



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

# ATRAKTORY V SLOŽITÉ DYNAMICE TURBULENTNÍ KONVEKCE

ATTRACTORS IN THE COMPLEX DYNAMICS OF TURBULENT CONVECTION

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

## AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jakub Kašný

## VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Michal Macek, Ph.D.

BRNO 2022





Tato bakalářská práce byla vypracována na  
Ústavu přístrojové techniky AV ČR, v.v.i.

za podpory česko-německého projektu  
Grantové agentury České republiky číslo 21-06012J  
Efekty narušení Oberbeck-Boussinesquovy aproximace v  
turbulentní konvekci za vysokých Rayleigho čísel v kryogenním  
heliumu.

Vedoucí práce:  
Mgr. Michal Macek, Ph.D.



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Jakub Kašný**  
Studijní program: Matematické inženýrství  
Studijní obor: bez specializace  
Vedoucí práce: **Mgr. Michal Macek, Ph.D.**  
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Atraktory v složitě dynamice turbulentní konvekce

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Turbulentní proudění je prototypem složitě dynamického systému, který kromě náhodných fluktuací vykazuje i koherentní struktury [1], jako kupříkladu Golský proud v Atlantickém oceánu nebo převládající větry v atmosféře Země. Bakalářská práce bude zaměřena na identifikaci koherentních struktur a jejich dynamiky v časových řadách teplotních fluktuací z experimentů s turbulentní Rayleigh–Bénardovou konvekcí (RBC) pomocí metody HAVOK [2].

### Cíle bakalářské práce:

Student se seznámí se základními pojmy teorie dynamických systémů [1,3] a pomocí programů připojených k publikaci [2] se je naučí identifikovat nejprve v dobře známých jednodušších dynamických systémech. Následně rozšíří a adaptuje programy [2] v prostředí MATLAB a analyzuje vhodnou dimenzi prostoru vnoření (embedding space) k nalezení příslušných pohybových rovnic a atraktorů dynamiky koherentního větru v RBC na základě dat získaných v experimentech v kryogenním heliovém plynu na Ústavu přístrojové techniky AV ČR.

### Seznam doporučené literatury:

HOLMES, P., LUMLEY, J. L., BERKOOZ, G., ROWLEY, C.W. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012, xvi, 386 s.: il.; 26 cm. ISBN 978-1-107-00825-0. [1]

BRUNTON, S. L., BRUNTON, B. W., PROCTOR, J. L., KAISER, E., KUTZ, J. N. Chaos as an Intermittently Forced Linear System. Nature Communications [online]. England: Nature Publishing Group, 2017, 8(1), 19-19 [cit. 2021-9-6]. ISSN 2041-1723. Dostupné z: doi:10.1038/s41467-017-00030-8 [2]

HIRSCH, M. W., SMALE, S., DEVANEY, R. L. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 2004, xiv, 417 s. : il. ; 24 cm. ISBN 0-12-349703-5. [3]

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá aplikací numerické metody HAVOK (Hankel Alternative View of Koopman), sloužící k hledání atraktorů a predikci intermitentních jevů (dále pouze intermitencí) v dynamických systémech, na data z Rayleigh-Bénardovy konvekce (RBC), která se měří na Ústavu přístrojové techniky AV ČR ve skupině Kryogeniky a supravodivosti. Práce pojednává o teorii, na které je HAVOK postaven a oproti článku [2] dále tuto teorii prohlubuje. Dále popisuje a osvětluje problémy jako volbu dimenze vnoření  $r$ , kterou jsme vybírali na základě kvality regrese, kterou HAVOK vytváří, či užití Koopmanova operátoru a Takensovy věty o vnoření, což nebylo explicitně v článku [2] zmíněno. V rámci pochopení k článku přiložených kódů jsme objevili tři způsoby výpočtu HAVOKu, jež jsou v práci popsány, které také nebyly v článku zmíněny. V práci se dále zabýváme maticemi soustav obyčejných diferenciálních rovnic, které HAVOK vytváří, jejich chováním při změně počátečních podmínek a stabilitou pro různé regresní modely a dimenze vnoření. Dále je vykresleno řešení při změně počátečních podmínek, a je tak zobrazena atraktivita řešení. Součástí práce je i popis RBC a rovnic a podobnostních čísel toto turbulentní proudění popisujících. Mimoto je uvedeno, jaká data jsou z měření RBC na UPT získávána a jakým způsobem jsou zpracovávána běžně či novými způsoby pro účely této práce.

## Abstract

This Bachelor's thesis deals with an application of the HAVOK (Hankel Alternative View of Koopman) numerical method, which seeks attractors and predicts intermittent phenomena in dynamical systems, to data from Rayleigh-Bénard convection (RBC), which are measured at Brno Institute of Scientific Instruments in the group of Cryogenics and Superconductivity. This thesis discusses the theory on which the HAVOK is built and further deepens it compared to the article [2]. Furthermore, it enlightens some issues as the best selection of the embedding dimension  $r$ , which we selected based on the quality of regression that HAVOK creates, or the use of the Koopman operator and Taken's embedding theorem, that weren't explicitly explained in the article [2]. We discovered three different methods to compute HAVOK regressions based on and using the codes attached to the article. In the thesis, we inspect the matrices of ordinary differential equations, their behaviour when the initial values are changed and their stability for the different regression models and embedding dimensions. The solution with different initial conditions is plotted so that the attractivity can be seen. Part of the thesis contains description of RBC, its equations of motion and characteristic dimensionless numbers that describe the convection. Moreover, the thesis describes how the data are obtained and processed normally and how are processed in new ways based on the HAVOK method.

**klíčová slova**

HAVOK, dynamické systémy, atraktor, stabilita, atraktivita, turbulence, Rayleigh-Bénardova konvekce

**keywords**

HAVOK, dynamical systems, attractor, stability, attractivity, turbulence, Rayleigh-Bénardova convection

Kašný, J.: *Atraktory v složité dynamice turbulentní konvekce*, Brno, 2022. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Mgr. Michal Macek, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Atraktory v složitě dynamice turbulentní konvekce* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Michala Macka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jakub Kašný



Na tomto místě bych rád poděkoval svým rodičům vlastním i nevlastním za veškerou podporu, které se mi při studiu z jejich strany dostalo, Bc. Adéle Jurčíkové za veškerou poskytnutou oporu a kvalitní jazykovou korekturu této práce, Mgr. Michalu Mackovi, Ph.D. za vedení a otevřené konzultování mé práce, doc. Ing. Petru Tomáškoví, Ph.D. za konzultace a pomoc a na závěr Ústavu přístrojové techniky AV ČR, v.v.i. a jejich projektu Grantové agentury ČR za možnost napsat tuto práci za jejich finanční podpory.

Jakub Kašný



# Obsah

Úvod	1
<b>1 Matematický aparát</b>	<b>2</b>
1.1 Dynamické a autonomní systémy	2
1.1.1 Atraktivita, stabilita a význačné body	3
1.1.2 Diskrétní dynamické systémy	5
1.1.3 Atraktor	5
1.1.4 Poznámka o Lorenzově systému a podivném atraktoru	6
1.2 Základní statistický aparát	7
1.3 Dynamické systémy z datových řad	9
1.3.1 Takensova věta o vnoření	9
1.3.2 Hankelova matice a singulární rozklad matice	10
1.3.3 DMD	13
1.3.4 SINDy	15
1.4 Koopmanův operátor	16
<b>2 HAVOK</b>	<b>18</b>
2.1 SINDy model	19
2.2 DMD model	19
2.3 Hybrid model	20
<b>3 Rozbor HAVOKu na Lorenzově systému</b>	<b>21</b>
<b>4 Přenos tepla turbulentní konvekcí</b>	<b>24</b>
4.1 Rayleigh-Bénardova konvekce	25
4.1.1 Rovnice pro popis RBC	26
4.1.2 Podobnostní čísla (Kontrolní parametry RBC)	26
4.1.3 Podobnostní čísla (Parametry odezvy RBC)	27
4.1.4 Mezní vrstvy a jádro konvekce	28
4.2 Data a jejich zpracování	28
4.2.1 Statistické momenty	29
4.2.2 Korelační funkce	30
<b>5 HAVOK zpracování RBC signálů</b>	<b>33</b>
5.1 Určení vhodné dimenze vnoření	33
5.2 Matice soustavy A	37
5.3 Stabilita matic soustavy A	38
5.4 Změna počátečních podmínek	44
5.5 Souhrn výstupů	44
<b>Závěr</b>	<b>49</b>
<b>Reference</b>	<b>50</b>

<b>Appendix: obrázky ze zpracování dat</b>	<b>53</b>
Metoda čtverců . . . . .	53
Matice soustavy A . . . . .	56
Změna počátečních podmínek . . . . .	61

# Úvod

Přirozená konvekce je jeden ze základních mechanismů přenosu tepla, který na rozdíl od radiace a kondukce probíhá jenom v proudících látkách, tj. v tekutinách. Je možné ji pozorovat v přírodě, ale také v různých technických aplikacích od ventilace místností po baterie na bázi tekutých kovů. Rayleigh-Bénardova konvekce (RBC) je pravděpodobně nejdůležitější zjednodušený model přirozené konvekce [8]. Současná teorie proudění, která tento přenos tepla popisuje, obsahuje Navier-Stokesovy rovnice, ovšem tyto nelineární parciální diferenciální rovnice mají často příliš složité řešení.

My jsme se pokusili posunout výzkum na tomto poli pomocí metody HAVOK (Hankel Alternative View of Koopman), kterou vyvinuli S.L. Brunton a spol. z University of Washington a Institute of Disease Modeling ze Seattlu a prezentovali ji ve svém článku Chaos as an Intermittently Forced Linear System, publikovaném v Nature Communications [2]. Přílohou tohoto článku jsou kódy, které zpracovávají ukázkové časové řady osmi různých dynamických systémů od těch popsaných diferenciálními rovnicemi (např. Lorenz, Rössler, dvoukyvadlo) až po čistě empirická data medicínských záznamů (EKG, EEG, šíření epidemie spalniček).

Tato metoda vytváří lineární soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) a tzv. forcing člen, který udává chod intermitencí, z jejichž řešení dostáváme trajektorie časového vývoje systému, které někdy leží na atraktoru. Jednou z motivací bylo zjistit, jestli metoda HAVOK umožňuje efektivní detekci těchto intermitencí v surových datech z jednoho snímače. Úkolem práce je nejprve pochopit a popsat teorii, která je s HAVOKem spojená, což není jednoduchý úkol, protože se jedná o interdisciplinární problém, který zahrnuje dynamické systémy, lineární algebru, numerickou matematiku a dotýká se i topologie. Dalším cílem práce je projít kódy a pochopit i tyto, popsat a osvětlit problémy, na které můžeme narazit při aplikaci HAVOKu na konkrétní data, pokusit se spustit kódy v režimu predikce a se změněnými počátečními podmínkami a zkoumat stabilitu systému ODR, který HAVOK nalézá.

Načrtne-li obsah, tak v první kapitole této práce shrneme potřebný matematický aparát, který využijeme při zpracování dat z RBC, a dále k pochopení nejen HAVOKu, ale i dynamických systémů obecně. Ve druhé kapitole spojíme některé části matematického aparátu v jednu metodu (HAVOK), kterou společně sestavíme. Pro pochopení toho, jak HAVOK pracuje, a pro ukázkou jeho výsledků jsme, dle článku [2], zvolili Lorenzův dynamický systém. Tento systém je dobře popsán a proto je jeho užití vhodné. Ve třetí kapitole si objasníme, co je RBC, jak vzniká a její základní popisný aparát. Součástí této kapitoly je popis jak data z RBC na UPT za kryogenních teplot vznikají a jak jsou zpracovávána. Popíšeme si vznik odvozených datových řad jako jsou data statistických momentů a tzv.  $\tau_p$  datová řada. V poslední kapitole se zaměříme na zpracování dat z RBC pomocí HAVOKu, pokusíme se nalézt vhodnou dimenzi vnoření, popíšeme jak vypadají jednotlivé matice soustavy ODR, které HAVOK z dat extrahuje, a popíšeme stabilitu jejich řešení. Dále do řešiče vložíme počáteční podmínku, která je vzdálenější od původní počáteční podmínky z experimentu a ověříme tak výsledky stability numerickým řešením. Závěrem této kapitoly se podíváme na obrázkové shrnutí všech datových řad, přičemž toto shrnutí zhodnotíme. Na obrázkových shrnutích bude vždy zobrazena příslušná datová řada, matice soustavy a dva atraktory (vnořený a rekonstruovaný).

# 1 Matematický aparát

Kapitola Matematický aparát vysvětluje pojmy nutné pro sestavení HAVOK modelu. Tato kapitola a její podkapitoly se následně propojí v kapitole 2, kde se vytvoření modelu budeme věnovat.

## 1.1 Dynamické a autonomní systémy

Na začátek bychom měli objasnit použití nezávisle proměnné  $t$  místo  $x$ , jak bývá v matematických textech zvykem. S ohledem na tematiku je použití  $t$  vhodnější, protože se obvykle bavíme o vývoji daného systému v čase, který se běžně značí  $t$ , z anglického time.

Zavedme tedy pojmy týkající se dynamických systémů. Stavem systému je myšlen vektor  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  v  $n$ -dimenzionálním Eukleidovském prostoru  $\mathbb{R}^n$  závislý na nezávisle proměnné (čase)  $t \in \mathbb{R}$  v případě spojitých systémů. Dynamika je dána vektorovým polem  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ .

V celé práci tedy uvažujeme dynamický systém tvaru:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (1.1)$$

*Poznámka.* Tato rovnice (resp. soustava rovnic) se nazývá autonomní soustava, protože funkce  $\mathbf{f}$  není (přímo) závislá na  $t$ .

Přesná definice hladkého spojitého dynamického systému je následující: [3]

**Definice 1.1** (Dynamický systém). Hladký dynamický systém na  $\mathbb{R}^n$  je hladce diferencovatelná funkce  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kde  $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_t(\mathbf{x})$  splňuje:

1.  $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je identita:  $\phi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ,
2. složení  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$  pro každé  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Definujme důležité pojmy z teorie (nejen) autonomních systémů.

**Definice 1.2** (Graf). Grafem řešení  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  je křivka  $\{t, x_1(t), \dots, x_n(t) | t \in I\}$  v prostoru  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definice 1.3** (Trajektorie). Trajektorie je průmět řešení  $\mathbf{x}(t)$  do prostoru hodnot řešení. Je to tedy křivka  $\{x_1(t), \dots, x_n(t) | t \in I\}$ .

**Definice 1.4** (Fázový prostor). Prostor hodnot řešení z předchozí definice se nazývá fázový prostor. Trajektorie jsou ve fázovém prostoru orientovány šipkami, které znázorňují rostoucí hodnotu proměnné  $t$ .

**Definice 1.5** (Singulární bod). Platí-li  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \forall t \in \mathbb{R}$ , tedy že je dané řešení konstantní, pak se toto řešení nazývá singulární bod (někdy také singulární trajektorie, singulární řešení, stacionární bod, bod rovnováhy).

Definice (1.2–1.5) jsou převzaty z [22].



### 1.1.1 Atraktivita, stabilita a význačné body

Celá následující podkapitola je převzata z [12].

Uvažujme obecnou soustavu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ ,  $t \in I = \langle t_0, \infty \rangle$ . Dále uvažujme počáteční podmínku  $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\alpha}$  a předpokládejme, že jsou splněny podmínky zaručující existenci řešení tohoto počátečního problému.

**Definice 1.6** (Stabilita řešení). Řešení  $\mathbf{x}_0(t)$  tohoto počátečního problému nazveme stabilní na  $I$  vzhledem k počáteční podmínce v bodě  $t_0$ , jestliže  $\forall \varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že řešení  $\mathbf{x}(t)$  vyhovující podmínce  $\|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta$  existuje  $\forall t \geq t_0$  a splňuje zde nerovnost  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ .

**Definice 1.7** (Atraktivita). Stabilní řešení se nazývá atraktivní (asymptoticky stabilní), jestliže je stabilní a navíc platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| = 0$ .

Odbočme ke specifickějšímu případu a sice k soustavě lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (1.2)$$

Obecné řešení je tvaru

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t) + \dots + c_n \mathbf{u}_n(t) + \mathbf{x}_p(t),$$

a proto jsou všechna řešení buď stabilní, nebo všechna nestabilní. Tedy jsou-li všechna  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  omezená, pak jsou všechna řešení stabilní. Je-li jedno  $\mathbf{u}_i$  neomezené, pak jsou všechna řešení nestabilní. Konvergují-li všechna řešení  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  k nule pro  $t \rightarrow \infty$ , pak jsou všechna řešení soustavy atraktivní, pokud alespoň jedno nekonverguje, tak jsou řešení neatraktivní.

*Poznámka.* Tyto úvahy platí obecně pro soustavy lineárních rovnic, kde koeficienty matice  $a_{ij}(t)$  nejsou pouze konstantními funkcemi.

Stabilitu a atraktivitu řešení lineární soustavy rovnic s konstantními koeficienty pro  $t \rightarrow \infty$  lze určit z vlastních čísel  $\lambda$  matice soustavy  $\mathbf{A}$ .

Jednotlivá řešení  $\mathbf{u}_i$  naší lineární soustavy s konstantními koeficienty jsou určena vlastními čísly a jsou tvaru  $\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{v}e^{\lambda_i t}$ . Jasně vidíme, že kvůli exponenciále je pro  $\lambda_i > 0$  dané řešení neomezené, pro  $\lambda_i \leq 0$  je omezené a pro  $\lambda_i < 0$  řešení konverguje k nule.

V případě komplexního vlastního čísla, a tedy i jeho komplexně sdruženého čísla,  $\lambda_{1,2} = a \pm bi$  se exponenciální člen vyjádří dle exponenciálního tvaru komplexního čísla jako  $e^{(a \pm bi)t} = e^{at}(\cos(bt) \pm \sin(bt))$ . Z toho lze vyvodit, že záleží na znaménku reálné části komplexního čísla. V případě násobných kořenů se zápornou reálnou částí příslušná řešení konvergují k nule.

V případě vícenásobného kořene s nulovou reálnou částí mohou některá řešení navíc obsahovat  $t$ . Například pro  $\lambda_{1,2} = 0$  máme  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}e^{0t}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}te^{0t} + \mathbf{w}e^{0t}$ , a mohou tedy být neomezená.

Uvedené úvahy jsou důkazem následující věty:

**Věta 1.8.** *Mějme soustavu lineárních rovnic (1.2) s konstantními koeficienty a necht  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  jsou vlastní čísla matice soustavy  $\mathbf{A}$ . Potom pro  $t \rightarrow \infty$  platí:*

- *Pokud mají všechna vlastní čísla  $\lambda_i$  zápornou reálnou část, pak jsou všechna řešení soustavy stabilní a atraktivní.*

- Pokud má alespoň jedno vlastní číslo kladnou reálnou část, pak jsou všechna řešení nestabilní a neatraktivní.
- Pokud mají všechna vlastní čísla nezápornou reálnou část a všechna vlastní čísla s nulovou reálnou částí jsou jednoduchá, pak jsou všechna řešení stabilní a neatraktivní.
- V případě násobných vlastních čísel  $\lambda_i$  s nulovou reálnou částí záleží na tom, zda jsou všechna řešení  $\mathbf{u}_i(t)$  omezená, nebo alespoň jedno  $\mathbf{u}_i(t)$  je neomezené.

Zůstaňme ještě u autonomních soustav  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x)$ . U těch se rozlišují následující typy izolovaných singulárních bodů v rovině.

**Definice 1.9** (Typy izolovaných singulárních bodů). Uvažujme trajektorie řešení autonomní soustavy rovnic. Necht  $\mathbf{x}_0$  je izolovaný singulární bod dané soustavy, tj. izolované řešení soustavy rovnic  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . Bod  $\mathbf{x}_0$  se nazývá:

**střed** – pokud existuje ryzí okolí  $U$  bodu  $\mathbf{x}_0$ , ve kterém každým bodem  $\mathbf{x} \in U$  prochází uzavřená trajektorie obsahující ve svém vnitřku bod  $\mathbf{x}_0$ ,

**atraktivní uzel** – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie směřující do tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \text{ a existuje limita } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|},$$

**neatraktivní uzel** – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie má limitu

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \text{ a existuje limita } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|},$$

**atraktivní ohnisko** – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie blížící se k tomuto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \text{ a neexistuje limita } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|},$$

**neatraktivní ohnisko** – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém jsou jen trajektorie vycházející z tohoto bodu, přičemž směrový vektor tečny trajektorie nemá limitu

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \text{ a neexistuje limita } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|},$$

**sedlo** – pokud existuje jeho ryzí okolí, ve kterém existuje jen konečně mnoho trajektorií, které se k němu blíží, a konečně mnoho trajektorií, které se od něj vzdalují, tj. existuje konečně mnoho řešení  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$  takových, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_0, \dots, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_0.$$

### 1.1.2 Diskrétní dynamické systémy

Dále je nutné zavést diskrétní dynamický systém, protože se budeme zabývat numerickými výpočty a tvorbou modelů pro dynamické systémy získané z naměřených (či spočtených) dat. Zavedme jej tedy následovně [2]:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k), \quad (1.3)$$

kde  $\mathbf{x}_k$  může být získán vzorkováním  $\Delta t$  trajektorie rovnice (1.1), takže  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t)$ . Je nutné si uvědomit, že  $\Delta t$  je v tomto případě konstanta. Funkce  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$  je potom definována

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau))d\tau. \quad (1.4)$$

Funkce  $\mathbf{F}$  zde funguje jakožto „posouvač“ v čase o jeden vzorek.

### 1.1.3 Atraktor

Ke studiu dynamických systémů neodmyslitelně patří atraktory. Jedná se o množiny tvořené trajektoriemi řešení, které dané řešení přitahují. Co to ovšem znamená formálně matematicky? K tomu potřebujeme zavést několik pojmů.

**Definice 1.10** (Kompaktní množina [14]). Metrický prostor  $(M, \rho)$  se nazývá kompaktní, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost. Množina  $N \subseteq M$  se nazývá kompaktní (v  $M$ ), je-li  $(N, \rho_N)$  kompaktní. Přičemž pro metriku  $\rho_N$  platí  $\rho_N(x, y) = \rho(x, y) \forall (x, y) \in N$ .

**Definice 1.11** (Invariantní množina [15]). Množina stavů  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  autonomního dynamického systému  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  se nazývá invariantní množina tohoto systému, jestliže  $\forall x_0 \in S$  a  $\forall t \geq 0$  platí  $x(t) \in S$ .

S potřebnými nástroji můžeme uvést definici atraktoru.

**Definice 1.12** (Atraktor [3]). Necht  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  je systém diferenciálních rovnic v  $\mathbb{R}^n$  společně s funkcí  $\phi$  z definice (1.1). Množina  $\Lambda$  (s Eukleidovskou metrikou) se nazývá atraktor, je-li splněno

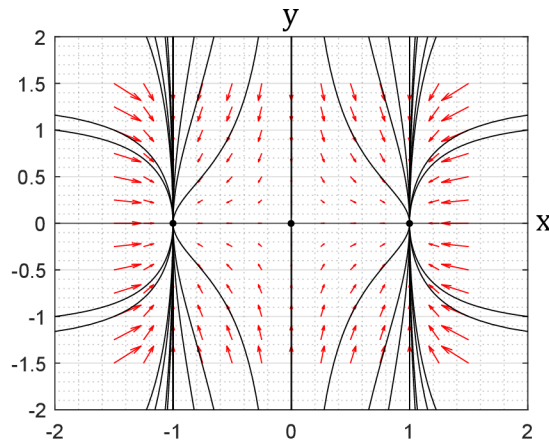
1.  $\Lambda$  je kompaktní a invariantní,
2. existuje otevřená množina  $U$  taková, že pro každé  $\mathbf{x} \in U$ ,  $\phi_t(\mathbf{x}) \in U \forall t \geq 0$  platí  $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U)$ , přičemž musí platit, že  $U$  obsahuje  $\Lambda$ ,
3. (tranzitivita) pro libovolné dva body  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Lambda$  a libovolné (otevřené) okolí  $U_j \subseteq U$  bodu  $\mathbf{y}_j$  existuje křivka řešení, která začíná v  $U_1$  a prochází  $U_2$ .

Třetí podmínka nám zajišťuje, že to, co pozorujeme, je pouze jeden atraktor, nikoliv několik atraktorů najednou. [3]

**Příklad 1.13.** [3] Určete fázový prostor daného rovinného systému, dále jestli existuje atraktor a najděte jej.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x - x^3 \\ \dot{y}(t) &= -y \end{aligned}$$

Fázový portrét tohoto systému je zobrazen na obrázku 1. Z toho vidíme, že jakékoliv řešení končí buď v jednom ze dvou atraktivních uzlů (body  $(\pm 1, 0)$ ), nebo v sedlovém bodě  $(0, 0)$ . Množinami  $U$  je například pravá, resp. levá polorovina (bez osy  $y$ ) a pro počátek je to otevřená podmnožina osy  $y$  obsahující v sobě počátek. Vidíme, že všechny trajektorie z daných množin  $U$  mají průniky v příslušných singulárních bodech. První i druhá podmínka jsou tedy splněny. Třetí podmínka je splněna triviálně, protože atraktor je tvořen právě jedním bodem a dané body tedy jsou dle definice atraktory.



Obrázek 1: Fázový prostor v okolí počátku.

*Poznámka.* Obrázek 1 byl vytvořen pomocí Matlab funkce `vectfield`, která je k dostání na <https://github.com/wakilsarfaraz/matlab/blob/master/vectfield.m>.

#### 1.1.4 Poznámka o Lorenzově systému a podivném atraktoru

Edward Norton Lorenz (\*23. 5. 1917 – †16. 4. 2008) byl americký matematik a meteorolog, jenž položil teoretické základy nejen k předpovídání klimatu a počasí, ale také pro počítači podporovanou fyziku atmosféry a počítači podporovanou meteorologii. Dále je znám jako zakladatel moderní teorie chaosu, odvětví matematiky zabývající se chováním dynamických systémů citlivých na počáteční podmínky.

V roce 1961 používal Lorenz jednoduchý digitální počítač na simulaci struktur v počasí pomocí dvanácti proměnných. Jelikož se chtěl znovu podívat na část dat, spustil simulaci znovu uprostřed datové řady tak, že do simulace vložil data z původní simulace. K jeho překvapení bylo počasí, které počítač předpovídal, úplně jiné, než při původní simulaci. Jak k tomu došlo? Jednoduše: počítač počítal s přesností na šest desetinných míst, ale vytištěná data byla zaokrouhlena na tři desetinná místa. Tento rozdíl je malý a v kontextu dané doby by toto zaokrouhlení nemělo mít prakticky žádný efekt. Nicméně, jak Lorenz zjistil, i malá změna může mít v dlouhodobé předpovědi velký význam. [11]

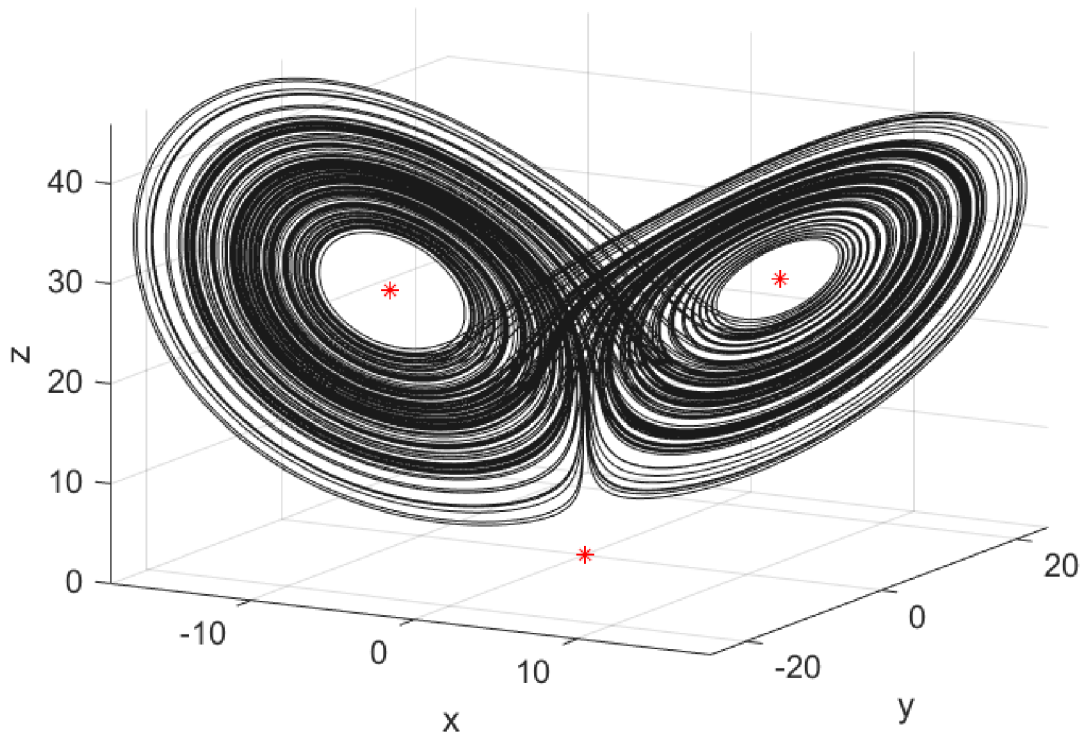
Model samotný byl odvozen z rovnic popisujících Rayleigh-Bénardovu konvekci (RBC), což je proudění v gravitačním poli vyvolané rozdílnou teplotou na dně a víku experimentální cely. Zahříváním tekutiny zespodu dojde vlivem rozdílné hustoty ke stoupání teplých proudů a následným ochlazením u horní desky ke klesání struktur tekutiny. Více o RBC v kapitole 4.1. Pomocí tzv. Galerkinovy aproximace, což je prakticky Fourierova transformace, ze které je použito pouze několik (nejvýznamnějších) složek, Lorenz transformoval rovnice popisující RBC a získal systém diferenciálních rovnic [16][1]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x) \\
 \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\
 \dot{z} &= xy - \beta z
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

*Poznámka.* Konstanty  $\rho$  a  $\beta$  bývají často psány jako  $r$  a  $b$ .

Tyto rovnice byly a stále jsou studovány a některé jejich vlastnosti jsou dobře známy. Obvykle je tento systém zkoumán v závislosti na  $\rho$  se sadou parametrů  $\sigma = 10$  a  $\beta = 8/3$ . Shrňme-li tato zkoumání, víme, že pro  $\rho < 1$  existuje pouze jeden singulární bod v počátku typu atraktivní uzel, pro  $\rho = 1$  se objeví tzv. vidlicová bifurkace, pro  $1 < \rho < 24,74$  se objeví další dva singulární body a pro  $\rho > 24,74$  jsou všechny tři body rovnováhy nestabilní. Pro detailnější informace doporučme [22],[3],[1].

Lorenz při počítání s tímto modelem zvolil parametry  $\beta = 8/3$ ,  $\sigma = 10$  a  $\rho = 28$  a my budeme také pracovat s Lorenzovým atraktorem s těmito parametry. Na následujícím obrázku je vykreslen tento atraktor a jeho singulární body označené červenými hvězdičkami.



Obrázek 2: Atraktor Lorenzova systému.

## 1.2 Základní statistický aparát

V následující podkapitole si definujeme základní aparát statistiky používaný při zpracování dat RBC. Tyto definice byly převzaty z podkladů doc. Žáka pro kurz Pravděpodobnost a statistika 1 a z dokumentace programu Matlab.

**Definice 1.14** (Náhodná proměnná). Necht  $\Omega$  je základní prostor a  $\Sigma$  příslušné jevové pole a  $(\mathbf{R}, \mathbf{B})$  je měřitelný prostor (tj.  $\mathbf{B}$  je borelovská  $\sigma$ -algebra – minimální algebra obsahující všechny otevřené množiny). Zobrazení  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  se nazývá náhodná proměnná vzhledem k  $\Sigma$ , pokud

$$\forall B \in \mathbf{B} : X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \Sigma.$$

**Definice 1.15** (Náhodný výběr rozsahu  $n$ ). Necht  $(\Omega, \Sigma, P)$  je pravděpodobnostní prostor a  $X_1, \dots, X_n$  jsou nezávislé náhodné proměnné. Pak  $X_1, \dots, X_n$  se nazývá náhodný výběr rozsahu  $n$ .

**Definice 1.16** (Statistika). Necht  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr. Funkce náhodného výběru  $T(X_1, \dots, X_n)$  se nazývá statistika.

**Definice 1.17** (Realizace náhodného výběru). Necht  $x_i$  je výsledek  $i$ . pokusu popsaného náhodnou proměnnou  $X_i$  (výsledek  $i$ . měření).  $x_i$  se nazývá realizací náhodné proměnné  $X_i$ .

**Definice 1.18** (Realizace výběrového průměru). Necht  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr a  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  je jeho realizace. Pak realizace statistiky výběrového průměru je reálné číslo  $\bar{x}$  (dále označováno  $M_1$ ):

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

**Definice 1.19** (Realizace výběrového rozptylu). Necht  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr a  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  je jeho realizace. Pak realizace statistiky výběrového rozptylu je reálné číslo  $s^2$  (dále označováno  $M_2$ ):

$$M_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

*Poznámka.* Číslo  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{M_2}$  se nazývá výběrová směrodatná odchylka.

**Definice 1.20** (Realizace výběrové šikmosti [17]). Necht  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr a  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  je jeho realizace. Pak realizace statistiky výběrové šikmosti je reálné číslo  $s_1$  (dále označováno  $M_3$ ):

$$M_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Definice 1.21** (Realizace výběrové špičatosti [18]). Necht  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr a  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  je jeho realizace. Pak realizace statistiky výběrové špičatosti je reálné číslo  $k_1$  (dále označováno  $M_4$ ):

$$M_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2}.$$

Dále je nutné definovat korelaci. To bychom mohli udělat opět pomocí náhodného výběru, ovšem my budeme používat korelaci z pohledu zpracování signálů. Taková interpretace odpovídá skalárnímu součinu těchto vektorů s posunem o  $m$  vzorků.

Pro diskrétní signály  $x$  a  $y$ , oba délky  $N$ , je definována korelace následovně [19]:

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n+m)y^*(n),$$

kde  $*$  značí komplexní sdružení. Pro  $m < 0$  platí  $R_{x,y}(m) = R_{yx}^*(-m)$ . Tímto výpočtem tedy dostaneme funkci korelací, která je závislá na parametru vzájemného posunu signálů. Všimněme si, že při takto definované korelací může být výsledek i větší, než jedna. Tento „problém“ jde vyřešit stejně jako v běžné definici korelace podělením součinem směrodatných odchylek korelovaných signálů, nebo při použití MATLABu použitím parametru *normalized* ve volání funkce *xcorr*. Počítáme-li korelaci dvou signálů  $R_{xy}$ , dostaneme korelaci, či tzv. vzájemnou korelaci, nebo kroskorelaci (*angl.* cross-correlation), počítáme-li korelaci jednoho signálu  $R_{xx}$ , dostaneme autokorelaci (*angl.* auto-correlation).

**Definice 1.22** (Normalizovaná korelace pomocí programu Matlab [19]). Uvažujme dva diskrétní signály  $x$  a  $y$ , jež mají délku  $N$ . Normalizovaná korelace je potom dána:

$$R_{xy,norm}(m) = \frac{R_{xy}(m)}{\sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}}$$

## 1.3 Dynamické systémy z datových řad

### 1.3.1 Takensova věta o vnoření

Dynamické systémy se dají zkoumat vícero způsoby. Známe-li pohybové rovnice, můžeme je analyzovat. Pokud ale neznáme rovnice, tak se nabízí experimentální přístup, při kterém je dynamický systém měřen a zkoumán z naměřených datových řad. Takensova věta o vnoření nám umožňuje nahlédnout do systému pomocí topologicky stejného atraktoru, který můžeme vytvořit pouze z jedné datové řady.

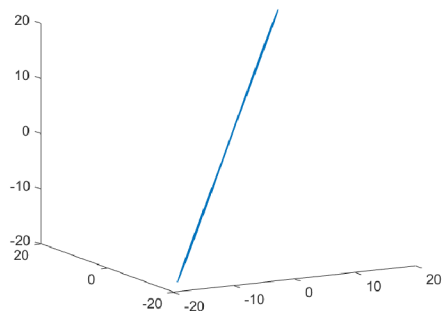
Takensova věta o vnoření (*angl.* *Takens embedding theorem*), publikovaná roku 1981 v článku *Detecting strange attractors in turbulence*, se stala základem pro výzkum datových řad v mnoha odvětvích od fyziky, přes medicínu až k ekonomii. Sauer, Yorke a Casdagli [26] toto odvětví, zabývající se teorií dynamických systémů výstižně nazývají „embedologie“.

Hlavním bodem embedologie je výsledek diskutovaný skupinou zabývající se dynamickými systémy pod Kalifornskou univerzitou [24], dokázaný Takensem, který ukazuje jak může být časová řada měření jedné pozorovatelné (pozorovatelná viz kapitola 1.4) použita k rekonstrukci kvalitativních vlastností fázového prostoru měřeného systému. Technika popsaná právě Takensem, někdy nazývaná metoda zpoždění (*angl.* *method of delays*), je použitelná na v podstatě jakoukoliv datovou řadu, čímž otevírá dveře k průzkumu chaosu z pohledu dat, nikoliv čistě matematickou analýzou. [13] Metoda samotná, resp. její realizace, je jednoduchá, ale důkaz je složitý a vyžaduje znalosti diferenciální topologie a je nad rámec této bakalářské práce. K nahlédnutí je např. v [13].

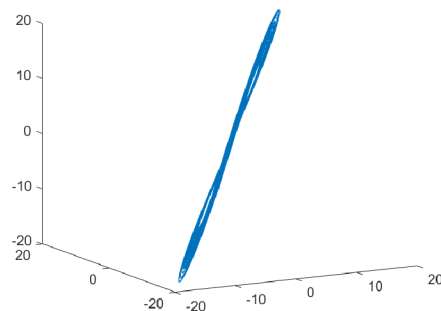
Ještě než si uvedeme výsledky, definujme pojem difeomorfismus.

**Definice 1.23** (Difeomorfismus [10]). Zobrazení  $f : M \rightarrow N$ , kde  $M$  a  $N$  jsou variety, se nazývá difeomorfismus  $\iff f$  a  $f^{-1}$  existují a jsou diferencovatelné.

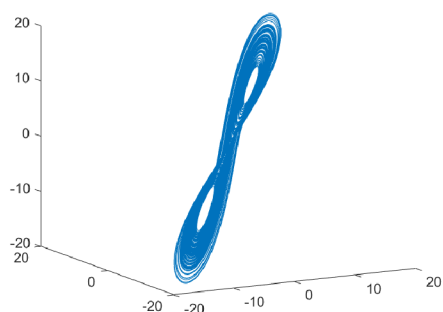
Výsledky, které jsou pro nás důležité, jsou následující: Dimenze prostoru vnoření je  $2m+1$  [4][13], kde  $m$  je dimenze prostoru, odkud bereme zpožděvané souřadnice. Zobrazení



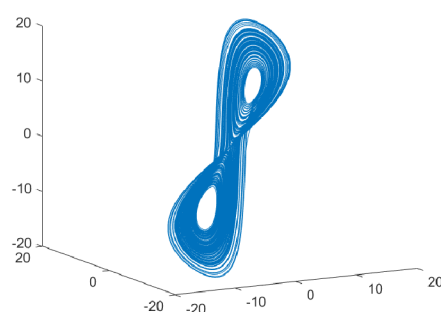
(a)  $\tau = 1$  data point



(b)  $\tau = 5$  data points



(c)  $\tau = 20$  data points



(d)  $\tau = 45$  data points

Obrázek 3: Rekonstruované Lorenzovy atraktory ve zpožděných souřadnicích.

je vnoření (angl. *embedding*) a za určitých podmínek difeomorfismus, tedy i atraktory jsou difeomorfní [2]. Tato vlastnost je pro nás velmi důležitá, protože nám odkrývá pohled na systémy jako právě RBC.

Ukažme si tedy, jak mohou vypadat fázové prostory ve zpožděných souřadnicích. Vezměme kupříkladu jednu souřadnici z Lorenzova systému  $x(t)$  (viz obrázek 5). Další souřadnice můžeme vytvořit nepřekvapivě zpožděním  $\tau$  následovně  $x(t - \tau)$  a vznikne nám tak série datových řad  $(x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - 6\tau))$ , tedy zpožděné souřadnice. Jak takové souřadnice vypadají, se můžeme podívat na obrázcích 3.

*Poznámka.* Původní atraktor je zobrazován ve třech dimenzích, a tak je dimenze vnoření  $2 \cdot 3 + 1 = 7$ , ale zobrazeny jsou pouze první tři souřadnice (máme tedy projekci do prostoru dimenze tři).

*Poznámka.* „Zpoždění“ souřadnic lze vytvořit i jinak, například předbíháním, místo zpožděním souřadnic (tedy nahradíme znaménko minus znaménkem plus). [13]

### 1.3.2 Hankelova matice a singulární rozklad matice

#### Hankelova matice

**Definice 1.24** (Hankelova matice). Mějme  $m \times n$  matici  $H$  takovou, že

$$h_{ij} = h_{kl} \quad \forall i, k \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ a } \forall j, l \in \{1, 2, \dots, n\},$$

kde indexy splňují podmínku

$$i + j = k + l.$$



Taková matice se nazývá *Hankelova* a může být třeba tvaru

$$H = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & f \\ c & d & e & f & g \\ d & e & f & g & h \end{pmatrix}.$$

## SVD rozklad

*SVD rozklad*, z anglického Singular Value Decomposition, volně přeloženo jako rozklad na singulární hodnoty, je rozklad matice na maticový součin.

**Věta 1.25** (Singulární rozklad [25]). *Nechť  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $q = \min\{m, n\}$ . Potom existuje diagonální matice  $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  splňující  $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \dots \geq \sigma_{qq} \geq 0$  a ortogonální matice  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  takové, že platí*

$$A = U\Sigma V^T.$$

Důkaz viz [25] str. 109.

SVD rozklad je zobecněný rozklad na vlastní čísla a vlastní vektory. Matice  $U$  a  $V$  jsou ortogonální (resp. ortonormální) matice a norma každého vektoru je uložena v matici  $\Sigma$ .

*Poznámka.* Matlab má možnost výpočtu redukovaného SVD s parametrem *econ*, tedy ekonomický mód. To znamená, že pro matici  $H_{m \times n}$ , kde  $m < n$  je  $U_{m \times m}$ ,  $\Sigma_{m \times m}$  a  $V_{n \times m}$ , odřeže některé vektory s menšími či nulovými singulárními hodnotami  $\Sigma$  a  $V$ . Parametr *econ* je vhodné použít, jsou-li matice velké a chceme-li šetřit paměť počítače. Ořez matic viz příklad níže.

**Příklad 1.26.** Vezměme SVD rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{pmatrix} -0,2067 & -0,8892 & 0,4082 \\ -0,5183 & -0,2544 & -0,8165 \\ -0,8298 & 0,3804 & 0,4082 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 25,4368 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,7226 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0000 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -0,4036 & 0,7329 & 0,5241 & 0,1592 \\ -0,4647 & 0,2898 & -0,8174 & 0,1784 \\ -0,5259 & -0,1532 & 0,0626 & -0,8343 \\ -0,5870 & -0,5962 & 0,2307 & 0,4968 \end{pmatrix}.$$

Nyní se podívejme, jak by vypadaly matice v režimu *econ*:

**Příklad 1.27.** Vezměme si matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{pmatrix} -0,2067 & -0,8892 & 0,4082 \\ -0,5183 & -0,2544 & -0,8165 \\ -0,8298 & 0,3804 & 0,4082 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 25,4368 & 0 & 0 \\ 0 & 1,7226 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0000 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -0,4036 & 0,7329 & 0,5241 \\ -0,4647 & 0,2898 & -0,8174 \\ -0,5259 & -0,1532 & 0,0626 \\ -0,5870 & -0,5962 & 0,2307 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že se jedná pouze o ořez nulových vektorů v  $\Sigma$  a méně význačných vektorů v  $V$ , které můžou být nepotřebné pro dané užití SVD a je možno je vynechat.

## Pseudoinverze pomocí SVD

Pseudoinverze, jinak Moore-Penroseova inverze je definována pomocí následující věty:

**Věta 1.28.** Pro každou matici  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existuje právě jedna matice  $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$  s následujícími vlastnostmi:

1.  $AA^+A = A$
2.  $A^+AA^+ = A^+$
3.  $(AA^+)^T = A^+A$
4.  $(A^+A)^T = A^+A$ .

Důkaz viz [25] str. 42, 43.

**Definice 1.29.** Matice  $A^+$  se potom nazývá Moore-Penroseova inverze matice  $A$ .

Tuto inverzi je možno provést pomocí SVD rozkladu následovně:

**Věta 1.30.** Je-li

$$A = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T$$

libovolný SVD rozklad matice  $0 \neq A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , potom:

- a)  $A^+ = V \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$ ,
- b) je-li  $A$  čtvercová regulární, je  $A^{-1} = VS^{-1}U^T = A^+$ .

*Důkaz.* a) Dokážeme, že matice  $A^+$  má vlastnosti 1)–4) z věty (1.28), přičemž budeme využívat vlastností  $U^TU = I$ ,  $Y^TY = I$  a

$$\begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} 1) \quad AA^+A &= U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T V \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = \\ &= U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = A, \\ 2) \quad A^+AA^+ &= V \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T V \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = \\ &= V \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = A^+. \end{aligned}$$

Nyní ukažme, že  $AA^+$  a  $A^+A$  jsou symetrické.

$$AA^+ = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T V \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = U \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$$

$$A^+A = V \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = V \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T$$

Z jejich symetrií vyplývá důkaz tvrzení 3) a 4):

$$3) (AA^+)^T = \left( U \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T \right)^T = U \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = AA^+$$

$$4) (A^+A)^T = \left( V \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \right)^T = V \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T = A^+A$$

b) Je-li  $A$  čtvercová regulární, pak

$$(VS^{-1}U^T)A = VS^{-1}U^TUSV^T = I \implies VS^{-1}U^T = A^{-1}$$

□

Tímto jsme zavedli a dokázali pseudoinverzi pomocí SVD rozkladu. Tvrzení b) věty (1.30) dokázalo důležitou vlastnost, a to že pseudoinverze je zobecněná inverze čtvercové regulární matice. [25]

### 1.3.3 DMD

Metoda HAVOK využívá ke svému výpočtu dva numerické algoritmy a DMD, neboli Dynamic Mode Decomposition, je jedním z nich. Tento algoritmus byl vytvořený Peterem Schmidem v roce 2008 ke zpracovávání datových řad z oboru dynamiky tekutin, který ale našel uplatnění i v dalších oborech a odvětvích, jako například v neurovědě, finanční analýze nebo modelování chování infekčních nemocí. Tato metoda je populární hlavně proto, že dává informaci o nelineární dynamice proudění tekutiny, a to i přes to, že je daná metoda lineárně algebraická.

Spočítané módy jsou vlastní vektory popisující stav kapaliny, přesněji prostorové korelace mezi jednotlivými měřeními. Tento stav je určen odpovídajícími vlastními hodnotami, které dávají informaci o míře nárůstu, nebo poklesu a o oscilační frekvenci pro každý mód. Tyto informace jsou zobrazeny jako oblasti koherentních struktur daného prostředí (viz obrázek 4).[27]

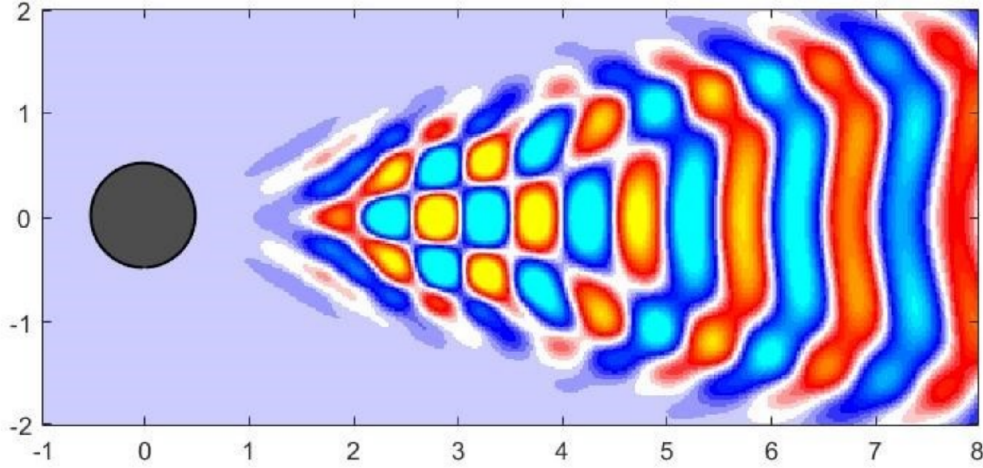
*Poznámka.* Obrázek je vytvořen z balíčku MATLAB programů a dat, který vytvořili a poskytli Brunton a spol. Tento balíček je volně ke stažení z <http://dmdbook.com>.

Algoritmus samotný hledá nejvhodnější lineární model [2], který by určil závislost dvou datových matic

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \cdots & x_1(t_{m-1}) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \cdots & x_2(t_{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \cdots & x_n(t_{m-1}) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x_1(t_2) & x_1(t_3) & \cdots & x_1(t_m) \\ x_2(t_2) & x_2(t_3) & \cdots & x_2(t_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n(t_2) & x_n(t_3) & \cdots & x_n(t_m) \end{pmatrix}.$$

Matice  $X$  obsahuje časové snímky z  $n$  stavů (snímačů) v  $m$  časech měřeného systému a  $Y$  je matice se stejnými snímky, pouze posunutá v čase o jeden úsek měření. Závislost těchto dvou matic by mohla být určena operátorem  $A$ , kde

$$X' = AX \implies A \approx X'X^+. \quad (1.6)$$



Obrázek 4: Ukázka jednoho z módů DMD při obtékání válcového objektu kapalinou.

**Definice 1.31** (DMD). Uvažujme množinu sloupcových vektorů  $\{z_1, \dots, z_m\}$ , kde  $z_k \in \mathbb{R}^n$ . Dále předpokládejme, že jsou data generována lineární dynamikou popsanou neznámou maticí  $A$ :

$$z_{k+1} = Az_k.$$

Při použití DMD na data generována nelineární dynamikou je nutný předpoklad existence matice  $A$ , která danou dynamiku (pouze) aproximuje.

Módy a vlastní (singulární) hodnoty DMD jsou vytvářeny jakožto aproximace vlastních (singulárních) vektorů, reps. hodnot matice  $A$ .

**Algoritmus 1.32.**

1. Vložme data  $\{z_1, \dots, z_m\}$  do matic

$$X = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_{m-1} \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} z_2 & \dots & z_m \end{pmatrix}.$$

2. Spočítejme SVD matice  $X$

$$X = U\Sigma V^T,$$

kde  $U$  je matice typu  $n \times r$ ,  $\Sigma$  je diagonální matice typu  $r \times r$ ,  $V$  je matice typu  $m \times n$  a  $r$  je hodnost  $X$ .

3. Definujme matici

$$\tilde{A} = U^T X' V \Sigma^{-1}.$$

4. Spočítejme vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\tilde{A}$

$$\tilde{A}\omega = \lambda\omega.$$

5. Potom DMD mód odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda$  je dán následovně

$$\varphi = U\omega.$$

Předcházející definice a algoritmus jsou převzaty z [27], text je tímto zdrojem inspirován.

*Poznámka.* Na Obrázku 4 vidíme jeden vektor  $\varphi$  uspořádaný do matice, která má rozměry podle velikosti matice původních dat  $\mathbf{x}(t_k)$ . Vektor  $\mathbf{x}$  je v tomto případě sada vypočtených hodnot v určitých bodech komory, kde bylo simulováno obtékání válce. Tento vektor se dá uspořádat do matice podle pozice v komoře, podle jejíž velikosti je přeskládán vektor  $\varphi$ , z čehož dostáváme daný obrázek 4.

### 1.3.4 SINDy

SINDy je druhou numerickou metodou využívanou HAVOKem, vyvinutou Bruntonem, Proctorem a Kutzem, která vyhledává rovnice dynamických systémů (viz rovnice (1.1)) a vychází z premisy, že mnoho fyzikálních systémů, resp. jejich dynamika, je popsáno pouze několika význačnými členy. Dá se tvrdit, že rovnice popisující tyto systémy jsou řídké v prostoru nelineárních funkcí. Metoda tedy využívá řídké regrese k nalezení daných aktivních (nenulových) členů. [2][7]

Abychom z dat určili funkci  $\mathbf{f}$ , potřebujeme mít nejen data, ale i jejich derivace. Ty změříme, nebo je určíme numerickým výpočtem. Data a jejich derivace, které jsou vzorkovány v několika časech  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , uspořádáme do matic

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \cdots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \cdots & x_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_m) & x_2(t_m) & \cdots & x_n(t_m) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_1) & \dot{x}_2(t_1) & \cdots & \dot{x}_n(t_1) \\ \dot{x}_1(t_2) & \dot{x}_2(t_2) & \cdots & \dot{x}_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_1(t_m) & \dot{x}_2(t_m) & \cdots & \dot{x}_n(t_m) \end{pmatrix}.$$

Dále vytvoříme knihovnu  $\Theta(\mathbf{X})$  tvořenou z funkcí, které očekáváme, že budou daný systém tvořit. Vytvořme takovou knihovnu například z konstanty, polynomů a trigonometrických členů:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & \cdots & | & | & | \\ \mathbf{1} & \mathbf{X} & \mathbf{X}^{P_2} & \mathbf{X}^{P_3} & \cdots & \sin(\mathbf{X}) & \cos(\mathbf{X}) & \cdots \\ | & | & | & | & & | & | & | \end{pmatrix}.$$

Polynomy jsou zde zapsány pomocí  $P_n$  exponentů. Například  $\mathbf{X}^{P_2}$  je matice kvadratických nelinearit ve stavu  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{X}^{P_2} = \begin{pmatrix} x_1^2(t_1) & x_1(t_1)x_2(t_1) & \cdots & x_2^2(t_1) & \cdots & x_n^2(t_1) \\ x_1^2(t_2) & x_1(t_2)x_2(t_2) & \cdots & x_2^2(t_2) & \cdots & x_n^2(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^2(t_m) & x_1(t_m)x_2(t_m) & \cdots & x_2^2(t_m) & \cdots & x_n^2(t_m) \end{pmatrix}.$$

Každá funkce z knihovny  $\Theta(\mathbf{X})$  je kandidátem na to být součástí pravé strany ( $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ ) rovnice (1.1). A protože, jak jsme již zmiňovali, je vysoce pravděpodobné, že pouze několik členů je aktivních v každém řádku  $\mathbf{f}$ , je vhodné použít řídkou regresi na určení matice koeficientů  $\Xi = (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n)$ . Koeficienty jsou dány rovnicí

$$\dot{\mathbf{X}} = \Theta(\mathbf{X})\Xi.$$

Jakmile určíme  $\Xi$ , můžeme sestavit model rovnic pro každý řádek následovně:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x}^T)\xi_k.$$

*Poznámka.* Často je nutné normalizovat sloupce  $\Theta(\mathbf{X})$ , aby byla zajištěna vlastnost omezené izometrie. [2]

*Poznámka.* Výsledky metody SINDy a další informace lze najít v [7] nebo ve videu <https://youtu.be/gSCa78TI1dg> v čase od 5:45. V tomto videu jsou výsledky ukázány na Lorenzově modelu.

## 1.4 Koopmanův operátor

Na data naměřená z dynamického systému se dá nahlížet jako na funkce  $g$  stavů  $\mathbf{x}$  daného systému. Těmito funkcím se říká *observables*, neboli pozorovatelné funkce. Vezměme za příklad pohyb nestlačitelné kapaliny v nádobě. Jedna možnost, jak lze vytvořit stavový prostor tohoto dynamického systému, je nahlížet na něj jako na množinu hladkých rychlostních polí v oblasti proudění, které splňuje podmínku nestlačitelnosti. Stav se mění v čase podle Navier-Stokesových rovnic. Pozorovatelnými jsou v tomto případě například tlak nebo vířivost v daném bodě kapaliny, rychlost v několika bodech nebo celková kinetická energie proudění. Ve všech zmíněných příkladech jsou hodnoty pozorovatelných funkcí jednoznačně určeny rychlostním polem, tedy stavy daného systému. [5]

Koopmanův operátor  $\mathcal{K}$  je významná součást Koopmanovy spektrální analýzy, jež byla poprvé představena roku 1931 v článku *Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space* a zobecněna roku 1932 Koopmanem a von Neumannem. Jedná se o lineární operátor nekonečné dimenze pracující na nekonečném (Hilbertově) prostoru všech pozorovatelných funkcí  $g$  (někdy též funkce měření, angl. *measurement functions*), které posouvá v čase. Důvodem použití Koopmanova operátoru je, že směřuje nelineární dynamiku konečné dimenze za dynamiku lineární nekonečné dimenze. [2] Nezaměřuje se na průběh stavů ( $\mathbf{x}$ ), ale na funkce ( $g$ ) těchto stavů a je definován následovně:

$$\mathcal{K}g = g \circ \mathbf{F} \implies \mathcal{K}g(\mathbf{x}_k) = g(\mathbf{x}_{k+1}).$$

Detailnější popis, přesnou definici jak pro diskrétní, tak pro spojité systémy a další informace najdeme v článku [20] nebo v citacích v sekci 2.1 Koopman operator theory v článku [2].

Použitím Koopmanova operátoru sice odstraníme nelinearitu daného systému, ale dostaneme operátor nekonečné dimenze. Ten se dá v některých případech získat analyticky, ale v dnešní době výpočetní techniky se spíše přistupuje k aproximaci konečné dimenze (maticí zde značenou  $\mathbf{K}$ ) regresními modely jako například DMD (viz podkapitola 1.3.3). Tato aproximace je ovšem podmíněna tím, že podprostor pozorovatelných zůstává invariantní vůči Koopmanovu operátoru, tedy že jeho použitím na prvek z daného podprostoru dostaneme prvek ve stejném podprostoru. Uvažujme podprostor pozorovatelných, který je lineárním obalem funkcí  $\{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ , tedy pro každou pozorovatelnou funkci  $g$  platí

$$g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_p g_p$$

a po zobrazení operátorem vypadá pozorovatelná následovně

$$\mathcal{K}g = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_p g_p.$$

V tomto případě je tedy možno operátor omezit na  $p$  dimenzionální podprostor a získat tak maticovou reprezentaci  $\mathbf{K}$  dimenze  $p \times p$  operátoru  $\mathcal{K}$ . Je-li možno takovou reprezentaci

vytvořit, pak je záhodno definovat lineární systém, jenž posouvá pozorovatelné funkce v daném podprostoru

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{K}\mathbf{y}_k,$$

kde  $\mathbf{y}_k = (g_1(\mathbf{x}_k), g_2(\mathbf{x}_k), \dots, g_p(\mathbf{x}_k))^T$  je vektor pozorovatelných v invariantním podprostoru všech pozorovatelných funkcí ve stavu  $\mathbf{x}_k$ .

V praxi je extrémně náročné, až nemožné, uspokojit požadavky na invariantní podprostor, který by obsahoval pozorovatelné pro všechny stavy zkoumaného systému. Nicméně perspektiva lineárních aproximací dynamických systémů poháněná daty je stále cenná. Lineární modely mohou být získány v oblastech atraktoru, singulárních bodech, nebo cyklech pomocí Koopmanovy teorie a správnou volbou pozorovatelných. Regresní modely pro získání konečné aproximace se v literatuře objevují běžně, nicméně všechny tyto metody spoléhají na dobrou volbu pozorovatelných. My si pomůžeme Takensovou větou o vnoření a zpožděnými souřadnicemi (angl. *delay coordinates*), které poskytují přibližně invariantní podprostor pozorovatelných pro dynamiku na atraktoru.[\[2\]](#)

Je nutno podotknout, že použití Koopmanova operátoru v článku ani kódu není úplně zřejmé. Běžně se jeho aproximace získává pomocí DMD, kde je dán maticí  $A$  (viz podkapitola [1.3.3](#)). Zde je ovšem použit při tvorbě Hankelovy matice (viz kapitola [2](#)) a funguje jakožto teoretický rámec, na kterém HAVOK pracuje. DMD je zde využito tak, jak bylo původně zamýšleno, resp. vytvořeno, a to sice jako regresní model pro hledání lineárního systému diferenciálních rovnic.

## 2 HAVOK

Hankel Alternative Wiew of Koopman, neboli HAVOK, je metoda, kterou vyvinuli Brunton a spol. na zpracování dat nelineárních dynamických systémů. Tato metoda byla prezentována v článku Chaos as an Intermittently Forced Linear System [2].

Spojme části uvedené v teoretickém úvodu a vytvořme tak HAVOK. Protože se jedná o metodu na zpracování dat dynamických systémů, je potřeba začít s daty. Mějme tedy měření  $x(t)$  pozorovatelné našeho dynamického systému v jednom bodě. Tato data naskládejme do struktury Hankelovy matice a provedme SVD rozklad.

$$H = \begin{pmatrix} x(t_1) & x(t_2) & \cdots & x(t_p) \\ x(t_2) & x(t_3) & \cdots & x(t_{p+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(t_q) & x(t_{q+1}) & \cdots & x(t_m) \end{pmatrix} = U\Sigma V^T \quad (2.1)$$

*Poznámka.* V HAVOK článku [2] je značení poměrně chaotické. V jednom momentě je pozorovatelná (neboli funkce měření) systému označována jako  $\mathbf{y}$  (viz kapitola 1.4), v jiném jako  $\mathbf{x}$ . Měření, tedy pozorovatelné, která byla předtím označována jako  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i)) = \mathbf{y}(t_i)$ , budeme dále označovat jako  $\mathbf{x}$ , resp.  $x(t_i)$ .

Je dobré si uvědomit, že sloupce levých a pravých vlastních vektorů  $U$  a  $V$  jsou uspořádány dle schopnosti popsat matici  $H$  od největších, protože vlastní čísla jsou seřazena od největšího. Proto můžeme obvykle  $H$  aproximovat prvními  $r$  ( $r$  jako hodnota z angl. *rank*) sloupci  $U$  a  $V$ . Taková aproximace je přibližně invariantní vůči Koopmanovu operátoru pro stavy na atraktoru. Upozorníme na použití Koopmanova operátoru, a tedy i jeho teoretický rámec, především linearizaci prostoru. Přepíšeme matici  $H$  s využitím tohoto operátoru. [2]

$$H = \begin{pmatrix} x(t_1) & \mathcal{K}x(t_1) & \cdots & \mathcal{K}^{p-1}x(t_1) \\ \mathcal{K}x(t_1) & \mathcal{K}^2x(t_1) & \cdots & \mathcal{K}^px(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{K}^{q-1}x(t_1) & \mathcal{K}^qx(t_1) & \cdots & \mathcal{K}^{m-1}x(t_1) \end{pmatrix} = U\Sigma V^T$$

Upozorníme dále, že pracujeme s obdélníkovými maticemi, které mají mnoho řádků a ještě více sloupců, jež lze interpretovat jako měření jednotlivých snímačů. Zobrazením prvních tří sloupců matice  $V$  získáme vnořený atraktor, který je difeomorfní původnímu atraktoru, jak jsme se dozvěděli v teorii o Takensově větě. Z teorie Koopmanova operátoru zase víme, že užitím tohoto operátoru se dostaneme do prostoru nekonečné dimenze, kde se z nelineární dynamiky stává dynamika lineární. Jelikož nejsme sto pracovat s nekonečně velkými maticemi, musíme určit aproximovaný lineární model tohoto systému. Ovšem takový čistě lineární model nedokáže zachytit více pevných bodů nebo nepředvídatelné chování charakteristické pro chaos. V metodě HAVOK se proto místo konstruování modelu pro  $r$  proměnných zkonstruujeme model pro  $r - 1$  proměnných a  $r$ . člen budeme uvažovat jako vnější silový člen (angl. *forcing*), který dále budeme označovat jako forcing, či forcing člen. Tento silový člen udává chod intermitencí. Na toto se můžeme dívat i tak, že metoda intermitence detekuje, nebo případně také predikuje a funguje jako „early warning“. Hledáme tedy model tvaru

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = A\mathbf{v}(t) + Bv_r(t),$$



kde  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{r-1})^T$  je vektor prvních  $r - 1$  vlastních časově vnořených souřadnic. Matice  $A$  a vektor  $B$  lze získat pomocí DMD, nebo SINDy.[2]

Matici  $A$  a vektor  $B$  budeme nazývat  $y - model$ , protože řešení této soustavy budeme označovat  $y$ . Tento se určuje vždy z matice  $V$ . Jak přesně se tento regresní model získá, není v článku [2] popsáno, proto se musíme pustit do prohledávání kódů, které jsou k článku dostupné. Tyto kódy obsahují HAVOK aplikovaný na různá data dynamických systémů, jako například zmiňovaný Lorenzův atraktor nebo atraktory Rösslerův a Dufingův, dále na medicínské signály jako EKG, EEG a náklady spalniček v New Yorku (viz popis dat v článku [2]).

Při prohledávání kódů zjistíme, že existují tři způsoby, jak regresní model získat.

## 2.1 SINDy model

První využívá čistě metodu SINDy (viz podkapitola 1.3.4). Algoritmus principiálně funguje tak, že se numericky spočítají derivace (po sloupcích mezi prvky matice  $V$ ) a dále se vytvoří knihovna možných funkcí. Protože jsme v prostoru, který je linearizovaný Koopmanovým operátorem, stačí nám lineární knihovna. Z matice koeficientů  $\Xi$  (viz podkapitola 1.3.4) získáme pohybové rovnice tak, že z této vezmeme levou horní submatici  $A$  typu  $(r - 1) \times (r - 1)$  a sloupcový vektor  $B$  typu  $(r - 1) \times 1$ . Poslední řádek  $\Xi$  se nepoužívá, přičemž argumentace v článku [2] je taková, že se jedná o „bad fit“. Zřejmě je tím myšleno, že při zahrnutí tohoto řádku dojde k výrazným chybám v regresi, ale důkladnější argumentace chybí.

## 2.2 DMD model

Druhá možnost je užití modifikovaného DMD (viz podkapitola 1.3.3). Podívejme se, jak v HAVOKu vypadají matice  $X'$  a  $X$  odvozené z matice  $V$ .

$$X = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{end-1,1} & \cdots & v_{end-1,r} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad X' = \begin{pmatrix} v_{2,1} & \cdots & v_{2,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{end,1} & \cdots & v_{end,r} \end{pmatrix}$$

Vidíme, že matice jsou zde oproti sobě posunuty v řádcích, zatímco v DMD byly posunuty sloupcově. Dá se říct, že sloupce matice  $V$  vnímáme jako snímače, které se v čase posouvají po řádcích, nikoliv po sloupcích, jako tomu bylo v původní definici. Změna je tedy v transpozici datových matic. Další změnou je jiný výpočet regresního modelu.

*Poznámka.* Zde v článku [2] dochází k další změně ve značení. HAVOK totiž označuje matici  $A$  jako součást regresního modelu, ale DMD označuje jako  $A$  celý regresní model. Dále tedy označme  $\Xi$  každý celý regresní model a  $A$  jako jeho část. Z kontextu pak bude jasné, o jakém typu výpočtu regresního modelu se bavíme.

Další modifikace DMD je ve výpočtu samotném. Program počítá následovně:

$$\Xi = (X')^+ X,$$

přičemž po úpravě dostáváme  $X'\Xi = X$ . Původní rovnice (1.6) má ovšem tvar  $X' = \Xi X$ . Vidíme, že regresní model programový a model DMD jsou vůči sobě inverzní, přičemž datové matice jsou brány sloupcově, nikoliv řádkově. V článku není zmínka o tom, proč

model počítá právě tímto způsobem, ovšem výsledky jsou velmi dobré a ve většině případů tato metoda předčí i metodu výpočtu pomocí SINDy.

*Poznámka.* Tuto metodu používá většina ukázkových kódů. Přesněji řečeno všechny kromě dat z Lorenzova systému, který používá SINDy model a dat z Duffingova oscilátoru, který používá Hybrid model (viz dále).

## 2.3 Hybrid model

Třetí metoda výpočtu je jakýsi hybrid mezi výpočty SINDy modelem a DMD modelem. Tato metoda, stejně jako SINDy, počítá numericky derivace a tyto derivace ukládá do matice  $X'$ , ale nevytváří knihovnu. Do datové matice  $X$  uloží prvních  $r$  sloupců matice  $V$ , platí tedy  $X = V_{[:,1:r]}$ . Místo výpočtu knihovny spočítá  $\Xi$  pomocí pseudoinverze, ale opět jinak než v DMD nebo v DMD regresním modelu. Tentokrát je výpočet proveden  $\Xi = X^+ X'$ . Úpravou dostaneme  $X' = X\Xi$ , z čehož vidíme, že jde opět o inverzi, která se liší od inverzí v předešlých metodách, protože, jak víme, násobení matic není komutativní operace.

*Poznámka.* Budeme-li dále mluvit o DMD, Hybrid, či SINDy, budeme tím myslet výše popsané regresní modely, nikoliv původní metody (resp. algoritmy), které byly popsány v podkapitolách 1.3.3 a 1.3.4. Abychom tedy měli jasno který regresní model vychází ze kterého algoritmu, zvolili jsme pro tyto modely stejné názvy.

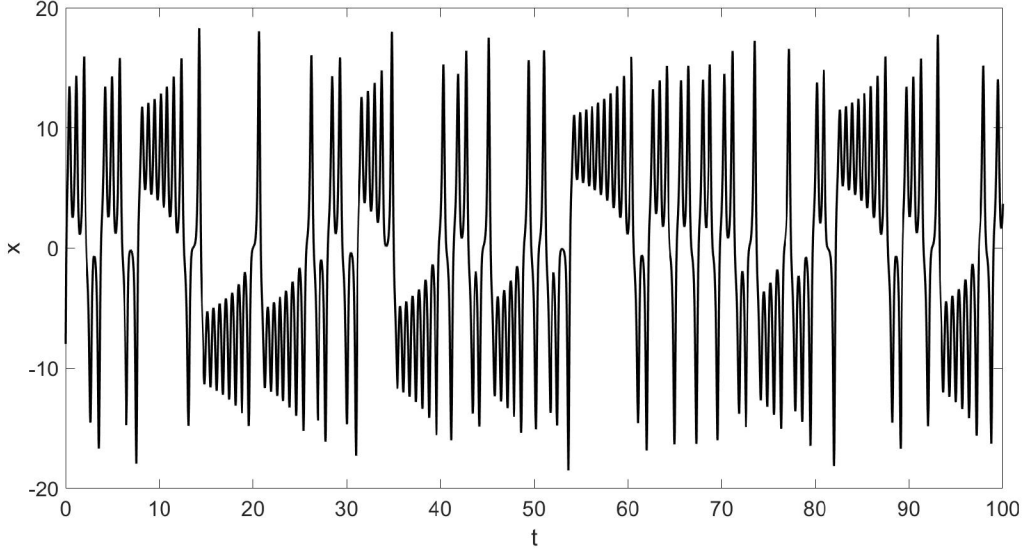
Při aplikaci HAVOKu obecně narazíme na několik překážek. Hlavní je nastavení parametrů  $r$ , tedy dimenze vnoření, a  $stackmax$ , tedy počet sloupců Hankelovy matice. Změna  $stackmax$  prakticky znamená, že je do Hankelovy matice vložen delší vektor dat, což má za následek více význačných členů v matici  $\Xi$ . Jak volit parametr  $r$  je přiblíženo v článku [6], ale stále je popis pouze vágní. Ve výsledku si musíme vždy parametry nastavit podle výsledků, které z HAVOKu dostáváme, a to převážně z obrázků atraktorů, které získáváme, a dle přesnosti regresních modelů.

V další podkapitole se podíváme na vytvoření HAVOK modelu na datech z Lorenzova systému a na to, jak HAVOK pracuje a jaké má výsledky.

*Poznámka.* Pro shrnutí této a následující kapitoly doporučujeme YouTube kanál S. Bruntona <https://www.youtube.com/c/Eigensteve>, kde je popsán nejen HAVOK, ale i SINDy a DMD.

### 3 Rozbor HAVOKu na Lorenzově systému

S Lorenzovým systémem jsme se už seznámili v podkapitole 1.1.4, a protože se jedná o jeden z nejlépe popsáných systémů, je to vhodný systém pro pochopení, jak HAVOK pracuje. Zopakujme, že HAVOK pracuje s jednou datovou řadou. Vezmeme proto pouze souřadnici  $x$  z řešení  $(x, y, z)$  Lorenzova systému, kterou můžeme vidět na obrázku 5.

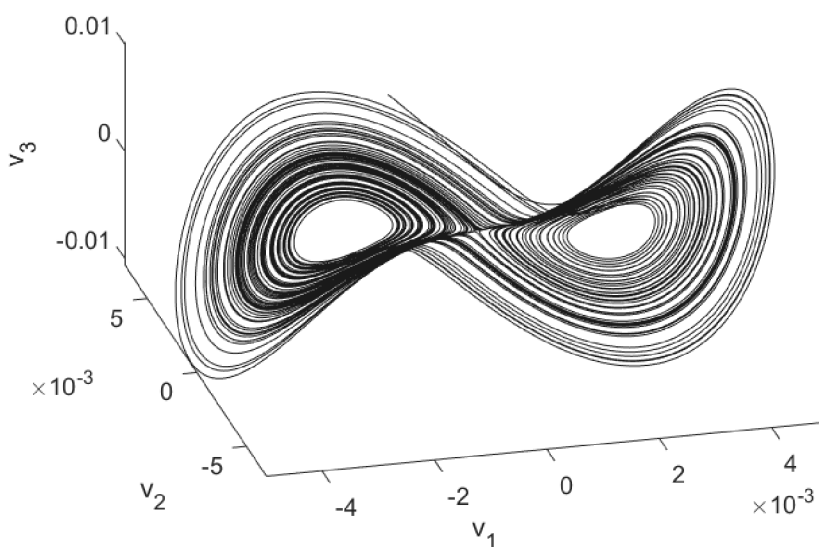


Obrázek 5: Jedna souřadnice Lorenzova podivného atraktoru.

Tuto datovou řadu, získanou numerickým výpočtem, naskládáme do Hankelovy matice a vytvoříme SVD rozklad již zmíněným postupem (viz rovnice (2.1)). Tímto získáme matici  $V$  vlastních vektorů, které, jak už jsme zmiňovali, dokáží popsat danou dynamiku. Z Takensovy věty jsme se dozvěděli, že časově zpožděné souřadnice nám poskytují prostor vnoření vyšší dimenze. Dále z této teorie víme, že atraktor, který takto získáme, je difeomorfní původnímu atraktoru. Jak takový atraktor vypadá, se můžeme podívat na obrázku 6. Tento atraktor budeme nazývat vnořený atraktor. [2]

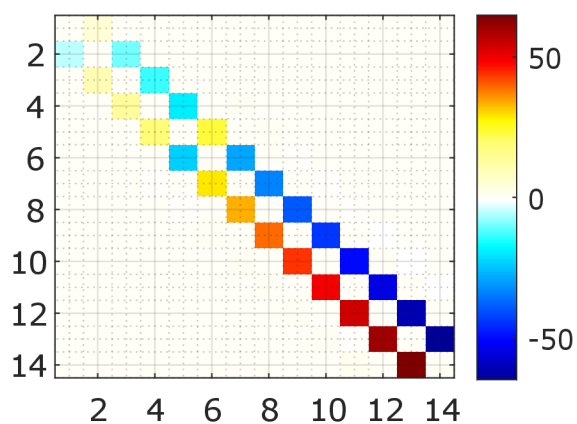
Jedním ze tří regresních modelů získáme  $y$ -model, který se dá přehledně zobrazit (resp. jeho část – matice  $A$ ) pomocí barevných matic tak, že čtverec o souřadnicích  $[i, j]$  odpovídá prvku matice  $A_{[i,j]}$  (viz obrázek 7). Barevná škála napravo popisuje přibližnou hodnotu čísel v matici. Získáme tedy lineární model pro prvních, v případě Lorenze, čtrnáct souřadnic  $(v_1, v_2, \dots, v_{14})$  a forcing pro souřadnici  $v_{15}$  danou patnáctým sloupcem matice  $V$ . Vidíme, že matice má jasnou mimodiagonální dvoupásovou strukturu, která je charakteristická pro SINDy regresi, na což se podíváme v kapitole 5. [2]

Další částí, kterou HAVOK obsahuje, je zvýraznění aktivních částí forcingu, kterou se zabývat nebudeme, ale je k nahlédnutí v článku [2]. Chceme-li ji však použít na detailní studium intermitencí u vlastních dat, je nutno práh význačnosti forcingu nastavit. Toto se dá udělat poměrně jednoduše natrénováním na několika datových řadách porovnáním intermitencí, zobrazených forcingem s  $y$ -modelem nebo s prvním sloupcem  $v_1$  matice  $V$  či přímo s daty. Jsou-li data experimentů rámcově podobná (vypadají-li datové řady podobně), pak tyto parametry fungují u všech dat z experimentů. Schopnost takto zpracovávat data je jedna ze dvou možností predikce, tedy předpovědi, blízcího se intermitentního jevu. Toto by se dalo využít například v seismologii v rámci ochrany obyvatel před



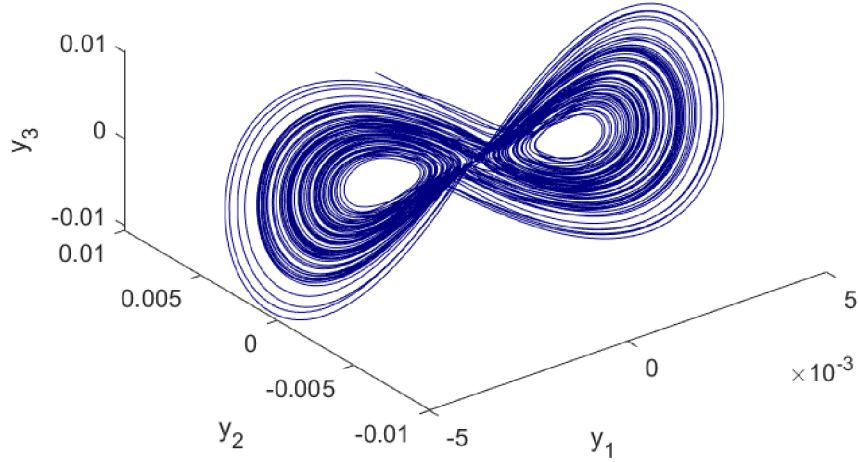
Obrázek 6: Atraktor difeomorfní k původnímu atraktoru (vnořený atraktor).

zemětřeseními a tsunami. Další možnost je predikce dlouhodobá, která je uskutečnitelná, ale pouze za předpokladu, že známe forcing člen, bez nějž je predikce pomocí HAVOKu nerealizovatelná.



Obrázek 7: Barevně zobrazená matice  $A$  soustavy. Velikost prvku matice vyjadřuje barevná škála vpravo.

Máme tedy vytvořený  $y$ -model, neboli pohybové rovnice, ze kterého vyřešením dostaneme trajektorie vykreslující rekonstruovaný atraktor (viz obrázek 8).



Obrázek 8: Rekonstruovaný atraktor.

Prozkoumejme nyní matice  $A$  získané regresními modely z dat Lorenzova systému. Parametry  $r = 15$ ,  $stackmax = 100$  a  $x_0 = (-8, 8, 27)^T$  převezmeme z článku [2]. Matici získanou výpočtem s těmito parametry vypočtenou SINDy modelem můžeme vidět na obrázku 7. Rozepíšeme si hodnoty znázorněné barvami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.12 & 0 & -9.92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.89 & 0 & -13.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13.52 & 0 & -18.90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18.81 & 0 & 23.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -23.17 & 0 & -28.90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28.87 & 0 & -33.48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33.48 & 0 & -39.29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39.29 & 0 & -43.91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43.84 & 0 & -49.94 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49.77 & 0 & -54.40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54.11 & 0 & -60.70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60.39 & 0 & -64.81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64.61 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

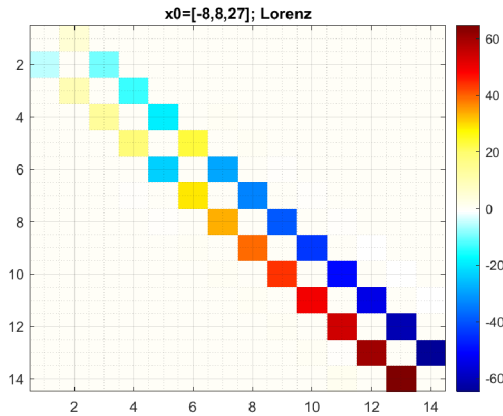
*Poznámka.* Hodnoty menší než jedna v absolutní hodnotě byly kvůli přehlednosti nahrazeny nulami.

Vidíme, že platí  $A \approx -A^T$ . Tato vlastnost je charakteristická pro všechny matice  $A$  SINDy modelu.

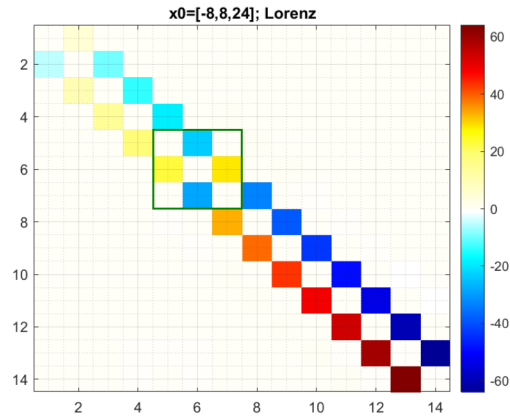
Budeme-li pozorovat chování této matice v okolí vektoru počátečních hodnot, tzv. počáteční podmínky (PP), zjistíme, že dochází k traspozicím čtvercových submatic. Tyto submatice jsou obvykle řádu dva či tři.

Na obrázku 9 můžeme vidět matice spočítané SINDy modelem s různými počátečními podmínkami do vzdálenosti maximálně 10 bodů od původní počáteční podmínky  $x_0$ . Na maticích lze vidět, že dvoupásová struktura je zachována, pouze při větší vzdálenosti od PP (viz obrázek 9d) se objevují významnější členy v posledních dvou řádcích matice.

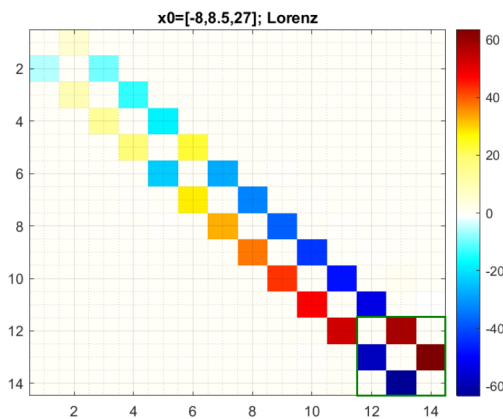
Chování matic na Lorenzově systému v závislosti na počátečních podmínkách jsme dále více nezkoumali, ale je to možnost dalšího výzkumu. Jelikož je Lorenzův systém známý a jeho chování je dobře popsáno, je jeho použití v rámci podobných systémů vhodnější. Naším směrem zájmu budou dále matice popisující RBC, na které se podíváme v kapitole 5.



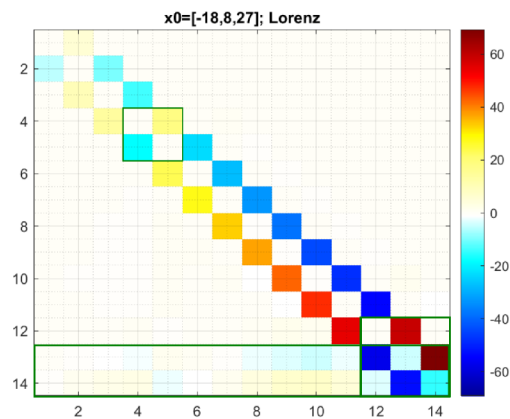
(a) Matice s původní PP.



(b) Matice s PP posunutou o tři na  $z$ .



(c) Matice s PP posunutou o půl na  $y$ .



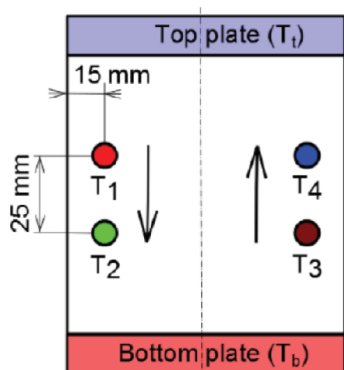
(d) Matice s PP posunutou o deset na  $x$ .

Obrázek 9: Matice SINDy modelu Lorenzova systému ve vnořeném prostoru s různými PP.

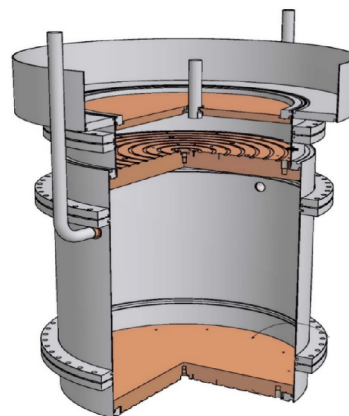
## 4 Přenos tepla turbulentní konvekcí

V rámci Ústavu přístrojové techniky (UPT) se zabýváme výzkumem přenosu tepla turbulentní Rayleigh-Bénardovou konvekcí (RBC z angl. *Rayleigh-Bénard Convection*) v heliovém plynu za kryogenních teplot. Jedná se o jednoduchý model konvektivního proudění (viz následující podkapitola 4.1) vystihující podstatné rysy proudění v atmosféře. Turbulentní proudění obecně, a tedy i turbulentní RBC, se vyznačuje nelineárními interakcemi v obrovském rozsahu prostorových škál, což dělá z turbulence i v dnešní době otevřený problém. Díky škálové invarianci hydrodynamických rovnic lze zavést podobnostní čísla (viz následující podkapitola), kterých je méně než materiálových konstant, a tak redukovat počet kontrolních parametrů. Další výhodou škálové invariance je, že s využitím vlastností hélia 4 za nízkých teplot můžeme modelovat turbulentní konvekci běžně probíhající v přírodě na obrovských prostorových škálách. Toto měření na UPT probíhá v poměrně malé aparatuře tzv. kryostatu (celá měřicí aparatura dosahuje výšky přibližně 1,2 metru, přičemž měřicí cela samotná je vysoká 30 cm). V této cele lze dosáhnout, či se přiblížit, stejných podobnostních čísel, jako ve velkých systémech, například jako je právě proudění v atmosféře. V první podkapitole si popíšeme, co to RBC je a jak funguje v principu.

Ve zkratce si popíšeme rovnice popisující RBC a vysvětlíme, co jednotlivé členy znamenají. V druhé podkapitole se podíváme, jak data získaná z měření v aparatuře na UPT vypadají, jak se zpracovávají a která použijeme na HAVOK analýzu.



(a) Schéma řezu experimentální celou pro měření RBC. [21]



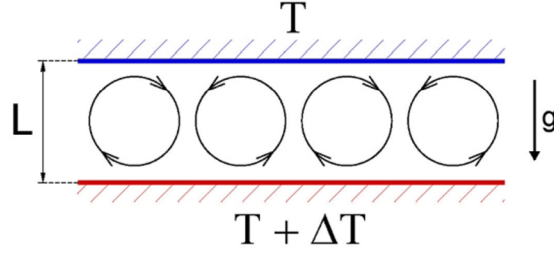
(b) 3D schéma měřicí cely pro měření RBC. [28]

Obrázek 10: Schémata konvekční cely.

## 4.1 Rayleigh-Bénardova konvekce

Konvekce je šíření tepla prouděním v gravitačním poli. Rayleigh-Bénardova konvekce je model konvektivního proudění mezi dvěma deskami. Část objemu tekutiny je zahřívána spodní deskou a vlivem zvýšení vnitřní energie, a s tím souvisejícím snížením hustoty, je vztakovou silou vytlačována vzhůru tekutinou s nižší energií. Tato část kontrolního objemu stoupá, než dosáhne horní desky, která tuto část objemu zchladí, a tak jí odebere část vnitřní energie. Vlivem snížení energie, a s tím souvisejícím zvýšením hustoty, má naše část kontrolního objemu v gravitačním poli tendenci klesat, a tím vytlačovat část kontrolního objemu zahřátou od spodní desky, která má tendenci stoupat. Schematický náčrtek RBC je na obrázku 11.

RBC je model konvektivního obecně turbulентního, či laminárního proudění. Turbulentní proudění je takové, které přesahuje kritickou hodnotu Reynoldsova čísla, jež si popíšeme dále v odstavci o podobnostních číslech. Popíšeme si turbulenci na příkladu. Představme si, že si pustíme vodovodní kohoutek pouze malým proudem tak, že proud je průhledný, molekuly se pohybují po vrstvách, tzv. lamelách, Reynoldsovo číslo je menší než kritické Reynoldsovo číslo. Budeme-li otevírat kohoutek více, bude vytékající voda více vířivá, Reynoldsovo číslo vzroste nad kritickou hodnotu a molekuly vody se nebudou pohybovat po vrstvách, ale napříč proudem vody. Právě víry jsou charakteristickou strukturou provázející turbulenci. Vratme se od příkladu s kohoutkem ke konvekční cele. V této se víry tvoří na několika velikostních škálách od těch řádově o velikosti cely tvořených proudícími koherentními strukturami (plumy z angl. *plumes*), od kterých jsou kaskádovitě tvořeny menší víry, až na takové škály, které dovoluje viskozita.



Obrázek 11: Schéma Rayleigh-Bénardovy konvekce. [28]

#### 4.1.1 Rovnice pro popis RBC

Napišme si rovnice popisující RBC v bezrozměrném tvaru.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right)\mathbf{u} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + \theta \hat{z} \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right)\theta = \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \nabla^2 \theta \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.3)$$

Udělejme si přehled použitých veličin:

$\mathbf{u}$  je rychlostní pole popisující rychlost kontinua,

$p$  je tlakové pole popisující tlak v kontinuu,

$\theta$  je teplotní pole popisující teplotu kontinua.

Upozorněme, že tyto rovnice jsou sestaveny za předpokladu Oberbeck-Boussinesqovy aproximace, která ve zkratce říká, že uvažujeme všechny vlastnosti tekutiny za konstantní, kromě hustoty ve vztakovém členu, která se mění v závislosti na změně teploty lineárně.

Popišme si tedy jednotlivé rovnice. První rovnice (4.1) je Navier-Stokesova rovnice. Je to vlastně Newtonova pohybová rovnice pro kontinuum, přičemž člen na levé straně vyjadřuje zrychlení objemového elementu tekutiny. Členy na pravé straně jsou zleva viskózní, tlakový a vztakový. Jedná se o rovnici popisující tok hybnosti.

Druhá rovnice (4.2) je rovnice vedení tepla v proudícím prostředí, je to rovnice pro tok tepelné energie.

Třetí rovnice (4.3) se nazývá rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, která je rovnicí pro tok hmoty.

#### 4.1.2 Podobnostní čísla (Kontrolní parametry RBC)

V rovnicích vystupují bezrozměrná podobnostní čísla  $Pr$  a  $Ra$ , kde  $Pr$  je Prandtlovo číslo a je definováno jako poměr mezi kinematickou viskozitou  $\nu$  a tepelnou difuzivitou  $\kappa$ , což jsou čistě materiálové konstanty, které jsou v Boussinesqově aproximaci konstantní. [23]

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

*Poznámka.* Konduktce je přenos tepla vzájemnými srážkami, kdy molekuly kmitají kolem rovnovážné polohy.



$Ra$  je Rayleighovo číslo, které vyjadřuje poměr mezi vztlakovou a viskózní silou a popisuje stav konvekce. Tedy aby konvekce vůbec mohla vzniknout, musí přesáhnout určitou hodnotu  $Ra$ , které se říká kritické Rayleighovo číslo  $Ra_c$ .

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta TL^3}{\kappa\nu}$$

Udělejme si ještě jeden přehled použitých veličin:

$g$  je gravitační zrychlení,

$\alpha$  je koeficient tepelné roztažnosti,

$\Delta T$  je rozdíl teplot horní a dolní desky,

$L$  je výška konvekční cely,

$\kappa$  je tepelná difuzivita (prolínavost),

$\nu$  je kinematická viskozita.

Povšimněme si, že na rozdíl od  $Pr$ , obsahuje  $Ra$  nejenom materiálové konstanty. Pro celu s nekonečně dlouhými deskami bylo odvozeno kritické Rayleighovo číslo  $Ra_c = 1708$ . Pro konvekční cely s deskami o průměru  $D$  je  $Ra$  vyšší a závisí na čísle  $\Gamma$ , což je tzv. aspect ration definovaný jako  $\Gamma = D/L$ . V úvodu této kapitoly jsme hovořili o konvekci v atmosféře, oceánu a na Slunci. Každý tento systém je charakterizován svým  $Ra$ , které je v atmosféře  $Ra \approx 10^{17}$ , v oceánu  $Ra \approx 10^{20}$  a na Slunci  $Ra = 10^{21}$ . Vidíme, že tato čísla jsou velmi vysoká právě proto, že rozměry těchto systémů jsou tak velké. V kryostatů na UPT dosahujeme  $Ra \approx 10^{15}$ , což je získáno vlastnostmi experimentální látky  ${}^4He$  za určité teploty a tlaku. Více detailů viz [28].

### 4.1.3 Podobnostní čísla (Parametry odezvy RBC)

Během výzkumu se často hledá závislost tzv. Nusseltova čísla  $Nu$ , které vyjadřuje intenzitu konvektivního přenosu tepla, na Rayleighově čísle  $Ra$ . Nusseltovo číslo vyjadřuje kolikrát je tepelný tok přenášený konvekcí větší než teplo, které by bylo přeneseno ve stejném systému difuzí. [23]

$$Nu = \frac{L\dot{Q}}{\lambda S\Delta T}$$

Zde  $\frac{\dot{Q}}{S\Delta T}$  je tepelný tok,  $L$  je výška cely a  $\lambda$  je tepelná vodivost tekutiny. V tepelném toku je  $\dot{Q}$  tepelný výkon,  $S$  je obsah plochy desky a  $\Delta T$  je, jak již bylo zmíněno, rozdíl teplot desek.

A v neposlední řadě se jako parametr odezvy v RBC používají různá Reynoldsova čísla  $Re$ , která vyjadřují hranice mezi různými přechody v dynamice. Jedním z nich je  $Re$  vyjadřující hranici pro přechod z laminárního na turbulentní proudění. Reynoldsovo číslo vyjadřuje přenos hybnosti prouděním. Toto číslo se v RBC používá pro popis velkých tepelných koherentních struktur, anglicky plumes (někdy se počestěně používá plummy), které tvarem připomínají atomový hřib. Tyto plummy se odlepují od desek a jsou hlavními nosiči tepla.

$$Re = \frac{Ud}{\nu}$$

Tedy Reynoldsovo číslo je dáno poměrem, kde v čitateli je součin rychlosti proudění  $U$  a charakteristického rozměru  $d$ , a ve jmenovateli je kinematická viskozita. Charakteristický rozměr  $d$  je při proudění potrubím průměr tohoto potrubí, v RBC je to průměr cely.

#### 4.1.4 Mezní vrstvy a jádro konvekce

Mezní vrstvy (z angl. *boundary layers*) jsou jevem charakteristickým pro turbulentní proudění, u kterých se v důsledku okrajových podmínek výrazně liší proudění v blízkosti hranice od proudění v „hlavním toku“ tzv. jádro konvekce (angl. *turbulent bulk*). „Hlavní tok“ je podstatně ovlivněn mísením způsobeným turbulencí, v jehož důsledku jsou zde charakteristické veličiny jako rychlost nebo teplota tekutiny (v časovém průměru) v podstatě prostorově homogenní a izotropní. Mezní vrstvy se naopak vyznačují výraznými prostorovými gradienty relevantních veličin (opět ve smyslu časových průměrů).

*Poznámka.* U laminárních, tedy ne turbulentních, proudění o mezních vrstvách typicky nemluvíme, protože změny gradientů daných veličin nejsou „prudké“. Pro představu, rychlostní profil laminárního proudění v potrubí má tvar paraboloidu, zatímco profil turbulentního proudění má tvar plochy, která v mezní vrstvě náhle padá k nule.

*Poznámka.* Význam pojmu mezní vrstva je, jak je zde naznačeno, v jistém smyslu intuitivní. Přesné definice se různí podle toho o jaké mezní vrstvě se hovoří.

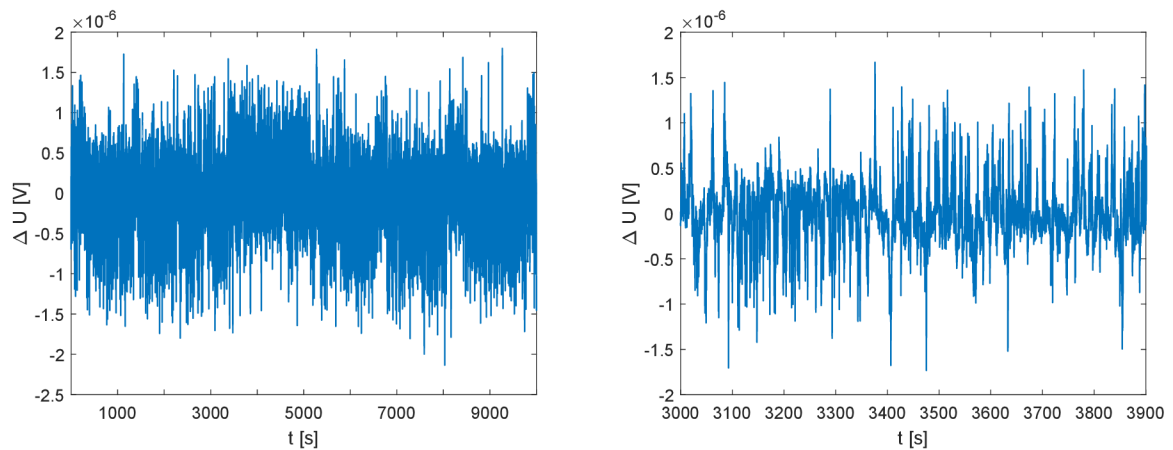
Zmiňme si dvě základní mezní vrstvy. První je odvozená od rychlostního profilu a nazývá se viskózní mezní vrstva. Představme si opět turbulentní proudění v potrubí kruhového průřezu. U stěny je teoreticky rychlost proudění nulová, protože kapalina proudící u stěny je viskózním třením bržděna. Ovšem s rostoucí vzdáleností od stěny rychlost proudění vzrůstá. Tloušťka viskózní mezní vrstvy, jak se tato vrstva nazývá, je dána vzdáleností od stěny, kde proud dosahuje 99 % rychlosti proudu uprostřed daného potrubí. [23]

Druhou mezní vrstvou je tzv. teplotní mezní vrstva, která vzniká pouze, jsou-li teploty proudící kapaliny a stěny rozdílné. Tloušťka této vrstvy je dána vztahem  $\frac{L}{2Nu}$ , tedy přibližně rozdílem teplot. Zajímavé je, že tato tloušťka nezávisí na vzdálenosti desek. Tyto teplotní mezní vrstvy jsou v RBC u horní i spodní desky a právě zde vznikají už dříve vzpomínané plummy [23]. Viskózní mezní vrstvy se nachází u každého povrchu, protože právě u něj je rychlost teoreticky nulová. Tloušťka mezních vrstev je ovlivněna například drsností povrchu stěn, resp. jejich strukturou, nebo rozdílem teplot.

## 4.2 Data a jejich zpracování

Cela samotná obsahuje několik tepelných snímačů, které jsou umístěny v deskách a uvnitř objemu cely. Jedná se o malé odporové germaniové snímače, které měří odpor, resp. napětí, v závislosti na teplotě. Zpracovávaná data pak můžeme zobrazovat jako časovou řadu změn teploty, případně napětí. Protože jsou tato data měřena v turbulentním jádru, anglicky *bulk*, budeme tato data zjednodušeně označovat jako Bulk data.

*Poznámka.* Upozorníme na fakt, že ve skupině Kryogeniky a supravodivosti na UPT se provádí více experimentů a vniká tak více typů datových řad. V současnosti se například připravuje aparatura na měření rotující konvekce, kdy se bude celá měřicí aparatura otáčet. Měření, které používáme je jedno z nejdelších a zároveň je zde velké množství intermitencí, což je také důvod proč používáme právě toto.



(a) Časová řada o 800 000 bodech.

(b) Přiblížená časová řada o 72 000 bodech.

Obrázek 12: Časové řady měření RBC na UPT.

#### 4.2.1 Statistické momenty

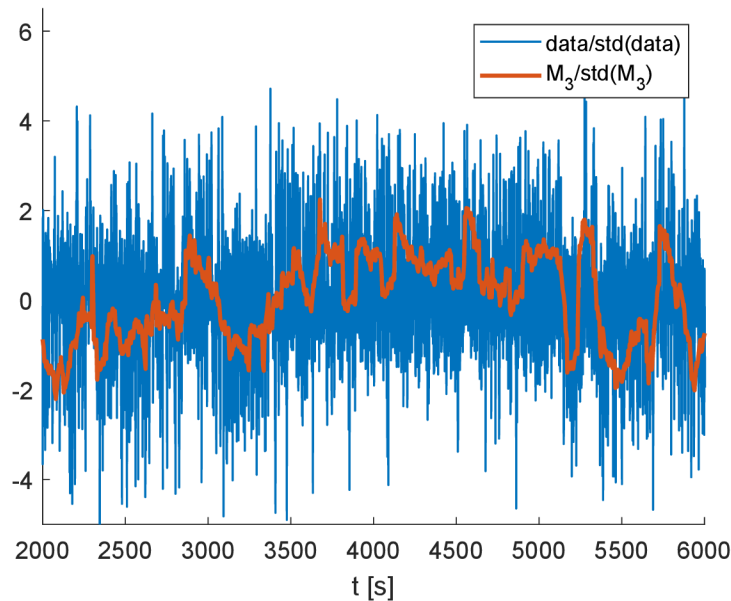
V podkapitole 1.2 jsme si definovali, co to je střední hodnota, rozptyl, šikmost a špičatost, kterým se někdy říká statistické momenty, resp. 1., 2., 3. a 4. statistický moment. Dále si uvědomme, že na jednotlivé datové řady získané z měření RBC můžeme pohlížet jako na diskrétní náhodné proměnné, pro které tyto momenty můžeme spočítat. Pro výpočet těchto momentů v MATLABu existují předdefinované funkce. Velký význam má především šikmost, která nese informaci o převládajícím směru turbulentního větru uvnitř experimentální cely. Toto je běžný nástroj používaný při popisu RBC, jehož získání si přiblížíme v následujícím odstavci.

Uvažujme podélný řez válcovou celou (viz obrázek 10), ve které konvekce proudí pouze jedním směrem, kupříkladu proti směru hodinových ručiček. Teplé plumy stoupají a na pravých snímačích je zaznamenána vyšší teplota než na snímačích levých, na které dopadají chladné plumy z horní desky. Záznam fluktuací napětí  $\delta V(T)$  měřený pravým snímačem můžeme vidět na obrázku 12 v čase 3500 s – 3900 s, kdy teplota fluktuuje spíše v kladných hodnotách. Spočítáme-li šikmost PDF signálu z uvažovaného pravého snímače, zjistíme, že je kladná. Abychom dostali křivku popisující takto celé měření, při kterém dochází k otáčení směru „větru“, spočítáme šikmost klouzavým oknem o délce přibližně deseti cirkulací (desetinásobek cirkulační periody  $T_0$ , viz další podkapitola). Zvolíme-li krok jedna, dostaneme nejjemnější vzorkování. V každém okně tedy spočítáme šikmost, a tu uložíme do vektoru, z čehož dostaneme daný signál. Výsledný záznam šikmosti  $M_3(t)$  vykreslený na signálu fluktuací napětí  $\delta V(t)$  můžeme vidět na obrázku 13.

*Poznámka.* Data jsou detrendována a posazena průměrem do nuly. Když mluvíme o fluktuaci teploty kolem nuly, je tím myšlena změna teploty, jelikož záporných teplot Kelvinovy stupnice samozřejmě nelze dosáhnout.

*Poznámka.* Mluvíme-li o fluktuaci teploty na snímačích, myslíme tím fluktuaci napětí na snímačích, jimiž jsou vysoce citlivé termistory o velikosti asi půl milimetru. Snímače nejsou kalibrovány na konkrétní teplotu, proto zkoumáme fluktuace napětí. Tato kalibrace by byla sice názornější, ale jedná se pouze o změnu ve velikosti (jedná se pouze o pronásobení konstantou) a kvalitativně a statisticky se nic nezmění, takže je pro nás záznam fluktuace napětí dostatečný.

*Poznámka* (značení). Data momentů zpracovaných klouzavým oknem budeme označovat  $M_1, M_2, M_3, M_4$ .



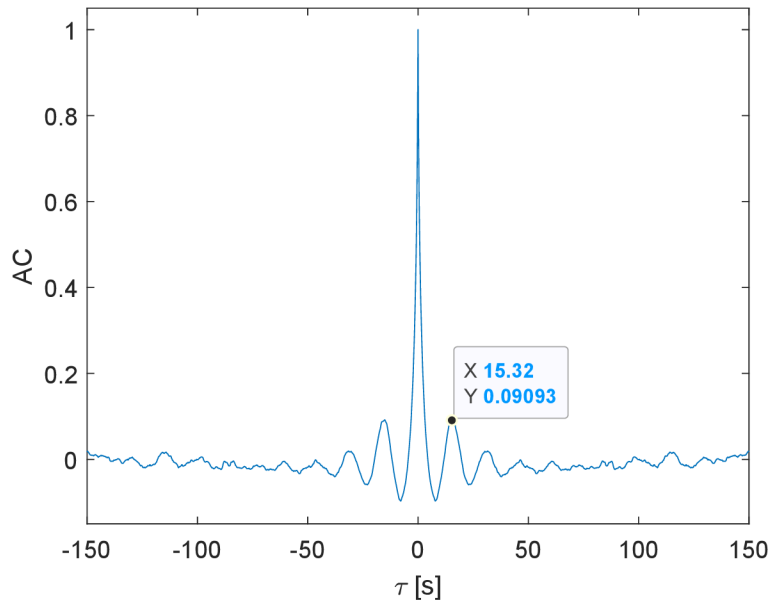
Obrázek 13: Šikmost dat ( $M_3$ ) zpracovaná klouzavým oknem.

#### 4.2.2 Korelační funkce

Dalším nástrojem běžně používaným při studiu RBC jsou korelace (též kroskorelace nebo vzájemné korelace, někdy značené CC z angl. *cross-correlation*) a autokorelace (někdy značené AC z angl. *auto-correlation*).

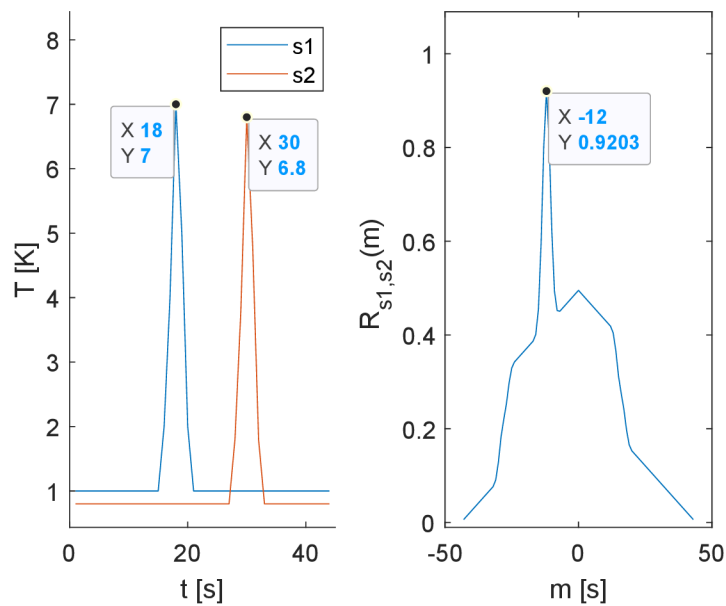
U autokorelace nás, jako v případě kroskorelace, nezajímá poloha vrcholu, protože je u normalizované autokorelace vždy v bodě  $m = 0$  a  $R(0) = 1$ , ale zajímá nás, co se děje dále od vrcholu. Přesněji řečeno nás zajímá druhý vrchol, jelikož dává informaci o druhé největší soběpodobnosti (označen na obrázku 14). Čas v tomto vrcholu se značí  $T_0$  a nazývá se cirkulační perioda. To, že je na autokorelační funkci více periodických vrcholů, znamená, že bylo proudění v průběhu měření značně ustálené.

Uvažujme opět řez celou, ve které probíhá konvekce v ustáleném směru. Uvažujme tentokrát dva snímače pod sebou, umístěné u pravé strany cely, vzdálené od sebe na výšku  $o$  d. Dále předpokládejme, že je na snímači snímána konstantní teplota do chvíle, než do něj narazí tepelný plum, což se projeví náhlým nárůstem teploty a následným poklesem zpět na původní konstantní teplotu. Budeme-li korelovat snímače v pořadí nižší (snímač 1), vyšší (snímač 2), dostaneme informaci o směru větru. Bude-li totiž vrchol korelační funkce posunut do záporných hodnot  $\tau$ , znamená to, že plum nesoucí teplo jako první narazil na snímač 1, a pak až na snímač 2. Ve schematickém příkladu (viz obrázek 15) vidíme, že snímače snímají každou sekundu jeden bod a že trvalo 12 sekund, než došel plum od snímače 1 ke snímači 2. Tento posun se značí  $\tau_p$  a projeví se na vrcholu korelační funkce, který tak bude posunut právě o -12 sekund. Známe-li vzdálenost těchto snímačů, můžeme dopočítat přibližnou rychlost proudění v cele. Z této rychlosti pak můžeme dopočítat přibližnou dobu cirkulace větru. Právě tímto výpočtem se získává doba



Obrázek 14: Autokorelační funkce s vyznačeným prvním vedlejším maximem.

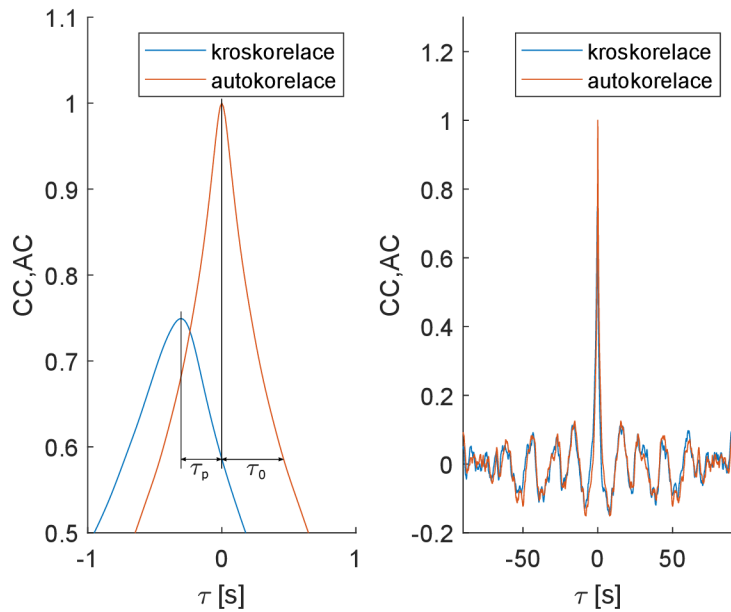
cirkulační periody, jejíž násobkem je určena délka klouzavého okna. Tato rychlost se dále využívá k výpočtům dalších, jinak definovaných,  $Re$  pro popis RBC (více viz [21]).



Obrázek 15: Modelový příklad.

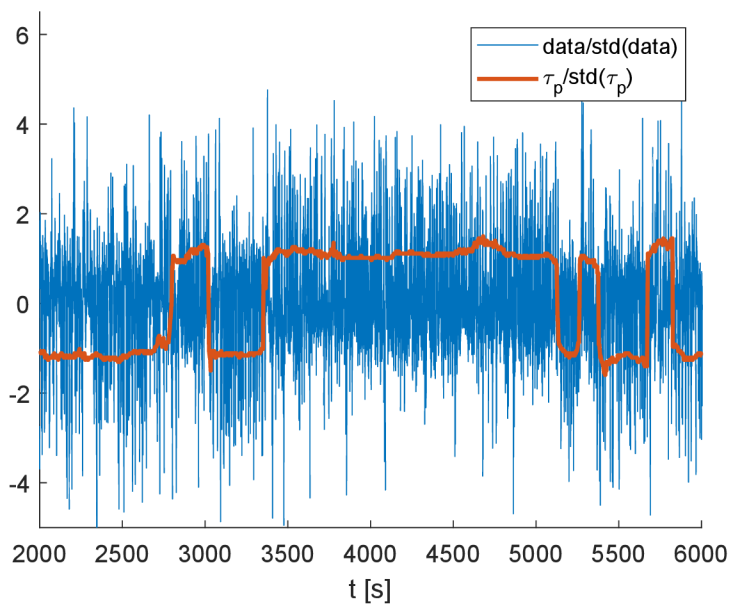
V minulém odstavci jsme si popsali, jak se dá získat  $\tau_p$ , a tím pádem vlastně i  $\tau_0$ . Čas  $\tau_0$  je tedy čas, ve kterém je hodnota autokorelační funkce rovna hodnotě korelační funkce v nule (viz obrázek 16). Oba zmíněné časy  $\tau$  se používají při výpočtech dalších  $Re$ .

Podobně jako byla vypočítána křivka šikmosti pro celý signál (viz obrázek 13) se dá vypočítat i křivka pro  $\tau_p$ . Opět se použije klouzavé okno, přičemž je vhodné použít při-



Obrázek 16: Kroskorelační a autokorelační funkce. V okolí vrcholu a oddálená.

blíže desetinásobek cirkulační periody a pro nejjemnější vzorkování použít krok jedna. Jak potom vypadá takový signál, můžeme vidět na obrázku 17. Tuto datovou řadu budeme označovat jako  $\tau_p$  signál, či  $\tau_p$  data.



Obrázek 17: Signál  $\tau_p$  zpracovaný klouzavým oknem.

*Poznámka.* Na obrázku 17 je kvůli přehlednosti jako „data“ zobrazen pouze jeden signál, ze dvou korelovaných signálů, ze kterých bylo  $\tau_p$  počítáno.

## 5 HAVOK zpracování RBC signálů

### 5.1 Určení vhodné dimenze vnoření

Začněme s určením vhodné dimenze prostoru vnoření, tedy  $r$ . Jak jsme již zmínili jedná se o úlohu, která není v článku [2] příliš objasněna. Pokus o větší objasnění je v suplementu [6] k původnímu článku, v němž se dočteme, že se jedná v podstatě o ladění parametrů tak, aby byly výsledky co nejuspokojivější. My jsme pro nastavování  $r$  volili metodu čtverců (MČ), přičemž jsme porovnávali rezidua různých  $y - modelů$  (výsledky různých regresních modelů) s původní datovou řadou, reps. čtverce těchto reziduí. Dívali jsme se nejen na celé datové řady, ale i na desetinu délky začátku a konce datové řady.

Chceme-li spočítat metodu čtverců, tedy součet čtverců odchylek normovaný na délku dat, tak, jak jsme to provedli my, je nutné od dat nejdříve odečíst průměr, a pak je normovat svou směrodatnou odchylkou. Uvažujme dvě datové řady  $A$  a  $B$ , obě délce  $n$ , metoda čtverců se pro ně spočítá následovně:

$$\begin{aligned}a^* &= \frac{A}{s_A} \\a &= a^* - \bar{a}^* \\b^* &= \frac{B}{s_B} \\B &= b^* - \bar{b}^* \\err &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2\end{aligned}$$

*Poznámka* (značení).  $\bar{a}^*$  značí průměr a  $s_A$  značí směrodatnou odchylku. Oba tyto pojmy byly definovány v podkapitole 1.2.

*Poznámka*. Důvodem, proč jsme data normovaly na délku dat je možnost porovnání částí dat (začátku, resp. konce) s celou datovou řadou.

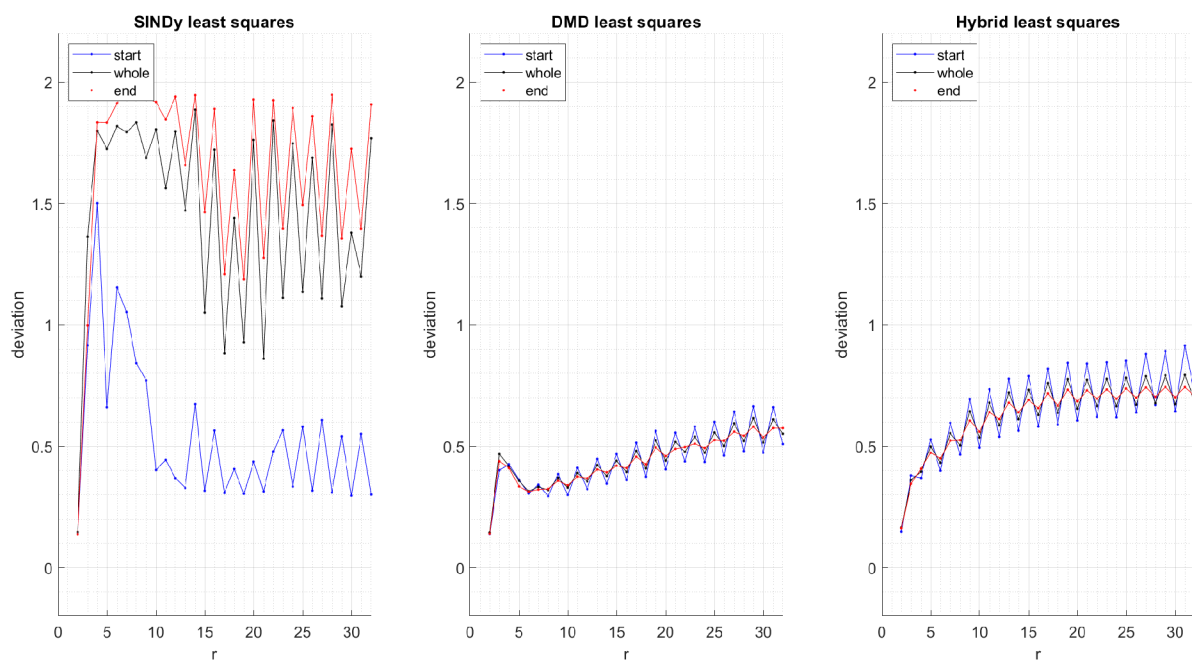
*Poznámka*. V rámci výzkumu jsme pozorovali  $r$  nejen lichá, jak požaduje Takensova věta o vnoření, ale i sudá. Určitou citlivost na sudost, resp. lichost, pozorovali i Brunton a spol.

Upozorníme na fakt, že i přes to, že nám vycházejí sudá  $r$  (viz obrázky 18 a 19 a obrázky 34,35,36 v appendixu) jako lepší, tak v souladu s Takensovou větou vybíráme  $r$  lichá. Kdybychom vybrali sudá, nemohli bychom si být jisti, že je původní atraktor difeomorfni vnořenému atraktoru. Z analýzy metodou nejmenších čtverců nám tedy vyplývají následující výsledky.

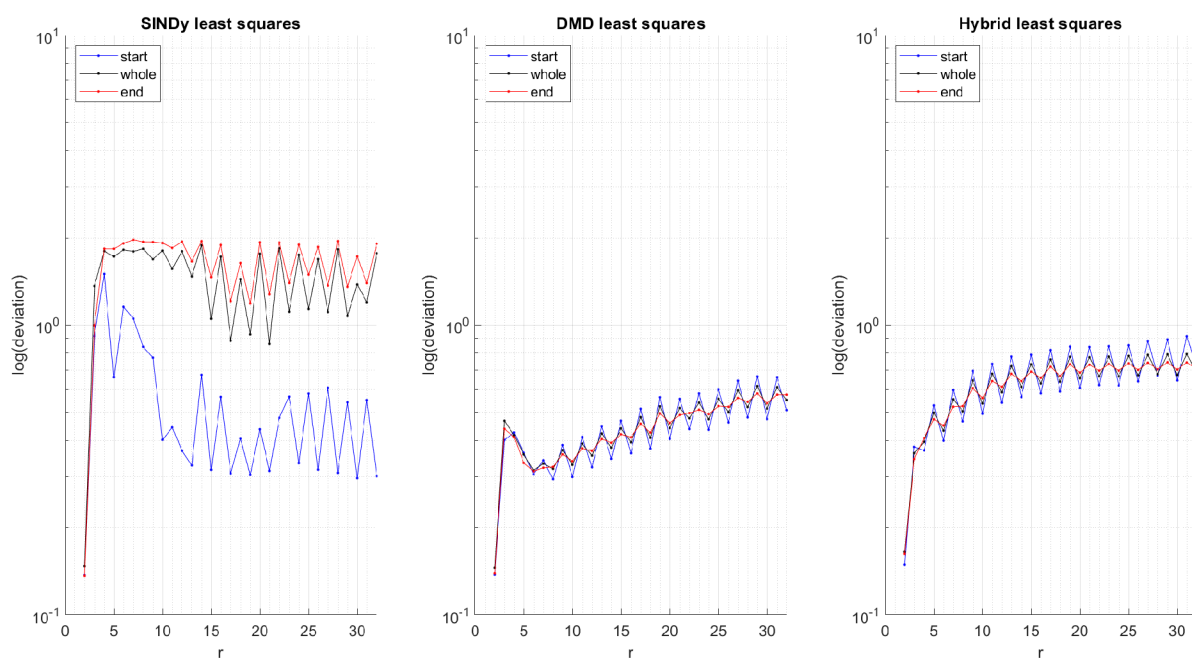
datová řada	dimenze $r$	regresní model
Bulk	7	DMD
$\tau_p$	3	DMD
$M_1$	3	DMD
$M_2$	3	DMD
$M_3$	3	DMD
$M_4$	3	DMD

Tabulka 1: Výběr dimenzí a regresních modelů.



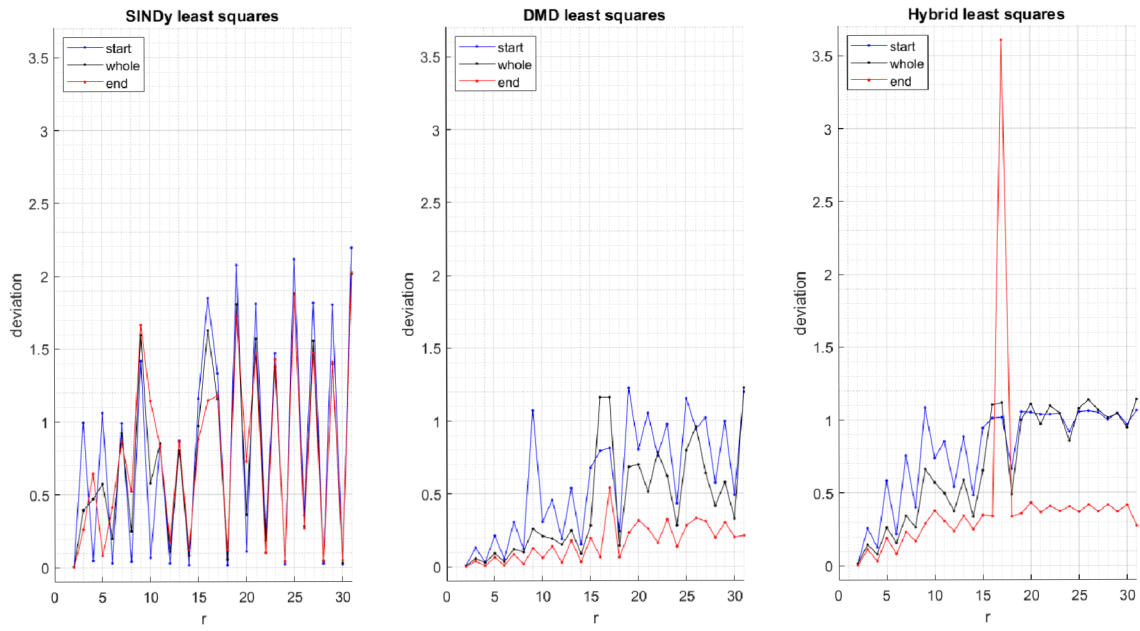


(a) Lineární škála.

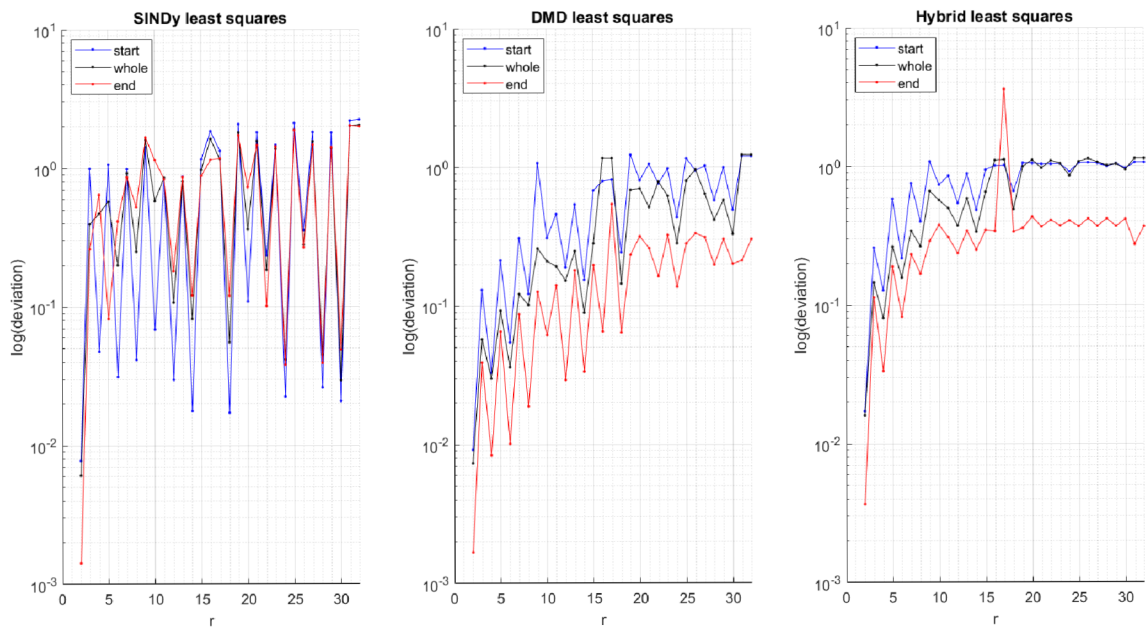


(b) Logaritmická škála.

Obrázek 18: MČ na (bulk) data z teplotních snímačů.



(a) Lineární škála.



(b) Logaritmičká škála.

Obrázek 19: MČ na  $\tau_p$  zpracování dat.

## 5.2 Matice soustavy A

V podkapitole ?? jsme viděli, že rovnice získané některou ze tří regresí se dají zobrazit pomocí barevných matic. Podívejme se blíže na tyto matice a jak se chovají.

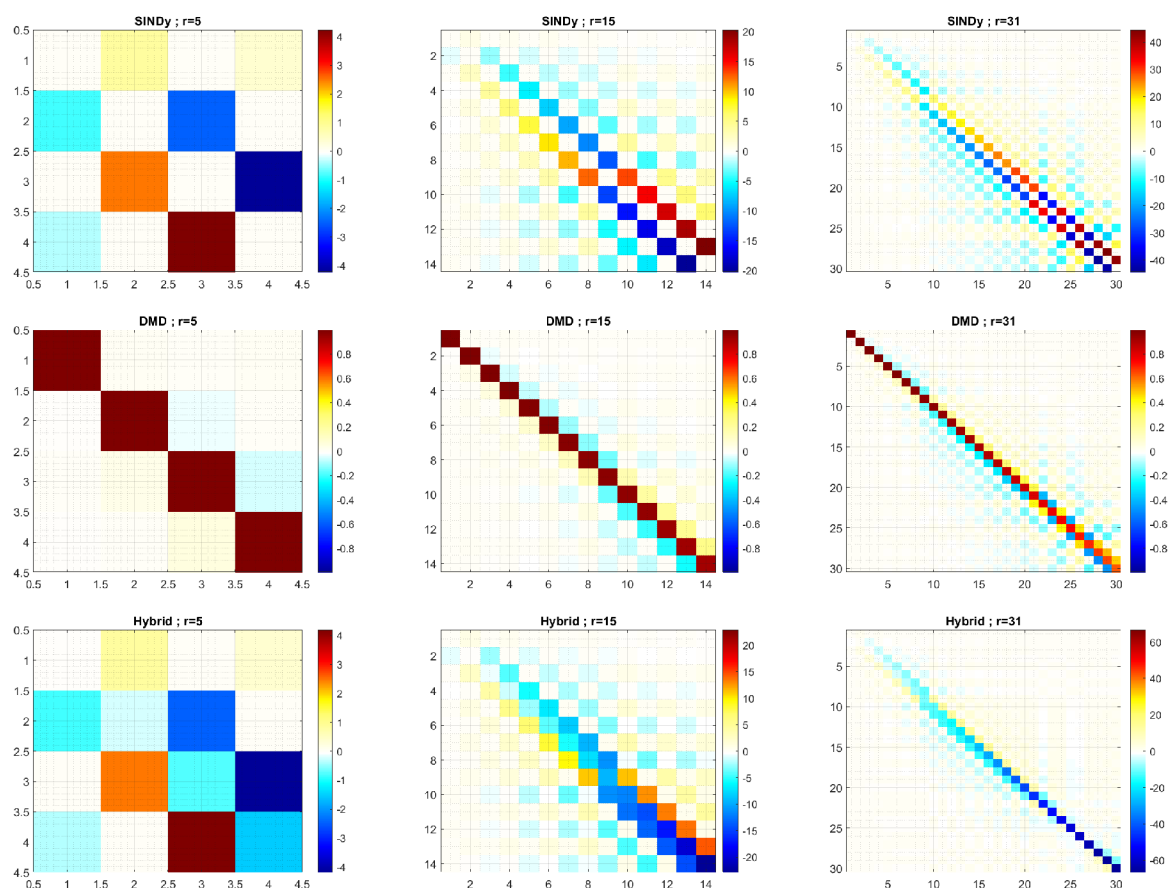
Pro každý z regresních modelů je charakteristická jeho první poddiagonála, naddiagonála a diagonála. SINDy model je charakteristický svou nulovou diagonálou a nenulovou, obecně v absolutní hodnotě rostoucí, poddiagonálou a naddiagonálou.

DMD model má kladnou diagonálu, jejíž prvky jsou omezeny shora jedničkou a celá matice je jakoby normovaná na škálu od minus jedné do jedné. První prvky matice na diagonále jsou nejbližší jedné a postupně hodnoty klesají.

A konečně Hybrid model je charakteristický tím, že prvky na hlavní diagonále klesají a jsou, oproti mimodiagonálním prvkům, dominantní.

Z dalších pozorování víme, že se hodnoty matic v závislosti na  $r$  nemění, pouze se matice zvětšuje a přidávají se prvky. Tedy spočítáme-li pro  $r = n + 1$ , pak submatice  $n \times n$  je stejná, jako matice spočítaná rovnou pro  $r = n$ . Dále jsme zjistili, že znaménka mimo diagonálu u matic stejného systému počítaná různými regresními modely jsou stejná.

Na výběru matic můžeme daná pozorování ověřit (viz obrázek 20). Stejné chování můžeme pozorovat na všech maticích různých datových řad.



Obrázek 20: Matice soustav pro bulk data.

### 5.3 Stabilita matic soustavy $A$

Z matematického aparátu (viz podkapitola 1.1.1) víme, že stabilita soustavy lineárních ODR se dá určovat z vlastních čísel matice soustavy. Ovšem vektor  $\mathbf{b}$  pravé strany naší soustavy není konstantní, ale časově závislý, což zapříčiní, že v případě, že je soustava stabilní, resp. atraktivní, budou řešení konvergovat k partikulárnímu řešení vektoru  $b$ . Zaměříme se nyní na toto zpracování a speciálně se podíváme na soustavy, u kterých bylo řešení nestabilní. Vykreslíme si datové řady řešení modelů, jejich matice a jejich vlastní čísla.

Budeme-li sledovat vlastní čísla matic  $A$  různých datových řad, můžeme si všimnout, že jednotlivé matice regresních modelů vykazují různé typy stability. SINDy a Hybrid model se řídí klasickou stabilitou, jak je definováno právě v kapitole 1.1.1, a tedy je možno jejich stabilitu posoudit podle reálných složek vlastních hodnot matice  $A$ . DMD model ovšem vykazuje stabilitu numerickou.

Budeme-li se zabývat teorií numerických řešení diferenciálních rovnic, zjistíme, že se definuje několik stabilit v závislosti na metodě řešení (viz skripta [9]). Definovat v této práci tu správnou je ovšem problematické, protože část kódu počítající řešení  $y$  soustavy (Matlab řešič `lsim`, resp. `sssim`, který je uvnitř `lsim`) nelze číst a pracuje tedy jako „black box“. Z dokumentace uvnitř `lsim`, ke které se dostaneme pouze krokováním, se dozvíme, že metoda vyhodnocuje sama, jaká data dostala a jakou metodou je bude zpracovávat. Toto může být důvodem rozdílu ve stabilitě jednotlivých metod, kdy matice  $A$  a vektor  $b$  metod Hybrid a SINDy regrese jsou odvozeny za pomoci numerických derivací, což se nějakým způsobem na této matici a tomto vektoru projeví.

Z pozorování výstupů jsme se dozvěděli, že absolutní hodnoty vlastních čísel matice  $A$  DMD metody jsou menší nebo rovna jedné a jedná se tedy zřejmě o metodu, jejíž stabilita je dána jednotkovým kruhem komplexní roviny umístěným do počátku. Toto může implikovat použití modifikované explicitní (Eulerovy) metody s posunutou oblastí stability. Původní Eulerova metoda má totiž střed kruhu stability s poloměrem jedna v bodě  $-1 + 0i$  komplexní roviny.

*Poznámka.* Zřejmě nepůjde o Eulerovu metodu, jako takovou, protože se jedná o velmi základní metodu, ale o nějaký složitější řešič soustav diferenciálních rovnic.

*Poznámka (Zobrazování).* Na obrázcích v této části je zobrazena vždy pouze část datové řady a jak data, tak modely jsou, kvůli přehlednější vizualizaci, škálovány svou směrodatnou odchylkou.

Obrázek 21 nám ukazuje řešení  $y$  a původní datovou řadu, matici soustavy a její vlastní čísla pro  $r$  a model určený na začátku této kapitoly (viz tabulka 1).

#### Stabilita jednotlivých datových řad

Dále uděláme souhrn pozorování  $y - modelů$  na jednotlivých zpracovávaných datových řadách a zdůrazníme problémy, kterých si lze povšimnout. Na jednotlivých obrázcích 22 až 26 je vždy vlevo znázorněn popisovaný fenomén doprovázející nestabilitu daných  $y - modelů$ , uprostřed je jejich matice a napravo vlastní čísla.

**Bulk:** Na SINDy  $y - modelu$  pro bulk data vidíme, že řešení není stabilní pro sudé ani pro liché  $r$  a ani se nepohybuje kolem partikulárního řešení, jak je tomu u  $M_1$  dat (viz dále). Protože se kladná vlastní čísla objevují i u ostatních modelů, dá se tvrdit, že tento

model má obecně problém se stabilitou. Další modely (Hybrid a DMD) se na bulk datech chovají stabilně.

**$M_1$**  : Modely DMD a Hybrid se na datové řadě  $M_1$  opět chovají stabilně a dle očekávání. Poměrně přesně popisují datovou řadu. Model SINDy je opět nestabilní (vidíme „sinusovou“ strukturu), i když je vidět, že se celé řešení stále pohybuje okolo partikulárního řešení (daného forcingem), alespoň na začátku datové řady, kterou vidíme. Jistě si lze povšimnout, že nestabilita zde není tak výrazná, jako u jiných datových řad a modelů.

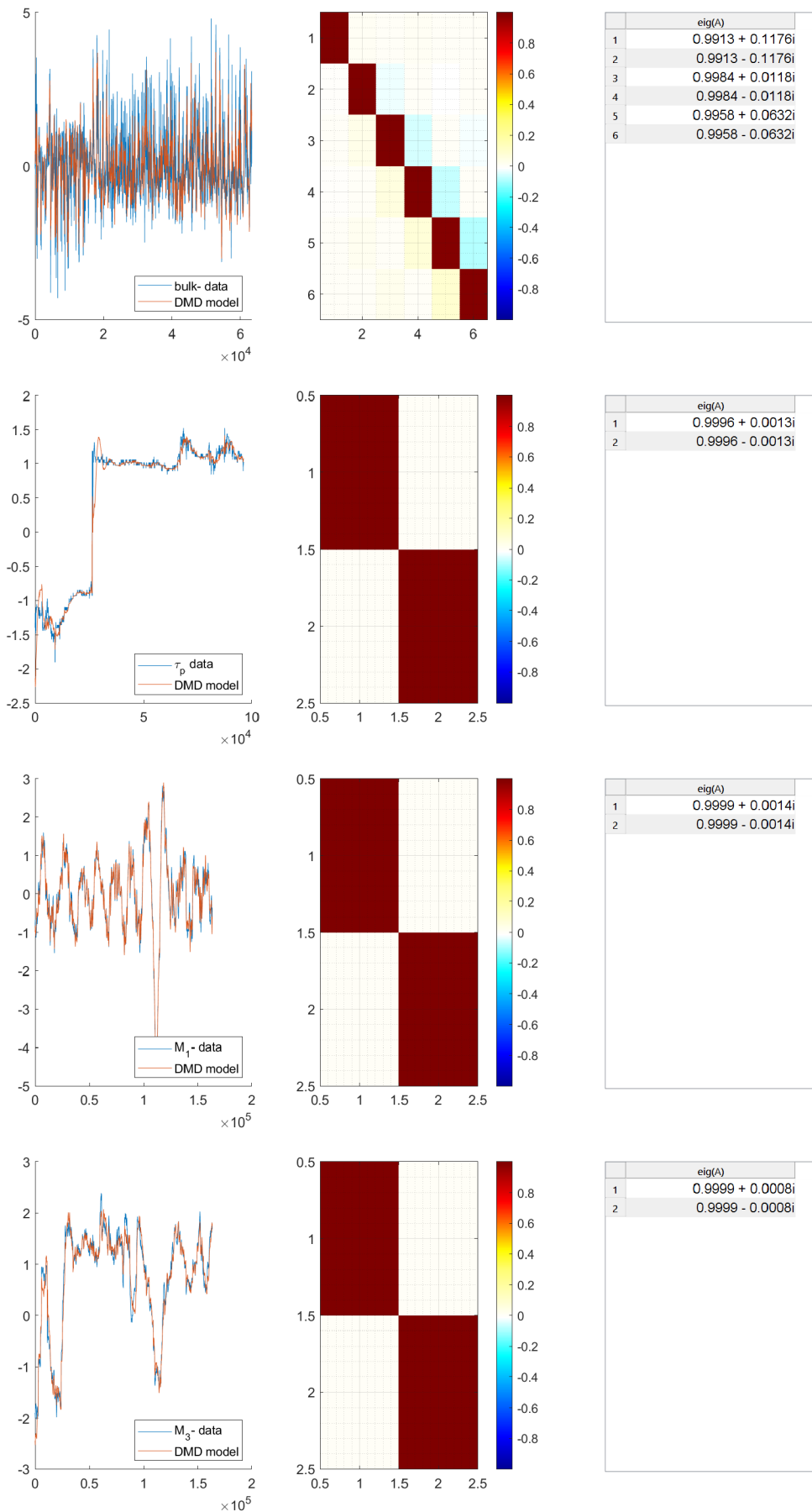
**$M_2$**  : U datové řady  $M_2$  mají všechny metody nekvalitní regresi. U DMD modelu se u matic pro sudá  $r$  objevuje vlastní číslo rovno jedné a od  $r = 12$  se vyskytuje i pro lichá  $r$ , což by mohlo zapříčinit nestabilitu daných řešení. Ovšem i přes stabilitu řešení dle vlastních čísel nemají DMD ani Hybrid dobré výsledky. Vidíme malou amplitudu u Hybrid modelu zapříčiněnou škálováním dat směrodatnou odchylkou. To znamená, že data musí postupně nabývat na amplitudě. Dále má model rostoucí trend. SINDy je opět nestabilní s výraznou „sinusovou“ strukturou u lichých  $r$ .

*Poznámka.* Sledovaný fenomén na řadě  $M_2$  není u DMD  $r = 3$  vidět, znehodnocení je tak minimální, jak ukázala i metoda nejmenších čtverců.

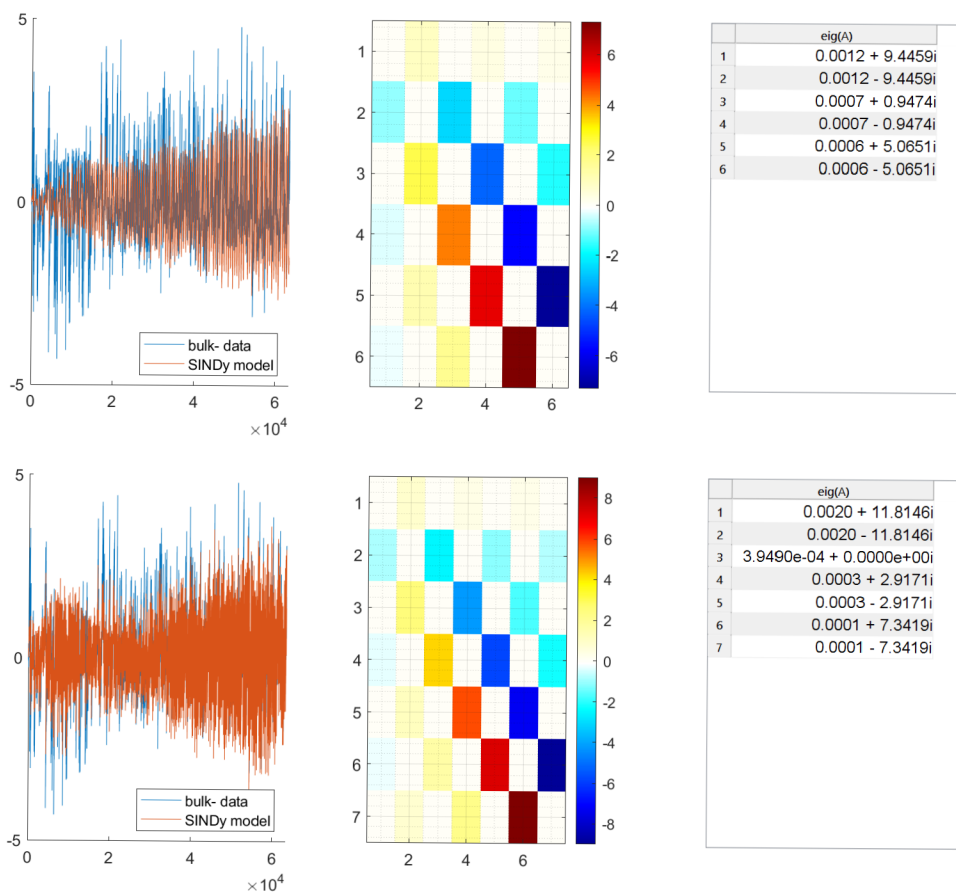
**$M_3$**  : Pozorujeme-li řešení  $y$  všech modelů na datové řadě  $M_3$ , vidíme, že je řešení pro sudá  $r$  posunuto od původní datové řady, kterou bychom měli rekonstruovat. U DMD se opět objevují vlastní čísla, která jsou rovna jedné. Jedná se vždy o jedno vlastní číslo a pouze pro  $r$  sudé. Hybrid model vykazuje pro lichá  $r \geq 7$  postupný nárůst amplitudy. Na obrázku vidíme, že má řešení  $y$  malou amplitudu kvůli velké směrodatné odchylce, kterou byla data škálována, jak již bylo zmíněno výše. Toto je vidět i u Hybrid modelu dat  $M_2$ .

**$M_4$**  : Řada  $M_4$  vykazuje stejné problémové chování, jaké bylo pozorováno na předchozích řadách  $M_2$  a  $M_3$ . Jsou to rostoucí amplituda, posun dat, vlastní číslo rovno jedné u DMD modelu, a rostoucí trend u Hybrid modelu, který se nyní objevuje i u DMD modelu.

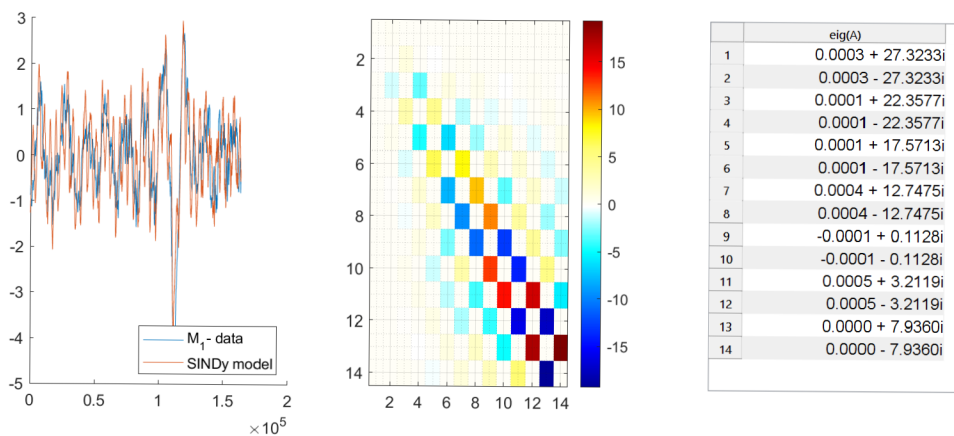
**$\tau_p$**  : Vlastní čísla matic modelů DMD a Hybrid pro datovou řadu  $\tau_p$  nám opět dávají informaci, že jsou daná řešení stabilní. Vlastní čísla u SINDy modelu jsou tentokrát i záporná, ale řešení má silnou „sinusovou“ strukturu, jak je tomu u všech datových řad. U sudých  $r$  DMD modelu se opět vyskytují vlastní čísla, která jsou rovna jedné. Dále můžeme pozorovat posun řešení u všech modelů pro sudá  $r$ . Opět vidíme rostoucí, resp. klesající, trend modelů DMD a Hybrid ovšem pouze pro sudá  $r$ , na rozdíl od  $M$  datových řad, kde se tento trend objevoval i u lichých  $r$ .



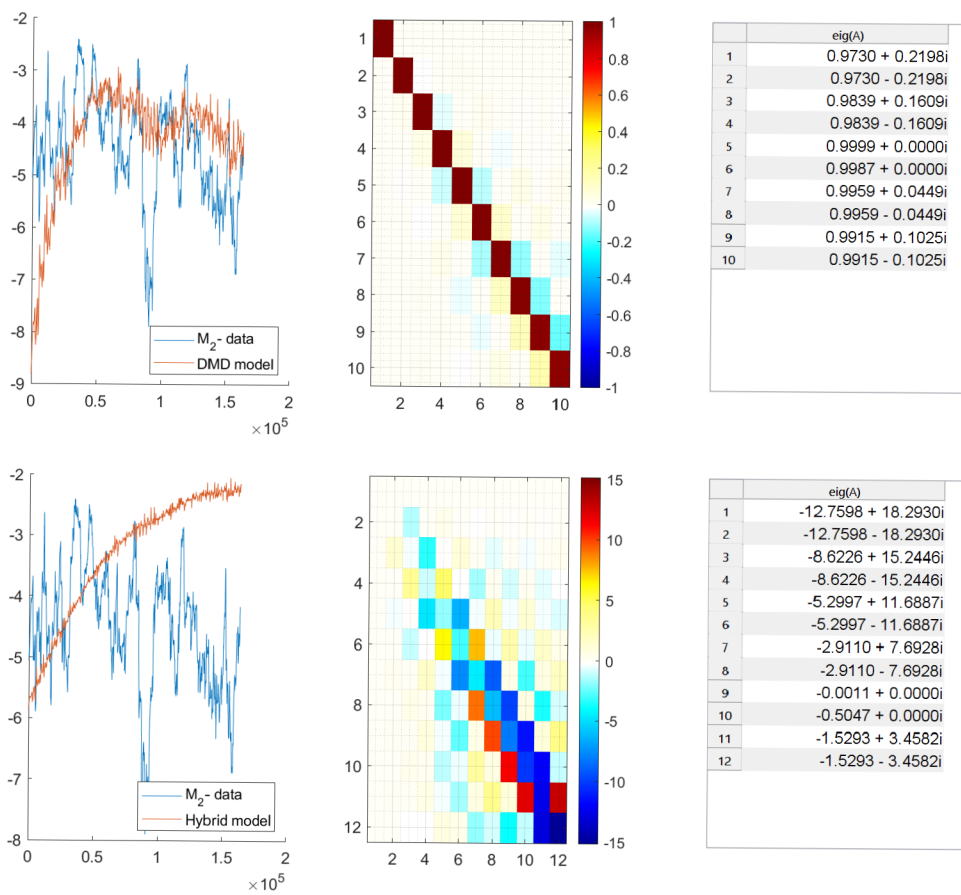
Obrázek 21: Řešení soustav, jejich matice a vlastní čísla této matice pro modely a  $r$  vybrané pomocí MČ.



Obrázek 22: Nestability SINDy modelu na bulk datech.

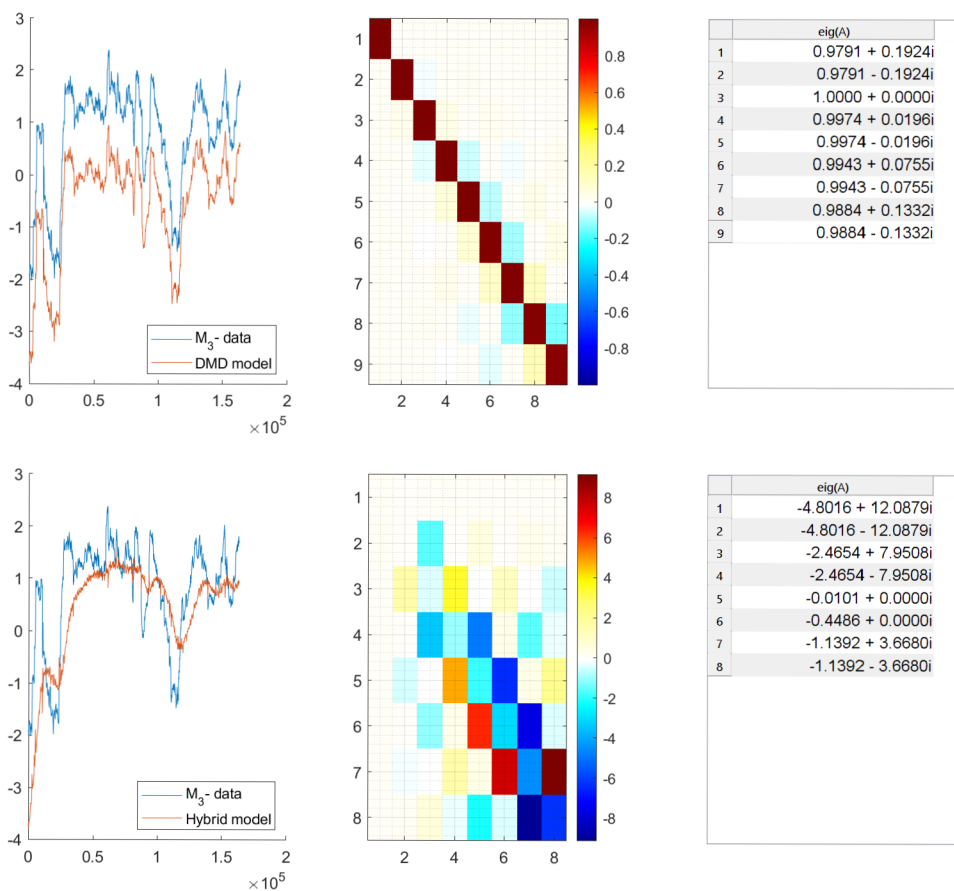


Obrázek 23: Nestabilita SINDy modelu na  $M_1$  datech.

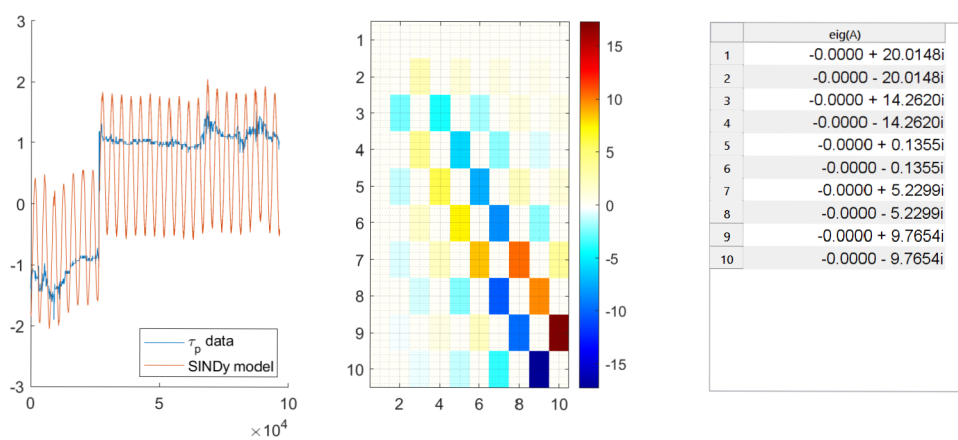


Obrázek 24: Nekvalitní regrese DMD a Hybrid modelů  $M_2$  dat.





Obrázek 25: Posun dat a malá amplituda řešení modelů DMD a Hybrid  $M_3$  dat.

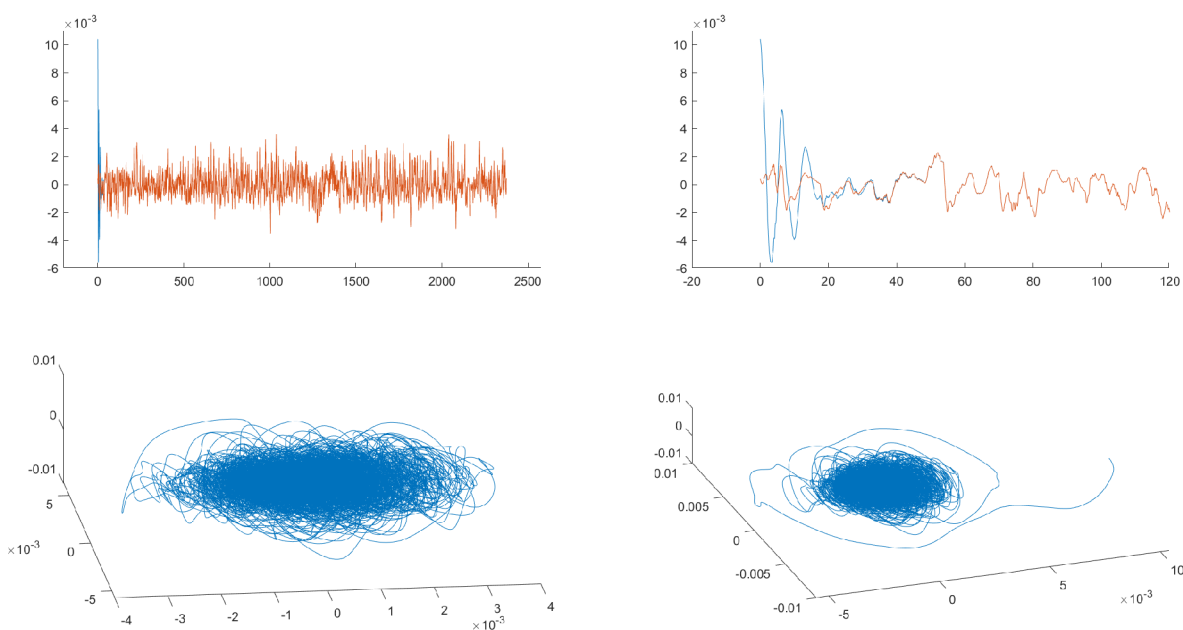


Obrázek 26: Silná „sinusová“ struktura SINDy modelu pro  $\tau_p$  data.

## 5.4 Změna počátečních podmínek

V matematickém aparátu jsme definovali atraktor (viz definice 1.12). Víme tedy, že se jedná o množinu přitahující řešení. V předchozí části jsme stabilitu ověřili analyticky, zkusme toto nyní ověřit numericky. Celý obrázek je rozdělen na čtyři podobrázky. Na prvním podobrázku je vykreslena modře první souřadnice  $y$  – *modelu* s posunutou počáteční podmínkou a oranžově souřadnice s původními počátečními podmínkami. Na druhém podobrázku je vidět přiblížení těchto dvou řešení v okolí počátku. Na třetím podobrázku vidíme rekonstruovaný atraktor a na čtvrtém rekonstruovaný atraktor s posunutou počáteční podmínkou.

*Poznámka.* Výsledky v následujících dvou podkapitolách jsou počítány optimálními modely, které byly vybrány výše.



Obrázek 27: Změněné počáteční podmínky pro bulk data.

Na obrázku vidíme, že řešení se změněnou počáteční podmínkou konverguje k původnímu řešení velmi rychle a plynule na něj navazuje.

Na dalších obrázcích pro ostatní data můžeme vidět stejné chování. Tyto obrázky jsou k nahlédnutí v appendixu.

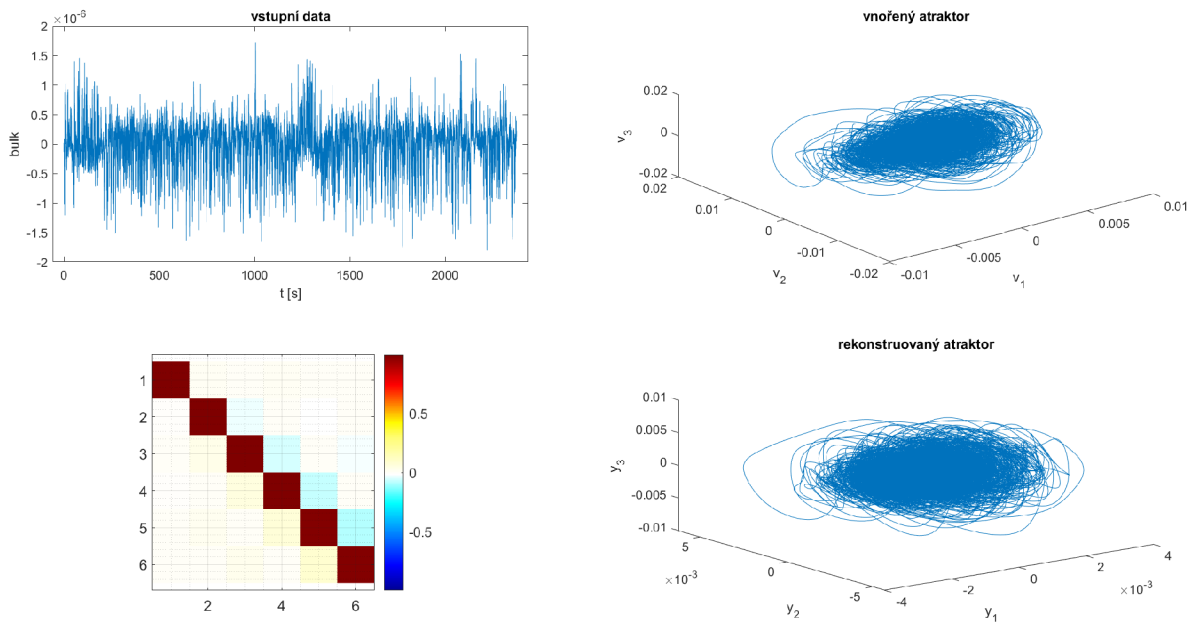
## 5.5 Souhrn výstupů

V následující podkapitole si shrneme výstupy. Na obrázcích jsou vždy zobrazeny datová řada, vnořený atraktor, matice dané soustavy a rekonstruovaný atraktor.

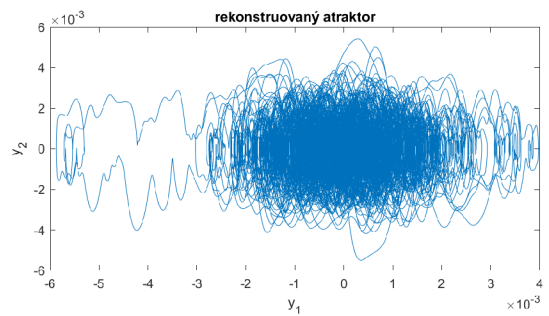
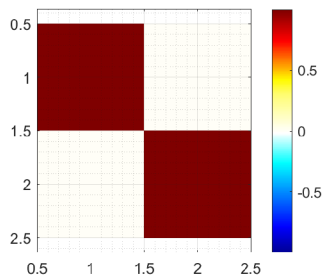
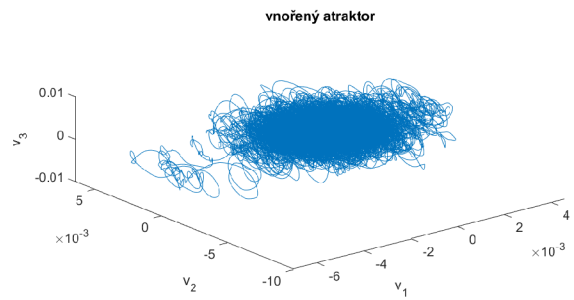
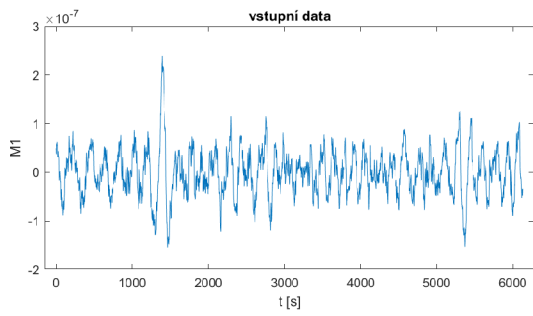
Vidíme, že u datových řad, resp. systémů, které nemají jasnou strukturu, jako jsou právě bulk data,  $M_1$  a  $M_2$ , HAVOK není schopen extrahovat atraktor vnořený, a tudíž tomu ani rekonstruovaný. Respektive daný atraktor je spíše změť čar kolem nějakého rovnovážného bodu, který nemá jasnou strukturu. Naopak u systémů s jasnější strukturou, jako jsou  $M_3$  a  $M_4$ , je schopen najít alespoň obrysy struktury atraktoru. U datové řady

kde je struktura velmi výrazná, jako je  $\tau_p$ , je i atraktor značně strukturalizovaný a lze jasně vidět dvě rovnovážné úsečky, kolem kterých řešení probíhá.

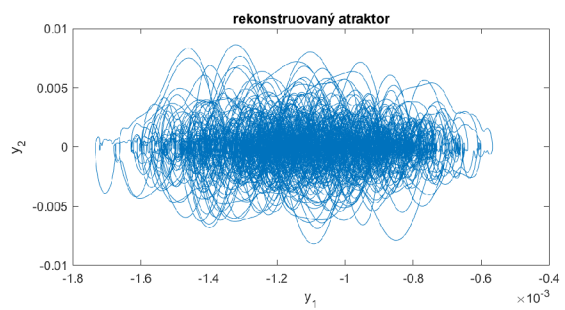
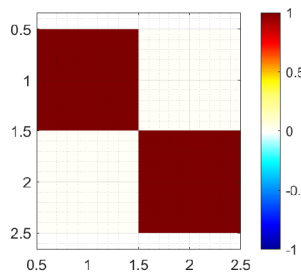
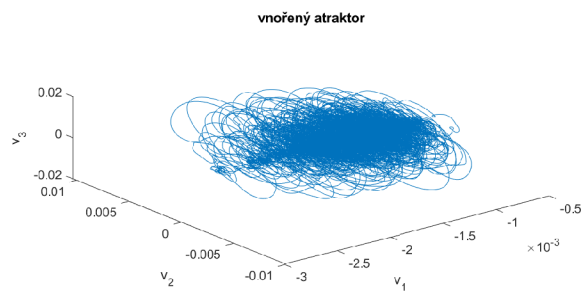
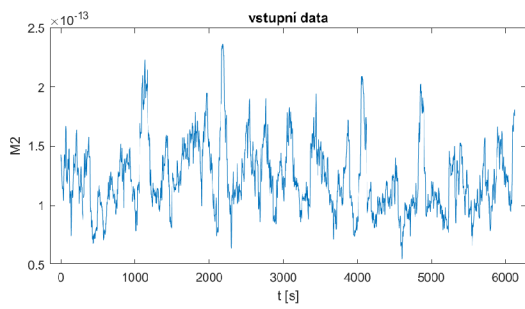
*Poznámka.* Uvědomme si, že vnořujeme-li do dimenze  $r$ , pak má vnořený atraktor právě tuto dimenzi (pomineme-li fraktální dimenzi). Ovšem atraktor rekonstruovaný má dimenzi  $r - 1$ , právě proto, že matice soustavy  $A$  má hodnotu  $r - 1$  a  $r$ . člen je brán jako forcingový. Proto jsou atraktory na následujících obrázcích zobrazeny v jiné dimenzi.



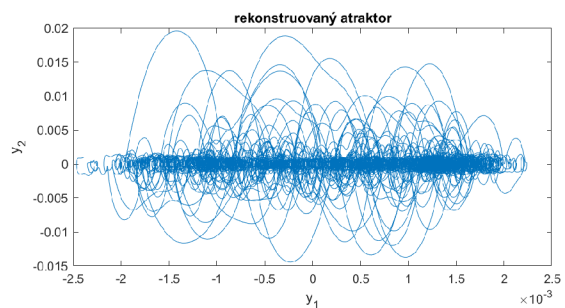
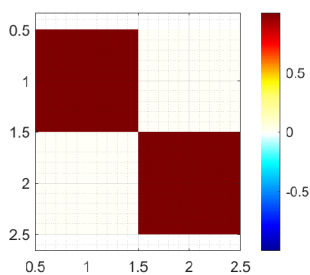
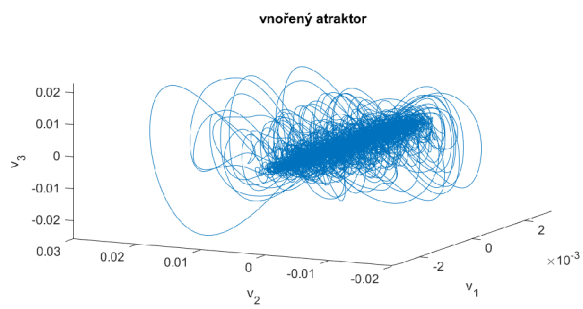
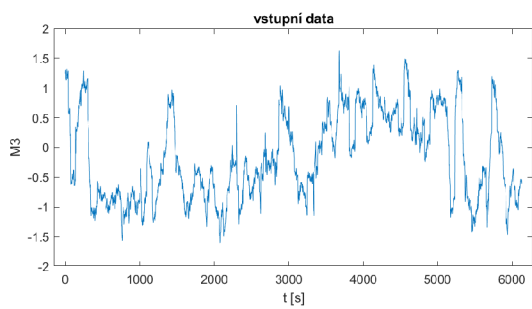
Obrázek 28: Souhrnný obrázek pro bulk data.



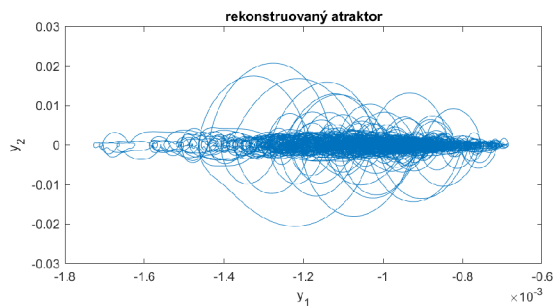
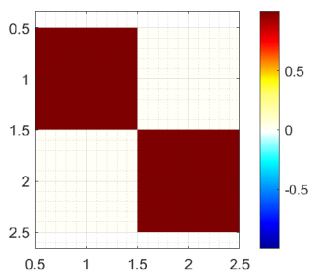
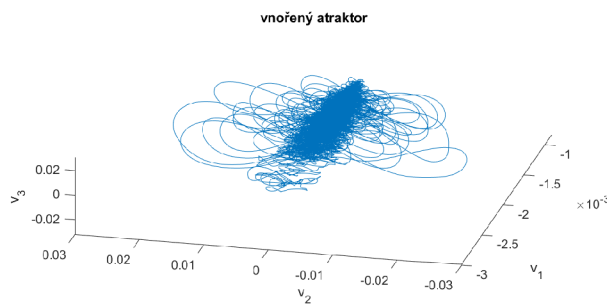
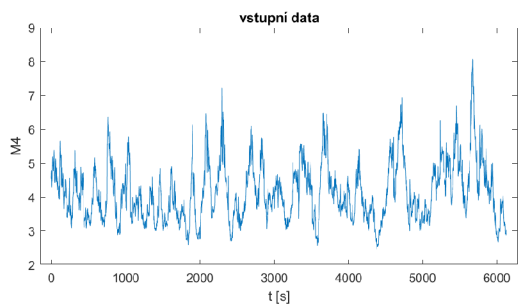
Obrázek 29: Souhrnný obrázek pro  $M_1$  data.



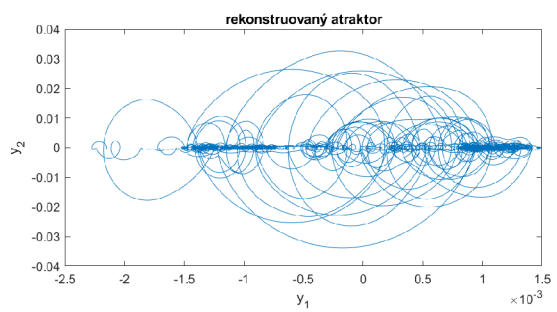
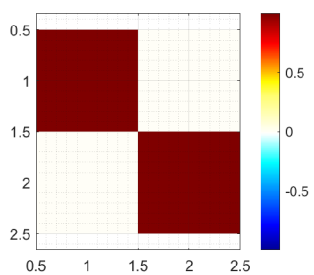
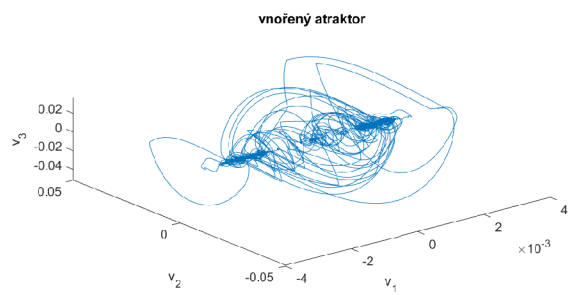
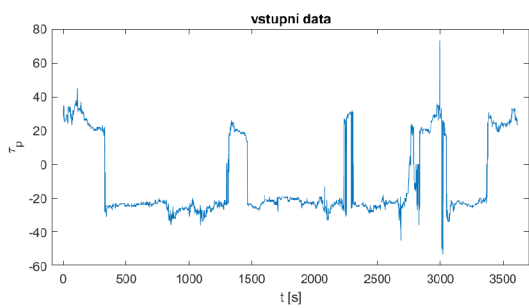
Obrázek 30: Souhrnný obrázek pro  $M_2$  data.



Obrázek 31: Souhrnný obrázek pro  $M_3$  data.



Obrázek 32: Souhrnný obrázek pro  $M_4$  data.



Obrázek 33: Souhrnný obrázek pro  $\tau_p$  data.

## Závěr

V této bakalářské práci jsme se seznámili s několika přístupy identifikace rovnic dynamických systémů na základě empirických datových řad.

Detailně jsme pochopili článek [2] a další související literaturu, pochopili jsme jednotlivé komponenty metody HAVOK, přičemž mnohé z nich nejsou v článku dostatečně vysvětleny. Naučili jsme se používat k článku přiložené kódy v programu Matlab. Tyto jsme rozšířili a byli jsme tak schopni vytvořit obrázky, které nám pomohly s analýzou výstupů HAVOKu. Přitom jsme se seznámili se základními pojmy teorie dynamických systémů.

Navrhli jsme způsob volby vhodných dimenzí vnoření pro aplikaci regresních modelů. Tento problém jsme pojali z pohledu kvality regrese pomocí metody rozdílu čtverců. U složitější pasáže v rámci matematického aparátu, kterou byla Takensova věta o vnoření, opírající se o znalosti topologie, které ale jsou nad rámec bakalářské práce, se nám alespoň podařilo shrnout důležité vlastnosti a pochopit její princip, což jsme ilustrovali na obrázku 3. Dále jsme teoretický úvod rozšířili nejen o pojmy z teorie dynamických systémů, ale také o statistický aparát potřebný pro zpracování dat z konvekce a vytvoření datových řad.

V kapitolách 2 a 3 jsme spojili některé části matematického aparátu, abychom sestavili metodu HAVOK, jejíž fungování jsme si ukázali na Lorenzově systému. Upozornili jsme, ve kterých částech se jaká struktura teoretického aparátu používá (především Takensova věta a Koopmanův operátor), což nebylo v článku [2] dostatečně zdůrazněno. V rámci kapitoly 2 jsme objevili, že krom výpočtu ukázaného na Lorenzově systému (SINDy model) existují i další dva modely, kterými, dle našeho zavedeného značení, jsou DMD model a Hybrid model. Tyto modely bylo nutné identifikovat v kódech, protože v článku [2] tyto nebyly nikterak zmíněny a tedy nebylo objasněno, jak fungují. Základní popis výpočtu těchto modelů je také součástí kapitoly 2.

V kapitole 4 jsme vysvětlili, co je RBC, jak vzniká, kde se vyskytuje a jak se na UPT měří. Popsali jsme důležité struktury v RBC, pohybové rovnice a podobnostní čísla, která ji popisují. Dále jsme se důkladněji podívali na typy dat získávaných z měření RBC na UPT.

V poslední kapitole jsme vybrali metodou čtverců dimenzi vnoření pro modelování dynamiky různých typů časových řad RBC. Zkoumali jsme matice  $A$  soustav rovnic tvořených regresními modely, zjistili jsme výhodnou vlastnost, že se struktura matice se změnou  $r$  nemění, a dále jsme se zaměřili na jejich stabilitu pomocí vlastních čísel. Popsali jsme dva typy pozorované stability a nepřesnosti, které modely získané řešením jejich soustavy se silovým (forcing) členem mají. Pomocí změny počátečních podmínek jsme numerickou simulací potvrdili stabilitu řešení. Na závěr jsme vykreslili vnořené i rekonstruované atraktory jednotlivých datových řad, na čemž se ukázalo, že HAVOK není schopen dobře rozpoznat atraktory ve složitých datových řadách, které nemají jasnou strukturu. Naopak datové řady jako  $\tau_p$ , nebo souřadnice Lorenzova systému jsou pro HAVOK dobře zpracovatelné.

Dalšími směry možného výzkumu v oblasti metody HAVOK je chování forcing členu a jeho dlouhodobá predikce nebo hlubší průzkum vektorů matice  $U$  z SVD rozkladu Hankelovy matice, které jsou v článku [2] diskutovány. Mimo HAVOK jsme získali cenné informace o SINDy, která nabízí spoustu cest výzkumu nejen v rámci RBC. Domnívám se, že zvolení samotné knihovny pro SINDy by bylo hodno samostatné závěrečné práce.

## Reference

- [1] HOLMES, P., LUMLEY, J. L., BERKOOZ, G., ROWLEY, C.W. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012, xvi, 386 s.: il.; 26 cm. ISBN 978-1-107-00825-0.
- [2] BRUNTON, S. L., BRUNTON, B. W., PROCTOR, J. L., KAISER, E., KUTZ, J. N. Chaos as an Intermittently Forced Linear System. Nature Communications [online]. England: Nature Publishing Group, 2017, 8(1), 19-19 [cit. 2021-9-6]. ISSN 2041-1723. Dostupné z: <https://doi.org/10.1038/s41467-017-00030-8>
- [3] HIRSCH, M. W., SMALE, S., DEVANEY, R. L. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 2004, xiv, 417 s. : il. ; 24 cm. ISBN 0-12-349703-5.
- [4] ABARBANEL, H. D. I., BROWN, R., SIDOROWICH J. J., TSIMRING, L. S. The analysis of observed chaotic data in physical systems. Reviews of modern physics [online]. Woodbury, NY: American Physical Society, 1993, 65(4), 1331-1392 [cit. 2022-05-08]. ISSN 0034-6861. Dostupné z: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.65.1331>
- [5] ARBABI, H. Introduction to Koopman operator theory of dynamical systems. Massachusetts, 2020. Dostupné z: <https://www.mit.edu/~arbabi/research/KoopmanIntro.pdf>
- [6] BRUNTON, S. L., BRUNTON, B. W., PROCTOR, J. L., KAISER, E., KUTZ, J. N. Chaos as an Intermittently Forced Linear System. Supplementary note. Nature Communications [online]. England: Nature Publishing Group, 2017, 8(1), 19-19 [cit. 2022-05-06]. ISSN 2041-1723. Dostupné z: <https://doi.org/10.1038/s41467-017-00030-8>
- [7] BRUNTON, S. L., PROCTOR, J. L., KUTZ J. N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. Proceedings of the National Academy of Sciences [online]. 2016, 113(15), 3932-3937 [cit. 2022-05-06]. ISSN 0027-8424. Dostupné z: <https://doi.org/10.1073/pnas.1517384113>
- [8] CHILLA, F, SCHUMACHER. J. New perspectives in turbulent Rayleigh-Bénard convection. The European physical journal. E, Soft matter and biological physics [online]. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2012, 35(7), 90-114 [cit. 2022-05-20]. ISSN 1292-8941. Dostupné z: doi:10.1140/epje/i2012-12058-1
- [9] ČERMÁK, L. Numerické metody [online]. Brno, 2020, 270 s. [cit. 2022-05-08]. Dostupné z: [https://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id\\_file=1444](https://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1444)
- [10] Diffeomorphism. In: The Encyclopedia of Mathematics [online]. Finland [cit. 2022-05-08]. Dostupné z: <https://encyclopediaofmath.org/wiki/Diffeomorphism>
- [11] Edward Norton Lorenz. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-05-08]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Edward\\_Norton\\_Lorenz](https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Norton_Lorenz)

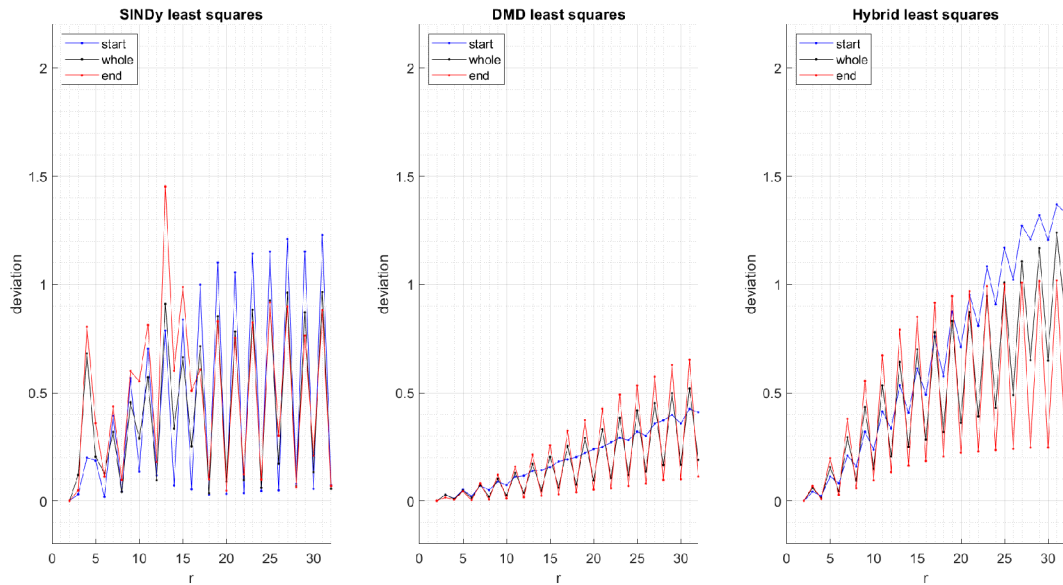


- [12] FRANČŮ, J. Obyčejné diferenciální rovnice: Doplňující text k předmětu Parciální diferenciální rovnice. Brno, 2019. 91 s.
- [13] HUKÉ, J. P. Embedding Nonlinear Dynamical Systems: A Guide to Takens' Theorem. 2006, The University of Manchester, Manchester Institute for Mathematical Sciences, School of Mathematics [online]. 30 s. ISSN 1749-9097. Dostupné z: <http://eprints.maths.manchester.ac.uk/175/1/embed.pdf>
- [14] KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V., DOLEŽAL, V. Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy. Praha: SNTL, 1975, 581 s. : il.
- [15] LESTAS, I. Handout 2: Invariant Sets and Stability. Cambridge, 2009 [cit. 2022-05-06]. Dostupné z: <http://www2.eng.cam.ac.uk/~ic120/4f3/Handout2.pdf>
- [16] LICHTENBERG, A. J., LIEBERMAN, M. A. Regular and chaotic dynamics. Springer-Verlang, 2013. ISBN 0-387-97745-7
- [17] MATHWORKS. skewness:Skewness. <https://www.mathworks.com> [online]. Natick (MA): MathWorks, nevedeno [cit. 2022-05-08]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/stats/skewness.html>
- [18] MATHWORKS. kurtosis:Kurtosis. <https://www.mathworks.com> [online]. Natick (MA): MathWorks, nevedeno [cit. 2022-05-08]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/stats/kurtosis.html>
- [19] MATHWORKS. xcorr:Cross-correlation. <https://www.mathworks.com> [online]. Natick (MA): MathWorks, nevedeno [cit. 2022-05-08]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/xcorr.html>
- [20] MAUROY, A., MEZIĆ, I., SUSUKI, Y. The koopman operator in systems and control: concepts, methodologies, and applications. Cham: Springer, [2020]. Lecture notes in control and information sciences. ISBN 978-3-030-35715-3.
- [21] MUSILOVÁ, V., KRÁLÍK, T., LA MANTIA, M., MACEK, M., URBAN, P., SKRBEK, L. Reynolds number scaling in cryogenic turbulent Rayleigh–Bénard convection in a cylindrical aspect ratio one cell. Journal of fluid mechanics [online]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017, 832, 721-744 [cit. 2022-05-13]. ISSN 0022-1120. Dostupné z: doi:10.1017/jfm.2017.638
- [22] OBORNÁ, E. Stabilní a chaotické chování Lorenzova systému [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 36 s [cit. 2022-05-08]. Vedoucí doc. RNDr. Jan Čermák, CSc. Dostupné z: [https://www.vut.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=103963](https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=103963)
- [23] OKLEŠTĚK, J. Struktura turbulentní konvekce při vysokých hodnotách Rayleighova čísla. Brno, 2012, 66 s. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav teoretické fyziky a astrofyziky. Vedoucí diplomové práce RNDr. Věra Musilová, CSc.
- [24] PACKARD, N. H., CRUTCHFIELD, J. P., FARMER, J.D., SHAW, R.S. Geometry from a time series. Physical review letters [online]. 1980, 45(9), 712-716 [cit. 2022-05-08]. ISSN 0031-9007. Dostupné z: doi:<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.712>

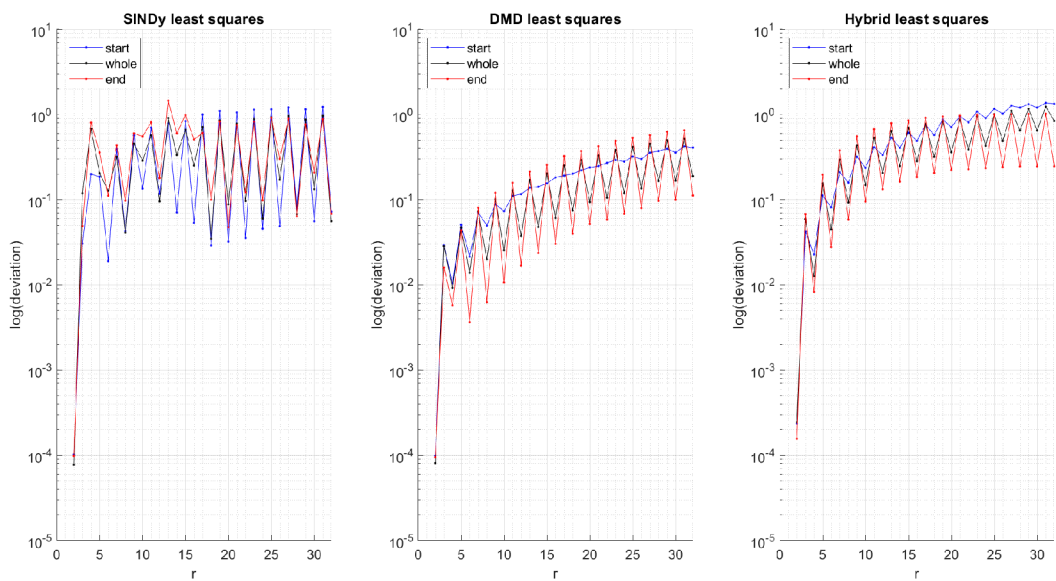
- [25] ROHN, J. Lineární algebra a optimalizace [online]. Praha: Karolinum, 2004, 199 s [cit. 2022-05-16]. ISBN 80-246-0932-0. Dostupné z: <http://uivtx.cs.cas.cz/~rohn/other/lascript.pdf>
- [26] SAUER, T, YORKE, J. A., CASDAGLI, M. Embedology. Journal of statistical physics [online]. Heidelberg: Springer, 1991, 65(3-4), 579-616 [cit. 2022-05-19]. ISSN 0022-4715. Dostupné z: doi:10.1007/BF01053745
- [27] TU, H. J., ROWLEY, C. W., LUCHTENBURG, D. M., BRUNTON S. L., KUTZ J. N. On dynamic mode decomposition: Theory and applications. Journal of Computational Dynamics [online]. 2014, 1(2), 391-421 [cit. 2022-05-06]. ISSN 2158-2505. Dostupné z: <https://doi.org/10.3934/jcd.2014.1.391>
- [28] URBAN, P. Heliový kryostat pro studium turbulentního proudění při přirozené konvekci [online]. 2009, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 67 s. Vedoucí disertační práce RNDr. Věra Musilová, CSc [cit. 2022-05-08]. Dostupné z: [https://www.vut.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=24078](https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=24078)

# Appendix: obrázky ze zpracování dat

## Metoda čtverců

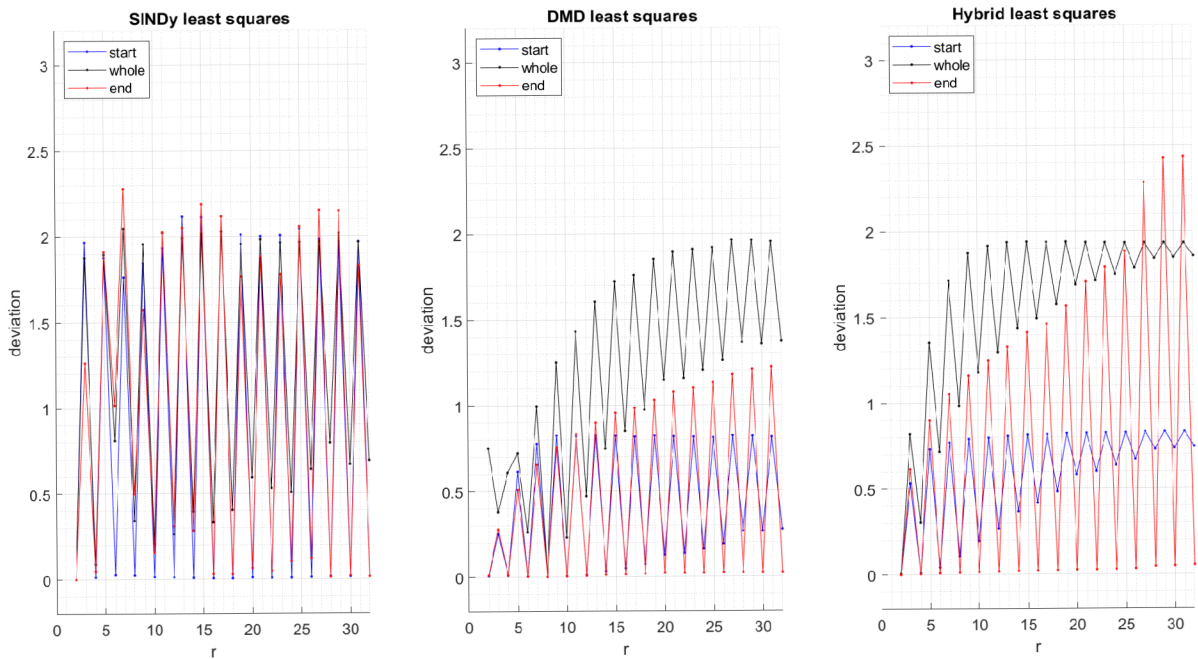


(a) Lineární škála.

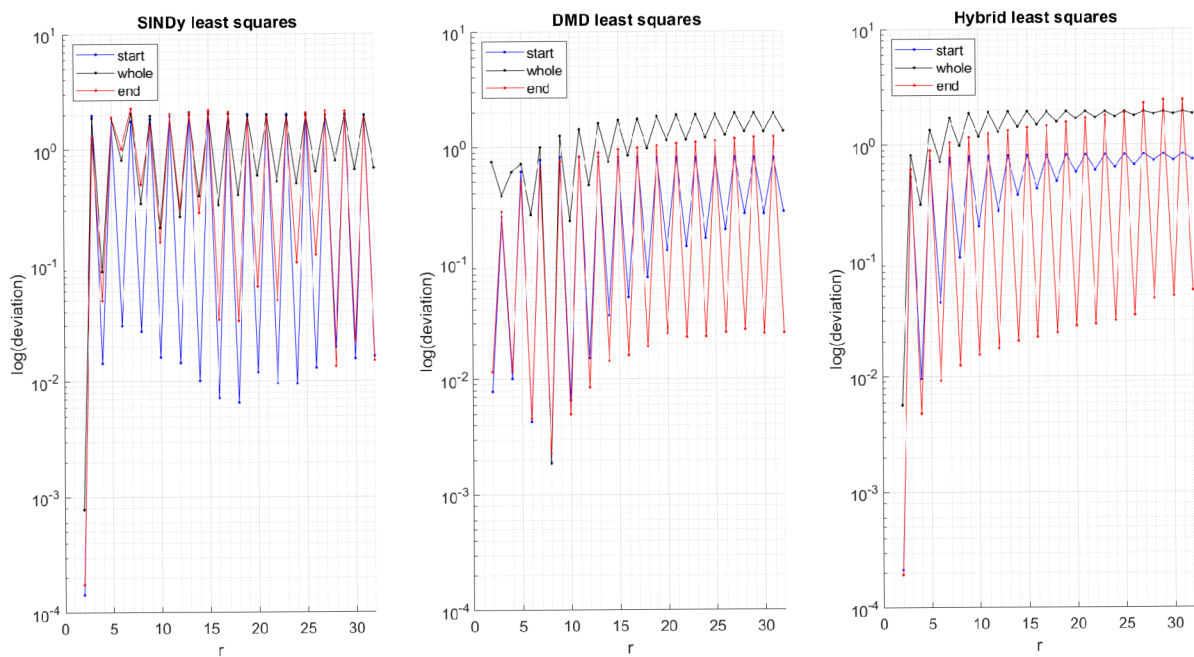


(b) Logaritmická škála.

Obrázek 34: MČ na zpracování pomocí šikmosti ( $M_1$ ).

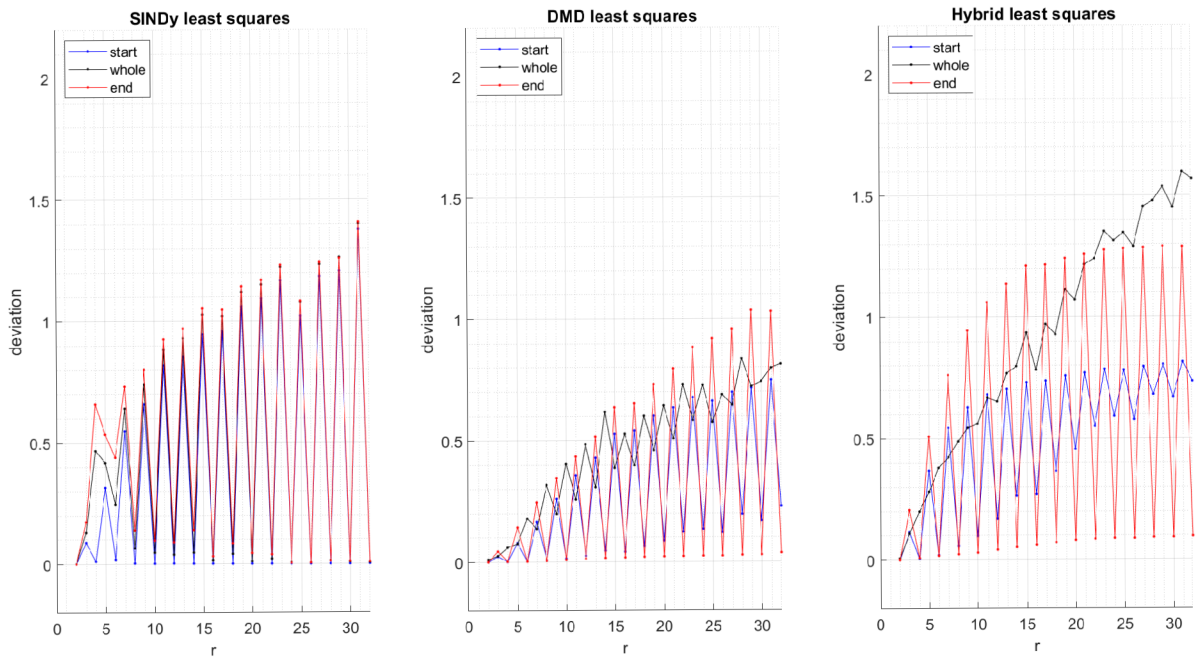


(a) Lineární škála.

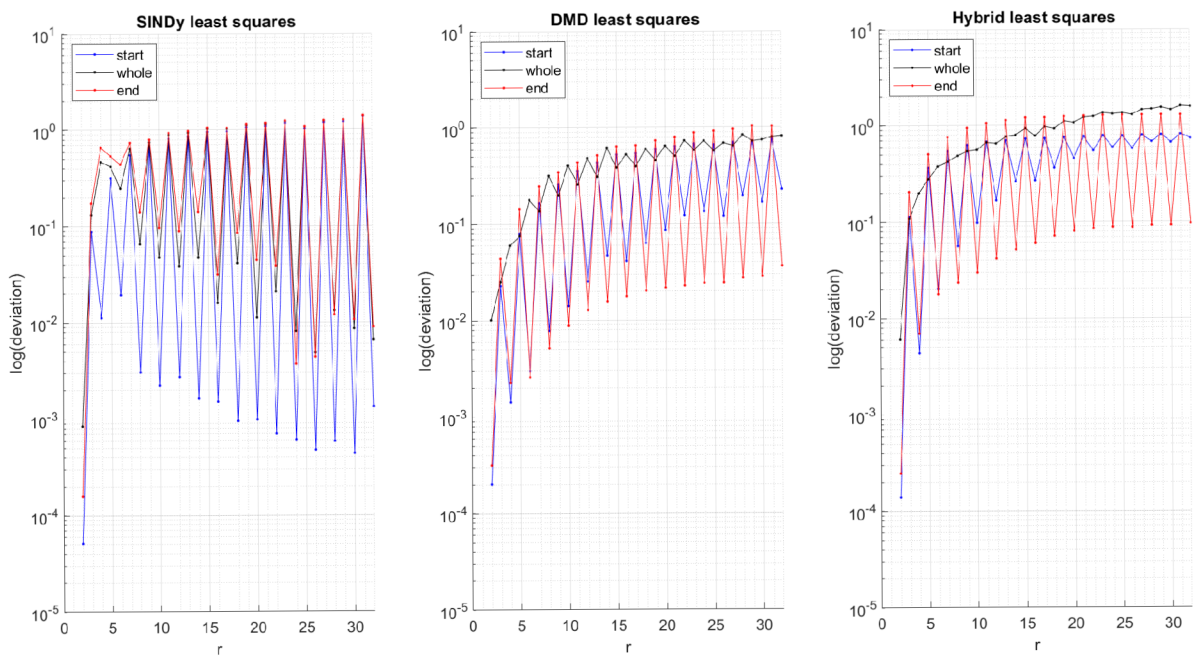


(b) Logaritmická škála.

Obrázek 35: MČ na zpracování pomocí šikmosti ( $M_2$ ).



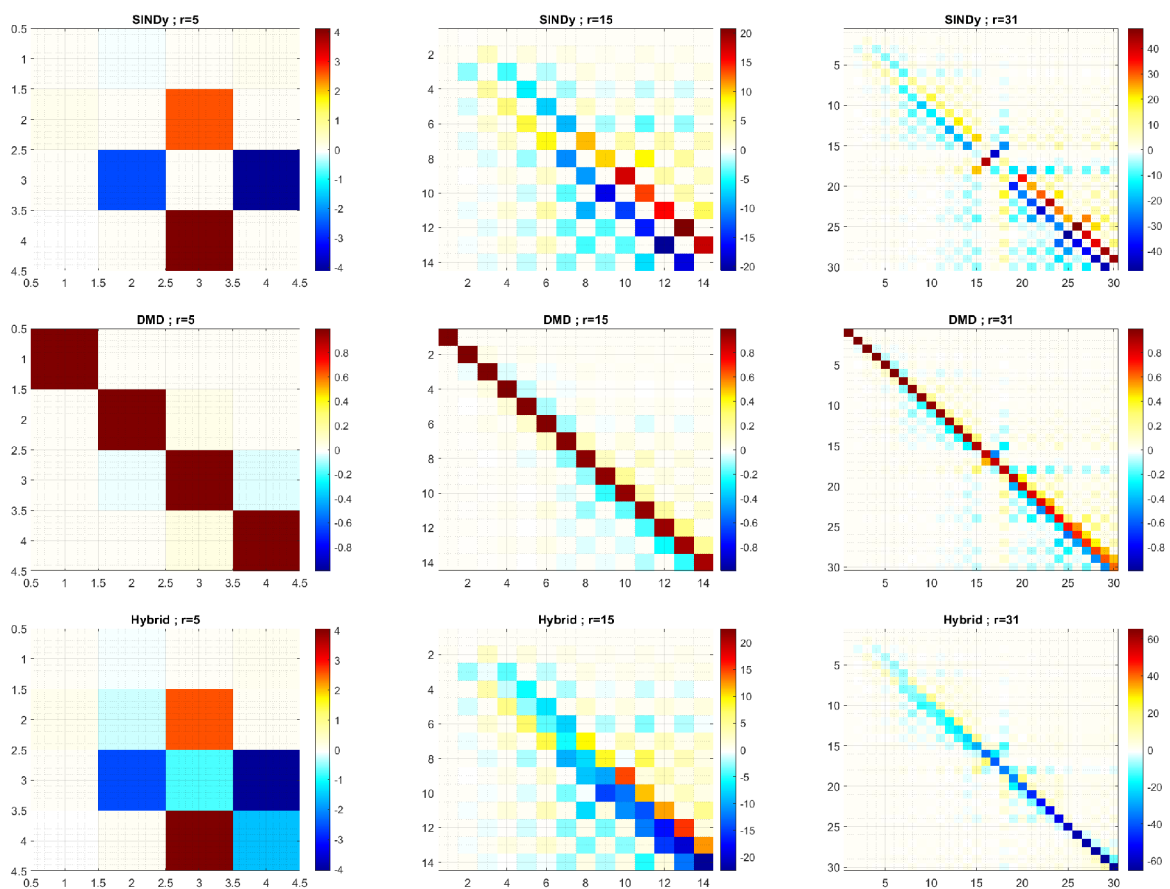
(a) Lineární škála.



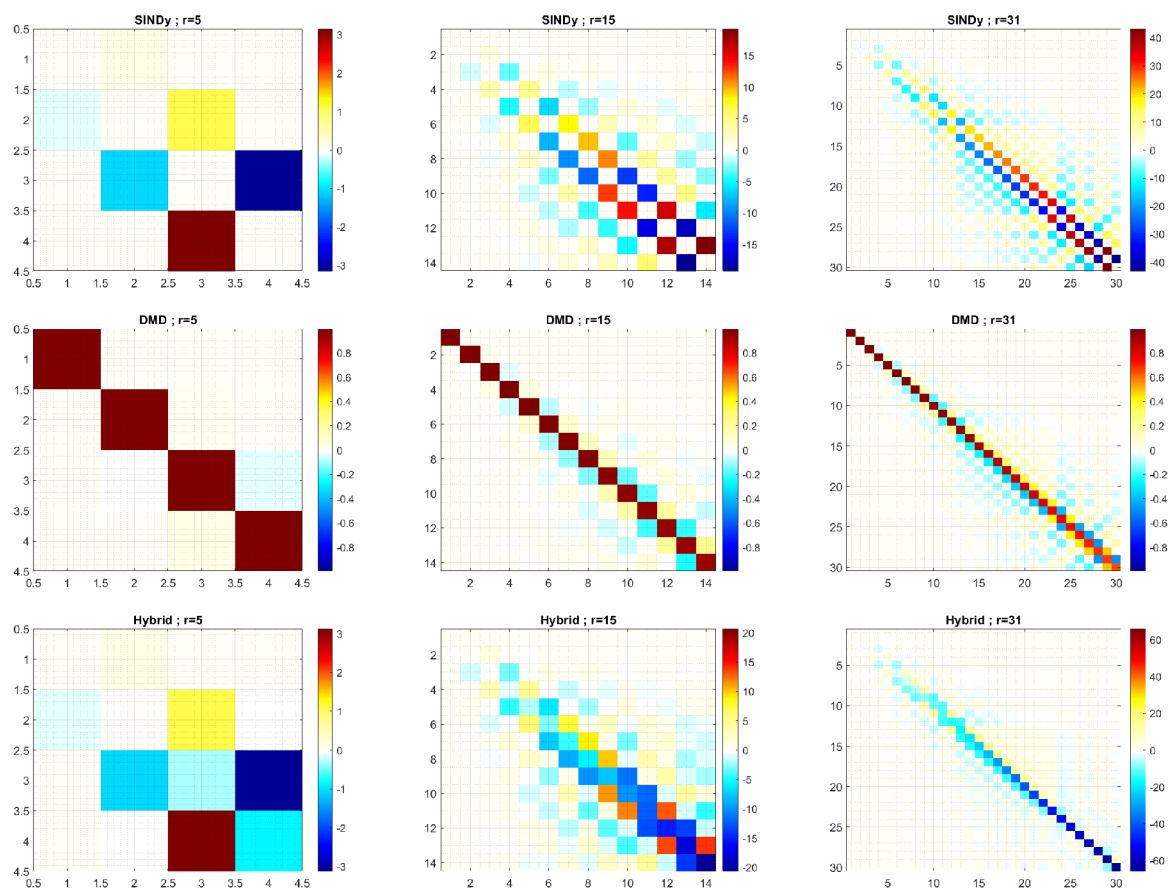
(b) Logaritmická škála.

Obrázek 36: MČ na zpracování pomocí šikmosti ( $M_3$ ).

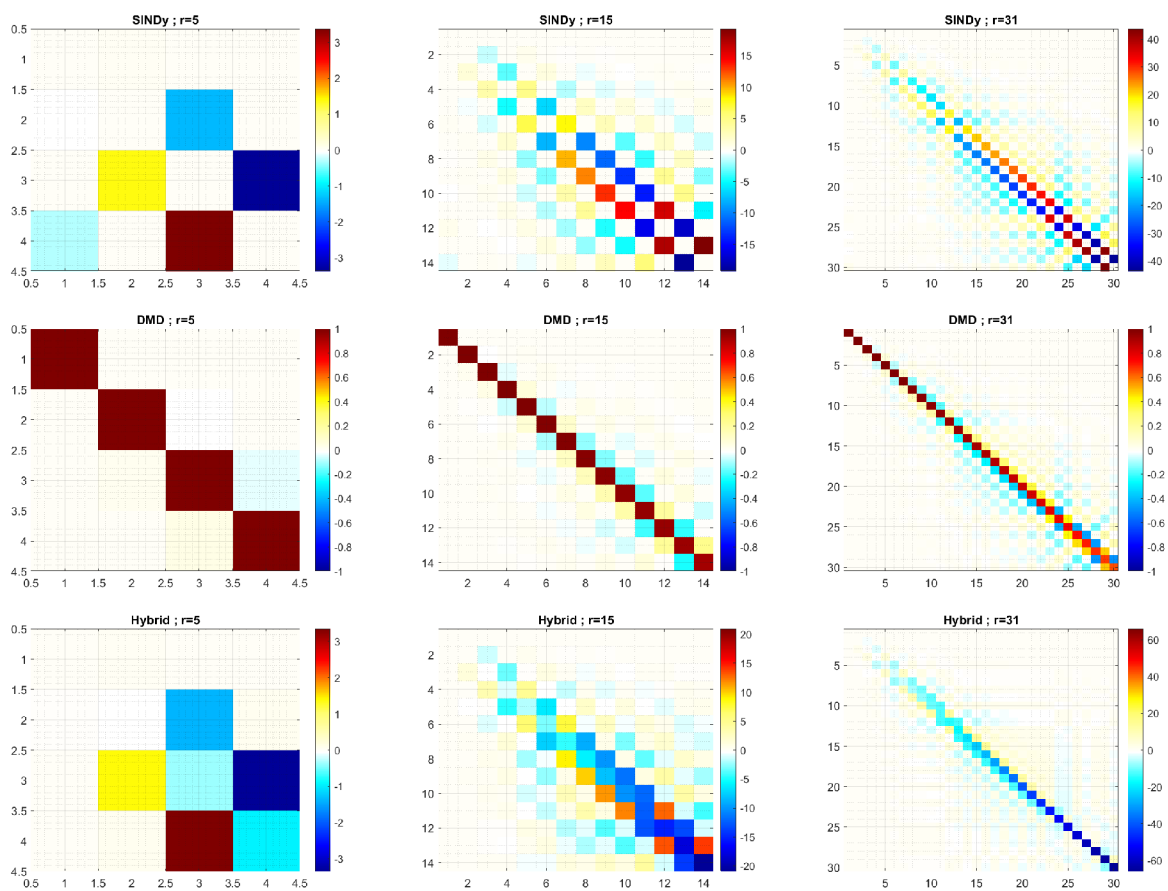
# Matice soustavy A



Obrázek 37: Matice soustav pro  $\tau_p$  data.

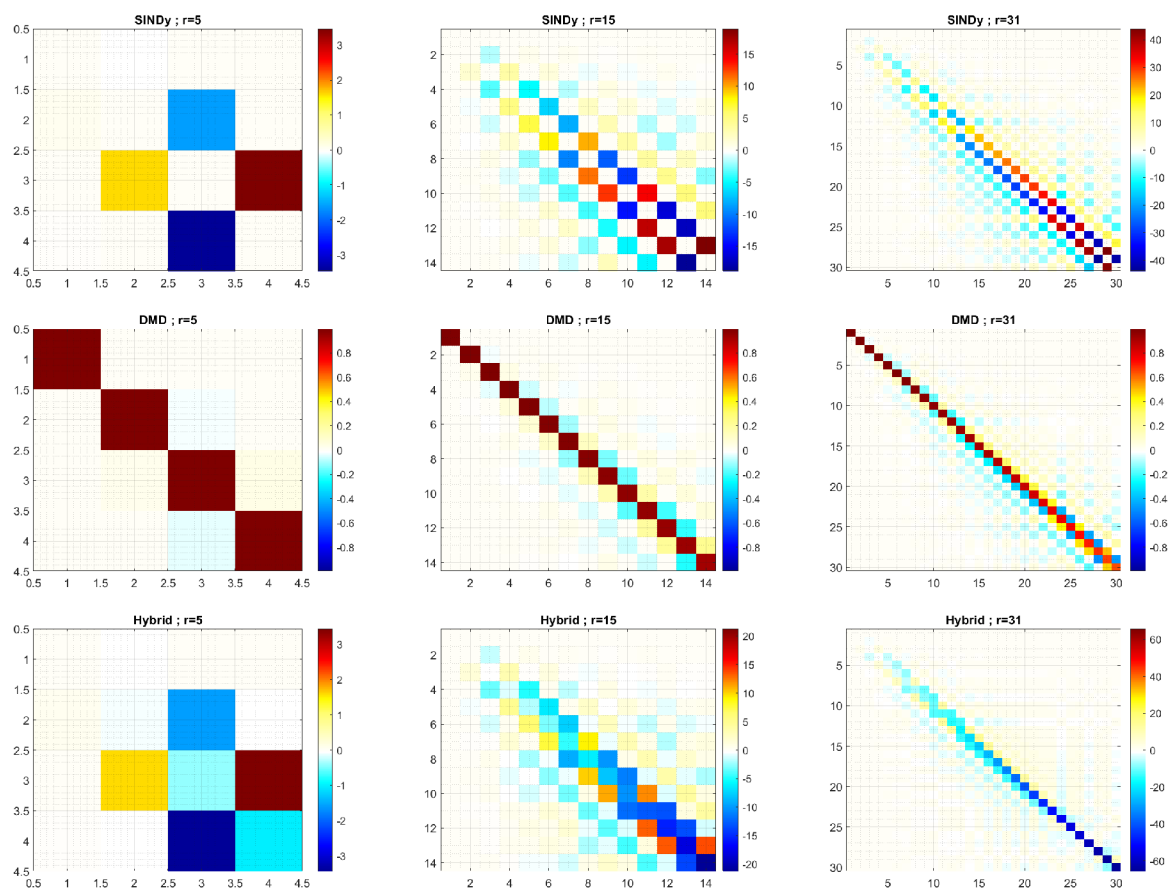


Obrázek 38: Matice soustav pro data střední hodnoty ( $M_1$ ).

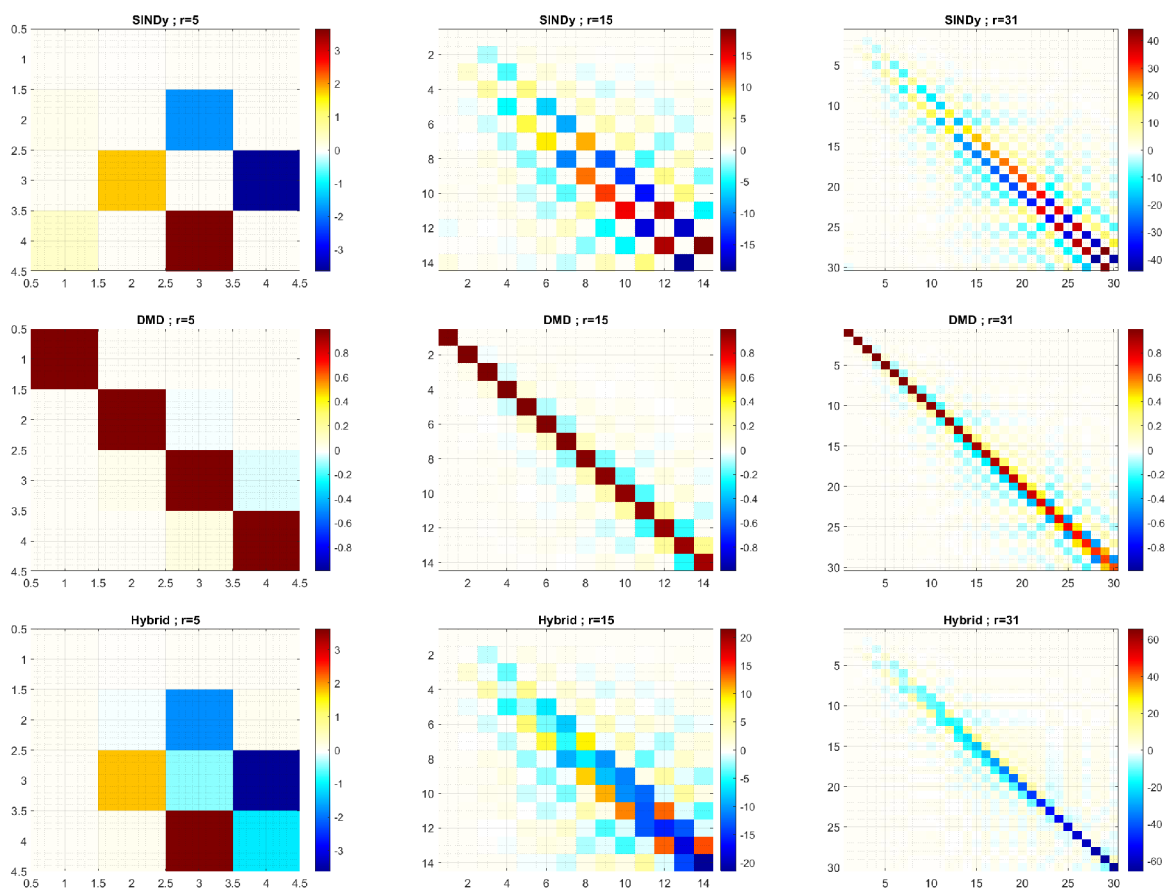


Obrázek 39: Matice soustav pro data střední hodnoty ( $M_2$ ).



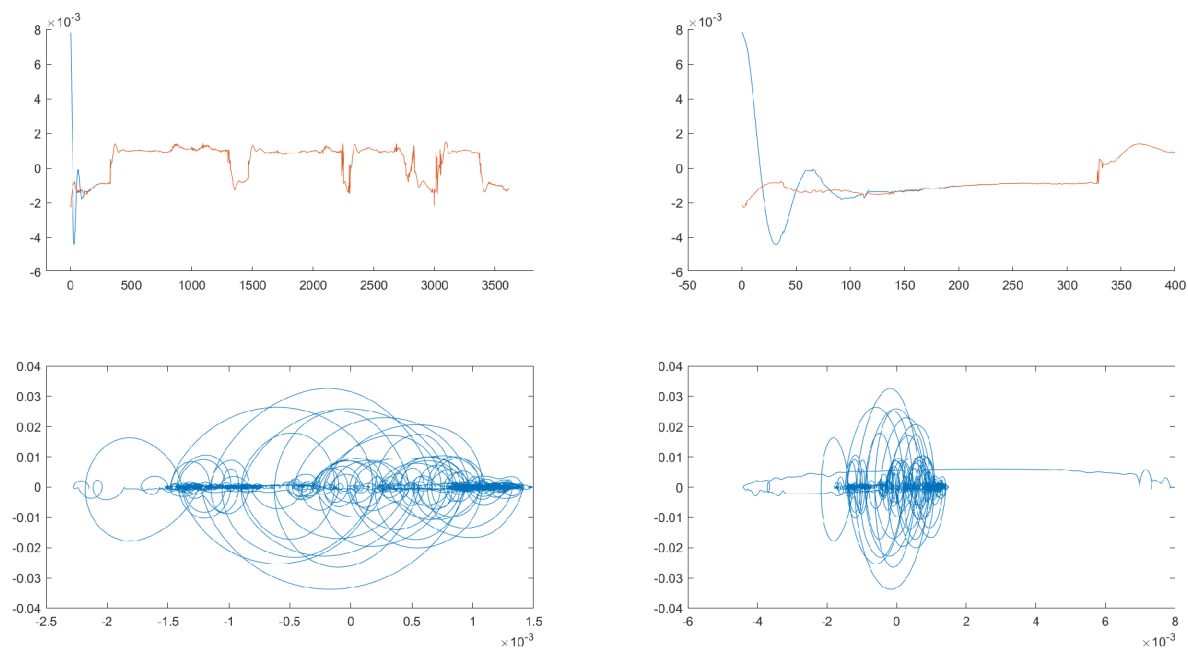


Obrázek 40: Matice soustav pro data šikmosti ( $M_3$ ).

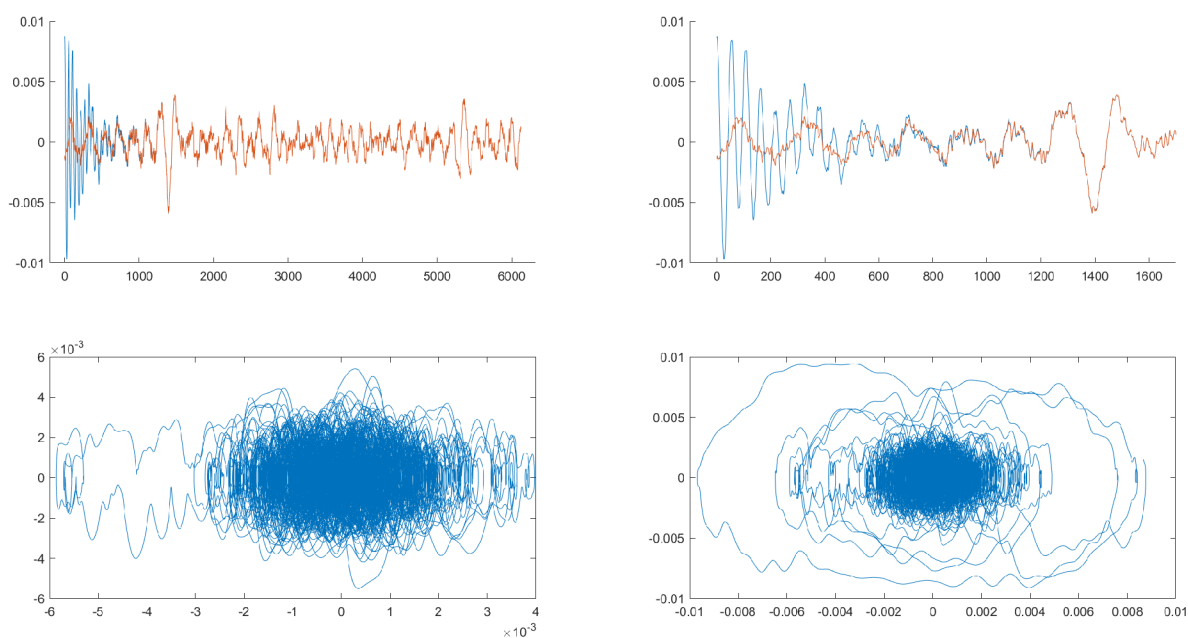


Obrázek 41: Matice soustav pro data šikmosti ( $M_4$ ).

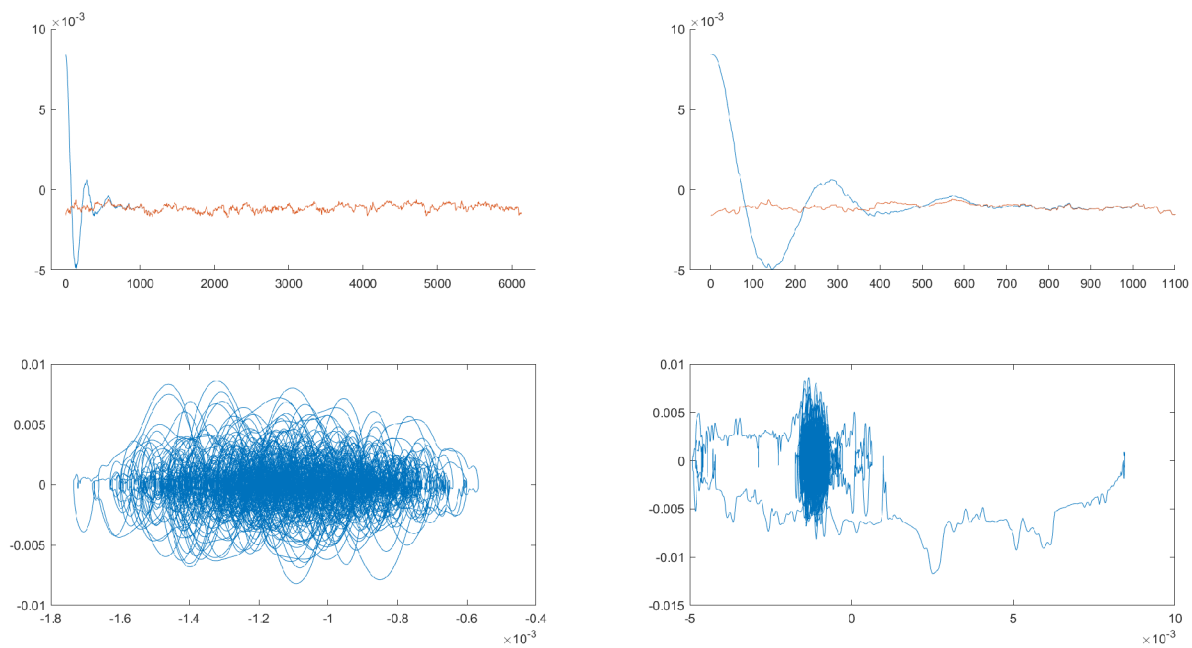
## Změna počátečních podmínek



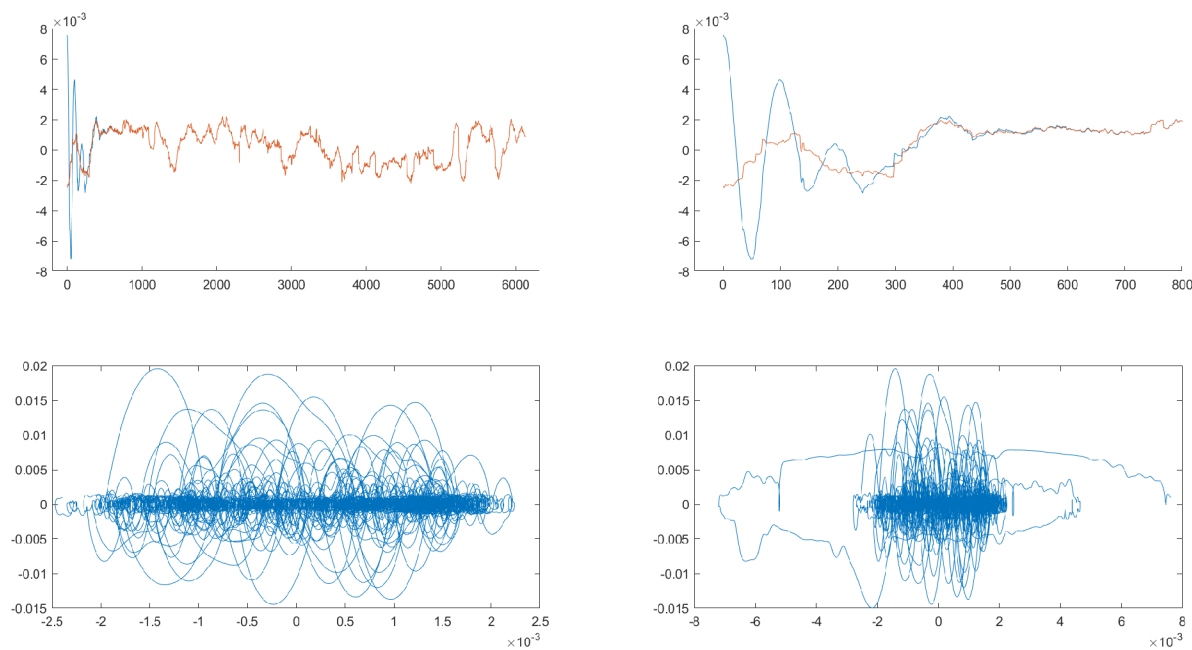
Obrázek 42: Změněné počáteční podmínky pro  $\tau_p$  data.



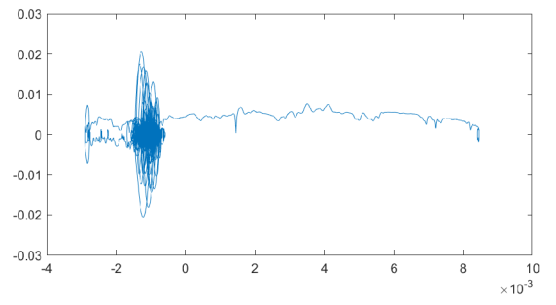
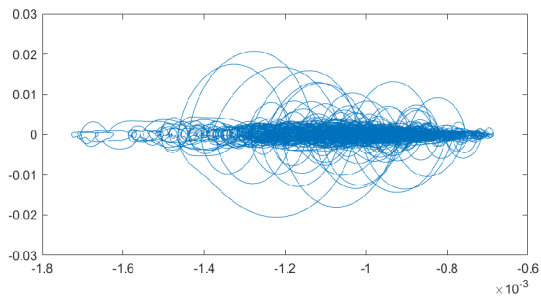
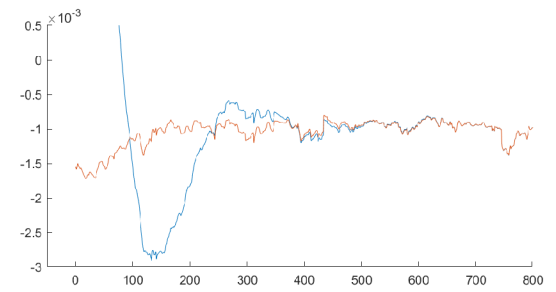
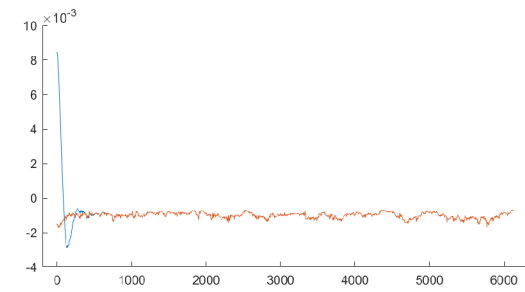
Obrázek 43: Změněné počáteční podmínky pro  $M1$  data.



Obrázek 44: Změněné počáteční podmínky pro  $M2$  data.



Obrázek 45: Změněné počáteční podmínky pro  $M3$  data.



Obrázek 46: Změněné počáteční podmínky pro  $M4$  data.