

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Interpolace trigonometrickými polynomy



Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Jana Karasová
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně pod vedením RNDr. Jitky Machalové, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 15. dubna 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí bakalářské práce RNDr. Jitce Machalové, Ph.D. za obětavou spolupráci, trpělivost i za čas, který mně věnovala při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat své rodině, přátelům a spolužákům za jejich podporu a pomoc po celou dobu studia.

Obsah

Použité značení	4
Úvod	5
1 Přípravná kapitola	6
2 Interpolace	8
3 Trigonometrická interpolace	10
3.1 Trigonometrická interpolace pro body dané ekvidistantně	16
3.2 Trigonometrická interpolace pro libovolné body interpolace	47
4 Rychlá Fourierova transformace	52
Závěr	70
Použitá literatura	71

Použité značení

\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{N}_0	množina přirozených čísel včetně nuly
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
\mathbb{C}^n	množina všech uspořádaných n -tic komplexních čísel
$c = a + ib, \bar{c} = a - ib$	komplexně sdružená čísla
V	vektorový prostor nad tělesem \mathbb{C}
$o = (0, 0, \dots, 0)^T$	nulový vektor
(u, v)	skalární součin vektorů u, v
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
$D(f)$	definiční obor funkce f
Π_n	třída všech polynomů stupně nejvýše n

Úvod

Matematika je věda, která obsahuje mnoho disciplín jako je algebra, geometrie, matematická analýza a několik dalších. Je důležitá i pro ostatní vědní obory, například pro fyziku, ekonomii, chemii, kde je potřeba provádět různé matematické výpočty.

Důležitou částí matematiky je numerická matematika, která se zabývá řešením problémů pro konkrétní hodnoty a využívá počítačové výpočetní metody. Obsahuje i interpolaci, při které hledáme funkci předem zvoleného tvaru pro daná data tak, aby byly splněny tzv. interpolační podmínky. Existuje mnoho typů interpolace a v této práci se budeme zabývat interpolací trigonometrickými funkcemi, která řeší úlohu najít trigonometrický interpolační polynom procházející danými body v rovině.

Cílem této bakalářské práce je tedy popsat problematiku trigonometrické interpolace a ukázat výpočet trigonometrického interpolačního polynomu různými způsoby. Součástí budou i m-fily vytvořené v Matlabu, pomocí kterých lze nalézt tyto interpolační polynomy.

Práce obsahuje přípravnou kapitolu, v níž jsou zavedeny pojmy, které s trigonometrickou interpolací přímo nesouvisí, ale jsou potřeba k popisu této problematiky. Druhá kapitola se věnuje interpolaci obecně a jsou zde uvedeny nejpoužívanější typy interpolace. Ve třetí kapitole je ukázána samotná trigonometrická interpolace pro body interpolace dané ekvidistantně ale i pro libovolné body interpolace. Poslední, čtvrtá, kapitola se zabývá rychlou Fourierovu transformací, která ukazuje jak lze jinak vypočítat koeficienty hledaného trigonometrického polynomu při trigonometrické interpolaci.

V celé práci jsou uvedeny příklady, jejichž konce jsou označeny hvězdičkou ★ a důkazy, které končí čtverečkem □ na konci řádku.

1 Přípravná kapitola

V této kapitole uvedeme některé pojmy, které budeme používat v dalším textu.

Protože budeme potřebovat komplexní čísla, zavedeme si některé pojmy s nimi spojené. Jestliže $c = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$, potom $\bar{c} = a - ib$ je číslo k němu komplexně sdružené, a je reálná část čísla c , b je imaginární část čísla c . Dále $|c| = \sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ je jeho absolutní hodnota.

Definice 1.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem \mathbb{C}^n . Skalárním součinem na prostoru V nazveme každé zobrazení $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, které má následující vlastnosti

- 1) $(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in V,$
- 2) $(u, u) = 0 \iff u = o,$
- 3) $(u, v) = \overline{(v, u)}, \quad \forall u, v \in V,$
- 4) $(au, v) = \bar{a}(u, v), \quad \forall u, v \in V, \forall a \in \mathbb{C},$
- 5) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w), \quad \forall u, v, w \in V.$

Poznámka 1.1. Máme-li dány vektory $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ z vektorového prostoru V dimenze n , budeme v celé této práci uvažovat skalární součin ve tvaru

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i.$$

Příklad 1.1. Vypočítejte skalární součin vektorů $u = (2, 7, 4)^T, v = (-3, 2, 5)^T$.
 $(u, v) = 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 28.$ ★

Definice 1.2. Řekneme, že vektory $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in V$ generují vektorový prostor V dimenze n , je-li každý vektor $\psi \in V$ jejich lineární kombinací, tj. jestliže pro každý vektor $\psi \in V$ existují konstanty $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tak, že $\psi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n$. Říkáme taky, že $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ je množina generátorů vektorového prostoru V .

Definice 1.3. Bází \mathcal{B} vektorového prostoru V dimenze n budeme rozumět libovolnou n -tici jeho lineárně nezávislých generátorů.

Definice 1.4. Řekneme, že báze \mathcal{B} vektorového prostoru V je ortogonální báze, jestliže \mathcal{B} je ortogonální podmnožinou ve V , tj. pro $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\} \subseteq V$ platí

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq k : i \neq j \Rightarrow (\varphi_i, \varphi_j) = 0.$$

Definice 1.5. Funkce $f(x)$ se nazývá periodická s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže $\forall x \in D(f)$ je také $x + p \in D(f)$, $x - p \in D(f)$ a jestliže platí $f(x - p) = f(x) = f(x + p)$.

Poznámka 1.2. Je-li p perioda funkce $f(x)$, pak také np , kde $n \in \mathbb{N}$, je perioda funkce $f(x)$. Jestliže existuje minimum z množiny všech period funkce $f(x)$, hovoříme o nejmenší periodě funkce $f(x)$.

Věta 1.1. *Základní věta algebry*

Každá algebraická rovnice n -tého stupně ($n > 0$) má alespoň jeden kořen.

Důkaz této věty lze nalézt např. v [4].

Důsledek 1.1. Každá algebraická rovnice stupně n má včetně násobnosti právě n kořenů a polynom $P_n(x)$ lze jednoznačně (až na pořadí) rozložit následujícím způsobem

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_n (x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_k)^{r_k},$$

kde $r_j \in \mathbb{N}$, $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

2 Interpolace

Uvažujme třídu funkcí s jednou proměnnou $\psi(x; a_0, \dots, a_n)$, které mají $n + 1$ parametrů a_0, \dots, a_n popisujících jednotlivé funkce této třídy. Interpolacním problémem je pro dané dvojice (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, určit tyto parametry a_i tak, aby byly splněny **podmínky interpolace**

$$\psi(x_i; a_0, \dots, a_n) = f_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (1)$$

přičemž x_i jsou dané body, pro něž $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$ a f_i jsou dané hodnoty v těchto bodech.

Tuto úlohu interpolace můžeme vnímat ve dvou situacích:

- I.) Máme funkci $f(x)$ danou „složitým“ explicitním vyjádřením a chceme ji nahradit „jednodušší“ funkcí $\psi(x; a_0, \dots, a_n)$ tak, aby byly splněny podmínky interpolace. V tomto případě zvolíme různé body x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ a v nich vypočítáme funkční hodnoty f_i .
- II.) Máme pro každý bod x_i danou hodnotu f_i , $i = 0, \dots, n$ a hledáme funkci $\psi(x; a_0, \dots, a_n)$ tak, aby byly splněny podmínky interpolace.

Mezi nejjednodušší a nejčastěji používané typy interpolace patří lineární interpolace, kdy funkci $\psi(x; a_0, \dots, a_n)$ hledáme ve tvaru

$$\psi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \dots + a_n\psi_n(x).$$

Do této třídy spadá i polynomiální interpolace, kdy funkci ψ hledáme ve tvaru

$$\psi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

tj. $\psi(x; a_0, \dots, a_n) = P_n(x)$.

Věta 2.1. Pro $(n + 1)$ daných bodů (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$, existuje právě jeden polynom $P_n \in \Pi_n$ takový, že

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Důkaz: viz [1] strana 160.

Dále se můžeme setkat s racionální interpolací, kdy funkci ψ hledáme ve tvaru

$$\psi(x; a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

a **trigonometrickou interpolací**, u které funkci $\psi(x; a_0, \dots, a_n)$ hledáme ve tvaru

$$\psi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1e^{ix} + \dots + a_n e^{inx} \quad (2)$$

a nazýváme ji **fázový polynom**.

3 Trigonometrická interpolace

Trigonometrickou interpolaci používáme zejména v případě, kdy interpolujeme periodickou funkci nebo periodická data.

U trigonometrické interpolace hledáme funkci $\psi(x; a_0, \dots, a_n)$ ve tvaru

$$\psi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_n e^{inx},$$

respektive hledáme parametry a_0, \dots, a_n tak, aby byly splněny podmínky interpolace (1).

K nalezení této funkce můžeme použít **metodu neurčitých koeficientů**. Tato metoda spočívá v tom, že užitím soustavy lineárních rovnic nalezneme koeficienty hledaného fázového polynomu. Máme-li dány body $x_i, x_i \neq x_j$ pro $i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, n$ a funkční hodnoty $f_i, i = 0, 1, \dots, n$, pro hledaný fázový polynom $\psi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_n e^{inx}$ můžeme interpolační podmínky $\psi(x_i, a_0, \dots, a_n) = f_i, i = 0, 1, \dots, n$ psát ve tvaru

$$\psi(x_0; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1 e^{ix_0} + \dots + a_n e^{inx_0} = f_0$$

⋮

$$\psi(x_n; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1 e^{ix_n} + \dots + a_n e^{inx_n} = f_n.$$

Stručně lze psát

$$\Psi a^T = f,$$

$$\text{kde } f = (f_0, \dots, f_n)^T, \quad a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & e^{ix_0} & \dots & e^{inx_0} \\ \vdots & & & \\ 1 & e^{ix_n} & \dots & e^{inx_n} \end{pmatrix}.$$

Máme tedy soustavu $(n + 1)$ rovnic o $(n + 1)$ neznámých. Vzhledem k tomu, že funkce $1, e^{ix}, e^{i2x}, \dots, e^{inx}$ jsou lineárně nezávislé, existuje právě jedno řešení tohoto systému. Jeho vyřešením získáme hledané koeficienty a_0, a_1, \dots, a_n , a když je dosadíme do vztahu (2), dostaneme hledaný fázový polynom.

Příklad 3.1. Pro zadaná data

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	-1
2	$\frac{3}{2}\pi$	1
3	3π	0

najděte fázový polynom $\psi(x, a_0, \dots, a_n)$.

Fázový polynom budeme hledat ve tvaru

$$\psi(x; a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 + a_1 e^{ix} + a_2 e^{i2x} + a_3 e^{i3x}.$$

Dosadíme do podmínky interpolace $\psi(x_i, a_0, \dots, a_n) = f_i$ a dostáváme

$$\psi(0; a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 + a_1 e^0 + a_2 e^0 + a_3 e^0 = 0$$

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}; a_0, a_1, a_2, a_3\right) = a_0 + a_1 e^{i\frac{\pi}{2}} + a_2 e^{i\pi} + a_3 e^{i\frac{3}{2}\pi} = -1$$

$$\psi\left(\frac{3}{2}\pi; a_0, a_1, a_2, a_3\right) = a_0 + a_1 e^{i\frac{3}{2}\pi} + a_2 e^{i3\pi} + a_3 e^{i\frac{9}{2}\pi} = 1$$

$$\psi(3\pi; a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 + a_1 e^{i3\pi} + a_2 e^{i6\pi} + a_3 e^{i9\pi} = 0.$$

Tedy

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$a_0 + a_1 i + a_2(-1) + a_3(-i) = -1$$

$$a_0 + a_1(-i) + a_2(-1) + a_3 i = 1$$

$$a_0 + a_1(-1) + a_2 \cdot 1 + a_3(-1) = 0.$$

Sečteme-li první rovnici se čtvrtou a druhou rovnici se třetí dostaneme

$$2a_0 + 2a_2 = 0$$

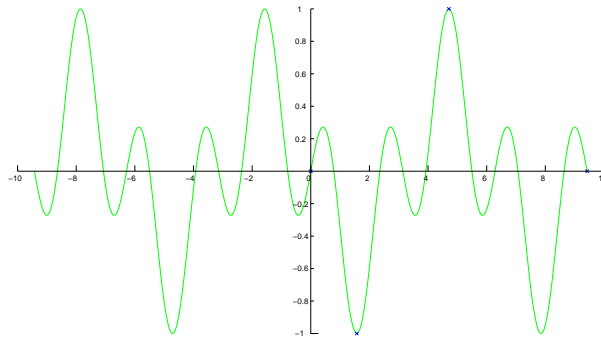
$$2a_0 - 2a_2 = 0.$$

Odtud

$$4a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$4a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0.$$

Vrátíme se k původní soustavě a k první rovnici přičteme druhou a od druhé rovnice odečteme třetí, přičemž již neuvažujeme a_0 a a_2 , protože ty jsou rovny nule, a potom dostaneme



Obr.1

$$a_1 + a_1i + a_3 - a_3i = -1$$

$$2a_1i - 2a_3i = -2.$$

Úpravou dostaneme

$$a_1 + a_1i + a_3 - a_3i = -1$$

$$a_1i - a_3i = -1.$$

Odtud

$$a_1 + a_3 - 1 = -1$$

$$-a_1 + a_3 = -i.$$

A dostáváme

$$2a_3 = -i \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{2}i \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2}i.$$

Tedy hledaný fázový polynom je tvaru

$$\psi(x; a_0, a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{2}ie^{ix} - \frac{1}{2}ie^{i3x}$$

a je vykreslen na obrázku 1. V tomto příkladě tedy body nemusejí být ekvidistantní, ani není určen interval, ve kterém musejí ležet. Metoda neurčitých koeficientů je ale časově náročná, protože musíme řešit soustavu rovnic, která může být těžko řešitelná a nemusí tomu zabránit ani podmínka, že se žádné dva body nesmějí rovnat. ★

Pro výpočet koeficientů a_0, \dots, a_n fázového polynomu metodou neurčitých koeficientů jsem vytvořila m-file v Matlabu s názvem metodaNK1. Na vstupu zadáme vzájemně různé body interpolace a funkční hodnoty v bodech interpolace.

```
%vstup:  xi...vektor bodů interpolace
%        fi...sloupcový vektor funkčních hodnot v bodech
           interpolace
%výstup:  v...vektor koeficientů fázového polynomu
%        vv...fázový polynom

function[v,vv]=metodaNK1(xi,fi)
n=length(xi);
m=length(fi);

if (n~=m)
    disp('různý počet bodů interpolace a funkčních hodnot')
    v=['nelze vypočítat'];
    vv=['nelze vypočítat'];
    return;
end

[r,s]=size(fi);
if (s~=1)
    fi=(fi).';
end

x=sort(xi);
t=0;
for s=1:(n-1)
    t=t+(x(s)==x(s+1));
```

```

end
if (t~=0)
    disp('body interpolace nejsou ruzne')
    v=['nelze vypočítat'];
    vv=['nelze vypočítat'];
    return;
end

%výpočet
for x=1:n
    dd(x,1)=1;
    yy=2;
    for y=1:(n-1)
        dd(x,yy)=exp(i*xi(x)*y);
        yy=yy+1;
    end
end
v=inv(dd)*fi;

for k=1:n
    if(abs(v(k))<10^-10)
        v(k)=0;
    end
end
v;

%výpis
if (v(1)==0)
    vv=' 0';
else

```

```

        vv=[num2str(v(1))];
    end
    y=2;
    for x=2:n
        vv=[vv,' + (' ,num2str(v(y)),') exp(' ,num2str(x-1), 'ix)'];
        y=y+1;
    end

vv=['psi(x)=',vv];
vv;

%vykreslení grafu
x=[xi(1):pi/100:xi(n)];
y=0;
for k=1:n
    y=y+v(k)*exp(i*(k-1)*x);
    k=k+1;
end
plot(x,y,'g')
hold on
xi;
fi;
plot(xi,fi,'x')
hold off

```

Pomocí tohoto m-filu můžeme spočítat příklad 3.1., když do příkazového okna Matlabu zadáme požadované vstupy.

```

>> xi=[0,pi/2,3/2*pi,3*pi];
>> fi=[0,-1,1,0];
>> [v,vv]=metodaNK1(xi,fi)

```


Po stisknutí Enteru pak dostaneme

v =

$$\begin{array}{c} 0 \\ -0.0000 + 0.5000i \\ 0 \\ 0.0000 - 0.5000i \end{array}$$

vv =

$$\begin{aligned} \text{psi}(x) = & 0 + (-5.122e-017+0.5i) \exp(1ix) + (0) \exp(2ix) + \\ & + (2.3492e-016-0.5i) \exp(3ix) \end{aligned}$$

a dostali jsme stejný fázový polynom jako v příkladě 3.1.

3.1 Trigonometrická interpolace pro body dané ekvidistantně

V této podkapitole budeme uvažovat body interpolace z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ dané ekvidistantně, tj. $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Tedy **úlohu trigonometrické interpolace** můžeme zformulovat takto:

Nechť jsou dány ekvidistantní body $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$, $x_k \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a funkční hodnoty f_k v těchto bodech. Úkolem je najít fázový polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_{n-1} e^{i(n-1)x} \quad (3)$$

tak, aby byly splněny interpolační podmínky $p(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Budeme hovořit o **fázovém polynomu $p(x)$ stupně $n-1$** .

Úlohu trigonometrické interpolace lze řešit také nalezením tzv. **trigonometrického interpolačního polynomu $T_n(x)$** . Ten je ve tvaru, ve kterém jsou použity kombinace goniometrických funkcí $\cos hx$ a $\sin hx$, přičemž

pro n liché, $n = 2m + 1$, je

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^m (A_h \cos hx + B_h \sin hx), \quad (4a)$$

pro n sudé, $n = 2m$, je

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{m-1} (A_h \cos hx + B_h \sin hx) + \frac{A_m}{2} \cos mx. \quad (4b)$$

Tedy hledáme koeficienty $A_0, \dots, A_m, B_1, \dots, B_{m-1}$ případně ještě B_m tak, aby byly splněny podmínky interpolace $T_n(x_k) = f_k$ pro ekvidistantní body $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$ a pro funkční hodnoty f_k v těchto bodech x_k .

Fázový polynom $p(x)$ a trigonometrický polynom $T_n(x)$ interpolující daná data jsou vzájemně ekvivalentní. Později ukážeme, že od jednoho lze jistou úpravou přejít ke druhému.

Je zřejmé, že trigonometrická interpolace je vhodná pro data, která jsou periodická o známé periodě, přičemž naše funkce $T_n(x)$ tvaru (4) reprezentuje periodické funkce proměnné x s periodou 2π .

Mají-li daná data periodický charakter s jinou periodou než 2π , je třeba uvažovat jiné ekvidistantní body interpolace, které jsou určeny následujícím předpisem. Budeme-li mít periodu $p \neq 2\pi$ na intervalu $\langle a, a+p \rangle$, použijeme lineární transformaci $t = a + \frac{px}{2\pi}$, která zobrazuje $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ prostě na $t \in \langle a, a+p \rangle$ a ekvidistantní body interpolace $x_i = \frac{2\pi i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ na body interpolace $t_i = a + \frac{px_i}{2\pi}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, které jsou opět ekvidistantní.

Příklad 3.2. Určete ekvidistantní body $x_k = \frac{2\pi k}{n}$ pro $n = 4$ a $k = 0, 1, 2, 3$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Je zřejmé, že hledané body jsou $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}\pi$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3}{2}\pi$. ★

Příklad 3.3. Nechť jsou dány body $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, $n = 4$, $k = 0, 1, 2, 3$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a dále perioda $p = \frac{\pi}{2}$ na intervalu $\langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$. Pomocí lineární transformace

určete body interpolace t_k v intervalu $\langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$.

Tedy pro $k = 0, 1, 2, 3$ je

$$t_k = \pi + \frac{px_k}{2\pi} = \pi + \frac{\frac{\pi}{2}x_k}{2\pi} = \pi + \frac{x_k}{4}.$$

Hledané ekvidistantní body tedy jsou $t_0 = \pi + \frac{0}{4} = \pi$, $t_1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$,
 $t_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$, $t_3 = \pi + \frac{\frac{3}{2}\pi}{4} = \frac{11}{8}\pi$. ★

Aniž bychom o trigonometrické interpolaci něco více věděli, můžeme trigonometrický interpolační polynom najít metodou neurčitých koeficientů, podobně jako v příkladě 3.1., což si nyní ukážeme.

Příklad 3.4. Pro zadaná data

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	1
2	π	-1
3	$\frac{3}{2}\pi$	0

najděte trigonometrický interpolační polynom $T_n(x)$.

Nejprve ověříme, že pro body interpolace platí rovnost $x_i = \frac{2\pi i}{n}$ pro $i = 0, 1, 2, 3$.
 Skutečně $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}\pi$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3}{2}\pi$, tedy rovnost je splněna.

Protože n je sudé ($n = 4 \Rightarrow m = 2$) použijeme vzorec

$$T_4(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \frac{A_2}{2} \cos 2x.$$

Dosadíme do podmínky interpolace $T_n(x_k) = f_k$ a dostáváme

$$\begin{aligned} T_4(0) &= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos 0 + B_1 \sin 0 + \frac{A_2}{2} \cos (2 \cdot 0) = 0 \\ T_4\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \frac{\pi}{2} + B_1 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{A_2}{2} \cos \left(2 \frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ T_4(\pi) &= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \pi + B_1 \sin \pi + \frac{A_2}{2} \cos 2\pi = -1 \\ T_4\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \left(\frac{3}{2}\pi\right) + B_1 \sin \left(\frac{3}{2}\pi\right) + \frac{A_2}{2} \cos \left(2 \frac{3}{2}\pi\right) = 0. \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{A_0}{2} + A_1 + \frac{A_2}{2} = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{A_0}{2} - \frac{A_2}{2}$$

$$\frac{A_0}{2} + B_1 - \frac{A_2}{2} = 1$$

$$\frac{A_0}{2} - A_1 + \frac{A_2}{2} = -1$$

$$\frac{A_0}{2} - B_1 - \frac{A_2}{2} = 0.$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{A_0}{2} + B_1 - \frac{A_2}{2} = 1 \Rightarrow B_1 = -\frac{A_0}{2} + \frac{A_2}{2} + 1$$

$$\frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{2} + \frac{A_2}{2} + \frac{A_2}{2} = -1$$

$$\frac{A_0}{2} - B_1 - \frac{A_2}{2} = 0.$$

Odtud

$$A_0 + A_2 = -1$$

$$\frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{2} - \frac{A_2}{2} - \frac{A_2}{2} = A_0 - A_2 = 1.$$

Potom

$$2A_0 = 0 \Rightarrow A_0 = 0, \Rightarrow A_2 = -1.$$

Tyto hodnoty dosadíme do A_1 a B_1

$$A_1 = \frac{1}{2}, B_1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

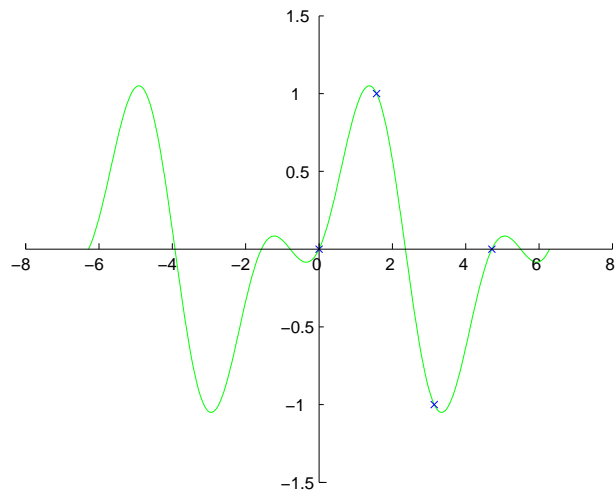
Tedy hledaný trigonometrický interpolační polynom je tvaru

$$T_4(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

a je vykreslen na obrázku 2 včetně bodů interpolace. ★

Pro výpočet koeficientů $A_0, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ trigonometrického interpolačního polynomu metodou neurčitých koeficientů jsem vytvořila m-file v Matlabu s názvem metodaNK. Můžeme ho použít pro funkce s libovolnou periodou. Na vstupu zadáme pouze krajní body intervalu periodicity a funkční hodnoty v bodech interpolace, přičemž počet bodů interpolace je dán délkou vektoru funkčních hodnot.

```
%vstup:  a...levý krajní bod intervalu periodicity  
%        ap...pravý krajní bod intervalu periodicity
```



Obr.2

```

%      fi...sloupcový vektor funkčních hodnot v bodech
           interpolace
%výstup: v...vektor koeficientů trigonometrického interpolačního
           polynomu
%      vv...trigonometrický interpolační polynom

function[v,vv]=metodaNK(a,ap,fi)
n=length(fi);

if (a==ap)
    disp('stejné krajní body intervalu periodicity')
    v=['nelze vypočítat'];
    vv=['nelze vypočítat'];
    return;
end

[r,s]=size(fi);

```

```

if (s~=1)
    fi=(fi).';
end

%rozhodnutí o paritě
if (mod(n,2)==0)
    mt=1;
    m=n/2;
else
    mt=0;
    m=(n-1)/2;
end

%výpočet
for x=1:n
    dd(x,1)=0.5;
    yy=2;
    for y=1:(m-mt)
        dd(x,yy)=cos(a+((ap-a)*(x-1)/n));
        yy=yy+1;
        dd(x,yy)=sin(a+((ap-a)*(x-1)/n));
        yy=yy+1;
    end
    if (mt==1)
        dd(x,yy)=0.5.*cos(m*(a+((ap-a)*(x-1)/n)));
    end
end
v=inv(dd)*fi;

for i=1:n

```

```

        if(abs(v(i))<10^-10)
            v(i)=0;
        end
    end
end

v(1)=v(1) ./2;
if (mod(n,2)==0)
    v(n)=v(n) ./2;
end
v;

%výpis
if (v(1)==0)
    vv=' 0';
else
    vv=[num2str(v(1))];
end
if (n>1)
    y=2;
    for x=1:(m-mt)
        if (v(y)~=0)
            vv=[vv,' + ',num2str(v(y)),'cos(x)'];
        end
        y=y+1;
        if (v(y)~=0)
            vv=[vv,' + ',num2str(v(y)),'sin(x)'];
        end
    end
end
if (v(y)~=0 && mt==1 && (m-mt)>0)
    y=y+1;

```

```

        vv=[vv,' + ',num2str(v(y)),'cos(',num2str(m),'x)'];
    end
end
vv=['T(x)=',vv];
vv;

%vykreslení grafu
x=[a:pi/100:ap];
y=0;
for k=1:n
    y=v(1);
    k=2;
    for s=1:(m-mt)
        y=y+(v(k)*cos((k/2)*x));
        k=k+1;
        y=y+(v(k)*sin((k-1)/2*x));
        k=k+1;
    end
    if (mt==1)
        y=y+(v(k)*cos(m*x));
    end
end
y;
plot(x,y,'g')
hold on
xi=zeros(1,n);
for l=1:n
    xi(l)=a+((ap-a)*(l-1)/n);
    l=l+1;
end

```



```
xi;  
fi;  
plot(xi,fi,'x')  
hold off
```

Pomocí tohoto m-filu můžeme spočítat příklad 3.4., když do příkazového okna Matlabu zadáme požadované vstupy.

```
>> a=0;  
>> ap=2*pi;  
>> fi=[0;1;-1;0];  
>> [v,vv]=metodaNK(a,ap,fi)
```

Po stisknutí Enteru pak dostaneme

```
v =  
      0  
 0.5000  
 0.5000  
-0.5000
```

```
vv =  
T(x)= 0 + 0.5cos(x) + 0.5sin(x) + -0.5cos(2x)
```

a dostali jsme stejný trigonometrický interpolační polynom jako v příkladě 3.4., viz obr 2.

V posledním členu výpisu trigonometrického polynomu $T_n(x)$ se nám objevují znaménka + a - vedle sebe, což není korektní zápis. Tento výpis je uveden pouze pro lepší představu výsledného polynomu.

Nyní se podíváme na převedení trigonometrického polynomu $T_n(x)$ tvaru (4) na fázový polynom tvaru (3). Naopak tento přepis obecně, dosazením za funkce

$\sin kx$ a $\cos kx$, nelze udělat. Použijeme De Moivreovy formule

$$e^{kix} = \cos kx + i \sin kx,$$

kde i označuje imaginární jednotku, stejně jako v ostatních vzorcích.

Budeme-li uvažovat interval $\langle 0, 2\pi \rangle$, můžeme trigonometrický interpolační polynom $T_n(x)$ převést pomocí uvedených De Moivreových formulí na fázový polynom $p(x)$

$$p(x) = a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_{n-1} e^{(n-1)ix} \quad (5)$$

s koeficienty $a_j, j = 0, 1, \dots, n-1$, takovými, že

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Odtud plyne, že trigonometrická interpolační úloha (tj. nalezení fázového polynomu $p(x)$) a nalezení trigonometrického polynomu $T_n(x)$ interpolujícího daná data jsou ekvivalentní. Trigonometrický polynom a fázový polynom tedy nabývají stejných hodnot ve všech bodech $x_k = \frac{2\pi k}{n}$ z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, tj. platí

$$T_n(x_k) = p(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dále je zřejmé, že platí

$$e^{-hix_k} = e^{\frac{-2\pi i h k}{n}} = e^{\frac{2\pi i (n-h)k}{n}} = e^{(n-h)ix_k}.$$

První rovnost dostaneme dosazením za body $x_k = \frac{2\pi k}{n}$. Druhou rovnost můžeme napsat, protože hodnota funkce $\sin x$ i $\cos x$ v bodě $\frac{-2\pi h k}{n}$ je stejná jako v bodě $\frac{2\pi n k - 2\pi h k}{n}$ a následně vytkneme $2\pi i k$. Poslední rovnost dostaneme, když zpět dosadíme $\frac{2\pi k}{n} = x_k$. Můžeme tedy psát

$$\cos hx_k = \frac{e^{hix_k} + e^{(n-h)ix_k}}{2}, \quad \sin hx_k = \frac{e^{hix_k} - e^{(n-h)ix_k}}{2i}. \quad (6)$$

Dosazením těchto vztahů do tvaru trigonometrického polynomu (4a) dostáváme

$$T_n(x_k) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^m (A_h \cos hx_k + B_h \sin hx_k) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^m \left(A_h \frac{e^{hix_k} + e^{(n-h)ix_k}}{2} + B_h \frac{e^{hix_k} - e^{(n-h)ix_k}}{2i} \right).$$

Upravíme závorku na jeden zlomek

$$T_n(x_k) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^m \frac{iA_h(e^{hix_k} + e^{(n-h)ix_k}) + B_h(e^{hix_k} - e^{(n-h)ix_k})}{2i}.$$

Vytknutím jednotlivých mocnin výrazu e^{ix_k} lze dále upravit na tvar

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^m \frac{e^{hix_k}(iA_h + B_h) + e^{(n-h)ix_k}(iA_h - B_h)}{2i} \frac{i}{i} = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^m \frac{e^{hix_k}(A_h - iB_h) + e^{(n-h)ix_k}(A_h + iB_h)}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Analogicky dosadíme vztahy (6) do tvaru trigonometrického polynomu (4b)

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{m-1} (A_h \cos hx_k + B_h \sin hx_k) + \frac{A_m}{2} \cos mx_k = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{m-1} \left(A_h \frac{e^{hix_k} + e^{(n-h)ix_k}}{2} + B_h \frac{e^{hix_k} - e^{(n-h)ix_k}}{2i} \right) + \frac{A_m}{2} \frac{e^{mix_k} + e^{(2m-m)ix_k}}{2}. \end{aligned}$$

Upravíme závorku na jeden zlomek a do posledního sčítance dosadíme $n = 2m$

$$T_n(x_k) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{m-1} \frac{iA_h(e^{hix_k} + e^{(n-h)ix_k}) + B_h(e^{hix_k} - e^{(n-h)ix_k})}{2i} + \frac{A_m}{2} \frac{e^{mix_k} + e^{(2m-m)ix_k}}{2}.$$

Vytknutím jednotlivých mocnin výrazu e^{ix_k} lze dále upravit na tvar

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{m-1} \frac{e^{hix_k}(iA_h + B_h) + e^{(n-h)ix_k}(iA_h - B_h)}{2i} \frac{i}{i} + \frac{A_m}{2} \frac{2e^{mix_k}}{2} = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{m-1} \frac{e^{hix_k}(A_h - iB_h) + e^{(n-h)ix_k}(A_h + iB_h)}{2} + \frac{A_m}{2} e^{mix_k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Přitom víme, že

$$p(x_k) = a_0 + a_1 e^{ix_k} + \dots + a_{n-1} e^{(n-1)ix_k}.$$

Tedy porovnáním koeficientů A_h, B_h ve vztahu (7), respektive (8), u jednotlivých funkcí $1, e^{ix_k}, \dots, e^{(n-1)ix_k}$ s koeficienty $a_h, h = 0, \dots, n-1$ dostáváme

a) jestliže je $n \in \mathbb{N}$ liché, potom $n = 2m + 1$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$ a platí

$$a_0 = \frac{A_0}{2}, \quad a_h = \frac{1}{2}(A_h - iB_h), \quad a_{n-h} = \frac{1}{2}(A_h + iB_h), \quad h = 1, \dots, m;$$

a odtud tedy plyne

$$A_0 = 2a_0, \quad A_h = a_h + a_{n-h}, \quad B_h = i(a_h - a_{n-h}), \quad h = 1, \dots, m, \quad (9)$$

b) jestliže je $n \in \mathbb{N}$ sudé, potom $n = 2m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$ a platí

$$a_0 = \frac{A_0}{2}, \quad a_m = \frac{A_m}{2},$$

$$a_h = \frac{1}{2}(A_h - iB_h), \quad a_{n-h} = \frac{1}{2}(A_h + iB_h), \quad h = 1, \dots, m-1;$$

a odtud tedy plyne

$$A_0 = 2a_0, \quad A_m = 2a_m,$$

$$A_h = a_h + a_{n-h}, \quad B_h = i(a_h - a_{n-h}), \quad h = 1, \dots, m-1. \quad (10)$$

Tedy pomocí vztahů (9) a (10) můžeme trigonometrický polynom $T_n(x)$ tvaru (4) převést na fázový polynom $p(x)$ tvaru (3). Pomocí těchto vztahů lze převod udělat i naopak.

Fázové polynomy $p(x)$ tvaru (5) jsou strukturálně jednodušší, tj. mají jednodušší zápis než trigonometrické polynomy $T_n(x)$ tvaru (4). Když si zavedeme označení

$$\omega := e^{ix}, \quad \omega_k := e^{ix_k},$$

jehož dosazením do fázového polynomu $p(x) = a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_{n-1} e^{(n-1)ix}$ dostaneme následující polynom

$$P(\omega) := a_0 + a_1 \omega + \dots + a_{n-1} \omega^{n-1},$$

přičemž $\omega_j \neq \omega_k$ pro $j \neq k$, $0 \leq j, k \leq n-1$. Dostáváme standardní polynomiální interpolační problém, tj. najít polynom P stupně nejvýše $n-1$ tak, že

$$P(\omega_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Z jednoznačnosti polynomiální interpolace, viz věta 2.1., ihned dostáváme následující tvrzení.

Věta 3.1. Pro dané body (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n-1$, kde $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, existuje jediný polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_{n-1} e^{(n-1)ix}$$

takový, že $p(x_k) = f_k$ pro $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Důkaz: viz [5] strana 75.

Poznámka 3.1. Abychom koeficienty a_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, z fázového polynomu $p(x)$ mohli vypočítat i jiným způsobem než metodou neurčitých koeficientů, zavedeme si další vztahy. Všimněme si tedy, že pro $0 \leq j, h \leq n-1$ je

$$\omega_h^j = \omega_j^h, \quad \omega_h^{-j} = \overline{\omega_h^j}.$$

První rovnost můžeme rozepsat takto

$$\omega_h^j = (e^{ix_h})^j = e^{ij\frac{2\pi h}{n}} = e^{ih\frac{2\pi j}{n}} = (e^{ix_j})^h = \omega_j^h$$

Důležitější ale je, že pro $0 \leq j, h \leq n-1$ dostáváme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \begin{cases} n & \text{pro } j = h, \\ 0 & \text{pro } j \neq h. \end{cases} \quad (11)$$

Ukážeme, že tyto rovnosti platí. Víme, že $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^{j-h} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_{j-h}^k$. Dále

víme, že ω_{j-h} je kořenem polynomu $\omega^n - 1$, neboť $(\omega_{j-h})^n = \omega_n^{j-h} = e^{ix_n(j-h)} = e^{\frac{i2\pi n(j-h)}{n}} = e^{i2\pi(j-h)} = 1$ pro všechna $0 \leq j, h \leq n-1$, tedy $\omega_{j-h}^n - 1 = 0$.

Přitom lze psát

$$\omega^n - 1 = (\omega - 1)(\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1).$$

Odtud plyne, že buď $\omega_{j-h} = 1$, což nastane právě tehdy, když $j = h$, a potom je suma ve vzorci (11) rovna n , nebo $\omega_{j-h}^{n-1} + \omega_{j-h}^{n-2} + \dots + \omega_{j-h} + 1 = 0$, což nastane pro $j \neq h$ a suma ve vzorci (11) je rovna 0.

Nyní zavedeme n vektorů, které označíme

$$w^{(h)} = (1, \omega_1^h, \dots, \omega_{n-1}^h)^T, \quad h = 0, \dots, n-1,$$

a vidíme, že sumy ve vzorci (11) jsou skalární součiny vektorů $w^{(j)}$ a $w^{(h)}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = (w^{(j)}, w^{(h)}).$$

Tedy vektory $w^{(h)}, h = 0, 1, \dots, n-1$, tvoří ortogonální bázi prostoru \mathbb{C}^n , protože ze vztahu (11) vyplývá, že skalární součiny $(w^{(j)}, w^{(h)})$ jsou rovny 0 pro $j \neq h$, a tedy podle definice 1.4. jsou ortogonální. Z ortogonality vektorů $w^{(h)}, h = 0, 1, \dots, n-1$, vyplývá následující věta.

Věta 3.2. Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{jix}$ splňuje podmínky interpolace

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

pro $x_k = \frac{2\pi k}{n}$ právě tehdy, když

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \omega_k^{-j} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{\frac{-2\pi i j k}{n}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Důkaz: viz [5] strana 76.

Příklad 3.5. Pro stejná data jako v příkladě 3.4. najděte fázový polynom $p(x)$ interpolující daná data. Data byla dána následující tabulkou

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	1
2	π	-1
3	$\frac{3}{2}\pi$	0

Jak jsme již v příkladě 3.4. ověřili, pro body interpolace platí rovnost $x_i = \frac{2\pi i}{n}$ pro $i = 0, 1, 2, 3$ a podle věty 3.1. existuje jediný fázový polynom, který daná

data interpoluje.

Podle věty 3.2. pro koeficienty fázového polynomu $p(x) = a_0 + a_1 e^{ix} + a_2 e^{i2x} + a_3 e^{i3x}$

interpolujícího daná data platí $a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-\frac{2\pi ijk}{n}}$. Tedy

$$a_0 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f_k e^{-\frac{2\pi i0k}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f_k = \frac{1}{4}(0 + 1 - 1 + 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f_k e^{-\frac{2\pi ik}{4}} = \frac{1}{4}(0 + e^{-\frac{\pi i}{2}} - e^{-\pi i} + 0) = \frac{1}{4}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) - \\ &\quad - \cos(-\pi) - i \sin(-\pi)) = \frac{1}{4}(0 - i + 1 - 0) = \frac{1}{4}(1 - i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f_k e^{-k\pi i} = \frac{1}{4}(0 + e^{-i\pi} - e^{-2\pi i} + 0) = \frac{1}{4}(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi) - \\ &\quad - \cos(-2\pi) - i \sin(-2\pi)) = \frac{1}{4}(-1 + 0 - 1 - 0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f_k e^{-\frac{3ik\pi}{2}} = \frac{1}{4}(0 + e^{-\frac{3i\pi}{2}} - e^{-3i\pi} + 0) = \frac{1}{4}(\cos(-\frac{3}{2}\pi) + i \sin(-\frac{3}{2}\pi) - \\ &\quad - \cos(-3\pi) - i \sin(-3\pi)) = \frac{1}{4}(0 + i + 1 + 0) = \frac{1}{4}(1 + i). \end{aligned}$$

Hledaný fázový polynom je tvaru

$$p(x) = \frac{1}{4}(1 - i)e^{ix} - \frac{1}{2}e^{i2x} + \frac{1}{4}(1 + i)e^{i3x},$$

je tedy stejný jako při výpočtu metodou neurčitých koeficientů. Nyní jej pomocí vztahů (10) převedeme na trigonometrický polynom $T_4(x)$

$$A_0 = 2a_0 = 2 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_0}{2} = 0,$$

$$A_1 = a_1 + a_{4-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2},$$

$$B_1 = i(a_1 - a_{4-1}) = i(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i) = -\frac{1}{2}i^2 = \frac{1}{2},$$

$$A_2 = 2a_2 = 2(-\frac{1}{2}) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_2}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{a potom } T_4(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Vidíme, že nalezený trigonometrický polynom je stejný jako v příkladě 3.4., viz obr. 2. ★

Pro výpočet koeficientů a_j , $j = 0, \dots, n - 1$ fázového polynomu $p(x)$ užitím věty 3.2. jsem vytvořila m-file v Matlabu s názvem metodaV32, který lze použít pro funkce s libovolnou periodou. Na vstupu se zadají krajní body intervalu periodicity a funkční hodnoty v bodech interpolace, přičemž počet bodů interpolace je dán délkou vektoru funkčních hodnot.

```
%vstup:  a...levý krajní bod intervalu periodicity
%        ap...pravý krajní bod intervalu periodicity
%        fi...vektor funkčních hodnot v bodech interpolace
%výstup: v...vektor koeficientů fázového polynomu
%        vv...fázový polynom
```

```
function[v,vv]=metodaV32(a,ap,fi)
```

```
n=length(fi);
```

```
if (a==ap)
```

```
    disp('stejné krajní body intervalu periodicity')
```

```
    v=['nelze vypočítat'];
```

```
    vv=['nelze vypočítat'];
```

```
    return;
```

```
end
```

```
%rozhodnutí o paritě
```

```
if (mod(n,2)==0)
```

```
    mt=1;
```

```
    m=n/2;
```

```
else
```

```
    mt=0;
```

```
    m=(n-1)/2;
```

```
end
```



```

%výpočet
for x=1:n
    v(x)=0;
    for y=1:n
        v(x)=v(x)+fi(y)*exp(-i*(x-1)*(a+((ap-a)*((y-1)/n))));
    end
    v(x)=1/n*v(x);
end

for j=1:n
    if(abs(v(j))<10^-10)
        v(j)=0;
    end
end
v;

%výpis
if (v(1)==0)
    vv=' 0';
else
    vv=[num2str(v(1))];
end
y=2;
for x=2:n
    vv=[vv,' + (' ,num2str(v(y)),') exp(',' ,num2str(x-1), 'ix)'];
    y=y+1;
end

vv=['p(x)=',vv];

```

```

vv;

%vykreslení grafu
x=[a:pi/100:ap];
y=0;
for k=1:n
    y=y+v(k)*exp(i*(k-1)*x);
    k=k+1;
end
plot(x,y,'g')
hold on
xi=zeros(1,n);
for l=1:n
    xi(l)=a+((ap-a)*(l-1)/n);
    l=l+1;
end
xi;
fi;
plot(xi,fi,'x')
hold off

```

Pomocí tohoto m-filu můžeme spočítat příklad 3.5., když do příkazového okna Matlabu zadáme požadované vstupy.

```

>> a=0;
>> ap=2*pi;
>> fi=[0,1,-1,0];
>> [v,vv]=metodaV32(a,ap,fi)

```

Po stisknutí Enteru pak dostaneme

v =

$$0 \quad 0.2500 - 0.2500i \quad -0.5000 - 0.0000i \quad 0.2500 + 0.2500i$$

vv =

$$p(x) = 0 + (0.25 - 0.25i) \exp(1ix) + (-0.5 - 9.1849e-017i) \exp(2ix) + \\ + (0.25 + 0.25i) \exp(3ix)$$

a opravdu jsme dostali stejný výsledek jako v příkladě 3.5.

Podívejme se nyní opět na trigonometrický polynom $T_n(x)$ tvaru (4). Užitím vět 3.1. a 3.2. dostaneme následující tvrzení.

Věta 3.3. *Trigonometrické polynomy tvaru*

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^m (A_h \cos hx + B_h \sin hx), \quad \text{kde } n = 2m + 1,$$

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{m-1} (A_h \cos hx + B_h \sin hx) + \frac{A_m}{2} \cos mx, \quad \text{kde } n = 2m,$$

splňují interpolační podmínky

$$T_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

kde $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, právě tehdy, když koeficienty $A_0, \dots, A_m, B_1, \dots, B_{m-1}$, případně B_m , trigonometrického polynomu $T_n(x)$ jsou dány vztahy

$$A_h = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos hx_k = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos \frac{2\pi hk}{n},$$

$$B_h = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin hx_k = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin \frac{2\pi hk}{n}.$$

Důkaz: Stačí ověřit vyjádření A_h a B_h , ostatní je zřejmé. Podle vztahů (9), (10) platí

$$A_h = a_h + a_{n-h} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k (e^{-hix_k} + e^{-(n-h)ix_k}),$$

$$B_h = i(a_h - a_{n-h}) = \frac{i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k (e^{-hix_k} - e^{-(n-h)ix_k})$$

a vztahy (6) nám dávají požadované rovnosti

$$A_h = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k (2 \cos(-hx_k)) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos hx_k,$$

$$B_h = \frac{i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k (2i \sin(-hx_k)) = \frac{-2i^2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin hx_k = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin hx_k.$$

Jelikož funkční hodnoty f_k uvažujeme pouze reálné, jsou reálné i koeficienty A_h, B_h , přestože se u koeficientů B_h , ve vztazích (9), (10), vyskytuje imaginární jednotka, protože ta při dalších úpravách vypadne. \square

Příklad 3.6. Opět pro stejná data jako v příkladě 3.4. najděte trigonometrický interpolační polynom $T_n(x)$, tentokrát s využitím věty 3.3. Data byla dána následující tabulkou

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	1
2	π	-1
3	$\frac{3}{2}\pi$	0

Protože n je sudé ($n = 4$), je $m = 2$ ($n = 2m$) a použijeme vzorec

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{m-1} (A_h \cos hx + B_h \sin hx) + \frac{A_m}{2} \cos mx.$$

Tedy $T_4(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \frac{A_2}{2} \cos 2x$. Koeficienty tohoto trigonometrického polynomu spočítáme užitím vzorců

$$A_h = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos \frac{2\pi hk}{n}, \quad B_h = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sin \frac{2\pi hk}{n}.$$

Potom

$$A_0 = \frac{2}{4} \sum_{k=0}^3 f_k \cos 0 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 f_k = \frac{1}{2}(0 + 1 - 1 + 0) = 0 \Rightarrow \frac{A_0}{2} = 0,$$

$$A_1 = \frac{2}{4} \sum_{k=0}^3 f_k \cos \frac{2\pi k}{4} = \frac{1}{2}(0 + \cos \frac{1}{2}\pi - \cos \pi + 0) = \frac{1}{2}(0 - (-1)) = \frac{1}{2},$$

$$A_2 = \frac{2}{4} \sum_{k=0}^3 f_k \cos \frac{2\pi 2k}{4} = \frac{1}{2}(0 + \cos \pi - \cos 2\pi + 0) = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1 \\ \Rightarrow \frac{A_2}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$B_1 = \frac{2}{4} \sum_{k=0}^3 f_k \sin \frac{2\pi k}{4} = \frac{1}{2}(0 + \sin \frac{1}{2}\pi - \sin \pi + 0) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Tedy hledaný trigonometrický interpolační polynom je tvaru

$$T_4(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

a vidíme, že je stejný jako při výpočtu metodou neurčitých koeficientů, viz obr 2.

★

Pro výpočet koeficientů $A_0, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ trigonometrického interpolačního polynomu užitím věty 3.3. jsem vytvořila m-file v Matlabu s názvem metodaV33, který lze použít pro funkce s libovolnou periodou. Na vstupu zadáme krajní body intervalu periodicity a funkční hodnoty v bodech interpolace, přičemž počet bodů interpolace je dán délkou vektoru funkčních hodnot.

```
%vstup:  a...levý krajní bod intervalu periodicity
%        ap...pravý krajní bod intervalu periodicity
%        fi...vektor funkčních hodnot v bodech interpolace
%výstup:  v...vektor koeficientů trigonometrického interpolačního
          polynomu
%        vv...trigonometrický interpolační polynom

function[v,vv]=metodaV33(a,ap,fi)
n=length(fi);
```

```

if (a==ap)
    disp('stejné krajní body intervalu periodicity')
    v=['nelze vypočítat'];
    vv=['nelze vypočítat'];
    return;
end

%rozhodnutí o paritě
if (mod(n,2)==0)
    mt=1;
    m=n/2;
else
    mt=0;
    m=(n-1)/2;
end

%výpočet
for x=1:n
    v(x)=0;
    for y=1:n
        if (x==1)
            v(1)=v(1)+fi(y);
        else
            if (mod(x,2)==0)
                v(x)=v(x)+fi(y)*cos((x/(2*n))*(a+(ap-a)*(y-1)));
            else
                v(x)=v(x)+fi(y)*sin(((x-1)/(2*n))*(a+(ap-a)*(y-1)));
            end
        end
    end
end

```

```

        end
        v(x)=2/n.*v(x);
    end

    for i=1:n
        if(abs(v(i))<10^-10)
            v(i)=0;
        end
    end

    end

    v(1)=v(1)./2;
    if (mod(n,2)==0)
        v(n) = v(n)./2;
    end

    end

    v;

    %v ýpis
    if (v(1)==0)
        vv=' 0';
    else
        vv=[num2str(v(1))];
    end

    if (n>1)
        y=2;
        for x=1:(m-mt)
            if (v(y)~=0)
                vv=[vv,' + ',num2str(v(y)),' cos(x)'];
            end
            y=y+1;
            if (v(y)~=0)

```

```

        vv=[vv,' + ',num2str(v(y)),'sin(x)'];
    end
end
if (v(y)~=0 && mt==1 && (m-mt)>0)
    y=y+1;
    vv=[vv,' + ',num2str(v(y)),'cos(',num2str(m),'x)'];
end
end
vv=['T(x)=',vv];
vv;

%vykreslení grafu
x=[a:pi/100:ap];
y=0;
for k=1:n
    y=v(1);
    k=2;
    for s=1:(m-mt)
        y=y+(v(k)*cos((k/2)*x));
        k=k+1;
        y=y+(v(k)*sin((k-1)/2*x));
        k=k+1;
    end
    if (mt==1)
        y=y+(v(k)*cos(m*x));
    end
end
end
y;
plot(x,y,'g')
hold on

```



```

xi=zeros(1,n);
for l=1:n
    xi(l)=a+((ap-a)*(l-1)/n);
    l=l+1;
end
xi;
fi;
plot(xi,fi,'x')
hold off

```

Pomocí tohoto m-flu můžeme spočítat příklad 3.6., když do příkazového okna Matlabu zadáme požadované vstupy.

```

>> a=0;
>> ap=2*pi;
>> fi=[0,1,-1,0];
>> [v,vv]=metodaV33(a,ap,fi)

```

Po stisknutí Enteru pak dostaneme

```

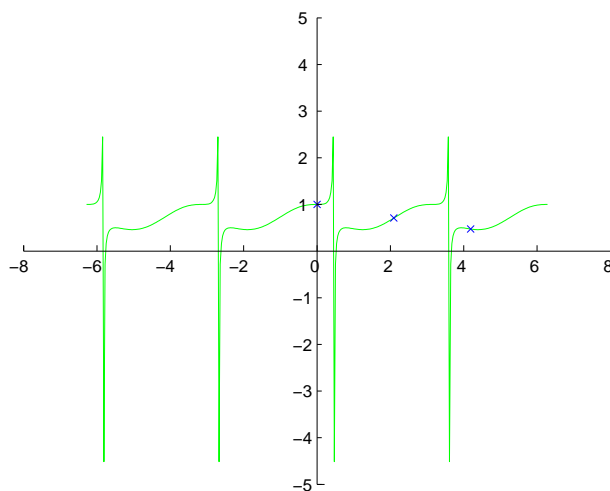
v =
    0    0.5000    0.5000   -0.5000

vv =
T(x)= 0 + 0.5cos(x) + 0.5sin(x) + -0.5cos(2x)

```

Ve výpisu trigonometrického polynomu $T_n(x)$ se opět objevuje nekorektní zápis dvou znamének + a - vedle sebe. Tento výpis je uveden pouze pro lepší představu výsledného trigonometrického polynomu.

Porovnáme-li výpočet trigonometrického interpolačního polynomu metodou neurčitých koeficientů s použitím vzorců uvedených ve větě 3.3., vidíme, že počítání pomocí vzorců není tak dlouhé jako metodou neurčitých koeficientů, a navíc



Obr.3

nemusíme řešit soustavu rovnic, ale počítáme vždy pouze jeden koeficient. A jak lze vidět v příkladech 3.3. a 3.5., hledané trigonometrické interpolační polynomy jsou opravdu stejné. Navíc v m-filech pro metodu neurčitých koeficientů se používá inverzní matice soustavy lineárních rovnic, jejíž výpočet může být při větším počtu rovnic, tj. počtu bodů interpolace, velice zdlouhavý a je-li úloha špatně podmíněna, nelze inverzní matice soustavy ani najít.

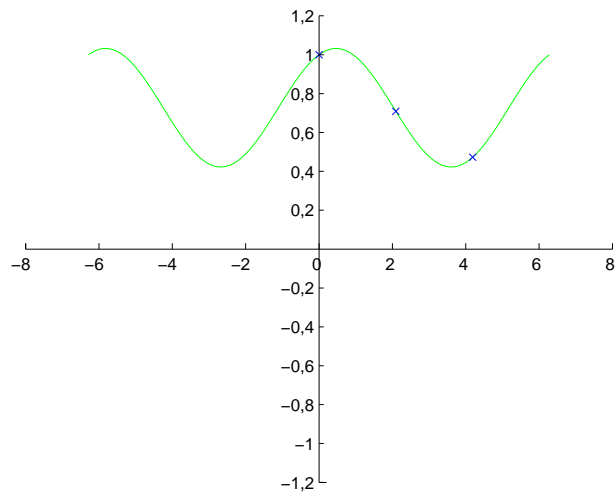
Nyní ukážeme příklad pro periodickou funkci danou „složitým“ explicitním vyjádřením, kdy hledáme jednodušší funkci procházející danými body a splňující podmínky interpolace.

Příklad 3.7. Pro funkci $f(x) = \frac{\sin x + (\cos x)^2 \sin x - \cos x}{2 \sin x - \cos x}$, zobrazenou na obrázku 3, nalezněte trigonometrický interpolační polynom $T_3(x)$.

Je zřejmé, že funkce $f(x)$ je 2π periodická, viz obr. 3. Zvolíme si body x_i tak, aby splňovaly rovnost $x_i = \frac{2\pi i}{n}$. Tedy $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{3}\pi$, $x_2 = \frac{4}{3}\pi$.

Dále vypočítáme funkční hodnoty f_i v těchto bodech

$$f_0 = \frac{0+0-1}{0-1} = 1, \quad f_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}}{\sqrt{3} + \frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{3}+4}{8\sqrt{3}+4}, \quad f_2 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}}{-\sqrt{3} + \frac{1}{2}} = \frac{-5\sqrt{3}+4}{-8\sqrt{3}+4}.$$



Obr.4

Trigonometrický interpolační polynom nalezneme použitím m-filu z příkladu 3.5., budeme tedy k výpočtu používat vzorce z věty 3.3. Do příkazového okna Matlabu zadáme vstupy

```
>> a=0;
>> ap=2*pi;
>> fi=[1,((5*sqrt(3)+4)/(8*sqrt(3)+4)),((-5*sqrt(3)+4)/(-8*sqrt(3)+4))];
>> [v,vv]=metodaV33(a,ap,fi)
```

Stisknutím Enteru pak dostaneme

```
v =
    0.7273    0.2727    0.1364
```

```
vv =
T(x)=0.72727 + 0.27273cos(x) + 0.13636sin(x)
```

Hledaný trigonometrický interpolační polynom je tedy tvaru

$$T_3(x) = 0,7273 + 0,2727 \cos x + 0,1364 \sin x$$

a je vykreslen na obrázku 4. ★

Fázový polynom je vlastně lineární kombinací funkcí $1, e^{ix}, e^{2ix}, \dots, e^{nix}$, která tvoří systém lineárně nezávislých funkcí. Podobně trigonometrický polynom $T_n(x)$ je lineární kombinací funkcí $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos mx, \sin mx$, které tvoří dokonce ortogonální systém funkcí, jak je ukázáno v následující větě.

Věta 3.4. *Funkce $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos mx, \sin mx$, $m \in \mathbb{N}$, tvoří na ekvidistantní síti n bodů, $n = 2m + 1$, $x_k = \frac{2\pi k}{2m+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2m$, ortogonální systém funkcí. Tedy pro $j, k = 0, 1, \dots, m$ platí*

$$(\sin jx, \sin kx) = \frac{2m+1}{2} [h(j-k) - h(j+k)] = \begin{cases} 0 & j \neq k, \\ \frac{2m+1}{2} & j = k \neq 0, \\ 0 & j = k = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$(\cos jx, \cos kx) = \frac{2m+1}{2} [h(j-k) + h(j+k)] = \begin{cases} 0 & j \neq k, \\ \frac{2m+1}{2} & j = k \neq 0, \\ 2m+1 & j = k = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$(\cos jx, \sin kx) = \sum_{i=0}^{2m} \cos jx_i \sin kx_i = 0, \quad \text{pro } j, k = 0, 1, \dots, m, \quad (14)$$

$$\text{kde } h(j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = 0 \text{ mod } 2m+1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz: Tato věta je převzata z [5], kde je uvedena bez důkazu jako cvičení 15 str. 118. Důkaz provedeme ve dvou krocích podle návodu, který je ve cvičení uveden.

a) Nejprve ukážeme, že pro libovolné $j \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{2m} \cos jx_k = (2m+1)h(j), \quad (15)$$

$$\sum_{k=0}^{2m} \sin jx_k = 0. \quad (16)$$

Dokažme nejdříve rovnost (15). Je zřejmé, že pro $j = 0$ tento vztah platí. Nyní zvolme $m \in \mathbb{N}$ libovolné pevné.

Potom pro $j = (2m+1)z$, kde $z \in \mathbb{Z}$, je $h(j) = 1$ a platí

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m} \cos \frac{j2\pi k}{2m+1} &= \sum_{k=0}^{2m} \cos \frac{(2m+1)z2\pi k}{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m} \cos z2\pi k = \sum_{k=0}^{2m} 1 = (2m+1) = \\ &= (2m+1) \cdot 1 = (2m+1)h(j). \end{aligned}$$

Tedy pro j dělitelné $(2m+1)$ je rovnost (15) splněna. Nyní ukážeme platnost vztahu (15) pro j , které není celočíselným násobkem čísla $2m+1$.

V tomto případě je pak $h(j) = 0$. Potom $\sum_{k=0}^{2m} \cos \frac{j2\pi k}{2m+1} = 0$, což platí. Stačí si uvědomit, že úhly $\frac{2\pi jk}{2m+1}$ pro $k = 0, \dots, 2m$ jsou ekvidistantní v intervalu $\langle 0, \frac{2m2\pi j}{2m+1} \rangle$. Hodnoty funkce $\cos x$ v těchto bodech se pak vzájemně odečtou. Suma tedy bude rovna 0.

Nyní totéž provedeme pro druhou rovnost. Pro $j = 0$ vztah platí.

Zvolme $m \in \mathbb{N}$ libovolné pevné.

Potom pro $j = (2m+1)z$, kde $z \in \mathbb{Z}$, je $h(j) = 1$ a platí

$$\sum_{k=0}^{2m} \sin \frac{j2\pi k}{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m} \sin \frac{(2m+1)z2\pi k}{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m} \sin z2\pi k = 0.$$

Tedy pro j dělitelné $(2m+1)$ je rovnost (16) splněna. Nyní ukážeme platnost pro j , které není celočíselným násobkem čísla $2m+1$, a tedy $h(j) = 0$.

Chceme, aby $\sum_{k=0}^{2m} \sin \frac{j2\pi k}{2m+1} = 0$, což platí. Stačí si opět uvědomit, že úhly $\frac{2\pi jk}{2m+1}$ pro $k = 0, \dots, 2m$ jsou ekvidistantní v intervalu $\langle 0, \frac{2m2\pi j}{2m+1} \rangle$. Hodnoty

funkce $\sin x$ v těchto bodech se pak vzájemně odečtou. Suma tedy bude rovna 0.

b) Použijeme část a) k odvození ortogonálních vztahů (12), (13) a (14).

Pro odvození rovnosti (12) použijeme vzorec

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Potom pro $j, k = 0, 1, \dots, m$ je

$$\begin{aligned} (\sin jx, \sin kx) &= \sum_{i=0}^{2m} \sin jx_i \sin kx_i = \\ &= \sum_{i=0}^{2m} \frac{1}{2} [\cos(jx_i - kx_i) - \cos(jx_i + kx_i)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2m} [\cos(x_i(j - k)) - \cos(x_i(j + k))]. \end{aligned}$$

Nyní použijeme část a) a dostaneme

$$\begin{aligned} (\sin jx, \sin kx) &= \frac{1}{2} [(2m + 1)h(j - k) - (2m + 1)h(j + k)] = \\ &= \frac{2m+1}{2} [h(j - k) - h(j + k)]. \end{aligned}$$

Jelikož uvažujeme $j, k = 0, 1, \dots, m$, j ani k nejsou celočíselné násobky čísla $2m + 1$. Dále tedy pro $j \neq k$ je

$$\frac{2m+1}{2} [h(j - k) - h(j + k)] = \frac{2m+1}{2} [0 - 0] = 0.$$

Pro $j = k \neq 0$ je

$$\frac{2m+1}{2} [h(j - k) - h(j + k)] = \frac{2m+1}{2} [h(0) - h(2j)] = \frac{2m+1}{2} [1 - 0] = \frac{2m+1}{2}.$$

Pro $j = k = 0$ je

$$\frac{2m+1}{2} [h(j - k) - h(j + k)] = \frac{2m+1}{2} [h(0) - h(0)] = \frac{2m+1}{2} [1 - 1] = 0,$$

čímž jsme dokázali platnost vztahu (12).

Podobný vzorec $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ použijeme k odvození rovnosti (13). Pro $j, k = 0, 1, \dots, m$ dostáváme

$$(\cos jx, \cos kx) = \sum_{i=0}^{2m} \cos jx_i \cos kx_i =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{2m} \frac{1}{2} [\cos(jx_i - kx_i) + \cos(jx_i + kx_i)] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2m} [\cos(x_i(j - k)) + \cos(x_i(j + k))].
\end{aligned}$$

Nyní opět použijeme část a) a dostaneme

$$\begin{aligned}
(\cos jx, \cos kx) &= \frac{1}{2} [(2m + 1)h(j - k) + (2m + 1)h(j + k)] = \\
&= \frac{2m+1}{2} [h(j - k) + h(j + k)].
\end{aligned}$$

Jelikož uvažujeme $j, k = 0, 1, \dots, m$, j ani k nejsou celočíselné násobky čísla $2m + 1$. Dále tedy pro $j \neq k$ je

$$\frac{2m+1}{2} [h(j - k) + h(j + k)] = \frac{2m+1}{2} [0 + 0] = 0.$$

Pro $j = k \neq 0$ je

$$\frac{2m+1}{2} [h(j - k) + h(j + k)] = \frac{2m+1}{2} [h(0) + h(2j)] = \frac{2m+1}{2} [1 + 0] = \frac{2m+1}{2}.$$

Pro $j = k = 0$ je

$$\frac{2m+1}{2} [h(j - k) + h(j + k)] = \frac{2m+1}{2} [h(0) + h(0)] = \frac{2m+1}{2} [1 + 1] = 2m + 1,$$

čímž jsme dokázali platnost vztahu (13).

Pro rovnost (14) použijeme vzorec $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$.

$$\begin{aligned}
(\cos jx, \sin kx) &= \sum_{i=0}^{2m} \cos jx_i \sin kx_i = \\
&= \sum_{i=0}^{2m} \frac{1}{2} [\sin(jx_i + kx_i) - \sin(jx_i - kx_i)] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2m} [\sin(x_i(j + k)) - \sin(x_i(j - k))]
\end{aligned}$$

a po využití části a) dostaneme

$$(\cos jx, \sin kx) = \frac{1}{2} [0 - 0] = 0 \quad \text{pro všechna } j \text{ a } k.$$

Tím je dokázána platnost vztahu (14).

□

3.2 Trigonometrická interpolace pro libovolné body interpolace

V této podkapitole budeme v úloze interpolace uvažovat libovolných n bodů, $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Potom má trigonometrický polynom tvar

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^m (A_j \cos jx + B_j \sin jx) \quad (17)$$

a hledáme koeficienty A_j , B_j tak, aby byly splněny interpolační podmínky $T_n(x_k) = f_k$ pro $2m + 1$ bodů interpolace z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ takových, že $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} < 2\pi$ a pro funkční hodnoty f_k , $k = 0, 1, \dots, 2m$ v těchto bodech.

Nyní si ukážeme jiný převod, než v předchozí kapitole, trigonometrického polynomu (17) na fázový polynom, což využijeme v důkazu věty, která bude následovat. Pro tento převod použijeme vztahy $\cos jx = \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2}$ a $\sin jx = \frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2i}$ a dostaneme

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^m \frac{(A_j - iB_j)e^{ijx} + (A_j + iB_j)e^{-ijx}}{2} = \sum_{j=-m}^m \alpha_j e^{ijx}, \quad (18)$$

kde $\alpha_0 = \frac{A_0}{2}$, $\alpha_j = \frac{1}{2}(A_j - iB_j)$, $\alpha_{-j} = \frac{1}{2}(A_j + iB_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Trigonometrický polynom tvaru (17) je tedy ekvivalentní s fázovým polynomem tvaru

$$\widetilde{p}(x) = \sum_{j=-m}^m \alpha_j e^{ijx}.$$

Poznámka 3.2. Fázový polynom jsme v předchozí kapitole uvažovali ve tvaru

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{ijx} = a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_{n-1} e^{i(n-1)x}, \text{ kdežto nyní budeme uvažovat}$$

$$\widetilde{p}(x) = \sum_{j=-m}^m \alpha_j e^{ijx} = \alpha_{-m} e^{-imx} + \dots + \alpha_{-1} e^{-ix} + \alpha_0 + \alpha_1 e^{ix} + \dots + \alpha_m e^{imx}, \text{ přičemž}$$

$n = 2m + 1$. Pro fázové polynomy tedy platí $a_0 = \alpha_0$, $a_j = \alpha_j$, $a_{n-j} = \alpha_{-j}$

pro $j = 1, 2, \dots, m$. Tyto konstanty jsou tedy pouze jinak uspořádány v $p(x)$ než v $\widetilde{p(x)}$, ale hodnoty funkcí e^{ijx} u těchto konstant se liší. Nejedná se tedy o totožné polynomy.

Například pro data

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\frac{2}{5}\pi$	1
2	$\frac{4}{5}\pi$	-1
3	$\frac{6}{5}\pi$	1
4	$\frac{8}{5}\pi$	0

máme $n = 5$, ($m = 2$) a fázový polynom $p(x)$ tvaru

$$p(x) = 0.2 + (0.061803 + 0.044903i)e^{ix} + (-0.1618 - 0.49798i)e^{2ix} + (-0.1618 + 0.49798i)e^{3ix} + (0.061803 - 0.044903i)e^{4ix},$$

a potom $\widetilde{p(x)}$ je ve tvaru

$$\overline{p(x)} = (-0.1618 + 0.49798i)e^{-2ix} + (0.061803 - 0.044903i)e^{-ix} + 0.2 + (0.061803 + 0.044903i)e^{ix} + (-0.1618 - 0.49798i)e^{2ix}.$$

Protože trigonometrický polynom tvaru (17) je periodickou funkcí na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a má celkem $2m + 1$ koeficientů $A_0, A_j, B_j, j = 1, \dots, m$, můžeme předpokládat řešitelnost úlohy uvedené v následující větě.

Věta 3.5. *Úloha, kdy k zadaným hodnotám $x_j \in \langle 0, 2\pi \rangle, f_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, 2m$, hledáme $T_n(x)$ tak, aby $T_n(x_j) = f_j, j = 0, 1, \dots, 2m$, má jediné řešení, které můžeme zapsat ve tvaru*

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{2m} t_i(x) f_i,$$

kde

$$t_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{2m} \left(\frac{\sin \frac{x-x_j}{2}}{\sin \frac{x_i-x_j}{2}} \right). \quad (19)$$

Důkaz: Nejprve ukážeme, že pro body $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} < 2\pi$ lze trigonometrický polynom tvaru $T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^m (A_j \cos jx + B_j \sin jx)$ převést

na funkci $t(x) = D \prod_{k=1}^{2m} \sin \frac{x-x_k}{2}$, kde $D \neq 0$ je konstanta.

Ze vztahu (18) víme, že $T_n(x) = \sum_{k=-m}^m \alpha_k e^{ikx}$, kde $\alpha_0 = \frac{A_0}{2}$, $\alpha_k = \frac{1}{2}(A_k - iB_k)$, $\alpha_{-k} = \frac{1}{2}(A_k + iB_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Tedy zavedeme-li substituci $t = e^{ix}$, lze $T_n(x)$ psát ve tvaru

$$T_n(x) = \sum_{k=-m}^m \alpha_k t^k = t^{-m}(\alpha_{-m} + \alpha_{-m+1}t + \dots + \alpha_m t^{2m}) = t^{-m} P_{2m}(t).$$

Polynom $P_{2m}(t)$ má za předpokladu, že $\alpha_{-m}, \alpha_m \neq 0$ podle důsledku 1.1. právě $2m$ nenulových kořenů. Označíme-li tyto kořeny t_k , $k = 1, 2, \dots, 2m$, má $T_n(x)$ také $2m$ kořenů t_k , a to takových, že $t_k = e^{ix_k}$, $k = 1, 2, \dots, 2m$. Potom lze tedy polynom $T_n(x)$ psát ve tvaru součinu kořenových činitelů $T_n(x) = t^{-m} P_{2m}(t) = \alpha_m t^{-m} \prod_{k=1}^{2m} (t - t_k)$. Pak

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \alpha_m e^{-ixm} \prod_{k=1}^{2m} (e^{ix} - e^{ix_k}) = \alpha_m \prod_{k=1}^{2m} e^{-\frac{ix}{2}} (e^{ix} - e^{ix_k}) = \\ &= \alpha_m \prod_{k=1}^{2m} (e^{-\frac{ix}{2}+ix} - e^{-\frac{ix}{2}+ix_k}) e^{-\frac{ix_k}{2}} e^{\frac{ix_k}{2}} = \\ &= \alpha_m \prod_{k=1}^{2m} (e^{\frac{ix}{2}-\frac{ix_k}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}+ix_k-\frac{ix_k}{2}}) e^{\frac{ix_k}{2}} = \\ &= \alpha_m e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2m} x_k} \prod_{k=1}^{2m} \left(e^{\frac{i(x-x_k)}{2}} - e^{-\frac{i(x-x_k)}{2}} \right) = \\ &= D \prod_{k=1}^{2m} \sin \frac{x-x_k}{2} = t(x), \quad \text{kde } D = \alpha_m (2i)^{2m} e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{2m} x_k}. \end{aligned}$$

Trigonometrický polynom můžeme tedy podle předchozího převodu, zvolíme-li $D = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^{2m} \left(\sin \frac{x_i - x_j}{2} \right)}$, převést na $t_i(x)$ tvaru (19), $i = 0, 1, \dots, 2m$. Navíc polynomy $t_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, 2m$ tvoří lagrangeovskou bázi úlohy, tj. platí $t_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \dots, 2m$, což lze jednoduše dosazením do vztahu (19) ověřit. $T_n(x)$ je tedy trigonometrickým polynomem a splňuje podmínky interpolace $T_n(x_j) = f_j$, $j = 0, 1, \dots, 2m$. \square

Příklad 3.8. Pro zadaná data

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	1
2	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{1}{2}$

najděte trigonometrický polynom $T_1(x)$ s užitím věty 3.4.

Podle věty 3.4. hledáme trigonometrický polynom tvaru

$$T_1(x) = \sum_{i=0}^2 t_i(x) f_i, \quad \text{kde } t_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^2 \sin \frac{x-x_j}{2}}{\prod_{j=0, j \neq i}^2 \sin \frac{x_i-x_j}{2}}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} t_0(x) &= \frac{\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}) \sin(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\pi)}{\sin(0-\frac{\pi}{4}) \sin(0-\frac{3}{4}\pi)} = \frac{(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{x}{2} \sin \frac{\pi}{4})(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{3}{4}\pi - \cos \frac{x}{2} \sin \frac{3}{4}\pi)}{\sin(-\frac{\pi}{4}) \sin(-\frac{3}{4}\pi)} = \\ &= \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2})}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})} = \\ &= \frac{-\frac{2}{4}(\sin \frac{x}{2})^2 - \frac{2}{4} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4}(\cos \frac{x}{2})^2}{\frac{2}{4}} = \\ &= (\cos \frac{x}{2})^2 - (\sin \frac{x}{2})^2 = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1(x) &= \frac{\sin(\frac{x}{2}-0) \sin(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\pi)}{\sin(\frac{\pi}{4}-0) \sin(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\pi)} = \frac{\sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} \cos \frac{3}{4}\pi - \cos \frac{x}{2} \sin \frac{3}{4}\pi)}{\sin \frac{\pi}{4} \sin(-\frac{\pi}{2})} = \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \frac{x}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)} = \\ &= (\sin \frac{x}{2})^2 + \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \end{aligned}$$

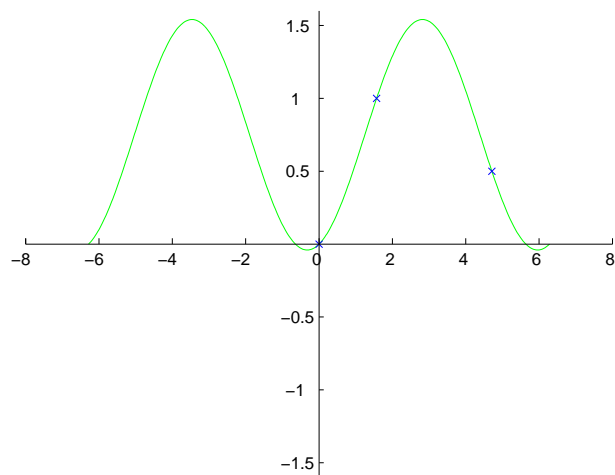
$$\begin{aligned} t_2(x) &= \frac{\sin(\frac{x}{2}-0) \sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{3}{4}\pi-0) \sin(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4})} = \frac{\sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{x}{2} \sin \frac{\pi}{4})}{\sin \frac{3}{4}\pi \sin \frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \frac{x}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= (\sin \frac{x}{2})^2 - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x. \end{aligned}$$

Výsledný trigonometrický interpolační polynom tedy je

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \sin x = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \sin x \end{aligned}$$

a je vykreslen na obrázku 5.





Obr.5

Poznámka 3.3. Z důkazu předchozí věty již víme, že platí $t_i(x_j) = \delta_{ij}$, pro $i, j = 0, 1, \dots, 2m$. Dále pro polynomy $t_i(x)$ platí, že $\sum_{i=0}^{2m} t_i(x) = 1$. Zvolíme-li $f_j = 1$, $j = 0, 1, \dots, 2m$, dostáváme pro trigonometrický polynom rovnost

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{2m} t_i(x) f_i = \sum_{i=0}^{2m} t_i(x) \cdot 1 = 1.$$

4 Rychlá Fourierova transformace

Rychlou Fourierovu transformaci použijeme k výpočtu koeficientů fázového polynomu $p(x)$. Z věty 3.2. víme, že polynom $p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{jix}$ pro dvojice (x_k, f_k) , kde $x_k = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1$, splňuje interpolační podmínky právě tehdy, když

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{\frac{-2\pi ijk}{n}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (20)$$

Výpočet těchto vzorců je důležitý zejména ve Fourierově analýze. V Matlabu můžeme pro její výpočet použít příkaz `fft`.

Příklad 4.1. Budeme-li mít dány funkční hodnoty $f_0 = 0, f_1 = -1, f_2 = 1, f_3 = \frac{1}{2}$, zadáme v příkazovém okně Matlabu vstupy

```
>> fi=[0,-1,1,0.5];  
>> n=length(fi);  
>> bi=fft(fi);  
>> ai=(1/n)*bi
```

a po stisknutí Enteru dostaneme hledané koeficienty

```
ai =  
    0.1250    -0.2500 + 0.3750i    0.3750    -0.2500 - 0.3750i
```

★

Numerický výpočet a_j podle vztahu (20) je hodně zdlouhavý, potřebuje n^2 násobení, obzvláště pro velká n . Cooley a Tukey objevili metodu pro rychlejší výpočet koeficientů a_j ve vztahu (20) pro velká n , která je spolu se svými obměnami nazývána Rychlá Fourierova transformace.

Existují dva hlavní přístupy k Rychlé Fourierově transformaci. Původní Cooley-Tukeyova metoda a metoda popsaná Gentemanem a Sandem, která se obvykle

nazývá Sande-Tukeyova metoda. Oba přístupy závisí na celočíselném n a rozebírají problém do podproblémů nižšího stupně. Tyto rozklady jsou rekurentní a nejlépe se provádí, když

$$n = 2^N, \quad N > 0 \text{ je celé číslo.}$$

Cooley-Tukeyova metoda

Předpokládejme, že $n = 2m$ ($m = \frac{n}{2}$) a budeme se nejprve zabývat dvěma interpolačními fázovými polynomy $q(x)$ a $r(x)$ stupně m takovými, že platí

$$q(x_{2h}) = f_{2h}, \quad r(x_{2h+1}) = f_{2h+1}, \quad h = 0, 1, \dots, m-1,$$

kde $x_{2h} = \frac{2\pi 2h}{n}$, $h = 0, 1, \dots, m-1$. Polynom $q(x)$ tedy interpoluje všechny body sudých indexů, zatímco polynom $\hat{r}(x) = r(x - \frac{2\pi}{n}) = r(x - \frac{\pi}{m})$ interpoluje všechny body lichých indexů. Potom

$$e^{mix_k} = e^{\frac{mi2\pi k}{n}} = e^{i\pi k} = \begin{cases} +1 & \text{pro } k \text{ sudé,} \\ -1 & \text{pro } k \text{ liché,} \end{cases}$$

a kompletní interpolační fázový polynom n -tého stupně $p(x)$ se dá nyní vyjádřit pomocí polynomů $q(x)$ a $r(x)$ stupně m tak, že platí

$$p(x) = q(x) \left(\frac{1 + e^{mix}}{2} \right) + r \left(x - \frac{\pi}{m} \right) \left(\frac{1 - e^{mix}}{2} \right).$$

Odtud plyne následujících N kroků rekurentního algoritmu. Pro $1 \leq M \leq N$ položíme $m = 2^{M-1}$ a $R = 2^{N-M}$. Potom M -tý krok se skládá z výpočtu R fázových polynomů

$$p_r^{(M)} = a_{r0}^{(M)} + a_{r1}^{(M)} e^{ix} + \dots + a_{r,2m-1}^{(M)} e^{(2m-1)ix},$$

$r = 0, 1, \dots, R-1$, a $2R$ fázových polynomů $p_r^{(M-1)}(x)$, $r = 0, 1, \dots, 2R-1$, užitím rekurentního vztahu

$$2p_r^{(M)}(x) = p_r^{(M-1)}(x)(1 + e^{mix}) + p_{R+r}^{(M-1)} \left(x - \frac{\pi}{m} \right) (1 - e^{mix}).$$

Odtud tedy dále plyne vztah mezi koeficienty uvedených fázových polynomů, který lze zformulovat do následujícího algoritmu

pro $M = 1, 2, \dots, N$

polož $m = 2^{M-1}$

$R = 2^{N-M}$

pro $r = 0, \dots, R - 1$ a $j = 0, \dots, m - 1$

vypočítej

$$2a_{rj}^{(M)} = a_{rj}^{(M-1)} + a_{R+r,j}^{(M-1)} \epsilon_M^j \quad (21)$$

$$2a_{r,m+j}^{(M)} = a_{rj}^{(M-1)} - a_{R+r,j}^{(M-1)} \epsilon_M^j,$$

kde

$$\epsilon_M = e^{\frac{-2\pi i}{2^M}}.$$

Na začátku rekurentního výpočtu položíme

$$a_{k0}^{(0)} = f_k, \quad k = 0, \dots, n - 1 \quad (22)$$

a po ukončení výpočtu dle výše uvedeného algoritmu je

$$a_j = a_{0j}^{(N)}, \quad j = 0, \dots, n - 1.$$

Tato rekurze se nazývá Cooley-Tukeyova metoda.

Příklad 4.2. Pro zadaná data

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	-1
2	π	1
3	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{1}{2}$

najděte fázový polynom $p(x)$ užitím Cooley-Tukeyovy metody.

Tedy $n = 4$ a $N = 2$. Na začátku podle vztahu (22) položíme

$$a_{00}^{(0)} = f_0 = 0$$

$$a_{10}^{(0)} = f_1 = -1$$

$$a_{20}^{(0)} = f_2 = 1$$

$$a_{30}^{(0)} = f_3 = \frac{1}{2}.$$

V prvním kroku je $M = 1$, $m = 2^{M-1} = 1$, $R = 2^{N-M} = 2$ a tedy pro $r = 0, 1$, $j = 0$ podle vztahů (21) je

$$2a_{00}^{(1)} = a_{00}^{(0)} + a_{20}^{(0)} e^0 = 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow a_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}$$

$$2a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(0)} + a_{30}^{(0)} e^0 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow a_{10}^{(1)} = -\frac{1}{4}$$

$$2a_{01}^{(1)} = a_{00}^{(0)} - a_{20}^{(0)} e^0 = 0 - 1 = -1 \quad \Rightarrow a_{01}^{(1)} = -\frac{1}{2}$$

$$2a_{11}^{(1)} = a_{10}^{(0)} - a_{30}^{(0)} e^0 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow a_{11}^{(1)} = -\frac{3}{4}.$$

Dále je $M = 2$, $m = 2^{M-1} = 2$, $R = 2^{N-M} = 1$, a tedy pro $r = 0$, $j = 0, 1$ podle vztahů (21) je

$$2a_{00}^{(2)} = a_{00}^{(1)} + a_{10}^{(1)} e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow a_{00}^{(2)} = \frac{1}{8} = a_0$$

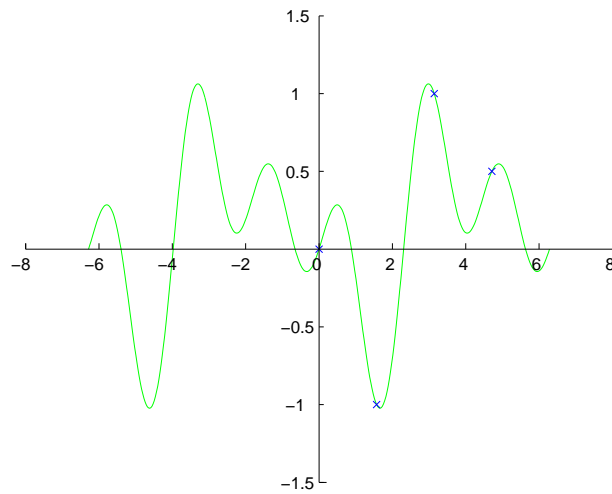
$$2a_{01}^{(2)} = a_{01}^{(1)} + a_{11}^{(1)} e^{-\frac{\pi i}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(-i) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \quad \Rightarrow a_{01}^{(2)} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i = a_1$$

$$2a_{02}^{(2)} = a_{00}^{(1)} - a_{10}^{(1)} e^0 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow a_{02}^{(2)} = \frac{3}{8} = a_2$$

$$2a_{03}^{(2)} = a_{01}^{(1)} - a_{11}^{(1)} e^{-\frac{\pi i}{2}} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right)(-i) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i \quad \Rightarrow a_{03}^{(2)} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i = a_3$$

a tím výpočet končí. Fázový polynom má tedy tvar

$$p(x) = \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)e^{ix} + \frac{3}{8}e^{i2x} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)e^{i3x}$$



Obr.6

a je vykreslen na obrázku 6. Podíváme-li se na výpočet příkladu 4.1., kdy jsme použili přímo příkaz `fft` z Matlabu pro Fourierovu transformaci, vidíme, že dostáváme stejný výsledek.

Ještě ověříme, že jsou splněny podmínky interpolace $p(x_i) = f_i$ pro $i = 0, 1, 2, 3$. Tedy dostáváme

$$p(0) = \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)e^0 + \frac{3}{8}e^0 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)e^0 = \frac{4}{8} - \frac{2}{4} = 0,$$

$$\begin{aligned} p\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)e^{\frac{\pi i}{2}} + \frac{3}{8}e^{\pi i} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)e^{\frac{3\pi i}{2}} = \\ &= \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)i + \frac{3}{8}(-1) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)(-i) = \\ &= -\frac{2}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\pi) &= \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)e^{\pi i} + \frac{3}{8}e^{2\pi i} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)e^{3\pi i} = \\ &= \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)(-1) + \frac{3}{8} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)(-1) = \\ &= \frac{4}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8}i + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}i = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)e^{\frac{3\pi i}{2}} + \frac{3}{8}e^{3\pi i} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)e^{\frac{9\pi i}{2}} = \\
&= \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)(-i) + \frac{3}{8}(-1) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)i = \\
&= -\frac{2}{8} + \frac{1}{4}i + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}i + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

a vidíme, že podmínky interpolace jsou splněny. ★

Pro výpočet koeficientů a_j , $j = 0, \dots, n-1$ fázového polynomu $p(x)$ Cooley-Tukeyho metodou jsem vytvořila m-file v Matlabu s názvem CooleyTukey, který lze použít pro hodnoty n splňující rovnost $n = 2^N$. Na vstupu se zadají pouze funkční hodnoty v bodech interpolace, přičemž počet bodů interpolace je dán délkou vektoru funkčních hodnot.

```

%vstup:  fi...vektor funkčních hodnot
%výstup: v...vektor koeficientů fázového polynomu

function[v]=CooleyTukey(fi)
n=length(fi);
M=1;
N=log(n)/log(2);
N;

if (N~=round(N))
    disp('n není mocnina dvou')
    v=['nelze vypočítat'];
    return;
end;

for k=1:n
    a(k,1)=fi(k);

```

```

end

for M=1:N
    m=2^(M-1);
    R=2^(N-M);
    for r=1:R
        for j=1:m
            epsilon=exp((-2*pi*i*(j-1))/2^M);
            a(r,m+j)=(a(r,j)-(a(R+r,j)*epsilon))/2;
            a(r,j)=(a(r,j)+(a(R+r,j)*epsilon))/2;
        end
    end
end

end

for k=1:n
    v(k)=a(1,k);
end

```

Pomocí tohoto m-filu můžeme spočítat příklad 4.2., když do příkazového okna Matlabu zadáme požadované vstupy.

```

>> fi=[0;-1;1;0.5];
>> [v]=CooleyTukey(fi)

```

Po stisknutí Enteru pak dostaneme

```

v =
    0.1250    -0.2500 + 0.3750i    0.3750    -0.2500 - 0.3750i

```

a opravdu jsme dostali stejný výsledek jako v příkladě 4.2.

Pro větší počet funkčních hodnot by mohl výpočet pomocí předchozího m-filu trvat dlouho, protože algoritmus a tedy i m-file si pamatuje všechny mezivýsledky,

kteře spočítal, a tedy potřebuje více paměti. Proto nyní ukážeme detailnější formulaci algoritmu Cooley-Tukeyovy metody. Čelíme problému s uspořádáním veličin $a_{rj}^{(M)}$ ve vektoru

$$\tilde{a}[\kappa] = a_{rj}^{(M)}, \quad \kappa = 0, \dots, n-1.$$

Z vhodných zobrazení $(M, r, j) \rightarrow \kappa(M, r, j)$ je nejvhodnější

$$\kappa = 2^M r + j, \quad M = 0, \dots, N, \quad r = 0, \dots, 2^{N-M} - 1, \quad j = 0, \dots, 2^M - 1.$$

Výhodou je, že konečné výsledky jsou ve správném pořadí.

Provedeme-li „vhodné“ permutace, můžeme si vystačit s jedním vektorem $\tilde{a}[\]$, a to když necháme každou dvojici veličin $a_{rj}^{(M)}, a_{r,m+j}^{(M)}$ na stejných pozicích v $\tilde{a}[\]$ jako dvojice veličin $a_{rj}^{(M-1)}, a_{r+R,j}^{(M-1)}$, ze kterých jsou vypočítány. V tomto případě jsou složky vektoru $\tilde{a}[\]$ permutovány a zobrazení $(M, r, j) \rightarrow \kappa(M, r, j)$, které určují pozice v $\tilde{a}[\]$ jako funkci celých čísel M, r, j , jsou komplikovanější. Nechť $\tau = \tau(M, r, j)$ je zobrazení s vlastnostmi $\tilde{a}[\tau] = a_{rj}^{(M)}$ takové, že

$$\begin{aligned} \tau(M, r, j) &= \tau(M-1, r, j) \\ \tau(M, r, j + 2^{M-1}) &= \tau(M-1, r + 2^{N-M}, j), \end{aligned} \quad (23)$$

$$M = 1, \dots, N, \quad r = 0, \dots, 2^{N-M} - 1, \quad j = 0, \dots, 2^{M-1} - 1$$

a taky

$$\tau(N, 0, j) = j, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (24)$$

přičemž poslední podmínka znamená, že konečný výsledek a_j nalezneme ve vektoru $\tilde{a}[\]$: $a_j = \tilde{a}[j]$ na pozici j .

Podmínky (23) a (24) definují zobrazení τ rekurzivně. Pro tento účel je

$$\tau = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \dots + \alpha_{N-1} \cdot 2^{N-1}, \quad \alpha_p \in \{0, 1\} \quad \text{pro } p = 0, \dots, N-1,$$

binární reprezentace celého čísla t , $0 \leq t < 2^N$. Rovnost

$$\rho(t) = \alpha_{N-1} + \alpha_{N-2} \cdot 2 + \dots + \alpha_0 \cdot 2^{N-1} \quad (25)$$

určuje permutaci celého čísla $t = 0, \dots, 2^N - 1$ (nazývanou „bit reversal“ - trochu převrácenou), která je symetrická, tj. $\rho(\rho(t)) = t$. Pomocí této permutace ρ můžeme explicitně vyjádřit $\tau(M, r, j)$

$$\tau(M, r, j) = \rho(r) + j,$$

$$M = 0, \dots, N, \quad r = 0, \dots, 2^{N-M} - 1, \quad j = 0, \dots, 2^M - 1.$$

Platnost těchto vztahů je dokázána například v [5] na straně 82.

Pro symetrickou „bit reversal“ permutaci

$$\tau(M, \rho(\bar{r}), j) = \bar{r} + j$$

je \bar{r} násobek 2^M , $0 \leq \bar{r} < 2^N$ a $0 \leq j < 2^M$. Jestliže platí $0 \leq j < 2^{M-1}$, potom

$$t = \tau(M, \rho(\bar{r}), j) = \tau(M - 1, \rho(\bar{r}), j) = \bar{r} + j,$$

$$\bar{t} = \tau(M, \rho(\bar{r}), j + 2^{M-1}) = \tau(M - 1, \rho(\bar{r}) + 2^{N-M}, j) = \bar{r} + j + 2^{M-1}$$

vyznačuje dvojice pozic v $\tilde{a}[\]$, které obsahují veličiny související s Cooley-Tukeyho rekurzemi (21).

V následující pozměněné formulaci klasické Cooley-Tukeyovy metody předpokládáme, že vektor $\tilde{a}[\]$ je nastaven na počáteční hodnotu

$$\tilde{a}[\rho(k)] = f_k, \quad k = 0, \dots, n - 1,$$

kde ρ je „bit reversal“ permutace (25). Tuto „záměnu“ počátečních hodnot můžeme provést „vhodně“, protože „bit-reversal“ permutace je symetrická a skládá se proto z posloupnosti vzájemných výměn pořadí nebo transpozic ve dvojicích. Navíc vymažeme činitel 2, který se objevuje ve vzorcích (21), takže nakonec

$$a_j = \frac{1}{n} \tilde{a}[j], \quad j = 0, \dots, n - 1.$$

Algoritmus má potom tvar

for $M = 1 : 1 : N$

```

for j = 0 : 1 : 2M-1 - 1
    e = eMj;
    for r̄ = 0 : 2M : 2N - 1
        u = ã[r̄ + j]; v = ã[r̄ + j + 2M-1] ' * e;
        ã[r̄ + j] = u + v; ã[r̄ + j + 2M-1] = u - v;
    end
end
end
end

```

Pro výpočet koeficientů a_j , $j = 0, \dots, n - 1$ fázového polynomu $p(x)$ pozměněnou Cooley-Tukeyho metodou, která v paměti neuchovává nepotřebné mezivýpočty, jsem vytvořila m-file v Matlabu s názvem CooleyTukey2, který lze použít pro hodnoty n splňující rovnost $n = 2^N$. M-file se od původní Cooley-Tukeyho metody liší až v druhé části, proto zde začátek není znovu uveden.

```

ay=n;
for M=1:N
    m=2^(M-1);
    R=2^(N-M);
    for r=1:R
        for j=1:m
            epsilon=exp((-2*pi*i*(j-1))/2^M);
            a(r,m+j)=(a(r,j)-(a(R+r,j)*epsilon))/2;
            a(r,j)=(a(r,j)+(a(R+r,j)*epsilon))/2;
            a(R+r,j)=0;
        end
    end
end
%vymazání nepotřebných řádků matice
if (ay==2)
    ax=2;
else

```

```

        ax=(1/2*ay)+1;
    end
    for aa=ay:(-1):ax
        a(aa,:)=[];
    end
    ay=ay/2;
end
for k=1:n
    v(k)=a(1,k);
end

```

Když tento postup uplatníme v příkladě 4.2., tak vlastně po výpočtu hodnot $a_{00}^{(1)}, a_{10}^{(1)}, a_{01}^{(1)}, a_{11}^{(1)}$ v prvním kroku se nám vynulují hodnoty $a_{00}^{(0)}, a_{10}^{(0)}, a_{20}^{(0)}, a_{30}^{(0)}$. V druhém kroku se pak po výpočtu $a_{00}^{(2)}, a_{01}^{(2)}, a_{02}^{(2)}, a_{03}^{(2)}$ vynulují hodnoty $a_{00}^{(1)}, a_{10}^{(1)}, a_{01}^{(1)}, a_{11}^{(1)}$. Na konci nám tedy zůstanou pouze výsledné hodnoty a žádné jiné mezivýpočty se nezachovají.

Podívejme se nyní na druhou zmiňovanou Sande-Tukeyovu metodu pro výpočet koeficientů a_j , $j = 0, \dots, n - 1$ fázového polynomu $p(x)$.

Sande-Tukeyova metoda

Tato metoda je založena na výpočtu sumy

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-jix_k}. \quad (26)$$

Opět je-li $m = \frac{n}{2}$, sečteme pro $k = 0, \dots, m - 1$ člen $f_k e^{-jix_k}$ a jeho symetrický člen $f_{k+m} e^{-jix_{k+m}}$. Dostaneme m součtů těchto symetrických členů. Suma ve vztahu (26) má n členů. Rozdělení těchto n členů do dvou sum, kde jedna bude pro sudé indexy, tj. položíme $j = 2h$, a tedy $\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-2hix_k}$, a jedna pro li-

ché indexy, tj. $j = 2h + 1$, a tedy $\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-(2h+1)ix_k}$, povede ke dvěma problémům z vyjádření tvaru (20). Každý problém je snižen na stupeň $m = \frac{n}{2}$. S využitím označení

$$\epsilon_M = e^{\frac{-2\pi i}{2^M}}$$

můžeme vztah (20) napsat ve tvaru

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \epsilon_N^{jk}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (27)$$

Zde je N takové, že $n = 2^N$. Rozlišování mezi sudými a lichými hodnotami j a kombinování symetrických členů nám z předchozího rozdělení do dvou sum a z rovnosti (27) dává vztahy

$$a_{2h} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \epsilon_N^{2hk} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} (f_k + f_{k+m}) \epsilon_{N-1}^{hk} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} f'_k \epsilon_{N-1}^{hk}$$

$$a_{2h+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \epsilon_N^{(2h+1)k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} (f_k - f_{k+m}) \epsilon_N^k \epsilon_{N-1}^{hk} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} f''_k \epsilon_{N-1}^{hk}$$

pro $h = 0, \dots, m-1$ a $m = \frac{n}{2}$, z kterých plyne $\epsilon_N^2 = e^{-\frac{2\pi i 2}{2^N}} = e^{-\frac{2\pi i}{2^{N-1}}} = \epsilon_{N-1}$, $\epsilon_N^m = e^{-\frac{\pi i 2m}{2^N}} = e^{-\frac{\pi i n}{2^N}} = e^{-\pi i} = -1$. Tedy pro $k = 0, \dots, m-1$ je

$$f'_k = f_k + f_{k+m}$$

$$f''_k = (f_k - f_{k+m}) \epsilon_N^k.$$

Abychom mohli odvodit následujících N kroků rekurentního algoritmu, pro $M = N, N-1, \dots, 1$ položíme $m = 2^{M-1}$, $R = 2^{N-M}$ a zavedeme označení

$$f_{rk}^{(M)}, \quad r = 0, \dots, R-1, \quad k = 0, \dots, 2m-1,$$

přičemž $f_{0k}^{(N)} = f_k$, $k = 0, \dots, n-1$. Hodnoty $f_{0k}^{(N-1)}$ a $f_{1k}^{(N-1)}$ představují veličiny f'_k a f''_k , které jsme již zavedli. Obecně pro $m = 2^{M-1}$ a $R = 2^{N-M}$ dostáváme pro $r = 0, \dots, R-1$, $j = 0, \dots, 2M-1$,

$$a_{j,R+r} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2m-1} f_{rk}^{(M)} \epsilon_M^{jk}. \quad (28)$$

Hodnoty $f_{rk}^{(M)}$ přitom počítáme podle následujícího algoritmu pro $M = N, N - 1, \dots, 1$

polož $m = 2^{M-1}$

$R = 2^{N-M}$

pro $r = 0, \dots, R - 1$ a $h = 0, \dots, m - 1$

vypočítej

$$f_{rk}^{(M-1)} = f_{rk}^{(M)} + f_{r,k+m}^{(M)},$$

(29)

$$f_{r+R,k}^{(M-1)} = (f_{rk}^{(M)} - f_{r,k+m}^{(M)})\epsilon_M^k,$$

Platnost těchto vztahů je dokázána například v [5] na straně 80.

Rekurze je zahájena položením

$$f_{0k}^{(N)} = f_k, \quad k = 0, \dots, n - 1$$

a končí pro

$$a_r = \frac{1}{n} f_{r0}^{(0)}, \quad r = 0, \dots, n - 1,$$

což plyne ze vztahu (28). Tato rekurze se nazývá Sande-Tukeyova metoda.

Nyní zkusíme aplikovat Sande-Tukeyovu metodu na stejná data jako v příkladě 4.2.

Příklad 4.3. Necht' jsou dána stejná data jako v příkladě 4.2., tedy

i	x_i	f_i
0	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	-1
2	π	1
3	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{1}{2}$

Najděte fázový polynom $p(x)$ užitím Sande-Tukeyovy metody.

Je zřejmé, že $n = 4$ a $N = 2$. Na začátku položíme

$$f_{00}^{(2)} = f_0 = 0$$

$$f_{01}^{(2)} = f_1 = -1$$

$$f_{02}^{(2)} = f_2 = 1$$

$$f_{03}^{(2)} = f_3 = \frac{1}{2}.$$

Nejprve pro $M = 2$ dostaneme $m = 2^{M-1} = 2$, $R = 2^{N-M} = 1$. Tedy pro $r = 0$, $k = 0, 1$ dostáváme ze vztahu (29)

$$f_{00}^{(1)} = f_{00}^{(2)} + f_{02}^{(2)} = 0 + 1 = 1$$

$$f_{01}^{(1)} = f_{01}^{(2)} + f_{03}^{(2)} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f_{10}^{(1)} = (f_{00}^{(2)} - f_{02}^{(2)})e^0 = 0 - 1 = -1$$

$$f_{11}^{(1)} = (f_{01}^{(2)} - f_{03}^{(2)})e^{-\frac{\pi i}{2}} = (-1 - \frac{1}{2})(-i) = \frac{3}{2}i.$$

Dále je pro $M = 1$, $R = 2$, $m = 1$. Tedy pro $r = 0, 1$ a $k = 0$ dostáváme

$$f_{00}^{(0)} = f_{00}^{(1)} + f_{01}^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}f_{00}^{(0)} = \frac{1}{8} = a_0$$

$$f_{10}^{(0)} = f_{10}^{(1)} + f_{11}^{(1)} = -1 + \frac{3}{2}i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}f_{10}^{(0)} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i = a_1$$

$$f_{20}^{(0)} = (f_{00}^{(1)} - f_{01}^{(1)})e^0 = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}f_{20}^{(0)} = \frac{3}{8} = a_2$$

$$f_{30}^{(0)} = (f_{10}^{(1)} - f_{11}^{(1)})e^0 = -1 - \frac{3}{2}i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}f_{30}^{(0)} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i = a_3$$

a tím výpočet končí. Fázový polynom má tedy tvar

$$p(x) = \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}i\right)e^{ix} + \frac{3}{8}e^{i2x} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}i\right)e^{i3x}$$

a je stejný jako v příkladě 4.2., viz obr. 6.

Pro výpočet koeficientů a_j , $j = 0, \dots, n-1$ fázového polynomu $p(x)$ Sande-Tukeyho metodou jsem vytvořila m-file v Matlabu s názvem SandeTukey, který

lze použít pro hodnoty n splňující rovnost $n = 2^N$. Na vstupu se zadají pouze funkční hodnoty v bodech interpolace, přičemž počet bodů interpolace je dán délkou vektoru funkčních hodnot.

```
%vstup: fi...vektor funkčních hodnot  
%výstup: v...vektor koeficientů fázového polynomu
```

```
function[v]=SandeTukey(fi)  
n=length(fi);  
N=log(n)/log(2);  
N;  
  
if (N~=round(N))  
    disp('n není mocnina dvou')  
    v=['nelze vypocitat'];  
    return;  
end;  
  
M=N;  
m=2^(M-1);  
R=2^(N-M);  
  
for j=1:n  
    f(1,j)=fi(j);  
end  
  
for M=N:(-1):1  
    m=2^(M-1);  
    R=2^(N-M);  
    for r=1:R  
        for k=1:m
```

```

        epsilon=exp((-2*pi*i*(k-1))/2^M);
        f(r+R,k)=(f(r,k)-f(r,k+m))*epsilon;
        f(r,k)=f(r,k)+f(r,k+m);
    end
end
end
for j=1:n
    v(j)=(1/n)*f(j,1);
end

```

Pomocí tohoto m-filu můžeme spočítat příklad 4.3., když do příkazového okna Matlabu zadáme požadované vstupy.

```

>> fi=[0;-1;1;0.5];
>> [v]=SandeTukey(fi)

```

Po stisknutí Enteru pak dostaneme

```

v =
    0.1250    -0.2500 + 0.3750i    0.3750    -0.2500 - 0.3750i

```

a opravdu jsme dostali stejný výsledek jako v příkladě 4.3.

Když Sande-Tukeyova metoda používá rekurzi tvaru (29), není zde již problém s uspořádáním. Nicméně, když použijeme rekurze „vhodně“ v jednotlivých vektorech $\tilde{f}[\]$, potom musíme znovu zobrazení přeindexovat třemi indexy M, r, j do jednotlivých indexů τ . Toto indexování zobrazení musí splňovat vztahy

$$\tau(M-1, r, k) = \tau(M, r, k),$$

$$\tau(M-1, r + 2^{N-M}, k) = \tau(M, r, k + 2^{M-1})$$

pro $M = N, N-1, \dots, 1$, $r = 0, 1, \dots, 2^{N-M} - 1$, $k = 0, 1, \dots, 2^{M-1} - 1$. Když předpokládáme

$$\tau(n, 0, k) = k \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

totiž, že začneme s přirozeným pořadím, potom tyto podmínky jsou přesně podmínky (23) a (24) napsány obráceně. Tudíž $\tau = \tau(M, r, k)$ je shodné pro index zobrazení τ uvažované pro Cooley-Tukeyovu metodu.

V následující pozměněné formulaci Sande-Tukeyovy metody předpokládejme, že vektor $\tilde{f}[\]$ je nastaven přímo na hodnoty f_k , tj.

$$\tilde{f}[k] = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Nicméně konečné výsledky musí být uspořádány použitím „bit reversal“ permutace

$$a_j = \frac{1}{n} \left[\tilde{f}[\rho(j)] \right], \quad j = 0, \dots, n - 1.$$

Algoritmus má potom tvar

```
for M = N : (-1) : 1
  for k = 0 : 1 : 2M-1 - 1
    e = eMk;
    for r̄ = 0 : 2M : 2N - 1
      u = f̃[r̄ + k]; v = f̃[r̄ + k + 2M-1];
      f̃[r̄ + k] = u + v; f̃[r̄ + k + 2M-1] = (u - v)' * e;
    end
  end
end
end
```

Pro výpočet koeficientů a_j , $j = 0, \dots, n - 1$ fázového polynomu $p(x)$ Sande-Tukeyho metodou, která nuluje předchozí mezivýpočty, jsem vytvořila m-file v Matlabu s názvem SandeTukey2, který lze použít pro hodnoty n splňující rovnost $n = 2^N$. M-file se od původní Sande-Tukeyho metody liší pouze v této části

```
fy=n;
for M=N:(-1):1
  m=2^(M-1);
```

```

R=2^(N-M);
for r=1:R
    for k=1:m
        epsilon=exp((-2*pi*i*(k-1))/2^M);
        f(r+R,k)=(f(r,k)-f(r,k+m))*epsilon;
        f(r,k)=f(r,k)+f(r,k+m);
        f(r,k+m)=0;
    end
end
%vymazání nepotřebných sloupců matice
if (fy==2)
    fx=2;
else
    fx=(1/2*fy)+1;
end
for ff=fy:(-1):fx
    f(:,ff)=[];
end
fy=fy/2;
end
for j=1:n
    v(j)=(1/n)*f(j,1);
end

```

Když tento postup uplatníme v příkladě 4.3., tak vlastně po výpočtu hodnot $f_{00}^{(1)}, f_{01}^{(1)}, f_{10}^{(1)}, f_{11}^{(1)}$ v prvním kroku se nám vynulují hodnoty $f_{00}^{(2)}, f_{01}^{(2)}, f_{02}^{(2)}, f_{03}^{(2)}$. V druhém kroku se pak po výpočtu $f_{00}^{(0)}, f_{10}^{(0)}, f_{20}^{(0)}, f_{30}^{(0)}$ vynulují hodnoty $f_{00}^{(1)}, f_{01}^{(1)}, f_{10}^{(1)}, f_{11}^{(1)}$. Na konci nám tedy zůstanou pouze výsledné hodnoty a žádné jiné mezivýpočty se nezachovají.

Závěr

V této bakalářské práci je popsána úloha trigonometrické interpolace a jsou ukázány výpočty trigonometrického či fázového polynomu různými způsoby. Tyto polynomy jsou vhodné k aproximaci periodických funkcí.

S úlohou interpolace jsme byli seznámeni na přednáškách z Numerických metod, ale o trigonometrické interpolaci jsme se zmínili pouze okrajově. Tato problematika mě zaujala, a proto jsem si ji vybrala jako téma své bakalářské práce.

V práci bylo také ukázáno, že úloha nalezení trigonometrického polynomu je ekvivalentní úloze nalezení fázového polynomu. Dále byla popsána Rychlá Fourierova transformace, což je jedna z možností, jak nalézt koeficienty fázového polynomu. Celá teorie je doplněna příklady s ručními výpočty a obrázky. K příkladům jsem také vytvořila m-fily v programu Matlab.

Při psaní této bakalářské práce jsem se dozvěděla mnoho nových informací nejen o trigonometrické interpolaci, ale i z oblasti tvoření m-filů v matematickém softwaru Matlab. Také jsem si prohloubila znalosti v oblasti práce s typografickým programem \TeX , kterým je tato práce vysázena.

Literatura

- [1] Horová, I., Zelinka, J.: Numerické metody. Masarykova univerzita v Brně, Brno 2004.
- [2] Jukl, M.: Lineární algebra. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2006.
- [3] Kobza, J.: Numerické metody. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 1988.
- [4] Kořínek, V.: Základy algebry. NČSAV, Praha, 1956.
- [5] Stoer, J., Bulirsch, R.: Introduction to Numerical Analysis. Springer, New York, 2002.