zavedení pomocného prvku, které se objevilo v 7 % případů, správnou odpověď napsalo pouze 25 % z nich. Úspěšnost běžných žáků s použitím heuristické strategie jsou tedy pouze 2 %.

Druhou úspěšně použitou řešitelskou strategií bylo řešení pomocí úvahy, kterou zvolily sice jen 4 % dětí, avšak všechny uspěly.

Velmi často (37 %) šli žáci aritmetickou cestou řešení, zkoušeli nejrůznější vztahy mezi délkami jednotlivých prvků obrázku, nedovedli však nalézt ty správné. Mnozí spočítali obvod papíru, a považovali jej za obsah draka. Tento případ je specifický pro žáky běžných tříd. U nadaných žáků se naopak opakovaně objevoval výsledek roven obsahu celého papíru včetně draka. Nicméně nikdo z žáků běžných tříd nedovedl získat výsledek touto cestou řešení.

Do kategorie „jiné" spadají méně často se opakující postupy, které vedly do slepé uličky. Setkali jsme se s žáky, kteří pravítkem změřili reálné délky stran draka a pokoušeli se tak spočítat jeho obsah, jiní se pokusili úlohu vyřešit originální odpovědí. Neodpustíme si několik z nich zde předložit:

„*Drak nemůže lítat, protože teď nefouká. No smůla.*"

„*Ondrův drak nepoletí, protože šance na to, že chytím správnou odpověď je 50/50, jinak opravdu nevím. Ale dám Ondrovi tip, aby se podíval na internet a třeba by si našel lepší model anebo by si mohl nějaký koupit*."

Ačkoli jsou tyto odpovědi velmi nápadité, bohužel jsme je nemohli uznat, tudíž tato kategorie také zůstává bez úspěchu.

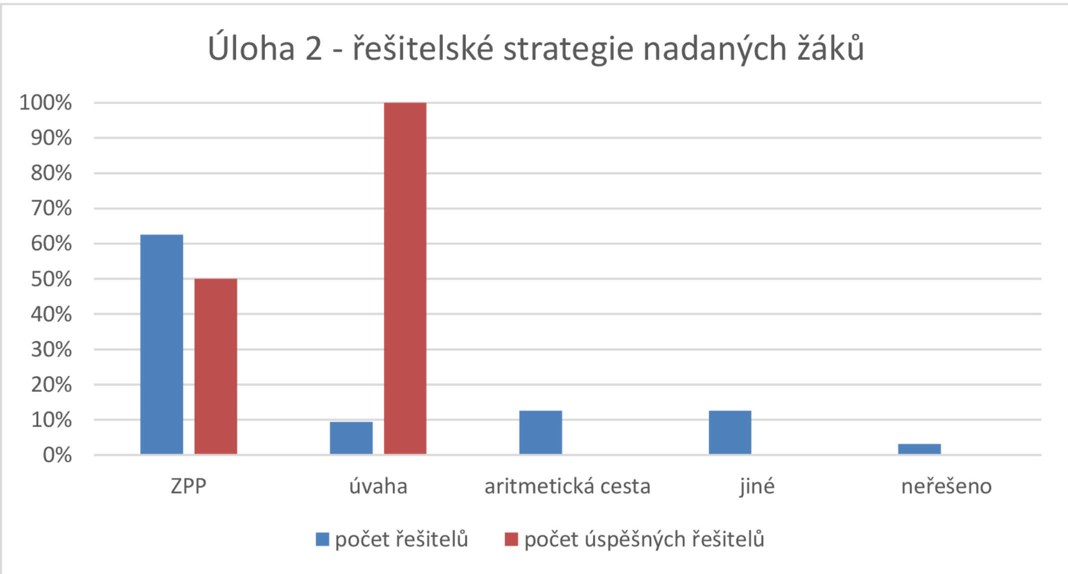
Poslední a nejpočetnější skupinu tvoří žáci, kteří se do řešení úlohy vůbec nepustili. Četnost této skupiny je celých 40 % dětí. U některých bylo z kreseb plných emocí zřejmé, že netušili, jak na to.

Shrneme-li výsledky úlohy 2 u žáků běžných tříd, úspěšní byli pouze ti, kteří zavedli pomocný prvek (2 % žáků) či úvahou došli k závěru, že drak má stejný obsah jako zbytek papíru.

Nadaní žáci

Nadaní žáci byli v této oblasti výrazně úspěšnější. Úlohu dokázalo správně vyřešit 41 % žáků a bylo by jich ještě o něco více, nebýt jejich zbrklosti či nepozornosti při analýze zadání. Několik žáků totiž dospělo ke správnému numerickému výsledku, tedy obsahu draka, avšak odpověď vyhodnotilo chybně. Kategorie zvolených postupů řešení jsou stejné jako u žáků běžných tříd. Četnost volby jednotlivých řešitelských strategií včetně úspěšnosti při řešení úlohy můžeme vidět v grafu 4.

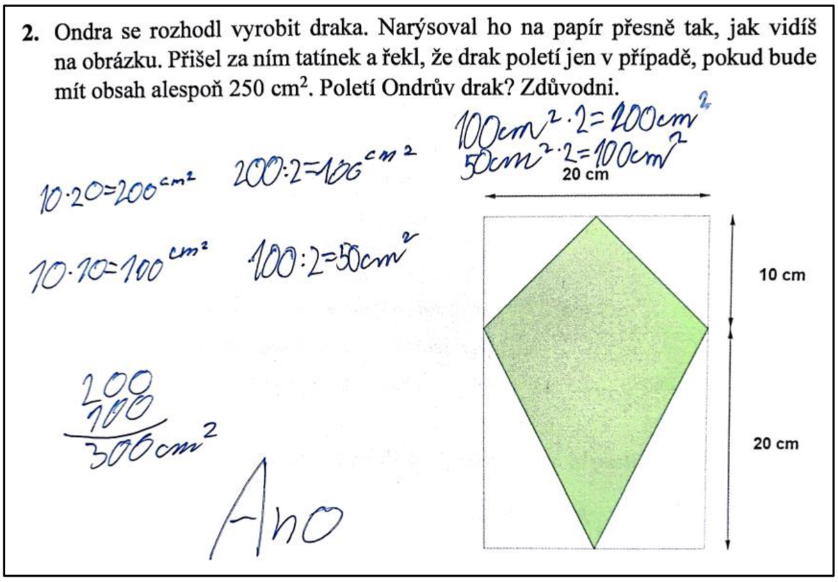
Graf 4: Úloha 2 – řešitelské strategie nadaných žáků



Stejně jako v případě žáků běžných tříd můžeme pozorovat, že úspěšnými řešiteli se stali pouze žáci, kteří zvolili námi vytipované řešitelské strategie.

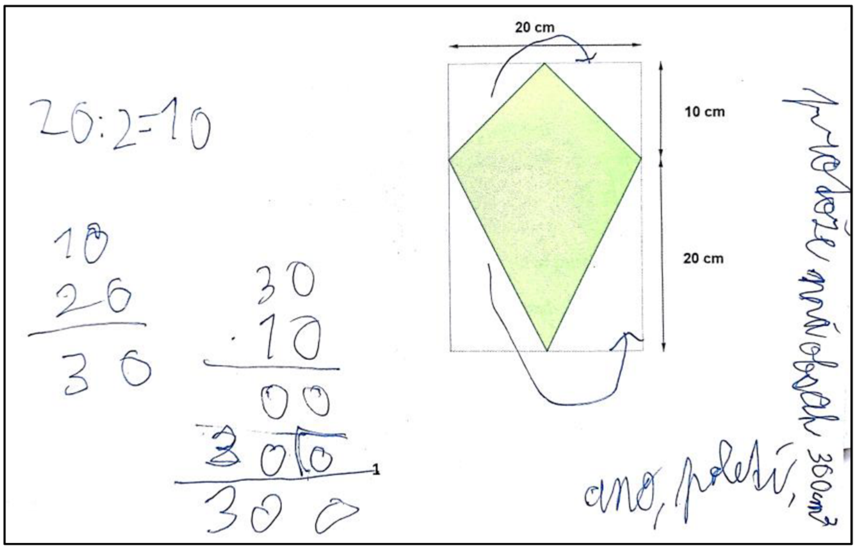
Heuristickou strategii, tedy zavedení pomocného prvku, zvolilo 63 % žáků, přičemž přesně polovina z nich uspěla. Úspěšnost nadaných žáků při řešení této úlohy pomocí heuristické strategie je celkem 31 %. Zde si dovolíme rozlišit 2 varianty řešení s využitím zavedení pomocného prvku, které jsme uvedli v podkapitole 6.3.2 Didaktický test, a to řešení pomocí přesunu částí draka a řešení cestou vedoucí přes výpočet poloviny čtverců a obdélníků.

První variantu zvolil pouze jeden žák a správného řešení dosáhl. Ostatní žáci se vydali druhou možnou cestou, přičemž ke správné odpovědi došlo 75 % z nich. V několika případech žáci do obrázku nijak nezasáhli, nic do něj nezakreslili, avšak z výpočtů je zřetelné, že pomocný prvek zavedli pomyslně. Tyto případy také řadíme do kategorie zavedení pomocného prvku. Jeden z těchto případů ukazuje obr. 18.



Obrázek 18: Žákovské řešení úlohy 2 - pomyslné zavedení pomocného prvku

Všichni žáci, kteří úlohu řešili pomocí úvahy, došli ke správné odpovědi. Jedná se o 9 % žáků. V jejich postupech se objevily dva směry myšlení. Část žáků určila plochu draka jako polovinu obsahu papíru, tedy využila námi dříve popsaný postup. Jeden žák ale manipuloval s odstřižky stejně, jako když jsme přesouvali části draka, a poskládal z nich obdélník s délkami stran 10 cm a 30 cm (Obr. 19).



Obrázek 19: Žákovské řešení úlohy 2 - přesun odstřižků

Stejně jako u žáků běžných tříd, i zde jsme se setkali s aritmetickým způsobem řešení, který zvolilo 13 % žáků. Jak jsme již předeslali, žáci často namísto obsahu draka vypočítali obsah celého papíru. Nikdo z těchto žáků nedošel ke správnému zdůvodnění své odpovědi.

Úspěšných nebylo ani dalších 13 % žáků, kteří zvolili jiné způsoby řešení. Opět jsme se setkali s žáky, kteří se pokusili dojít k výsledku měřením skutečných délek stran draka pomocí pravítka. Nemůžeme opomenout ani originální odpovědi, které se v testech objevily. Obzvláště jedna z nich stojí za zmínku. Na otázku „Poletí Ondrův drak?“ žák odpověděl:

„*Ne, protože není vystřihnutý a nemá provázek. :)*“

Ačkoli je tato odpověď naprosto logická, nelze ji z našeho pohledu uznat jako správnou.

Co se týče absence žákova řešení u této úlohy, je na rozdíl od žáků běžných tříd velmi nízká. Jedná se v tomto případě o jediného žáka.

Zaměříme-li se na úspěšnost všech žáků bez rozdílů, ke správnému výsledku došlo 18 % žáků. 12 % úlohu vyřešilo pomocí heuristické strategie zavedení pomocného prvku, 6 % zvolilo řešení úvahou s využitím geometrické představivosti.

Časté chyby

Nejčastějšími chybami byla nesprávná volba vzorce. Žáci běžných tříd často vypočítali obvod papíru, nadaní žáci naopak jeho obsah. Numerické chyby se objevily pouze u nadaných žáků. Velmi nás zaujalo, že se u nadaných žáků opakoval případ, kdy vypočítali správný obsah draka, tedy 300 cm^2, ale do odpovědi napsali, že drak nevzlétne. Tuto chybovost přičítáme zbrklosti žáků při čtení zadání, kterou předpokládala třídní učitelka nadané třídy, či nedostatečně rozvinuté čtenářské gramotnosti žáků.

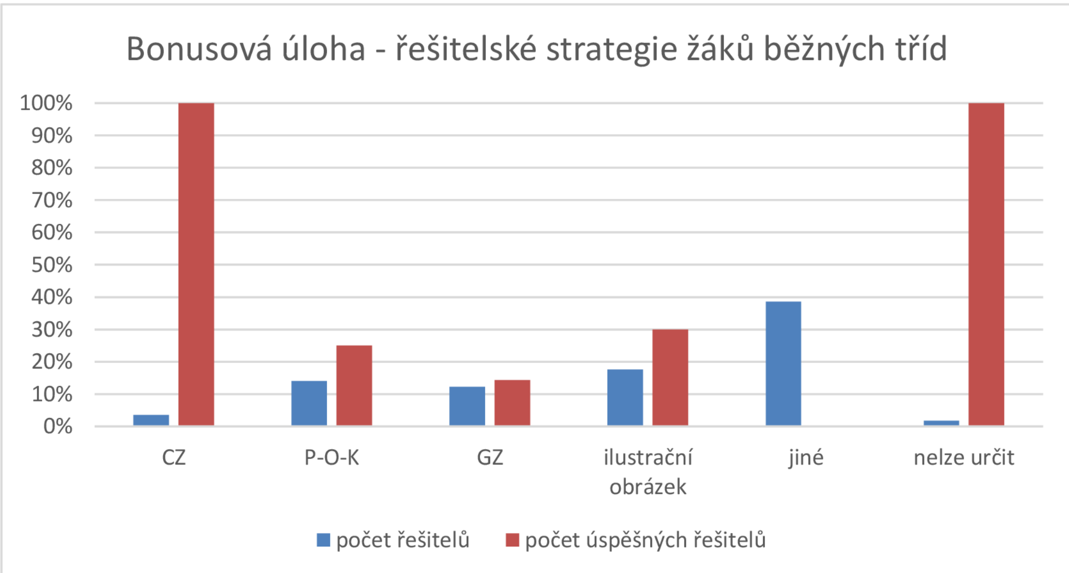
Vyhodnocení bonusové úlohy: Havrani

Žáci běžných tříd

Při analýze bonusové úlohy jsme měli možnost setkat se s několika použitými heuristickými strategiemi, kterými jsou cesta zpět (CZ), pokus-ověření-korekce (P-O-K) a grafické znázornění (GZ) v podobě řešitelského obrázku. Zvlášť jsme rozlišili nakreslení ilustračního obrázku, který žákům pomohl lépe znázornit matematický problém. K jeho řešení však využili jinou strategii. Mnozí u nakreslení obrázku skončili, neboť si dál nevěděli rady. Kategorie „jiné“ opět zahrnuje méně časté metody řešení. Nechybí ani žák, který sice úlohu úspěšně vyřešil, ale ze zápisu nebylo možné určit, jakým způsobem k výsledku dospěl.

Bonusovou úlohu dovedlo vyřešit celkem 11 % žáků běžných tříd. Graf 5 ukazuje míru využití jednotlivých řešitelských strategií žáky a jejich úspěšnost při řešení úlohy. Jelikož se jedná o bonusovou úlohu, jejíž řešení bylo dobrovolné, nebereme zde v potaz počet žáků, kteří úlohu nechali neřešenou.

Graf 5: Bonusová úloha – řešitelské strategie žáků běžných tříd



Budeme-li za heuristické strategie považovat CZ, P-O-K a GZ, dojdeme k číslu 28 %, což je množství žáků, kteří pro své řešení použili alespoň jednu z těchto strategií. Ne všichni však byli úspěšní. Ke správnému výsledku se dopracovalo pouze 31 % z nich.

Heuristickou strategii CZ zvolily pouze 4 % žáků, nicméně všichni dospěli ke správnému závěru, jejich úspěšnost tedy činí 100 %.

Strategii P-O-K použilo 14 % žáků s úspěšností 25 %. Tito žáci odhadli původní počet havranů na obou stromech a poté zkoušeli, zda počty vyhovují podmínkám.

Řešitelský obrázek (GZ) se pokusilo vytvořit 12 % dětí, z nichž pouze jeden žák získal řešení vyhovující všem zadaným podmínkám. Jeden z žáků se rozhodl zkombinovat strategie P-O-K a GZ, bohužel neúspěšně.

V kategorii „jiné“ jsou zahrnuti žáci, kteří si výsledek pouze tipli, tzn. nenapsali nic jiného než výsledek. Další z nich se pokusili dojít k výsledku aritmetickou cestou, nebo nakreslili pouze ilustraci. Největší podíl tvoří žáci, kteří zadání úlohy buď vůbec nepochopili, nebo jej pochopili chybně. Chyby v analýze zadání více rozebereme níže v části „Časté chyby“. Každopádně žádný z těchto postupů řešení žáky nedovedl k cíli.

Napříč všemi kategoriemi se objevují ilustrační obrázky, které je nutné kombinovat s další metodou řešení, neboť obrázky samy o sobě úlohu nevyřeší. Vyskytly se v 18 % žákovských řešení. Ke správnému výsledku obrázek pomohl 30 % z nich.

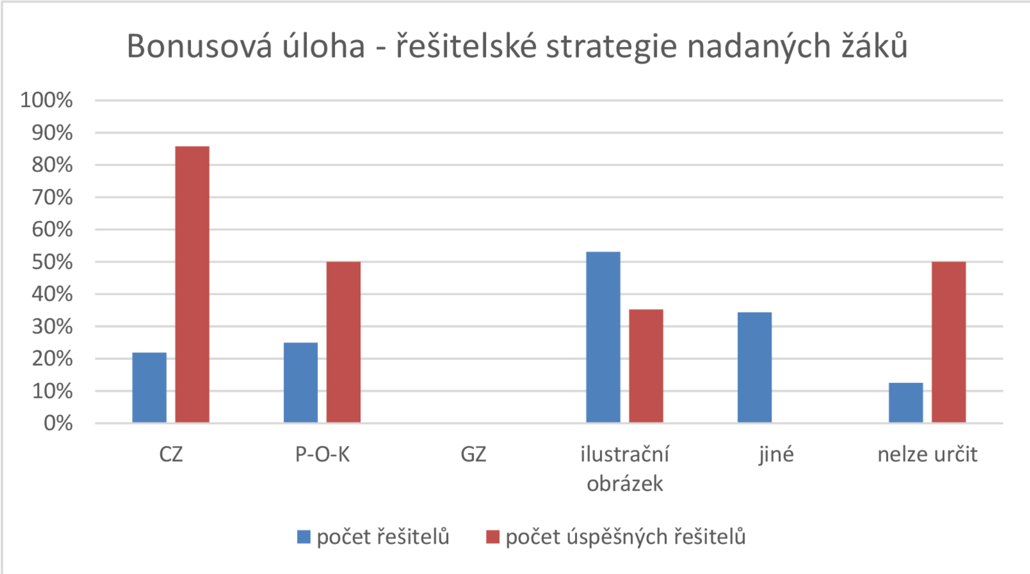
Poslední z žáků bonusovou úlohu vyřešil správně, avšak nelze určit, kterou metodu řešení použil.

Opomeneme-li žáka, jehož způsob řešení neznáme, můžeme si dovolit tvrdit, že mezi žáky běžných tříd ke správnému řešení bonusové úlohy dospěli pouze ti, kdo využili některou z vytipovaných heuristických strategií.

Nadaní žáci

Analýza didaktických testů nadaných žáků probíhala stejným způsobem jako u žáků běžných tříd, kategorie jsou totožné. Celkem 34 % nadaných žáků dovedlo správně vyřešit bonusovou úlohu s využitím různých heuristických strategií. Četnost jednotlivých zvolených řešitelských strategií včetně úspěšnosti při jejich aplikaci zobrazuje graf 6.

Graf 6: Bonusová úloha – řešitelské strategie nadaných žáků

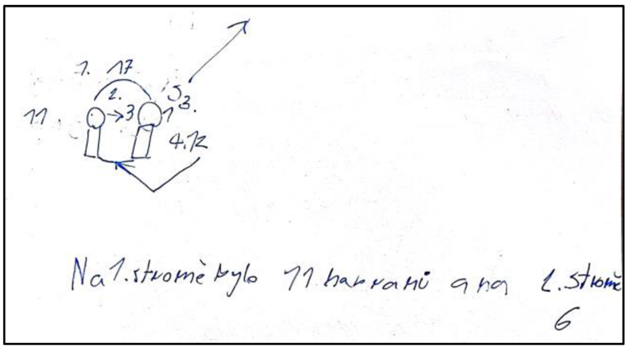


Některou z heuristických strategií či jejich kombinaci zvolilo 44 % nadaných žáků, z nichž 64 % tuto úlohu vyřešilo správně.

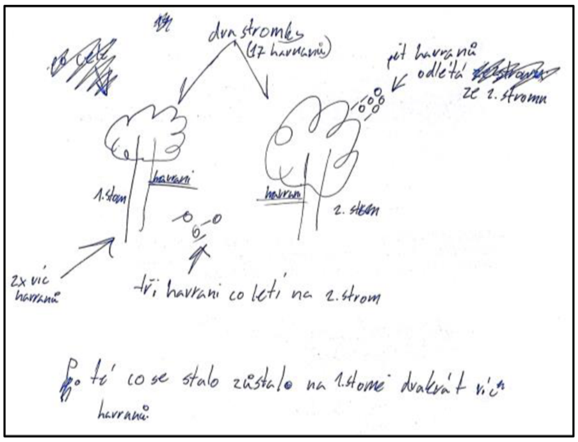
Nejúspěšnější strategií se ukázala být heuristická strategie CZ, kterou zvolilo sice jen 22 % žáků, ale s vysokou úspěšností 86 %.

O něco méně úspěšnější strategií je P-O-K, kterou použilo 25 % dětí s úspěšností 50 %. Jeden žák zvolil kombinaci strategií P-O-K a CZ. Nejdříve se zaměřil na odhad konečného stavu, tedy situace, kdy na 1. stromě sedělo 2krát více havranů než na 2. stromě, a poté šel cestou zpět k počátečnímu stavu. V jeho případě se kombinace vyplatila, neboť úlohu vyřešil správně.

Ani jeden žák nezvolil geometrickou cestu, avšak až 53 % žáků si pomohlo k řešení nakreslením ilustračního obrázku. Ilustrace se svou propracovaností velmi lišily. Na obrázku 21 dívka nakreslila podrobný náčrt situace, ale nevěděla, jak úlohu řešit dále. Na druhou stranu obrázek 20 ukazuje řešení chlapce, jehož nákres je velmi minimalistický, avšak dostatečně názorný k tomu, aby se po šipkách vracel až k počátečnímu stavu, kterého chtěl dosáhnout. Každopádně načrtnutí názorné ilustrace pomohlo ke zdárnému řešení úlohy 35 % žáků z těch, kteří jej využili.



Obrázek 20: Minimalistická ilustrace bonusové úlohy s úspěšným řešením



Obrázek 21: Detailní ilustrace bonusové úlohy

Kategorie „jiné“ zahrnuje žáky, kteří si zkusili tipnout výsledek nebo nakreslili ilustraci a tím jejich řešení končí. Velmi nás zaujalo, že poměrně dost žáků se pokusilo úlohu vyřešit sestavením rovnic. Ty však v drtivé většině nebyly sestaveny správně a žáci je nedovedli vyřešit. Oproti žákům běžných tříd jsme se u nadaných žáků setkali s nepochopením úlohy jen minimálně. Nechyběly však případy, kdy nebylo možné určit řešitelskou metodu žáků. Tato situace nastala u 13 % dětí, přičemž polovina z nich úlohu vyřešila správně.

Nebudeme-li brát v potaz žáky, u kterých nelze určit postup řešení, pak z výsledků vyplývá, že jedinými úspěšnými řešiteli jsou ti, kteří k řešení využili heuristickou strategii CZ nebo P-O-K. Jedná se o 28 % nadaných žáků. Jiné strategie řešení se nesetkaly s úspěchem.

Celková úspěšnost všech žáků dohromady je 19 %. Počet žáků, kteří použili některou z heuristických strategií je 16 %. Rozdíl 3 % mezi těmito skupinami je způsoben úspěšnými řešiteli, u nichž nebylo možné určit řešitelskou strategii.

Časté chyby

Nejčastějším problémem, zejména u běžných žáků, bylo chybné pochopení úlohy, a to dvěma způsoby. Mnoho žáků ze zadání vyvodilo, že 17 havranů nebylo na obou stromech dohromady, ale na každém z nich. Počítali tedy celkem s 34 havrany, tudíž nemohli vyhovět dalším podmínkám zadání. Druhým, méně frekventovaným, kamenem úrazu byl odlet 5 havranů z druhého stromu. Někteří žáci pochopili, že tito havrani namísto úplného odletu pouze přeletěli na 1. strom. Z toho důvodu také nebyli schopni vyhovět požadavkům úlohy. Méně často se objevovaly numerické chyby.

Vyhodnocení úspěšnosti dívek a chlapců

Jedním z našich cílů bylo zjistit, zda jsou chlapci a dívky při řešení matematických problémů stejně úspěšní, nebo mezi jejich úspěšností existuje statisticky významný rozdíl. Pro tyto účely jsme použili test dobré shody chí-kvadrát, který *„ověřuje, zda četnosti, které byly získány měřením v pedagogické realitě, se odlišují od teoretických četností"*. (Chráska, 2007, s. 71) Teoretickou četností je v našem případě předpoklad, že procento úspěšných chlapců bude stejné jako procento úspěšných dívek. Tento test významnosti nám ukáže, zda je předpoklad pravdivý. Faktor úspěšnosti budeme zkoumat na celém výzkumném vzorku, tedy bez ohledu na nadání žáků. Hladinu významnosti jsme zvolili 0, 05. Tab. 4 ukazuje výpočet testového kritéria.

Tabulka 4: Úspěšnost v řešení matematických problémů chlapců a děvčat

Pohlaví	**Pozorovaná četnost P**	**Očekávaná četnost O**	**P-O**	**(P-O)^2**	**(P-O)^2/O**
chlapci	33,333	23,232	10,101	102,030	4,392
dívky	13,131	23,232	-10,101	102,030	4,392
	Σ 46,465	Σ 46,465			**Σ 8,783**

Kritická hodnota pro první stupeň volnosti je stanovena na hodnotu 3,841. Zjištěné testové kritérium má hodnotu 8,783. Testové kritérium v našem případě přesáhlo kritickou hodnotu. Můžeme tedy tvrdit, že mezi řešitelskou úspěšností chlapců a děvčat existuje statisticky významný rozdíl, a to ve prospěch chlapců. Chlapci se ukázali být úspěšnějšími řešiteli nestandardních matematických úloh než dívky.

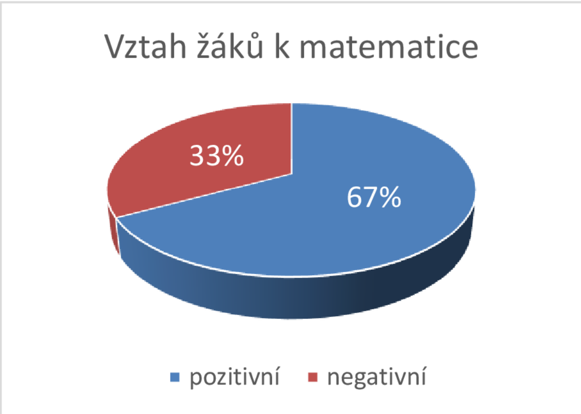
Vzhledem k předchozímu rozdělení žáků na běžné a nadané vyvstává otázka, zda přece jen jedna ze skupin výrazně neovlivnila výsledek společného testu dobré shody chí-kvadrát. Testové kritérium však překročilo kritickou hodnotu u obou skupin. Chlapci jsou tedy úspěšnějšími řešiteli i v jednotlivých kategoriích.

7.3 Vyhodnocení dotazníku pro žáky

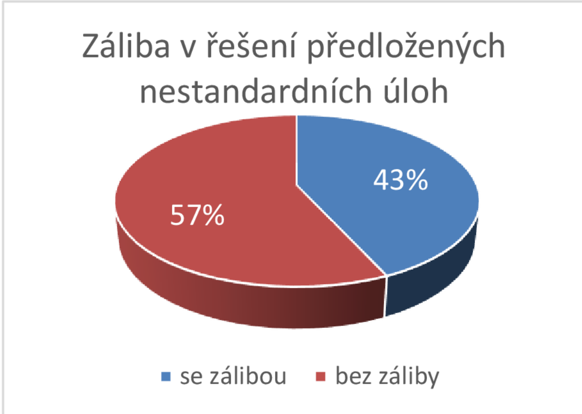
Při analýze dotazníků jsme se zaměřili na vztah žáků k matematice, jejich zkušenost s matematickými problémy a zálibu v řešení nestandardních úloh předložených v didaktickém testu.

Žáci odpovídali na otázku, zda je baví matematika. Vybírali z odpovědí na čtyřstupňové škále. Při analýze jsme tuto škálu rozdělili na dva protipóly. Výsledky zobrazuje graf 7. Z něj vyplývá, že pozitivní vztah k matematice mají 2/3 dotazovaných žáků, zatímco 1/3 žáků matematika nebaví. Navzdory našemu očekávání se neprojevil rozdíl ve vnímání matematiky žáky běžných tříd a žáky nadanými. Zájem o matematiku je v obou skupinách velmi podobný.

Graf 7: Vztah žáků k matematice



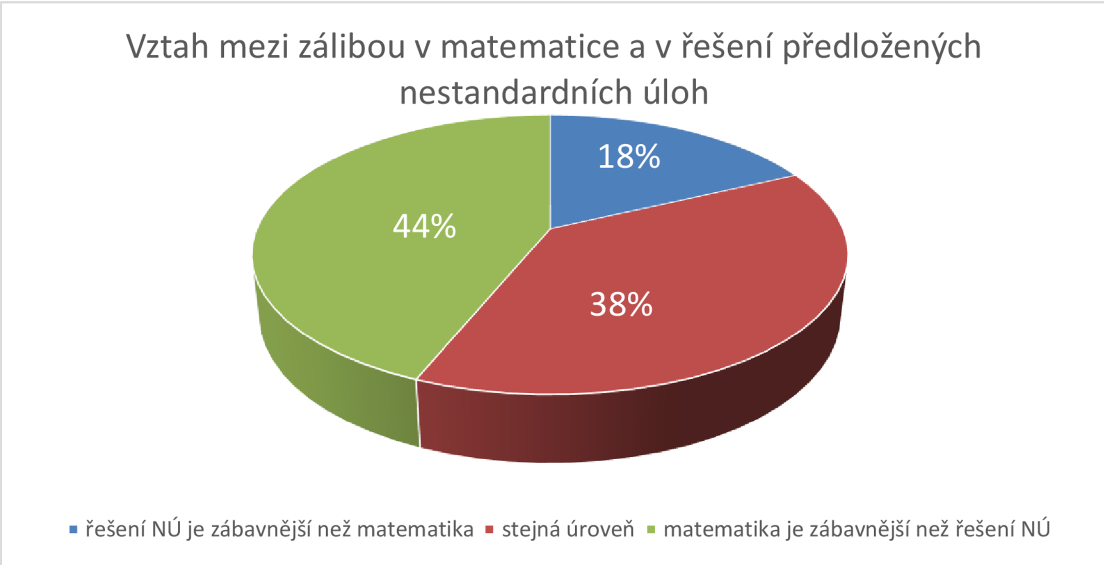
Graf 8: Záliba v řešení předložených NÚ



V návaznosti na zájem žáků o matematiku jsme zjišťovali, zda je bavilo řešit předložené nestandardní matematické úlohy. Své odpovědi žáci zaznamenávali stejným způsobem jako v předchozí otázce. Zjištěné četnosti udává graf 8. Více než polovinu respondentů tyto úlohy nebavilo řešit. 43 % dotazovaných však ano. Očekávali jsme, že nadaní žáci budou více zainteresovaní do řešení matematických problémů než žáci běžných tříd. K tomuto předpokladu nás vedl fakt, že v těchto třídách se žáci s matematickými problémy setkávají častěji a jsou lépe obeznámeni s heuristickými strategiemi. Vyplývá to také z interview s třídními učiteli nadaných. Nicméně tento předpoklad se nepotvrdil. Rozdíl v odpovědích mezi oběma kategoriemi žáků je však ještě menší než u předchozí otázky, tedy téměř mizivý.

Hledali jsme souvislost mezi vztahem žáků k matematice a jejich zálibou v řešení matematických problémů. U jednotlivých žáků jsme porovnali odpovědi na předchozí dvě otázky a vytvořili 3 kategorie odpovědí. Do první kategorie jsme zařadili žáky, kteří v dotazníku uvedli pozitivnější vztah k řešení předložených úloh než k matematice samotné. Ve druhé kategorii jsou žáci, jejichž odpověď na dané otázky byla stejná. Třetí kategorie zahrnuje žáky, kteří vyjádřili bližší vztah k matematice než k řešení nestandardních úloh. Procentuální zastoupení jednotlivých skupin žáků ukazuje graf 9.

Graf 9: Vztah mezi zálibou v matematice a zálibou v řešení předložených nestandardních úloh

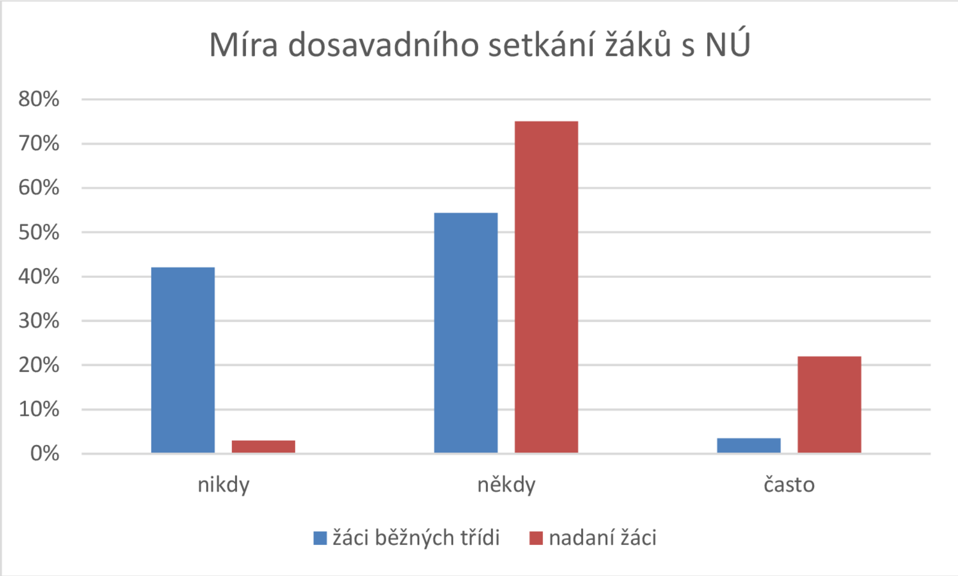


Ukázalo se, že 18 % žáků upřednostňuje řešení matematických problémů před matematikou samotnou, 38 % žáků mezi nimi nerozlišuje a 44 % žáků má raději matematiku jako takovou než řešení nestandardních úloh. Ani zde se neobjevil výrazný rozdíl mezi nadanými žáky a žáky běžných tříd.

Zaměříme-li se na to, do jaké míry se žáci s podobnými úlohami dosud setkali, hodnoty nadaných žáků a žáků běžných tříd se liší. Žáci vybírali ze 3 možností, kterými jsou: takové úlohy řeším často / už jsem takové úlohy někdy řešil(a) / nikdy jsem takové úlohy neřešil(a). Četnost jednotlivých odpovědí zobrazuje graf 10.

Můžeme zde také pozorovat rozdíly mezi žáky nadanými a běžnými. V obou skupinách žáků dominovala odpověď, že se s podobnými úlohami již někdy setkali. Obzvláště u nadaných tak odpovědělo 75 % žáků. Dále jsme zjistili, že nadaní žáci mají podstatně bohatší zkušenosti s řešením matematických problémů než běžní žáci. Vidíme zde souvislost s výpověďmi třídních učitelů ohledně četnosti zařazování nestandardních úloh do výuky. Pouze jeden nadaný žák uvedl, že se s podobnými úlohami doposud nesetkal. To se nedá říci o žácích běžných tříd, kteří tuto odpověď uvedli ve 42 % případů. To se mohlo výrazně projevit na úspěšnosti při řešení úloh v didaktickém testu.

Graf 10: Míra dosavadního setkání žáků s nestandardními úlohami



8. Shrnutí a vyhodnocení výzkumných otázek

V této kapitole shrneme výsledky provedeného výzkumu. Zároveň také zodpovíme výzkumné otázky, které jsme si stanovili v úvodu praktické části.

VO$_1$: Používají žáci heuristické strategie při řešení nestandardních matematických úloh?

Při řešení předložených úloh žáci postupovali různými způsoby, mezi nimiž měly heuristické strategie významné zastoupení. Úlohu Krávy a slepice řešilo pomocí těchto strategií celkem 49 % žáků, při řešení úlohy Drak je použilo 27 % žáků a bonusovou úlohu Havrani řešilo pomocí heuristických strategií 34 % žáků.

V souboru žákovských řešení se objevily v různém poměru všechny vytipované heuristické strategie. Uvedeme zde, které z nich byly nejfrekventovanější a které se v testech vyskytly jen zřídka.

Nejčastěji využitou heuristickou strategií byla strategie P-O-K, a to hned ve dvou úlohách. V úloze Krávy a slepice ji žáci aplikovali v 31 % a v bonusové úloze v 18 % případů. Poměrně hojného využití se dočkala strategie ZPP, a to v úloze Drak, neboť pouze v ní se ukázala být efektivním způsobem řešení. Použilo ji 27 % respondentů.

O něco méně často volená byla strategie GZ. Objevila se sice ve dvou úlohách (Krávy a slepice, Havrani), ale v obou případech ji použilo méně než 10 % respondentů. V úloze 1 konkrétně 6 % žáků a v bonusové úloze 8 % žáků. Nelze opomenout, že u bonusové úlohy žáci s oblibou kreslili ilustrační obrázky, které také považujeme za součást grafického znázornění, byť je nezbytné doplnit je dalším řešitelským postupem. Pomohlo si tak 30 % žáků. Znázornění úlohy ilustračním nákresem můžeme vnímat jako předstupeň řešitelského obrázku.

Ještě menší zastoupení měla strategie SE, kterou žáci použili pouze při řešení úlohy Krávy a slepice, a to ve 12 % případů. Podobné zastoupení měla také heuristická strategie CZ, kterou při řešení bonusové úlohy aplikovalo 10 % respondentů.

Z grafů 1-6 je zřejmé, že míra využití heuristických strategií je výrazně vyšší u nadaných žáků. Domníváme se, že tato skutečnost je dána více faktory, mezi než patří jak přirozená tvořivost nadaných žáků, tak i častější zařazování nestandardních úloh do výuky matematiky a jejich řešení pomocí heuristických strategií. Žáci tak měli větší možnost se se strategiemi seznámit a naučit se je efektivně aplikovat.

VO_2: Jak jsou žáci úspěšní při řešení úloh pomocí jednotlivých heuristických strategií a při využití jiných způsobů řešení?

Je velmi zajímavé, že právě ty heuristické strategie, se kterými jsme se při analýze didaktických testů setkali nejméně, mají nejvyšší procento úspěšnosti. Nejúspěšnější z využitých strategií se ukázala být heuristická strategie CZ, která dovedla řešitele k cíli až v 89 % případů. Jen o několik procent nižší úspěšnost měla strategie SE. Její využití bylo efektivní v 82 % případů. Tyto dvě strategie nejsou tak intuitivní jako např. P-O-K, a proto je nejspíš využili pouze žáci, kteří je znají. Je možné, že vysoká úspěšnost těchto strategií je dána tím, že žáci dobře věděli, co dělají a jak tímto způsobem dosáhnou správného řešení.

Poměrně úspěšná byla i již zmíněná strategie P-O-K. V úloze 1 dovedla ke správnému výsledku 71 % žáků, v bonusové úloze už tak úspěšná nebyla. Pouze 38 % žáků s ní získalo správné řešení. Strategie ZPP byla úspěšně použita v 46 % případů, což nepovažujeme za špatný výsledek.

Nejméně úspěchu získala strategie grafické znázornění. Ta sice v úloze Krávy a slepice uspěla ve 40 % případů, v bonusové úloze však pouze v 18 %. Je zřejmé, že žákům je bližší tvorba ilustračních obrázků.

Pro nás je významným objevem fakt, že pomineme-li žáky, jejichž postup řešení nebylo možné vyhodnotit, téměř všechna úspěšná řešení úloh zahrnovala aplikaci alespoň jedné heuristické strategie. Úspěšnost řešení v úloze Krávy a slepice činí 39 %, celkem 35 % žáků využilo jednu z heuristických strategií. Rozdíl 4 % činí kromě neznámých způsobů řešení 2 žáci, kteří dosáhli správného výsledku aritmetickou cestou.

Úlohu Drak vyřešilo 18 % žáků, celkem 12 % použilo heuristickou strategii. Rozdíl 6 % tvoří ti, kteří úlohu vyřešili pomocí úvahy.

Bonusovou úlohu vyřešilo 19 % žáků. Všechna identifikovatelná řešení obsahují aplikaci některé z heuristických strategií.

Jestliže bychom měli úspěšnost žáků shrnout do jedné věty, bez využití heuristických strategií uspěly pouze 2 % žáků, kteří zvolili aritmetickou cestu, a 6 % žáků, kteří řešili problém Drak pomocí úsudku. Všichni ostatní úspěšní řešitelé využili k řešení některou z heuristických strategií.

Dle očekávání procento úspěšnosti výrazně zvýšili nadaní žáci. Souvislost vidíme ve vyšší míře využívání heuristických strategií, což může být způsobeno mimo jiné skutečností, že se s těmito strategiemi nadaní žáci setkávají podstatně častěji než žáci běžných tříd. Toto tvrzení je podloženo odpověďmi třídních učitelů. Nelze také opomenout rozvinutější logické myšlení nadaných žáků, které bezesporu mělo vliv na jejich úspěšnost při řešení zadaných úloh.

VO3: Existuje statisticky významný rozdíl v úspěšnosti chlapců a dívek při řešení nestandardních matematických úloh?

Výzkum prokázal, že v našem výzkumném vzorku existuje statisticky významný rozdíl v úspěšnosti chlapců a dívek. Pomocí testu dobré shody chí-kvadrát jsme dospěli k závěru, že chlapci jsou úspěšnějšími řešiteli matematických problémů než dívky. Vliv nemá ani skutečnost, zda se jedná o žáky nadané či běžné.

Jak bylo popsáno výše, žáci při zadání testu dostali instrukci co nejlépe vysvětlit svůj postup řešení, tok myšlenek. Během analýzy testů nás velmi zaujal rozdíl, který se objevil mezi třídou E (třída Světa vzdělání s výukou matematiky metodou profesora Hejného) a ostatními třídami. Žáci ze třídy E projevili v porovnání s ostatními třídami velmi dobrou schopnost vysvětlit, jak při řešení postupovali. Měli jsme možnost promluvit si s učitelem, který ve třídě vyučuje logiku. Ten uvedl, že žáci jsou zvyklí vzájemně sdílet své postupy řešení, podávat argumenty a kriticky hodnotit výsledky. Jelikož se tato schopnost výrazně neprojevila i u druhé zúčastněné třídy nadaných, domníváme se, že Hejného metoda výuky matematiky v této oblasti hraje významnou roli.

Závěr

V teoretické části diplomové práce jsme se seznámili s heuristikou, jejími principy a strategiemi využitelnými žáky na 1. stupni ZŠ, kterými jsou: pokus-ověření-korekce, systematické experimentování, grafické znázornění, analogie, zavedení pomocného prvku a cesta zpět. Poukázali jsme na přínosy zařazování heuristické metody do výuky matematiky, ale také na obtíže, se kterými se učitelé mohou v průběhu setkat.

V rámci praktické části jsme provedli výzkum s cílem analyzovat, jakým způsobem žáci 5. třídy ZŠ řeší matematické problémy, zda k řešení využívají heuristické strategie, případně které, a jak jsou při svém počínání úspěšní. Dále pak identifikovat, zda existuje statisticky významný rozdíl v úspěšnosti chlapců a dívek při řešení nestandardních matematických úloh. Za tímto účelem jsme žákům předložili didaktický test. Při analýze žákovských řešení jsme v různé míře narazili na všechny vytipované heuristické strategie a jelikož jsme měli možnost provést výzkum nejen v běžných třídách, ale i ve třídách nadaných žáků či třídě s výukou matematiky metodou profesora Hejného, mohli jsme jejich způsoby řešení porovnat. Úspěšnost při řešení úloh pomocí jednotlivých strategií se také velmi lišila. Nejčastěji využitou strategií se ukázal být pokus-ověření-korekce, na druhou stranu největšího procenta úspěšnosti dosáhla méně frekventovaná strategie cesta zpět.

Nadaní žáci dosáhli znatelně lepších výsledků než žáci běžných tříd. Domníváme se však, že tento fakt není dán pouze nadáním, ale způsobem vedení výuky. Z interview s učiteli jasně vyplynulo, že třídy nadaných žáků se daleko častěji setkávají s heuristickými principy a jsou lépe seznámeni s heuristickými strategiemi.

Zastávám názor, že by se žáci v hodinách matematiky měli pravidelně setkávat s nestandardními úlohami. Řešením matematických problémů rozvíjí nejen dovednost řešit problémy obecně, ale také svou kreativitu, schopnost logického myšlení a samostatnost.

Touto diplomovou prací bych chtěla povzbudit zejména učitele, aby se do hodin matematiky nebáli zařazovat heuristickou metodu a její strategie. Je totiž důležité v žácích probouzet jejich přirozenou zvídavost a chuť objevovat a u žáků mladšího školního věku to platí dvojnásobně.

LITERATURA

1. BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 4. Všeň: Alter, 2009a. ISBN 978-80-7245-159-3
2. BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 4. Všeň: Alter, 2009b. ISBN 978-80-7245-186-9.
3. BŘEHOVSKÝ, Jiří a kol. Heuristic Strategies in Problem Solving of 11-12-year-old Pupils. *International Symposium Elementary Maths Teaching: Prague, the Czech Republic, Charles Univerzity, Faculty of Education ...: Proceedings*. Prague: Charles University, Faculty of Education, 2013, s. 75-82. ISBN 978-80-7290-637-6.
4. EISENMANN, Petr a Jiří PŘIBYL. Systematické experimentování ve výuce matematiky. In: *Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2013, s. 85-93. ISBN 978-80-7394-448-3.
5. GAHÉR, František a Vladimír MARKO. *Metoda, problém a úloha*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislavě, 2017. ISBN 978-80-223-4242-1.
6. CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada, 2007. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1369-4.
7. JANKOVCOVÁ, Marie, Jiří KOUDELA a Jiří PRŮCHA. *Aktivizující metody v pedagogické praxi středních škol*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Pedagogická teorie a praxe. ISBN 80-04-23209-4.
8. KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST a kol. *Školní didaktika*. Vyd. 2. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-571-4.
9. KILPATRICK, Jeremy. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: a Edward A. SILVER. *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Reston: Lawrence Erlbaum Associates, 1989, s. 1-22. ISBN 0805803556.

10. KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí na Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 1999. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 80-7044-247-6.
11. KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.
12. KOPKA, Jan. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Vyd. 2. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 2007. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 978-80-7044-926-4.
13. KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-307-3.
14. MALÁČ, Jaromír. *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ*. Praha: SPN, 1981. Maják (Státní pedagogické nakladatelství).
15. MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.
16. MAŇÁK, Josef. *Rozvoj aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků*. Brno: Masarykova univerzita, 1998. Spisy Masarykovy univerzity v Brně. ISBN 80-210-1880-1.
17. NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Analogy– a Friend or Fiend When Solving Math Problems? In: TAN, Deyao. *Engineering Technology, Engineering Education and Engineering Management: Proceedings of the 2014 International Conference on Engineering Technology, Engineering Education and Engineering Management (ETEEEM 2014)*. Hong Kong: CRC Press, 2015a, s. 103-108. ISBN 9781138027800.
18. PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: Masarykova univerzita, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.
19. PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování*. 6., rozš. a přeprac. vyd. Přeložil Jiří FOLTÝN. Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-262-0367-4.
20. PÓLYA, György. *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. Přeložil Oldřich KOWALSKI. Praha: MatfyzPress, 2016. Popularizace. ISBN 978-80-7378-325-9.
21. PŘIBYL, Jiří a Jiřina ONDRUŠOVÁ. Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie. In: MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA *Časopis pro výuku na základních a středních školách*. Praha 4: Prometheus, 2014, 23(2), s. 95-105. ISSN 1210-1761(print), 1805-7705 (on-line).

22. SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika: vyučovací proces, učivo a jeho výběr, metody, organizační formy vyučování*. Praha: Grada, 2007. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1821-7.
23. ŠTĚCH, Ondřej. *Smíšená výzkumná strategie*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2014. ISBN 978-80-7435-443-4.
24. ZORMANOVÁ, Lucie. *Výukové metody v pedagogice: tradiční a inovativní metody, transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky, klasifikace výukových metod*. Praha: Grada, 2012. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-4100-0.

Internetové zdroje:

1. EISENMANN, Petr a kol. Volba heuristických strategií v závislosti na věku. *Scientia in educatione* [online]. 2017, 8(2), s. 21-38 [cit. 2022-01-18]. ISSN 1804-7106. Dostupné z: https://ojs.cuni.cz/scied/issue/view/92
2. HABALA, Petr. *Diskrétní matematika: Rovnice a celá čísla* [online]. Praha, 2019 [cit. 2023-04-12]. Dostupné z: https://math.fel.cvut.cz/cz/lide/habala/teaching/dma/dmkni04.pdf
3. ISHIDA, Junichi. Students' Evaluation of Their Strategies When They Find Several Solution Methods. *The Journal of Mathematical Behavior* [online]. 2002, 21(1), 49-56 [cit. 2022-01-24]. ISSN 07323123. Dostupné z: doi:10.1016/S0732-3123(02)00102-5
4. KRÁLOVÁ, Magda. Archimedes. *Eduportál Techmania Science Center* [online]. Plzeň: Techmania Science Center, 2007 [cit. 2022-10-26]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1022/archimedes
5. MŠMT. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* [online]. Praha: MŠMT, 2021. 164 s. [cit. 2022-12-29]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/
6. MŠMT. RVP – Rámcové vzdělávací programy. *Jednotný metodický portál MŠMT* [online]. Praha: MŠMT, c 2022b [cit. 2023-01-03]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/
7. MŠMT. *Hlavní směry revize Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2022a [cit. 2023-04-11]. Dostupné z:

https://velke-revize-zv.rvp.cz/files/iii-hlavni-smery-revize-rvp-zv-po-vpr-final-230111.pdf

8. NOVOTNÁ, Jarmila a kol. Problem Solving in School Mathematics Based on Heuristic Strategies. In: *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, [online]. Praha: Fakulta ekonomiky a managementu, Česká zemědělská univerzita, 2014, 7(1), s. 1-6 [cit. 2023-01-08]. ISSN 1803-1617 (printed), 2336-2375 (on-line). Dostupné z: doi:10.7160/eriesj.2013.070101
9. NOVOTNÁ, Jarmila, Petr EISENMANN a Jiří PŘIBYL. Impact of Heuristic Strategies on Pupils' Attitudes to Problem Solving. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science* [online]. 2015b, **8**(1), s. 15-23 [cit. 2022-01-24]. ISSN 18031617. Dostupné z: doi:10.7160/eriesj.2015.080103
10. SAFARINI Desyarti, Regina NURASHARI a Margaretha Weryana LIE. Mathematical Problem-Solving Heuristics Used by Students in College Algebra Class. *Journal of Physics: Conference Series* [online]. 2021, 1776(1) [cit. 2022-01-25]. ISSN 1742-6588. Dostupné z: doi:10.1088/1742-6596/1776/1/012005
11. VLČKOVÁ, Kateřina. Smíšený výzkum: Jedná se o nové a závažné téma?. In: *Smíšený design v pedagogickém výzkumu: Sborník příspěvků z 19. výroční konference České asociace pedagogického výzkumu* [online]. Masaryk University Press, 2011, 2011, s. 1-6 [cit. 2023-02-06]. ISBN 9788021057746. Dostupné z: doi:10.5817/PdF.P210-CAPV-2012-84

Seznam tabulek

Seznam grafů

Seznam obrázků

Seznam příloh

Přílohy

Příloha 1 – Interview s učiteli matematiky zúčastněných tříd

Interview s učitelem matematiky v 5. třídě

1. **Žáky současné 5. třídy učím matematiku** 1. 2. 3. 4. 5. **rokem.**

Rozhodněte, jak jsou dle vašeho názoru tvrzení pravdivá:

2. **Úloha č. 1 se mi zdá pro žáky obtížná.**

   ☐ rozhodně ano ☐ spíše ano ☐ spíše ne ☐ rozhodně ne

3. **Úloha č. 2 se mi zdá pro žáky obtížná.**

   ☐ rozhodně ano ☐ spíše ano ☐ spíše ne ☐ rozhodně ne

4. **Bonusová úloha se mi zdá pro žáky obtížná.**

   ☐ rozhodně ano ☐ spíše ano ☐ spíše ne ☐ rozhodně ne

5. **Do výuky matematiky zařazuji nestandardní úlohy.**

   ☐ každý den ☐ 3-4 dny v týdnu ☐ 1-2 dny v týdnu ☐ méně než jednou týdně ☐ nezařazuji

6. **Při výuce matematiky uplatňuji heuristické přístupy** (= učitel žákům nepředkládá algoritmy vedoucí k řešení úlohy, ale vede je k aktivnímu a samostatnému objevování a nalézání vlastních způsobů řešení).

   ☐ vždy ☐ často ☐ občas ☐ jen zřídka ☐ nikdy

7. **Vyberte heuristické strategie, se kterými jste se již při řešení úloh z matematiky setkal/a:**
   - ☐ pokus-omyl-korekce
   - ☐ systematické experimentování
   - ☐ grafické znázornění
   - ☐ cesta zpět
   - ☐ zavedení pomocného prvku
   - ☐ analogie

8. **U strategií, které jste vybral/a v předchozí otázce, rozhodněte, zda vedete žáky k užívání těchto strategií při řešení úloh z matematiky:**

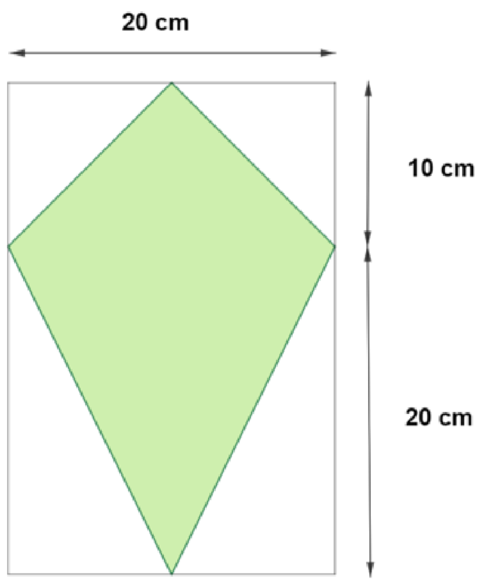
• Pokus-omyl-korekce	☐ rozhodně ano	☐ spíše ano	☐ spíše ne	☐ rozhodně ne
• Systematické experimentování	☐ rozhodně ano	☐ spíše ano	☐ spíše ne	☐ rozhodně ne
• Grafické znázornění	☐ rozhodně ano	☐ spíše ano	☐ spíše ne	☐ rozhodně ne
• Cesta zpět	☐ rozhodně ano	☐ spíše ano	☐ spíše ne	☐ rozhodně ne
• Zavedení pomocného prvku	☐ rozhodně ano	☐ spíše ano	☐ spíše ne	☐ rozhodně ne
• Analogie	☐ rozhodně ano	☐ spíše ano	☐ spíše ne	☐ rozhodně ne

Příloha 2 – Didaktický test

Matematika netradičně

1. Na statku jsou krávy a slepice. Dohromady mají 20 hlav a 68 nohou. Kolik je na statku krav?

2. Ondra se rozhodl vyrobit draka. Narýsoval ho na papír přesně tak, jak vidíš na obrázku. Přišel za ním tatínek a řekl, že drak poletí jen v případě, pokud bude mít obsah alespoň 250 cm^2. Poletí Ondrův drak? Zdůvodni.



BONUS:

Na dvou stromech sedělo 17 havranů. Jestliže z prvního přeletěli na druhý strom 3 havrani a z druhého stromu odletělo celkem 5 havranů, zůstalo na prvním stromě dvakrát víc havranů než na druhém. Kolik havranů bylo původně na každém stromě?

Příloha 3 – Dotazník pro žáky

Hodnocení

Vyber odpověď a zaškrtni ji:

1. **Pohlaví:** ☐dívka ☐chlapec
2. **Baví tě matematika?**

   ☐rozhodně ano ☐spíše ano ☐spíše ne ☐rozhodně ne
3. **Bavilo tě řešit tyto úlohy?**

   ☐rozhodně ano ☐spíše ano ☐spíše ne ☐rozhodně ne
4. **Už jsi někdy takové úlohy řešil/a?**

   ☐ ano, takové úlohy řeším často

   ☐ ano, už jsem takové úlohy někdy řešil/a

   ☐ nikdy jsem takové úlohy neřešil/a
5. **Jak obtížná pro tebe byla úloha č. 1?**

   ☐ jednoduchá, vyřešil/a jsem ji naprosto bez problémů

   ☐ obtížná, dala mi zabrat, ale zvládnul/a jsem to

   ☐ vůbec jsem si s ní nevěděl/a rady
6. **Jak obtížná pro tebe byla úloha č. 2?**

   ☐ jednoduchá, vyřešil/a jsem ji naprosto bez problémů

   ☐ obtížná, dala mi zabrat, ale zvládnul/a jsem to

   ☐ vůbec jsem si s ní nevěděl/a rady
7. **Jak obtížná pro tebe byla bonusová úloha (pokud ses do ní pustil/a)?**

   ☐ jednoduchá, vyřešil/a jsem ji naprosto bez problémů

   ☐ obtížná, dala mi zabrat, ale zvládnul/a jsem to

   ☐ vůbec jsem si s ní nevěděl/a rady

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Veronika Scheichenostová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. PhDr. Radka Dofková, Ph.D.
Rok obhajoby:	2023

Název práce:	Heuristické strategie při řešení úloh z matematiky na 1. stupni ZŠ
Název v angličtině:	Heuristic Strategies for Solving Mathematics Problems at Primary School
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá způsobem řešení nestandardních matematických úloh žáky 5. tříd ZŠ. Pozornost je věnována zejména míře využití vytipovaných heuristických strategií a úspěšnosti žáků při jejich aplikaci. Práce je rozdělena do dvou celků. Teoretická část se věnuje nastínění dané problematiky, heuristickým principům a popisu jednotlivých heuristických strategií. Praktickou část tvoří analýza žákovských řešení získaných prostřednictvím didaktických testů, vyhodnocení interview s učiteli a dotazníků pro žáky. V závěru nechybí zodpovězení výzkumných otázek.
Klíčová slova:	Heuristika, heuristické strategie, řešení problémů, 1. stupeň ZŠ
Anotace v angličtině:	The thesis deals with the methods of solving mathematics problems by pupils of the 5th grade at primary school. The work mainly focuses on the rating of usage of the mentioned heuristic strategies and their success in solving the problems. The thesis is divided into two parts. The theoretical part introduces the issue, heuristic principles and describes individual heuristic strategies. The practical part consists of analysis of student solutions

	obtained by didactic tests, teacher interviews and pupil questionnaires. Final section then answers the research questions.
Klíčová slova v angličtině:	Heuristics, heuristic strategies, problem solving, primary school
Přílohy vázané v práci:	Příloha 1: Strukturované interview s učiteli matematiky zúčastněných tříd Příloha 2: Didaktický test Příloha 3: Dotazník pro žáky
Rozsah práce:	100
Jazyk práce:	Český jazyk