Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a biomatematiky

Periodická řešení pro tlumené kmity

Bakalářská práce

Autor: Miroslav Holub

Vedoucí práce: Mgr. Jan Eisner, Dr.

České Budějovice, 2013

Bibliografické údaje

Holub M., 2013: Periodická řešení pro tlumené kmity. [Periodic solutions of damped oscillations] - 34 p., Faculty of Science, The University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

Hlavním tématem bakalářské práce je kvalitativní analýza lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Práce je rozdělena na pět částí. Úvod je věnován kmitavému pohybu a odvození rovnice matematického kyvadla a pružiny. Ve druhé části jsou shrnuty základní poznatky z literatury, které jsou potřebné v dalších částech. Ve třetí části je rozebrán model kmitů hmotného bodu na pružině. V předposlední části jsou rozebrána samotná řešení této rovnice v závislosti na parametrech úlohy. V závěru práce jsou nastíněny některé otevřené problémy existence periodických řešení diferenciálních rovnic.

Annotation

The main topic of the Thesis is qualitative analysis of linear differential equations of second order. The Thesis is divided into five parts. At the first part there are explained basic type of oscillators (mathematical pendulum and spring). The second part is devoted to definitions and theorems, which are necessary in the study of differential equations. The third part shows the model of linear differential equation of second order. The solution of this equation depending on various parameters is indicated in the fourth part. Some open questions are formulated in the last part.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s §47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdání textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice, 13. prosince 2013

....

Miroslav Holub

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Janu Eisnerovi, Dr. za pravidelné konzultace při vypracování práce, za cenné rady, které mi vždy ochotně poskytl a za jeho trpělivost. Dále děkuji své rodině a přátelům za podporu při psaní této práce.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice jsou rovnice, kde se vyskytují derivace funkcí. Pomocí diferenciálních rovnic lze popsat děje, které se denně objevují v přírodě. Řešeními diferenciálních rovnic jsou funkce, které popisují vlastnosti oněch dějů. Umění řešit diferenciální rovnice znamená lepší porozumění přírodním a společenským procesům a celému světu vůbec.

1.2 Fyzikální motivace

Kmitavý pohyb patří mezi jeden z nejběžnějších druhů pohybů. Takovýto pohyb může modelovat spoustu fyzikálních dějů. Řada přístrojů je založena na problémech souvisejících s kmitavými jevy, jako například vysílače, přijímače, osciloskopy atd. Všechna zařízení, která mohou bez vnějšího působení kmitat, nazýváme oscilátory. Mezi nejjednodušší oscilátory řadíme kyvadlo a pružinu.

1.2.1 Odvození rovnice kyvadla

Budeme postupovat podobně jako v [11]. Mějme hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nehmotném závěsu délky ℓ. Chceme najít závislost dráhy s hmotného bodu na čase t. Z Newtonova zákona síly vyplývá, že

$$ms''(t) = -mg \sin \varphi(t), \tag{1.1}$$

kde $\varphi(t)$ je výchylka kyvadla od rovnovážné svislé polohy. Jelikož se hmotný bod pohybuje po kružnici, máme

$$s(t) = \ell\varphi(t).$$

Po dosazení za $s(t)$ do (1.1) postupně dostáváme

$$m\ell\varphi''(t) = -mg\sin\varphi(t),$$

$$\varphi''(t) + \frac{g}{\ell}\sin\varphi(t) = 0.$$

Jedná se o nelineární diferenciální rovnici druhého řádu, protože $\sin\varphi$ je nelineární funkce proměnné φ. Mnohem jednodušeji lze řešit místo nelineárního problému jeho tzv. linearizaci (zjednodušení úlohy, ve fyzice běžně používáné). Linearizaci v našem případě provedeme tak, že hodnotu funkce $\sin\varphi$ nahradíme jejím argumentem φ. Dostaneme tak úlohu

$$\varphi''(t) + \omega^2\varphi(t) = 0, \tag{1.2}$$

kde

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

nezávisí na čase t. Úloha (1.2) je *lineární* diferenciální rovnicí druhého řádu. Tímto krokem se ale dopouštíme jisté chyby, která je však pro malé kyvy (pro malé hodnoty φ) zanedbatelná.

Namísto rovnice $\varphi''(t) + \frac{g}{h}\sin\varphi(t) = 0$ budeme tedy řešit rovnici (1.2). Následující kroky vedoucí k „řešení“ úlohy (1.2) slouží jako motivace k tomu, co bude rigorózně spočítáno v Kapitole 3.

Zkusíme hledat řešení ve tvaru $\varphi(t) = e^{rt}$. Druhá derivace této funkce je $\varphi''(t) = r^2e^{rt}$. Po dosazení do (1.2) dostaneme tzv. charakteristickou rovnici ve tvaru

$$r^2e^{rt} + \omega^2e^{rt} = 0,$$

kterou postupně vyřešíme vzhledem k r

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

$$r_1 = \omega i,$$

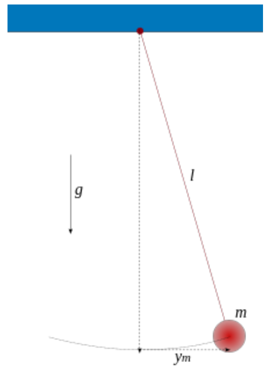
$$r_2 = -\omega i.$$

Řešení je tedy

$$\varphi(t) = c_1e^{\omega it} + c_2e^{-\omega it}.$$

V reálném tvaru

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$



Obrázek 1.1: Matematické kyvadlo, [O1]

1.2.2 Pružina

Na podobnou rovnici jako je (1.2) vede studium pohybu hmotného bodu na pružině. Pohyb pružiny, na které je zavěšeno závaží, patří do oblasti mechanického kmitání. Vlastnosti takovéto pružiny jsou dány hmotností tělesa m a tuhostí pružiny k (viz. [4]). Zavěsíme-li na pružné vlákno délky ℓ závaží o hmotnosti m, zvětší se jeho délka o $\Delta\ell$. Je-li deformace pružná, tj. splňuje-li tzv. Hookův zákon (viz. níže), je tíhová síla přímo úměrná tíze zavěšeného tělesa

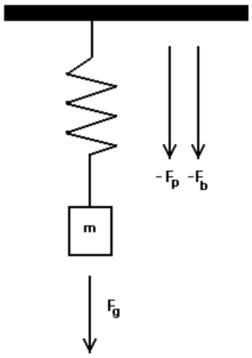
$$mg = k\Delta\ell$$

s konstantou úměrnosti $k = \dfrac{mg}{\Delta\ell}$, která se nazývá tuhost pružiny a představuje sílu nutnou k jednotkovému vychýlení pružiny.

1.2.3 Hookův zákon pro pružnou deformaci

R. Hook, 1676 [12] Při působení deformujících sil se elastické těleso (např. guma, pružina) prodlouží z původní délky ℓ_1 na větší délku ℓ_2. Rozdíl těchto délek nazýváme absolutním prodloužením. Platí pro něj $\Delta\ell = \ell_2 - \ell_1$. Toto prodloužení je závislé na počáteční délce ℓ_1 tělesa. Pro pružnou deformaci tahem je normálové napětí přímo úměrné relativnímu prodloužení.

V běžném životě si lze tento zákon představit tak, že v případě pružné deformace nemůže nikdy dojít k nevratným změnám délky tělesa. Zdůrazněme, že Hookův zákon v této (lineární) podobě platí jen pro malé deformace tělesa.



Obrázek 1.2: Pružina, [O2]

1.3 Zavedené značení

V celém textu se vyskytují následující symboly:

$\mathbb{R}$ .... množina reálných čísel

I .... interval I

$D(f)$ .... definiční obor funkce f

D .... diskriminant charakteristické rovnice

D_A, D_B, D_S .... determinant příslušné matice

W .... Wronského matice

FS .... fundamentální systém řešení

c_1, c_2 .... koeficienty v obecném řešení

A, B .... koeficienty speciálního tvaru partikulárního řešení

R .... rozdíl $r_1 - r_2$

T .... perioda T

$\subset$ .... podmnožina

$\in$ .... je prvkem

$\{\cdots\}$ .... množina daná výčtem.

1.4 Členění práce

Práce je rozdělena na pět kapitol. Úvod je věnován kmitavému pohybu a odvození rovnice matematického kyvadla a pružiny. Ve druhé části jsou shrnuty základní poznatky z literatury, které jsou potřebné v dalších částech. Ve třetí části je rozebrán model kmitů hmotného bodu na pružině, který byl odvozen v úvodní kapitole. V předposlední části jsou rozebrána samotná řešení této rovnice v závislosti na parametrech úlohy (velikost tření, úhlová frekvence kmitů, počáteční výchylka a počáteční rychlost). V závěru jsou uvedeny možnosti dalšího zkoumání problematiky existence periodických řešení pro diferenciální rovnice.

Při studiu budeme využívat materiálů uvedených v seznamu literatury v závěru práce. Definice a tvrzení v Kapitole 2 jsou převzaty převážně z [10] a [7]. Plodnou inspirací pro výběr konkrétních tvrzení byly přednáškové materiály [8] a [9]. Odvození lineární rovnice druhého řádu ve fyzikálních případech bylo čerpáno z [11] a [4].

Kapitola 2

Definice a věty převzaté z literatury

V této části budeme definovat některé pojmy a připomeneme některá tvrzení, která jsou nezbytná v dalších částech práce. Pojmy i tvrzení jsou převzaté z literatury a nebudeme je dokazovat. Značení jednotlivých symbolů jsme však sjednotili.

2.1 Homogenní a nehomogenní rovnice druhého řádu

Definice 2.1.1 *[1, Kapitola 10, Definice 3] Diferenciální rovnice*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \tag{2.1}$$

kde $a \neq 0$*,* b*,* c *jsou daná čísla,* y *neznámá funkce (proměnné* x*) a* y'*,* y'' *její derivace (podle* x*), se nazývá lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty bez pravé strany (homogenní rovnice).*

Poznámka 2.1.2 *V případě, že nemůže dojít k mýlce, lze proměnnou* x *v zápisech rovnic vynechat. Rovnici (2.1) lze tedy zapsat ve tvaru*

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Definice 2.1.3 *[1, Kapitola 10, Definice 5] Diferenciální rovnice*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \tag{2.2}$$

kde $a \neq 0$*,* b*,* c*, jsou daná čísla,* f *daná spojitá funkce proměnné* x*, jejíž hodnota není pro všechna* x *rovna nule, a* y *neznámá funkce téže proměnné* x*, přičemž* y'*,* y'' *značí derivace* *funkce y podle x, nazývá se lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou (nehomogenní rovnice). Jsou-li v rovnici (2.1) tytéž koeficienty a, b, c jako v rovnici (2.2), říkáme, že homogenní rovnice (2.1) přísluší k rovnici (2.2).*

Poznámka 2.1.4 *Obdobně jako v Poznámce (2.1.2) budeme rovnici (2.2) psát ve formě bez explicitního výskytu proměnné x u řešení y. Rovnici (2.2) lze tedy zapsat ve tvaru*

$$ay'' + by' + cy = f.$$

Definice 2.1.5 *[6, Definice 3.8] Polynom*

$$p(r) = r^2 + ar + b \tag{2.3}$$

nazveme charakteristickým polynomem rovnice (2.2) a rovnici

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{2.4}$$

nazveme charakteristickou rovnicí diferenciální rovnice (2.2).

Tvrzení 2.1.6 *[6, Věta 3.2] Funkce e^{rx} je řešením rovnice (2.1) právě tehdy, když r je kořenem charakteristické rovnice (2.4).*

Tvrzení 2.1.7 *[6, Věta 3.3] Má-li charakteristická rovnice (2.4) dva navzájem různé kořeny r_1, r_2, pak funkce $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2.1). Jinými slovy lze každé řešení rovnice (2.1) získat jako lineární kombinaci nezávislých funkcí $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$.*

Tvrzení 2.1.8 *Má-li kvadratická rovnice s reálnými koeficienty komplexní kořen z, komplexně sdružené číslo $\overline{z}$ je také kořenem této rovnice.*

Je-li kořenem charakteristické rovnice příslušející lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty komplexní číslo $z = a + bi$, potom funkce $e^{(\alpha+\beta i)x}$ je jejím řešením, a tedy i funkce $e^{(\alpha-\beta i)x}$ je také řešením. Platí

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

2.2 Vlastnosti řešení

Definice 2.2.1 *Řešením nebo také integrálem diferenciální rovnice*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nazveme každou funkci $y = g(x)$, která v daném intervalu I vyhovuje identicky této rovnici.

Definice 2.2.2 *Cauchyova úloha.*
Uvažujeme obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu ve tvaru

$$y^{(n)}(g) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \tag{2.5}$$

Mějme dán libovolný, ale pevně daný bod $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Úloha určit řešení této rovnice, které vyhovuje n počátečním podmínkám

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{2.6}$$

se nazývá Cauchyova úloha.

Tvrzení 2.2.3 *[7, Věta 9.5] Existence řešení.*
Nechť $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině a nechť bod $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ patří do definičního oboru této funkce. Potom Cauchyova úloha (2.5), (2.6) má právě jedno maximální řešení.

2.3 Lineární homogenní a nehomogenní rovnice n-tého řádu

Nechť $a_1, \dots, a_n, f$ jsou spojité funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Uvažujeme na I diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0, \tag{2.7}$$

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x). \tag{2.8}$$

Tvrzení 2.3.1 *[2, kapitola 2.2, Theorem 1] Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou řešení homogenní diferenciální rovnice (2.7) na intervalu I. Pak platí, že libovolná lineární kombinace těchto řešení je řešením homogenní diferenciální rovnice (2.7).*

Tvrzení 2.3.2 *Každé řešení rovnice (2.8) dostaneme, když k některému jejímu partikulárnímu řešení přičteme vhodné řešení rovnice (2.7).*

Poznámka 2.3.3 *Lze tedy říci, že obecné řešení rovnice (2.8) dostaneme, známe-li jedno její partikulární řešení a přičteme-li k němu obecné řešení příslušné homogenní rovnice (2.7).*

Budeme se tedy snažit stanovit jedno partikulární řešení rovnice (2.8) — to nám k jejímu obecnému řešení stačí. Někdy se nám může podařit partikulární řešení rovnice (2.8) uhodnout. Ukazuje se, že pro některé speciální pravé strany je vhodné hledat partikulární řešení v příslušném speciálním tvaru, viz. Tvrzení 2.3.2.

Tvrzení 2.3.4 *[8, Tvrzení 5] Jestliže charakteristická rovnice má jednoduchý komplexní kořen $a + ib$ a tedy také $a - ib$, pak odpovídající řešení má tvar $e^{\alpha t}\left[c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\right].$ Má-li kořen $a + bi$ násobnost k, odpovídající prvky báze prostoru řešení (2.7) jsou*

$$\left\{e^{\alpha t}\cos(\beta t),\, te^{\alpha t}\cos(\beta t),\, \dots,\, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t,\, te^{\alpha t}\sin(\beta t),\, \dots,\, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t\right\}.$$

2.4 Wronského determinant a lineární závislosti řešení

Definice 2.4.1 *[8, Definice 1] Funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně závislé na intervalu I, právě když existují čísla $c_1, \dots, c_n$ ne všechna nulová, a taková, že*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) = 0, \text{ pro všechna } t \in I.$$

V opačném případě jsou funkce $f_1, \dots, f_n$ lineárně nezávislé na intervalu I.

Definice 2.4.2 *[5, Definice 2.2] Buď $f_1, f_2, \dots f_k$ systém funkcí na intervalu I takový, že existující derivace $f_i^{(j)}(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ pro všechna $t \in I$. Determinant*

$$W_{f_1, f_2, \dots, f_k}(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_k(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ f_1^{(k-1)}(t) & f_2^{(k-1)}(t) & \dots & f_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nazýváme Wronského determinant funkcí $f_1, f_2, \dots, f_k$ v bodě $t \in I$, zkráceně Wronskián.

Tvrzení 2.4.3 *[5, Věta 2.2] Nechť $f_1, f_2, \dots, f_k$ jsou lineárně závislé na intervalu I a mají tam derivace až do řádu $k - 1$. Potom $W_{f_1, f_2, \dots, f_k}(t)$ je roven nule pro všechna $t \in I$.*

Tvrzení 2.4.4 *Nechť $y_1, \ldots, y_n$ jsou řešení (2.7) na intervalu I. Pak platí jedna z následujících možností:*

(i) jsou-li $y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé, pak $W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(t) = 0$ pro všechna $t \in I$,

(ii) jsou-li $y_1, \ldots, y_n$ lineárně nezávislé, pak $W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$.

Důkaz. Uvažujeme čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$ taková, že

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_k f_k(t) = 0 \qquad \text{pro všechna } t \in I.$$

Na levé straně je tedy funkce, která je identicky rovna nule. Z toho vyplývá, že také všechny derivace jsou rovny nule na I. Tedy pro $t \in I$ platí

$$\begin{gathered} c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_k f_k(t) = 0 \\ c_1 f_1'(t) + c_2 f_2'(t) + \cdots + c_k f_k'(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1^{(k-1)}(t) + c_2 f_2^{(k-1)}(t) + \cdots + c_k f_k^{(k-1)}(t) = 0. \end{gathered}$$

Nechť $t \in I$ je libovolné a pevně dané. Čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou řešením předešlého systému homogenních lineárních rovnic. Tento systém má netriviální řešení, právě když determinant příslušné matice je roven nule. Tímto determinantem je právě uvažovaný Wronskián $W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(t)$. A tedy podle Definice 2.4.1 je systém funkcí $y_1, \ldots, y_n$ lineárně nezávislý, právě když Wronskián $W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(t)$ je různý od nuly. □

Definice 2.4.5 *[5, Definice 2.4] Množinu n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice (2.7) nazýváme fundamentální systém rovnice (2.7).*

Definice 2.4.6 *Obecné řešení homogenní úlohy (2.7) je jakákoli lineární kombinace prvků fundamentálního systému.*

Poznámka 2.4.7 *Podle (2.3.1) je obecné řešení homogenní úlohy (2.7) ve smyslu Definice 2.4.6 skutečně řešení.*

2.5 Periodická řešení

V případě, že obecné řešení je lineární kombinací periodických funkcí, řešení může být periodické.

Definice 2.5.1 *Nechť $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Funkce $f = f(t)$ je periodická s periodou T, jestliže pro každé $t \in D(f)$ platí*

$$t \pm T \in D(f)$$

a zároveň

$$f(t) = f(t + T).$$

Definice 2.5.2 *Řešení $y(t)$ Cauchyovy úlohy (2.5), (2.6) je periodické s periodou T, pokud*

$$y(t + T) = y(T)$$

pro všechna $t > 0$.

Poznámka 2.5.3 *Konstantní funkce je periodická funkce, která ale nemá nejmenší kladnou periodu, protože každé $T > 0$ je periodou.*

Tvrzení 2.5.4 *Mějme dvě periodické funkce f a g s periodami T_f a T_g. Lineární kombinace $h = c_1 f + c_2 g$ pro c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ je periodická, právě když poměr period T_f / T_g je racionální číslo.*

Poznámka 2.5.5 *Pokud je poměr period v Tvrzení 2.5.4 neracionální, dostaneme neperiodickou funkci, která nekonečněkrát protne nulu. Pokud dostaneme řešení ve tvaru neperiodické funkce, budeme mu říkat chaotické.*

Tvrzení 2.5.6 *Mějme $a \in \mathbb{R}$ libovolné nenulové, potom funkce $\sin(at)$ a $\cos(at)$ mají obě periodu $2\pi/a$.*

Tvrzení 2.5.7 *Mějme $a \in \mathbb{R}$ libovolné nenulové, potom funkce $h(t) = c_1 \sin(at) + c_2 \cos(at)$ má periodu $2\pi/a$.*

Tvrzení 2.5.8 *Mějme a, $b \in \mathbb{R}$ libovolné nenulové, potom funkce $h(t) = c_1 \sin(at) + c_2 \sin(bt)$ je periodická, když a/b je racionální.*

Kapitola 3

Model kmitů hmotného bodu na pružině

3.1 Matematická rovnice kmitů

Rovnice, představující model kmitů hmotného bodu na pružině, vypadá následovně

$$u''(t) + bu'(t) + pu(t) = F_0 \cos \gamma t + F_1 \sin \gamma t. \tag{3.1}$$

Stejná rovnice modeluje i matematické kyvadlo. Vyskytují se v ní parametry b, p, γ, F_0 a F_1. Jejich význam je následující: parametr b je koeficient útlumu, parametr p je kvadrát úhlové frekvence netlumených kmitů. Tu lze vyjádřit pro model matematického kyvadla jako $p = \dfrac{g}{\ell} > 0$, kde g je tíhové zrychlení a ℓ délka kyvadla. Pro model pružiny je $p = \dfrac{k}{m}$, kde k je tuhost pružiny a m je hmotnost tělesa zavěšeného na pružině. Celá pravá strana rovnice (3.1) udává vnější sílu.

Z hlediska fyziky platí navíc následující znaménkové předpoklady

$$b \geq 0, \quad p > 0, \quad k > 0, \quad m > 0. \tag{3.2}$$

3.1.1 Homogenní úloha

Pro nejjednodušší model bez tření si vystačíme s homogenní úlohou

$$u'' + pu = 0.$$

Znamená to, že pravá strana rovnice (3.1) je nulová, vnější síly jsou zanedbány. Běžné děje popisuje lépe kmitání tlumené než netlumené — uvažuje totiž odporové síly. „Perioda“ je v takovém případě konstantní, amplituda klesá. Tuto situaci popisuje rovnice

$$u'' + bu' + pu = 0.$$

Pokud do systému přispějeme navíc libovolnou vnější periodickou silou, kmitání se stane vynuceně tlumeným. To však vyžaduje studovat nehomogenní úlohu (3.1).

Poznámka 3.1.1 *Rovnice (3.1) je speciální případ rovnice (2.2).*

3.2 Řešení homogenní rovnice

Homogenní úloha má tvar

$$u'' + bu' + pu = 0. \tag{3.3}$$

Zkusíme řešení tvaru

$$u(t) = e^{rt}. \tag{3.4}$$

První derivace funkce má tvar

$$u'(t) = re^{rt}$$

a druhá derivace je

$$u''(t) = r^2e^{rt}.$$

Dosazením do rovnice (3.3) dostáváme

$$r^2e^{rt} + bre^{rt} + pe^{rt} = 0.$$

Vydělením rovnice výrazem e^{rt} dostáváme charakteristickou rovnici

$$r^2 + br + p = 0. \tag{3.5}$$

Jedná se o polynom druhého stupně (kvadratickou rovnici). Klíčový vliv na tvar kořenů má znaménko diskriminantu

$$D = b^2 - 4p. \tag{3.6}$$

Mohou nastat následující tři varianty (což v praxi rozpoznáme odlišným chováním pružiny, resp. jejím kmitáním)

(i) $D = 0$ — mezní tlumení,

(ii) $D > 0$ — silné tlumení,

(iii) $D < 0$ — slabé tlumení.

Kořeny charakteristické rovnice (3.5), které jsou tvaru

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}, \tag{3.7}$$

nám v každém případě určí vždy dvě nezávislá řešení. Tato dvě řešení tvoří fundamentální systém rovnice (3.3) a dle Definice 2.4.6 libovolná kombinace prvků fundamentálního systému potom určuje obecné řešení homogenní úlohy.

Nyní probereme podrobně jednotlivé případy.

3.2.1 Mezní tlumení, diskriminant je roven nule

Diskriminant $D = b^2 - 4p$ je roven nule, právě když

$$b^2 = 4p.$$

Je tedy zřejmé, že toto nastane, právě když

$$b = \pm\sqrt{4p}.$$

Oba kořeny r_1, r_2 jsou reálné a navíc stejné. Jsou tvaru

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2}. \tag{3.8}$$

Fundamentální systém je v tomto případě

$$FS = \{e^{-bt/2}, te^{-bt/2}\}$$

a obecné řešení diferenciální rovnice je potom

$$u(t) = c_1 e^{-bt/2} + c_2 t e^{-bt/2}, \tag{3.9}$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné reálné konstanty. Nyní ukážeme, že námi nalezená řešení jsou skutečně nezávislá. Podle Tvrzení 2.4.4 to bude pravda, právě když Wronskián bude nenulový. Jelikož náš fundamentální systém má dva prvky, Wronského matice W bude typu $(2, 2)$. V prvním řádku budou oba prvky fundamentálního systému a ve druhém jejich derivace,

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/2} & te^{-bt/2} \\ -\frac{1}{2}be^{-bt/2} & -\frac{1}{2}e^{-bt/2}(bt-2) \end{vmatrix}.$$

Dostáváme

$$W(t) = \left\{ e^{-bt/2} \left[-\frac{1}{2} e^{-bt/2} (bt-2) \right] \right\} - \left\{ \left[-\frac{1}{2} be^{-bt/2} \right] te^{-bt/2} \right\}.$$

Po zavedení substituce $s = e^{-bt/2}$ dostáváme

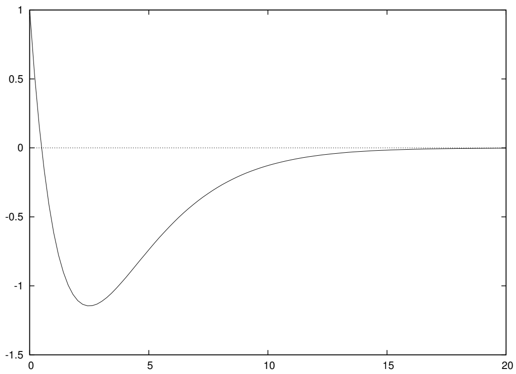
$$\begin{aligned} W(t) &= s \left[-\frac{1}{2} s (bt-2) \right] - \left[-\frac{1}{2} bs \right] ts \\ &= -\frac{1}{2} s^2 (bt-2) + \frac{1}{2} bts^2 = \frac{-bts^2 + 2s^2 + bts^2}{2} \\ &= \frac{2s^2}{2} = s^2. \end{aligned}$$

Návratem k původní substituci $s = e^{-bt/2}$ dostáváme

$$W(t) = \left[e^{-bt/2} \right]^2 = e^{-bt}.$$

Je zřejmé, že tato hodnota Wronskiánu W se nikdy nemůže rovnat nule. Wronskián je tedy nenulový, výsledná řešení jsou dle Tvrzení 2.4.4 lineárně nezávislá.

Případ mezního tlumení si v běžném životě můžeme představit takto. Polohu, kdy je pružina v klidu nazveme klidovou polohou. V případě mezního tlumení pružina klidovou polohou prokmitne nanejvýš jednou.



Obrázek 3.1: Příklad řešení v případě mezního tlumení

3.2.2 Silné tlumení, diskriminant je kladný

Uvažujeme stejnou charakteristickou rovnici (3.5). V případě, že diskriminant D je kladný, jsou oba kořeny r_1 a r_2 tvaru (3.7) reálné a různé. Navíc

$$\text{oba kořeny } r_1,\ r_2 \text{ jsou záporné} \tag{3.10}$$

podle předpokladu $p > 0$. Fundamentální systém je tedy

$$FS = \{e^{r_1 t},\, e^{r_2 t}\}$$

a obecné řešení diferenciální rovnice má tvar

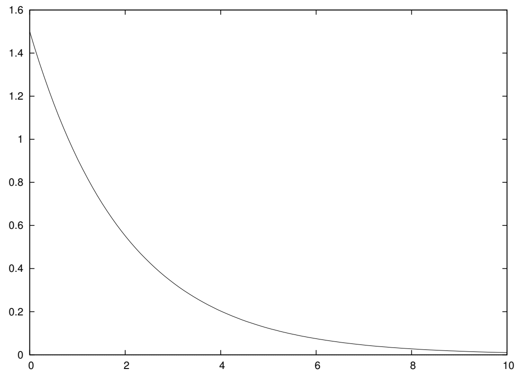
$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \tag{3.11}$$

kde c_1, c_2 jsou reálné konstanty.

Opět dokážeme nezávislost řešení.

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2 e^{r_2 t} e^{r_1 t} - r_1 e^{r_1 t} e^{r_2 t} = e^{r_2 t} e^{r_1 t}(r_2 - r_1).$$

Protože r_1 a r_2 jsou různé, součin je tedy nenulový a funkce jsou dle Tvrzení 2.4.4 lineárně nezávislé.



Obrázek 3.2: Příklad řešení v případě silného tlumení

3.2.3 Slabé tlumení, diskriminant je záporný

Opět uvažujeme charakteristickou rovnici (3.5). Diskriminant D je nyní záporný, to znamená

$$b^2 < 4p. \tag{3.12}$$

Kořeny r_1, r_2 již nebudou reálné, ale budou tvaru

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

kde

$$\alpha = -\frac{b}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4p - b^2}}{2} > 0. \tag{3.13}$$

Fundamentální systém v tomto případě je (viz. Tvrzení 2.3.4)

$$FS = \{e^{\alpha t} \cos \beta t,\, e^{\alpha t} \sin \beta t\}.$$

Dokážeme, že se opět jedná o lineárně nezávislá řešení. Wronskián je nyní

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ \alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t) & \alpha e^{\alpha t} \sin \beta t + \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{vmatrix}.$$

Ten upravujeme a dostaneme

$$\begin{aligned} W(t) &= [(e^{\alpha t} \cos \beta t) (\alpha e^{\alpha t} \sin \beta t + e^{\alpha t} \beta \cos \beta t)] - [(\alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - e^{\alpha t} \beta \sin \beta t) (e^{\alpha t} \sin \beta t)] \\ &= (e^{\alpha t})^2 [\cos \beta t \, (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) - \sin \beta t \, (\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t)] \\ &= (e^{\alpha t})^2 \left(\beta \cos^2 \beta t + \beta \sin^2 \beta t\right) \\ &= e^{2\alpha t} \beta. \end{aligned}$$

Výsledný výraz je díky předpokladu (3.13) evidentně nenulový a je tedy zřejmé, že řešení jsou lineárně nezávislá, opět díky Tvrzení 2.4.4.

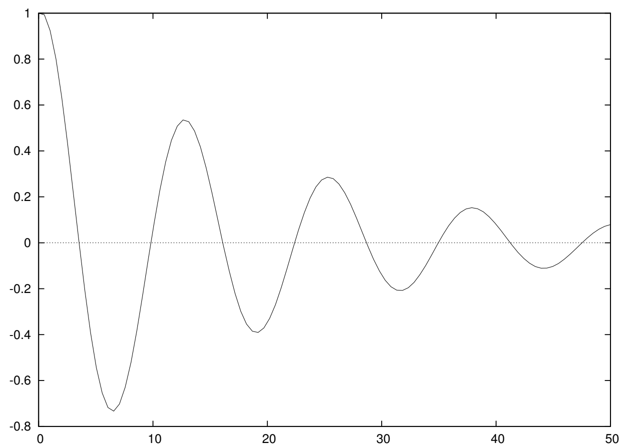
Fundamentální systém lze napsat pomocí původních proměnných jako

$$FS = \left\{ e^{-bt/2} \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{4p-b^2}\right),\ e^{-bt/2} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{4p-b^2}\right) \right\}.$$

Konečně dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$u(t) = c_1 e^{-bt/2} \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{4p-b^2}\right) + c_2 e^{-bt/2} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{4p-b^2}\right). \tag{3.14}$$

Z hlediska studia periodických kmitů je matematicky nejzajímavější případ slabého tlumení. V tomto případě pružina nekonečněkrát prokmitává svou klidovou polohu. Tomu odpovídající řešení může být periodická funkce.



Obrázek 3.3: Příklad řešení v případě slabého tlumení

Poznámka 3.2.1 *Z hlediska rozdělení podle znaménka determinantu na výše uvedené tři případy je situace, kdy vůbec neuvažujeme tření, tj. parametr* $b = 0$*, díky kladnému determinantu zařazena do Sekce 3.2.3.*

3.3 Řešení nehomogenní rovnice

V další sekci budeme studovat nehomogenní úlohy, kde na pravé straně budeme uvažovat periodickou funkci

$$f(t) = F_0 \cos\gamma t + F_1 \sin\gamma t$$

s parametry F_0, F_1 a γ.

Tato funkce představuje vnější sílu, kterou působíme na hmotný bod. Budeme tedy zkoumat řešení nehomogenní rovnice (2.8), kde funkce $f(t)$ na pravé straně není identicky rovna nule na celém intervalu I. Dle Tvrzení 2.3.2 je součtem obecného řešení homogenní rovnice (3.3) a libovolného partikulárního řešení nehomogenní rovnice (3.1).
Rovnice modelující hmotný bod na pružině má tvar

$$u'' + bu' + pu = F_0 \cos \gamma t + F_1 \sin \gamma t.$$

Její řešení hledáme podle Tvrzení 2.3.2 ve tvaru

$$u(t) = u_h + u_p, \tag{3.15}$$

kde u_h je řešení homogenní rovnice (3.3) a u_p je libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.1).

Zbývá tedy nalézt nějaké partikulární řešení u_p. To budeme hledat ve tvaru

$$u_p(t) = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t.$$

Jeho první derivace je

$$u_p'(t) = -\gamma A \sin \gamma t + \gamma B \cos \gamma t.$$

Následně vypočteme druhou derivaci jako

$$u_p''(t) = -\gamma^2 A \cos \gamma t - \gamma^2 B \sin \gamma t.$$

Tu lze zapsat i ve tvaru

$$u_p'' = -\gamma^2 u_p.$$

Výše uvedené derivace dosadíme do rovnice (3.1) a dostaneme

$$\begin{aligned} (p - \gamma^2)\, u_p + bu' &= (p - \gamma)^2 \left(A \cos \gamma t + B \sin \gamma t\right) - b\gamma A \sin \gamma t + b\gamma B \cos \gamma t \\ &= \cos \gamma t \left[A\,(p - \gamma^2) + b\gamma B\right] + \sin \gamma t \left[B\,(p - \gamma)^2 - \gamma A\right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Nyní je nutné zjistit koeficinety A, B. Rovnice (3.16) musí platit pro všechna t kladná. Jelikož $\cos \gamma t$ a $\sin \gamma t$ jsou lineárně nezávislé funkce, toto nastane, právě když

$$\left(p - \gamma^2\right) A + b\gamma B = F_0$$

$$-b\gamma A + \left(p - \gamma^2\right) B = F_1.$$

Cramerovým pravidlem (za předpokladu, že $D_S \neq 0$) dostáváme formálně řešení ve tvaru

$$A = \frac{D_A}{D_S},$$

$$B = \frac{D_B}{D_S},$$

kde

$$D_S = \begin{vmatrix} p - \gamma^2 & b\gamma \\ -b\gamma & p - \gamma^2 \end{vmatrix},$$

$$D_A = \begin{vmatrix} F_0 & b\gamma \\ F_1 & p - \gamma^2 \end{vmatrix},$$

$$D_B = \begin{vmatrix} p - \gamma^2 & F_0 \\ -b\gamma & F_1 \end{vmatrix}.$$

Postupnými úpravami získáváme samotné hodnoty jednotlivých determinantů

$$D_S = \left(p - \gamma^2\right)^2 + \left(b\gamma\right)^2, \tag{3.17}$$

$$D_A = F_0(p - \gamma^2) - F_1 b\gamma, \tag{3.18}$$

$$D_B = F_1(p - \gamma^2) + F_0 b\gamma. \tag{3.19}$$

Nyní pomocí Crameriova pravidla získáme hodnoty koeficientů A a B. Jak je výše uvedeno, koeficient A spočteme jako podíl D_A a D_S. Tedy

$$A = \frac{F_0(p - \gamma^2) - F_1 b\gamma}{\left(p - \gamma^2\right)^2 + \left(b\gamma\right)^2}.$$

Obdobným způsobem dopočítáme koeficient B

$$B = \frac{F_1(p - \gamma^2) + F_0 b\gamma}{\left(p - \gamma^2\right)^2 + \left(b\gamma\right)^2}.$$

Tvrzení 3.3.1 *Obecné řešení rovnice (3.1) je za předpokladu*

$$b > 0 \quad nebo \quad p \neq \gamma^2. \tag{3.20}$$

tvaru

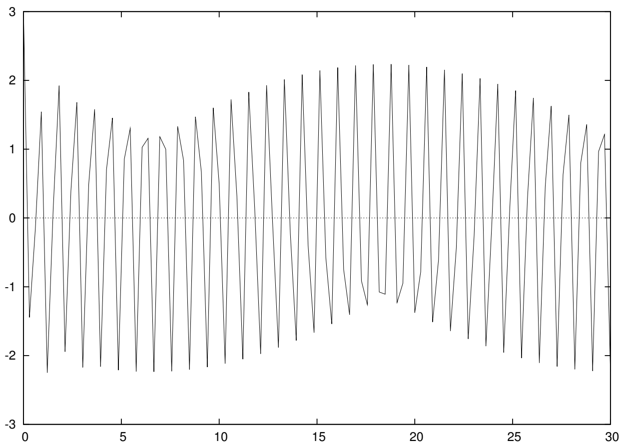
$$u(t) = u_h + A\cos\gamma t + B\sin\gamma t, \tag{3.21}$$

přičemž

$$A = \frac{F_0\left(p-\gamma^2\right) - F_1 b\gamma}{b^2\gamma^2 + \left(p-\gamma^2\right)^2}, \tag{3.22}$$

$$B = \frac{F_1\left(p-\gamma^2\right) + F_0 b\gamma}{b^2\gamma^2 + \left(p-\gamma^2\right)^2} \tag{3.23}$$

a u_h je obecné řešení homogenní rovnice (3.3).



Obrázek 3.4: Příklad vynuceného kmitání

Kapitola 4

Cauchyova úloha pro rovnici (3.1)

V předchozí kapitole jsme získali obecné řešení rovnice kmitů (3.1). V této kapitole budeme řešit Cauchyovu úlohu pro počáteční podmínky

$$u(0) = u_0, \tag{4.1}$$

$$u'(0) = u_1. \tag{4.2}$$

Jak bylo konstatováno v Kapitole 2, znaménko diskriminantu nám vytváří tři možné situace. Vzhledem k tomu, že pro všechny tři budeme řešit jak homogenní, tak i nehomogenní úlohu, vyřešíme ve své podstatě celkem šest Cauchyových úloh.

4.1 Mezní tlumení

Případ mezního tlumení nastane, právě když diskriminant D je roven nule. To je tehdy a jen tehdy, je-li $b^2 - 4p$ rovno nule, což vzhledem k znaménkovým předpokladům (3.2) znamená $b = 2\sqrt{p}$.

4.1.1 Cauchyova úloha pro homogenní rovnici

Obecné řešení (3.3) má dle (3.9) tvar

$$u(t) = c_1 e^{-bt/2} + c_2 t e^{-bt/2} = (c_1 + c_2 t) e^{-bt/2}. \tag{4.3}$$

Jeho první derivace je

$$u'(t) = c_2 e^{-bt/2} + \left(-\frac{b}{2}\right)(c_1 + c_2 t)\, e^{-bt/2} = \left[c_2 + \left(-\frac{b}{2}\right)(c_1 + c_2 t)\right] e^{-bt/2}$$
$$= \left[c_2 - \frac{b}{2}(c_1 + c_2 t)\right] e^{-bt/2}.$$

Dosadíme do počátečních podmínek (4.1) a (4.2) a dostaneme

$$u_0 = c_1,$$

$$u_1 = c_2 - \frac{b}{2} c_1.$$

Z rovnosti pro c_1 získáme

$$u_1 = c_2 - \frac{b}{2} u_0,$$

tedy

$$c_2 = u_1 + \frac{b u_0}{2}.$$

Dosazením do (4.3) získáme řešení Cauchyovy úlohy v případě mezního tlumení bez pravé strany ve tvaru

$$u(t) = \left[u_0 + \left(u_1 + \frac{b}{2} u_0\right) t\right] e^{-bt/2}. \tag{4.4}$$

Toto řešení nemůže být periodické.

Prokmitne takovéto řešení klidovou polohou? Tj. existuje $t_0 > 0$, že platí $u(t_0) = 0$?

$$\left[u_0 + \left(u_1 + \frac{b}{2} u_0\right) t_0\right] e^{-bt_0/2} = 0.$$

Obě strany rovnice vynásobíme výrazem $e^{-bt_0/2}$ a dostáváme

$$u_0 + \left(u_1 + \frac{b}{2} u_0\right) t_0 = 0,$$

odkud získáme rovnost pro t_0

$$t_0 = -\frac{u_0}{u_1 + \frac{b}{2} u_0}. \tag{4.5}$$

Toto je kladné tehdy a jen tehdy, když

$$\frac{u_0}{u_1 + \frac{b}{2} u_0} < 0. \tag{4.6}$$

Bez újmy na obecnosti zvolíme $u_0 > 0$. Předchozí nerovnost tedy bude splněna, právě když

$$u_1 + \frac{b}{2} u_0 < 0,$$

neboli, když

$$u_1 < -\frac{b}{2} u_0$$

(u_1 musí být dostatečně záporné). Speciálně pro

$$u_0 > 0, \quad u_1 = 0 \tag{4.7}$$

(startujeme z kladné polohy s nulovou rychlostí) nebo pro

$$u_0 = 0, \quad u_1 > 0 \tag{4.8}$$

(startujeme z klidové polohy směrem nahoru) platí pro řešení (4.4), že

$$u(t) > 0 \quad \text{pro všechna } t > 0, \tag{4.9}$$

tj. hmotný bod vůbec neprokmitne klidovou polohu.

Předchozí úvahy nyní shrneme do

Tvrzení 4.1.1 *Pokud $b^2 = 4p$, je řešení počáteční úlohy (3.3), (4.1), (4.2) tvaru (4.4) a není periodické. Řešení prokmitne klidovou polohu v čase t_0 daném výrazem (4.5) nejvýše jednou a to za podmínky (4.6). Speciálně, pokud platí (4.7) nebo (4.8), řešení zůstane vždy kladné (hmotný bod neprokmitne vůbec).*

4.1.2 Cauchyova úloha pro nehomogenní rovnici

Obecné řešení rovnice (3.1) má podle (4.3) a (3.21) tvar

$$u(t) = c_1 e^{-bt/2} + c_2 t e^{-bt/2} + A \cos \gamma t + B \sin \gamma t \tag{4.10}$$

kde A, B jsou tvaru (3.22), (3.23). První derivace má tvar

$$u'(t) = -c_1 \frac{1}{2} b e^{-bt/2} - c_2 \frac{1}{2} (bt - 2) e^{-bt/2} - A\gamma \sin \gamma t + B\gamma \cos \gamma t.$$

Po dosazení do počátečních podmínek (4.1) a (4.2) získáme systém

$$u_0 = c_1 + A,$$

$$u_1 = -c_1\frac{1}{2}b - c_2\frac{1}{2}(-2) + B\gamma.$$

Z čehož plyne, že

$$c_1 = u_0 - A.$$

Nyní zjistíme konstantu c_2

$$u_1 = -c_1\frac{b}{2} + c_2 + B\gamma,$$

$$c_2 = u_1 + c_1 b\frac{1}{2} - B\gamma,$$

$$c_2 = u_1 + \frac{b(u_0 - A)}{2} - B\gamma.$$

Řešení Cauchyovy úlohy v případě nulového diskriminantu pro nehomogenní úlohu je tedy

$$u(t) = (u_0 - A)e^{-bt/2} + \left(u_1 + \frac{b(u_0 - A)}{2} - B\gamma\right) te^{-bt/2} + A\cos\gamma t + B\sin\gamma t, \tag{4.11}$$

kde A, B jsou tvaru (3.22), (3.23).

Tvrzení 4.1.2 *Pokud $b^2 = 4p$ máme řešení počáteční úlohy (3.1), (4.1), (4.2) tvaru (4.11), které není periodické.*

4.2 Silné tlumení

Silné tlumení nastane pro kladný diskriminant D, což je pravda tehdy a jen tehdy, je-li $b^2 - 4p$ větší jak nula ($b > 2\sqrt{p}$).

4.2.1 Cauchyova úloha pro homogenní rovnici

Obecné řešení (3.3) má nyní podle (3.11) tvar

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \tag{4.12}$$

První derivace řešení má tvar

$$u'(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}.$$

Po dosazení do počátečních podmínek (4.1) a (4.2) dostáváme

$$u_0 = c_1 + c_2,$$

$$u_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2.$$

Nejprve si vyjádříme c_1

$$c_1 = u_0 - c_2, \tag{4.13}$$

upravíme

$$u_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2,$$

$$c_2 r_2 = u_1 - c_1 r_1.$$

Dosadíme (4.13) a dostaneme

$$c_2 r_2 = u_1 - r_1(u_0 - c_2),$$

$$c_2 r_2 = u_1 - r_1 u_0 + c_2 r_1,$$

$$c_2 r_2 - c_2 r_1 = u_1 - r_1 u_0,$$

$$c_2(r_2 - r_1) = u_1 - r_1 u_0,$$

$$c_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}. \tag{4.14}$$

Dosazením do (4.13) dostaneme

$$c_1 = u_0 - \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 u_0 - r_1 u_0 - u_1 + r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}. \tag{4.15}$$

Řešení Cauchyovy úlohy v homogenním případě je tedy podle (4.12) tvaru

$$u(t) = \left(\frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}\right) e^{r_1 t} + \left(\frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}\right) e^{r_2 t}, \tag{4.16}$$

což zjevně není periodická funkce.

Protne řešení (4.16) osu t pro nějaké $t_0 > 0$? Hledáme $t_0 > 0$ tak, aby

$$0 = u(t_0) = \left(\frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}\right) e^{r_1 t_0} + \left(\frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}\right) e^{r_2 t_0}.$$

Vzhledem k (3.10) předpokládejme bez újmy na obecnosti

$$r_2 < r_1 < 0. \tag{4.17}$$

Označme

$$R = r_1 - r_2 > 0. \tag{4.18}$$

Řešením předchozí rovnice postupně dostáváme

$$\begin{aligned} c_1 e^{r_2 t_0} e^{R t_0} + c_2 e^{r_2 t} &= 0, \\ c_1 e^{R t_0} + c_2 &= 0, \\ e^{R t_0} &= \frac{c_2}{-c_1}, \\ R t_0 &= \ln \frac{c_2}{-c_1}, \end{aligned}$$

z čehož dostaneme

$$t_0 = \frac{1}{R} \ln \frac{c_2}{-c_1}. \tag{4.19}$$

Toto t_0 bude kladné, právě když

$$\frac{c_2}{-c_1} > 1.$$

Vzhledem k (4.15) a (4.14) toto nastane, právě když

$$\frac{u_1 - r_1 u_0}{u_1 - r_2 u_0} - 1 = \frac{-(r_1 - r_2) u_0}{u_1 - r_2 u_0} = \frac{-R u_0}{u_1 - r_2 u_0} > 0. \tag{4.20}$$

Bez újmy na obecnosti zvolme $u_0 > 0$. Vzhledem k (4.18) bude (4.20) pravda, právě když

$$u_1 < r_2 u_0. \tag{4.21}$$

Vzhledem k (4.17) tato podmínka znamená, že řešení prokmitne nulu právě když z kladné polohy startujeme dostatečně rychle dolů. Předchozí úvahy shrneme do následujícího tvrzení

Tvrzení 4.2.1 *Pokud $b^2 > 4p$, je řešení počáteční úlohy (3.3), (4.1), (4.2) tvaru (4.16) a není periodické. Pokud je splněna nerovnost (4.21), řešení změní znaménko právě v čase t_0 daném výrazem (4.19). V opačném případě řešení znaménko nezmění (hmotný bod klidovou polohu neprokmitne vůbec).*

4.2.2 Cauchyova úloha pro nehomogenní rovnici

Obecné řešení rovnice (3.1) má nyní podle (4.12) a (3.21) tvar

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + A \cos \gamma t + B \sin \gamma t. \tag{4.22}$$

První derivace je tvaru

$$u'(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} - A\gamma \sin \gamma t + B\gamma \cos \gamma t.$$

Po dosazení do počátečních podmínek (4.1) a (4.2) dostáváme systém

$$\begin{aligned} u_0 &= c_1 + c_2 + A, \\ u_1 &= c_1 r_1 + c_2 r_2 + B\gamma. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že

$$c_1 = u_0 - c_2 - A.$$

Nejprve zjistíme konstantu c_2

$$\begin{aligned} c_2 r_2 &= u_1 - c_1 r_1 - B\gamma \\ &= u_1 - r_1(u_0 - c_2 - A) - B\gamma \\ &= u_1 - r_1 u_0 + r_1 c_2 + r_1 A - B\gamma. \end{aligned}$$

Upravíme

$$c_2 r_2 - c_2 r_1 = u_1 - r_1 u_0 + r_1 A - B\gamma,$$

z čehož vyjádříme

$$c_2 = \frac{u_1 - r_1 u_0 + r_1 A - B\gamma}{r_2 - r_1}. \tag{4.23}$$

Výsledek dosadíme do vztahu pro c_1 a dostaneme

$$\begin{aligned} c_1 &= u_0 - A - \frac{u_1 - r_1 u_0 + r_1 A - B\gamma}{r_2 - r_1} \\ &= \frac{r_2 u_0 - r_1 u_0 - r_2 A + r_1 A - u_1 + r_1 u_0 - r_1 A + B\gamma}{r_2 - r_1} \qquad (4.24) \\ &= \frac{r_2 u_0 - r_2 A - u_1 + B\gamma}{r_2 - r_1} = \frac{-u_1 + r_2 u_0 - r_2 A + B\gamma}{r_2 - r_1}. \end{aligned}$$

Řešení Cauchyovy úlohy v nehomogenním případě je tedy

$$\begin{aligned} u(t) = &\left(\frac{-u_1 + r_2 u_0 - r_2 A + B\gamma}{r_2 - r_1}\right) e^{r_1 t} + \left(\frac{u_1 - r_1 u_0 + r_1 A - B\gamma}{r_2 - r_1}\right) e^{r_2 t} \\ &+ A\cos\gamma t + B\sin\gamma t \end{aligned} \tag{4.25}$$

kde A, B jsou tvaru (3.22), (3.23). Dostáváme tímto

Tvrzení 4.2.2 *Pokud $b^2 > 4p$, je řešení počáteční úlohy (3.1), (4.1), (4.2) tvaru (4.25) a není periodické.*

4.3 Slabé tlumení

Slabé tlumení nastane pro záporný diskriminant D, což je v případě $b^2 - 4p < 0$, $(b < 2\sqrt{p})$.

4.3.1 Cauchyova úloha pro homogenní rovnici

Obecné řešení rovnice (3.3) má nyní podle (3.14), (3.13) tvar

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t. \tag{4.26}$$

Nejprve je nutné vyjádřit první derivaci obecného řešení

$$u'(t) = c_1 \alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - c_1 \beta e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 \alpha e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 \beta e^{\alpha t} \cos \beta t.$$

Nyní dosadíme do počátečních podmínek (4.1), (4.2) a dostaneme

$$u_0 = c_1,$$

$$u_1 = c_1 \alpha + c_2 \beta.$$

Z čehož plyne

$$u_1 = u_0 \alpha + c_2 \beta,$$

$$c_2 \beta = u_1 - u_0 \alpha,$$

$$c_2 = \frac{u_1 - u_0 \alpha}{\beta}.$$

Řešení Cauchyovy úlohy v případě záporného diskriminantu v homogenním případě je tedy

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{u_1 - u_0 \alpha}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t. \tag{4.27}$$

Předchozí úvahy shrneme do následujícího tvrzení

Tvrzení 4.3.1 *Pokud $b^2 < 4p$, je řešení počáteční úlohy (3.3), (4.1), (4.2) tvaru (4.27). Toto řešení je pro $\alpha = 0$ periodické a pro $\alpha > 0$ tlumeně periodické (pružina prokmitne nekonečněkrát klidovou polohu, ale se snižující se amplitudou).*

4.3.2 Cauchyova úloha pro nehomogenní rovnici

Obecné řešení rovnice (3.1) v případě, kdy diskriminantu $D = b^2 - 4p < 0$ má podle (4.26) a (3.21) tvar

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t + A \cos \gamma t + B \sin \gamma t. \tag{4.28}$$

Počáteční podmínky jsou stejné, a to

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

Opět je nezbytné znát tvar první derivace řešení

$$u'(t) = c_1(\alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - \beta e^{\alpha t} \sin \beta t) + c_2(\alpha e^{\alpha t} \sin \beta t + \beta e^{\alpha t} \cos \beta t) - A\gamma \sin \gamma t + B\gamma \cos \gamma t.$$

Dosadíme do počátečních podmínek (4.1), (4.2) a dostaneme

$$u_0 = c_1 + A,$$

$$u_1 = c_1 \alpha + c_2 \beta + B\gamma.$$

Je zřejmé, že

$$c_1 = u_0 - A.$$

Této rovnosti využijeme k postupnému vyjádření c_2

$$u_1 = \alpha u_0 - \alpha A + c_2 \beta + B\gamma,$$

$$c_2 \beta = u_1 - \alpha u_0 + \alpha A - B\gamma,$$

$$c_2 = \frac{u_1 - \alpha u_0 + \alpha A - B\gamma}{\beta}.$$

Homogenní složka obecného řešení tedy podle (4.26) je

$$u_h = (u_0 - A)\, e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{u_1 - \alpha u_0 + \alpha A - B\gamma}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

a partikulární složka řešení je

$$u_p = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t,$$

kde A, B jsou tvaru (3.22), (3.23).

Dostáváme tedy

Tvrzení 4.3.2 *Pokud $b^2 < 4p$, je řešení počáteční úlohy (3.1), (4.1), (4.2) tvaru*

$$u(t) = (u_0 - A)\, e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{u_1 - \alpha u_0 + \alpha A - B\gamma}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t + A \cos \gamma t + B \sin \gamma t, \qquad (4.29)$$

kde A a B jsou dány v (3.22), (3.23).

Partikulární složka řešení

$$u_p(t) = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t \qquad (4.30)$$

je periodická funkce s periodou $T = \dfrac{2\pi}{\gamma}$.

Homogenní složka řešení

$$u_h(t) = (u_0 - A)\, e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{u_1 - \alpha u_0 + \alpha A - B\gamma}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t \qquad (4.31)$$

je pro $\alpha = 0$ periodická funkce s periodou $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$ a pro $\alpha > 0$ tlumeně periodická funkce, taktéž s „periodou“ $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$.

Pro samotné řešení $u(t)$ dané (4.29) dostáváme následující výčet možností periodicity. V případě, že $\alpha = 0$

(i) $u_h + u_p$ je periodické tehdy a jen tehdy, když β/γ je racionální číslo,

(ii) $u_h + u_p$ je chaotické tehdy a jen tehdy, když poměr β/γ není racionální číslo.

V případě, že $\alpha > 0$

(iii) $u_h + u_p$ je tlumeně periodické tehdy a jen tehdy, když poměr β/γ je racionální číslo,

(iv) $u_h + u_p$ je chaotické tehdy a jen tehdy, když poměr β/γ není racionální číslo.

Důkaz. Forma řešení (4.29) i obou jeho složek (4.30) a (4.31) plyne z úvah uvedených nad Tvrzením 4.3.2. Jednotlivé možnosti periodicity plynou přímo z tvarů funkcí, z Tvrzení 2.5.8 a z Poznámky 2.5.5. □

Kapitola 5

Závěr

Cílem této bakalářské práce byla kvalitativní analýza modelu kmitání hmotného bodu na pružině. Na začátku práce byla přiblížena problematika kmitání pomocí fyzikálních pohledů. Druhá kapitola byla věnována nejzákladnějším větám a definicím, bez kterých bychom se v dalších částech neobešli. Byly ukázány tvary řešení a diskutovány jejich periodicity pro Cauchyovu úlohu v homogenním i nehomogenním případě.

Možným rozšířením studované problematiky je zkoumáníexistence periodického řešení pro počáteční úlohu lineární diferenciální rovnice vyšších řádů, například čtvrtého, kde množství parametrů (jak v úloze samé, tak i v počátečních podmínkách) značně rozšiřuje možnosti analytického zkoumání řešení v závislosti na těchto parametrech.

Dalším možným směrem rozšíření je zkoumání existence nenulových řešení homogenních okrajových úloh druhého, případně vyšších řádů, a to opět v závislosti jak na na parametrech těchto úloh, tak na parametrech, které se vyskytují v okrajových podmínkách nejrůznějšího typu.

Literatura

[1] DLOUHÝ, Zbyněk, Karel HRUŠA, Jiří KŮST, Jiří ROHLÍČEK, Jan TAIŠL a Josef ZIERIS. *Úvod do matematické analýzy: učebnice pro pedagogické fakulty.* Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, 469 s. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství)

[2] EDWARDS, C a David E PENNEY. E*lementary differential equations.* 6th ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, c2008, x, 623, I-6 p. ISBN 01-323-9730-7.

[3] GILLMAN, Leonard a Robert H. MCDOWELL. *Matematická analýza.* 2. vyd. Praha: SNTL, 1983, 603 s.

[4] JÍRŮ, Josef. *Kmitavý pohyb.* České Budějovice: Krajský pedagogický ústav, 1989, 45 s.

[5] KOFROŇ, Josef. *Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru.* 2. vyd. Praha: Karolinum, 2004, 285 s. Učební texty (Univerzita Karlova). ISBN 80-246-0946-0.

[6] KONÍK, Jan. *Lineární diferenciální rovnice 1. a 2. řádu a jejich aplikace.* Brno, 2011. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce doc. RNDr. Roman Šimon Hilscher, DSc.

[7] KRAJC, Bohumil a Petr BEREMLIJSKI. *Obyčejné diferenciální rovnice.* Ostrava, Plzeň, 2012. Učební text. Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni.

[8] KŘIVAN Vlastimil. *Přednášky předmětu UMB 572 Matematická analýza IV.* Přírodovědecká fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. České Budějovice, léto 2012.

[9] KŘIVAN Vlastimil. *Přednášky předmětu UMB 572 Matematická analýza IV.* Přírodovědecká fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. České Budějovice, léto 2013.

[10] KURZWEIL, Jaroslav. *Obyčejné diferenciální rovnice: úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1978, 418 s.

[11] MÍKA, Stanislav a Alois KUFNER. *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice.* Druhé, upravené vydání. Praha: SNTL, 1983, 92 s.

[12] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. Hookův zákon pro pružnou deformaci. *Encyklopedie fyziky.* [online]. Praha, 2006 [cit. 2013-03-31]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/631-hookuv-zakon-pro-pruznou-deformaci

[13] WALTER, Wolfgang. *Differential and integral inequalities.* New York: Springer-Verlag, 1970, x, 352 p. ISBN 35-400-5088-4.

[O1] Matematické kyvadlo. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematické_kyvadlo

[O2] Simulace - 8. díl. *Programujte.com* [online]. 2006 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://programujte.com/clanek/2006082902-simulace-8-dil