

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
SPOLEČNÁ LABORATOŘ OPTIKY UP A FZÚ AV ČR

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Popis stimulované emise γ fotonů v experimentech
jaderného rezonančního rozptylu



Vypracoval:	Bc. Michal Hausner
Studijní program:	N0533A110002 – Aplikovaná fyzika
Specializace:	1702T001 – Aplikovaná fyzika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Vlastimil Vrba, Ph.D.
Rok:	2024

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Vlastimila Vrby, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 29. dubna 2024

.....
Bc. Michal Hausner

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Bc. Michal Hausner
Název práce	Popis stimulované emise γ fotonů v experimentech jaderného rezonančního rozptylu
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Společná laboratoř optiky UP a FZÚ AV ČR
Vedoucí práce	Mgr. Vlastimil Vrba, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2024
Abstrakt	Diplomová práce se zabývá popisem interakce γ záření v prostředí s důrazem na jevy spontánní a stimulované emise v jaderném systému a akusticky indukované transparence. Zvolený teoretický popis je aplikován na řešení základních jevů spontánní emise, dopředného rozptylu, koherentní manipulace a stimulované emise γ záření. Pro popis těchto jevů byla využita kvantově mechanická metoda řešení. Dosažené výsledky výpočtů byly srovnávány s vybranými výsledky z vědeckých publikací a mohou též být využity pro následné navazující studium příslušných jevů.
Klíčová slova	kvantově mechanická metoda popisu, γ záření, spontánní emise, dopředný rozptyl, akusticky indukovaná transparence, stimulovaná emise
Počet stran	95
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Bc. Michal Hausner
Title	Description of stimulated emission of γ photons in nuclear resonant scattering experiments
Type of thesis	Master
Department	Joint Laboratory of Optics of Palacký University and Institute of Physics AS CR
Supervisor	Mgr. Vlastimil Vrba, Ph.D.
The year of presentation	2024
Abstract	This master thesis focuses on the description of interaction of γ radiation in environment with emphasis on the phenomena of spontaneous and stimulated emission in a nuclear system and acoustically induced transparency. The chosen theoretical model is applied to solving general phenomena of spontaneous emission, forward scattering, coherent control and stimulated emission of γ radiation. For the description of these phenomena we used quantum mechanical method of description. Derived solutions were compared with selected results from scientific publications and can be used for follow-up studies of the respective phenomena.
Keywords	quantum mechanical description method, γ radiation, spontaneous emission, forward scattering, acoustically induced transparency, stimulated emission
Number of pages	95
Number of appendices	0
Language	czech

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce Mgr. Vlastimilu Vrbovi, Ph.D. za cenné rady, ochotu a trpělivost během celé doby vedení mé diplomové práce. Dále bych rád poděkoval doc. Mgr. Vítu Procházkovi, Ph.D. a Mgr. Aleši Stejskalovi, Ph.D. za poskytnuté konzultace. Dále bych rád poděkoval za finanční podporu z projektů vnitřní grantové soutěže IGA_PrF_2023_003, IGA_PrF_2024_002 a z projektu grantové soutěže JG_2023_030 Univerzity Palackého v Olomouci. V neposlední řadě bych rád poděkoval své rodině za každodenní podporu ve studiu.

Obsah

Úvod	7
1 Popis šíření γ záření prostředím	8
1.1 Semiklasický popis	9
1.2 Popis kvantovou teorií pole	14
1.3 Kvantově mechanický popis	16
2 Základní aplikace kvantově mechanického modelu	18
2.1 Vyzářování zářiče	18
2.2 Dopředný rezonanční rozptyl bez zpětného rázu	23
3 Popis akusticky indukované transparence	32
3.1 Koherentní manipulace s γ zářením	32
3.2 Akusticky indukovaná transparence	40
4 Popis stimulované emise γ fotonu	43
4.1 Stimulovaná emise bez konverzních elektronů	43
4.2 Stimulovaná emise s konverzními elektrony	60
Závěr	79
Seznam použitého značení v jednotlivých kapitolách	81
Literatura	93

Úvod

K výraznému rozvoji v oblasti optiky přispělo využití stimulované emise záření ke generování koherentního světelného svazku. Lasery jako zdroje využívající stimulované emise záření našly rychle uplatnění napříč vědeckotechnickými odvětvími. Současně je však pomocí laserů generována pouze relativně úzká část energetického spektra elektromagnetického záření kolem viditelné oblasti. Dalším možným vývojem je rozšíření využitelné oblasti elektromagnetického spektra o rentgenové záření a γ záření. Touto oblastí spektra se zabývá rentgenová a γ optika. Vytvoření koherentního zdroje záření v oblasti vysokých energií, tzv. γ laseru, by bylo velkým přínosem pro rozvoj γ optiky.

γ laser by byl takový zdroj záření, ve kterém by se využívalo stimulované emise γ fotonů. Oproti současným optickým laserům je vývoj γ laseru komplikován neexistencí vhodného aktivního média, ve kterém by docházelo ke stimulované emisi. γ záření vzniká při přechodu jádra z vysoko-energetického excitovaného stavu do základního stavu. Energetické přechody jader jsou řádově větší než optické energetické přechody elektronů. Vzhledem k tomu není možné docílit vhodné inverze populace, rozdílu obsazenosti základních a excitovaných stavů jader, v aktivním médiu. Aktivní médium s vhodnými jadernými přechody působí převážně jako absorbátor a záření pohlcuje.

V důsledku neexistence vhodného aktivního média se hledají jevy, při nichž by se vhodnou manipulací aktivního média docílilo snížení absorpce prostředí nebo vhodným způsobem ovlivnila doba života jader v excitovaných stavech. Jevy spojené s potlačením absorpce jsou akusticky indukovaná transparence, jež využívá vysoko-frekvenční vibrace zářiče nebo absorbátoru, elektrickým polem indukovaná transparence, ve které je potlačení absorpce dosaženo působením elektrického pole na atomy v dutině, a transparence indukovaná π fázovým posunem, která využívá konstruktivní interference vyvolané změnou fáze dopadajícího záření o fázový posun π změnou polohy zdroje.

Cílem této práce je vytvoření teoretického rámce pro popis stimulované emise γ záření. Teoretický popis stimulované emise γ fotonů dává základ pro následná experimentální pozorování v této oblasti. Současně se jedná o nutný krok pro možnost popsat a následně analyzovat možnosti ovlivnění stimulované emise a pravděpodobnosti jejího pozorování pomocí dříve zmíněných jevů indukované transparence. Nejdříve bylo zapotřebí seznámit se s dostupnými metodami popisu interakce γ záření s prostředím. Na základě tohoto rozboru byl zvolen vhodný popis, který byl následně aplikován na popis dílčích jevů spojených s popisem stimulované emise γ záření.

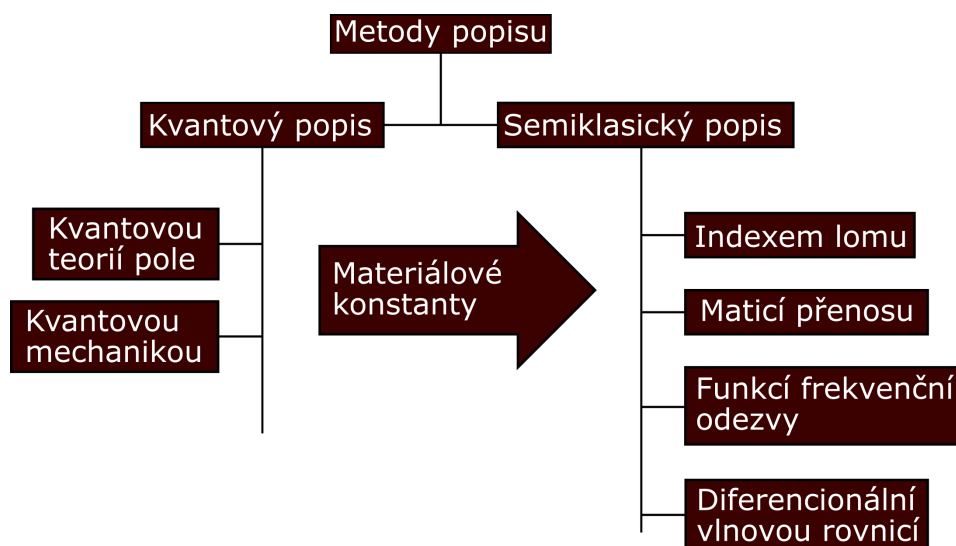
Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole jsou prozkoumány metody popisu jaderného rezonančního rozptylu záření a je zvolen popis, který je v následujících kapitolách aplikován. Zvolenou metodou popisu je kvantově mechanický model, který je založen na řešení Schrödingerovy rovnice ve frekvenční doméně pro amplitudy pravděpodobnosti nalezení systému v daném stavu. Popisovaný systém je obecně tvořen soustavou efektivních jader s vysoko-energetickými přechody, rezonančními fotony a konverzními elektrony. Ve druhé kapitole je ověřena zvolená metoda a postup řešení na základních jevech spontánní emise zdrojem záření a jaderného rezonančního rozptylu v dopředném směru. Ve třetí kapitole je na základě tohoto modelu popsán jev akusticky indukované transparence, který je jedním z potenciálních nástrojů pro řešení „laserování“ bez inverze populace. Čtvrtá kapitola je pak věnována samotnému popisu stimulované emise a řešením příslušných rovnic pro speciální podmínky. Dosažené výsledky mohou dále sloužit jako základ pro další zobecnění a analýzu budoucích experimentů v oblasti stimulované emise γ fotonů.

1 Popis šíření γ záření prostředím

Tato kapitola uvádí souhrnný popis fyzikálních modelů využívaných k popisu jaderné rezonanční interakce γ záření s pevnou látkou obsahující příslušný systém atomových jader. Nejznámějším příkladem je interakce rezonančních fotonů o energii 14.4 keV s jádry ^{57}Fe . Postupem času vznikala řada různých teoretických přístupů k tomuto popisu, které se postupně zobecňovaly a zpřesňovaly. Tyto přístupy budou dále rozděleny na metody kvantové a semiklasické (viz obrázek 1). Každý z těchto popisů přináší různé výhody a nevýhody, které budou dále diskutovány.

Kvantově mechanické metody popisují záření jako tok fotonů vzniklých jaderným přechodem. Jádro při emisi fotonu přechází z jedné diskrétní energetické hladiny do druhé a rozdíl energií těchto dvou hladin je roven energii emitovaného fotonu¹. Fotony při svém šíření prostředím interagují s jednotlivými atomy, elektrony, ionty a jádry atomů. K popisu se využívá vlnových funkcí, jejichž absolutní hodnota ve druhé mocnině má pravděpodobnostní interpretaci, a operátorů působících na vlnové funkce [1].

Semiklasické metody kombinují klasický popis přírodních dějů s kvantovým popisem. Klasický popis je zde zastoupen v popisování γ záření jako elektromagnetického vlnění. Pro popis interakce záření s prostředím již ale klasický popis nedokáže poskytnout přesný popis a je nutné využít výsledků kvantové teorie.



Obrázek 1: Schéma rozdělení metod popisu šíření γ záření prostředím.

Děje související s rozptylem γ záření v prostředí lze rozdělit na koherentní nebo nekoherentní a elastické nebo neelastické. Když při rozptylu dochází k zachování energie záření, nazývá se tento rozptyl elastickým. V opačném případě, kdy se energie záření při rozptylu mění, se rozptyl nazývá neelastickým. Nejsme-li schopni rozlišit, kde k rozptylu dochází, nazýváme rozptyl koherentním. Při tomto rozptylu dochází k interferenčním jevům [2, 3]. Nekoherentní rozptyl je rozptyl, při němž jsou rozptylová centra rozlišitelná a nedochází k interferenci. Při popisu jevů se zaměříme na popis koherentních dějů.

Při emisi a absorpci záření dochází ke změně hybnosti jádra, což vyvolává změnu

¹V důsledku Mössbauerova jevu lze změnu energie fotonu vlivem zpětného rázu zanedbat.

emisního a absorpčního spektra. Aby mohlo dojít k rezonanční interakci, musí nastat dostatečný překryv těchto dvou spekter. Tato podmínka je splněna při uvažování Mössbauerova jevu [4, 5], při kterém nedochází k předání hybnosti pouze mezi jádrem a fotonem, ale hybnost se předává celému krystalu, jehož je jádro součástí. Při popisu jevů bude dále předpokládána bezodrazová rezonanční interakce (Mössbauerův jev) a předávání hybnosti mezi fotonem a jádrem bude tedy zanedbáno.

V následujícím textu je popsáno šest metod popisů, z toho čtyři jsou semiklasické a dva kvantové. Nejdříve je text zaměřen na semiklasické popisy a následně na kvantové popisy. Vzhledem k velkému počtu různých formalismů a použitých konvencí značení jednotlivých fyzikálních veličin nejsou tato značení v rámci kapitoly 1 sjednocena. Pro zachování jednoznačnosti budou všechny veličiny vždy řádně a konzistentně definovány v jednotlivých podkapitolách. Ve zbytku textu (v ostatních kapitolách) je již použito jednotné značení dle příslušné metody, která je dále k popisu využívána.

1.1 Semiklasický popis

Semiklasický popis se vyznačuje tím, že kombinuje popis kvantový a klasický. V těchto modelech bývá záření popsáno klasicky a prostředí, kterým se záření šíří, kvantově. Tento dvojí způsob popisu je způsoben nutností popsat interakci jednotlivých jader s fotony. K popisu absorpce a emise záření jádrem je zapotřebí použít kvantovou fyziku. V semiklasických popisech se často k popisu šíření záření prostředím využívá veličin jako index lomu, permitivita nebo elektrická susceptibilita prostředí. Tyto veličiny již nepopisují vliv jednoho jádra na záření, ale souhrnné působení části prostředí na záření. Výhodami semiklasického popisu oproti plně kvantovému popisu jsou snadnější aplikování výsledných vztahů a možnost v některých případech najít analytická řešení a názornější interpretaci výsledných vztahů.

V dalších kapitolách jsou popsány semiklasické modely využívající pro charakterizaci rozptylu záření v prostředí indexu lomu, matici přenosu, funkci frekvenční odezvy a semiklasický model využívající diferenciální vlnovou rovnici.

Popis indexem lomu

Jako první rozebereme semiklasickou metodu popisu, která interakci záření s jednotlivými jádry prostředí zahrnuje do materiálové konstanty indexu lomu prostředí. Z makroskopického hlediska je γ záření elektromagnetickým vlněním, které lze popsat pomocí Maxwellových rovnic

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}, \quad (4)$$

kde, \vec{E} a \vec{H} jsou elektrická a magnetická intenzita, \vec{D} a \vec{B} jsou elektrická a magnetická indukce, ρ je makroskopická hustota volného náboje a \vec{J} je makroskopická hustota proudu. Součástí Maxwellových rovnic jsou i materiálové vztahy definující vztah mezi jednotlivými intenzitami a induklemi.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (5)$$

$$\vec{H} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \vec{B}, \quad (6)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\mu}$ jsou tenzory permitivity a permeability prostředí. Jsou-li tenzory $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\mu}$ diagonální a všechny diagonální prvky tenzorů jsou rovny ε a μ , potom se prostředí nazývá izotropické a interakce záření s prostředím je ve všech směrech stejná [6]. Ovlivnění záření izotropním prostředím je potom popsáno pomocí indexu lomu n , pro který platí vztah

$$\frac{n^2}{c^2} = \varepsilon\mu, \quad (7)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. V nehomogenním prostředí pro index lomu platí [6]

$$\frac{\mathbf{n}^2(\vec{x}, \omega)}{c^2} = \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}, \omega) \boldsymbol{\mu}(\vec{x}, \omega). \quad (8)$$

Index lomu \mathbf{n} lze dále vyjádřit pomocí matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} , počtu absorbujících jader v jednotce objemu N a vlnového čísla k [7–9]

$$\mathbf{n} = 1 + \frac{2\pi}{k^2} N \mathbf{f}. \quad (9)$$

Matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} se získává pomocí kvantového popisu.

Z Maxwellových rovnic (1–4) lze vlnovou rovnici ve frekvenční doméně pro šíření záření v prostředí se zanedbatelnou hustotou volného náboje ρ vyjádřit ve tvaru Helmholtzovy rovnice [6]

$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) + k^2 \mathbf{n}^2(\vec{x}, \omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega) = 0. \quad (10)$$

Řešení rovnice (10) má tvar

$$\vec{E}_{\text{tr}}(\omega) = e^{i\mathbf{n}(\omega)kd} \vec{E}_0(\omega), \quad (11)$$

kde $\vec{E}_{\text{tr}}(\omega)$ je amplituda vlny po transmisi prostředím délky d a $\vec{E}_0(\omega)$ amplituda dopadající vlny na prostředí [6]. Amplituda vlny vyzářené jednočárovým zdrojem záření, tedy zdrojem v jehož energetickém emisním spektru je pouze jedna spektrální čára, je popsána vztahem

$$\vec{E}_0(\omega) = i \frac{\vec{\mathcal{E}}}{\omega - \omega_0 + i \frac{\Gamma}{2\hbar}}, \quad (12)$$

kde $\hbar\omega_0 = \Delta E$ je energie přechodu mezi dvěma energetickými stavy jádra zdroje, Γ je přirozená šířka spektrální čáry související s dobou života excitovaného stavu $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$ [9] a $\vec{\mathcal{E}}$ je amplituda.

Aplikováním Fourierovy transformace na vztah (11) se přechází do popisu časového vývoje amplitudy po průchodu záření prostředím. V časové doméně nabývá vztah pro amplitudu vlny tvaru

$$\vec{E}_{\text{tr}}(t) = i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{n}(\omega)kd}}{\omega - \omega_0 + i \frac{\Gamma}{2\hbar}} e^{-i\omega t} d\omega \vec{\mathcal{E}}. \quad (13)$$

K použití vztahu (13) je potřeba znát matici indexu lomu prostředí \mathbf{n} , a tedy i matici amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} .

Využití matice přenosu

Další způsob popisu šíření záření v prostředí je založen na výpočtu diferenciální matice přenosu prostředím \mathbf{M} , ze které se dále počítá propustnost prostředí \mathbf{t} [10]. Obdobně jako v předchozí metodě i zde hraje důležitou roli matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} , která se získává pomocí kvantového popisu.

Diferenciální matice přenosu \mathbf{M} je matice 4×4 , jejíž prvky jsou závislé na matici amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} . Touto metodou lze řešit dopředný rozptyl, ale i tečný dopad záření. V případě dopředného rozptylu má diferenciální matice přenosu \mathbf{M} tvar [10]

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{21} \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Pro další výpočet se zavede integrální matice přenosu $\mathbf{L} = \exp(ikd\mathbf{M})$. Pro propustnost prostředí \mathbf{t} , definovanou vztahem $\vec{H}_t^t = \mathbf{t}\vec{H}_t$, kde spodní index t značí tečné složky vektoru magnetické intenzity \vec{H} , při dopředném rozptylu lze odvodit vztah [10]

$$\mathbf{t} = 2 \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{L}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \right]^{-1}, \quad (15)$$

kde \mathbf{I}_2 jsou jednotkové matice dimenze 2×2 . Další úpravou vztahu (15) a použitím značení

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{21} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} \end{pmatrix} \quad (16)$$

vychází vztah pro propustnost prostředí ve tvaru [10]

$$\mathbf{t} = \left[\cosh \left(ikd\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sinh \left(ikd\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \right) \left(\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{-1}. \quad (17)$$

Za předpokladu dostatečně malé velikosti susceptibilitivity prostředí lze součet $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{B}^{-\frac{1}{2}}$ nahradit dvojnásobkem jednotkové matice $2\mathbf{I}_2$ [10]. Využitím tohoto přiblížení lze vztah (17) zjednodušit na tvar [10]

$$\mathbf{t} \approx \exp \left(ikd\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \right). \quad (18)$$

Obdobně vychází i koeficient propustnosti pro elektrické pole \mathbf{t}_E , definovaný vztahem $\vec{E}^t = \mathbf{t}_E \vec{E}^0$, pro který platí vztah

$$\mathbf{t}_E \approx \exp(ikd\mathbf{n}), \quad (19)$$

kde \mathbf{n} je matice indexu lomu prostředí.

Pomocí této metody lze popsat šíření záření soustavou různých prostředí. V takovéto soustavě prostředí lze každé odlišitelné prostředí popsat integrální maticí přenosu \mathbf{L}_i pro toto prostředí. Integrální matice přenosu \mathbf{L}^{tot} popisující šíření záření celou soustavou různých prostředí se následně získá součinem

$$\mathbf{L}^{\text{tot}} = \mathbf{L}_n \dots \mathbf{L}_3 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1, \quad (20)$$

kde prostředí, kterým záření prochází nejdříve, má integrální matici přenosu \mathbf{L}_1 [10]. Tento formalismus umožňuje vyhodnotit amplitudové odraznosti a propustnosti prostředí. Pro svou aplikaci opět vyžaduje znalost matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} .

Aplikace funkce frekvenční odezvy

K popisu časového průběhu intenzity záření po interakci s prostředím se často využívá propojení časových průběhů a jejich obrazů ve frekvenční doméně Fourierovou transformací. Toto propojení umožňuje přechod mezi časovým průběhem veličiny a jejím obrazem ve frekvenční doméně.

Pro popis interakce záření s prostředím se přechází k vyjádření pomocí elektrické intenzity záření ve frekvenční doméně $E(\omega)$. Pro zpětné vyjádření časového průběhu elektrické intenzity záření se využívá již dříve zmíněná Fourierova transformace² [11]

$$E(t) = \text{const} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (21)$$

Část spektra záření je při průchodu prostředím více absorbována a následně vyzářena do obecně různých směrů. Toto se projevuje změnou spektra záření a časovým zpožděním části záření, které bylo absorbováno a následně znovu emitováno ve sledovaném směru. Pro popis rozptylu se definuje komplexní funkce frekvenční odezvy $f_0(\omega)$. Elektrické intenzity rozptýlené vlny $E_s(\omega)$ a vlny dopadající $E(\omega)$ jsou svázané vztahem [11]

$$E_s(\omega) = f_0(\omega) E(\omega), \quad (22)$$

kde funkce frekvenční odezvy $f_0(\omega)$ popisuje interakci záření a prostředí. Pro výpočet funkce frekvenční odezvy $f_0(\omega)$ se opět využívá kvantového popisu.

V případě rezonančního elastického dopředného rozptylu na jednom jádru má funkce frekvenční odezvy $f_0(\omega)$ tvar [11]

$$f_0(\omega) = -\frac{k}{4\pi} \sigma_0 \frac{\frac{\Gamma}{2\hbar}}{\omega - \omega_{eg} - i\frac{\Gamma}{2\hbar}} f_{\text{LM}}(\vec{k}) \beta, \quad (23)$$

kde σ_0 je maximální rezonanční účinný průřez, pro který platí vztah [11]

$$\sigma_0 = \frac{2\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \alpha} \frac{2I_e + 1}{2I_g + 1}, \quad (24)$$

$\alpha = \frac{\Gamma_c}{\Gamma_r}$ je koeficient vnitřní konverze, $\Gamma = \Gamma_r + \Gamma_c$ je přirozená šířka tvořená přirozenou šířkou způsobenou emitováním záření Γ_r a přirozenou šířkou způsobenou uvolněním elektronu z atomu Γ_c , I_e a I_g jsou jaderné spiny jádra v excitovaném a v základním stavu, $f_{\text{LM}}(\vec{k}) = \exp\left[-\left\langle (\vec{k}\vec{u})^2 \right\rangle\right]$ je Lambův–Mössbauerův faktor představující podíl rozptýleného záření bez zpětného rázu, \vec{u} je výchylka jádra z rovnovážné polohy a β je zastoupení rezonujícího izotopu v prostředí [11]. K největším změnám v elektrické intenzitě ve frekvenční doméně dochází pro úhlové frekvence odpovídající energii přechodu mezi základním a excitovaným stavem interagujícího jádra, tedy při rezonanci.

Časový průběh rozptýleného záření lze opět získat zpětnou Fourierovou transformací, nebo lze rovnou vypočítat provedením konvoluce časového průběhu dopadající vlny a odezvové funkce prostředí [11]. Odezvová funkce prostředí je Fourierovou transformací komplexní funkce frekvenční odezvy $f_0(\omega)$. Výpočet rozptylu s přechodem z časového průběhu elektrické intenzity na elektrickou intenzitu ve frekvenční doméně a zpět je výhodnější, jelikož konvoluce je náročnější operace než Fourierova transformace.

²Zde upozorňujeme, že použitá konvence Fourierovy transformace (fázový člen a normalizace) se může lišit napříč literaturou.

Tato metoda se používá i při popisu šíření záření prostředím, které se vzhledem ke zdroji záření pohybuje [12]. Pohyb prostředí se popisuje fázovou modulací amplitudy záření [12]

$$\vec{E}'(\vec{r}, t, \omega) = E_\omega \vec{\epsilon} e^{i[\omega t - \vec{k}(\vec{r} - \vec{u}(t))]}, \quad (25)$$

kde E_ω je amplituda monochromatické složky záření s úhlovou frekvencí ω .

Na rozdíl od předchozích popisů je v tomto popisu využito místo matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} funkce frekvenční odezvy $f_0(\omega)$. Jelikož použití matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} je obecnějším přístupem k popisu interakce záření a prostředí, je metoda popisu pomocí funkce frekvenční odezvy speciálním případem dřívějších popisů.

Řešení diferenciální vlnové rovnice

Další metoda popisující časový průběh záření je založena na řešení diferenciální vlnové rovnice. Popis vychází z výpočtu elektrické složky $\vec{E}(\vec{r}, t)$ z Maxwellovy vlnové rovnice ve tvaru

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \quad (26)$$

kde \vec{J} je indukovaná proudová hustota v rezonančním prostředí [13, 14]. Vlnová rovnice (26) popisuje změnu elektrické složky $\vec{E}(\vec{r}, t)$ při šíření prostředím. Jako počáteční podmínka se volí v čase modulovaná dopadající rovinná vlna šířící se ve směru osy z popsaná vztahem

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}(t) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (27)$$

kde $\vec{\epsilon}(t)$ je časovou modulací [13]. Pro výpočet se využívá aproximace pomalu se měnící obálkou. Dle této aproximace se výsledný vztah pro elektrickou složku $\vec{E}(\vec{r}, t)$ v libovolném bodě prostředí hledá ve tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}(z, t) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (28)$$

kde $\vec{e}(z, t)$ je vzhledem k oscilaci $\exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})]$ pomalu se měnící obálkou a v dané ploše kolmé na osu z a v daném čase popisuje amplitudu elektrické složky $\vec{E}(\vec{r}, t)$ [13]. Dále se také předpokládá, že indukovaná proudová hustota \vec{J} lze popsat vztahem

$$\vec{J}(z, t) = \vec{j}(z, t) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (29)$$

kde $\vec{j}(z, t)$ je opět pomalu se měnící obálkou [13]. Dosazením rovnic (28) a (29) do vlnové rovnice (26) lze zjednodušit vlnovou rovnici na diferenciální rovnici prvního řádu pro obálky $\vec{e}(z, t)$ a $\vec{j}(z, t)$ ve tvaru [13, 14]

$$\sin \Theta \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}(z, t) = -\frac{2\pi}{c} \vec{j}(z, t), \quad (30)$$

kde Θ je úhel dopadu, pro který platí $\sin \Theta = k_z/|\vec{k}|$.

Pro vyřešení diferenciální rovnice (30) je zapotřebí určit hustotu elektrického proudu $\vec{j}(z, t)$ indukovaného v prostředí zářením. K tomu je nutné použít kvantový výpočet [13].

1.2 Popis kvantovou teorií pole

Kvantová teorie pole je kvantovou teorií využívající polních operátorů. Popis vychází z druhého kvantování umožňující využít anihilačních a kreačních operátorů k vyjádření mnohočásticových operátorů. Polní operátory jsou takové operátory, které závisí na prostorovém vektoru \vec{r} . Každému prostorovému vektoru \vec{r} potom přísluší sada operátorů, které popisují pole v daném místě [15].

Použití kvantového popisu umožňuje vypočítat matici amplitudy koherentního dopředného rozptylu \mathbf{f} potřebnou v semiklasických výpočtech. Pro popis interakce záření a atomového systému se využívá Heisenbergův proudový operátor $j_\mu(x)$, počáteční Heisenbergův stavový vektor systému φ_0 , operátor koherentního elastického rozptylu $M_{\mu\nu}(x, y)$ a Feynmanův fotonový potenciál A_μ [16]. Při odvozování se nejdříve vychází z rozptylu na jednom atomu. Po odvození rozptylového operátoru systému se provádí zobecnění pro rozptyl na N atomech. Dále je uvažováno $\hbar = 1$.

Při popisu koherentního rozptylu záření v dané části prostředí je nutné zahrnout nejen primární dopadající záření, ale i záření vzniklé rozptylem při průchodu předchozími částmi prostředí. Celkové záření interagující s i -tým atomem je popsáno vztahem tvaru [16]

$$A^i(\vec{R}_i^0) = A^0(\vec{R}_i^0) + \sum_{j \neq i} \frac{e^{ik_0 \vec{R}_{ij}^0}}{\vec{R}_{ij}^0} \left[f_j^{\frac{1}{2}}(\vec{k}) N^{0(j)}(\vec{k}, \vec{k}') f_j^{\frac{1}{2}}(\vec{k}') + f_j^{\frac{1}{2}}(\vec{k} - \vec{k}') E^{0(j)}(\vec{k}, \vec{k}') \right] A^j(\vec{R}_j^0), \quad (31)$$

a záření vzniklé rozptylem na i -tém atomu je popsáno vztahem [16]

$$\left[A^s(\vec{R}, t) \right]^{f_0} = \sum_j \frac{e^{i(k_f |\vec{R} - \vec{R}_j^0| - \omega_f t)}}{|\vec{R} - \vec{R}_j^0|} \langle \chi_f | \left[\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j) |\chi_f\rangle N^{0(j)}(\vec{k}, \vec{k}') f_j^{\frac{1}{2}}(\vec{k}') + \exp(-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}_j) |\chi_0\rangle E^{0(j)}(\vec{k}, \vec{k}') \right] A^j(\vec{R}_j^0), \quad (32)$$

kde pro oba vztahy $A^i(\vec{R}_i^0)$ popisuje dopadající záření na i -tý atom a $\left[A^s(\vec{R}, t) \right]^{f_0}$ záření rozptýlené na i -tém atomu, \vec{R} je místo koherentního rozptylu vlny, \vec{k} a \vec{k}' jsou vlnové vektory fotonů emitovaných a absorbovaných atomem a představují operace $\vec{k} = i \overleftarrow{\nabla}_{\vec{R}_j^0}$ a $\vec{k}' = -i \overrightarrow{\nabla}_{\vec{R}_j^0}$, ve kterých šipky nad gradienty $\nabla_{\vec{R}_j^0}$ značí směr, ve kterém operátory působí, $f_j(\vec{k}) = \exp(-\langle (\vec{k} \cdot \vec{r}_i)^2 \rangle)$ je Lambův–Mössbauerův faktor i -tého atomu, $|\chi_0\rangle$ je počáteční vibrační stav atomu a $|\chi_f\rangle$ je finální vibrační stav atomu [16]. Zavedením operátoru koherentního elastického rozptylu na i -tém atomu $M_{\mu\nu}^{f_0}(i) = N_{\mu\nu}^{f_0}(i) + E_{\mu\nu}^{f_0}(i)$, kde $N_{\mu\nu}^{f_0}(i)$ je operátor rozptylu na jádře i -tého atomu a $E_{\mu\nu}^{f_0}(i)$ je operátor rozptylu na elektronech i -tého atomu, se soustava rovnic (31–32) zjednoduší na tvar [16]

$$A^i = A^0 + \sum_{j \neq i} \delta_{ij}^+(k_0) M^{00}(j) A^j, \quad (33)$$

$$\left[A^s(\vec{R}) \right]^{f_0} = \sum_i \delta_{\vec{R}, i}^+(k_f) M^{f_0}(i) A^i, \quad (34)$$

kde symbol δ_{ij}^+ představuje člen $\delta_{ij}^+ = (\vec{R}_{ij}^0)^{-1} \exp(ik_0 \vec{R}_{ij}^0)$.

Dle rovnic (31–32) koherentní rozptyl záření závisí na počátečním vibračním stavu

krystalu, počátečních stavech atomů a jejich polohách. Jelikož není možné počáteční stav krystalu přesně popsat, umožňuje tento popis vypočítat pouze střední hodnoty $\langle A^i \rangle$ za použití vztahu (33) [16]

$$\langle A^i \rangle = A^0 + \sum_{j \neq i} \delta_{ij}^+(k_0) \langle M^{00}(j) A^j \rangle. \quad (35)$$

Úplná koherentní vlna se nakonec získává integrací přes celý krystal [16].

Na podobném základě provádí své výpočty program CONUSS, který se často využívá zejména pro analýzu experimentů jaderného rezonančního rozptylu s použitím synchrotronového záření [17]. Při výpočtu se opět uvažuje zvlášť rozptyl na elektronech a na jádru a následně na celém atomu. Na rozdíl od předchozího modelu se výpočet nyní provádí v recipročním prostoru. Výpočet se nejdříve provádí pro tenký krystal, ve kterém dochází pouze k jednomu rozptylu. Rozptýlené pole záření je dáno součtem příspěvků od každého vektoru recipročné mřížky krystalu [17]. Následně se přechází do časo-prostorových souřadnic Fourierovou transformací. Pro možné směry šíření rozptýleného záření se získává podmínka $|\vec{k}_{0xy} + \vec{g}_\tau| \leq k_0$, kde k_0 je velikost vlnového vektoru dopadající vlny, \vec{g}_τ je reciprokový vektor mřížky a \vec{k}_{0xy} je složka vlnového vektoru dopadající vlny kolmá k normále povrchu tenkého krystalu [17]. Při rozptylu na tenkém krystalu má výsledný fotonový potenciál pole tvar

$$A_\mu^\pm(\vec{x}, t) = ib \sum_\tau e^{i(\vec{k}_{\tau\pm} \vec{x} - \omega_0 t)} f_{\mu\nu}^{\tau\pm 0+} a_{0,\nu}, \quad (36)$$

kde

$$\vec{k}_{\tau\pm} = \vec{k}_{0xy} + \vec{g}_{\tau\pm} \hat{z} \sqrt{k_0^2 - (\vec{k}_{0xy} + \vec{g}_\tau)^2}, \quad (37)$$

$$f_{\mu\nu}^{\tau\pm 0+} = \frac{\tilde{M}_{\mu\nu}^{(uc)}(\vec{k}_{\tau\pm}, \omega_0; \vec{k}_0, \omega)}{V_{uc}(\vec{k}_{\tau\pm})_z}, \quad (38)$$

\hat{z} představuje normálu povrchu tenkého krystalu, značení \pm označuje veličiny před a za tenkým krystalem, $f_{\mu\nu}^{\tau\pm 0+}$ jsou amplitudy rovinného rozptylu, které vyjadřují změnu ν -polarizovaného fotonu šířícího se v dopředném směru rozptylem na μ -polarizovaný foton rozptýleného do směru vlnového vektoru $\vec{k}_{\tau\pm}$ a $V_{uc}(\vec{k}_{\tau\pm})_z$ je objem rozptylového centra popsaného rozptylovou maticí $\tilde{M}_{\mu\nu}^{(uc)}$ [17].

Při řešení rozptylu záření na reálných vzorcích je potřeba dále uvažovat ještě i mnohonásobný rozptyl záření ve vzorku. Pro výpočet se využívá již získaných výsledků pro rozptyl na tenkém krystalu. Celý vzorek je popisován jako soustava tenkých krystalů stejné šířky, na kterých dochází k rozptylu. Fotonové pole uvnitř krystalu vzniklé mnohonásobným rozptylem je následně popsáno rekurzivně pomocí soustavy rovnic [17]. Podobně jako při rozptylu v tenkém krystalu tak i při mnohonásobných rozptylech vzniká podmínka na směry šíření rozptýleného záření. Rozptyl záření ze směru $\vec{k}_{\tau\pm}$ do směru $\vec{k}_{\tau'\pm}$ musí splňovat podmínku $|\sin(bk_{\tau\pm})| \approx |bf^{\tau\pm\tau'\pm}|$, kde b je šířka tenkého krystalu a $f^{\tau\pm\tau'\pm}$ je rozptylová amplituda pro záření dopadající s vlnovým vektorem $\vec{k}_{\tau\pm}$ a rozptýlené záření s vlnovým vektorem $\vec{k}_{\tau'\pm}$. Na základě této podmínky jsou směry rozptylu označeny jako otevřené nebo zavřené. Podmínka pro směr rozptylu záření je vždy splněna pro dopředný směr rozptylu záření [17].

Při popisu rozptylu na velkém vzorku se uvažují případy, kdy jsou jen jeden nebo nejvýše dva směry mnohonásobného rozptylu otevřené. Nejdůležitějšími případy jsou dopředný rozptyl, Braggovský rozptyl, ve kterém jsou započítané dopředný rozptyl

a rozptyl ve směru před tenký krystal, a Laueho rozptyl, ve kterém jsou započítané dopředný rozptyl a rozptyl ve směru za tenký krystal [17]. Výsledkem výpočtu jsou transmisní a reflexní matice krystalu [17].

Výsledky těchto metod popisu využívají semiklasické metody, kde vystupují v podobě materiálových konstant. Mezi tyto materiálové konstanty patří například index lomu prostředí.

1.3 Kvantově mechanický popis

Kvantově mechanický model pro popis jaderného rezonančního rozptylu γ záření, který je zde popsán, je někdy též označován jako „coherent path model“. Oproti semi-klasickému popisu vychází tento model čistě z kvantově-mechanického popisu rozptylu elektromagnetického záření [18, 19].

Model vychází ze Schrödingerovy rovnice pro obecný stav systému $|\Psi\rangle$. Systém a jeho vývoj je dán hamiltoniánem systému \hat{H}' , který se skládá ze dvou částí \hat{H} a \hat{H}_0 . Část \hat{H}_0 udává stacionární stavy $|\phi_m(0)\rangle$ systému. Tyto stacionární stavy celé soustavy zahrnují jaderné stavy všech jader, stavy všech elektronů a fotonů. Obecný stav systému $|\Psi\rangle$ je superpozicí těchto stacionárních stavů $|\phi_m(0)\rangle$. Tato superpozice je popsána vztahem

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_m a_m(t) e^{-i\left(\frac{E_m t}{\hbar}\right)} |\phi_m(0)\rangle, \quad (39)$$

kde $|\phi_m(0)\rangle$ jsou vlastní stavy hamiltoniánu \hat{H}_0 , suma přes index m je zde symbolická a dle situace se jedná o diskrétní sumu nebo integraci přes spojitý parametr [20, 21]. Druhá část hamiltoniánu \hat{H} popisuje interakci záření a jádra a umožňuje přechody mezi stavy $|\phi_m(0)\rangle$ [20]. Řešením Schrödingerovy rovnice se obdrží soustava sdružených diferenciálních rovnic pro amplitudy pravděpodobnosti $a_p(t)$ [21].

Pro získání diferenciální soustavy rovnic se vychází ze Schrödingerovy rovnice pro stav systému $|\Psi\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}' |\Psi\rangle = \left(\hat{H} + \hat{H}_0 \right) |\Psi\rangle, \quad (40)$$

následně se dosazením rovnice (39) za stav systému získá rovnice ve tvaru

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_m a_m(t) e^{-i\left(\frac{E_m t}{\hbar}\right)} |\phi_m(0)\rangle \right) = \left(\hat{H} + \hat{H}_0 \right) \sum_m a_m(t) e^{-i\left(\frac{E_m t}{\hbar}\right)} |\phi_m(0)\rangle. \quad (41)$$

Vynásobením $\langle \phi_p(0) |$ rovnice (41) zleva a použitím vztahů $\hat{H}_0 |\phi_m(0)\rangle = E_m |\phi_m(0)\rangle$ a $\langle \phi_p(0) | \phi_m(0)\rangle = \delta_{pm}$ se získá diferenciální rovnice pro amplitudu pravděpodobnosti $a_p(t)$ ve tvaru

$$i\hbar \frac{\partial a_p(t)}{\partial t} = \sum_m a_m(t) e^{i(\omega_p - \omega_m)t} \langle \phi_p(0) | \hat{H} | \phi_m(0)\rangle, \quad (42)$$

kde $\omega_p = \frac{E_p}{\hbar}$ a $\omega_m = \frac{E_m}{\hbar}$. Rovnice (42) je dále na pravé straně doplněná o člen $i\hbar \delta_{pl} \delta(t)$ zajišťující, že systém je v čase $t = 0$ v definovaném stavu l [20–22]. δ_{pl} je Kroneckerovo delta, které zde zajišťuje splnění počáteční podmínky [22], a $\delta(t)$ je Diracova δ -funkce, která zde zajišťuje řešení nespojitosti při $t = 0$ [22]. Tímto způsobem je definovaná počáteční podmínka na systém. Diferenciální rovnice (42) je pak ve tvaru [20]

$$i\hbar \frac{\partial a_p(t)}{\partial t} = \sum_m a_m(t) e^{i(\omega_p - \omega_m)t} \langle \phi_p(0) | \hat{H} | \phi_m(0)\rangle + i\hbar \delta_{pl} \delta(t). \quad (43)$$

V dalším postupu se přechází z časové domény do frekvenční pomocí Fourierovy transformace [20–22]

$$a_p(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} A_p(\omega) e^{i(\omega_p - \omega)t} d\omega. \quad (44)$$

Dosazením (44) do (43) a přepsáním Diracovy δ -funkce v integrálním tvaru dostaneme rovnici ve tvaru

$$(\omega - \omega_p) A_p(\omega) = \sum_m A_m(\omega) \frac{\langle \phi_p(0) | \hat{H} | \phi_m(0) \rangle}{\hbar} + \delta_{pl}. \quad (45)$$

Nakonec se na levou stranu rovnice (45) přidává člen $i\varepsilon A_p(\omega)$ [20]. Tato operace se provádí za účelem posunutí pólu amplitudy $A_p(\omega)$ do záporné imaginární poloroviny. Takto posunutý pól amplitudy po provedení Fourierovy transformace zavádí do vypočítaného vztahu Heavisideovu funkci, jenž zamezuje růst amplitudy v záporném směru časové osy. Rovnice (45) je tak přepsána do tvaru [20]

$$(\omega - \omega_p + i\varepsilon) A_p(\omega) = \sum_m A_m(\omega) \frac{\langle \phi_p(0) | \hat{H} | \phi_m(0) \rangle}{\hbar} + \delta_{pl}. \quad (46)$$

Při popisu děje touto metodou se postupuje ve třech krocích. Prvním krokem je sestavení soustavy rovnic, která popisuje vývoj systému. Druhým krokem je vyjádření hledané amplitudy $A_p(\omega)$, která popisuje záření, ze soustavy rovnic. Ve třetím kroku se přechází od amplitudy $A_p(\omega)$ k amplitudě pravděpodobnosti $\psi_r(x, t)$ popisující pravděpodobnost detekce fotonu v určitém místě a čase.

V prvním kroku se popíše systém pomocí obecného stavu systému $|\Psi(t)\rangle$, který je lineární kombinací stacionárních stavů $|\phi_m(0)\rangle$, a interakční Hamiltonián \hat{H} , který popisuje přechody mezi stavy $|\phi_m(0)\rangle$. Jakmile je systém popsán stavy a Hamiltoniánem, dosadí se do vztahu (46), a tím se získá soustava rovnic popisující systém.

Ve druhém kroku je soustava rovnic řešená postupným dosazováním. Při dosazování se postupuje od amplitud popisujících konverzní elektrony a γ fotonu k amplitudám popisujících vývoj jader. Důležitým krokem je vyjádření amplitudy popisující počáteční stav systému. Tato amplituda je první amplitudou, která se vyřeší. V popisech dějů uvažující přítomnost jen jednoho fotonu souvisí tato amplituda s energetickým spektrem zářiče. Jakmile je tato amplituda vypočítána, zpětně se dosazuje do zbývajících nevyjádřených amplitud, včetně amplitudy popisující vývoj fotonu.

V posledním kroku se hledaná amplituda nejdříve převádí Fourierovou transformací (44) z frekvenční domény do časové. Časová amplituda popisuje vývoj jednotlivých monochromatických vln a proto se musí v posledním části výpočtu všechny monochromatické vlny sečíst. Tím se získá amplituda pravděpodobnosti $\psi_r(x, t)$, pomocí které lze určit pravděpodobnost detekování záření.

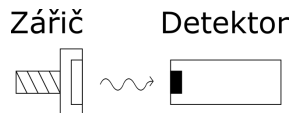
Pro popis stimulované emise γ záření byl zvolen tento kvantově mechanický popis. Výhodami tohoto popisu bylo, že na rozdíl od dříve popsáných semiklasických popisů nevyžadoval použití jiných popisů pro odvození materiálových konstant prostředí a zároveň popis umožňuje rozšíření změnou obecného stavu systému a změnou interakčního hamiltoniánu na popis dalších jevů.

2 Základní aplikace kvantově mechanického modelu

V této kapitole je popsána aplikace zvolené kvantově mechanické teorie k popisu základních jevů souvisejících se šířením rezonančních fotonů prostředím. Konkrétně se jedná o vyzařování fotonů z radioaktivního zdroje a dopředný rezonanční rozptyl bez zpětného rázu, jenž jsou popsány v příslušné literatuře [18, 20]. Na těchto ukázkových příkladech bude zaveden a ověřen jednotný matematicko-fyzikální rámec. Ten byl realizován sjednocením popisů ze souboru publikací věnujících se kvantově mechanickému popisu různých jevů s využitím různých zdrojů záření [20–27]. Výsledný popis tak mohl být dále v kapitolách 3 a 4 zobrazen na popis nových jevů. V následujících dvou podsekcích je rozepsán postup při popisu výše uvedených základních dvou dějů. Při výpočtech je zanedbána polarizace fotonů a spin elektronů.

2.1 Vyzařování zářiče

Nejzákladnějším systémem je systém, ve kterém je přítomen pouze zdroj záření. Uvažuje se systém, ve kterém je do počátku souřadnic umístěno excitované jádro a kde jsou dovolenými jevy emitování γ fotonu nebo konverzního elektronu. V popisu se předpokládá, že v počátečním čase je jádro zářiče v excitovaném stavu. Vypočítaná amplituda pravděpodobnosti umožňuje popis časového vývoje, který odpovídá měření doby života tohoto excitovaného stavu. Vyzařování samotného zářiče a detekce emitovaného záření je schématicky znázorněno na obrázku 2.



Obrázek 2: Schéma vyzařování samotného zářiče a jeho detekce.

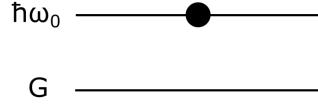
Jak bylo popsáno v kapitole 1.3, výpočet probíhá ve třech krocích. V prvním kroku je sestavena soustava rovnic pro amplitudy popisující systém, ve druhém kroku se řeší soustava rovnic pro amplitudu popisující záření a v posledním kroku se přechází od amplitudy ve frekvenční doméně k amplitudě pravděpodobnosti.

Soustava rovnic

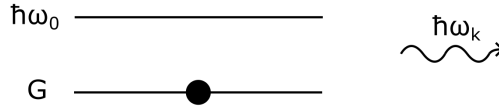
Systém, ve kterém je přítomen jen samotný zdroj záření, lze popsat třemi amplitudami $A(\omega)$, $B_k(\omega)$ a $C_p(\omega)$ [18]. Stav $|e^j\rangle | \{0_k\} \rangle | [0] \rangle$, ve kterém se nachází excitované jádro v zářiči a v systému není ani γ foton ani konverzní elektron, je charakterizován amplitudou $A(\omega)$. Amplitudy $B_k(\omega)$ a $C_p(\omega)$ popisují stavy $|g\rangle |1_k\rangle | [0] \rangle$ a $|g\rangle | \{0_k\} \rangle |1_p\rangle$ systému, při nichž je jádro ve zdroji na základní energetické hladině a je přítomen pouze γ foton nebo konverzní elektron. V těchto stavech označuje $|e^j\rangle$ přítomnost excitovaného jádra, $|g\rangle$ přítomnost jádra v základním stavu, $| \{0_k\} \rangle$ nepřítomnost fotonu o libovolném vlnovém čísle k , $|1_k\rangle$ přítomnost jednoho fotonu o vlnovém čísle k , $| [0] \rangle$ nepřítomnost konverzního elektronu o libovolné hybnosti a $|1_p\rangle$ označuje přítomnost

konverzního elektronu s hybností p . Toto značení je převzato z [21]. Schéma stavů systému a jejich příslušných amplitud je znázorněno na obrázku 3.

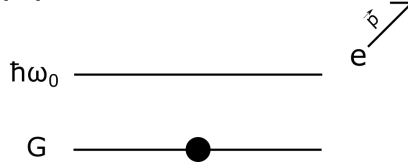
$A(\omega)$:



$B_k(\omega)$:



$C_p(\omega)$:



Obrázek 3: Schéma stavů, ke kterým jsou přiřazeny amplitudy $A(\omega)$, $B_k(\omega)$ a $C_p(\omega)$.

Obecný stav systému je popsán vlnovou funkcí

$$|\psi(t)\rangle = a(t) e^{-i\omega_0 t} |e^j\rangle |0_k\rangle |[0]\rangle + \sum_k b_k(t) e^{-i\omega_k t} |g\rangle |1_k\rangle |[0]\rangle + \sum_p c_p(t) e^{-i\omega_p t} |g\rangle |0_k\rangle |1_p\rangle, \quad (47)$$

kde $a(t)$, $b_k(t)$ a $c_p(t)$ jsou amplitudy závislé na čase a odpovídají frekvenčně závislým amplitudám $A(\omega)$, $B_k(\omega)$ a $C_p(\omega)$.

Hamiltonián \hat{H} popisující jednotlivé interakce v systému má tvar

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_k H_k \hat{a}_k (|e^j\rangle \langle g|) + \sum_k H_k^* \hat{a}_k^\dagger (|g\rangle \langle e^j|) + \\ & + \sum_p H_p \hat{b}_p (|e^j\rangle \langle g|) + \sum_p H_p^* \hat{b}_p^\dagger (|g\rangle \langle e^j|), \end{aligned} \quad (48)$$

kde \hat{a}_k , \hat{a}_k^\dagger jsou anihilační a kreační operátory odebírající ze systému a přidávající do systému fotony s vlnovými čísly k , \hat{b}_p , \hat{b}_p^\dagger jsou anihilační a kreační operátory odebírající ze systému a přidávající do systému elektrony s hybností p , $(|e^j\rangle \langle g|)$ a $(|g\rangle \langle e^j|)$ jsou operátory popisující excitaci a deexcitaci jádra [27, 28] a H_k , H_k^* , H_p a H_p^* jsou vazebné konstanty charakterizující sílu interakce jader s fotony s vlnovými čísly k a s elektrony o hybnosti p [19, 20, 27, 29].

Dosažením amplitud, stavů a hamiltoniánu do vztahu (46) vznikla algebraická soustava tří provázaných rovnic tvaru [18]

$$(\omega - \omega_0 + i\varepsilon) A(\omega) = 1 + \sum_k \frac{B_k(\omega) H_k}{\hbar} + \sum_p \frac{C_p(\omega) H_p}{\hbar}, \quad (49)$$

$$(\omega - \omega_k + i\varepsilon) B_k(\omega) = \frac{A(\omega) H_k^*}{\hbar}, \quad (50)$$

$$(\omega - \omega_p + i\varepsilon) C_p(\omega) = \frac{A(\omega) H_p^*}{\hbar}. \quad (51)$$

Rovnice (49) popisuje vývoj jádra zdroje. Na pravé straně této rovnice číslo 1 vyjadřuje, že v čase $t = 0$ bylo ve zdroji záření excitované jádro, člen $\frac{B_k(\omega) H_k}{\hbar}$ popisuje, že jádro zdroje záření v základním stavu může být excitováno absorbováním γ fotonu s vlnovým číslem k a energií $\hbar\omega_k$, a člen $\frac{C_p(\omega) H_p}{\hbar}$ značí, že jádro zdroje záření v základním stavu může být excitováno konverzním elektronem zdroje s hybností p [20]. Vývoj γ záření je popsán rovnicí (50). Na pravé straně této rovnice člen $\frac{A(\omega) H_k^*}{\hbar}$ vyjadřuje emitování γ fotonu o vlnovém vektoru k a energii $\hbar\omega_k$ excitovaným jádrem zdroje [20]. Rovnice (51) charakterizuje vývoj konverzních elektronů emitovaných ze zdroje záření. Člen $\frac{A(\omega) H_p^*}{\hbar}$ představuje emitování konverzních elektronů excitovaným zdrojem záření.

Řešení soustavy rovnic

V dalším kroku byla amplituda $B(\omega)$, která popisuje γ záření, vyjádřena ze soustavy rovnic (49–51). Nejprve se z rovnice (51) vyjádří amplituda $C_p(\omega)$

$$C_p(\omega) = \frac{A(\omega) H_p^*}{\hbar(\omega - \omega_p + i\varepsilon)}. \quad (52)$$

Dosazením vztahu (52) do rovnice (49) se získá vztah

$$(\omega - \omega_0 + i\varepsilon) A(\omega) = 1 + \sum_k \frac{B_k(\omega) H_k}{\hbar} + \frac{A(\omega)}{\hbar^2} \sum_p \frac{|H_p|^2}{\omega - \omega_p + i\varepsilon}, \quad (53)$$

Druhou symbolickou sumu na pravé straně rovnice (53) lze vyjádřit integrálem³ [20]

$$\sum_p \frac{|H_p|^2}{\omega - \omega_p + i\varepsilon} = \frac{L}{2\pi\hbar} \int dp \frac{|H_p|^2}{\omega - \omega_p + i\varepsilon}, \quad (54)$$

kde L je délka strany krychle ohraničující popisovaný prostor. Výskyt L ve vztahu (54) je důsledkem kvantování dovolených hybností konverzního elektronu p způsobené okrajovými podmínkami rovnosti amplitudy pravděpodobnosti a její derivace na stranách krychle ohraničující prostor [19, 21]. Pro úpravu zlomku $\frac{1}{(\omega - \omega_p + i\varepsilon)}$ se využilo vztahu

$$\frac{1}{(\omega - \omega_p + i\varepsilon)} = P \frac{1}{\omega - \omega_p} - i\pi\delta(\omega - \omega_p), \quad (55)$$

³Někdy se místo 1D varianty používá 3D varianta $\sum_{\vec{p}} \frac{|H_{\vec{p}}|^2}{\omega - \omega_{\vec{p}} + i\varepsilon} = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{|H_{\vec{p}}|^2}{\omega - \omega_{\vec{p}} + i\varepsilon} p^2 dp d\Omega$, kde Ω je prostorový úhel [21]. Tohoto zápisu vztahu se využívá v případě, že se místo skalární veličiny p uvažuje vektor hybnosti elektronu \vec{p} .

kde P je hlavní hodnota integrálu [18, 20, 21]. Část s hlavní hodnotou souvisí s posuvem energie, který se zanedbává [18, 20, 21]. Suma ze vztahu (54) lze tedy přepsat na tvar

$$\sum_p \frac{|H_p|^2}{\omega - \omega_p + i\varepsilon} \approx -i \frac{L}{2\hbar} \int dp |H_p|^2 \delta(\omega - \omega_p) = -i \frac{\hbar}{2} \Gamma_c, \quad (56)$$

kde $\Gamma_c = \frac{L}{\hbar^2} \int dp |H_p|^2 \delta(\omega - \omega_p)$ je příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi konverzních elektronů [20, 21]. Touto úpravou sumy lze přepsat vztah (53) na tvar

$$\left(\omega - \omega_0 + i \frac{\Gamma_c}{2\hbar} \right) A(\omega) = 1 + \sum_k \frac{B_k(\omega) H_k}{\hbar}. \quad (57)$$

Dále je vyjádřena amplituda $B_k(\omega)$ z rovnice (50) ve tvaru

$$B_k(\omega) = \frac{A(\omega) H_k^*}{\hbar (\omega - \omega_k + i\varepsilon)}. \quad (58)$$

Dosazením vztahu (58) za amplitudu $B_k(\omega)$ ve vztahu (57) se získá rovnice pro amplitudu $A(\omega)$, která je nezávislá na zbylých amplitudách $B_k(\omega)$ a $C_p(\omega)$, ve tvaru

$$\left(\omega - \omega_0 + i \frac{\Gamma_c}{2\hbar} \right) A(\omega) = 1 + \frac{A(\omega)}{\hbar^2} \sum_k \frac{|H_k|^2}{\omega - \omega_k + i\varepsilon}. \quad (59)$$

Suma v rovnici (59) je obdobným postupem jako při úpravě sumy $\sum_p \frac{|H_p|^2}{\omega - \omega_p + i\varepsilon}$ přepsána na tvar

$$\sum_k \frac{|H_k|^2}{\omega - \omega_k + i\varepsilon} \approx -i \frac{L}{2\hbar} \int dk |H_k|^2 \delta(\omega - \omega_k) = -i \frac{\hbar}{2} \Gamma_r, \quad (60)$$

kde $\Gamma_r = \frac{L}{\hbar^2} \int dk |H_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$ je příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi γ záření [18, 20, 21]. Dosazením vztahu (60) do vztahu (59) a následnou úpravou se získal vztah pro amplitudu $A(\omega)$ ve tvaru

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_0 + i \frac{\Gamma}{2\hbar}}, \quad (61)$$

kde $\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_r$ je úplná šířka spektrální čáry [18, 20]. Druhá mocnina absolutní hodnoty amplitudy $A(\omega)$ je popsána Lorentzovou funkcí $|A(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4\hbar^2}}$ a představuje energetické emisní spektrum zdroje záření. Vztah pro amplitudu $B_k(\omega)$, která popisuje emitovaný γ foton, se získá dosazením vztahu (61) do vztahu (50)

$$B_k(\omega) = \frac{H_k^*}{\hbar (\omega - \omega_k + i\varepsilon) (\omega - \omega_0 + i \frac{\Gamma}{2\hbar})}. \quad (62)$$

Amplituda pravděpodobnosti

V posledním kroku se z amplitudy $B_k(\omega)$ vypočítala amplituda pravděpodobnosti detekce záření. V první části tohoto výpočtu se získal časový průběh amplitudy $B_k(\omega)$ pomocí inverzní Fourierovy transformace

$$b_k(t) = -\frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega B_k(\omega) e^{i(\omega_k - \omega)t}. \quad (63)$$

Dosazením vztahu (62) do Fourierovy transformace (63) se získá vztah

$$b_k(t) = -\frac{H_k^* e^{i\omega_k t}}{i2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{(\omega - \omega_k + i\varepsilon)(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar})}. \quad (64)$$

Použitím Cauchyho integrálního vzorce [30] vychází vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{(\omega - \omega_k + i\varepsilon)(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar})} = -i \frac{2\pi e^{-i\omega_k t} e^{-\varepsilon t} \Theta(t)}{\omega_k - \omega_0 + i(\frac{\Gamma}{2\hbar} - \varepsilon)}, \quad (65)$$

ve kterém se zanedbal příspěvek od pólu $\omega = \omega_0 - i\frac{\Gamma}{2\hbar}$ [20] a $\Theta(t)$ je Heavisideova funkce. Vztah pro časový průběh $b_k(t)$ je vyjádřen ve tvaru

$$b_k(t) = \frac{H_k^* e^{-\varepsilon t} \Theta(t)}{\hbar [\omega_k - \omega_0 + i(\frac{\Gamma}{2\hbar} - \varepsilon)]}. \quad (66)$$

V dalším kroku je aplikována limita $\varepsilon \rightarrow 0$ na vztah (66)

$$b_k(t) = \frac{H_k^* \Theta(t)}{\hbar (\omega_k - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar})}. \quad (67)$$

Pro výpočet amplitudy pravděpodobnosti detekování záření je uvažováno záření tvořené rovinnými vlnami šířícími se v kladném směru osy x , což umožňuje využít vztah [20]

$$\psi_r(x,t) = \sum_k \frac{e^{i(kx - \omega_k t)}}{\sqrt{L}} b_k(t) = \frac{\sqrt{L}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(kx - \omega_k t)} b_k(t). \quad (68)$$

Dosazením vztahu (67) do vztahu (68) a využitím $\omega_k = kc$ vychází

$$\psi_r(x,t) = \frac{\sqrt{L} H_k^*}{2\pi\hbar c} \Theta(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_k(t - \frac{x}{c})} d\omega_k}{\omega_k - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar}}. \quad (69)$$

Integrál ve vztahu (69) představuje Fourierovu transformaci funkce $\frac{1}{\omega_k - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar}}$ a vychází

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_k(t - \frac{x}{c})} d\omega_k}{\omega_k - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar}} = -i2\pi e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2\hbar})(t - \frac{x}{c})} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (70)$$

kde $\Theta(t - \frac{x}{c})$ je Heavisideova funkce. Dosazením vztahu (70) do vztahu (69) vychází pro amplitudu pravděpodobnosti vztah ve tvaru [20]

$$\psi_r(x,t) = -i\sqrt{L} \frac{H_k^*}{\hbar c} e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2\hbar})(t - \frac{x}{c})} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (71)$$

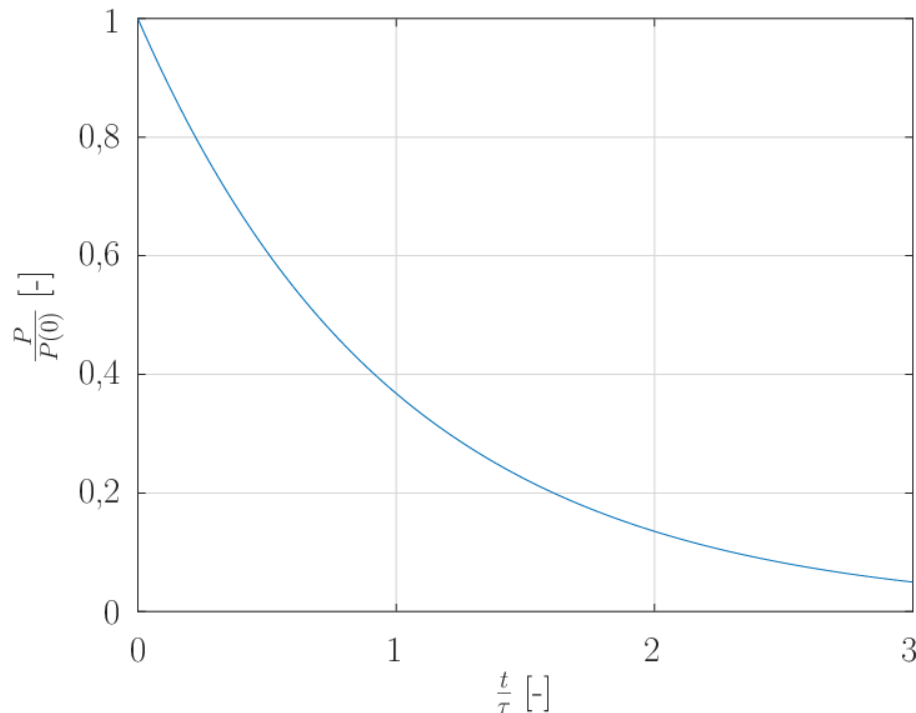
Vztah pro hustotu pravděpodobnosti detekování fotonu emitovaného jádrem je vyjádřen ve tvaru

$$P(x,t) = |\psi_r(x,t)|^2 = L \frac{|H_k|^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}(t - \frac{x}{c})} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (72)$$

Dle vztahu (72) hustota pravděpodobnosti detekování γ fotonu po zformování excitovaného jádra v počátku souřadnic exponenciálně klesá s časovou konstantou $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$, nazývanou doba života. Vztah (72) lze pomocí této konstanty přepsat do tvaru

$$P(x,t) = L \frac{|H_k|^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\frac{t'}{\tau}} \Theta(t'), \quad (73)$$

kde $t' = t - \frac{x}{c}$. Na obrázku 4 je znázorněna závislost hustoty pravděpodobnosti detekování fotonu, která je dána vztahem (73).

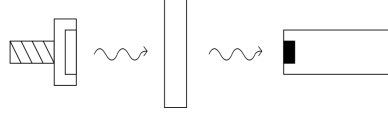


Obrázek 4: Graf závislosti hustoty pravděpodobnosti detekování fotonu vzhledem k času v jednotce doby života pro $x = 0$.

2.2 Dopředný rezonanční rozptyl bez zpětného rázu

V předchozí podsekcí bylo popsáno vyzařování samotného zářiče. V této podsekcí je systém rozšířen o absorbátor. Uvažovaný absorbátor je tvořený takovými jádry, jejichž energetický rozdíl mezi základním a excitovaným stavem je stejný jako v případě jader ve zdroji záření. Současně jádro zdroje záření a jádra absorbátoru jsou vázané na svou pozici, a tedy při emisi a absorpci nedochází ke zpětnému rázu. Rozptyl záření v dopředném směru se v takovém systému označuje jako dopředný rezonanční rozptyl bez zpětného rázu.

Zářič Absorbátor Detektor



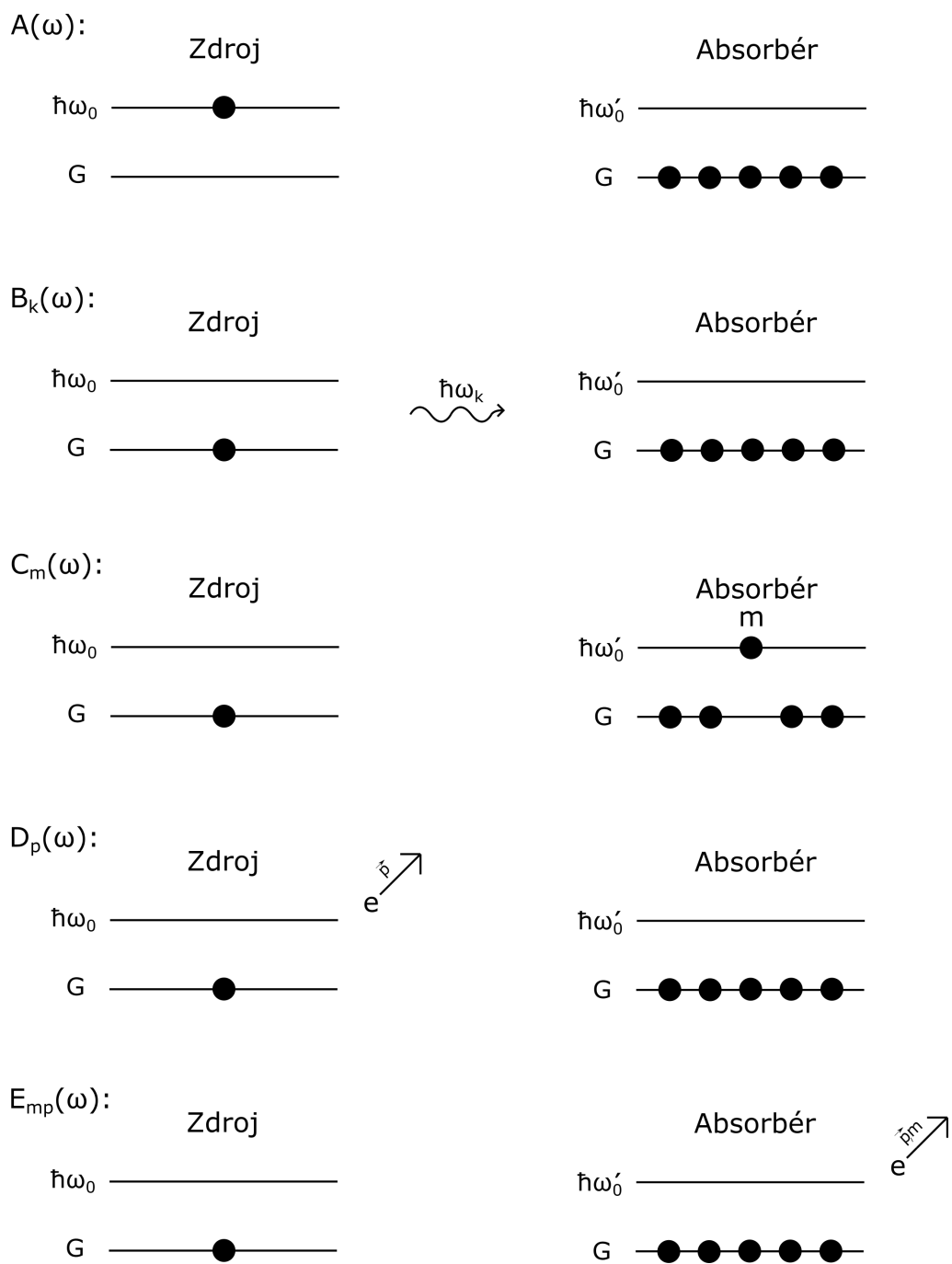
Obrázek 5: Schéma znázorňující dopředný rozptyl záření a jeho detekci.

Při popisu se záření emitované z excitovaného jádra umístěného v počátku souřadnic rozptyluje na N efektivních rezonančních jádrech v základním stavu absorbátoru umístěného mezi zdroj záření a detektor. Záření procházející absorbátorem se v trojrozměrném prostoru rozptyluje na jádrech umístěných v různých pozicích absorbátoru. V tomto modelu se využívá jednorozměrné reprezentace „řetízkem“ efektivních jader, kde jedno efektivní jádro představuje vrstvu absorbátoru kolmou na směr šíření záření, ve které dochází maximálně k jednomu rozptylu záření [20].

Tento systém je znázorněn na obrázku 5. Popis dopředného rozptylu je opět odvozen ve třech krocích, sestavení soustavy rovnic, řešení soustavy rovnic a nakonec vyjádření amplitudy pravděpodobnosti detekce fotonu.

Soustava rovnic

Prvním krokem při vytváření popisu je opět sestavení soustavy rovnic popisujících dopředný rozptyl. Pro popis dopředného rozptylu je definováno pět amplitud $A(\omega)$, $B_k(\omega)$, $C_m(\omega)$, $D_p(\omega)$ a $E_{mp}(\omega)$. Amplituda $A(\omega)$ popisuje stav systému $|e_1^j\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle | \{0_k\}\rangle$, ve kterém v počátku souřadnic existuje excitované jádro zdroje záření o energii $\hbar\omega_0$, všechna jádra absorbátoru se nacházejí v základním energetickém stavu a v prostředí není přítomen žádný foton ani konverzní elektron. Amplituda $B_k(\omega)$ charakterizuje stav systému $|g_1\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle |1_k\rangle$, ve kterém jsou všechna jádra absorpčního prostředí a zdroje záření v základním stavu a je přítomen jeden foton s vlnovým číslem k a energii $\hbar\omega_k$. Amplituda $C_m(\omega)$ popisuje stav systému $|g_1\rangle | [0]\rangle |e_{2_m}^j\rangle |g_2(m)\rangle | [0]\rangle | \{0_k\}\rangle$, ve kterém pouze jedno jádro absorpčního prostředí umístěné v pozici $x = x_m$ je vybuzeno energií $\hbar\omega_0'$ do excitovaného energetického stavu. Stav systému $|g_1\rangle |1_p\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle | \{0_k\}\rangle$, ve kterém je přítomen konverzní elektron mající hybnost p , který je vyzářen v důsledku deexcitace energeticky vybuzeného jádra zdroje, a všechna jádra zdroje a absorpčního prostředí jsou v základním energetickém stavu, je popsán amplitudou $D_p(\omega)$. Amplituda $E_{mp}(\omega)$ charakterizuje stav systému $|g_1\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle |1_{p,m}\rangle | \{0_k\}\rangle$, ve kterém je přítomen konverzní elektron mající hybnost p , který je emitován přechodem m -tého jádra absorbátoru umístěného v bodě $x = x_m$ z vybuzeného do základního energetického stavu, a všechna jádra zdroje záření a absorpčního prostředí jsou opět v základním stavu. V těchto stavech označuje $|g_{2_0}\rangle$ přítomnost všech jader absorbátoru v základním stavu, $|e_{2_m}^j\rangle$ přítomnost excitovaného m -tého jádra v absorbátoru, $|g_2(m)\rangle$ přítomnost všech jader absorbátoru, kromě m -tého, v základním stavu, $|1_{p,m}\rangle$ přítomnost jednoho konverzního elektronu o hybnosti p emitovaného m -tým jádrem absorbátoru. Toto značení je opět převzato z [21]. Stavy charakterizované amplitudami jsou znázorněny na obrázku 6.



Obrázek 6: Schéma stavů, ke kterým jsou přiřazeny jednotlivé amplitudy.

Při výpočtu je zanedbána polarizace fotonu a spin elektronů. Obecný stav systému má tvar

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = & a(t) e^{-i\omega_0 t} |e_1^j\rangle |[0]\rangle |g_{2_0}\rangle |[0]\rangle |\{0_k\}\rangle + \\
& + \sum_k b_k(t) e^{-i\omega_k t} |g_1\rangle |[0]\rangle |g_{2_0}\rangle |[0]\rangle |1_k\rangle + \\
& + \sum_m c_m(t) e^{-i\omega_0' t} |g_1\rangle |[0]\rangle |e_{2_m}^j\rangle |g_2(m)\rangle |[0]\rangle |\{0_k\}\rangle + \\
& + \sum_p d_p(t) e^{-i\omega_p t} |g_1\rangle |1_p\rangle |g_{2_0}\rangle |[0]\rangle |\{0_k\}\rangle + \\
& + \sum_p \sum_m e_{mp}(t) e^{-i\omega_p t} |g_1\rangle |[0]\rangle |g_{2_0}\rangle |1_{p,m}\rangle |\{0_k\}\rangle,
\end{aligned} \tag{74}$$

kde amplitudy $a(t)$, $b_k(t)$, $c_m(t)$, $d_p(t)$ a $e_{mp}(t)$ odpovídají frekvenčně závislým amplitudám $A(\omega)$, $B_k(\omega)$, $C_m(\omega)$, $D_p(\omega)$ a $E_{mp}(\omega)$ [20]. Hamiltonián popisující interakce v systému má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \sum_k H_k \hat{a}_k (|e_1^j\rangle \langle g_1|) + \sum_k H_k^* \hat{a}_k^\dagger (|g_1\rangle \langle e_1^j|) + \\
& + \sum_p H_p \hat{b}_p (|e_1^j\rangle \langle g_1|) + \sum_p H_p^* \hat{b}_p^\dagger (|g_1\rangle \langle e_1^j|) + \\
& + \sum_m \sum_k H_k \hat{a}_k e^{ikx_m} (|e_{2_m}^j\rangle \langle g_{2_m}|) + \\
& + \sum_m \sum_k H_k^* \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx_m} (|g_{2_m}\rangle \langle e_{2_m}^j|) + \\
& + \sum_m \sum_p H_p \hat{b}_p e^{i\frac{p}{\hbar}x_m} (|e_{2_m}^j\rangle \langle g_{2_m}|) + \\
& + \sum_m \sum_p H_p^* \hat{b}_p^\dagger e^{-i\frac{p}{\hbar}x_m} (|g_{2_m}\rangle \langle e_{2_m}^j|).
\end{aligned} \tag{75}$$

Operátory \hat{a}_k , \hat{a}_k^\dagger , \hat{b}_p , \hat{b}_p^\dagger , $(|e_1^j\rangle \langle g_1|)$ a $(|g_1\rangle \langle e_1^j|)$ jsou stejné jako při popisu vyzařování samotného zářiče. Novými operátory jsou $(|e_{2_m}^j\rangle \langle g_{2_m}|)$ a $(|g_{2_m}\rangle \langle e_{2_m}^j|)$, které excitují a deexcitují m -té jádro v absorbátoru, zatím co ostatní jádra ponechávají bez změny.

Jednotlivé amplitudy, stavy a hamiltonián interakcí jsou dosazeny do rovnice (46) a získává se soustava provázaných rovnic [20]

$$(\omega - \omega_0 + i\varepsilon) A(\omega) = 1 + \sum_k \frac{B_k(\omega) H_k}{\hbar} + \sum_p \frac{D_p(\omega) H_p}{\hbar}, \tag{76}$$

$$(\omega - \omega_k + i\varepsilon) B_k(\omega) = \frac{A(\omega) H_k^*}{\hbar} + \sum_m \frac{C_m(\omega) H_k^*}{\hbar} e^{-ikx_m}, \tag{77}$$

$$(\omega - \omega_0' + i\varepsilon) C_m(\omega) = \sum_k \frac{B_k(\omega) H_k}{\hbar} e^{ikx_m} + \sum_p \frac{E_{mp}(\omega) H_p}{\hbar} e^{i\frac{p}{\hbar}x_m}, \tag{78}$$

$$(\omega - \omega_p + i\varepsilon) D_p(\omega) = \frac{A(\omega) H_p^*}{\hbar}, \tag{79}$$

$$(\omega - \omega_p + i\varepsilon) E_{mp}(\omega) = \frac{C_m(\omega) H_p^*}{\hbar} e^{-i\frac{p}{\hbar}x_m}. \tag{80}$$

Rovnice (76) a její interpretace jsou stejné jako při popisu vyzařování samotného zářiče [20]. Interpretace rovnice (77) popisující γ záření je podobná interpretaci při popisu vyzařování zářiče. V tomto případě přibývají v rovnici členy $\frac{C_m(\omega)H_k^*}{\hbar}e^{-ikx_m}$, jenž mají interpretaci emitování γ fotonu o vlnovém vektoru k a energii $\hbar\omega_k$ excitovaným jádrem absorbátoru na pozici x_m . Exponenciála e^{-ikx_m} představuje fázovou změnu emitovaného záření způsobenou umístěním emitujícího jádra absorbátoru ve vzdálenosti $x = x_m$ od zdroje záření [20].

Rovnice (78) popisuje vývoj m -tého jádra absorbátoru. Na pravé straně této rovnice člen $\frac{B_k(\omega)H_k}{\hbar}e^{ikx_m}$ představuje excitování m -tého jádra absorbováním γ fotonu s vlnovým číslem k a energií $\hbar\omega_k$ a člen $\frac{E_{mp}(\omega)H_p}{\hbar}e^{i\frac{p}{\hbar}x_m}$ popisuje excitování m -tého jádra konverzním elektronem s hybností p . Exponenciály $e^{-i\frac{p}{\hbar}x_m}$ a e^{ikx_m} představují fázovou změnu absorbovaného záření a konverzních elektronů způsobenou umístěním m -tého jádra absorbátoru ve vzdálenosti $x = x_m$ od zdroje záření.

Rovnice (79) popisuje vývoj konverzních elektronů emitovaných ve zdroji záření. Člen $\frac{A(\omega)H_p^*}{\hbar}$ znamená emitování konverzních elektronů zdrojem záření. Rovnice (80) popisuje vývoj konverzních elektronů emitovaných v absorbátoru. Člen $\frac{C_m(\omega)H_p^*}{\hbar}e^{-i\frac{p}{\hbar}x_m}$ značí emitování konverzních elektronů m -tým excitovaným jádrem absorbátoru a exponenciála $e^{-i\frac{p}{\hbar}x_m}$ představuje fázový posun konverzních elektronů způsobený umístěním m -tého jádra absorbátoru.

V tomto kroku se získala soustava rovnic (76–80), ve které amplituda $B_k(\omega)$ popisuje záření. Pro popsání dopředného rozptylu záření v prostředí je nutné vyjádřit amplitudu $B_k(\omega)$ z této soustavy rovnic.

Řešení soustavy rovnic

Po sestavení soustavy rovnic (76–80) je nutné vyjádřit amplitudu $B_k(\omega)$, která popisuje záření. Za tímto účelem se nejprve vyjádří amplituda $E_{mp}(\omega)$ z rovnice (80) ve tvaru

$$E_{mp}(\omega) = \frac{C_m(\omega)H_p^*}{\hbar(\omega - \omega_p + i\varepsilon)}e^{-i\frac{p}{\hbar}x_m}. \quad (81)$$

Dosazením vztahu (81) do rovnice (78) se získá

$$(\omega - \omega'_0 + i\varepsilon)C_m(\omega) = \sum_k \frac{B_k(\omega)H_k}{\hbar}e^{ikx_m} + \sum_p \frac{C_m(\omega)|H_p|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_p + i\varepsilon)}. \quad (82)$$

Druhá symbolická suma se na pravé straně rovnice (82) vyjádří integrálem a následně konstantou pomocí dříve popsaného postupu

$$\sum_p \frac{C_m(\omega)|H_p|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_p + i\varepsilon)} \approx -i\frac{LC_m}{2\hbar^3} \int dp |H_p|^2 \delta(\omega - \omega_p) = -iC_m \frac{\Gamma_c}{2\hbar}, \quad (83)$$

kde $\Gamma_c = \frac{L}{\hbar^2} \int dp |H_p|^2 \delta(\omega - \omega_p)$ je příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi konverzních elektronů [20, 21]. Touto úpravou zlomku lze přepsat vztah (82) na tvar

$$\left(\omega - \omega'_0 + i\frac{\Gamma_c}{2\hbar}\right)C_m(\omega) = \sum_k \frac{B_k(\omega)H_k}{\hbar}e^{ikx_m}. \quad (84)$$

Z rovnice (77) se vyjádří amplituda $B_k(\omega)$

$$B_k(\omega) = \frac{A(\omega)H_k^*}{\hbar(\omega - \omega_k + i\varepsilon)} + \sum_m \frac{C_m(\omega)H_k^*}{\hbar(\omega - \omega_k + i\varepsilon)} e^{-ikx_m} \quad (85)$$

a dosazením do vztahu (84) a úpravou se získá vztah ve tvaru [20]

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma_c}{2\hbar}) C_m(\omega) &= \frac{A(\omega)e^{i\frac{\omega}{c}x_m}}{\hbar^2} \sum_k \frac{|H_k|^2}{\omega - \omega_k + i\varepsilon} + \\ &+ \sum_{m'} \frac{C_{m'}e^{i\frac{\omega}{c}(x_m - x_{m'})}}{\hbar^2} \sum_k \frac{|H_k|^2}{\omega - \omega_k + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (86)$$

Sumy $\sum_k \frac{|H_k|^2}{\omega - \omega_k + i\varepsilon}$ ve vztahu (86) se opět vyjádří pomocí integrálů

$$\sum_k \frac{|H_k|^2}{\omega - \omega_k + i\varepsilon} = \frac{L}{2\pi\hbar} \int dk \frac{|H_k|^2}{\omega - \omega_k + i\varepsilon} \approx -i\frac{L}{2\hbar} \int dk |H_k|^2 \delta(\omega - \omega_k) = -i\hbar \frac{\Gamma_r}{2}, \quad (87)$$

kde $\Gamma_r = \frac{L}{\hbar^2} \int dk |H_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$ je příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi γ záření [20, 21]. Dosazením (87) do (86) a úpravou se získá vztah

$$\left(\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar}\right) C_m(\omega) = -iA(\omega) \frac{\Gamma_r}{2\hbar} e^{i\frac{\omega}{c}x_m} - i \sum_{m'=1}^{m-1} C_{m'}(\omega) \frac{\Gamma_r}{2\hbar} e^{i\frac{\omega}{c}(x_m - x_{m'})}, \quad (88)$$

kde $\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_r$ je úplná šířka spektrální čáry [20]. V sumě se sčítá pouze do členu s indexem $m' = m - 1$, protože se neuvažuje ovlivnění m -tého jádra jádry, které jsou dále od zdroje záření. Dosazením $m = 1, 2, 3$ do rovnice (88) lze upravit pro první tři amplitudy C_1, C_2, C_3 vztahy na tvary

$$C_1(\omega) = -i \frac{A(\omega) \frac{\Gamma_r}{2\hbar}}{\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar}} e^{i\frac{\omega}{c}x_1}, \quad (89)$$

$$C_2(\omega) = -i \frac{A(\omega) \frac{\Gamma_r}{2\hbar}}{\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar}} e^{i\frac{\omega}{c}x_2} \left[1 - i \frac{\Gamma_r}{2\hbar} \frac{1}{\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar}} \right], \quad (90)$$

$$C_3(\omega) = -i \frac{A(\omega) \frac{\Gamma_r}{2\hbar}}{\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar}} e^{i\frac{\omega}{c}x_3} \left[1 - i \frac{\Gamma_r}{2\hbar} \frac{1}{\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar}} \right]^2. \quad (91)$$

Obecně pro amplitudu $C_m(\omega)$ bude platit vztah [20]

$$C_m(\omega) = -i \frac{A(\omega) \frac{\Gamma_r}{2\hbar}}{\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar}} e^{i\frac{\omega}{c}x_m} \left[1 - i \frac{\Gamma_r}{2\hbar} \frac{1}{\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar}} \right]^{m-1}. \quad (92)$$

Dosazením vztahu (92) do rovnice (77) a následnou úpravou se získá vztah [20]

$$B_k(\omega) = \frac{A(\omega)H_k^*}{\hbar(\omega - \omega_k + i\varepsilon)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^N e^{i(\frac{\omega}{c}-k)x_m} \alpha [1 + \alpha]^{m-1} \right\}, \quad (93)$$

kde $\alpha = -i \frac{\Gamma_r}{2\hbar(\omega - \omega_0' + i\frac{\Gamma}{2\hbar})}$. Ve vztahu (93) první část $\frac{A(\omega)H_k^*}{\hbar(\omega - \omega_k + i\varepsilon)}$ odpovídá poli pocházejícího pouze ze zdroje a druhá část $\frac{A(\omega)H_k^*}{\hbar(\omega - \omega_k + i\varepsilon)} \sum_{m=1}^N e^{i(\frac{\omega}{c}-k)x_m} \alpha [1 + \alpha]^{m-1}$ odpovídá

dodatečnému poli vzniklému interakcí záření s jádru absorbátoru [20].

Pro vyřešení hledané amplitudy $B_k(\omega)$ je zapotřebí určit amplitudu $A(\omega)$. Pro tento účel se nejdříve vyjádří amplituda $D_p(\omega)$ ze vztahu (79) ve tvaru

$$D_p(\omega) = \frac{A(\omega)H_p^*}{\hbar(\omega - \omega_p + i\varepsilon)}. \quad (94)$$

Vztah (94) se dosadí do vztahu (76)

$$(\omega - \omega_0 + i\varepsilon)A(\omega) = 1 + \sum_k \frac{B_k(\omega)H_k}{\hbar} + \sum_p \frac{A(\omega)|H_p|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_p + i\varepsilon)}. \quad (95)$$

Suma $\sum_p \frac{A(\omega)|H_p|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_p + i\varepsilon)}$ se převede na integrál již dříve popsáním způsobem. Využitím vztahu pro radiční šířku $\Gamma_c = \frac{L}{\hbar^2} \int dp |H_p|^2 \delta(\omega - \omega_p)$ a převedením na levou stranu rovnice se vztah (95) zjednoduší

$$\left(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma_c}{2\hbar}\right)A(\omega) = 1 + \sum_k \frac{B_k(\omega)H_k}{\hbar}. \quad (96)$$

Dosazením $B_k(\omega)$ z rovnice (93) do rovnice (96) se získá jedna rovnice o jedné neznámé $A(\omega)$ ve tvaru

$$\left(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma_c}{2\hbar}\right)A(\omega) = 1 + \sum_k \frac{A(\omega)|H_k|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_k + i\varepsilon)} \left\{1 + \sum_{m=1}^N e^{i\left(\frac{\omega}{c} - k\right)x_m} \alpha [1 + \alpha]^{m-1}\right\}. \quad (97)$$

Část $\sum_k \frac{A(\omega)|H_k|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_k + i\varepsilon)} \sum_{m=1}^N e^{i\left(\frac{\omega}{c} - k\right)x_m} \alpha [1 + \alpha]^{m-1}$ ze vztahu (97) odpovídá excitaci jádra zářiče zářením pocházejícího z jader absorbátoru a její vliv se dále zanedbává. Suma $\sum_k \frac{A(\omega)|H_k|^2}{\hbar^2(\omega - \omega_k + i\varepsilon)}$ se opět přepíše dříve popsáním způsobem na integrál. Opět se využívá vztahu pro radiční šířku $\Gamma_r = \frac{L}{\hbar^2} \int dk |H_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$. Na základě těchto úprav má vztah (97) tvar

$$\left(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma_c}{2\hbar}\right)A(\omega) = 1 - iA(\omega)\frac{\Gamma_r}{2\hbar}. \quad (98)$$

Využitím vztahu pro úplnou šířku $\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_r$ a jednoduchou úpravou vychází pro amplitudu $A(\omega)$ vztah

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar}}. \quad (99)$$

Při popisu dopředného rozptylu je druhá mocnina absolutní hodnoty amplitudy $A(\omega)$ dána Lorentzovou funkcí $|A(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4\hbar^2}}$ a představuje energetické spektrum zářiče. Dosazením (99) do rovnice (93) se získá vztah pro hledanou amplitudu $B_k(\omega)$ ve tvaru

$$B_k(\omega) = \frac{H_k^*}{\hbar\left(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar}\right)(\omega - \omega_k + i\varepsilon)} \left\{1 + \sum_{m=1}^N e^{i\left(\frac{\omega}{c} - k\right)x_m} \alpha [1 + \alpha]^{m-1}\right\}. \quad (100)$$

V druhém kroku popisu dopředného rozptylu se vyjádřila amplituda $B_k(\omega)$, která popisuje záření. Pomocí této amplitudy se v posledním kroku popisu získá amplituda pravděpodobnosti popisující pravděpodobnost detekce záření v čase.

Amplituda pravděpodobnosti

Pro vypočítání amplitudy pravděpodobnosti $\psi_r(x,t)$ detekování γ fotonu je potřeba nejdříve vypočítat amplitudu $b_k(t)$ popisující stav systému v časové doméně. Amplituda $b_k(t)$ se získá aplikováním inverzní Fourierovy transformace na amplitudu $B_k(\omega)$ vyjádřenou vztahem (100). Využitím vlastnosti integrálů lze opět vyvodit, že i pro časový průběh bude platit $b_k(t) = b_k^{\text{zdroj}}(t) + \sum_{m=1}^N b_{k,m}^a(t)$. První část $b_k^{\text{zdroj}}(t)$ odpovídá záření pocházejícímu pouze ze zdroje a část $\sum_{m=1}^N b_{k,m}^a(t)$ odpovídá součtu přírůstků záření od každé interakce záření s jádrem absorbátoru [20]. Pro výpočet amplitudy pravděpodobnosti $\psi_r(x,t)$ se opět využije součet příspěvků od všech monochromatických vln pomocí vztahu (68). Časový průběh amplitudy pravděpodobnosti $\psi_r^{\text{zdroj}}(x,t)$ odpovídající pouze záření pocházejícímu ze zdroje byl odvozen v kapitole 2.1 ve tvaru

$$\psi_r^{\text{zdroj}}(x,t) = -i\sqrt{L}\frac{H_k^*}{\hbar c}e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2\hbar})(t - \frac{x}{c})}\Theta\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (101)$$

kde člen $t - \frac{x}{c}$ představuje časové zpoždění způsobené konečnou rychlostí světla, $\Theta(t - \frac{x}{c})$ je Heavisideova funkce.

Výpočet příspěvků pocházejících od interakce záření s jádrem absorbátoru je komplikovanější. Amplitudy příspěvků vzniklých interakcí s m -tým jádrem absorbátoru lze zapsat ve tvaru [20]

$$b_{k,m}^a(t) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{H_k^*}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{i(\omega_k - \omega)t}e^{i(\frac{\omega}{c} - k)x_m}\frac{\alpha(1 + \alpha)^{m-1}}{(\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar})(\omega - \omega_k + i\varepsilon)}. \quad (102)$$

Úpravou vztahu (102) využitím binomické věty $\sum_{n=0}^{m-1}\binom{m-1}{n}\alpha^n = (1 + \alpha)^{m-1}$ a následnou integrací se získá vztah [20]

$$b_{k,m}^a(t) = \frac{H_k^*\Theta(t)}{\hbar(\omega_k - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar})}\sum_{n=0}^{m-1}\binom{m-1}{n}\alpha^{n+1}(\omega_k), \quad (103)$$

kde $\alpha(\omega_k) = -i\frac{\Gamma}{2\hbar(\omega_k - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar})}$. Dosazením vztahu (103) do vztahu (68) a přičtením amplitudy pravděpodobnosti $\psi_r^{\text{zdroj}}(x,t)$ odpovídající pouze záření pocházejícímu ze zdroje se získá vztah pro celkovou amplitudu pravděpodobnosti $\psi_r(x,t)$ ve tvaru

$$\psi_r(x,t) = \psi_r^{\text{zdroj}}(x,t) + \frac{\sqrt{L}H_k^*}{2\pi\hbar c}\Theta(t)\sum_{m=1}^N\sum_{n=0}^{m-1}\binom{m-1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_k\frac{e^{-i\omega_k(t - \frac{x}{c})}}{\omega_k - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2\hbar}}\alpha^{n+1}(\omega_k). \quad (104)$$

Index m označuje, na kterém efektivním jádru dochází k rozptylu, a index n označuje, kolikrát došlo k rozptylu fotonu než začal interagovat s m -tým efektivním jádrem. Pro integraci užitím Cauchyho integrační formule [30] je potřeba odvodit vztah

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{e^{-izt'}}{z - \beta}\right) = -n!\frac{e^{-izt'}}{(\beta - z)^{n+1}}\left[1 + \sum_{p=1}^n\frac{(-it')^p(\beta - z)^p}{p!}\right]. \quad (105)$$

Tohoto vztahu se využívá při výpočtu příspěvku od pólu $z = \omega_0' - i\frac{\Gamma}{2\hbar}$ do integrálu. Pro přehlednost bylo využito zápisu $\beta = \omega_0 - i\frac{\Gamma}{2\hbar}$. Rozepsáním vztahu (104) na členy

dle počtu jader l přispívajících k interakci záření s absorbátorem se získá vztah [20]

$$\psi_r(x,t) = \psi_r^{\text{zdroj}}(x,t) + \sum_{l=1}^N \binom{N}{l} a_l(x,t) \Theta(t'), \quad (106)$$

kde

$$a_l(x,t) = -i\sqrt{L} \frac{H_k^*}{\hbar c} e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2\hbar})t'} \left(-i\frac{\Gamma_r}{2\hbar}\right)^l \left\{ \frac{1 - e^{-i(\omega_0' - \omega_0)t'} \left[1 + \sum_{p=1}^{l-1} \frac{(-it')^p (\omega_0 - \omega_0')^p}{p!} \right]}{(\omega_0 - \omega_0')^l} \right\}, \quad (107)$$

kde $t' = t - \frac{x}{c}$. Pro indexy n a l platí $l = n + 1$. Vztah (107) je obecným vztahem pro dopředný rozptyl bez zpětného rázu.

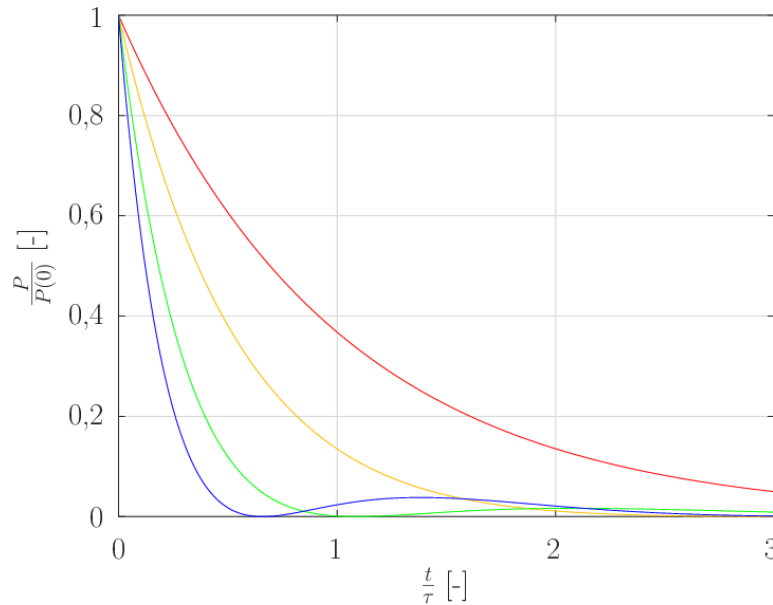
V rezonanci, když $\omega_0 = \omega_0'$, se vztah (106) zjednoduší na tvar [20]

$$\psi_r(x,t) = \psi_r^{\text{zdroj}}(x,t) \left\{ 1 + \sum_{l=1}^N \binom{N}{l} \left[-\frac{\Gamma_r}{2\hbar} \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]^l \frac{1}{l!} \right\}. \quad (108)$$

Výpočtem vychází stejný výsledek jako v [20]. Hustota pravděpodobnosti dopadu fotonu do detektoru za absorbátorem při dopředném rezonančním rozptylu bez zpětného rozptylu vychází

$$P(x,t) = |\psi_r(x,t)|^2 = L \frac{|H_k|^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\frac{t'}{\tau}} \left\{ 1 + \sum_{l=1}^N \binom{N}{l} \left[-\frac{\Gamma_r t'}{2\Gamma\tau} \right]^l \frac{1}{l!} \right\}^2 \Theta(t'), \quad (109)$$

kde se opět využívá značení $t' = t - \frac{x}{c}$ a $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$. Na obrázku 7 je znázorněno porovnání závislostí hustoty pravděpodobnosti detekování fotonu dané vztahem (109) při dopředném rozptylu skrz absorbátor a bez absorbátoru.



Obrázek 7: Grafy závislostí pravděpodobnosti detekování fotonu vzhledem k času v jednotce doby života pro $x = 0$ při dopředném rozptylu s počtem efektivních jader absorbátoru $N = 10$ (žlutá), $N = 30$ (zelená), $N = 50$ (modrá) a při pouhém vyzařování ze zdroje záření (červená).

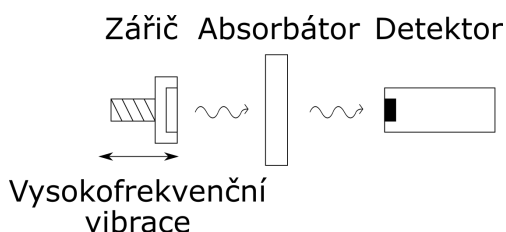
3 Popis akusticky indukované transparence

Neexistence vhodného aktivního média pro stimulovanou emisi γ fotonu je motivací k hledání jevů umožňujících potlačení absorpce γ záření. Absorpci γ záření v prostředí lze ovlivnit pomocí jevů indukované transparence [31, 32]. Jedním z jevů, kterého by se dalo využít, je akusticky indukovaná transparence. Tento jev využívá změny absorpčního nebo emisního spektra způsobené vysokofrekvenčním kmitavým pohybem zdroje záření nebo absorbátoru. Při vhodném nastavení parametrů sestavy dochází k potlačení rezonančního píku spektra a ke zvýšení transparence absorbátoru pro záření emitované zdrojem [32].

Akusticky indukovaná transparence patří do skupiny metod využívající vibračního pohybu zdroje záření nebo absorbátoru ke změně časového průběhu intenzity γ záření. Obecně se jedná o metody tzv. koherentní manipulace s γ zářením [31]. V této kapitole je nejdříve popsán obecný jev koherentní manipulace s γ fotony, kterého se následně využívá k vytvoření popisu jevu akusticky indukované transparence.

3.1 Koherentní manipulace s γ zářením

Zavedení vibrací mezi zářič a absorbátor se projevuje Dopplerovým jevem. Vlivem Dopplerova posunu dochází ke změně absorpčních a emisních spekter. Změny ve spektrech se následně projevují změnou časového průběhu intenzity záření [31]. Na obrázku 8 je znázorněno uspořádání experimentu pro koherentní manipulaci s γ zářením vysokofrekvenčním vibračním pohybem zářiče.



Obrázek 8: Schéma znázorňující uspořádání experimentu pro koherentní manipulaci s γ zářením vyvolanou vibrací zářiče.

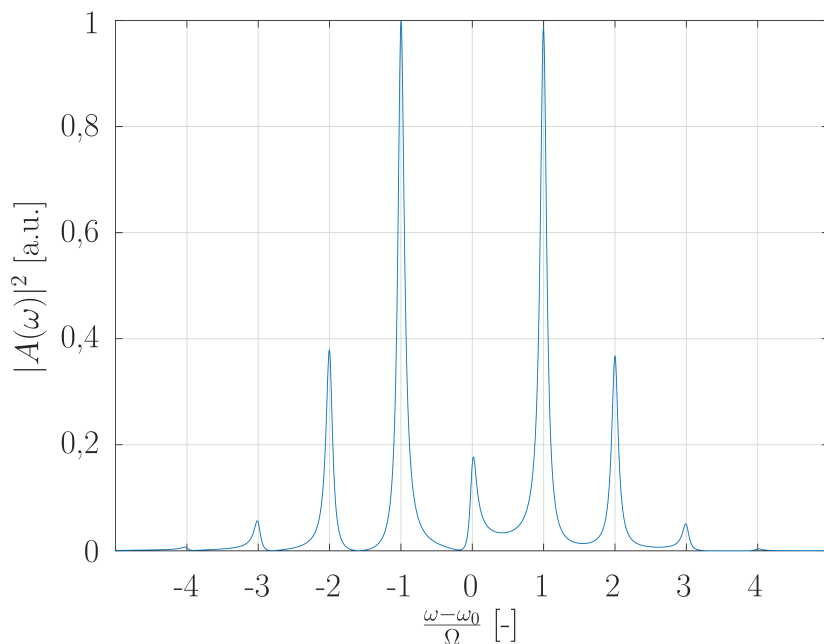
Vytvářený popis je zaměřen na variantu koherentní manipulace s γ zářením, při které zářič kmitá harmonickým pohybem o vysokých frekvencích, kdy perioda pohybu je již srovnatelná s dobou života excitovaného stavu jader. Řádově se jedná o frekvence $\gtrsim 1$ MHz. Při vytváření popisu je využito poznatku o amplitudě popisující excitovaný stav zářiče z popisu dopředného rozptylu a vyzařování samotného zářiče, viz kapitola 2. Odvozování opět probíhá ve třech krocích, sestavení soustavy rovnic charakterizujících popisovaný systém, odvození vztahu pro amplitudu popisující záření a vypočítání amplitudy pravděpodobnosti detekce fotonu v čase pomocí dříve vypočítané amplitudy.

Soustava rovnic

Amplitudy popisující systém jsou označeny stejně jako při popisu dopředného rozptylu v podkapitole 2.2. Na obrázku 10 jsou znázorněny frekvenčně závislé amplitudy a příslušné stavy systému. Při popisu dopředného rezonančního rozptylu a vyzařování samotného zářiče amplituda $A(\omega)$ odpovídá emisnímu energetickému spektru zářiče. Tohoto poznatku je zde využito. Jelikož se zářič při koherentní manipulaci se zářením, vyvolané harmonickým pohybem zářiče, chová jako vážená suma nekonečně mnoha energetických stavů jader posunutých o energie $\Delta E_s = s\hbar\Omega$, kde s je celé číslo, je amplituda $A(\omega)$ volena ve tvaru [31]

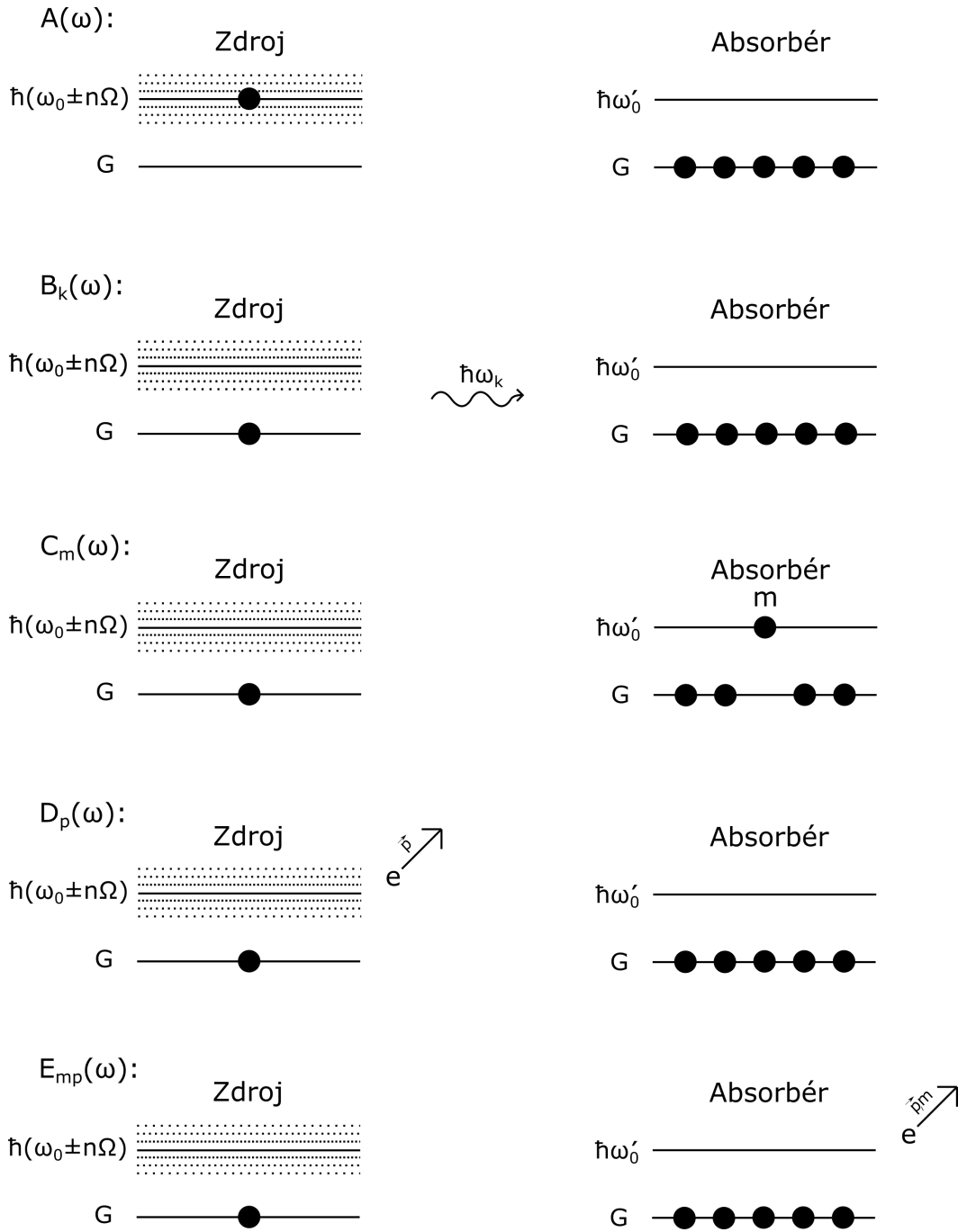
$$A(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s(\omega) J_s(p) e^{is\vartheta_0} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{J_s(p) e^{is\vartheta_0}}{\omega - \omega_0 + s\Omega + i\frac{\Gamma}{2\hbar}}, \quad (110)$$

kde $A_s(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_0 + s\Omega + i\frac{\Gamma}{2\hbar}}$ popisuje spektrální čáru zdroje energeticky posunutého o energii ΔE_s od energie zářiče v klidu, $J_s(p)$ je Besselova funkce s -tého řádu s argumentem p , kde $p = \frac{2\pi R}{\lambda}$ je index modulace [31], R je amplituda vibračního pohybu, λ je vlnová délka záření, fáze vibračního pohybu $\vartheta_0 = \Omega t_0$ souvisí s časem t_0 od emise počátečního 122 keV γ fotonu (v případě použití zářiče z radioaktivního materiálu obsahujícího izotop ^{57}Co) [31], fáze ϑ_0 se uvažuje jako náhodná veličina [31] a Ω je úhlová frekvence vibračního pohybu zářiče. Emisní spektrum dané vztahem (110) je znázorněno na obrázku 9.



Obrázek 9: Graf emisního spektra zdroje záření, jenž se pohybuje vysokofrekvenčním harmonickým pohybem, daného vztahem (110) pro hodnoty $p = 2$ a $\frac{\Omega}{2\pi} = 10,2$ MHz.

Rovnice popisující zbylé amplitudy $B_k(\omega)$, $C_m(\omega)$, $D_p(\omega)$ a $E_{mp}(\omega)$ jsou stejné jako rovnice (77–80) popisující dopředný rezonanční rozptyl bez zpětného rázu. Z této soustavy rovnic je dále odvozen vztah pro amplitudu $B_k(\omega)$, která popisuje γ záření.



Obrázek 10: Schéma stavů, ke kterým jsou přiřazeny amplitudy.

Řešení soustavy rovnic

Z rovnic (77–78) a (80) se odvodila rovnice (93) postupem popsáním v podsekcí 2.2. Následně se do rovnice (93) dosadil za amplitudu $A(\omega)$ vztah (110). Výsledný vztah pro amplitudu $B_k(\omega)$ vychází

$$B_k(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{H_k^* J_s(p) e^{is\vartheta_0}}{\hbar(\omega - \omega_0 + s\Omega + i\frac{\Gamma}{2\hbar})(\omega - \omega_k + i\varepsilon)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^N e^{i(\frac{\omega}{c} - k)x_m} \alpha [1 + \alpha]^{m-1} \right\}, \quad (111)$$

kde opět $\alpha = -i \frac{\Gamma_r}{2\hbar(\omega - \omega_0 + i \frac{\Gamma_r}{2\hbar})}$. Pomocí odvozeného vztahu (111) pro amplitudu $B_k(\omega)$ je dále vypočítaná amplituda pravděpodobnosti detekce γ fotonu.

Amplituda pravděpodobnosti

Při odvození amplitudy pravděpodobnosti se postupuje podobně jako při popisu dopředného rezonančního rozptylu bez zpětného rázu v podkapitole 2.2. Vztah (111) se upravuje použitím vztahu

$$\alpha [1 + \alpha]^{m-1} = \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \alpha^{n+1}. \quad (112)$$

Následně je aplikována inverzní Fourierova transformace (44) na vztah pro amplitudu $B_k(\omega)$, čímž se získá vztah pro časově závislou amplitudu $b_k(t)$ ve tvaru

$$b_k(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{H_k^* J_s(p) e^{is\vartheta_0} \Theta(t)}{\hbar(\omega_k - \omega_0 + s\Omega + i \frac{\Gamma_r}{2\hbar})} \left[1 + \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \alpha^{n+1}(\omega_k) \right], \quad (113)$$

kde opět $\alpha(\omega_k) = -i \frac{\Gamma_r}{2\hbar(\omega_k - \omega_0 + i \frac{\Gamma_r}{2\hbar})}$.

Vztah (113) lze opět rozdělit na dvě části, na část odpovídající vyzářování pouze ze zářiče a na část pocházející z absorbátoru. Část odpovídající vyzářování zářiče nabývá tvaru

$$b_k^{\text{zdroj}}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{H_k^* J_s(p) e^{is\vartheta_0} \Theta(t)}{\hbar(\omega_k - \omega_0 + s\Omega + i \frac{\Gamma_r}{2\hbar})}. \quad (114)$$

Dosazením vztahu (114) do vztahu (68) se získá vztah pro amplitudu pravděpodobnosti $\psi_r^{\text{zdroj}}(x, t)$ detekování záření pouze od zdroje

$$\psi_r^{\text{zdroj}}(x, t) = -i\sqrt{L} \frac{H_k^*}{c\hbar} e^{-i(\omega_0 - i \frac{\Gamma_r}{2\hbar})t'} \Theta(t') \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(p) e^{is(\vartheta_0 + \Omega t')}, \quad (115)$$

kde opět $t' = t - \frac{x}{c}$ a $\Theta(t')$ je Heavisideova funkce.

Část amplitudy $b_k(t)$ odpovídající vlivu absorbátoru má tvar

$$b_k^{\text{a}}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{H_k^* J_s(p) e^{is\vartheta_0}}{\hbar(\omega_k - \omega_0 + s\Omega + i \frac{\Gamma_r}{2\hbar})} \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \alpha^{n+1}(\omega_k). \quad (116)$$

Pro získání amplitudy pravděpodobnosti $\psi_r^{\text{a}}(x, t)$ odpovídající vlivu absorbátoru na detekci záření pocházejícího od zdroje se dosadí vztah (116) do vztahu (68). Pro integraci použitím Cauchyho integrační formule [30] je potřeba využít vztahu (105). Tohoto vztahu je opět využito při výpočtu příspěvku od pólu $z = \omega_0' - i \frac{\Gamma_r}{2\hbar}$ do integrálu. V tomto případě je využito zápisu $\beta = \omega_0 - s\Omega - i \frac{\Gamma_r}{2\hbar}$. Rozepsáním vztahu pro amplitudu pravděpodobnosti $\psi_r^{\text{a}}(x, t)$ dle počtu jader přispívajících k interakci záření s absorbátorem se získá vztah

$$\psi_r^{\text{a}}(x, t) = -i\sqrt{L} \frac{H_k^*}{c\hbar} e^{-i(\omega_0 - i \frac{\Gamma_r}{2\hbar})t'} \Theta(t') \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(p) e^{is(\vartheta_0 + \Omega t')} \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left(-i \frac{\Gamma_r}{2\hbar}\right)^n \times \left\{ \frac{1 - e^{-i(\omega_0' - \omega_0 + s\Omega)t'}}{\left(\omega_0 - \omega_0' - s\Omega\right)^n} \left[1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(-it')^p (\omega_0 - \omega_0' - s\Omega)^p}{p!} \right] \right\}. \quad (117)$$

Obecný vztah pro amplitudu pravděpodobnosti detekce jednoho γ fotonu při koherentní manipulaci se zářením s pohybem zdroje záření se získá součtem amplitud $\psi_r^{\text{zdroj}}(x,t) + \psi_r^{\text{a}}(x,t)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi_r(x,t) = & -i\sqrt{L}\frac{H_k^*}{c\hbar}e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2\hbar})t'}\Theta(t')\sum_{s=-\infty}^{\infty}J_s(p)e^{is(\vartheta_0+\Omega t')} \times \\ & \times \left(1 + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left(-i\frac{\Gamma_r}{2\hbar}\right)^n \left\{ \frac{1 - e^{-i(\omega_0' - \omega_0 + s\Omega)t'} \left[1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(-it')^p (\omega_0 - \omega_0' - s\Omega)^p}{p!}\right]}{(\omega_0 - \omega_0' - s\Omega)^n} \right\} \right). \end{aligned} \quad (118)$$

V případě rezonance, kdy $\omega_0 = \omega_0'$, se pro $s = 0$ vyskytuje nula ve jmenovateli a je potřeba dodefinovat výsledný vztah pomocí limity podobně jako při řešení dopředného rozptylu. Následně je ještě pro zjednodušení popisu využito vztahu

$$1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(is\Omega t')^p}{p!} = \frac{e^{is\Omega t'} \Gamma(n, is\Omega t')}{\Gamma(n)}, \quad (119)$$

kde $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1)!$ je gama funkce a $\Gamma(n, is\Omega t') = \int_{is\Omega t'}^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$ je neúplná gama funkce [33]. Výsledný vztah pro amplitudu pravděpodobnosti pro detekci záření při koherentní manipulaci se zářením s pohybem zdroje záření a při rezonanci má tvar

$$\begin{aligned} \psi_r(x,t) = & -i\sqrt{L}\frac{H_k^*}{c\hbar}e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2\hbar})t'} \left\{ J_0(p) \left[1 + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left(-\frac{\Gamma_r}{2\hbar}t'\right)^n \frac{1}{n!} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} J_s(p) e^{is(\vartheta_0+\Omega t')} \left[1 + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left(i\frac{\Gamma_r}{2\hbar s\Omega}\right)^n \left\{ 1 - \frac{\Gamma(n, is\Omega t')}{\Gamma(n)} \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (120)$$

Mimo rezonanci, kdy $\omega_0 - \omega_0' = \delta\Omega$, nastávají dva případy. První případ, kdy δ není celé číslo, a druhý případ, kdy $\delta \in \mathbb{Z}$. V prvním případě lze pro amplitudu pravděpodobnosti odvodit vztah

$$\begin{aligned} \psi_r(x,t) = & -i\sqrt{L}\frac{H_k^*}{c\hbar}e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2\hbar})t'} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(p) e^{is(\vartheta_0+\Omega t')} \times \\ & \times \left[1 + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left[i\frac{\Gamma_r}{2\hbar(s-\delta)\Omega} \right]^n \left\{ 1 - \frac{\Gamma[n, i(s-\delta)\Omega t']}{\Gamma(n)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (121)$$

Výpočet amplitudy pravděpodobnosti pro druhý případ je komplikovanější, protože při $s = \delta$ vychází opět nula ve jmenovateli, a je tedy nutné pro tento případ dodefinovat

výsledek pomocí limity. Výsledný vztah má tvar

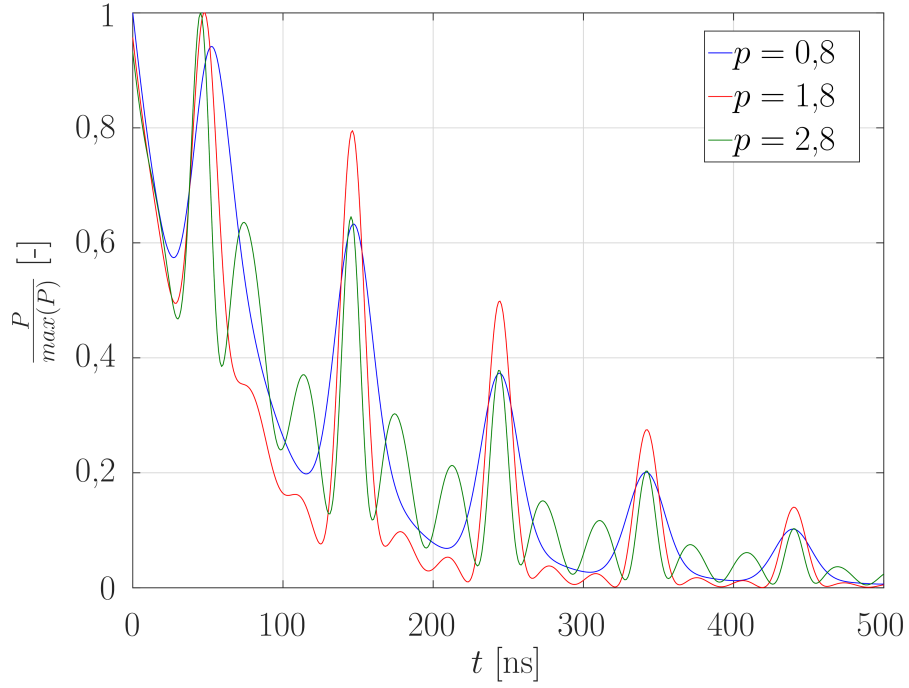
$$\begin{aligned} \psi_r(x,t) = & -i\sqrt{L}\frac{H_k^*}{c\hbar}e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2\hbar})t'} \left\{ J_\delta(p) e^{i\delta(\vartheta_0+\Omega t')} \left[1 + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left(-\frac{\Gamma_r t'}{2\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq \delta}}^{\infty} J_s(p) e^{is(\vartheta_0+\Omega t')} \left[1 + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left[i\frac{\Gamma_r}{2\hbar(s-\delta)\Omega} \right]^n \left\{ 1 - \frac{\Gamma[n, i(s-\delta)\Omega t']}{\Gamma(n)} \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (122)$$

Vztah (122) je ještě upraven za účelem zjednodušení výpočtu

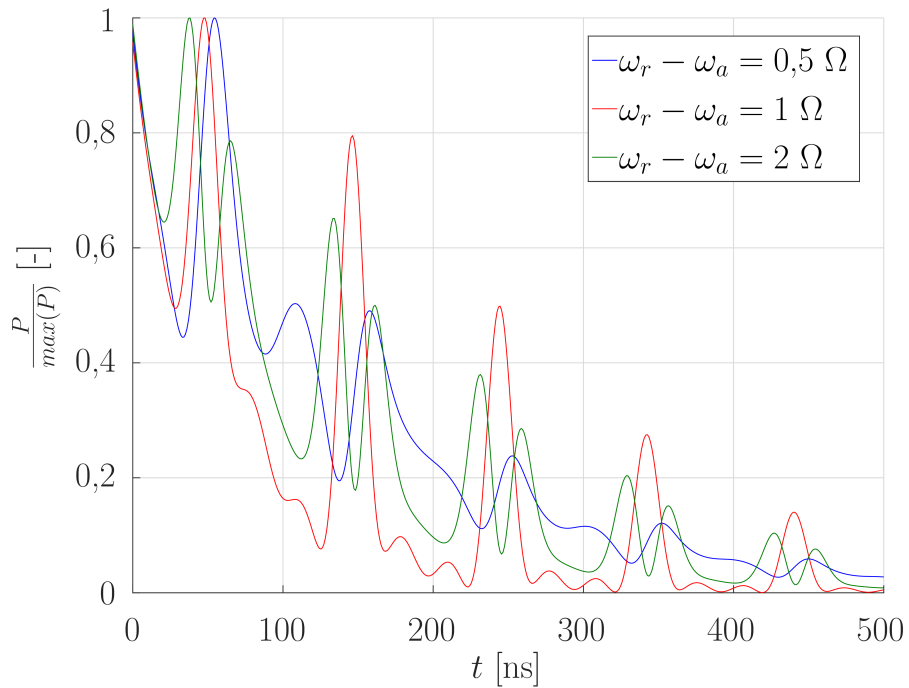
$$\begin{aligned} \psi_r(x,t) = & -i\sqrt{L}\frac{H_k^*}{c\hbar}e^{-i(\omega_0-i\frac{\Gamma}{2\hbar})t'} \left\{ J_\delta(p) e^{i\delta(\vartheta_0+\Omega t')} \left[1 + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left(-\frac{\Gamma_r t'}{2\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 0}}^{\infty} J_{s+\delta}(p) e^{i(s+\delta)(\vartheta_0+\Omega t')} \left[1 + \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \left(i\frac{\Gamma_r}{2\hbar s\Omega} \right)^n \left\{ 1 - \frac{\Gamma(n, is\Omega t')}{\Gamma(n)} \right\} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (123)$$

kde je změněn index sumy $s \rightarrow s + \delta$.

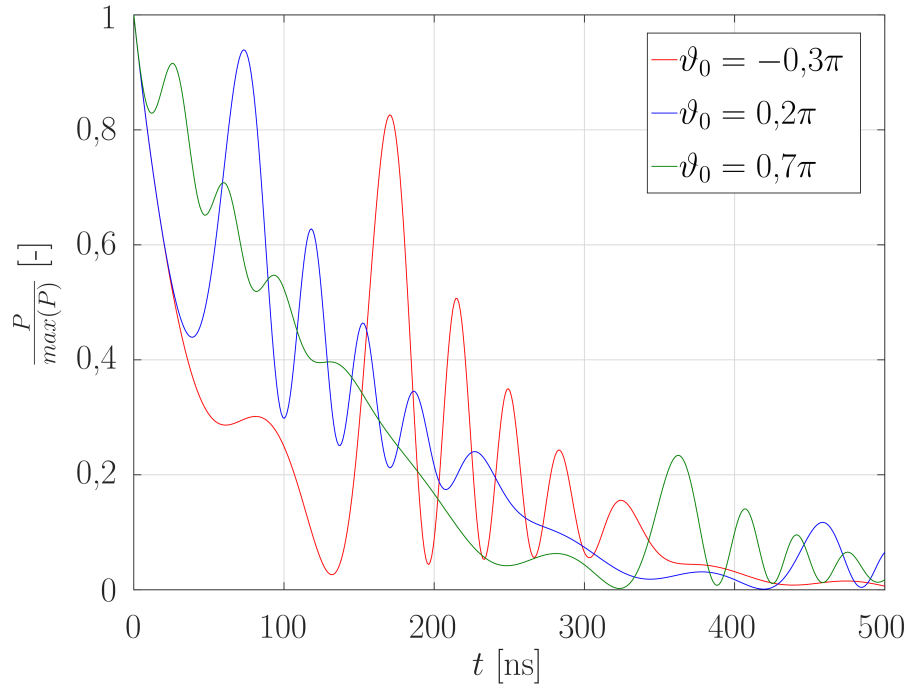
Na obrázcích 11–14 jsou znázorněny závislosti detekce fotonů na čase pro různé hodnoty parametrů. Parametry jsou voleny tak, aby bylo možné provést porovnání s příslušnými simulacemi v článku [31]. Odlišnosti mezi simulacemi v článku a zde znázorněnými jsou způsobeny tím, že zde není simulováno časové rozlišení detektoru. V důsledku konečného časového rozlišení detektoru dochází k rozostření časové osy, což lze matematicky simulovat konvolucí časového průběhu intenzity s normálním rozdělením. Simulace časového rozlišení detektoru způsobuje náběžnou hranu na začátku časového průběhu a rozšíření a „zploštění“ píků.



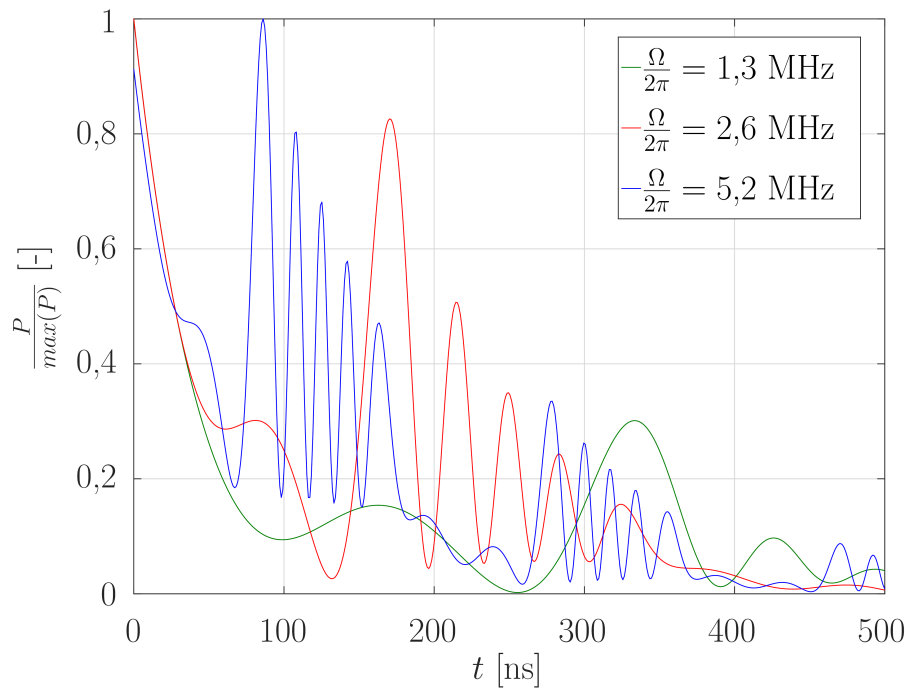
Obrázek 11: Grafy závislosti pravděpodobnosti detekce γ fotonu na čase při různých indexech modulační p dle vztahů (121) a (123). Další parametry: $\delta = 1$, $N = 28$, $\frac{\Omega}{2\pi} = 10,2$ MHz a $\vartheta_0 = 0$.



Obrázek 12: Grafy závislosti pravděpodobnosti detekce γ fotonu na čase při různých posunutí energií přechodů zářiče a absorptoru o δ násobek Ω dle vztahů (121) a (123). Další parametry: $p = 1,8$, $N = 28$, $\frac{\Omega}{2\pi} = 10,2$ MHz a $\vartheta_0 = 0$.



Obrázek 13: Grafy závislosti pravděpodobnosti detekce γ fotonu na čase při různých ϑ_0 dle vztahů (121) a (123). Další parametry: $\delta = 5$, $p = 6,58$, $N = 28$ a $\frac{\Omega}{2\pi} = 2,6$ MHz.



Obrázek 14: Grafy závislosti pravděpodobnosti detekce γ fotonu na čase při různých Ω dle vztahů (121) a (123). Další parametry: $\delta = 5$, $p = 6,58$, $N = 28$ a $\vartheta_0 = -0,3\pi$.

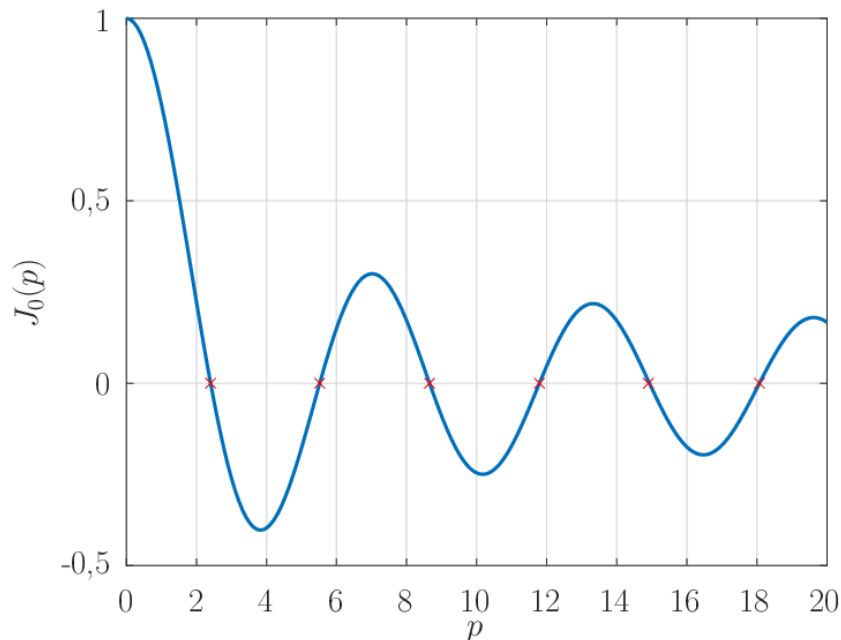
3.2 Akusticky indukovaná transparence

Speciálním případem koherentní manipulace s γ zářením je akusticky indukovaná transparence. Při akusticky indukované transparenci je koherentní manipulací potlačena rezonanční spektrální čára. V důsledku toho se časový průběh intenzity záření za absorbatorem výrazně přibližuje časovému průběhu intenzity záření šířícího se přímo ze zdroje⁴. Jev akusticky indukované transparence nastává při splnění podmínek kladených na index modulace p a velikost úhlové frekvence vibračního pohybu Ω [32].

První podmínka vychází z potlačení centrální spektrální čáry ($s = 0$) spektra popsaného vztahem (110). Centrální spektrální čára je potlačena v případě, když platí [32]

$$J_0(p) \approx 0. \quad (124)$$

Tato podmínka je splněna, když index modulace $p = p_i$, kde $p_1 \approx 2,4$, $p_2 \approx 5,5$, $p_3 \approx 8,65$, $p_4 \approx 11,8$, ... Besselova funkce nultého řádu je znázorněna na obrázku 15.



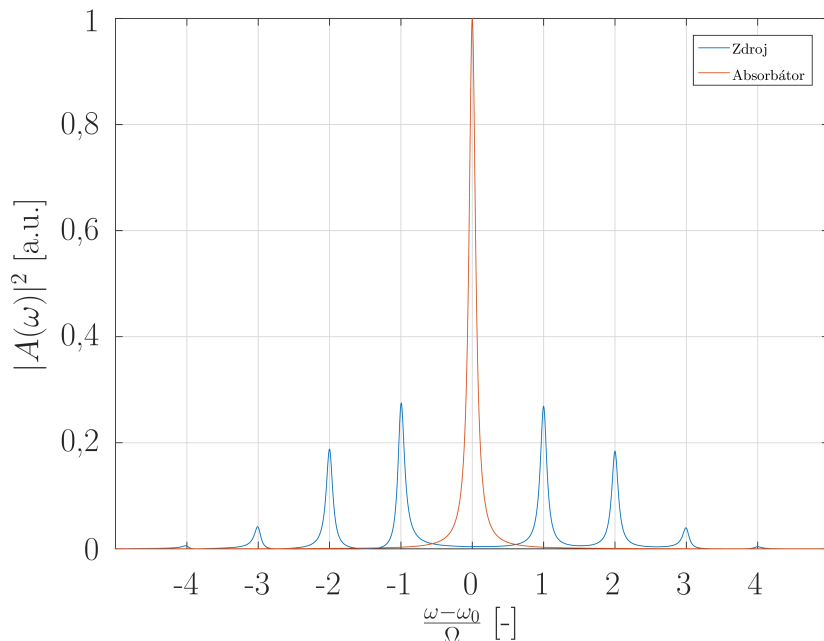
Obrázek 15: Graf funkce $J_0(z)$ se zvýrazněnými nulovými body.

Po potlačení centrální spektrální čáry zdroje záření dochází dále k absorpci záření v absorbatu vlivem částečného překryvu vedlejších spektrálních čar ($s \neq 0$) spektra zdroje záření a absorpční spektrální čáry absorbatu. V semiklasickém popisu vlivem optické tloušťky absorbatu $T_M = \frac{2fN\Gamma_r}{\Gamma}$, kde f procentuální část záření interagující bez zpětného rázu, N je počet efektivních jader a Γ_r je část šířky spektrální čáry Γ připadající na emisi záření [20], dochází k dodatečnému rozšíření spektrální čáry [32]. V důsledku toho je zavedena podmínka na velikost úhlové frekvence vibračního pohybu zářiče Ω ve tvaru [32]

$$\frac{T_M\Gamma}{\hbar\Omega} \ll 1, \quad (125)$$

⁴Pro zjednodušení se neuvažuje nerezonanční absorpce v důsledku dalších typů interakcí, např. fotoelektrický jev a Comptonův rozptyl.

za předpokladu stejné šířky čar Γ spekter absorbátoru a zdroje záření. Na obrázku 16 jsou znázorněna spektra vibrujícího zdroje záření a absorbátoru. I když se tato dvě spektra částečně překrývají, je překryv již dostatečně malý na to, aby byl jev akusticky indukované transparence pozorovatelný. Výrazné akusticky indukované transparence se dosahuje i při neúplném splnění podmínek [32].

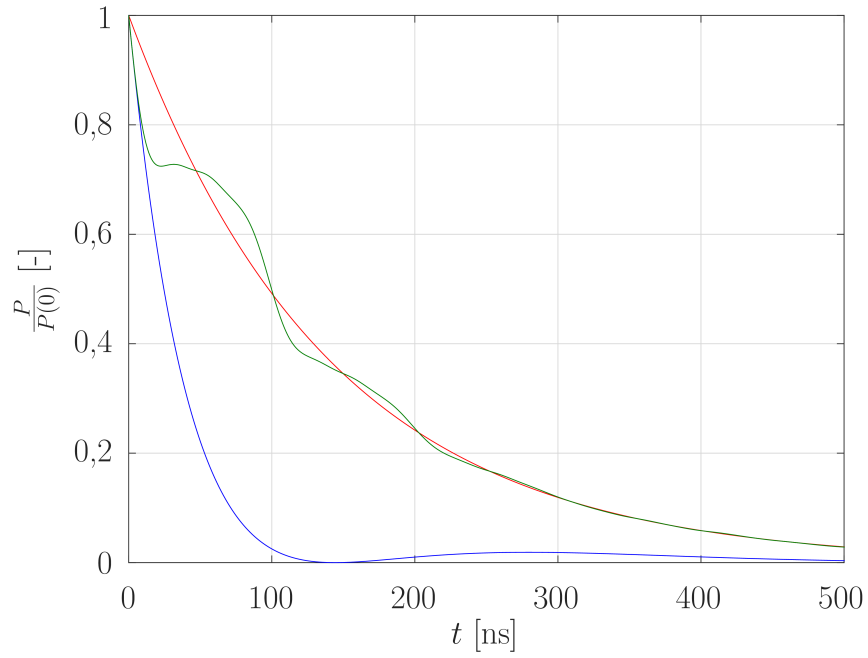


Obrázek 16: Graf spektra zdroje daného vztahem (110) pro hodnoty $p = 2,4$ a $\frac{\Omega}{2\pi} = 10,2$ MHz (modrá) a spektra absorbátoru $T_M = 1$ (oranžová). Druhá podmínka pro akusticky indukovanou transparenici, která je popsána vztahem (125), není úplně splněná, jelikož $\frac{T_M \Gamma}{\hbar \Omega} = 0,11$.

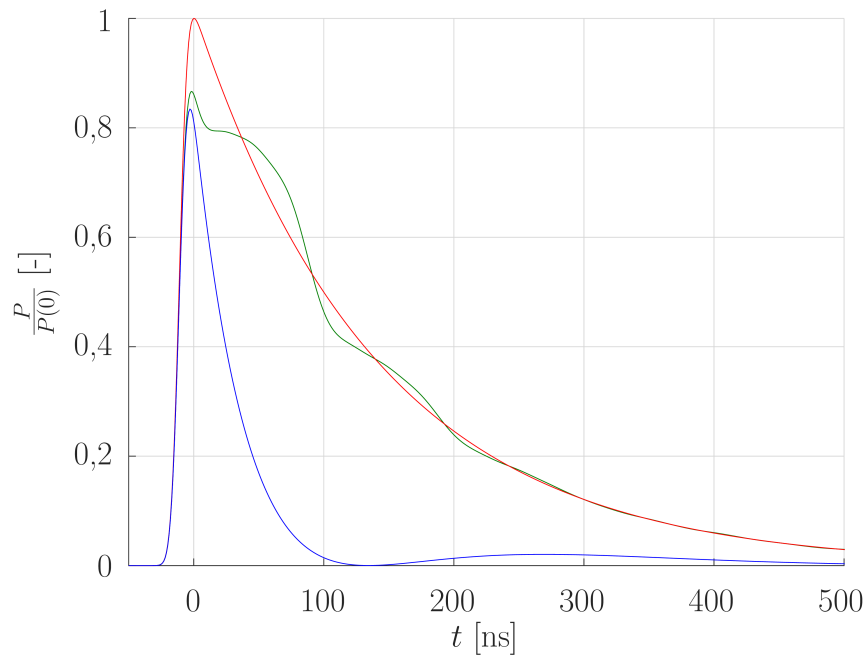
Při vzniku excitovaného jádra ve zdroji záření při akusticky indukované transparenici je fáze vibrace ϑ_0 náhodná a je tedy potřeba provést výpočet průměrného časového průběhu hustoty pravděpodobnosti detekce fotonu přes všechny fáze vibračního pohybu. Tento průměr je dán vztahem

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi_r(x, t, \vartheta_0)|^2 d\vartheta_0, \quad (126)$$

kde amplituda pravděpodobnosti $\psi_r(x, t, \vartheta_0)$ je popsána vztahem (120). Na obrázku 17 je znázorněno srovnání vyzařování samotného zdroje záření, dopředného rozptylu a akusticky indukované transparence. Stejná situace, ale s časovým rozlišením 5 ns, je znázorněna na obrázku 18. Časové rozlišení je simulováno konvolucí průběhů Gaussovou distribucí. Při akusticky indukované transparenici dochází k výraznému potlačení absorpce záření absorbátorem.



Obrázek 17: Grafy závislostí hustot pravděpodobnosti detekce γ fotonu na čase při měření vyzařování zářiče (červená), při dopředném rozptylu (modrá) a při akusticky indukované transparentci (zelená). Parametry: $\delta = 0$, $N = 32$, $\frac{\Omega}{2\pi} = 9,87$ MHz a $p = 2,4$. Parametry jsou zvoleny tak, aby odpovídaly článku [32].



Obrázek 18: Grafy závislostí hustot pravděpodobnosti detekce γ fotonu na čase při měření vyzařování zářiče (červená), při dopředném rozptylu (modrá) a při akusticky indukované transparentci (zelená) při časovém rozlišení 5 ns. Parametry: $\delta = 0$, $N = 32$, $\frac{\Omega}{2\pi} = 9,87$ MHz a $p = 2,4$. Parametry jsou zvoleny tak, aby odpovídaly článku [32].

4 Popis stimulované emise γ fotonu

Ve viditelném spektru interakce záření s excitovanými elektrony vázanými v atomu vyvolává emisi záření nazývanou stimulovaná emise. Jev stimulované emise záření tvoří základ laserových technologií. Pro využití v laserových technologiích je potřeba vhodného prostředí, ve kterém dochází ke stimulované emisi. Tato prostředí se nazývají aktivními médii. Důležitou vlastností aktivního média je tzv. inverze populace udávající poměr obsazenosti excitovaných stavů a neexcitovaných stavů v prostředí. Velikost inverze populace udává, zda bude docházet více k stimulované emisi nebo k absorpci záření. Při stimulované emisi má emitované záření stejné vlastnosti jako záření dopadající, což způsobuje vysokou koherenci záření projevující se interferenčními jevy.

V oblasti γ záření je stimulovaná emise způsobená interakcí dopadajícího záření s excitovanými jádry prostředí což se projevuje poklesem doby života excitovaného stavu jádra [34]. Podobně jako ve viditelném spektru i zde je důležitá inverze populace. Vzhledem k neexistenci vhodného způsobu vybuzení jader do excitovaného stavu a malým dobám života je obtížné dosáhnout vhodné inverze populace v aktivním médiu [35]. V současné době není známé žádné vhodné aktivní médium pro vytvoření γ laseru.

Pro vytvoření vhodného aktivního média se hledá způsob potlačení absorpce médiem [35, 36]. Předtím než bude možné popsat vliv jevů, potlačujících absorpci záření médiem, na stimulovanou emisi záření, je nutné nejprve vytvořit popis samotné stimulované emise γ záření. Touto problematikou se zabývá tato kapitola. Vytváření popisu je provedeno ve dvou krocích. V prvním kroku je vytvořen popis neuvažující emisi konverzních elektronů a v druhém kroku je již zahrnuta i emise konverzních elektronů.

4.1 Stimulovaná emise bez konverzních elektronů

Interakce záření s excitovaným jádrem vyvolává stimulovanou emisi záření, které je korelované se stimulujícím zářením. Takový systém musí na počátku obsahovat zdroj stimulujícího záření a další excitovaná jádra, na kterých bude docházet ke stimulované emisi. Popisovaná sestava je znázorněna na obrázku 19.



Obrázek 19: Schéma znázorňující stimulovanou emisi záření a jeho detekci.

Je uvažován zjednodušený systém, ve kterém jsou na počátku jen dvě excitovaná jádra. První jádro je umístěno do počátku souřadnic a druhé jádro umístěno na ose x do souřadnice x_2 .

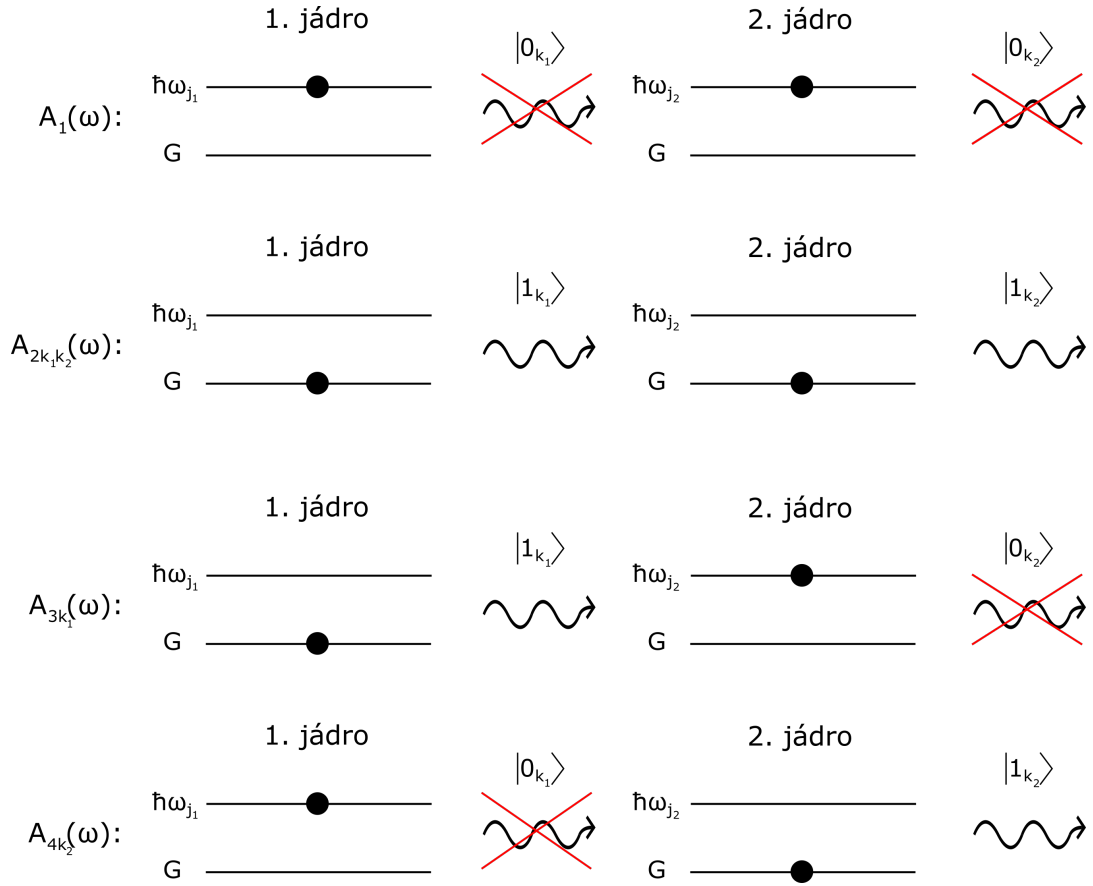
Soustava rovnic

Počáteční stav systému je dále označen $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$. Stav, při němž je první jádro excitované energií $\hbar\omega_{j_1}$, je označen $|e_1^{j_1}\rangle$. $|e_2^{j_2}\rangle$ označuje stav, při němž je druhé jádro excitované energií $\hbar\omega_{j_2}$. $|\{0_{k_1}\}\rangle$ a $|\{0_{k_2}\}\rangle$ označují bez-fotonové stavy.

Dalším možným stavem systému je stav, při němž jsou obě jádra v základních stavech $|g_1\rangle$ a $|g_2\rangle$ a jsou přítomné dva fotony. Foton emitovaný prvním jádrem je označen stavem $|1_{k_1}\rangle$ a foton emitovaný druhým jádrem stavem $|1_{k_2}\rangle$. Tento stav je souhrnně označen $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$. Dále může nastat stav, při němž je první jádro v základním stavu, druhé jádro je excitované a je přítomen jeden foton emitovaný prvním jádrem. Tento stav je označen $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$. Nakonec může ještě nastat stav, který je podobný předchozímu, ale první jádro je excitované a druhé je v základním stavu a je přítomen foton vyzářený druhým jádrem. Tento stav je označen $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$. Obecný stav systému $|\psi(t)\rangle$ je

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = & a_1(t) e^{-i\omega_{j_1}t} e^{-i\omega_{j_2}t} |e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle + \\
& + \sum_{k_1} \sum_{k_2} a_{2k_1k_2}(t) e^{-i\omega_{k_1}t} e^{-i\omega_{k_2}t} |g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle + \\
& + \sum_{k_1} a_{3k_1}(t) e^{-i\omega_{k_1}t} e^{-i\omega_{j_2}t} |g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle + \\
& + \sum_{k_2} a_{4k_2}(t) e^{-i\omega_{k_2}t} e^{-i\omega_{j_1}t} |e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle,
\end{aligned} \tag{127}$$

kde $a_1(t)$ je amplituda nalezení celého systému ve stavu, ve kterém jsou obě jádra excitovaná a není přítomný žádný foton, $a_{2k_1k_2}(t)$ je amplituda nalezení celého systému ve stavu, ve kterém jsou obě jádra v základním stavu a jsou přítomné dva fotony s vlnovými čísly k_1 a k_2 , $a_{3k_1}(t)$ je amplituda nalezení celého systému ve stavu, ve kterém je první jádro v základním stavu, druhé jádro je excitované a je přítomný foton s vlnovým číslem k_1 , $a_{4k_2}(t)$ je amplituda nalezení celého systému ve stavu, ve kterém je první jádro v excitovaném stavu, druhé jádro je v základním stavu a je přítomný foton s vlnovým číslem k_2 . Ve frekvenční doméně časově závislým amplitudám $a_1(t)$, $a_{2k_1k_2}(t)$, $a_{3k_1}(t)$ a $a_{4k_2}(t)$ odpovídají frekvenčně závislé amplitudy $A_1(\omega)$, $A_{2k_1k_2}(\omega)$, $A_{3k_1}(\omega)$ a $A_{4k_2}(\omega)$. Na obrázku 20 je znázorněno přiřazení amplitud ke stavům systému.



Obrázek 20: Schéma stavů, ke kterým jsou přiřazeny amplitudy, při popisu stimulované emise.

Část hamiltoniánu \hat{H} popisující interakce jednoho fotonu a jednoho jádra má tvar

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{k_1} H_{k_1} \hat{a}_{k_1} (|e_1^{j_1}\rangle \langle g_1|) + \sum_{k_2} H_{k_2} \hat{a}_{k_2} e^{ik_2x_2} (|e_2^{j_2}\rangle \langle g_2|) + \\ & + \sum_{k_1} H_{k_1}^* \hat{a}_{k_1}^\dagger (|g_1\rangle \langle e_1^{j_1}|) + \sum_{k_2} H_{k_2}^* \hat{a}_{k_2}^\dagger e^{-ik_2x_2} (|g_2\rangle \langle e_2^{j_2}|), \end{aligned} \quad (128)$$

kde \hat{a}_{k_1} , $\hat{a}_{k_1}^\dagger$, \hat{a}_{k_2} a $\hat{a}_{k_2}^\dagger$ jsou anihilační a kreační operátory odebírající ze systému a přidávající do systému fotony s vlnovými čísly k_1 a k_2 , $(|e_1^{j_1}\rangle \langle g_1|)$ a $(|g_1\rangle \langle e_1^{j_1}|)$ jsou operátory excitující a deexcitující první jádro a $(|e_2^{j_2}\rangle \langle g_2|)$ a $(|g_2\rangle \langle e_2^{j_2}|)$ jsou operátory excitující a deexcitující druhé jádro [27, 28], H_{k_1} , H_{k_2} , $H_{k_1}^*$ a $H_{k_2}^*$ jsou vazebné konstanty charakterizující sílu interakce jader s fotony s vlnovými vektory k_1 a k_2 [27].

Rovnice pro amplitudu $A_1(\omega)$, odpovídající amplitudě $a_1(t)$ ve frekvenční doméně, se získá projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$ a postupem dle obecného odvození popsaného vztahu (41–46). Získaná rovnice je

$$(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\varepsilon) A_1(\omega) = 1 + \sum_{k_1} \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\hbar} + \sum_{k_2} \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2x_2}}{\hbar}. \quad (129)$$

Projektováním Schrödingerovy rovnice na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$ se získá rovnice pro

amplitudu $A_{2k_1k_2}(\omega)$ ve tvaru

$$(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) A_{2k_1k_2}(\omega) = \sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}} \left[\frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar} + \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar} \right]. \quad (130)$$

Odmocnina $\sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}}$ vznikla působením operátoru $\hat{a}_{k_1}^\dagger$ kreace fotonu o vlnové délce k_1 na stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$ a působením operátoru $\hat{a}_{k_2}^\dagger$ kreace fotonu o vlnové délce k_2 na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$. Projektováním Schrödingerovy rovnice na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$ nabývá rovnice pro amplitudu $A_{3k_1}(\omega)$ tvar

$$(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i\varepsilon) A_{3k_1}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar} + \sum_{k_2} \frac{A_{2k_1k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2x_2}}{\hbar} \sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}}. \quad (131)$$

Odmocnina $\sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}}$ se získala působením operátoru \hat{a}_{k_2} anihilace fotonu o vlnové délce k_2 na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$. Rovnice pro amplitudu $A_{4k_2}(\omega)$ vzniká projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$

$$(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i\varepsilon) A_{4k_2}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar} + \sum_{k_1} \frac{A_{2k_1k_2}(\omega) H_{k_1}}{\hbar} \sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}}. \quad (132)$$

Odmocnina $\sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}}$ vznikla působením operátoru \hat{a}_{k_1} anihilace fotonu o vlnové délce k_1 na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$.

Řešení soustavy rovnic

V prvním kroku je z rovnice (130) vyjádřena amplituda $A_{2k_1k_2}(\omega)$ ve tvaru

$$A_{2k_1k_2}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}}}{\hbar (\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon)} [A_{3k_1}(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2} + A_{4k_2}(\omega) H_{k_1}^*]. \quad (133)$$

Dosazením vztahu (133) do rovnic (131–132) je rovnice pro amplitudu $A_{3k_1}(\omega)$

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i\varepsilon) A_{3k_1}(\omega) &= \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar} + \\ &+ \frac{A_{3k_1}(\omega)}{\hbar^2} \left[\sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \sum_{k_2} \delta_{k_1k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right] + \\ &+ \frac{H_{k_1}^*}{\hbar^2} \left[\sum_{k_2} \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2x_2}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \sum_{k_2} \delta_{k_1k_2} \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2x_2}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (134)$$

a pro amplitudu $A_{4k_2}(\omega)$

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i\varepsilon) A_{4k_2}(\omega) &= \frac{A_1(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar} + \\ &+ \frac{A_{4k_2}(\omega)}{\hbar^2} \left[\sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \sum_{k_1} \delta_{k_1k_2} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right] + \\ &+ \frac{H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar^2} \left[\sum_{k_1} \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \sum_{k_1} \delta_{k_1k_2} \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (135)$$

Sumy $\sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon}$ a $\sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon}$ se upravují podle dříve popsaného postupu na integrály. První suma se přepisuje na

$$\sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} = -i\hbar \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_2}}}{2}, \quad (136)$$

kde $\Gamma_{r,\omega_{k_2}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_2 |H_{2k_2}|^2 \delta(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})$, a druhá suma na

$$\sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} = -i\hbar \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_1}}}{2}, \quad (137)$$

kde pro $\Gamma_{r,\omega_{k_1}}$ platí obdobně $\Gamma_{r,\omega_{k_1}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_1 |H_{1k_1}|^2 \delta(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})$. Ostatní sumy jsou upraveny na vztahy

$$\sum_{k_1} \delta_{k_1 k_2} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} = -i\hbar \frac{\Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1}}}{2}, \quad (138)$$

kde opět $\Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_1 |H_{k_1}|^2 \delta_{k_1 k_2} \delta(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})$,

$$\sum_{k_2} \delta_{k_1 k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} = -i\hbar \frac{\Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2}}}{2}, \quad (139)$$

kde $\Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_2 |H_{k_2}|^2 \delta_{k_1 k_2} \delta(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})$. Použitím vztahů (136–139) jsou rovnice (134–135) vyjádřeny ve tvaru

$$\begin{aligned} \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right) A_{3k_1}(\omega) &= \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar} + \\ &+ \frac{H_{k_1}^*}{\hbar^2} \left[\sum_{k_2} \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2 x_2}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \sum_{k_2} \delta_{k_1 k_2} \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2 x_2}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right], \quad (140) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1}}}{2\hbar} \right) A_{4k_2}(\omega) &= \frac{A_1(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar} + \\ &+ \frac{H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar^2} \left[\sum_{k_1} \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \sum_{k_1} \delta_{k_1 k_2} \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right]. \quad (141) \end{aligned}$$

Rovnice (140–141) jsou upraveny do tvaru

$$\begin{aligned} A_{3k_1}(\omega) &= \frac{H_{k_1}^*}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} \left[A_1(\omega) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\hbar} \sum_{k_2} (1 + \delta_{k_1 k_2}) \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2 x_2}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right], \quad (142) \end{aligned}$$

$$A_{4k_2}(\omega) = \frac{H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} \left[A_1(\omega) + \frac{1}{\hbar} \sum_{k_1} (1 + \delta_{k_1 k_2}) \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right]. \quad (143)$$

Rovnice (143) je dosazena do vztahu (142)

$$A_{3k_1}(\omega) = \frac{H_{k_1}^*}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_2}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} \left\{ A_1(\omega) + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k_2} (1 + \delta_{k_1 k_2}) \times \frac{|H_{k_2}|^2}{(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} \left[A_1(\omega) + \frac{1}{\hbar} \sum_{k'_1} (1 + \delta_{k'_1 k_2}) \frac{A_{3k'_1}(\omega) H_{k'_1}}{\omega - \omega_{k'_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right] \right\}. \quad (144)$$

Dosazením se získala závislost amplitudy $A_{3k_1}(\omega)$ na členu $A_{3k'_1}(\omega)$. Rekurzivní dosazování ve vztahu (144) vede k přidávání členů s amplitudou $A_1(\omega)$ a s rychle se zvětšujícím jmenovatelem. Z tohoto důvodu je dále člen se sumou $\sum_{k'_1} (1 + \delta_{k'_1 k_2}) \frac{A_{3k'_1}(\omega) H_{k'_1}}{\omega - \omega_{k'_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon}$ zanedbán a vztah (144) je přepsán do tvaru

$$A_{3k_1}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_2}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} \left[1 + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k_2} (1 + \delta_{k_1 k_2}) \times \frac{|H_{k_2}|^2}{(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} \right]. \quad (145)$$

Zlomek $\frac{|H_{k_2}|^2}{(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)}$ je upraven pomocí metody parciálních zlomků

$$\frac{|H_{k_2}|^2}{(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} = \frac{1}{\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} - i\varepsilon} \times \left[\frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} - \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar}} \right]. \quad (146)$$

Sumy $\sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar}}$ a $\sum_{k_2} \delta_{k_1 k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar}}$ jsou upraveny dle dříve popsaného postupu na členy

$$\sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r, \omega_{k_1}} + \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar}} = -i\hbar \frac{\sigma_{\omega_{k_2}}}{2}, \quad (147)$$

kde $\sigma_{\omega_{k_2}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_2 |H_{k_2}|^2 \delta \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)$ a

$$\sum_{k_2} \delta_{k_1 k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar}} = -i\hbar \frac{\sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}}{2}, \quad (148)$$

kde $\sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_2 |H_{k_2}|^2 \delta_{k_1 k_2} \delta \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)$. Postupným dosazováním vztahů (146), (147–148), (136) a (139) do vztahu (145) se získá vztah pro amplitudu $A_{3k_1}(\omega)$ v závislosti pouze na amplitudě $A_1(\omega)$

$$A_{3k_1}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} \times \left[1 - i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}} - \sigma_{\omega_{k_2}} - \sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} - i\varepsilon \right)} \right]. \quad (149)$$

Stejný postup je aplikován na vztah (143) při odvození vztahu amplitudy $A_{4k_2}(\omega)$ v závislosti na amplitudě $A_1(\omega)$

$$A_{4k_2}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} \times \left[1 - i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}} - \sigma_{\omega_{k_1}} - \sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}}{2\hbar} - i\varepsilon \right)} \right], \quad (150)$$

kde $\sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_1 |H_{k_1}|^2 \delta_{k_1 k_2} \delta \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)$ a

$\sigma_{\omega_{k_1}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_1 |H_{k_1}|^2 \delta \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)$.

Vztahy (149–150) jsou následně dosazeny do vztahu (129)

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\varepsilon) A_1(\omega) &= 1 + \\ &+ \frac{A_1(\omega)}{\hbar^2} \sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2}{\left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} \left[1 - i \frac{\Theta_{\omega_{k_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar} - i\varepsilon \right)} \right] + \\ &+ \frac{A_1(\omega)}{\hbar^2} \sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} \left[1 - i \frac{\Theta_{\omega_{k_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar} - i\varepsilon \right)} \right]. \quad (151) \end{aligned}$$

kde je pro přehlednost označeno $\Gamma_{\omega_{k_1}} = \Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}} = \Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}$, $\Theta_{\omega_{k_1}} = \Gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}} - \sigma_{\omega_{k_1}} - \sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}$ a $\Theta_{\omega_{k_2}} = \Gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}} - \sigma_{\omega_{k_2}} - \sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}$. Roznásobením, dosazením vztahu (147) a obdobného vztahu se sumou přes k_1 a úpra-

vou metodou parciálních zlomků se vztah (151) vyjádří ve tvaru

$$\begin{aligned} & \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma_{\omega_{k_1}} + \sigma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right) A_1(\omega) = 1 - \\ & - i \frac{A_1(\omega) \Theta_{\omega_{k_2}}}{2\hbar^3 \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} \left\{ \sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar}} - \sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega_{j_1} - \omega_{k_1} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar}} \right\} - \\ & - i \frac{A_1(\omega) \Theta_{\omega_{k_1}}}{2\hbar^3 \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} \left\{ \sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar}} - \sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega_{j_2} - \omega_{k_2} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar}} \right\}. \end{aligned} \quad (152)$$

Dvě sumy jsou vyjádřeny konstantami $\sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar}} = -i\hbar \frac{\sigma_{\omega_{k_1}}}{2}$ a $\sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar}} = -i\hbar \frac{\sigma_{\omega_{k_2}}}{2}$ a zbylé dvě sumy jsou upraveny dříve popsaným postupem na tvar

$$\sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2}{\omega_{j_1} - \omega_{k_1} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar}} = -i\hbar \frac{\vartheta_{\omega_{k_1}}}{2}, \quad (153)$$

kde $\vartheta_{\omega_{k_1}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_1 |H_{k_1}|^2 \delta \left(\omega_{j_1} - \omega_{k_1} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)$, a tvar

$$\sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2}{\omega_{j_2} - \omega_{k_2} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar}} = -i\hbar \frac{\vartheta_{\omega_{k_2}}}{2}, \quad (154)$$

kde $\vartheta_{\omega_{k_2}} = \frac{L}{\hbar^2} \int dk_2 |H_{k_2}|^2 \delta \left(\omega_{j_2} - \omega_{k_2} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)$. Dosazením a úpravou rovnice (152) se získá vztah pro amplitudu $A_1(\omega)$ ve tvaru

$$A_1(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma}{2\hbar} + \frac{\kappa}{4\hbar^2 (\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\text{tot}}}{2\hbar})}}, \quad (155)$$

kde je pro přehlednost označeno $\kappa = \Theta_{\omega_{k_1}} (\sigma_{\omega_{k_2}} - \vartheta_{\omega_{k_2}}) + \Theta_{\omega_{k_2}} (\sigma_{\omega_{k_1}} - \vartheta_{\omega_{k_1}})$, $\sigma = \sigma_{\omega_{k_1}} + \sigma_{\omega_{k_2}}$ a $\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_{\omega_{k_1}} + \Gamma_{\omega_{k_2}}$. Zlomek $\frac{\kappa}{4\hbar^2 (\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\text{tot}}}{2\hbar})}$ je dále zanedbán kvůli malému vlivu na výsledný vztah⁵ a vztah pro amplitudu $A_1(\omega)$ nabývá tvaru

$$A_1(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma}{2\hbar}}. \quad (156)$$

Dosazením vztahu (156) do rovnic (149–150) jsou vztahy pro amplitudy $A_{3k_1}(\omega)$ a $A_{4k_2}(\omega)$ vyjádřeny ve tvarech

$$A_{3k_1}(\omega) = \frac{H_{k_1}^* \left[1 - i \frac{\Theta_{\omega_{k_2}}}{2\hbar (\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar})} \right]}{\hbar (\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma}{2\hbar}) \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)}, \quad (157)$$

⁵Velikost hodnoty $\frac{\kappa}{i2\hbar\Gamma_{\text{tot}}} \approx -i10^{-21}$ je o mnoho řádů menší než velikost hodnoty $i \frac{\sigma}{2\hbar} \approx -10^{-9} + i10^5$, kde bylo pro výpočet použito hodnot popisujících excitovaný stav jádra ⁵⁷Fe.

$$A_{4k_2}(\omega) = \frac{H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2} \left[1 - i \frac{\Theta_{\omega_{k_1}}}{2\hbar(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar})} \right]}{\hbar (\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\sigma}{2\hbar}) \left(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)}. \quad (158)$$

Vztah pro amplitudu $A_{2k_1 k_2}(\omega)$ je obdržen dosazením vztahů (157–158) do rovnice (133)

$$A_{2k_1 k_2}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \delta_{k_1 k_2}} H_{k_1}^* H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar^2 (\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) (\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\sigma}{2\hbar})} \times \left\{ \frac{1 - i \frac{\Theta_{\omega_{k_2}}}{2\hbar(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar})}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar}} + \frac{1 - i \frac{\Theta_{\omega_{k_1}}}{2\hbar(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar})}}{\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar}} \right\}. \quad (159)$$

Amplituda pravděpodobnosti

Dosazením vztahu (159) do inverzní Fourierovy transformace (44) se získá amplituda $a_{2k_1 k_2}(t)$ ve tvaru

$$a_{2k_1 k_2}(t) = \sqrt{1 + \delta_{k_1 k_2}} \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar^2 (\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\sigma}{2\hbar})} \times \left[\frac{1}{\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar}} + \frac{1}{\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar}} - i \frac{\Theta_{\omega_{k_1}} + \Theta_{\omega_{k_2}}}{2\hbar (\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}}{2\hbar}) (\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}}{2\hbar})} \right]. \quad (160)$$

Od amplitudy $a_{2k_1 k_2}(t)$ se dále přechází k popisu pomocí pro dva fotony upraveného vztahu (68) ve tvaru

$$\psi_{r,2}(x,t) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \frac{e^{i(k_1 x - \omega_{k_1} t)} e^{i(k_2 x - \omega_{k_2} t)}}{L} a_{2k_1 k_2}(t). \quad (161)$$

Na rozdíl od vztahu (68) je zde použito L v první mocnině, aby byla zachována bezrozměrnost výsledného vztahu. Vztah (161) se symbolickými sumami je dále upraven do tvaru

$$\psi_{r,2}(x,t) = \underbrace{\sum_{k_1} \sum_{k_2}_{k_1 \neq k_2}}_{k_1 \neq k_2} \frac{e^{i(k_1 x - \omega_{k_1} t)} e^{i(k_2 x - \omega_{k_2} t)}}{L} a_{2k_1 k_2}(t) + \sum_{k_1} \sum_{k_2}_{k_1 = k_2} \frac{e^{i(k_1 x - \omega_{k_1} t)} e^{i(k_2 x - \omega_{k_2} t)}}{L} a_{2k_1 k_2}(t). \quad (162)$$

Amplituda pravděpodobnosti $\psi_{r,2}(x,t)$ je rozdělena na dvě amplitudy

$$\psi_{r,2}(x,t) = \psi_{r,2}^{\text{spón}}(x,t) + \psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t), \quad (163)$$

kde amplituda $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$ popisuje spontánní emisi dvou fotonů a amplituda $\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)$ popisuje stimulovanou emisi. Pro amplitudu $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$ platí $k_1 \neq k_2$ a pro amplitudu $\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)$ platí $k_1 = k_2$. Dále jsou řešeny zvlášť amplitudy popisující spontánní emisi dvou fotonů a stimulovanou emisi fotonu.

Amplituda pravděpodobnosti dvojnásobné spontánní emise

Spontánní emise dvou fotonů je popsána amplitudou

$$\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = \underbrace{\sum_{k_1} \sum_{k_2}}_{k_1 \neq k_2} \frac{e^{i(k_1 x - \omega_{k_1} t)} e^{i(k_2 x - \omega_{k_2} t)}}{L} a_{2k_1 k_2}(t). \quad (164)$$

Jelikož v tomto případě platí $k_1 \neq k_2$, a tedy $\delta_{k_1 k_2} = 0$, mají dříve definované konstanty jiné hodnoty než při stimulované emisi, ve které $\delta_{k_1 k_2} = 1$. Tyto konstanty jsou přeznačeny $\sigma \rightarrow \sigma^{\text{spon}}$, $\Gamma_{\omega_{k_1}} \rightarrow \Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}} \rightarrow \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$, $\Theta_{\omega_{k_1}} \rightarrow \Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$ a $\Theta_{\omega_{k_2}} \rightarrow \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$. Amplituda popisující tento případ je přeznačena $a_{2k_1 k_2}(t) \rightarrow a_{2k_1 k_2}^{\text{spon}}(t)$ a má tvar

$$a_{2k_1 k_2}^{\text{spon}}(t) = \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar^2 (\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma^{\text{spon}}}{2\hbar})} \times \left[\frac{1}{\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}}{2\hbar}} + \frac{1}{\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar}} - i \frac{\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar (\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}}{2\hbar}) (\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar})} \right]. \quad (165)$$

Vztah (164) je upraven pomocí symbolického předpisu $\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$ [21] do tvaru

$$\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = \frac{L}{4\pi^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_{2k_1 k_2}^{\text{spon}}(t) e^{i\omega_{k_1}(\frac{x}{c} - t)} e^{i\omega_{k_2}(\frac{x}{c} - t)} d\omega_{k_2} d\omega_{k_1}. \quad (166)$$

Následně je vztah (165) dosazen do vztahu (166)

$$\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = L \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^*}{4\pi^2 \hbar^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_{k_1}(t - \frac{x}{c})} e^{-i\omega_{k_2}(t - \frac{x - x_2}{c})}}{(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma^{\text{spon}}}{2\hbar})} \left[\frac{1}{\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}}{2\hbar}} + \frac{1}{\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar}} - i \frac{\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar (\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}}{2\hbar}) (\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar})} \right] d\omega_{k_2} d\omega_{k_1}. \quad (167)$$

Po integraci, za předpokladu $x_2 > 0$, vychází vztah

$$\begin{aligned} \psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = & -L \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^*}{c^2 \hbar^2} \left\{ e^{-i\left(\omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} - \sigma^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} + \right. \\ & + \frac{\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} - \sigma^{\text{spon}}} \left[e^{-i\left(\omega_{j_1} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} - \right. \\ & \left. \left. - e^{-i\left(\omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} - \sigma^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right] \right\} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) \Theta\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right). \quad (168) \end{aligned}$$

V případě rezonance, kdy $\omega_{j_1} = \omega_{j_2} = \omega_0$, $H_{k_1}^* = H_{k_2}^* = H_k^*$, $\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} = \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} = \Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}$ a $\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} = \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} = \Theta_{\omega_k}^{\text{spon}}$, přechází vztah (168) do tvaru

$$\begin{aligned} \psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = & -L \frac{H_k^{*2}}{c^2 \hbar^2} \left\{ e^{-i\left(\omega_0 + i \frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} - \sigma^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_0 - i \frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} + \right. \\ & + \frac{2\Theta_{\omega_k}^{\text{spon}}}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} - \sigma^{\text{spon}}} \left[e^{-i\left(\omega_0 - i \frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_0 - i \frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} - \right. \\ & \left. \left. - e^{-i\left(\omega_0 + i \frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} - \sigma^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_0 - i \frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right] \right\} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (169) \end{aligned}$$

V dalším kroku jsou vyčísleny všechny pracovní konstanty vzhledem k radiční šířce Γ_r jednoho jádra z kapitoly 2.1. Konstanty jsou zapsány do tabulky 1. Člen s konstantou Θ_{ω_k} v tomto případě nelze zanedbat, neboť po dosazení za konstanty vychází

$$\frac{2\Theta_{\omega_k}^{\text{spon}}}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} - \sigma^{\text{spon}}} = 1. \quad (170)$$

Dosazením za všechny konstanty v rovnici (169) se získá rovnice ve tvaru

$$\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = -L \frac{H_k^{*2}}{\hbar^2 c^2} e^{-i\left(\omega_0 - i \frac{\Gamma_r}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (171)$$

Hustota pravděpodobnosti emise dvojice fotonů $P_2^{\text{spon}}(x,t)$ je určena jako

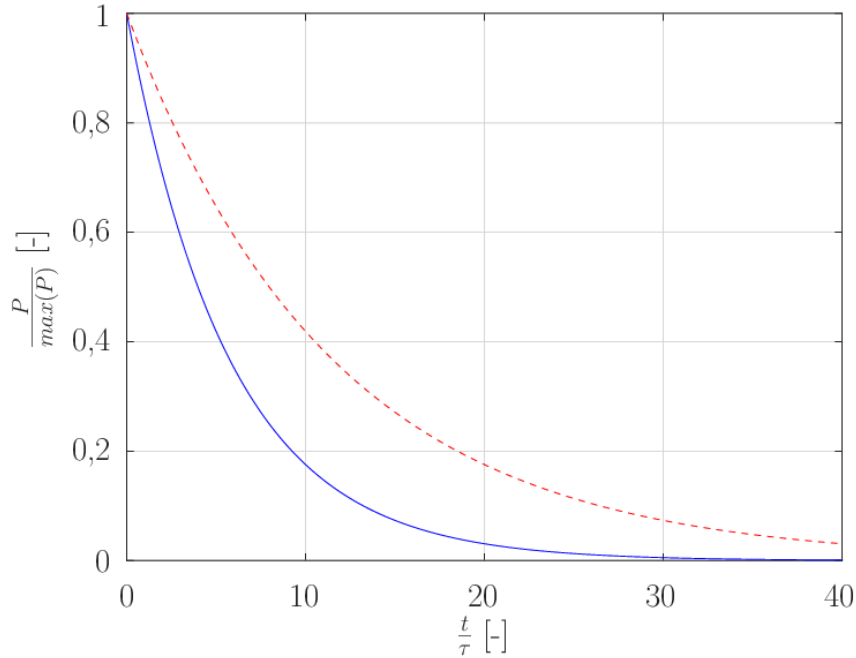
$$P_2^{\text{spon}}(x,t) = |\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)|^2 = L^2 \frac{|H_k|^4}{\hbar^4 c^4} e^{-\frac{\Gamma_r}{\hbar}\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (172)$$

Na obrázku 21 je znázorněn průběh hustoty pravděpodobnosti spontánní emise dvou fotonů popsáný vztahem (172). Vysoká hodnota doby života, v řádu desetinásobku doby života excitovaného stavu τ , je způsobená zanedbáním emise konverzních elektronů. Vztah (172) lze zapsat jako součin dvou hustot pravděpodobností spontánní emise jednoho excitovaného jádra při zanedbání emise konverzních elektronů,

$$\begin{aligned} P_2^{\text{spon}}(x,t) = & P\left(t - \frac{x}{c}\right) P\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right) = \\ & = L \frac{|H_k|^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\frac{\Gamma_r}{\hbar}\left(t - \frac{x}{c}\right)} L \frac{|H_k|^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\frac{\Gamma_r}{\hbar}\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (173) \end{aligned}$$

Konstanta	Velikost vztažená k Γ_r
$\Gamma_{r,\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$	$\Gamma_r \approx 6,5 \times 10^{-29} \text{ J}$
$\Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$	0
$\Gamma_{r,\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$	$\Gamma_r \approx 6,5 \times 10^{-29} \text{ J}$
$\Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$	0
$\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$	$\Gamma_r \approx 6,5 \times 10^{-29} \text{ J}$
$\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$	$\Gamma_r \approx 6,5 \times 10^{-29} \text{ J}$
$\Gamma_{\text{tot}}^{\text{spon}}$	$2\Gamma_r \approx 1,3 \times 10^{-28} \text{ J}$
$\sigma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$	$\Gamma_r + i \frac{\Gamma_r^2}{2\omega_0 \hbar} \approx 6,5 \times 10^{-29} + i9,2 \times 10^{-43} \text{ J}$
$\sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$	0
$\sigma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$	$\Gamma_r + i \frac{\Gamma_r^2}{2\omega_0 \hbar} \approx 6,5 \times 10^{-29} + i9,2 \times 10^{-43} \text{ J}$
$\sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$	0
σ^{spon}	$2\Gamma_r + i \frac{\Gamma_r^2}{\omega_0 \hbar} \approx 1,3 \times 10^{-28} + i1,8 \times 10^{-42} \text{ J}$
$\vartheta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$	$\Gamma_r - i \frac{\Gamma_r^2}{2\omega_0 \hbar} \approx 6,5 \times 10^{-29} - i9,2 \times 10^{-43} \text{ J}$
$\vartheta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$	$\Gamma_r - i \frac{\Gamma_r^2}{2\omega_0 \hbar} \approx 6,5 \times 10^{-29} - i9,2 \times 10^{-43} \text{ J}$
$\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$	$-i \frac{\Gamma_r^2}{2\omega_0 \hbar} \approx -i9,2 \times 10^{-43} \text{ J}$
$\Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$	$-i \frac{\Gamma_r^2}{2\omega_0 \hbar} \approx -i9,2 \times 10^{-43} \text{ J}$
κ^{spon}	$\frac{\Gamma_r^4}{\omega_0^2 \hbar^2} \approx 3,4 \times 10^{-84} \text{ J}^2$

Tabulka 1: Konstanty při spontánní dvojnásobné emisi fotonů, kdy $\delta_{k_1 k_2} = 0$, vztažené k radiční šířce Γ_r jednoho jádra z kapitoly 2.1.



Obrázek 21: Graf závislosti hustoty pravděpodobnosti spontánního emitování dvojice fotonů vzhledem k času v jednotce doby života τ pro $x = 0$, $x_2 = 0$ dle vztahu (172) (modrá) a graf daný exponenciální závislostí $e^{-\frac{\Gamma_r}{\hbar} t}$ (červená čárkovaná). Časová konstanta $\tau = 141 \text{ ns}$.

Amplituda pravděpodobnosti stimulované emise

Amplituda pravděpodobnosti popisující stimulovanou emisi je dána vztahem

$$\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = \sum_{\underbrace{k_1}_{k_1=k_2}} \sum_{k_2} \frac{e^{i(k_1x-\omega_{k_1}t)} e^{i(k_2x-\omega_{k_2}t)}}{L} a_{2k_1k_2}(t). \quad (174)$$

Vztah (174) je opět upraven pomocí symbolického předpisu $\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$ [21] do tvaru

$$\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = \frac{L\Delta}{4\pi^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_{2k_1k_2}(t) e^{i(k_1x-\omega_{k_1}t)} e^{i(k_2x-\omega_{k_2}t)} \delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2}) d\omega_{k_2} d\omega_{k_1}. \quad (175)$$

Podmínka na integrační proměnné $k_1 = k_2$ je do integrace zavedena vynásobením vnitřní části integrálu členem $\Delta\delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})$, kde $\delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})$ je Diracova delta funkce a Δ je konstanta kompenzující fyzikální jednotku Diracovy delta funkce. Provedením první integrace vychází

$$\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = \frac{L\Delta}{4\pi^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} a_{2k}(t) e^{-i2(kx-\omega_k t)} d\omega_k. \quad (176)$$

Amplituda $a_{2k}(t)$ je dána vztahem

$$a_{2k}^{\text{stim}}(t) = \sqrt{2} \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^* e^{-ikx_2}}{2\hbar^2 \left(\omega_k - \frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} + i \frac{\sigma^{\text{stim}}}{4\hbar} \right)} \times \left[\frac{1}{\omega_k - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}}{2\hbar}} + \frac{1}{\omega_k - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar}} - i \frac{\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar \left(\omega_k - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}}{2\hbar} \right) \left(\omega_k - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar} \right)} \right]. \quad (177)$$

V tomto případě platí $\delta_{k_1k_2} = 1$ a konstanty jsou přeznačeny $\sigma \rightarrow \sigma^{\text{stim}}$, $\Gamma_{\omega_{k_1}} \rightarrow \Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}} \rightarrow \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$, $\Theta_{\omega_{k_1}} \rightarrow \Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$ a $\Theta_{\omega_{k_2}} \rightarrow \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$. Dosazením za amplitudu $a_{2k}(t)$ ve vztahu (176) je získán vztah

$$\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = \sqrt{2} L \Delta \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^*}{8\pi^2 c^2 \hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_k(2t - \frac{2x-x_2}{c})}}{\left(\omega_k - \frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} + i \frac{\sigma^{\text{stim}}}{4\hbar} \right)} \times \left[\frac{1}{\omega_k - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}}{2\hbar}} + \frac{1}{\omega_k - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar}} - i \frac{\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar \left(\omega_k - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}}{2\hbar} \right) \left(\omega_k - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar} \right)} \right] d\omega_k. \quad (178)$$

Po integraci vychází vztah

$$\begin{aligned}
\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = & -i\sqrt{2}L\Delta \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^*}{4\pi c^2 \hbar^2} \left\{ \frac{e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)}}{\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} + \frac{e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)}}{\left(\frac{\omega_{j_2} - \omega_{j_1}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} \right. \\
& - \frac{e^{-i\left(\frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} - i\frac{\sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)}}{\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} - \frac{e^{-i\left(\frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} - i\frac{\sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)}}{\left(\frac{\omega_{j_2} - \omega_{j_1}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} \\
& - i\left(\frac{\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right) \left[\frac{e^{-i\left(\frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} - i\frac{\sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)}}{\left(\frac{\omega_1 - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\frac{\omega_2 - \omega_{j_1}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} + \right. \\
& \left. \frac{e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)}}{\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\omega_{j_1} - \omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} - \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)} \right. \\
& \left. - \frac{e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)}}{\left(\frac{\omega_{j_2} - \omega_{j_1}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\omega_{j_1} - \omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} - \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)} \right] \left. \right\} \Theta\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right). \quad (179)
\end{aligned}$$

V případě rezonance, kdy $\omega_{j_1} = \omega_{j_2} = \omega_0$, $\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} = \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} = \Theta_{\omega_k}^{\text{stim}}$, $H_{k_1} = H_{k_2} = H_k$, $\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} = \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} = \Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}}$, nabývá vztah (179) tvaru

$$\begin{aligned}
\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = & -\sqrt{2}L\Delta \frac{H_k^{*2}}{2\pi c^2 \hbar^2} \left(\frac{4\hbar}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}\right) \times \\
& \times e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} \left\{ \left[e^{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} - 1 \right] + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\Theta_{\omega_k}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right) \left[\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right) - \frac{e^{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)}}{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} \right] \right\} \Theta\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right). \quad (180)
\end{aligned}$$

Člen s $\Theta_{\omega_k}^{\text{stim}}$ má zanedbatelnou velikost⁶. Po zanedbání tohoto členu nabývá vztah (180) tvaru

$$\begin{aligned}
\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = & -\sqrt{2}L\Delta \frac{H_k^{*2}}{2\pi c^2 \hbar^2} \left(\frac{4\hbar}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}\right) \times \\
& \times e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} \left[e^{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} - 1 \right] \Theta\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right). \quad (181)
\end{aligned}$$

⁶Členy s $\Theta_{\omega_k}^{\text{stim}}$ mají při stimulované emisi a při použití hodnot popisujících excitovaný stav jádra ⁵⁷Fe velikosti $\frac{\Theta_{\omega_k}^{\text{stim}}}{2\hbar} \approx -i10^{-13}$ a $\frac{2\Theta_{\omega_k}^{\text{stim}}}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \sigma^{\text{stim}}} \approx 10^{-27} - i10^{-13}$.

V dalším kroku jsou vyčísleny všechny pracovní konstanty vzhledem k radiační šířce Γ_r jednoho jádra z kapitoly 2.1. Konstanty jsou zapsány do tabulky 2. Přepsáním vztahu (181) dosazením těchto konstant se získá vztah

$$\begin{aligned} \psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = & -\sqrt{2}L\Delta \frac{H_k^{*2}}{2\pi c^2 \hbar^2} \left(\frac{2\hbar}{\Gamma_r - i\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0 \hbar}} \right) \times \\ & \times e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma_r}{\hbar})(2t - \frac{2x-x_2}{c})} \left[e^{-i\left(\frac{\Gamma_r^2}{2\omega_0 \hbar} + i\frac{\Gamma_r}{2\hbar}\right)(2t - \frac{2x-x_2}{c})} - 1 \right] \Theta \left(2t - \frac{2x-x_2}{c} \right). \end{aligned} \quad (182)$$

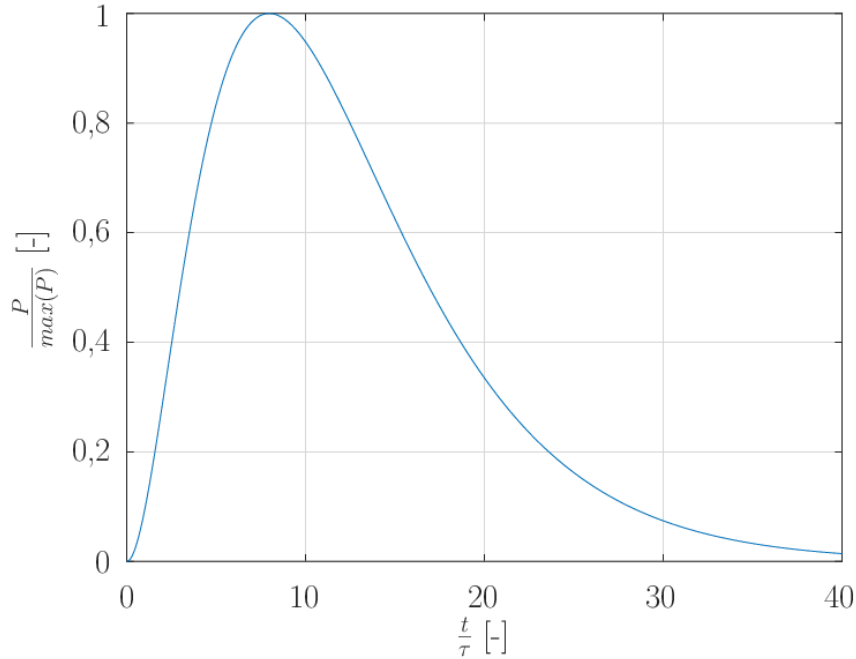
Hustota pravděpodobnosti stimulované emise fotonu $P_2^{\text{stim}}(x,t)$ je určena jako

$$P_2^{\text{stim}}(x,t) = |\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)|^2. \quad (183)$$

Vztah (183) je znázorněn na obrázku 22. Velká doba života, v řádu desítek dob života excitovaného jádra τ , ve výsledku je způsobena zanedbáním emise konverzních elektronů. Rozbor případu, ve kterém je uvažována emise konverzních elektronů, je předmětem další kapitoly.

Konstanta	Velikost vztažená k Γ_r
$\Gamma_{r,\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r \approx 6.5 \times 10^{-29} \text{ J}$
$\Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r \approx 6.5 \times 10^{-29} \text{ J}$
$\Gamma_{r,\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r \approx 6.5 \times 10^{-29} \text{ J}$
$\Gamma_{r,\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r \approx 6.5 \times 10^{-29} \text{ J}$
$\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$	$2\Gamma_r \approx 1.3 \times 10^{-28} \text{ J}$
$\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$	$2\Gamma_r \approx 1.3 \times 10^{-28} \text{ J}$
$\Gamma_{\text{tot}}^{\text{stim}}$	$4\Gamma_r \approx 2.6 \times 10^{-28} \text{ J}$
$\sigma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r + i\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx 6.5 \times 10^{-29} + i1.83 \times 10^{-42} \text{ J}$
$\sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r + i\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx 6.5 \times 10^{-29} + i1.83 \times 10^{-42} \text{ J}$
$\sigma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r + i\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx 6.5 \times 10^{-29} + i1.83 \times 10^{-42} \text{ J}$
$\sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r + i\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx 6.5 \times 10^{-29} + i1.83 \times 10^{-42} \text{ J}$
σ^{stim}	$2\Gamma_r + i2\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx 1.3 \times 10^{-28} + i3.67 \times 10^{-42} \text{ J}$
$\vartheta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r - i\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx 6.5 \times 10^{-29} - i1.83 \times 10^{-42} \text{ J}$
$\vartheta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$	$\Gamma_r - i\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx 6.5 \times 10^{-29} - i1.83 \times 10^{-42} \text{ J}$
$\Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$	$-i2\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx -i3.67 \times 10^{-42} \text{ J}$
$\Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$	$-i2\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar} \approx -i3.67 \times 10^{-42} \text{ J}$
κ^{stim}	$8\frac{\Gamma_r^4}{\omega_0^2\hbar^2} \approx 2.7 \times 10^{-83} \text{ J}^2$

Tabulka 2: Konstanty při stimulované emisi vztažené k části šířky spektrální čáry připadající na emisi fotonu Γ_r jednoho jádra z kapitoly 2.1.

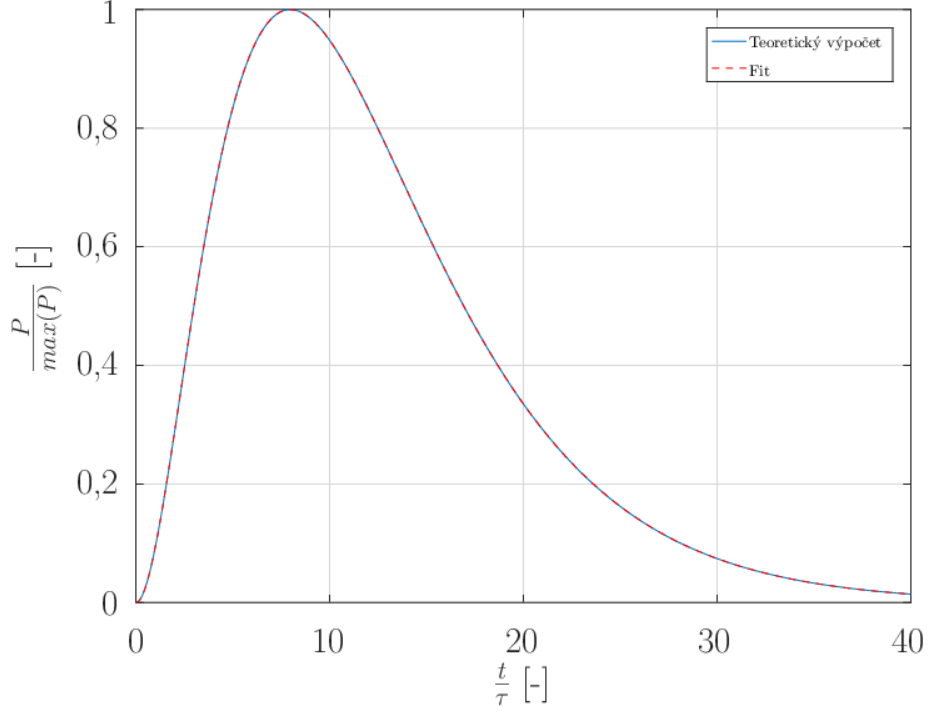


Obrázek 22: Graf závislosti hustoty pravděpodobnosti stimulované emise fotonu vzhledem k času v jednotce doby života pro $x = 0, x_2 = 0$ dle vztahu (183). Časová konstanta $\tau = 141 \text{ ns}$.

Fitováním průběhu daného vztahem (183), viz obrázek 23, je ukázaná shoda se vztahem popisujícím hustotu pravděpodobnosti stimulované emise ve tvaru

$$P_2^{\text{stim}}(t) \propto \left| \left[e^{-\frac{\Gamma_r}{\hbar}t} \Theta(t) \right] \otimes \left[e^{-\frac{2\Gamma_r}{\hbar}t} \Theta(t) \right] \right|^2, \quad (184)$$

kde \otimes označuje konvoluci. Obdobný vztah je odvozen i při popisu stimulované emise s konverzními elektrony.



Obrázek 23: Graf závislosti hustoty pravděpodobnosti stimulované emise fotonu vzhledem k času v jednotce doby života τ pro $x = 0$, $x_2 = 0$ při stimulované emisi na jednom jádře dle vztahu (183) (modrá) proložený křivkou danou danou vztahem (184) (červená). Průběhy se překrývají. Časová konstanta $\tau = 141$ ns.

Amplituda pravděpodobnosti detekce dvou fotonů $\psi_{r,2}(x,t)$ je určena součtem amplitud pravděpodobnosti $\psi_{r,2}^{\text{spón}}(x,t)$ a $\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)$, daných vztahy (171) a (182). Amplituda pravděpodobnosti detekce dvou fotonů je vyjádřena vztahem

$$\begin{aligned} \psi_{r,2}(x,t) = & -L \frac{H_k^{*2}}{c^2 \hbar^2} e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma_r}{2\hbar})(2t - \frac{2x-x_2}{c})} \left\{ \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \sqrt{2} \frac{\Delta}{2\pi} \left(\frac{2\hbar}{\Gamma_r - i\frac{\Gamma_r^2}{\omega_0\hbar}} \right) \times \right. \\ & \left. \times e^{-\frac{\Gamma_r}{2\hbar}\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} \left[e^{-i\left(\frac{\Gamma_r^2}{2\omega_0\hbar^2} + i\frac{\Gamma_r}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} - 1 \right] \Theta\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right) \right\}. \quad (185) \end{aligned}$$

Hustota pravděpodobnosti detekce dvou fotonů $P_2(x,t)$ je určena jako

$$P_2(x,t) = |\psi_{r,2}(x,t)|^2. \quad (186)$$

Vztah (186) není graficky znázorněn, protože není vyčíslena konstanta Δ .

4.2 Stimulovaná emise s konverzními elektrony

V této kapitole je uvažován zobecněný systém, ve kterém již není zanedbána emise konverzních elektronů. Počátečním stavem systému je opět stav, ve kterém jsou dvě excitovaná jádra. První jádro je umístěno do počátku souřadnic a druhé jádro na ose x do souřadnice x_2 .

Soustava rovnic

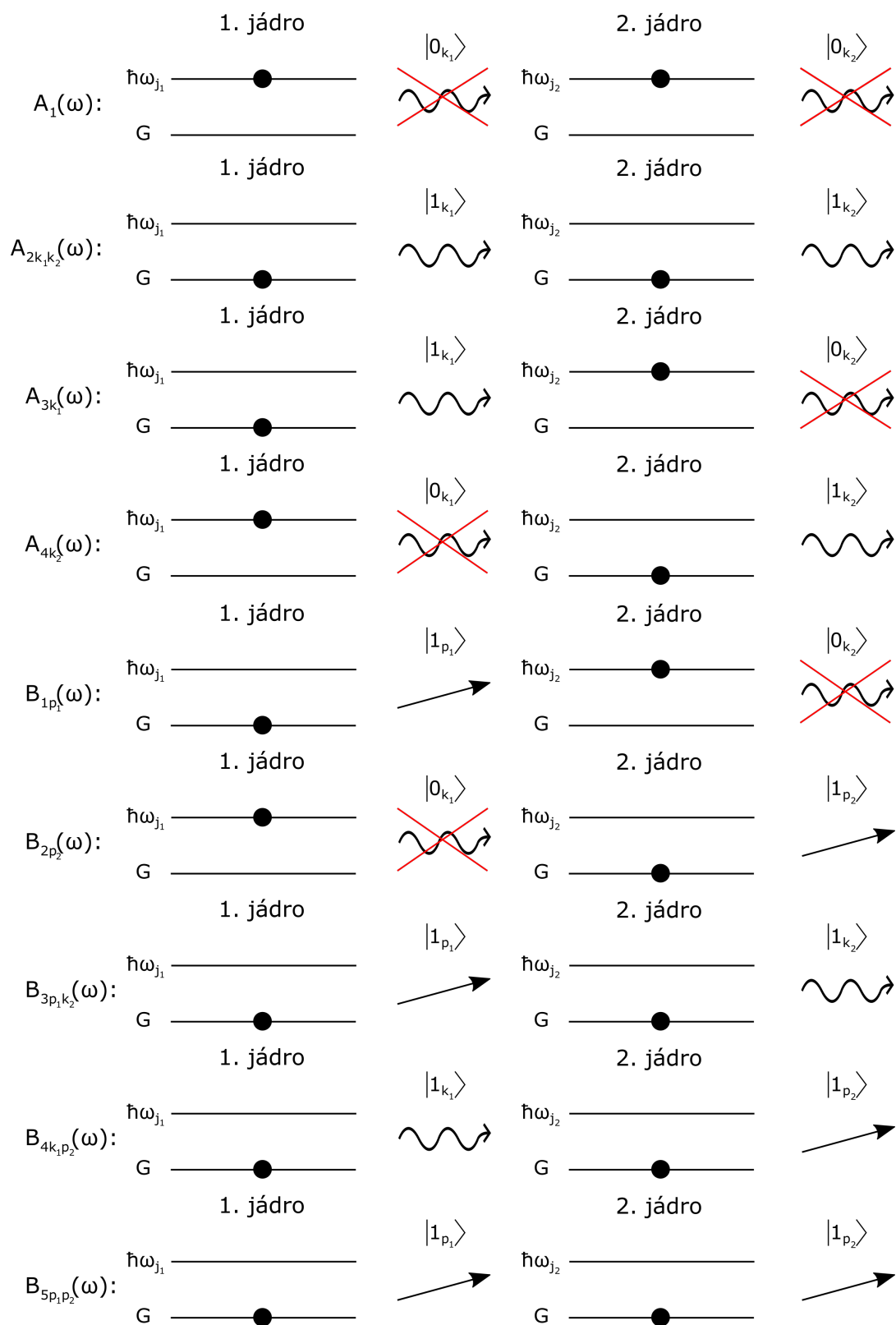
Počáteční stav systému je dále označen $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$. Stav, při němž je první jádro v excitovaném stavu s energií $\hbar\omega_{j_1}$, je označen $|e_1^{j_1}\rangle$ a $|e_2^{j_2}\rangle$ označuje stav, při němž je druhé jádro v excitovaném stavu s energií $\hbar\omega_{j_2}$. Stav bez fotonů jsou označeny $|\{0_{k_1}\}\rangle$ a $|\{0_{k_2}\}\rangle$ a stavy bez konverzních elektronů $|[0_{p_1}]\rangle$ a $|[0_{p_2}]\rangle$. Dalším možným stavem systému je stav, při němž jsou obě jádra v základních stavech $|g_1\rangle$ a $|g_2\rangle$, opět nejsou přítomné žádné konverzní elektrony, ale jsou přítomné dva fotony. Foton emitovaný prvním jádrem je pak označen stavem $|1_{k_1}\rangle$ a foton emitovaný druhým jádrem je označen stavem $|1_{k_2}\rangle$. Tento stav je souhrnně označen $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$. Dále může nastat stav, při němž je první jádro v základním stavu, druhé jádro je excitované, je přítomen jeden foton emitovaný prvním jádrem a opět není přítomen žádný konverzní elektron. Tento stav je označen $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$. Stav systému, který je podobný předchozímu, ale první jádro je excitované a druhé je v základním stavu a je přítomen foton vyzařovaný druhým jádrem, je označen $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$. Tyto stavy byly uvažovány při řešení stimulované emise v předchozí kapitole.

Pro řešení obecnějšího případu je potřeba uvažovat další stavy, které navíc obsahují konverzní elektrony. Stav uvažovaného systému, ve kterém přechod jednoho z jader do základního stavu způsobil emisi konverzního elektronu a zbylé jádro v systému zůstalo v excitovaném stavu, jsou označeny $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$ a $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$. Další stavy systému, ve kterém došlo k emisi konverzního elektronu jedním jádrem a k emisi γ fotonu druhým jádrem, jsou označeny $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$ a $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$, podle toho, zda konverzní elektron pochází z prvního jádra nebo z druhého. Stav systému, ve kterém došlo k vyzařování dvou konverzních elektronů, je označen $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$.

Obecný stav systému $|\psi(t)\rangle$ je

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = & a_1(t) e^{-i\omega_{j_1}t} e^{-i\omega_{j_2}t} |e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle + \\
& + \sum_{k_1} \sum_{k_2} a_{2k_1k_2}(t) e^{-i\omega_{k_1}t} e^{-i\omega_{k_2}t} |g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle + \\
& + \sum_{k_1} a_{3k_1}(t) e^{-i\omega_{k_1}t} e^{-i\omega_{j_2}t} |g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle + \\
& + \sum_{k_2} a_{4k_2}(t) e^{-i\omega_{k_2}t} e^{-i\omega_{j_1}t} |e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle + \\
& + \sum_{p_1} b_{1p_1}(t) e^{-i\omega_{p_1}t} e^{-i\omega_{j_2}t} |g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle + \\
& + \sum_{p_2} b_{2p_2}(t) e^{-i\omega_{p_2}t} e^{-i\omega_{j_1}t} |e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle + \\
& + \sum_{p_1} \sum_{k_2} b_{3p_1k_2}(t) e^{-i\omega_{p_1}t} e^{-i\omega_{k_2}t} |g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle + \\
& + \sum_{k_1} \sum_{p_2} b_{4k_1p_2}(t) e^{-i\omega_{k_1}t} e^{-i\omega_{p_2}t} |g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle + \\
& + \sum_{p_1} \sum_{p_2} b_{5p_1p_2}(t) e^{-i\omega_{p_1}t} e^{-i\omega_{p_2}t} |g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle,
\end{aligned} \tag{187}$$

kde $a_1(t)$ je amplituda nalezení celého systému ve stavu, ve kterém jsou obě jádra excitovaná a není přítomný žádný foton ani konverzní elektron. $a_{2k_1k_2}(t)$ je amplituda nalezení celého systému ve stavu, ve kterém jsou obě jádra v základním stavu, nebyly emitované konverzní elektrony a jsou přítomné dva fotony s vlnovými čísly k_1 a k_2 . $a_{3k_1}(t)$ je amplituda nalezení celého systému ve stavu, ve kterém je první jádro v základním stavu, druhé jádro je excitované, nejsou přítomné konverzní elektrony a je přítomný foton s vlnovým číslem k_1 . $a_{4k_2}(t)$ je amplituda nalezení celého systému ve stavu, ve kterém je první jádro v excitovaném stavu, druhé jádro je v základním stavu a je přítomný foton s vlnovým číslem k_2 . $b_{1p_1}(t)$ je amplituda popisující stav systému, ve kterém je první jádro v základním stavu, druhé jádro je excitované a je přítomný konverzní elektron s hybností p_1 . Amplituda $b_{2p_2}(t)$ charakterizuje stav systému, ve kterém je první jádro excitované a přechod druhého jádra do základního stavu způsobil emisi konverzního elektronu o hybnosti p_2 . $b_{3p_1k_2}(t)$ je amplituda popisující stav systému, ve kterém přechod prvního jádra do základního stavu způsobil emisi konverzního elektronu s hybností p_1 a přechod druhého jádra do základního stavu vyvolal emisi γ fotonu s vlnovým číslem k_2 . $b_{4k_1p_2}(t)$ je amplituda popisující stav systému, ve kterém první jádro emitovalo foton s vlnovým číslem k_1 a druhé jádra vyvolalo emisi konverzního elektronu o hybnosti p_2 . Amplituda $b_{5p_1p_2}(t)$ popisuje stav systému, ve kterém došlo k emisi dvou elektronů o hybnostech p_1 a p_2 . Ve frekvenční doméně časově závislým amplitudám $a_1(t)$, $a_{2k_1k_2}(t)$, $a_{3k_1}(t)$, $a_{4k_2}(t)$, $b_{1p_1}(t)$, $b_{2p_2}(t)$, $b_{3p_1k_2}(t)$, $b_{4k_1p_2}(t)$ a $b_{5p_1p_2}(t)$ odpovídají frekvenčně závislé amplitudy $A_1(\omega)$, $A_{2k_1k_2}(\omega)$, $A_{3k_1}(\omega)$, $A_{4k_2}(\omega)$, $B_{1p_1}(\omega)$, $B_{2p_2}(\omega)$, $B_{3p_1k_2}(\omega)$, $B_{4k_1p_2}(\omega)$ a $B_{5p_1p_2}(\omega)$. Na obrázku 24 je znázorněno přiřazení amplitud ke stavům systému.



Obrázek 24: Schéma stavů, ke kterým jsou přiřazeny amplitudy, při popisu stimulované emise při uvažování emise konverzních elektronů.

Část hamiltoniánu \hat{H} popisující interakce jednoho fotonu a jednoho jádra má tvar

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \sum_{k_1} H_{k_1} \hat{a}_{k_1} (|e_1^{j_1}\rangle \langle g_1|) + \sum_{k_2} H_{k_2} \hat{a}_{k_2} e^{ik_2 x_2} (|e_2^{j_2}\rangle \langle g_2|) + \\
& + \sum_{k_1} H_{k_1}^* \hat{a}_{k_1}^\dagger (|g_1\rangle \langle e_1^{j_1}|) + \sum_{k_2} H_{k_2}^* \hat{a}_{k_2}^\dagger e^{-ik_2 x_2} (|g_2\rangle \langle e_2^{j_2}|) + \\
& + \sum_{p_1} H_{p_1} \hat{b}_{p_1} (|e_1^{j_1}\rangle \langle g_1|) + \sum_{p_2} H_{p_2} \hat{b}_{p_2} e^{i\frac{p_2}{\hbar} x_2} (|e_2^{j_2}\rangle \langle g_2|) + \\
& + \sum_{p_1} H_{p_1}^* \hat{b}_{p_1}^\dagger (|g_1\rangle \langle e_1^{j_1}|) + \sum_{p_2} H_{p_2}^* \hat{b}_{p_2}^\dagger e^{-i\frac{p_2}{\hbar} x_2} (|g_2\rangle \langle e_2^{j_2}|), \tag{188}
\end{aligned}$$

kde \hat{a}_{k_1} , $\hat{a}_{k_1}^\dagger$, \hat{a}_{k_2} , $\hat{a}_{k_2}^\dagger$, \hat{b}_{p_1} , $\hat{b}_{p_1}^\dagger$, \hat{b}_{p_2} a $\hat{b}_{p_2}^\dagger$ jsou anihilační a kreační operátory odebrávající ze systému a přidávající do systému fotony s vlnovými čísly k_1 a k_2 a konverzní elektrony s hybnostmi p_1 a p_2 , $(|e_1^{j_1}\rangle \langle g_1|)$ a $(|g_1\rangle \langle e_1^{j_1}|)$ jsou operátory excitující a deexcitující první jádro, $(|e_2^{j_2}\rangle \langle g_2|)$ a $(|g_2\rangle \langle e_2^{j_2}|)$ jsou operátory excitující a deexcitující druhé jádro [27, 28], H_{k_1} , H_{k_2} , $H_{k_1}^*$, $H_{k_2}^*$, H_{p_1} , H_{p_2} , $H_{p_1}^*$ a $H_{p_2}^*$ jsou vazebné konstanty charakterizující sílu interakce jader s fotony s vlnovými vektory k_1 a k_2 a s konverzními elektrony s hybnostmi p_1 a p_2 [27].

Rovnice pro amplitudu $A_1(\omega)$ se získá projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$ a postupem dle obecného odvození popsaného vztahy (41–46). Tvar rovnice je

$$\begin{aligned}
(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\varepsilon) A_1(\omega) = & 1 + \sum_{k_1} \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\hbar} + \\
& + \sum_{k_2} \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2 x_2}}{\hbar} + \sum_{p_1} \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{p_1}}{\hbar} + \sum_{p_2} \frac{B_{2p_2}(\omega) H_{p_2} e^{i\frac{p_2}{\hbar} x_2}}{\hbar}. \tag{189}
\end{aligned}$$

Stejným postupem je odvozena rovnice pro amplitudu $A_{2k_1 k_2}(\omega)$. V tomto případě je projektována Schrödingerova rovnice na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$. Rovnice pro amplitudu $A_{2k_1 k_2}(\omega)$ má tvar

$$(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) A_{2k_1 k_2}(\omega) = \sqrt{1 + \delta_{k_1 k_2}} \left[\frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar} + \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar} \right]. \tag{190}$$

Odmocnina $\sqrt{1 + \delta_{k_1 k_2}}$ se získala působením operátoru $\hat{a}_{k_1}^\dagger$ kreační fotonu o vlnové délce k_1 na stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$ a působením operátoru $\hat{a}_{k_2}^\dagger$ kreační fotonu o vlnové délce k_2 na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$. Projektováním Schrödingerovy rovnice na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$ se získá rovnice pro amplitudu $A_{3k_1}(\omega)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i\varepsilon) A_{3k_1}(\omega) = & \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar} + \\
& + \sum_{k_2} \sqrt{1 + \delta_{k_1 k_2}} \frac{A_{2k_1 k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2 x_2}}{\hbar} + \sum_{p_2} \frac{B_{4k_1 p_2}(\omega) H_{p_2} e^{i\frac{p_2}{\hbar} x_2}}{\hbar}. \tag{191}
\end{aligned}$$

Odmocnina $\sqrt{1 + \delta_{k_1 k_2}}$ se získala působením operátoru \hat{a}_{k_2} anihilace fotonu o vlnové délce k_2 na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$. Vztah pro amplitudu $A_{4k_2}(\omega)$, která

se získá projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$, má tvar

$$(\omega - \omega_{k_2} - \omega_{j_1} + i\varepsilon) A_{4k_2}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar} + \sum_{k_1} \sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}} \frac{A_{2k_1k_2}(\omega) H_{k_1}}{\hbar} + \sum_{p_1} \frac{B_{3p_1k_2}(\omega) H_{p_1}}{\hbar}. \quad (192)$$

Odmocnina $\sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}}$ se získala působením operátoru \hat{a}_{k_1} anihilace fotonu o vlnové délce k_1 na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$. Rovnice pro amplitudu $B_{1p_1}(\omega)$ se získá projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$ a je ve tvaru

$$(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{j_2} + i\varepsilon) B_{1p_1}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{p_1}^*}{\hbar} + \sum_{k_2} \frac{B_{3p_1k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2x_2}}{\hbar} + \sum_{p_2} \frac{B_{5p_1p_2}(\omega) H_{p_2} e^{i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\hbar}. \quad (193)$$

Projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$ se získá rovnice pro amplitudu $B_{2p_2}(\omega)$

$$(\omega - \omega_{p_2} - \omega_{j_1} + i\varepsilon) B_{2p_2}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{p_2}^* e^{-i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\hbar} + \sum_{k_1} \frac{B_{4k_1p_2}(\omega) H_{k_1}}{\hbar} + \sum_{p_1} \frac{B_{5p_1p_2}(\omega) H_{p_1}}{\hbar}. \quad (194)$$

Rovnice pro amplitudu $B_{3p_1k_2}(\omega)$ získaná projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$ je ve tvaru

$$(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) B_{3p_1k_2}(\omega) = \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{p_1}^*}{\hbar} + \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar}. \quad (195)$$

Následně se projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$ získá rovnice pro amplitudu $B_{4k_1p_2}(\omega)$

$$(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon) B_{4k_1p_2}(\omega) = \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{p_2}^* e^{-i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\hbar} + \frac{B_{2p_2}(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar}. \quad (196)$$

Rovnice pro amplitudu $B_{5p_1p_2}(\omega)$ získaná projekcí Schrödingerovy rovnice na stav $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$ je ve tvaru

$$(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon) B_{5p_1p_2}(\omega) = \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{p_2}^* e^{-i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\hbar} + \frac{B_{2p_2}(\omega) H_{p_1}^*}{\hbar}. \quad (197)$$

Řešení soustavy rovnic

Při řešení soustavy rovnic (189–197) jsou nejprve vyjádřeny amplitudy $A_{2k_1k_2}(\omega)$, $B_{3p_1k_2}(\omega)$, $B_{4k_1p_2}(\omega)$ a $B_{5p_1p_2}(\omega)$ z rovnic (190) a (195–197) ve tvarech

$$A_{2k_1k_2}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}}}{\hbar(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon)} [A_{3k_1}(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2} + A_{4k_2}(\omega) H_{k_1}^*], \quad (198)$$

$$B_{3p_1k_2}(\omega) = \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{p_1}^*}{\hbar(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon)} + \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon)}, \quad (199)$$

$$B_{4k_1p_2}(\omega) = \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{p_2}^* e^{-i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\hbar(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon)} + \frac{B_{2p_2}(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon)}, \quad (200)$$

$$B_{5p_1p_2}(\omega) = \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{p_2}^* e^{-i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\hbar(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon)} + \frac{B_{2p_2}(\omega) H_{p_1}^*}{\hbar(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon)}. \quad (201)$$

Dále jsou vztahy (198–201) dosazeny do rovnic (191–194) a pomocí dříve popsaných postupů jsou z těchto rovnic vyjádřeny amplitudy $A_{3k_1}(\omega)$, $A_{4k_2}(\omega)$, $B_{1p_1}(\omega)$ a $B_{2p_2}(\omega)$ ve tvarech

$$A_{3k_1}(\omega) = \frac{H_{k_1}^*}{\hbar\left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)} \left[A_1(\omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\hbar} \sum_{k_2} (1 + \delta_{k_1k_2}) \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2x_2}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \frac{1}{\hbar} \sum_{p_2} \frac{B_{2p_2}(\omega) H_{p_2} e^{i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon} \right], \quad (202)$$

$$A_{4k_2}(\omega) = \frac{H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar\left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}\right)} \left[A_1(\omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\hbar} \sum_{k_1} (1 + \delta_{k_1k_2}) \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \frac{1}{\hbar} \sum_{p_1} \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{p_1}}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right], \quad (203)$$

$$B_{1p_1}(\omega) = \frac{H_{p_1}^*}{\hbar\left(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_2}} + \gamma_{r,\omega_{k_2}}}{2\hbar}\right)} \left[A_1(\omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\hbar} \sum_{k_2} \frac{A_{4k_2}(\omega) H_{k_2} e^{ik_2x_2}}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \frac{1}{\hbar} \sum_{p_2} \frac{B_{2p_2}(\omega) H_{p_2} e^{i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon} \right], \quad (204)$$

$$B_{2p_2}(\omega) = \frac{H_{p_2}^* e^{-i\frac{p_2}{\hbar}x_2}}{\hbar\left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{p_2} + i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_1}} + \gamma_{r,\omega_{k_1}}}{2\hbar}\right)} \left[A_1(\omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\hbar} \sum_{k_1} \frac{A_{3k_1}(\omega) H_{k_1}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon} + \frac{1}{\hbar} \sum_{p_1} \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{p_1}}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon} \right], \quad (205)$$

kde konstanty $\Gamma_{\omega_{k_1}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}}$, $\Gamma_{c,\omega_{p_1}}$, $\Gamma_{c,\omega_{p_2}}$, $\gamma_{r,\omega_{k_1}}$, $\gamma_{r,\omega_{k_2}}$, $\gamma_{c,\omega_{p_1}}$ a $\gamma_{c,\omega_{p_2}}$ jsou popsány v tabulce 3.

Konstanta	Vztah
$\Gamma_{\omega_{k_1}}$	$i \frac{2}{\hbar} \sum_{k_1} (1 + \delta_{k_1 k_2}) \frac{ H_{k_1} ^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon}$
$\Gamma_{\omega_{k_2}}$	$i \frac{2}{\hbar} \sum_{k_2} (1 + \delta_{k_1 k_2}) \frac{ H_{k_2} ^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon}$
$\Gamma_{c, \omega_{p_1}}$	$i \frac{2}{\hbar} \sum_{p_1} \frac{ H_{p_1} ^2}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon}$
$\Gamma_{c, \omega_{p_2}}$	$i \frac{2}{\hbar} \sum_{p_2} \frac{ H_{p_2} ^2}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon}$
$\gamma_{r, \omega_{k_1}}$	$i \frac{2}{\hbar} \sum_{k_1} \frac{ H_{k_1} ^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon}$
$\gamma_{r, \omega_{k_2}}$	$i \frac{2}{\hbar} \sum_{k_2} \frac{ H_{k_2} ^2}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon}$
$\gamma_{c, \omega_{p_1}}$	$i \frac{2}{\hbar} \sum_{p_1} \frac{ H_{p_1} ^2}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon}$
$\gamma_{c, \omega_{p_2}}$	$i \frac{2}{\hbar} \sum_{p_2} \frac{ H_{p_2} ^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon}$

Tabulka 3: Definice konstant $\Gamma_{\omega_{k_1}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}}$, $\Gamma_{c, \omega_{p_1}}$, $\Gamma_{c, \omega_{p_2}}$, $\gamma_{r, \omega_{k_1}}$, $\gamma_{r, \omega_{k_2}}$, $\gamma_{c, \omega_{p_1}}$ a $\gamma_{c, \omega_{p_2}}$.

Následně se pokračuje dosazením rovnic (203) a (205) do rovnice (202) a přepsáním vztahu pro amplitudu $A_{3k_1}(\omega)$ do tvaru

$$\begin{aligned}
A_{3k_1}(\omega) = & \frac{H_{k_1}^*}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_{c, \omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} \left\{ A_1(\omega) + \right. \\
& + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k_2} (1 + \delta_{k_1 k_2}) \frac{|H_{k_2}|^2}{(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_{c, \omega_{p_1}}}{2\hbar} \right)} \times \\
& \times \left[A_1(\omega) + \frac{1}{\hbar} \sum_{k_1^{(2)}} (1 + \delta_{k_1^{(2)} k_2}) \frac{A_{3k_1^{(2)}}(\omega) H_{k_1^{(2)}}}{\omega - \omega_{k_1^{(2)}} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} + \frac{1}{\hbar} \sum_{p_1} \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{p_1}}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} \right] + \\
& + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{p_2} \frac{|H_{p_2}|^2}{(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon) \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{p_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_{r, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} \times \\
& \times \left[A_1(\omega) + \frac{1}{\hbar} \sum_{k_1^{(2)}} \frac{A_{3k_1^{(2)}}(\omega) H_{k_1^{(2)}}}{\omega - \omega_{k_1^{(2)}} - \omega_{p_2} + i\varepsilon} + \frac{1}{\hbar} \sum_{p_1} \frac{B_{1p_1}(\omega) H_{p_1}}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon} \right] \left. \right\}. \quad (206)
\end{aligned}$$

Zanedbáním členů se dvěma sumami ve vztahu (206) se získá vztah

$$\begin{aligned}
A_{3k_1}(\omega) = & \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_{c, \omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} \left[1 + \right. \\
& + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{k_2} (1 + \delta_{k_1 k_2}) \frac{|H_{k_2}|^2}{(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon) \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_{c, \omega_{p_1}}}{2\hbar} \right)} + \\
& \left. + \frac{1}{\hbar^2} \sum_{p_2} \frac{|H_{p_2}|^2}{(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon) \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{p_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_{r, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} \right]. \quad (207)
\end{aligned}$$

Vztah (207) je dále upraven pomocí metody parciálních zlomků

$$\begin{aligned}
A_{3k_1}(\omega) = & \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^*}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2} + \gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} \left[1 + \right. \\
& + \frac{\sum_{k_2} \frac{(1 + \delta_{k_1 k_2}) |H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon} - \sum_{k_2} \frac{(1 + \delta_{k_1 k_2}) |H_{k_2}|^2}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1} + \gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar}}}{\hbar^2 \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1} + \gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar} \right)} + \\
& \left. + \frac{\sum_{p_2} \frac{|H_{p_2}|^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{p_2} + i\varepsilon} - \sum_{p_2} \frac{|H_{p_2}|^2}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{p_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1} + \gamma_r, \omega_{k_1}}}{2\hbar}}}{\hbar^2 \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}}}{2\hbar} \right)} \right]. \quad (208)
\end{aligned}$$

Dříve popsaným způsobem je vztah (208) upraven do tvaru

$$A_{3k_1}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{k_1}^* \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1} + \gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1} + \gamma_r, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} \right]}{\hbar \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2} + \gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)}, \quad (209)$$

kde konstanty $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}$ a $\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_2}}$ jsou popsány v tabulce 4.

Aplikací stejných úprav na vztahy (203–205) jsou získány vztahy pro amplitudy $A_{4k_2}(\omega)$, $B_{1p_1}(\omega)$ a $B_{2p_2}(\omega)$ ve tvarech

$$A_{4k_2}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2} \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2} + \gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2} + \gamma_r, \omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} \right]}{\hbar \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1} + \gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar} \right)}, \quad (210)$$

$$B_{1p_1}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{p_1}^* \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma_{c, \omega_{p_2}}}}{2\hbar \left(\omega_{p_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1} + \gamma_r, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_r, \omega_{k_2}}}{2\hbar \left(\omega_{p_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1} + \gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar} \right)} \right]}{\hbar \left(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2} + \gamma_r, \omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)}, \quad (211)$$

$$B_{2p_2}(\omega) = \frac{A_1(\omega) H_{p_2}^* e^{-i \frac{p_2}{\hbar} x_2} \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma_{c, \omega_{p_1}}}}{2\hbar \left(\omega_{p_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2} + \gamma_r, \omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_r, \omega_{k_1}}}{2\hbar \left(\omega_{p_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2} + \gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} \right]}{\hbar \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{p_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1} + \gamma_r, \omega_{k_1}}}{2\hbar} \right)}, \quad (212)$$

kde konstanty $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}$, $\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_1}}$, $\Theta_{\Gamma_{c, \omega_{p_2}}}$, $\Theta_{\gamma_r, \omega_{k_2}}$, $\Theta_{\Gamma_{c, \omega_{p_1}}}$ a $\Theta_{\gamma_r, \omega_{k_1}}$ jsou popsány v tabulce 4.

Konstanta	Vztah
$\Theta_{\Gamma\omega_{k_1}}$	$\Gamma_{\omega_{k_1}} - \sigma_{\omega_{k_1},\gamma_c} - \sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1},\gamma_c}$
$\Theta_{\Gamma\omega_{k_2}}$	$\Gamma_{\omega_{k_2}} - \sigma_{\omega_{k_2},\gamma_c} - \sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2},\gamma_c}$
$\Theta_{\Gamma_{c,\omega_{p_1}}}$	$\Gamma_{c,\omega_{p_1}} - \sigma_{\omega_{p_1},\gamma_r}$
$\Theta_{\Gamma_{c,\omega_{p_2}}}$	$\Gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\omega_{p_2},\gamma_r}$
$\Theta_{\gamma_r,\omega_{k_1}}$	$\gamma_r,\omega_{k_1} - \sigma_{\omega_{k_1},\gamma_c}$
$\Theta_{\gamma_r,\omega_{k_2}}$	$\gamma_r,\omega_{k_2} - \sigma_{\omega_{k_2},\gamma_c}$
$\Theta_{\gamma_c,\omega_{p_1}}$	$\gamma_c,\omega_{p_1} - \sigma_{\omega_{p_1},\gamma_r}$
$\Theta_{\gamma_c,\omega_{p_2}}$	$\gamma_c,\omega_{p_2} - \sigma_{\omega_{p_2},\gamma_r}$
$\sigma_{\omega_{k_1},\gamma_c}$	$i\frac{2}{\hbar} \sum_{k_1} \frac{ H_{k_1} ^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar}}$
$\sigma_{\omega_{k_2},\gamma_c}$	$i\frac{2}{\hbar} \sum_{k_2} \frac{ H_{k_2} ^2}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar}}$
$\sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1},\gamma_c}$	$i\frac{2}{\hbar} \sum_{k_1} \frac{\delta_{k_1 k_2} H_{k_1} ^2}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar}}$
$\sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2},\gamma_c}$	$i\frac{2}{\hbar} \sum_{k_2} \frac{\delta_{k_1 k_2} H_{k_2} ^2}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar}}$
$\sigma_{\omega_{p_1},\gamma_r}$	$i\frac{2}{\hbar} \sum_{p_1} \frac{ H_{p_1} ^2}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_2}} + \gamma_r, \omega_{k_2}}{2\hbar}}$
$\sigma_{\omega_{p_2},\gamma_r}$	$i\frac{2}{\hbar} \sum_{p_2} \frac{ H_{p_2} ^2}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{p_2} + i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_1}} + \gamma_r, \omega_{k_1}}{2\hbar}}$

Tabulka 4: Definice konstant $\Theta_{\Gamma\omega_{k_1}}$, $\Theta_{\Gamma\omega_{k_2}}$, $\Theta_{\Gamma_{c,\omega_{p_1}}}$, $\Theta_{\Gamma_{c,\omega_{p_2}}}$, $\Theta_{\gamma_r,\omega_{k_1}}$, $\Theta_{\gamma_r,\omega_{k_2}}$, $\Theta_{\gamma_c,\omega_{p_1}}$, $\Theta_{\gamma_c,\omega_{p_2}}$, $\sigma_{\omega_{k_1},\gamma_c}$, $\sigma_{\omega_{k_2},\gamma_c}$, $\sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_1},\gamma_c}$, $\sigma_{\delta_{k_1 k_2},\omega_{k_2},\gamma_c}$, $\sigma_{\omega_{p_1},\gamma_r}$ a $\sigma_{\omega_{p_2},\gamma_r}$.

Vztahy (209–212) jsou dále dosazeny do vztahu (189), čímž je získán vztah pro amplitudu $A_1(\omega)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\varepsilon) A_1(\omega) &= 1 + \frac{A_1(\omega)}{\hbar^2} \times \\
&\times \left\{ \sum_{k_1} \frac{|H_{k_1}|^2 \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma\omega_{k_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_r, \omega_{k_1}}{2\hbar} \right)} \right]}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar}} \right\} + \\
&+ \sum_{k_2} \frac{|H_{k_2}|^2 \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma\omega_{k_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2}} + \gamma_r, \omega_{k_2}}{2\hbar} \right)} \right]}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar}} + \\
&+ \sum_{p_1} \frac{|H_{p_1}|^2 \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma_{c, \omega_{p_2}}}}{2\hbar \left(\omega_{p_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_r, \omega_{k_1}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_r, \omega_{k_2}}}{2\hbar \left(\omega_{p_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar} \right)} \right]}{\omega - \omega_{p_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2}} + \gamma_r, \omega_{k_2}}{2\hbar}} + \\
&+ \sum_{p_2} \frac{|H_{p_2}|^2 \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma_{c, \omega_{p_1}}}}{2\hbar \left(\omega_{p_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2}} + \gamma_r, \omega_{k_2}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_r, \omega_{k_1}}}{2\hbar \left(\omega_{p_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar} \right)} \right]}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{p_2} + i\frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_r, \omega_{k_1}}{2\hbar}} \right\}. \quad (213)
\end{aligned}$$

Podobně jako v sekci 4.1 jsou i zde ve vztahu (213) zanedbány členy obsahující konstanty Θ . V sekci 4.1 se před zanedbáním těchto členů nejdříve odvodila konstanta κ , která tyto členy obsahovala, a dále se tato konstanta zanedbala, jelikož člen, který ji obsahoval, měl ve srovnání s ostatními členy velmi malou hodnotu. Vztah (213) je dále upraven dříve popsáním způsobem na tvar

$$A_1(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\hbar}}, \quad (214)$$

kde $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\omega_{k_1}, \gamma_c} + \sigma_{\omega_{k_2}, \gamma_c} + \sigma_{\omega_{p_1}, \gamma_r} + \sigma_{\omega_{p_2}, \gamma_r}$. Tyto konstanty jsou popsány v tabulce 4.

Vztah (214) je následně zpětně dosazen do vztahů (209–212), čímž jsou získány vztahy pro amplitudy $A_{3k_1}(\omega)$, $A_{4k_2}(\omega)$, $B_{1p_1}(\omega)$ a $B_{2p_2}(\omega)$ ve tvarech

$$A_{3k_1}(\omega) = \frac{H_{k_1}^* \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma\omega_{k_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_r, \omega_{k_1}}{2\hbar} \right)} \right]}{\hbar \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\hbar} \right) \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar} \right)}, \quad (215)$$

$$A_{4k_2}(\omega) = \frac{H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2} \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma\omega_{k_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2}} + \gamma_r, \omega_{k_2}}{2\hbar} \right)} \right]}{\hbar \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\hbar} \right) \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar} \right)}, \quad (216)$$

$$B_{1p_1}(\omega) = \frac{H_{p_1}^* \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar \left(\omega_{p_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_r, \omega_{k_1}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_r, \omega_{k_2}}}{2\hbar \left(\omega_{p_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar} \right)} \right]}{\hbar \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\hbar} \right) \left(\omega - \omega_{p_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2}} + \gamma_r, \omega_{k_2}}{2\hbar} \right)}, \quad (217)$$

$$B_{2p_2}(\omega) = \frac{H_{p_2}^* e^{-i\frac{p_2}{\hbar} x_2} \left[1 - i \frac{\Theta_{\Gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar \left(\omega_{p_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2}} + \gamma_r, \omega_{k_2}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_r, \omega_{k_1}}}{2\hbar \left(\omega_{p_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar} \right)} \right]}{\hbar \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\hbar} \right) \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{p_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_r, \omega_{k_1}}{2\hbar} \right)}. \quad (218)$$

Vztah popisující amplitudu $A_{2k_1 k_2}(\omega)$ je získán dosazením vztahů (215–216) do rovnice (198)

$$A_{2k_1 k_2}(\omega) = \sqrt{1 + \delta_{k_1 k_2}} \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^* e^{-ik_2 x_2}}{\hbar^2 \left(\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + i\varepsilon \right) \left(\omega - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\hbar} \right)} \times \\ \times \left[\frac{1 - i \frac{\Theta_{\Gamma\omega_{k_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_2}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_1}} + \gamma_r, \omega_{k_1}}{2\hbar} \right)}}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar}} + \right. \\ \left. + \frac{1 - i \frac{\Theta_{\Gamma\omega_{k_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_c, \omega_{p_2}}{2\hbar} \right)} - i \frac{\Theta_{\gamma_c, \omega_{p_1}}}{2\hbar \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{c, \omega_{p_2}} + \gamma_r, \omega_{k_2}}{2\hbar} \right)}}{\omega - \omega_{j_1} - \omega_{k_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_c, \omega_{p_1}}{2\hbar}} \right]. \quad (219)$$

Amplituda pravděpodobnosti

Dosazením vztahu (219) do inverzní Fourierovy transformace (44) je získaná amplituda $a_{2k_1k_2}(t)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
 a_{2k_1k_2}(t) = & \sqrt{1 + \delta_{k_1k_2}} \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar^2 (\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\hbar})} \left[\frac{1}{\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}} + \right. \\
 & + \frac{1}{\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}} - i \frac{\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}} + \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}}{2\hbar (\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}) (\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar})} - \\
 & - i \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_1}}}}{2\hbar (\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}) (\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_2}} + \gamma_{r,\omega_{k_2}}}{2\hbar})} - \\
 & \left. - i \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_2}}}}{2\hbar (\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_1}} + \gamma_{r,\omega_{k_1}}}{2\hbar}) (\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar})} \right]. \quad (220)
 \end{aligned}$$

Od amplitudy $a_{2k_1k_2}(t)$ se přechází k popisu pomocí amplitudy pravděpodobnosti detekce dvou fotonů $\psi_{r,2}(x,t)$, pro kterou platí vztah (161). Amplituda pravděpodobnosti $\psi_{r,2}(x,t)$ je rozdělena na dvě amplitudy popisující dvojnásobnou spontánní emisi $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$ a stimulovanou emisi $\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)$. Pro amplitudu $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$ platí $k_1 \neq k_2$ a pro amplitudu $\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)$ platí $k_1 = k_2$. Dále jsou řešeny zvláště amplitudy popisující spontánní emisi dvou fotonů a stimulovanou emisi fotonu.

Amplituda pravděpodobnosti dvojnásobné spontánní emise

Amplituda pravděpodobnosti $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$ je popsána symbolickým vztahem

$$\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = \sum_{\underbrace{k_1}_{k_1 \neq k_2}} \sum_{k_2} \frac{e^{i(k_1x - \omega_{k_1}t)} e^{i(k_2x - \omega_{k_2}t)}}{L} a_{2k_1k_2}(t). \quad (221)$$

Jelikož v tomto případě platí $k_1 \neq k_2$, a tedy $\delta_{k_1k_2} = 0$, mají některé dříve definované konstanty jiné hodnoty než při stimulované emisi, ve které $\delta_{k_1k_2} = 1$. Tyto konstanty jsou přeznačeny dle tabulky 5. Ostatní konstanty mají stejnou hodnotu při dvojnásobné spontánní emisi a stimulované emisi.

$\Gamma_{\omega_{k_1}}$	\rightarrow	$\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}$
$\Gamma_{\omega_{k_2}}$	\rightarrow	$\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}$
$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}$	\rightarrow	$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}^{\text{spon}}$
$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}$	\rightarrow	$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}^{\text{spon}}$
σ_{tot}	\rightarrow	$\sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}$

Tabulka 5: Přeznačení konstant $\Gamma_{\omega_{k_1}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}}$, $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}$, $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}$ a σ_{tot} .

Amplituda popisující tento případ je přeznačena $a_{2k_1k_2}(t) \rightarrow a_{2k_1k_2}^{\text{spon}}(t)$ a má tvar

$$\begin{aligned}
a_{2k_1k_2}^{\text{spon}}(t) = & \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^* e^{-ik_2x_2}}{\hbar^2 \left(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i \frac{\sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}}{2\hbar} \right)} \left[\frac{1}{\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}} + \right. \\
& + \frac{1}{\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}} - i \frac{\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}} + \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar} \right) \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} \\
& - i \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_1}}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar} \right) \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} \\
& \left. - i \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_2}}}}{2\hbar \left(\omega_{k_1} - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar} \right) \left(\omega_{k_2} - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} \right]. \quad (222)
\end{aligned}$$

Vztah (164) je upraven pomocí symbolického předpisu $\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$ [21] do tvaru

$$\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = \frac{L}{4\pi^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_{2k_1k_2}^{\text{spon}}(t) e^{i\omega_{k_1}(\frac{x}{c}-t)} e^{i\omega_{k_2}(\frac{x}{c}-t)} d\omega_{k_2} d\omega_{k_1}. \quad (223)$$

Následně je vztah (222) dosazen do vztahu (223) a provedením integrace, za předpokladu $x_2 > 0$, je získán pro amplitudu pravděpodobnosti $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$ vztah

$ \begin{aligned} \omega_{j_1} &= \omega_{j_2} = \omega_0 \\ H_{k_1}^* &= H_{k_2}^* = H_k^* \\ \gamma_{r,\omega_{k_1}} &= \gamma_{r,\omega_{k_2}} = \Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} = \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} = \Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} \\ \gamma_{c,\omega_{p_1}} &= \gamma_{c,\omega_{p_2}} = \Gamma_{c,\omega_{p_1}} = \Gamma_{c,\omega_{p_2}} = \Gamma_{\omega_p} \\ \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}} &= \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}} = \Theta_{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}} \\ \Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_1}}} &= \Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_2}}} = \Theta_{\gamma_{c,\omega_p}} \end{aligned} $

Tabulka 6: Přeznačení konstant $\Gamma_{\omega_{k_1}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}}$, $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}$, $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}$ a σ_{tot} .

$$\begin{aligned}
\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = & -L \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^*}{c^2 \hbar^2} \Theta\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right) \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) \times \\
& \times \left\{ e^{-i\left(\omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right. + \\
& + \frac{\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}} + \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}}}{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}} \times \\
& \left[e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right. - \\
& \left. \left. - e^{-i\left(\omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right] \right\} + \\
& + \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_1}}}}{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \gamma_{r,\omega_{k_2}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}} + \Gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}} \times \\
& \left[e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right. - \\
& \left. \left. - e^{-i\left(\omega_{j_1} + i\frac{\gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\gamma_{r,\omega_{k_2}} + \Gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right] \right\} + \\
& + \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_2}}}}{\gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \Gamma_{c,\omega_{p_1}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}} \times \\
& \left[e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\gamma_{r,\omega_{k_1}} + \Gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right. - \\
& \left. \left. - e^{-i\left(\omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right] \right\}. \quad (224)
\end{aligned}$$

Za předpokladu rezonance, při které pro konstanty platí vztahy zapsané v tabulce 6, vychází vztah

$$\begin{aligned}
\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = & -L \frac{H_k^{*2}}{c^2 \hbar^2} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) \times \\
& \times \left\{ e^{-i\left(\omega_0 + i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} + \Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} + \Gamma_{\omega_p}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right. + \\
& + \frac{2\Theta_{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}} + 2\Theta_{\gamma_{c,\omega_p}}}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}} \left[e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} + \Gamma_{\omega_p}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} + \Gamma_{\omega_p}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right. - \\
& \left. \left. - e^{-i\left(\omega_0 + i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} + \Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} + \Gamma_{\omega_p}}{2\hbar}\right)\left(t - \frac{x-x_2}{c}\right)} \right] \right\}. \quad (225)
\end{aligned}$$

Nakonec je do vztahu (225) dosazeno za konstanty⁷ $\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}} = \Gamma_r$, $\Gamma_{\omega_p} = \Gamma_c$, $\sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}} =$

⁷Tyto vztahy byly odvozeny z definic jednotlivých konstant a definice konstanty Γ_r .

$$2(\Gamma_r + \Gamma_c) + i\frac{(\Gamma_r + \Gamma_c)^2}{\hbar\omega_0}, \Theta_{\Gamma_{\omega_k}}^{\text{spon}} = -i\frac{\Gamma_r^2 + \Gamma_r\Gamma_c}{2\hbar\omega_0} \text{ a } \Theta_{\gamma_c, \omega_p} = -i\frac{\Gamma_c^2 + \Gamma_r\Gamma_c}{2\hbar\omega_0}$$

$$\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t) = -L\frac{H_k^{*2}}{c^2\hbar^2} e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma_r + \Gamma_c}{2\hbar})(2t - \frac{2x - x_2}{c})} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (226)$$

Pravděpodobnost detekování dvou fotonů vychází

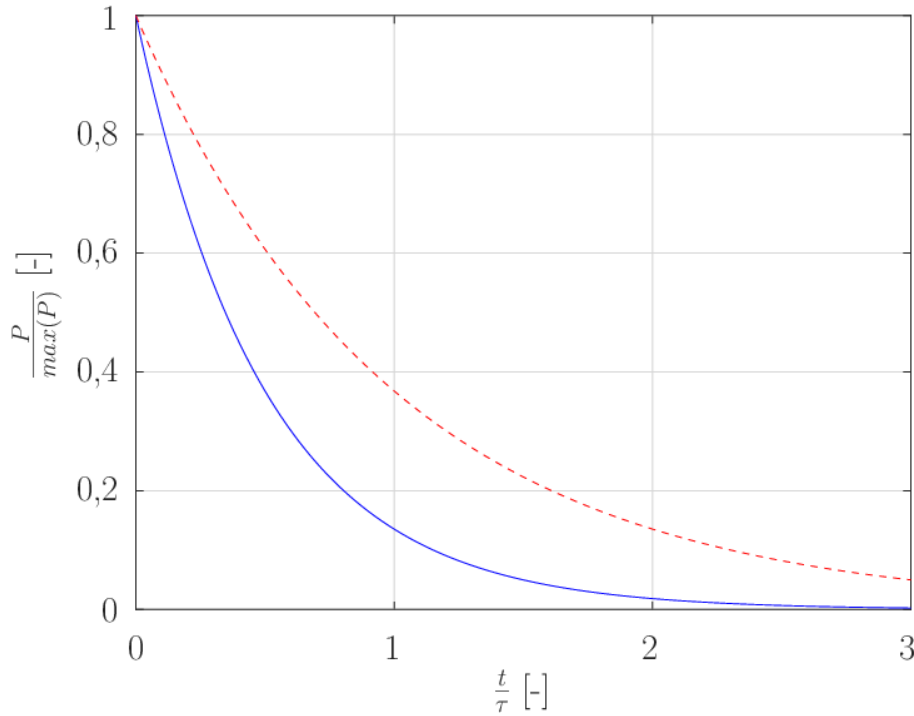
$$P_2^{\text{spon}}(x,t) = L^2\frac{|H_k|^4}{c^4\hbar^4} e^{-\frac{\Gamma_r + \Gamma_c}{\hbar}(2t - \frac{2x - x_2}{c})} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (227)$$

Časový průběh pravděpodobnosti detekování fotonů, popsany vztahem (227), je znázorněn na obrázku 25. Průběh odpovídá průběhu součinu dvou funkcí hustot detekce fotonu při spontánní emisi jedním zdrojem daných vztahem (73)

$$P_2^{\text{spon}}(x,t) = P\left(t - \frac{x}{c}\right) P\left(t - \frac{x - x_2}{c}\right) =$$

$$= L\frac{|H_k|^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\frac{t - \frac{x}{c}}{\tau}} L\frac{|H_k|^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\frac{t - \frac{x - x_2}{c}}{\tau}} \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (228)$$

Při uvažování $\Gamma_c = 0$ vztah (227) přechází ve vztah (172) popisující spontánní emisi dvou fotonů bez uvažování emise konverzních elektronů.



Obrázek 25: Graf závislosti pravděpodobnosti detekování dvojice fotonů vzhledem k času v jednotce doby života pro $x = 0$ při stimulované emisi na jednom jádře dle vztahu (227) a graf daný exponenciální závislostí $e^{-\frac{\Gamma_r + \Gamma_c}{\hbar} t}$ (červená čárkovaná). Časová konstanta $\tau = 141$ ns.

Amplituda pravděpodobnosti stimulované emise

Amplituda pravděpodobnosti popisující stimulovanou emisi je dána vztahem

$$\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = \sum_{\underbrace{k_1}_{k_1=k_2}} \sum_{k_2} \frac{e^{i(k_1x-\omega_{k_1}t)} e^{i(k_2x-\omega_{k_2}t)}}{L} a_{2k_1k_2}(t). \quad (229)$$

Vztah (174) je opět upraven pomocí symbolického předpisu $\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$ [21] do tvaru

$$\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = \frac{L\Delta}{4\pi^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_{2k_1k_2}(t) e^{i(k_1x-\omega_{k_1}t)} e^{i(k_2x-\omega_{k_2}t)} \delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2}) d\omega_{k_2} d\omega_{k_1}. \quad (230)$$

Podmínka na integrační proměnné $k_1 = k_2$ je do integrace zavedena vynásobením vnitřní části integrálu členem $\Delta\delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})$, kde $\delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})$ je Diracova delta funkce a Δ je konstanta kompenzující fyzikální jednotku Diracovy delta funkce. Provedením první integrace vychází

$$\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = \frac{L\Delta}{4\pi^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} a_{2k}(t) e^{-i2(kx-\omega_k t)} d\omega_k. \quad (231)$$

Amplituda $a_{2k}(t)$ je dána vztahem

$$\begin{aligned} a_{2k}(t) = \sqrt{2} \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^* e^{-ikx_2}}{2\hbar^2 \left(\omega_k - \frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} + i \frac{\sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar} \right)} & \left[\frac{1}{\omega_k - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}} + \right. \\ + \frac{1}{\omega_k - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}} - i \frac{\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}} + \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}}{2\hbar \left(\omega_k - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar} \right) \left(\omega_k - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} & - \\ - i \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_1}}}}{2\hbar \left(\omega_k - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar} \right) \left(\omega_k - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{c,\omega_{p_2}} + \gamma_{r,\omega_{k_2}}}{2\hbar} \right)} & - \\ \left. - i \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_2}}}}{2\hbar \left(\omega_k - \omega_{j_1} + i \frac{\Gamma_{c,\omega_{k_1}} + \gamma_{r,\omega_{k_1}}}{2\hbar} \right) \left(\omega_k - \omega_{j_2} + i \frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar} \right)} \right]. \quad (232) \end{aligned}$$

Jelikož v tomto případě platí $k_1 = k_2$, a tedy $\delta_{k_1k_2} = 1$, mají některé dříve definované konstanty jiné hodnoty než při spontánní emisi, ve které $\delta_{k_1k_2} = 0$. Tyto konstanty jsou přeznačeny dle tabulky 7. Zbylé konstanty mají stejnou hodnotu při dvojnásobné spontánní emisi a stimulované emisi.

$\Gamma_{\omega_{k_1}}$	\rightarrow	$\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}$
$\Gamma_{\omega_{k_2}}$	\rightarrow	$\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}$
$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}$	\rightarrow	$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}}$
$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}$	\rightarrow	$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}$
σ_{tot}	\rightarrow	$\sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}$

Tabulka 7: Přeznačení konstant $\Gamma_{\omega_{k_1}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}}$, $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}$, $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}$ a σ_{tot} .

Z řešení integrálu ve vztahu (231) plyne vztah

$$\begin{aligned}
\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = & -i\sqrt{2}L\Delta \frac{H_{k_1}^* H_{k_2}^*}{4\pi c^2 \hbar^2} \Theta(t_2) \left\{ \frac{e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}\right)t_2} - e^{-i\left(\frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} - i\frac{\sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)t_2}}{\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_1}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}} + \right. \\
& + \frac{e^{-i\left(\frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} - i\frac{\sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)t_2} - e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}\right)t_2}}{\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} + i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}} + \\
& - i\frac{\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}} + \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}}{2\hbar} \left[\frac{e^{-i\left(\frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} - i\frac{\sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)t_2}}{\left(-\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} + i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_1}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} + i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} + \right. \\
& + \frac{e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}\right)t_2}}{\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_1}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} - \Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}} - \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}\right)} + \\
& + \left. \frac{e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}\right)t_2}}{\left(-\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\omega_{j_2} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} - \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}} - \gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)} \right] + \\
& - i\frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_1}}}}{2\hbar} \left[\frac{e^{-i\left(\frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} - i\frac{\sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)t_2}}{\left(-\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} + i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_1}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} + i\frac{2\Gamma_{c,\omega_{p_2}} + 2\gamma_{r,\omega_{k_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} + \right. \\
& + \frac{e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}}}\right)t_2}}{\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_1}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\gamma_{r,\omega_{k_2}} - \Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} + \Gamma_{c,\omega_{p_2}} - \gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}\right)} + \\
& + \left. \frac{e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_2}} + \gamma_{r,\omega_{k_2}}}\right)t_2}}{\left(-\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{c,\omega_{p_2}} + 2\gamma_{r,\omega_{k_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\omega_{j_2} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}} - \gamma_{r,\omega_{k_2}} + \gamma_{c,\omega_{p_1}} - \Gamma_{c,\omega_{p_2}}}{2\hbar}\right)} \right] + \\
& - i\frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_2}}}}{2\hbar} \left[\frac{e^{-i\left(\frac{\omega_{j_1} + \omega_{j_2}}{2} - i\frac{\sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)t_2}}{\left(-\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} + i\frac{2\Gamma_{c,\omega_{p_1}} + 2\gamma_{r,\omega_{k_1}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} + i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} + \right. \\
& + \frac{e^{-i\left(\omega_{j_1} - i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_1}} + \gamma_{r,\omega_{k_1}}}\right)t_2}}{\left(\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{c,\omega_{p_1}} + 2\gamma_{r,\omega_{k_1}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\omega_{j_1} - \omega_{j_2} + i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} - \gamma_{r,\omega_{k_1}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}} - \Gamma_{c,\omega_{p_1}}}{2\hbar}\right)} + \\
& + \left. \frac{e^{-i\left(\omega_{j_2} - i\frac{\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + \gamma_{c,\omega_{p_2}}}\right)t_2}}{\left(-\frac{\omega_{j_1} - \omega_{j_2}}{2} - i\frac{2\Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}} + 2\gamma_{c,\omega_{p_2}} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(\omega_{j_2} - \omega_{j_1} + i\frac{\Gamma_{c,\omega_{p_1}} - \gamma_{c,\omega_{p_2}} + \gamma_{r,\omega_{k_1}} - \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}}{2\hbar}\right)} \right] \left. \right\}, \quad (233)
\end{aligned}$$

kde je označeno $t_2 = 2t - \frac{2x-x_2}{c}$.

$\omega_{j_1} = \omega_{j_2} = \omega_0$
$H_{k_1}^* = H_{k_2}^* = H_k^*$
$\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}} = \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}} = \Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}$
$\gamma_{r,\omega_{k_1}} = \gamma_{r,\omega_{k_2}} = \gamma_{r,\omega_k}$
$\gamma_{c,\omega_{p_1}} = \gamma_{c,\omega_{p_2}} = \Gamma_{c,\omega_{p_1}} = \Gamma_{c,\omega_{p_2}} = \Gamma_{\omega_p}$
$\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}^{\text{spon}} = \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}^{\text{spon}} = \Theta_{\Gamma_{\omega_k}}^{\text{spon}}$
$\Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_1}}} = \Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_2}}} = \Theta_{\gamma_{c,\omega_p}}$

Tabulka 8: Přeznačení konstant $\Gamma_{\omega_{k_1}}$, $\Gamma_{\omega_{k_2}}$, $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}$, $\Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}$ a σ_{tot} .

Při rezonanci platí pro konstanty vztahy zapsané v tabulce 8. Úpravou vztahu (233) je získán vztah pro amplitudu pravděpodobnosti $\psi_{r,2}(x,t)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = & -\sqrt{2}L\Delta \frac{H_k^{*2}}{2\pi c^2 \hbar^2} \left(\frac{4\hbar}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}} \right) e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + \Gamma_{\omega_p}}{2\hbar}\right)t_2} \times \\ & \times \left\{ \left[e^{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)t_2} - 1 \right] + \frac{\Theta_{\Gamma_{\omega_k}}^{\text{stim}}}{2\hbar} \left[t_2 - \frac{e^{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)t_2}}{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\Theta_{\gamma_{c,\omega_p}}}{2\hbar} \left[\frac{2\hbar}{\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \gamma_{r,\omega_k}} \left(\frac{e^{\left(\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} - \gamma_{r,\omega_k}}{2\hbar}\right)t_2}}{\left[\frac{2\gamma_{r,\omega_k} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}\right]} - 1 \right) - \frac{e^{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)t_2}}{\frac{2\gamma_{r,\omega_k} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}} \right] \right\} \Theta(t_2). \end{aligned} \quad (234)$$

Zanedbáním členů s $\Theta_{\Gamma_{\omega_k}}^{\text{stim}}$ a $\Theta_{\gamma_{c,\omega_p}}$ ⁸ je vztah upraven do tvaru

$$\begin{aligned} \psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = & -\sqrt{2}L\Delta \frac{H_k^{*2}}{2\pi c^2 \hbar^2} \left(\frac{4\hbar}{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}} \right) e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + \Gamma_{\omega_p}}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} \times \\ & \times \left[e^{\left(\frac{2\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} + 2\Gamma_{\omega_p} - \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}}{4\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} - 1 \right] \Theta\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right). \end{aligned} \quad (235)$$

Dosazeno za konstanty $\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}} = 2\Gamma_r$, $\Gamma_{\omega_p} = \Gamma_c$ a $\sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}} = 2(\Gamma_r + \Gamma_c) + i\frac{\Gamma_r^2 + (\Gamma_r + \Gamma_c)^2}{\hbar\omega_0}$ je získán vztah

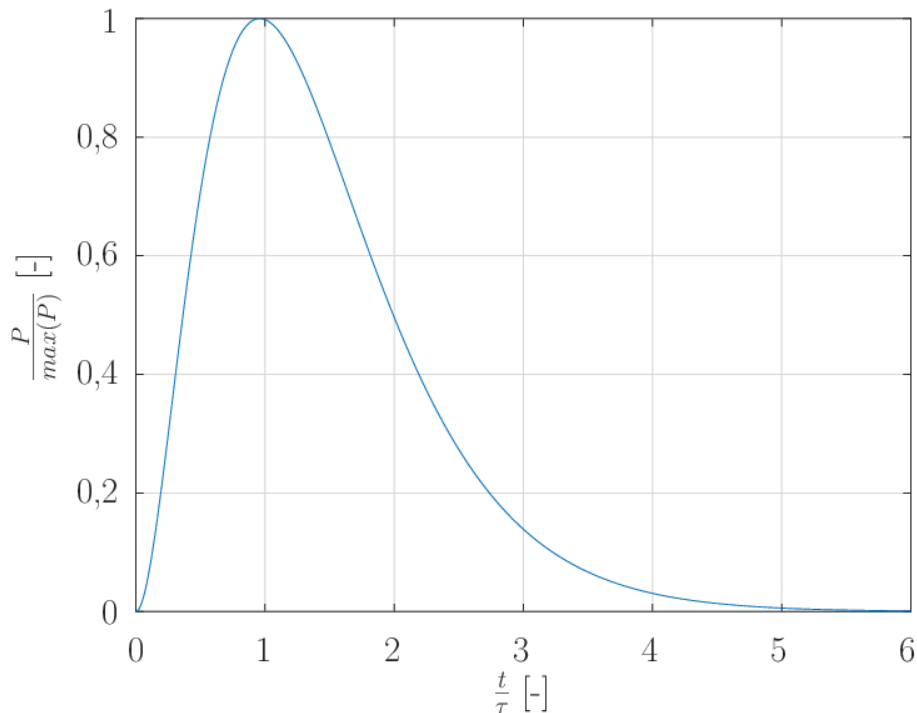
$$\begin{aligned} \psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t) = & -\sqrt{2}L\Delta \frac{H_k^{*2}}{2\pi c^2 \hbar^2} \left(\frac{4\hbar}{2\Gamma_r - i\frac{\Gamma_r^2 + (\Gamma_r + \Gamma_c)^2}{\hbar\omega_0}} \right) e^{-i\left(\omega_0 - i\frac{2\Gamma_r + \Gamma_c}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} \times \\ & \times \left[e^{-i\left(\frac{\Gamma_r^2 + (\Gamma_r + \Gamma_c)^2}{4\hbar^2\omega_0} + i\frac{\Gamma_r}{2\hbar}\right)\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right)} - 1 \right] \Theta\left(2t - \frac{2x-x_2}{c}\right). \end{aligned} \quad (236)$$

⁸Pomocí vztahu (234) byla numericky vypočítaná hustota pravděpodobnosti $P_2^\Theta(x,t)$ pomocí šířky čáry a doby života ⁵⁷Fe. Při daném t , x a x_2 vyšel maximální rozdíl hustot pravděpodobnosti stimulované emise při zanedbání $\Theta_{\Gamma_{\omega_k}}^{\text{stim}}$ a $\Theta_{\gamma_{c,\omega_p}}$, využitím vztahu (236), a bez zanedbání těchto členů $\max(|P_2^\Theta(x,t) - P_2^{\text{stim}}(x,t)|) \approx 2L^2\Delta^2 \frac{|H_k|^4}{4\pi^2 c^4 \hbar^4} 10^{-25}$.

Pro hustotu pravděpodobnosti detekce fotonů platí

$$P_2^{\text{stim}}(x,t) = |\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)|^2. \quad (237)$$

Průběh hustoty pravděpodobnosti detekce fotonů popsany vztahem (237) je znázorněn na obrázku 26.

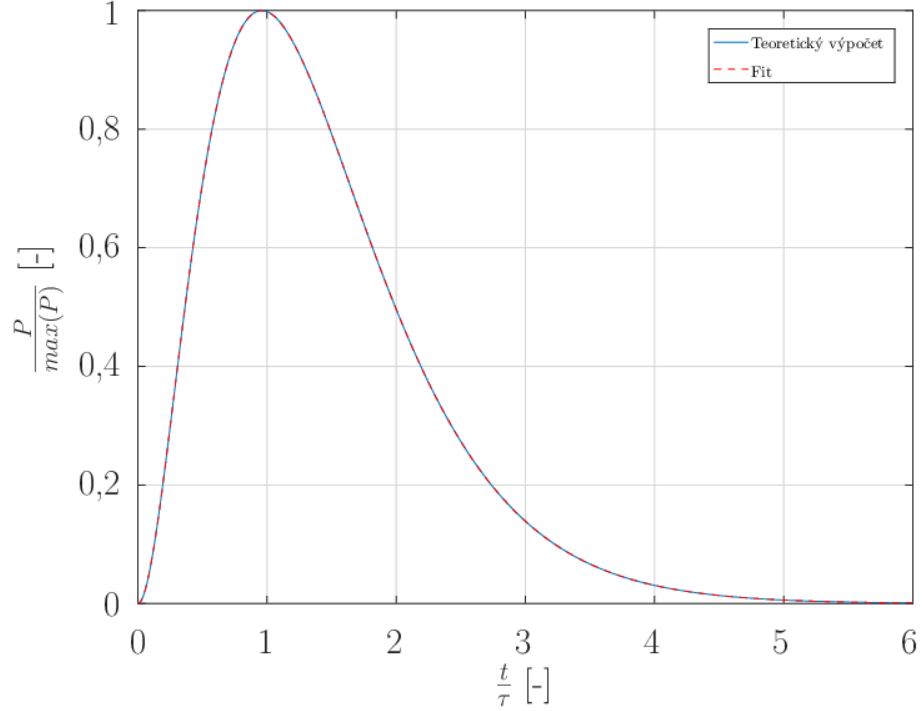


Obrázek 26: Graf závislosti hustoty pravděpodobnosti stimulované emise fotonu vzhledem k času v jednotce doby života τ pro $x = 0$, $x_2 = 0$ při stimulované emisi na jednom jádře dle vztahu (237). Časová konstanta $\tau = 141$ ns.

Uvažování emise konverzních elektronů vede ke zkrácení průběhu v časové ose. Za předpokladu $\Gamma_c = 0$ vztah (236) přechází ve vztah (182) popisující stimulovanou emisi fotonů bez emise konverzních elektronů. Fitováním průběhu daného vztahem (237), viz obrázek 27, je nalezen vztah popisující hustotu pravděpodobnosti stimulované emise ve tvaru

$$P_2^{\text{stim}}(t) \propto \left| \left[e^{-\frac{\Gamma_r + \Gamma_c}{\hbar} t} \Theta(t) \right] \otimes \left[e^{-\frac{2\Gamma_r + \Gamma_c}{\hbar} t} \Theta(t) \right] \right|^2, \quad (238)$$

kde \otimes označuje konvoluci.



Obrázek 27: Graf závislosti hustoty pravděpodobnosti stimulované emise fotonu vzhledem k času v jednotce doby života τ pro $x = 0$, $x_2 = 0$ při stimulované emisi na jednom jádře dle vztahu (237) (modrý) proložený křivkou danou vztahem (238) (červená). Průběhy se překrývají. Časová konstanta $\tau = 141$ ns.

Amplituda pravděpodobnosti detekce dvou fotonů $\psi_{r,2}(x,t)$ při uvažování konverzních elektronů je určena součtem amplitud pravděpodobnosti $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$ a $\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)$, danými vztahy (226) a (236). Pro amplitudu pravděpodobnosti detekce dvou fotonů je získán vztah

$$\psi_{r,2}(x,t) = -L \frac{H_k^{*2}}{c^2 \hbar^2} e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma_r + \Gamma_c}{2\hbar})(2t - \frac{2x - x_2}{c})} \left\{ \Theta\left(t - \frac{x}{c}\right) + \sqrt{2} \frac{\Delta}{2\pi} \left(\frac{4\hbar}{2\Gamma_r - i\frac{\Gamma_r^2 + (\Gamma_r + \Gamma_c)^2}{\omega_0 \hbar}} \right) \times \right. \\ \left. \times e^{-\frac{\Gamma_r}{2\hbar}(2t - \frac{2x - x_2}{c})} \left[e^{-i\left(\frac{\Gamma_r^2 + (\Gamma_r + \Gamma_c)^2}{4\omega_0 \hbar^2} + i\frac{\Gamma_r}{2\hbar}\right)(2t - \frac{2x - x_2}{c})} - 1 \right] \Theta\left(2t - \frac{2x - x_2}{c}\right) \right\}. \quad (239)$$

Hustota pravděpodobnosti detekce dvou fotonů $P_2(x,t)$ je určena vztahem

$$P_2(x,t) = |\psi_{r,2}(x,t)|^2. \quad (240)$$

Grafické znázornění vztahu (240) opět není provedeno z důvodu nevyčíslení konstanty Δ .

Závěr

Práce se zabývá teoretickým popisem stimulované emise γ fotonů v experimentech jaderného rezonančního rozptylu. Součástí práce bylo vytvoření přehledu metod popisu rezonanční interakce γ záření s prostředím. V popsaných metodách byly zastoupeny jak semiklasické tak kvantové metody popisu. Na základě tohoto přehledu byl vybrán kvantově mechanický popis využívající přepisu Schrödingerovy rovnice do soustavy algebraických rovnic ve frekvenční doméně. Řešením těchto rovnic lze získat frekvenčně závislé amplitudy pravděpodobnosti pro dané stavy systému, ze kterých lze následně určit vývoj systému v čase.

Kvantově mechanická metoda popisu byla aplikována na základní jevy spontánní emise a dopředného rozptylu. Výsledky odvozené kvantově mechanickou metodou byly konzistentní s výsledky popisu uvedenými v příslušné odborné literatuře [18, 20]. Byla tak ověřena použitelnost postupu a současně byl sjednocen popis těchto dějů tak, aby bylo možné jej přirozeně rozšířit o děje nové. Spontánní emise byla popsána hustotou pravděpodobnosti detekce γ fotonů, jenž v čase exponenciálně klesá dle konstanty doby života excitovaného stavu jádra. Dopředný rozptyl záření při průchodu absorbatorem byl popsán převedením třídimenzionálního popisu na jednodimenzionální pomocí zavedení efektivních jader. Výsledná amplituda pravděpodobnosti se skládala z příspěvků pocházejících od zdroje záření a od jednotlivých rozptylů na efektivních jádrech, jenž se koherentně skládaly. Těchto výsledků bylo dále využíváno při popisu složitějších jevů.

Pomocí zvolené metody byl vytvořen kvantově mechanický popis koherentní manipulace s γ zářením a akusticky indukované transparency. Koherentní manipulace lze využít ke změně energetického spektra záření a časového průběhu intenzity záření. Na základě výsledného odvozeného vztahu popisujícího intenzitu záření ovlivněnou koherentní manipulací byly vytvořeny simulace, které byly ve shodě se simulacemi z publikovaných výsledků [31]. Na základě překryvu spekter zdroje záření a absorbatoru byly sepsány podmínky pro vznik akusticky indukované transparency. Na základě těchto podmínek a výsledku popisu koherentní manipulace byla vytvořena simulace akusticky indukované transparency, jenž odpovídala experimentálnímu pozorování [32].

Nakonec byla aplikovaná metoda popisu zobecněna pro popis stimulované emise γ záření. V prvním kroku byl vytvořen popis bez uvažování emise konverzních elektronů a v druhém kroku byla započítána i emise konverzních elektronů. Vztah pro hustotu pravděpodobnosti stimulované emise vykazoval nemonotonní charakter s nulovou počáteční hodnotou a maximem v blízkosti času odpovídajícího době života excitovaného stavu. Hustota pravděpodobnosti detekce dvou spontánně emitovaných fotonů byla popsána klesajícím exponenciálním průběhem s poloviční dobou života ve srovnání se spontánní emisí jednoho fotonu jedním jádrem. Neuvažování emise konverzních elektronů vedlo na jednodušší odvození vztahu pro amplitudu pravděpodobnosti, ale časový průběh se lišil v časové škále.

Aplikace popisu pro případ dvou jader je prvním krokem pro odvození popisu vyzařování dvojice zdrojů záření, ve kterých jsou kromě excitovaných jader i jádra v základním energetickém stavu. Dalšího zobecnění lze dosáhnout uvažováním obecnějšího počátečního stavu systému. Jednalo by se již o smíšený stav, jenž by odrážel skutečnost, že jádra v excitovaném stavu nevznikla ve stejný okamžik. Dosažený obecný popis by pak dále mohl být rozšiřován zahrnutím vysokofrekvenční vibrace jednoho ze zdrojů, který by vyvolal akusticky indukovanou transparentci. Vytvořený teoretický rámec pro popis stimulované emise nabízí možnost předpovědi výsledků experimentů založených na měření časových koincidence pro případ současné detekce dvojice γ fotonů. Pro ta-

kovéto experimenty je možné využít například zdroje záření ^{57}Co a měření časového zpoždění současných detekcí dvojice γ fotonů o energii 14,4 keV vůči dvojicím fotonů o energii 122 keV, které určují časovou značku vzniku jádra ^{57}Fe v prvním excitovaném stavu.

Seznam použitého značení v jednotlivých kapitolách

Semiklasický popis – popis indexem lomu

\vec{E} ...vektor elektrické intenzity
 \vec{H} ...vektor magnetické intenzity
 \vec{D} ...vektor elektrické indukce
 \vec{B} ...vektor magnetické indukce
 ρ ...makroskopická hustota volného náboje
 \vec{J} ...vektor makroskopické proudové hustoty
 ϵ ...tenzor permitivity prostředí
 μ ...tenzor permeability prostředí
 $\vec{\epsilon}$...diagonální prvek diagonálního tenzoru permitivity prostředí
 μ ...diagonální prvek diagonálního tenzoru permeability prostředí
 n ...index lomu
 c ...rychlost světla
 \mathbf{n} ...tenzor indexu lomu
 \mathbf{f} ...matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu
 N ...počet absorbujících jader v jednotce objemu
 k ...vlnové číslo
 \vec{E}_{tr} ...amplituda vlny po transmisi prostředím
 d ...délka prostředí, ve kterém dochází k dopřednému rozptylu
 \vec{E}_0 ...amplituda dopadající vlny
 \hbar ...redukovaná Plankova konstanta
 ω ...úhlová frekvence
 ω_0 ...rezonanční úhlová frekvence
 ΔE ...energie přechodu mezi dvěma energetickými stavy jádra zdroje
 Γ ...přirozená šířka spektrální čáry
 τ ...doba života excitovaného stavu
 \mathcal{E} ...amplituda
 t ...čas

Semiklasický popis – využití matice přenosu

\mathbf{M} ...diferenciální matice přenosu
 \mathbf{t} ...matice propustnosti prostředí
 \mathbf{f} ...matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu
 $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}$...prvky matice přenosu v případě dopředného rozptylu
 \mathbf{L} ...integrální matice přenosu
 k ...vlnové číslo
 d ...délka prostředí, ve kterém dochází k dopřednému rozptylu
 \vec{H} ...vektor magnetické intenzity
 \vec{H}_t ...tečná složka vektor magnetické intenzity
 \vec{H}_t^t ...tečná složka vektor magnetické intenzity po průchodu prostředím
 \mathbf{I}_2 ...jednotková matice dimenze 2×2
 \mathbf{B} ...pomocná matice
 \mathbf{t}_E ...matice propustnosti prostředí pro elektrické pole
 \vec{E} ...vektor elektrické intenzity

\vec{E}^0 ...vektor dopadající elektrické intenzity
 \vec{E}^t ...vektor elektrické intenzity po průchodu prostředím
 \mathbf{L}_i ...integrální matice přenosu i -tým prostředím
 \mathbf{L}^{tot} ...integrální matice přenosu soustavou n různých prostředí
 \mathbf{L}_1 ...integrální matice přenosu prvním prostředím
 \mathbf{L}_2 ...integrální matice přenosu druhým prostředím
 \mathbf{L}_3 ...integrální matice přenosu třetím prostředím
 \mathbf{L}_n ...integrální matice přenosu posledním prostředím

Semiklasický popis – aplikace funkce frekvenční odezvy

$E(\omega)$...elektrická intenzita záření ve frekvenční doméně
 $E(t)$...časový vývoj elektrické intenzity záření
 ω ...úhlová frekvence
 t ...čas
 $f_0(\omega)$...komplexní funkce frekvenční odezvy
 $E_s(\omega)$...elektrická intenzita rozptýleného záření ve frekvenční doméně
 k ...vlnové číslo
 σ_0 ...maximální rezonanční účinný průřez
 Γ ...přirozená šířka spektrální čáry
 Γ_r ...část přirozené šířky spektrální čáry způsobená emisí fotonu
 Γ_c ...část přirozené šířky spektrální čáry způsobená emisí konverzního elektronu
 α ...koeficient vnitřní konverze
 I_e ...jaderný spin jádra v excitovaném energetickém stavu
 I_g ...jaderný spin jádra v základním energetickém stavu
 ω_{eq} ...úhlová frekvence odpovídající energetickému rozdílu excitovaného a základního stavu jádra
 $f_{\text{KM}}(\vec{k})$...Lambův–Mössbauerův faktor představující podíl rozptýleného záření bez zpětného rázu
 \vec{k} ...vlnový vektor záření
 \vec{u} ...výchylka jádra z rovnovážné polohy
 β ...zastoupení rezonujícího izotopu v prostředí
 $\vec{E}'(\vec{r}, t, \omega)$...elektrická intenzita záření modulovaná pohybem prostředí
 E_ω ...amplituda vlny o úhlové frekvenci ω $\vec{\epsilon}$...vektor polarizace záření
 \vec{r} ...polohový vektor
 $\vec{u}(t)$...vektor popisující pohyb prostředí v čase
 \mathbf{f} ...matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu

Semiklasický popis – řešení diferenciální vlnové rovnice

\vec{E} ...vektor elektrické intenzity
 c ...rychlost světla
 t ...čas
 \vec{J} ...vektor indukované proudové hustoty v rezonančním prostředí
 $\vec{\epsilon}(t)$...časová modulace amplitudy vektoru elektrické intenzity
 ω ...úhlová frekvence
 \vec{k} ...vlnový vektor

\vec{p} ...polohový vektor
 $\vec{e}(z,t)$...pomalu se měnící obálka vektoru elektrické intenzity
 z ...souřadnice na ose z
 $\vec{j}(z,t)$...pomalu se měnící obálka vektoru indukované proudové hustoty v rezonančním prostředí
 Θ ...úhel dopadu záření
 k_z ...velikost průmětu vlnového vektoru do osy z

Popis kvantovou teorií pole

\vec{r} ...polohový vektor
 \mathbf{f} ...matice amplitudy koherentního dopředného rozptylu
 $j_\mu(x)$...Heisenbergův proudový operátor
 φ_0 ...počáteční Heisenbergův stavový vektor systému
 $M_{\mu\nu}(x,y)$...operátor koherentního elastického rozptylu
 A_μ ...Feynmanův fotonový potenciál
 N ...počet atomů
 $A^i(\vec{R}_i^0)$...záření dopadající na i -tý atom
 $\left[A^s(\vec{R},t) \right]^{f_0}$...záření rozptýlené na i -tém atomu
 \vec{R} ...polohový vektor popisující místo koherentního rozptylu záření
 \vec{k} ...vlnový vektor fotonu emitovaného atomem
 \vec{k}' ...vlnový vektor fotonu absorbovaného atomem
 $f_j(\vec{k})$...Lambův–Mössbauerův faktor i -tého atomu
 $|\chi_0\rangle$...počáteční vibrační stav atomu
 $|\chi_f\rangle$...finální vibrační stav atomu
 $M_{\mu\nu}^{f_0}(i)$...operátor koherentního elastického rozptylu na i -tém atomu
 $N_{\mu\nu}^{f_0}(i)$...operátor koherentního elastického rozptylu na jádře i -tého atomu
 $E_{\mu\nu}^{f_0}(i)$...operátor koherentního elastického rozptylu na elektronech i -tého atomu
 δ_{ij}^+ ...člen zjednodušující zápis vztahu
 \vec{k}_{0xy} ...složka vlnového vektoru dopadajícího záření, která je kolmá na normálu povrchu tenkého krystalu
 \vec{g}_τ ...reciprokový vektor mřížky
 k_0 ...velikost vlnového vektoru dopadajícího záření
 \hat{z} ...normála povrchu tenkého krystalu
 $f_{\mu\nu}^{\tau^\pm 0^+}$...amplitudy rovinného rozptylu
 \vec{k}_{τ^\pm} ...vlnový vektor záření rozptýleného do směru τ^+ nebo τ^-
 $V_{uc}(\vec{k}_{\tau^\pm})_z$...objem rozptylového centra
 $\tilde{M}_{\mu\nu}^{(uc)}$...rozptylová matice
 $\vec{k}_{\tau'^\pm}$...vlnový vektor záření rozptýleného do směru τ'^+ nebo τ'^-
 b ...šířka tenkého krystalu
 $f_{\tau^\pm \tau'^\pm}$...amplitudy rozptylu pro záření dopadající s vlnovým vektorem τ^\pm a pro záření rozptýlené s vlnovým vektorem τ'^\pm

Kvantově mechanický popis

$|\Psi\rangle$...obecný stav systému

\hat{H}' ...hamiltonián systému

\hat{H}_0 ...část hamiltoniánu udávající stacionární stavy

$|\phi_m(0)\rangle$... m -tý stacionární stav systému

$a_m(t)$...amplituda pravděpodobnosti nalezení systému ve stavu $|\phi_m(0)\rangle$

$A_m(\omega)$...amplituda pravděpodobnosti nalezení systému ve stavu $|\phi_m(0)\rangle$ ve frekvenční doméně

E_m ...energie stavu $|\phi_m(0)\rangle$

ω_m ...úhlová frekvence odpovídající energii E_m

t ...čas

\hbar ...redukovaná Plankova konstanta

\hat{H} ...část hamiltoniánu popisující interakce v systému, které umožňují přechody mezi stavy $|\phi_m(0)\rangle$

$|\phi_p(0)\rangle$... p -tý stacionární stav systému

$a_p(t)$...amplituda pravděpodobnosti nalezení systému ve stavu $|\phi_p(0)\rangle$

$A_p(\omega)$...amplituda pravděpodobnosti nalezení systému ve stavu $|\phi_p(0)\rangle$ ve frekvenční doméně

E_p ...energie stavu $|\phi_p(0)\rangle$

ω_p ...úhlová frekvence odpovídající energii E_p

δ_{pm} ...Kroneckerovo delta

$\delta(t)$...Diracova δ -funkce

ε ...pomocná konstanta

Vyzařování zářiče

$|\psi(t)\rangle$...obecný stav systému

$|g\rangle$...základní energetický stav jádra

$|e^j\rangle$...excitovaný stav jádra

k ...vlnové číslo fotonu

$|\{0_k\}\rangle$...stav bez fotonů

$|1_k\rangle$...stav s jedním fotonem s vlnovým číslem k

$|[0]\rangle$...stav bez konverzního elektronu

p ...hybnost konverzního elektronu

$|1_p\rangle$...stav s jedním konverzním elektronem o hybnosti p

t ...čas

ω ...úhlová frekvence

\hbar ...redukovaná Plankova konstanta

$|e^j\rangle |\{0_k\}\rangle |[0]\rangle$...stav systému obsahující jádro v excitovaném stavu a neobsahující fotony ani konverzní elektrony

$a(t), A(\omega)$...amplitudy popisující stav $|e^j\rangle |\{0_k\}\rangle |[0]\rangle$

ω_0 ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu jádra

$|g\rangle |1_k\rangle |[0]\rangle$...stav systému obsahující foton s vlnovým číslem k a jádro v základním energetickém stavu a neobsahující konverzní elektrony

$b_k(t), B_k(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g\rangle |1_k\rangle |[0]\rangle$

ω_k ...úhlová frekvence odpovídající energii emitovaného fotonu

$|g\rangle |\{0_k\}\rangle |1_p\rangle$...stav systému obsahující konverzní elektron s hybností p a jádro v základním energetickém stavu a neobsahující fotony

$c_p(t), C_p(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g\rangle |\{0_k\}\rangle |1_p\rangle$
 ω_p ...úhlová frekvence odpovídající energii emitovaného konverzního elektronu
 \hat{H} ...část hamiltoniánu popisující interakce v systému, které umožňují přechody mezi jednotlivými stavy
 H_k, H_k^* ...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce jádra s fotonem s vlnovým číslem k
 H_p, H_p^* ...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce jádra s konverzním elektronem s hybností p
 $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$...anihilační a kreační operátory fotonu s vlnovým číslem k
 $\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger$...anihilační a kreační operátory konverzního elektronu s hybností p
 $(|e^j\rangle \langle g|)$...operátor převádějící jádro ze základního stavu na excitovaný stav
 $(|g\rangle \langle e^j|)$...operátor převádějící jádro z excitovaného stavu na základní stav
 L ...délka strany krychle ohraničující popisovaný prostor
 Ω ...prostorový úhel
 P ...hlavní hodnota integrálu
 Γ ...šířka spektrální čáry
 Γ_c ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi konverzních elektronů
 Γ_r ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi fotonů
 $\Theta(t)$...Heavisideova funkce
 x ...vzdálenost detektoru
 $\psi_r(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti detekování fotonu
 $\psi_r^{\text{zdroj}}(x,t)$...příspěvek do amplitudy pravděpodobnosti detekování fotonu pocházející pouze ze zdroje
 c ...rychlost světla
 $P(x,t)$...hustota pravděpodobnosti detekování fotonu
 τ ...doba života
 t' ...čas posunutý o dobu, za kterou foton urazí vzdálenost x

Dopředný rezonanční rozptyl bez zpětného rázu

N ...počet efektivních jader absorbátoru
 $|\psi(t)\rangle$...obecný stav systému
 $|g_1\rangle$...základní energetický stav jádra zdroje
 $|e_1^j\rangle$...excitovaný stav jádra zdroje
 $|g_{20}\rangle$...základní energetický stav všech jader absorbátoru
 $|g_2(m)\rangle$...základní energetický stav všech jader absorbátoru, kromě m -tého jádra
 $|e_{2m}^j\rangle$...excitovaný stav m -tého jádra absorbátoru
 k ...vlnové číslo fotonu
 $|\{0_k\}\rangle$...stav bez fotonů
 $|1_k\rangle$...stav s jedním fotonem s vlnovým číslem k
 $|[0]\rangle$...stav bez konverzního elektronu
 p ...hybnost konverzního elektronu
 $|1_p\rangle$...stav s jedním konverzním elektronem o hybnosti p vzniklého emisí jádra zdroje
 $|1_{p,m}\rangle$...stav s jedním konverzním elektronem o hybnosti p vzniklého emisí m -tého jádra absorbátoru
 t ...čas
 ω ...úhlová frekvence
 \hbar ...redukováná Plankova konstanta

$|e_1^j\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle |\{0_k\}\rangle$...stav systému obsahující jádro zdroje v excitovaném stavu, jádra absorbátoru v základním energetickém stavu a neobsahující fotony ani konverzní elektrony

$a(t), A(\omega)$...amplitudy popisující stav $|e_1^j\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle |\{0_k\}\rangle$

ω_0 ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu jádra zdroje

$|g_1\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle |1_k\rangle$...stav systému obsahující foton s vlnovým číslem k , jádra zdroje a absorbátoru v základním energetickém stavu a neobsahující konverzní elektrony

$b_k(t), B_k(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle |1_k\rangle$

ω_k ...úhlová frekvence odpovídající energii emitovaného fotonu

$|g_1\rangle | [0]\rangle |e_{2_m}^j\rangle |g_2(m)\rangle | [0]\rangle |\{0_k\}\rangle$...stav systému obsahující m -té jádro zdroje v excitovaném stavu, zbylá jádra v základním energetickém stavu a neobsahující fotony ani konverzní elektrony

$c_m(t), C_m(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle | [0]\rangle |e_{2_m}^j\rangle |g_2(m)\rangle | [0]\rangle |\{0_k\}\rangle$

ω_0' ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu jádra absorbátoru

$|g_1\rangle |1_p\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle |\{0_k\}\rangle$...stav systému obsahující konverzní elektron s hybností p pocházející ze zdroje, jádra v základním energetickém stavu a neobsahující konverzní elektron pocházející z absorberu ani fotony

$D_p(t), D_p(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |1_p\rangle |g_{2_0}\rangle | [0]\rangle |\{0_k\}\rangle$

ω_p ...úhlová frekvence odpovídající energii emitovaného konverzního elektronu

$|g_1\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle |1_{p,m}\rangle |\{0_k\}\rangle$...stav systému obsahující konverzní elektron s hybností p vzniklý emisí m -tého jádra absorbátoru, jádra v základním energetickém stavu a neobsahující konverzní elektron pocházející ze zdroje ani fotony

$E_{mp}(t), E_{mp}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle | [0]\rangle |g_{2_0}\rangle |1_{p,m}\rangle |\{0_k\}\rangle$

\hat{H} ...část hamiltoniánu popisující interakce v systému, které umožňují přechody mezi jednotlivými stavy

H_k, H_k^* ...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce jádra s fotonem s vlnovým číslem k

H_p, H_p^* ...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce jádra s konverzním elektronem s hybností p

$\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$...anihilační a kreační operátory fotonu s vlnovým číslem k

$\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger$...anihilační a kreační operátory konverzního elektronu s hybností p

$(|e_1^j\rangle \langle g_1|)$...operátor převádějící jádro zdroje ze základního stavu na excitovaný stav

$(|g_1\rangle \langle e_1^j|)$...operátor převádějící jádro zdroje z excitovaného stavu na základní stav

$(|e_{2_m}^j\rangle \langle g_{2_m}|)$...operátor převádějící m -té jádro absorbátoru ze základního stavu na excitovaný stav

$(|g_{2_m}\rangle \langle e_{2_m}^j|)$...operátor převádějící m -té jádro absorbátoru z excitovaného stavu na základní stav

x_m ... x -ová souřadnice m -tého efektivního jádra absorbátoru

L ...délka strany krychle ohraničující popisovaný prostor

Γ ...šířka spektrální čáry

Γ_c ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi konverzních elektronů

Γ_r ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi fotonů

α ...pomocný symbol zjednodušující zápis vztahu

$b_k^{\text{zdroj}}(t)$...amplituda popisující záření pocházející pouze ze zdroje

$b_{k,c}^a(t)$...amplituda popisující přírůstek záření pocházející z rozptylu na m -tém jádře absorbátoru

$\alpha(\omega_k)$...pomocný symbol zjednodušující zápis vztahu

$\Theta(t)$...Heavisideova funkce

x ...vzdálenost detektoru

z ...pól při výpočtu integrálu
 β ...pomocné označení pro zlepšení přehlednosti vztahu
 $\psi_r(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti detekování fotonu za absorbatórem
 c ...rychlost světla
 $P(x,t)$...hustota pravděpodobnosti detekování fotonu za absorbatórem
 τ ...doba života
 t' ...čas posunutý o dobu, za kterou foton urazí vzdálenost x

Koherentní manipulace s γ zářením

N ...počet efektivních jader absorbatóru
 k ...vlnové číslo fotonu
 t ...čas
 ω ...úhlová frekvence
 \hbar ...redukovaná Plankova konstanta
 $a(t), A(\omega)$...amplitudy popisující stav systému obsahující jádro zdroje v excitovaném stavu, jádra absorbatóru v základním energetickém stavu a neobsahující fotony ani konverzní elektrony
 ω_0 ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu jádra zdroje
 $b_k(t), B_k(\omega)$...amplitudy popisující stav systému obsahující foton s vlnovým číslem k , jádra zdroje a absorbatóru v základním energetickém stavu a neobsahující konverzní elektrony
 ω_k ...úhlová frekvence odpovídající energii emitovaného fotonu
 $c_m(t), C_m(\omega)$...amplitudy popisující stav systému obsahující m -té jádro zdroje v excitovaném stavu, zbylá jádra v základním energetickém stavu a neobsahující fotony ani konverzní elektrony
 ω'_0 ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu jádra absorbatóru
 $D_p(t), D_p(\omega)$...amplitudy popisující stav systému obsahující konverzní elektron s hybností p pocházející ze zdroje, jádra v základním energetickém stavu a neobsahující konverzní elektron pocházející z absorbatóru ani fotony
 ω_p ...úhlová frekvence odpovídající energii emitovaného konverzního elektronu
 $E_{mp}(t), E_{mp}(\omega)$...amplitudy popisující stav systému obsahující konverzní elektron s hybností p vzniklý emisí m -tého jádra absorbatóru, jádra v základním energetickém stavu a neobsahující konverzní elektron pocházející ze zdroje ani fotony
 ΔE_s ...posunutí energie spektrální čáry
 s ...řád posunutí spektrální čáry
 Ω ...úhlová frekvence vibračního pohybu zdroje záření
 p ...index modulace
 $J_s(p)$...Besselova funkce s -tého řádu s argumentem p
 $A_s(\omega)$...popisuje spektrální čáru zdroje energeticky posunutého o energii ΔE_s
 R ...amplituda vibračního pohybu
 λ ...vlnová délka záření
 ϑ_0 ...fáze vibračního pohybu
 H_k, H_k^* ...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce jádra s fotonem s vlnovým číslem k
 x_m ... x -ová souřadnice m -tého efektivního jádra absorbatóru
 L ...délka strany krychle ohraničující popisovaný prostor
 Γ ...šířka spektrální čáry

Γ_r ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi fotonů
 α ...pomocný symbol zjednodušující zápis vztahu
 $b_k^{\text{zdroj}}(t)$...amplituda popisující záření pocházející pouze ze zdroje
 $b_k^a(t)$...amplituda popisující přírůstek záření pocházející z rozptylu na absorbátoru
 $\alpha(\omega_k)$...pomocný symbol zjednodušující zápis vztahu
 $\psi_r^{\text{zdroj}}(x,t)$...příspěvek do amplitudy pravděpodobnosti detekování fotonu pocházející pouze ze zdroje
 $\psi_r^a(x,t)$...příspěvek do amplitudy pravděpodobnosti detekování fotonu pocházející pouze z absorbátoru
 $\Theta(t)$...Heavisideova funkce
 x ...vzdálenost detektoru
 z ...pól při výpočtu integrálu
 β ...pomocné označení pro zlepšení přehlednosti vztahu
 $\psi_r(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti detekování fotonu za absorbátorem
 c ...rychlost světla
 t' ...čas posunutý o dobu, za kterou foton urazí vzdálenost x
 $\Gamma(n)$...gama funkce argumentu n
 $\Gamma(n, is\Omega t')$...neúplná gama funkce argumentu n a integrací od $is\Omega t'$
 δ ...celé číslo

Akusticky indukovaná transparenence

p ...index modulace
 $J_0(p)$...Besselova funkce nultého řádu s argumentem p
 T_M ...optická tloušťka absorbátoru
 f ...procentuální část záření interagující bez zpětného rázu
 N ...počet efektivních jader
 Γ_r ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi fotonů
 Γ ...šířka spektrální čáry
 Ω ...úhlová frekvence vibračního pohybu zářiče
 \hbar ...redukováná Plankova konstanta
 ω ...úhlová frekvence
 ω_0 ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu jader
 $A(\omega)$...amplituda popisující stav systému, obsahující jádro zdroje v excitovaném stavu, jádra absorbátoru v základním energetickém stavu a neobsahující fotony ani konverzní elektrony, související s energetickým spektrem zdroje záření
 ϑ_0 ...náhodná fáze pohybu zdroje záření
 $\bar{P}(t)$...hustota pravděpodobnosti detekce fotonu za absorbátorem při akusticky indukované transparenenci
 $\psi_r(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti detekování fotonu za absorbátorem, která je dána vztahem (120)

Stimulovaná emise bez konverzních elektronů

$|\psi(t)\rangle$...obecný stav systému
 $|g_1\rangle$...základní energetický stav prvního jádra
 $|e_1^{j_1}\rangle$...excitovaný energetický stav prvního jádra

$|g_2\rangle$...základní energetický stav druhého jádra
 $|e_2^{j_2}\rangle$...excitovaný energetický stav druhého jádra
 $|\{0_{k_1}\}\rangle$...stav bez fotonů emitovaných prvním jádrem
 $|1_{k_1}\rangle$...stav s jedním fotonem s vlnovým číslem k_1 emitovaným prvním jádrem
 $|\{0_{k_2}\}\rangle$...stav bez fotonů emitovaných druhým jádrem
 $|1_{k_2}\rangle$...stav s jedním fotonem s vlnovým číslem k_2 emitovaným druhým jádrem
 ω_{j_1} ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu prvního jádra
 ω_{j_2} ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu druhého jádra
 k_1 ...vlnové číslo fotonu emitovaného prvním jádrem
 ω_{k_1} ...úhlová frekvence odpovídající energii fotonu emitovaného prvním jádrem
 k_2 ...vlnové číslo fotonu emitovaného druhým jádrem
 ω_{k_2} ...úhlová frekvence odpovídající energii fotonu emitovaného druhým jádrem
 x_2 ...poloha druhého jádra na ose x
 $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$...stav systému, ve kterém jsou obě jádra v excitovaném stavu a není přítomen žádný emitovaný foton
 $a_1(t), A_1(\omega)$...amplitudy popisující stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$
 $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$...stav systému, ve kterém jsou přítomny fotony emitované z obou jader a jádra v základním energetickém stavu
 $a_{2k_1k_2}(t), A_{2k_1k_2}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$
 $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$...stav systému, ve kterém je přítomen foton emitovaný z prvního jádra, první jádro v základním energetickém stavu a druhé jádro v excitovaném energetickém stavu
 $a_{3k_1}(t), A_{3k_1}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle$
 $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$...stav systému, ve kterém je přítomen foton emitovaný z druhého jádra, druhé jádro v základním energetickém stavu a první jádro v excitovaném energetickém stavu
 $a_{4k_2}(t), A_{4k_2}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle$
 $H_{k_1}, H_{k_1}^*$...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce prvního jádra s fotonem s vlnovým číslem k_1
 $H_{k_2}, H_{k_2}^*$...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce druhého jádra s fotonem s vlnovým číslem k_2
 $\hat{a}_{k_1}, \hat{a}_{k_1}^\dagger$...anihilační a kreační operátory fotonu s vlnovým číslem k_1
 $\hat{a}_{k_2}, \hat{a}_{k_2}^\dagger$...anihilační a kreační operátory fotonu s vlnovým číslem k_2
 $(|e_1^{j_1}\rangle \langle g_1|)$...operátor převádějící první jádro ze základního stavu na excitovaný stav
 $(|g_1\rangle \langle e_1^{j_1}|)$...operátor převádějící první jádro z excitovaného stavu na základní stav
 $(|e_2^{j_2}\rangle \langle g_2|)$...operátor převádějící druhé jádro ze základního stavu na excitovaný stav
 $(|g_2\rangle \langle e_2^{j_2}|)$...operátor převádějící druhé jádro z excitovaného stavu na základní stav
 \hbar ...redukováná Plankova konstanta
 ε ...pomocná konstanta
 $\delta_{k_1k_2}$...Kroneckerovo delta
 $\Gamma_{r,\omega_{k_1}}, \Gamma_{r,\omega_{k_2}}, \Gamma_{r,\delta_{k_1k_2},\omega_{k_1}}, \Gamma_{r,\delta_{k_1k_2},\omega_{k_2}}, \Gamma_{\omega_{k_1}}, \Gamma_{\omega_{k_2}}, \Gamma_{\text{tot}}, \sigma_{\omega_{k_1}}, \sigma_{\omega_{k_2}}, \sigma_{\delta_{k_1k_2},\omega_{k_1}}, \sigma_{\delta_{k_1k_2},\omega_{k_2}}, \sigma,$
 $\Theta_{\omega_{k_1}}, \Theta_{\omega_{k_2}}, \vartheta_{\omega_{k_1}}, \vartheta_{\omega_{k_2}}, \kappa$...pomocné konstanty využití pro zpřehlednění výpočtu
 $\psi_{r,2}(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti detekování dvou fotonů
 L ...délka strany krychle ohraničující popisovaný prostor
 $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti spontánní emise dvou fotonů
 $\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti stimulované emise fotonu
 $\Gamma_{r,\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \Gamma_{r,\omega_{k_2}}^{\text{spon}}, \Gamma_{r,\delta_{k_1k_2},\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \Gamma_{r,\delta_{k_1k_2},\omega_{k_2}}^{\text{spon}}, \Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}, \Gamma_{\text{tot}}^{\text{spon}}, \sigma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \sigma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}, \sigma_{\delta_{k_1k_2},\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \sigma_{\delta_{k_1k_2},\omega_{k_2}}^{\text{spon}},$
 $\sigma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}, \vartheta_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \vartheta_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}, \kappa^{\text{spon}}$...pomocné konstanty použité při výpočtu dvoj-

násobné spoutání emise fotonů

c ...rychlost světla

ω_0 ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu obou jader při rezonanci

H_k, H_k^* ...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce obou jader s fotonem s vlnovým číslem k při rezonanci

$\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}, \Theta_{\omega_k}^{\text{spon}}$...pomocné konstanty při rezonanci

P_2^{spon} ...hustota pravděpodobnosti dvojnásobné spontánní emise fotonů

P ...hustota pravděpodobnosti spontánní emise jednoho fotonu jedním jádrem

$\delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})$...Diracova delta funkce argumentu $\omega_{k_1} - \omega_{k_2}$

Δ ...konstanta kompenzující fyzikální jednotku Diracovy delta funkce

$\Gamma_{r, \omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \Gamma_{r, \omega_{k_2}}^{\text{stim}}, \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \Gamma_{r, \delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}^{\text{stim}}, \Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}, \Gamma_{\text{tot}}^{\text{stim}}, \sigma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \sigma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}, \sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \sigma_{\delta_{k_1 k_2}, \omega_{k_2}}^{\text{stim}}, \sigma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \Theta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \Theta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}, \vartheta_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \vartheta_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}, \kappa^{\text{stim}}$...pomocné konstanty použité při výpočtu stimulované emise fotonu

$a_{2k}(t)$...amplituda, která je mezivýsledkem při výpočtu stimulované emise

$\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}}, \Theta_{\omega_k}^{\text{stim}}$...pomocné konstanty při rezonanci

P_2^{stim} ...hustota pravděpodobnosti stimulované emise

\otimes ...označuje operaci konvoluce

$\Theta(t)$...Heavisideova funkce argumentu t

Γ_r ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi fotonů

Stimulovaná emise s konverzními elektrony

$|\psi(t)\rangle$...obecný stav systému

$|g_1\rangle$...základní energetický stav prvního jádra

$|e_1^{j_1}\rangle$...excitovaný energetický stav prvního jádra

$|g_2\rangle$...základní energetický stav druhého jádra

$|e_2^{j_2}\rangle$...excitovaný energetický stav druhého jádra

$|\{0_{k_1}\}\rangle$...stav bez fotonů emitovaných prvním jádrem

$|1_{k_1}\rangle$...stav s jedním fotonem s vlnovým číslem k_1 emitovaným prvním jádrem

$|\{0_{k_2}\}\rangle$...stav bez fotonů emitovaných druhým jádrem

$|1_{k_2}\rangle$...stav s jedním fotonem s vlnovým číslem k_2 emitovaným druhým jádrem

$|[0_{p_1}]\rangle$...stav bez konverzních elektronů emitovaných prvním jádrem

$|1_{p_1}\rangle$...stav s jedním konverzním elektronem s hybností p_1 emitovaným prvním jádrem

$|[0_{p_2}]\rangle$...stav bez konverzních elektronů emitovaných druhým jádrem

$|1_{p_2}\rangle$...stav s jedním konverzním elektronem s hybností p_1 emitovaným druhým jádrem

ω_{j_1} ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu prvního jádra

ω_{j_2} ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu druhého jádra

k_1 ...vlnové číslo fotonu emitovaného prvním jádrem

ω_{k_1} ...úhlová frekvence odpovídající energii fotonu emitovaného prvním jádrem

k_2 ...vlnové číslo fotonu emitovaného druhým jádrem

ω_{k_2} ...úhlová frekvence odpovídající energii fotonu emitovaného druhým jádrem

p_1 ...hybnost konverzního elektronu emitovaného prvním jádrem

ω_{p_1} ...úhlová frekvence odpovídající energii konverzního elektronu emitovaného prvním jádrem

p_2 ...hybnost konverzního elektronu emitovaného druhým jádrem

ω_{p_2} ...úhlová frekvence odpovídající energii konverzního elektronu emitovaného druhým jádrem

x_2 ...poloha druhého jádra na ose x

$|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$...stav systému, ve kterém jsou obě jádra v excitovaném stavu a není přítomen žádný emitovaný foton ani konverzní elektron
 $a_1(t), A_1(\omega)$...amplitudy popisující stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$
 $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$...stav systému, ve kterém jsou přítomny fotony emitované z obou jader, jádra jsou v základním energetickém stavu a není přítomný žádný konverzní elektron
 $a_{2k_1k_2}(t), A_{2k_1k_2}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$
 $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$...stav systému, ve kterém je přítomen foton emitovaný z prvního jádra, první jádro v základním energetickém stavu a druhé jádro v excitovaném energetickém stavu a není přítomen žádný konverzní elektron
 $a_{3k_1}(t), A_{3k_1}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$
 $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$...stav systému, ve kterém je přítomen foton emitovaný z druhého jádra, druhé jádro v základním energetickém stavu, první jádro v excitovaném energetickém stavu a není přítomen žádný konverzní elektron
 $a_{4k_2}(t), A_{4k_2}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$
 $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$...stav systému, ve kterém je přítomen konverzní elektron emitovaný prvním jádrem, první jádro v základním energetickém stavu, druhé jádro v excitovaném energetickém stavu a není přítomen žádný foton
 $b_{1p_1}(t), B_{1p_1}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |e_2^{j_2}\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$
 $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$...stav systému, ve kterém je přítomen konverzní elektron emitovaný druhým jádrem, druhé jádro v základním energetickém stavu, první jádro v excitovaném energetickém stavu a není přítomen žádný foton
 $b_{2p_2}(t), B_{2p_2}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|e_1^{j_1}\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$
 $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$...stav systému, ve kterém je přítomen konverzní elektron emitovaný prvním jádrem, obě jádra v základním energetickém stavu a foton emitovaný druhým jádrem
 $b_{3p_1k_2}(t), B_{3p_1k_2}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |1_{k_2}\rangle |[0_{p_2}]\rangle$
 $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$...stav systému, ve kterém je přítomen konverzní elektron emitovaný druhým jádrem, obě jádra v základním energetickém stavu a foton emitovaný prvním jádrem
 $b_{4k_1p_2}(t), B_{4k_1p_2}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |1_{k_1}\rangle |[0_{p_1}]\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$
 $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$...stav systému, ve kterém jsou přítomny dva konverzní elektrony, obě jádra v základním energetickém stavu a není přítomen žádný foton
 $b_{5k_1k_2}(t), B_{5k_1k_2}(\omega)$...amplitudy popisující stav $|g_1\rangle |\{0_{k_1}\}\rangle |1_{p_1}\rangle |g_2\rangle |\{0_{k_2}\}\rangle |1_{p_2}\rangle$
 $H_{k_1}, H_{k_1}^*$...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce prvního jádra s fotonem s vlnovým číslem k_1
 $H_{k_2}, H_{k_2}^*$...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce druhého jádra s fotonem s vlnovým číslem k_2
 $H_{p_1}, H_{p_1}^*$...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce prvního jádra s konverzním elektronem s hybností p_1
 $H_{p_2}, H_{p_2}^*$...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce druhého jádra s konverzním elektronem s hybností p_2
 $\hat{a}_{k_1}, \hat{a}_{k_1}^\dagger$...anihilační a kreační operátory fotonu s vlnovým číslem k_1
 $\hat{a}_{k_2}, \hat{a}_{k_2}^\dagger$...anihilační a kreační operátory fotonu s vlnovým číslem k_2
 $\hat{b}_{p_1}, \hat{b}_{p_1}^\dagger$...anihilační a kreační operátory konverzního elektronu s hybností p_1
 $\hat{b}_{p_2}, \hat{b}_{p_2}^\dagger$...anihilační a kreační operátory konverzního elektronu s hybností p_2
 $(|e_1^{j_1}\rangle \langle g_1|)$...operátor převádějící první jádro ze základního stavu na excitovaný stav
 $(|g_1\rangle \langle e_1^{j_1}|)$...operátor převádějící první jádro z excitovaného stavu na základní stav

$(|e_2^{j_2}\rangle\langle g_2|)$...operátor převádějící druhé jádro ze základního stavu na excitovaný stav
 $(|g_2\rangle\langle e_2^{j_2}|)$...operátor převádějící druhé jádro z excitovaného stavu na základní stav
 \hbar ...redukovaná Plankova konstanta
 ε ...pomocná konstanta
 $\delta_{k_1k_2}$...Kroneckerovo delta
 $\Gamma_{\omega_{k_1}}, \Gamma_{\omega_{k_2}}, \Gamma_{c,\omega_{p_1}}, \Gamma_{c,\omega_{p_2}}, \gamma_{r,\omega_{k_1}}, \gamma_{r,\omega_{k_2}}, \gamma_{c,\omega_{p_1}}, \gamma_{c,\omega_{p_2}}, \sigma_{\omega_{k_1},\gamma_c}, \sigma_{\omega_{k_2},\gamma_c}, \sigma_{\delta_{k_1k_2},\omega_{k_1},\gamma_c}, \sigma_{\delta_{k_1k_2},\omega_{k_2},\gamma_c},$
 $\sigma_{\omega_{p_1},\gamma_r}, \sigma_{\omega_{p_2},\gamma_r}, \sigma_{\text{tot}}, \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}, \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}, \Theta_{\Gamma_{c,\omega_{p_1}}}, \Theta_{\Gamma_{c,\omega_{p_2}}}, \Theta_{\gamma_{r,\omega_{k_1}}}, \Theta_{\gamma_{r,\omega_{k_2}}}, \Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_1}}}, \Theta_{\gamma_{c,\omega_{p_2}}}$...po-
mocné konstanty využité pro zpřehlednění výpočtu
 $\psi_{r,2}(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti detekování dvou fotonů
 L ...délka strany krychle ohraničující popisovaný prostor
 $\psi_{r,2}^{\text{spon}}(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti spontánní emise dvou fotonů
 $\psi_{r,2}^{\text{stim}}(x,t)$...amplituda pravděpodobnosti stimulované emise fotonu
 $\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{spon}}, \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{spon}}, \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}^{\text{spon}}, \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}^{\text{spon}}, \sigma_{\text{tot}}^{\text{spon}}$...pomocné konstanty použité při výpočtu dvojnásobné
spoutání emise fotonů
 c ...rychlost světla
 ω_0 ...úhlová frekvence odpovídající energii excitovaného stavu obou jader při rezonanci
 H_k, H_k^* ...vazebné konstanty charakterizující sílu interakce obou jader s fotonem s vl-
novým číslem k při rezonanci
 $\Gamma_{\omega_k}^{\text{spon}}, \Gamma_{\omega_p}, \Theta_{\Gamma_{\omega_k}}^{\text{spon}}, \Theta_{\gamma_{c,\omega_p}}$...pomocné konstanty při rezonanci
 P_2^{spon} ...hustota pravděpodobnosti dvojnásobné spontánní emise fotonů
 P ...hustota pravděpodobnosti spontánní emise jednoho fotonu jedním jádrem
 $\delta(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})$...Diracova delta funkce argumentu $\omega_{k_1} - \omega_{k_2}$
 Δ ...konstanta kompenzující fyzikální jednotku Diracovy delta funkce
 $\Gamma_{\omega_{k_1}}^{\text{stim}}, \Gamma_{\omega_{k_2}}^{\text{stim}}, \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_1}}}^{\text{stim}}, \Theta_{\Gamma_{\omega_{k_2}}}^{\text{stim}}, \sigma_{\text{tot}}^{\text{stim}}$...pomocné konstanty použité při výpočtu stimulované
emise fotonu
 $a_{2k}(t)$...amplituda, která je mezivýsledkem při výpočtu stimulované emise
 $\Gamma_{\omega_k}^{\text{stim}}, \Theta_{\Gamma_{\omega_k}}^{\text{stim}}, \gamma_{r,\omega_k}$...pomocné konstanty při rezonanci
 P_2^{stim} ...hustota pravděpodobnosti stimulované emise
 \otimes ...označuje operaci konvoluce
 $\Theta(t)$...Heavisideova funkce argumentu t
 Γ_r ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi fotonů
 Γ_c ...příspěvek do šířky spektrální čáry příslušející emisi konverzních elektronů
 τ ...doba života

Literatura

- [1] David J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. 1. vyd. Prentice Hall, srp. 1994. ISBN: 0-13-124405-1.
- [2] Wolfgang Sturhahn. *Nuclear resonant spectroscopy*. *Journal of Physics: Condensed Matter*. Ročník 16. Číslo 5 (ún. 2004), s. 497–530. ISSN: 1361-648X. DOI: [10.1088/0953-8984/16/5/009](https://doi.org/10.1088/0953-8984/16/5/009).
- [3] Ralf Röhlsberger. *Nuclear Condensed Matter Physics with Synchrotron Radiation: Basic Principles, Methodology and Applications*. Springer tracts in modern physics. Číslo 208. Berlin ; New York: Springer, 2004. ISBN: 978-3-540-23244-5.
- [4] Miroslav Mašláň. *Mössbauerova spektroskopie*. 1. vyd. Olomouc: Universita Palackého, 1993. ISBN: 80-7067-269-2.
- [5] Philipp Gütlich, Rainer Link a Alfred Trautwein. *Mössbauer spectroscopy and transition metal chemistry: Fundamentals and applications*. Berlín, Německo: Springer-Verlag, 2011. ISBN: 978-3-540-88427-9. DOI: [10.1007/978-3-540-88428-6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88428-6).
- [6] Dennis Eugene Brown. *Nuclear dynamical diffraction using synchrotron radiation*. Dis. pr. Stanford, California: Stanford University, 1993. DOI: <https://doi.org/10.2172/10162176>.
- [7] M. Blume a O. C. Kistner. *Resonant Absorption in the Presence of Faraday Rotation*. *Physical Review*. Ročník 171. Číslo 2 (čvn. 1968), s. 417–425. ISSN: 0031-899X.
- [8] Melvin Lax. *Multiple scattering of waves*. *Reviews of Modern Physics*. Ročník 23. Číslo 4 (říj. 1951), s. 287–310. DOI: [10.1103/RevModPhys.23.287](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.23.287).
- [9] Alfred Quentin Rueben Baron. *Resonant nuclear scattering of synchrotron radiation: Detector development and specular as scattering from a thin layer of ^{57}Fe* . Dis. pr. Stanford, California: Stanford University, 1995. DOI: <https://doi.org/10.2172/100421>.
- [10] L. Deák et al. *Coherent forward-scattering amplitude in transmission and grazing incidence Mössbauer spectroscopy*. *Physical Review B*. Ročník 53. Číslo 10 (břez. 1996), s. 6158–6164. ISSN: 0163-1829. DOI: [10.1103/PhysRevB.53.6158](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.53.6158).
- [11] G. V. Smirnov. *General properties of nuclear resonant scattering*. *Hyperfine Interactions*. Ročník 123/124 (břez. 1999), s. 31–77. ISSN: 3005-0731. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1017007520099>.
- [12] G. V. Smirnov a W. Potzel. *Perturbation of nuclear excitons by ultrasound*. *Hyperfine Interactions*. Ročník 123/124 (břez. 1999), s. 633–636. ISSN: 3005-0731. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1017092411438>.
- [13] Yuri V. Shvyd'ko. *Nuclear resonant forward scattering of x rays: Time and space picture*. *Physical Review B*. Ročník 59. Číslo 14 (dub. 1999), s. 9132–9143. ISSN: 0163-1829. DOI: [10.1103/PhysRevB.59.9132](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.59.9132).
- [14] Yuri V. Shvyd'ko. *Coherent nuclear resonant scattering of X-rays: Time and space picture*. *Hyperfine Interactions*. Ročník 123/124 (1999), s. 275–299. ISSN: 3005-0731. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1017015721916>.
- [15] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008. ISBN: 978-981-283-285-6.

- [16] J. P. Hannon a G. T. Trammell. *Mössbauer Diffraction. I. Quantum Theory of Gamma-Ray and X-Ray Optics*. *Physical Review*. Ročník 169. Číslo 2 (květ. 1968), s. 315–329. ISSN: 0031-899X. DOI: [10.1103/PhysRev.169.315](https://doi.org/10.1103/PhysRev.169.315).
- [17] W. Sturhahn a E. Gerdau. *Evaluation of time-differential measurements of nuclear-resonance scattering of x rays*. *Physical Review B*. Ročník 49. Číslo 14 (dub. 1994), s. 9285–9294. ISSN: 0163-1829. DOI: [10.1103/PhysRevB.49.9285](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.9285).
- [18] Samuel M. Harris. *Quantum Mechanical Calculation of Mössbauer Transmission*. *Physical Review*. Ročník 124 (4 lis. 1961), s. 1178–1185. DOI: [10.1103/PhysRev.124.1178](https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.1178).
- [19] Walter Heitler. *The quantum theory of radiation*. 3. vyd. Dover Publications Inc., 1984. ISBN: 0-486-64558-4.
- [20] Gilbert R. Hoy. *Quantum mechanical model for nuclear-resonant scattering of gamma radiation*. *Journal of Physics: Condensed Matter*. Ročník 9. Číslo 41 (říj. 1997), s. 8749–8765. ISSN: 0953-8984. DOI: [10.1088/0953-8984/9/41/019](https://doi.org/10.1088/0953-8984/9/41/019).
- [21] Gilbert R. Hoy, Jos Odeurs a Romain Coussement. *Coherent-path model for nuclear resonant scattering of gamma radiation from nuclei excited by synchrotron radiation*. *Physical Review B*. Ročník 63. Číslo 18 (dub. 2001), s. 184435. ISSN: 0163-1829. DOI: [10.1103/PhysRevB.63.184435](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.184435).
- [22] Gilbert R. Hoy a Jos Odeurs. *Gamma echo interpreted as a phase-shift-induced transparency*. *Physical Review B*. Ročník 63. Číslo 6 (led. 2001), s. 064301. ISSN: 0163-1829. DOI: [10.1103/PhysRevB.63.064301](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.064301).
- [23] Gilbert R. Hoy, Jos Odeurs a Romain Coussement. *Nuclear resonant scattering using synchrotron radiation*. *Hyperfine Interactions*. Ročník 120/121 (1999), s. 169–173. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1017098617489>.
- [24] Gilbert R. Hoy, Jos Odeurs a Romain Coussement. *π phase-shift induced transparency of resonant gamma radiation*. *Laser and Particle Beams*. Ročník 18 (2000), s. 297–300. DOI: [10.1017/S0263034600182199](https://doi.org/10.1017/S0263034600182199).
- [25] Gilbert R. Hoy a Jos Odeurs. *The Coherent-Path Model for Nuclear Resonant Gamma-Ray Scattering: An Overview*. *Hyperfine Interactions*. Ročník 141/142 (2002), s. 135–139. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021266306354>.
- [26] J. Odeurs et al. *Quantum-mechanical theory of enhanced resolution in Mössbauer spectroscopy using a resonant detector*. *Physical Review B*. Ročník 62. Číslo 10 (srp. 2000), s. 6148–6157. ISSN: 0163-1829. DOI: [10.1103/PhysRevB.62.6148](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.6148).
- [27] Jos Odeurs a Gilbert R. Hoy. *Formation time of the nuclear exciton due to a synchrotron radiation pulse*. *Physical Review B*. Ročník 71. Číslo 22 (čvn. 2005), s. 224301. ISSN: 1098-0121. DOI: [10.1103/PhysRevB.71.224301](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.224301).
- [28] Andreas Reichegger a Jörg Evers. *Temporal dynamics of stimulated emission with applications in nuclear quantum optics*. *Physical Review A*. Ročník 91 (5 květ. 2015), s. 053810. DOI: [10.1103/PhysRevA.91.053810](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.053810).
- [29] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. 3. vyd. Oxford University Press, 2000. ISBN: 0-19-850177-3.
- [30] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky (IV)*. Matfyzpress, 2010. ISBN: 9788073781200.
- [31] Farit Vagizov et al. *Coherent control of the waveforms of recoilless γ -ray photons*. *Nature*. Ročník 508. Číslo 7494 (2014), s. 80–83. DOI: [10.1038/nature13018](https://doi.org/10.1038/nature13018).

- [32] Y. V. Radeonychev et al. *Observation of acoustically induced transparency for γ -ray photons*. *Physical Review Letters*. Ročník 124. Číslo 16 (dub. 2020). DOI: [10.1103/physrevlett.124.163602](https://doi.org/10.1103/physrevlett.124.163602).
- [33] Milton Abramowitz a Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. United States. Government Printing Office, 1972. Dostupné z <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc40302/>.
- [34] S. K. Godovikov. *Features of the radioactive decay of Mössbauer isotopes in the presence of an intrinsic gamma-radiation field*. *Laser Physics*. Ročník 16. Číslo 7 (2006), s. 1087–1091. DOI: [10.1134/s1054660x06070115](https://doi.org/10.1134/s1054660x06070115).
- [35] J. Odeurs et al. *Towards more relaxed conditions for a gamma-ray laser: Methods to realize induced transparency for nuclear resonant gamma radiation*. *Laser & Photonics Reviews*. Ročník 4. Číslo 1 (2010), s. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.1002/lpor.200810068>.
- [36] Gilbert R. Hoy. *Stimulated emission of gamma-radiation: A proposed experiment*. *Journal of Modern Optics*. Ročník 51. Číslo 16-18 (2004), s. 2599–2606. DOI: [10.1080/09500340408231818](https://doi.org/10.1080/09500340408231818).