UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Teorie společenského výběru

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Pavla Kouřilová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2016

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Pavla Kouřilová

Název práce: Teorie společenského výběru

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2016

Abstrakt: Teorie společenského výběru spadá do rozsáhlé oblasti skupinového rozhodování. Zabývá se problémem agregace různých individuálních preferencí více jednotlivců do jediné preference skupinové. V této práci jsou po úvodním stručném pohledu do historie společenské volby přehledně popsány základy této teorie. Postupně jsou zavedeny tři základní typy agregačních funkcí (ordinální funkce společenského blahobytu, funkce společenského výběru a kardinální funkce společenského blahobytu), uvedeny jejich nejdůležitější vlastnosti a také vztahy mezi nimi. V poslední kapitole je podrobněji představeno několik konkrétních typů těchto agregačních funkcí (pravidlo prosté většiny, Bordova metoda, bodovací funkce, Condorcetovy funkce), které jsou doplněny i o příklady jejich použití.

Klíčová slova: skupinové rozhodování, teorie společenského výběru, ordinální funkce společenského blahobytu, funkce společenského výběru, kardinální funkce společenského blahobytu, pravidlo prosté většiny, Bordova metoda, bodovací funkce, Condorcetovy funkce

Počet stran: 64

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Pavla Kouřilová

Title: Social choice theory

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

The year of presentation: 2016

Abstract: There is a lot of different methods and theories dealing with group decision making. One of them is the social choice theory. This theory studies the problem how to aggregate different individual preferences among objects in given set into a single group preference. In this thesis we provide the outline of this theory. After a brief look into the history of social choice we define the three types of aggregation functions (social welfare function, social choice function, cardinal social welfare function), state their fundamental properties and their mutual relationship. In the last section some particular aggregation functions (majority rule, Borda rule, scoring functions, Condorcet functions) are introduced. The examples of their applications are also provided.

Key words: group decision making, social choice theory, social welfare function, social choice function, cardinal social welfare function, majority rule, Borda rule, scoring functions, Condorcet functions

Number of pages: 64

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Úvod **6**

Použité značení **7**

1 Skupinové rozhodování **8**

2 Teorie společenského výběru **11**
- 2.1 Historie 12
- 2.2 Základní pojmy 15
- 2.3 Ordinální funkce společenského blahobytu 17
- 2.4 Funkce společenského výběru 22
- 2.5 Kardinální funkce společenského blahobytu 26

3 Příklady agregačních funkcí **38**
- 3.1 Pravidlo prosté většiny 38
- 3.2 Bordovy metody 42
  - 3.2.1 Bordova metoda 42
  - 3.2.2 Bordova pořadová metoda 46
- 3.3 Bodovací funkce 49
- 3.4 Condorcetovy funkce 52
  - 3.4.1 Kemenyho pravidlo 54
  - 3.4.2 Copelandova funkce 58
  - 3.4.3 Blackova funkce 59

Závěr **61**

Literatura **63**

Úvod

Se skupinovým rozhodováním (případně s jeho důsledky) se setkáváme téměř denně a to ve všech možných situacích. Takové rozhodování je spojeno s mnoha problémy a obtížemi. Zejména je nutno brát v potaz, že jednotliví členové skupiny, která rozhoduje, mají obecně různé názory. Je proto nutné zvolit nějaký vhodný postup (metodu), jak tyto jejich jednotlivé názory sjednotit a určit tak jediné skupinové rozhodnutí.

Stát, kraj či obec, kde žijeme, řídí zástupci, kteří byli vybráni pomocí hlasování u voleb. Pravidla hlasování i samotného vyhodnocování odevzdaných hlasů jsou různá pro různé typy voleb a navíc se čas od času mění. Nabízí se tak otázka, jak moc změny těchto pravidel ovlivní výsledek hlasování, tj. například jak by se změnil počet mandátů v parlamentu pro jednotlivé politické strany, kdybychom pro vyhodnocení použili jiná pravidla.

Při hodnocení krasobruslařů na soutěžích se až donedávna používal systém založený na tzv. bodovacích funkcích. Takový systém ale může vykazovat nežádoucí chování, kdy je vzájemné pořadí dvou krasobruslařů ovlivněno nejen jejich výkonem, ale i výkonem jiného krasobruslaře. K této situaci došlo například i na Olympijských hrách v roce 2002 při krasobruslařské soutěži žen.

Těmito a dalšími podobnými situacemi se zabývá teorie společenského výběru. Tato teorie je velmi rozsáhlá, zabývá se jí mnoho odborníků z celého světa. Zlomek jejich prací, které byly při zpracování této bakalářské práce použity, je uveden na konci v přehledu zdrojů.

Z důvodu omezeného rozsahu této práce představíme pouze základní pojmy, s nimiž teorie společenského výběru pracuje, a také jejich nejdůležitější vlastnosti.

Použité značení

A	množina alternativ
V	množina voličů
R	relace slabé preference na množině A
P	relace ostré preference na množině A
I	relace indiference na množině A
$\mathcal{R}$	množina všech slabých preferencí na množině A
$\mathcal{R}^n$	množina všech (slabých) profilů (pro danou A a V)
F	ordinální funkce společenského blahobytu
f	ordinální funkce společenského výběru
F_C	kardinální funkce společenského blahobytu
W_i	funkce užitku voliče i
$\mathcal{L}$	množina všech ostrých preferencí na množině A
$\mathcal{L}^n$	množina všech (ostrých) profilů (pro danou A a V)
$\operatorname{card} A$	počet prvků množiny A

Kapitola 1

Skupinové rozhodování

Skupinové rozhodování je staré jako lidstvo samo - nutnost provést společné rozhodnutí se objevila, jakmile se lidé začali sdružovat a žít ve větších společenstvech.

Základní pojmy týkající se skupinového rozhodování si představíme na nejjednodušší situaci, kdy má skupina osob za úkol vybrat z dané množiny objektů ten nejlepší. Pro tuto skupinu osob dle kontextu používáme různá označení: *rozhodovatelé, voliči, porotci, rozhodčí, hráči.* Objekty, mezi nimiž tyto osoby volí, jsou označovány nejčastěji jako *varianty, alternativy, kandidáti, soutěžící, strategie.* Každý z voličů má na tyto objekty svůj názor, tj. dokáže například vybrat ten nejlepší nebo je seřadit od nejlepšího k nejhoršímu, dokáže porovnat každou jejich dvojici, umí určit svůj užitek z každého z nich. Tímto názorem tak každý z voličů poskytne svou *individuální preferenci* na množině těchto objektů. Cílem je nyní určit tzv. *skupinovou preferenci*, neboli určit skupinový názor na jednotlivé alternativy. Skupinové rozhodování je tedy nejčastěji chápáno jako sloučení rozdílných individuálních preferencí týkajících se objektů z nějaké množiny do jediné společné skupinové preference. Způsobů, jak lze toto sloučení provést, je celá řada a obecně se nazývají jako *agregační procedury, agregační metody, agregační funkce* nebo *volební metody.*

V současné době pod pojem skupinové rozhodování zahrnujeme mnoho různých disciplín, mezi nimi zejména teorii společenského výběru, teorii užitku, teorii her, teorii ekonomické rovnováhy, preferenční analýzu, teorii vyjednávání nebo týmového řešení problémů. Podle povahy rozhodovacího problému pak musíme zvolit ten správný přístup, tj. zvolit a použít vhodnou teorii. Některé možné přístupy představíme nyní podrobněji (viz [12], [7]).

Teorie společenského výběru je v principu teorií volebních systémů, které se používají pro (demokratické) vyjádření vůle většiny. Při tomto způsobu rozhodování nedochází k interakci mezi voliči, kteří navíc po vyjádření své preference již svůj názor nemůžou změnit. Množina objektů (alternativ), z nichž je vybíráno, je předem známá a zpravidla je považována za konečnou. Příkladem tohoto typu rozhodování jsou volby do parlamentu, hlasování parlamentu o zákonech, hodnocení sportovních výkonů, komisionální zkouška z matematiky.

Týmové řešení problémů se používá v situaci, kdy relativně malá skupina rozhodovatelů řeší složitější a komplexnější problém. Tento problém je zpravidla interdisciplinární, takže jednotliví rozhodovatelé jsou většinou odborníci z různých oblastí. Vzájemně spolupracují a své názory na možné varianty řešení mohou během procesu rozhodování měnit v důsledku interakce s ostatními. Může tak docházet k efektu synergie, kdy týmový přínos je větší než jen pouhý souhrn individuálních přínosů. Proces týmového řešení je rozdělen do několika etap. Jednou z těchto etap je i generování možných řešení. Zde lze v zásadě rozlišit situaci, kdy se řeší naprosto nový problém (např. návrh nového technické řešení nebo nového designu, stanovení vize organizace, plán cesty na Mars), a situaci, kdy jsou již nějaká možná řešení k dispozici a je nutné je pouze přizpůsobit (např. umístění obchodního centra, plán závodů psích spřežení, zavedení nového produktu do výroby). Ve fázi generování možných variant řešení lze použít různé techniky jako například brainstorming, brainwriting, Gordonovu metodu, techniku nominální skupiny nebo metodu Delphi. Dalšími fázemi týmového rozhodování jsou pak mj. posouzení možných řešení, simulace, výběr a implementace zvoleného řešení a zpětná kontrola.

Pro modelování, analyzování a řešení konfliktních situací je používána *teorie her*. Používá se v ní názvosloví inspirované společenskými hrami, kdy rozhodovatelé jsou hráči a alternativami pak jejich možné strategie. Je zřejmé, že zájmy jednotlivých hráčů (případně jejich skupin – koalic) jdou v principu proti sobě. Rozlišujeme různé typy her a to podle počtu hráčů (dva nebo obecně více než dva), podle počtu možných strategií (konečné nebo nekonečné hry) nebo podle toho, zda mohou hráči uzavírat koalice (kooperativní a nekooperativní hry). Důležitým pojmem, který se objevuje při řešení konfliktních situací je také *vyjednávání* a vyjednávací strategie. Samotný proces vyjednávání je obecně velmi špatně strukturovaný, takže od účastníků vyjednávání vyžaduje tvořivost a originalitu. Teorii her lze využít i v *teorii voleb* (tzv. volební hry), kdy se při vytváření případných koalic konstruují tzv. indexy síly pro zjištění míry vlivu jednotlivých politických subjektů.

Jak už plyne z výše uvedeného stručného přehledu, problematika skupinového rozhodování je velmi rozsáhlá a rozmanitá a rozhodně není možné ji v této práci obsáhnout celou. Proto se zaměříme jen na její část, a to na teorii společenského výběru.

Kapitola 2

Teorie společenského výběru

Teorie společenského výběru studuje způsoby agregace individuálních preferencí jednotlivých voličů do společné skupinové preference. Tento proces obvykle probíhá ve dvou krocích. V prvním kroku jednotliví voliči vyjádří své individuální preference a ve druhém kroku pak dojde k samotnému vyhodnocení těchto dat a k určení skupinového rozhodnutí. Z pohledu voliče, který v prvním kroku poskytuje své preference, je žádoucí, aby byl volební proces dostatečně jednoduchý a srozumitelný. Na druhou stranu požadujeme, aby výsledek volebního procesu co nejpřesněji odrážel názory voličů a zároveň aby fáze vyhodnocování probíhala efektivně, dostatečně rychle a dala se popsat přesným algoritmem. Při navrhování agregační procedury je tak nutné oba tyto aspekty zohlednit. Ukazuje se, že výsledek společenské volby je závislý na tom, jakou metodu agregace (tj. vyhodnocení dat) použijeme – různé metody mohou dát různé výsledky (viz např. [13]). Na agregační funkce obecně většinou klademe určité rozumné požadavky, které bychom od spravedlivých a demokratických voleb očekávali. Jak ukážeme v dalším textu, najít takovouto agregační funkci není vůbec jednoduchý úkol.

Z pohledu výsledku agregace rozlišujeme dva základní přístupy. Pokud z množiny alternativ potřebujeme vybrat pouze tu nejlepší (vítěze), použijeme tzv. *funkci společenského výběru*. V případě, že jako výsledek požadujeme uspořádání všech alternativ, použijeme tzv. *funkci společenského blahobytu*.

V závislosti na typu informace o preferencích, které poskytují jednotliví voliči, rozlišujeme dva typy agregace. *Ordinální* agregační funkce používají pro určení skupinového rozhodnutí pouze tzv. ordinální preference, kdy každý volič poskytne pouze pořadí alternativ. Druhým typem jsou *kardinální* agregační funkce; v tomto případě je třeba od voličů získat navíc i informace o síle jejich preferencí týkajících se jednotlivých alternativ. V této souvislosti se objevuje pojem *užitku* voliče z dané alternativy.

2.1. Historie

Ve své moderní podobě je teorie společenského výběru poměrně mladou disciplínou. Její kořeny sahají ke konci první poloviny dvacátého století. Jednotlivé dílky této rozsáhlé teorie se však objevovaly již dlouho předtím.

Už ve druhém století před naším letopočtem navrhl *Plinius Mladší*, římský přírodovědec, filosof a vojenský a námořní velitel, použití pravidla plurality (viz Kapitola 3.3) při soudních rozhodnutích v římském senátu.

Z 13. století pochází práce *Ramona Lulla*, katalánského spisovatele, filozofa, misionáře a logika. Ve svých textech doporučil pro volby systém založený na párovém porovnávání jednotlivých kandidátů. Metoda, kterou popsal, je dnes známá jako Copelandova metoda (viz Definice 21 na str. 58). Už tehdy si byl Lull vědom toho, že výsledkem volby může být i remíza, takže navrhl (i když ne matematické) pravidlo, jak určit v takové situaci vítěze jediného. Další metoda, kterou Lull navrhl, byla založena na principu postupné eliminace kandidátů (obdoba dnešních vyřazovacích systémů typu play off). V tomto případě však autor pravděpodobně nevěděl, že tento způsob volby je manipulovatelný, tj. že způsob, jakým takové volby zorganizujeme, silně ovlivní to, kdo bude vítězem.

Ve století patnáctém všestranný německý učenec, filozof a církevní hodnostář *Mikuláš Kusánský* v jednom ze svých spisů popsal způsob volby císaře Svaté říše římské. Z jeho popisu volby plyne, že se jedná přesně o Bordovu metodu (viz Definice 14 na str.44). Není zde zmíněna možnost remízy, jejíž pravděpodobnost je však pro malé počty voličů zanedbatelná. Mikuláš Kusánský jako předpoklad použití této metody uvažoval podmínku (obdobně jako později samotný J. Borda), že všichni voliči jsou čestní a hlasují podle svého skutečného přesvědčení. Tímto předpokladem tak „eliminoval" jednu z nežádoucích vlastností Bordovy metody, kterou je její manipulovatelnost (viz str.24).

Za skutečné zakladatele teorie společenského výběru v 18. století jsou však považováni dva učenci, Jean Charles de Borda a Jean Antoine Nicolas de Caritat, markýz de Condorcet.

Jean Charles de Borda byl francouzský matematik, fyzik a astronom. Mnoho svých objevů týkajících se zejména mechaniky tekutin, navigace a geodézie aplikoval během svého působení ve francouzské armádě. Jeho přínos k teorii společenské volby by se mohl zdát malý, neboť svůj volební systém popsal na pouhých devíti stranách v jednom ze svých spisů. Nicméně jeho metoda je dnes hojně využívána a jedná se o metodu označovanou jako Bordova metoda: každý volič seřadí kandidáty od nejlepšího k nejhoršímu (bez remíz) a kandidátovi na posledním místě přiřadí jeden bod, kandidátovi na předposledním místě dva body, až kandidátovi na prvním místě přiřadí tolik bodů, kolik je počet všech kandidátů; vítězem je pak kandidát (příp. více kandidátů), který v součtu bodů od jednotlivých voličů dosáhne nejvyššího počtu bodů. Kromě už výše zmíněných devíti stran v dalších pracích Borda zkoumal vlastnosti své metody a její vztah s metodou plurality.

Jean Antoine Nicolas de Caritat, markýz de Condorcet, současník Bordy, byl francouzský matematik, filozof a politik. Ve svém rozsáhlém díle se zabýval mnoha tematy a k teorii společenského výběru přispěl zejména dvěma následujícími poznatky. První z nich (tzv. Condorcet's jury theorem) se týká pravděpodobnosti správného rozhodnutí skupiny voličů. Skupinu voličů zde představuje soudní porota, jejímž úkolem je rozhodnout o vině či nevině: pokud je porota složená z porotců, přičemž každý porotce s pravděpodobností $p > \frac{1}{2}$ rozhodne správně, pak pravděpodobnost toho, že celá porota rozhodne správně, je větší než p a navíc tato pravděpodobnost roste se zvyšujícím se počtem porotců. Condorcet je ale známější díky svému příkladu, v němž ukázal, že pravidlo prosté většiny pro více než dva kandidáty může generovat tzv. cykly (tj. nemusí určit vítěze). Jako vítěze přitom uvažoval kandidáta, který při párovém srovnávání s ostatními kandidáty vždy zvítězí. Takový kandidát se pak nazývá Condorcetův vítěz (viz také

Kapitola 3.4). V dalším příkladu pak ukázal, že Bordova metoda (ačkoli ji takto nenazval ani Bordu přímo nezmínil) může jako vítěze vybrat jiného kandidáta než Condorcetova vítěze. Zároveň také upozornil na to, že Bordova metoda je manipulovatelná. Ve svém dalším spise pak navrhl volební metodu (dnes známá jako Copelandova metoda), kdy vítězem volby je Condorcetův vítěz, a pokud tento neexistuje, pak je vítězem kandidát, který porazí nejvíce ostatních kandidátů při párovém porovnávání.

Rozporem mezi Bordovým a Condorcetovým přístupem k volebním systémům se spustila dlouhá debata, která se protáhla až do současnosti. Oba přístupy mají totiž své výhody i nevýhody a jejich příznivci (resp. odpůrci) se dodnes neshodli na tom, který z nich je lepší.

Přestože se během devatenáctého a první poloviny dvacátého století teorie společenského výběru dostala trochu mimo zájem, stojí za zmínku dva učenci. Prvním z nich je *Charles Lutwidge Dodgson*, anglický spisovatel a matematik, známý pod pseudonymem Lewis Carrol. Ačkoli neznal práce Bordy ani Condorceta, navrhl několik různých volebních metod, mezi nimiž byly i Bordova metoda a koncept Condorcetova vítěze. Druhým je *Edward Nanson*, anglický matematik, který ale většinu života strávil v Austrálii a podílel se i na reformě tamějšího volebního systému. Navrhl metodu, která určí Condorcetova vítěze (pokud existuje) pomocí iterační metody založené na Bordově metodě. V každém kroku jsou vyřazeni kandidáti, kteří nedosáhli aspoň průměrné Bordovy hodnoty (viz Definice 13). Eliminace pak pokračuje pouze se zbylými kandidáty až do okamžiku, kdy zůstane jediný vítěz.

Ve 40. letech dvacátého století došlo ke znovuobnovení zájmu o teorii společenské volby. Nejvýznamnější postavou té doby byl americký ekonom, spisovatel a politický teoretik *Kenneth Joseph Arrow* (nar. 1921). Nezabýval se konkrétními volebními metodami, ale zaměřil se na třídu všech možných agregačních metod, které nazval *funkce společenského blahobytu*, a zkoumal jejich vlastnosti. Nakonec dokázal tvrzení (tzv. Arrow's Impossibility Theorem, viz Věta 2) o neexistenci takové agregační funkce, která by splňovala několik velmi rozumných požadavků. Tento výsledek byl nejdříve pokládaný za něco negativního, byl například považován za matematický důkaz nemožnosti demokracie. Jiní, mezi nimi i indický ekonom a filozof *Amartya Sen*, ho intepretovali tak, že ordinální preference voličů jsou nedostatečné k tomu, aby mohla být provedena společensky přijatelná volba. Pokud by voliči byli schopni poskytnout navíc i porovnatelné kardinální informace o jednotlivých kandidátech, pak je již rozumná volba možná (viz také Kapitola 2.5).

Arrowův výsledek podnítil další rozsáhlý výzkum a rozpoutal debaty týkající se rozumných principů společenské volby, ekonomie blahobytu a demokratických volebních systémů. Teorie společenského výběru je velmi rozsáhlá a využitelná v mnoha oblastech (např. ekonomie, politické vědy, matematika, informatika nebo biologie) a proto je i v současné době intenzivně studována.

Podrobnější informace týkající se historických souvislostí a dalších významných osobností této teorie lze nalézt např. v [19] nebo [15], které jsme jako zdroje použili při zpracování této kapitoly.

2.2. Základní pojmy

V této kapitole zavedeme základní pojmy a označení, která budeme dále v textu používat; čerpali jsme zejména z [15], [1] a [4].

V literatuře naneštěstí neexistuje jednotné značení, jednotliví autoři používají různé pojmy a označení pro totéž. Z toho důvodu se může stát, že v použitých zdrojích se označení a pojmy mohou lišit od těch, které budeme používat my. Obzvláště je nutné poznamenat, že v literatuře není ustálené pojmenování agregačních operátorů, které budou zavedeny v následujících kapitolách.

Uvažujme konečnou množinu n voličů (kde $n \in \mathbb{N}$), které budeme označovat přirozenými čísly, tj. $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Symbolem A označme množinu m alternativ (kde $m \in \mathbb{N}$). Pro označování alternativ budeme používat malá písmena ze začátku abecedy, tj. $A = \{a, b, c \ldots\}$.

Předpokládejme, že každý volič je schopen seřadit všechny alternativy podle svých preferencí od nejvíce preferované alternativy po nejméně preferovanou alternativu. Toto seřazení lze pro každého voliče $i \in V$ reprezentovat pomocí binární relace R_i na množině všech alternativ A. Pokud $a, b \in A$ jsou dvě alternativy, pak zápis aR_ib vyjadřuje skutečnost, že volič i považuje alternativu a za lepší nebo stejně dobrou jako alternativu b, neboli že volič i slabě preferuje alternativu a před alternativou b. Předpokládáme dále, že pro všechna $i \in V$ jsou relace R_i úplné ($\forall a, b \in A : aR_ib \vee bR_ia$) a tranzitivní ($\forall a, b, c \in A : aR_ib \wedge bR_ic \Rightarrow aR_ic$). Relace R_i tedy nemusí být nutně ostré (tj. obecně jsou to tzv. slabé relace), takže připouštíme, že volič může považovat dvě nebo více alternativ za stejně dobré. Proto je vhodné $\forall i \in V$ tyto relace slabé preference R_i rozdělit na dvě části a definovat relace ostré preference P_i a relace indiference I_i vztahy:

$$aP_ib \iff aR_ib \wedge \neg bR_ia$$

$$aI_ib \iff aR_ib \wedge bR_ia$$

Relace P_i a I_i se nazývají relace indukované relací R_i. Zápis aP_ib tedy vyjadřuje, že volič i považuje alternativu a za (ostře) lepší než alternativu b, neboli že ostře preferuje alternativu a před alternativou b. Zápis aI_ib vyjadřuje, že volič i považuje alternativu a za stejně dobrou jako alternativu b, neboli že alternativy a a b považuje za indiferentní.

Množinu všech slabých preferencí na množině A označme symbolem $\mathcal{R}$. Množina $\mathcal{R}$ tedy obsahuje všechna možná uspořádání alternativ z množiny A, přičemž v uspořádání připouštíme i indiferenci mezi alternativami.

Pokud $R \in \mathcal{R}$, pak lze ukázat, že pro indukované relace P a I platí $\forall a, b, c \in A$ následující vztahy (viz např. [1]):

- $aPb \Rightarrow aRb$
- $aPb \wedge bPc \Rightarrow aPc$ (relace P je tranzitivní)
- $aIb \wedge bIc \Rightarrow aIc$ (relace I je tranzitivní)
- $aRb \vee bPa$
- $aPb \wedge bRc \Rightarrow aPc$

Pro danou množinu voličů V a danou množinu alternativ A budeme pojmem *profil* uznačovat uspořádanou n-tici $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$, kde R_i je relace preference i-tého voliče (neboli uspořádání alternativ voličem i). Pod označením profil si lze představit například soubor n odevzdaných volebních lístků od jednotlivých voličů s vyznačeným pořadím alternativ (kandidátů).

Symbolem R (resp. P a I) označíme relaci slabé preference (resp. ostré preference a indiference) na množině A, která vyjadřuje skupinové uspořádání alternativ; analogicky jako u preferencí jednotlivých voličů, aRb lze interpretovat tak, že skupina voličů V (slabě) preferuje alternativu a před alternativou b. Obdobnou interpretaci mají i aPb (skupina ostře preferuje a před b) a aIb (skupina považuje alternativy a a b za stejně dobré).

2.3. Ordinální funkce společenského blahobytu

V této kapitole se budeme zabývat situací, kdy každý z voličů poskytne uspořádání množiny alternativ (neboli svoji relaci slabé prefrence) a jako výsledek agregace těchto jednotlivých upořádání chceme získat skupinové uspořádání množiny alternativ (neboli skupinovou relaci preference). Dále předpokládáme, že ani jednotliví voliči, ani celá skupina nemají možnost vyjádřit intenzitu svých preferencí mezi jednotlivými alternativami, a že tak pracujeme pouze s ordinálním uspořádáním alternativ. V této situaci je pro agregaci možné použít tzv. ordinální funkci společenského blahobytu. Terminologie pro tento typ funkce není v literatuře jednotná, nejčastěji se používá označení *social welfare function* (např. [1], [6]), *preference aggregation rule* ([15]) nebo *aggregation function* ([4]).

Definice 1 *Ordinální funkcí společenského blahobytu* budeme nazývat agregační funkci F, která profilu (příslušnému množině voličů V a množině alternativ A) přiřadí skupinovou relaci na množině A.

Ordinální funkce společenského blahobytu agreguje uspořádání alternativ poskytnutých jednotlivými voliči do jediného (skupinového) uspořádání alternativ. Možností, jak toto výsledné uspořádání (relaci) získat je značné množství.

Skupinové rozhodnutí přitom závisí nejen na vstupních uspořádáních alternativ poskytnutých jednotlivými voliči, ale vzhledem k odlišným matematickým vlastnostem jednotlivých funkcí závisí také na zvolené metodě agregace. Například v [13] je uvedeno tvrzení, které dokonce říká, že v určité situaci lze vhodnou volbou agregační metody zajistit vítězství pro konkrétního kandidáta.

Věta 1 ([13]) *Pokud má množina alternativ alespoň čtyři prvky, pak existuje profil, kdy vhodnou volbou agregační funkce lze dosáhnout toho, že každý kandidát může ve skupinovém pořadí obsadit libovolnou pozici.*

Z tohoto tvrzení lze usoudit, že výsledek skupinové volby pak více než preference voličů může odrážet zvolenou metodu agregace (neboli jinými slovy zvolenou volební metodu).

Také z tohoto důvodu požadujeme po agregačních funkcích určité rozumné požadavky, které očekáváme od metod vhodných pro vyhodnocování výsledků voleb, které mají být jistým způsobem spravedlivé a demokratické. Přitom je ale otázkou, co považujeme za spravedlivé volby - na toto téma se vede mnoho diskuzí a to nejen na poli matematiky ale i filosofie (viz např. [6]).

Uvažujme nyní ordinální funkci společenského blahobytu F a nechť relace $R = F(R_1, \ldots, R_n)$ určuje výsledné skupinové uspořádání množiny alternativ A pro vstupní profil $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$. Pro tuto funkci dále uvažujme následující vlastnosti:

(U) **Univerzální definiční obor** (Universal Domain)
Definičním oborem funkce F je celá množina $\mathcal{R}^n$.
Touto podmínkou požadujeme, aby funkce F dokázala přiřadit výsledek (skupinovou relaci R) libovolnému profilu z $\mathcal{R}^n$.

(T) **Tranzitivita** (Transitivity)
Výsledné skupinové uspořádání je tranzitivní, tj. $R \in \mathcal{R}$.
Tato podmínka znamená, že pokud skupina preferuje alternativu a před alternativou b a alternativu b před alternativou c, pak nutně musí preferovat alternativu a před alternativou c.

(P) **Paretovský princip, Paretovská optimalita** (Weak Pareto principle)
Pro všechny dvojice alternativ $a, b \in A$ platí implikace:

$$aP_ib \; \forall i \in V \implies aPb.$$

Podmínka říká, že pokud všichni voliči ostře preferují alternativu a před alternativou b, pak i celá skupina ostře preferuje a před b.

(I) **Nezávislost na irelevantních alternativách** (Independence of irrelevant alternatives)
Pro všechny dvojice profilů $(R_1, R_2, \ldots, R_n), (R'_1, R'_2, \ldots, R'_n) \in \mathcal{R}^n$ *a všechny dvojice alternativ* $a, b \in A$ *platí implikace:*

$$((aR_ib \Leftrightarrow aR'_ib) \wedge (bR_ia \Leftrightarrow bR'_ia)) \; \forall i \in V \implies (aRb \Leftrightarrow aR'b),$$

kde $R' = F(R'_1, R'_2, \ldots, R'_n)$.
Podmínka říká, že relativní pozice každých dvou alternativ $a, b \in A$ ve skupinovém uspořádání (tj. která z nich je skupinově preferována před druhou) závisí pouze na jejich relativních pozicích v individuálních uspořádáních. Pokud máme dva různé profily takové, že každý z voličů poskytne v obou profilech stejnou preferenci mezi dvěma alternativami a a b, pak skupinová preference musí být pro případ obou profilů stejná. Znamená to, že při porovnávání alternativ a a b se nesmí brát v potaz jejich umístění v individuálních uspořádáních, ale pouze jejich vzájemná relativní pozice.

(D) **Neexistence diktátora** (Non-Dictatorship)
Neexistuje volič $i \in V$ *takový, že pro všechny profily* $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ *a všechny alternativy* $a, b \in A$ *platí* $aP_ib \Leftrightarrow aPb$.
Podmínka požaduje, aby mezi voliči neexistoval tzv. *diktátor*, přičemž diktátorem nazýváme voliče, který za všech okolností určuje skupinovou preferenci a to bez ohledu na preference ostatních voličů.

Přestože se zdá, že všechny uvedené podmínky jsou rozumné, následující slavná Arrowova věta ([1], viz také [15] nebo [4]) říká, že žádná z ordinálních funkcí společenského blahobytu nemůže splňovat všechny tyto podmínky současně.

Věta 2 Arrow's Impossibility Theorem
Pokud je množina voličů V konečná a množina A obsahuje aspoň tři alternativy, pak neexistuje žádná ordinální funkce společenského blahobytu, která splňuje všechny podmínky (U), (T), (P), (I) *a* (D) *současně.*

Důkazů Arrowovy věty bylo od doby jejího prvního publikování v roce 1951 napsáno a publikováno velké množství. Každý z nich používá trochu jiný přístup. Samotný K. Arrow v [1] použil způsob, kdy předpokládal, že funkce F splňuje podmínky (U), (T), (P), (I) a z jejich platnosti pak odvodil, že v této situaci musí mezi voliči existovat diktátor a je tedy porušena podmínka (D). Arrowovu větu lze tak zformulovat v následujícím ekvivalentním tvaru:

Důsledek 1 *Nechť je množina voličů V konečná, množina A obsahuje aspoň tři alternativy a nechť ordinální funkce společenského blahobytu splňuje podmínky* (U), (T), (P) *a* (I)*. Potom se jedná o diktaturu (tj. mezi voliči existuje diktátor).*

Další varianty a přístupy k důkazu Věty 2 lze nalézt například v [10] a [5]. Někteří autoři pak důkaz Arrowovy věty spojují s důkazem tzv. Gibbard-Satterthwaiteovy věty týkající se existence jisté rozumné funkce společenského výběru (viz Věta 3 na straně 25). Ukazují, že důkazy obou těchto vět jsou principielně velmi podobné (viz například [18] a [25]).

Kenneth Arrow ve své původní formulaci Věty 2 z prvního vydání knihy [1] z roku 1951 používal trochu jiné vlastnosti pro ordinální funkce společenského blahobytu než jsou ty, které jsou uvedeny právě ve Větě 2 výše. Arrow uvažoval následující vlastnosti, které zde sice nebudeme formulovat zcela přesně matematicky, ale popíšeme je pouze slovně:

(Pod1) Množina alternativ A obsahuje aspoň tři různé prvky.

(Pod2) Pozitivní asociace skupinových a individuálních hodnot (positive response, positive association of social and individual values)

Mějme dán profil $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ a tím i individuální preference mezi dvěma alternativami $a, b \in A$. Předpokládejme nyní, že někteří (nejméně však aspoň jeden) z voličů změní své preference mezi těmito dvěma alternativami a a b tak, že alternativu a posune ve svém individuálním uspořádání výše vůči alternativě b; tento nový profil označme jako $(R'_1, R'_2, \ldots, R'_n) \in \mathcal{R}^n$. Pokud pro původní profil platilo aRb, pak pro upravený profil musí nutně platit $aR'b$. Znamená to, že pozice alternativy a vůči alternativě b se ve výsledném skupinovém uspořádání nemůže zhoršit.

(Pod3) Shodná s podmínkou (I), tj. nezávislost na irelevantních alternativách.

(Pod4) Občanská suverenita

Neexistuje dvojice alternativ, jejíž skupinová preference by byla dána pevně předem, tj. nebylo by možno ji ovlivnit individuálními preferencemi voličů. Nemůže tedy existovat dvojice alternativ $a, b \in A$ taková, že aRb platí pro každý profil $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$.

(Pod5) Shodná s podmínkou (D), tj. mezi voliči neexistuje diktátor.

Svou větu pak Arrow formuloval ve tvaru: *Pokud ordinální funkce společenského výběru splňuje předpoklady* (Pod1), (Pod2), (Pod3) *a (pro každý profil) generuje úplné a tranzitivní skupinové uspořádání množiny alternativ, pak porušuje alespoň jednu z podmínek* (Pod4) *a* (Pod5)*.*

V [1] pak v kapitole *Notes on the theory of social choice, 1965* již dokázal, že z podmínek (Pod2), (Pod3) a (Pod4) plyne i vlastnost (P) a svou větu pak přeformuloval i s použitím podmínek uvedených ve Větě 2. Navíc podmínka (P) (Paretovský princip) byla již tehdy všeobecně přijímána jako rozumný předpoklad pro funkce společenského blahobytu a Arrowův výsledek tak mohl být s tímto upraveným předpokladem snáze porovnáván s jinými výsledky, které používaly odlišný přístup k formulaci problému společenské volby.

Arrowova věta tedy ukázala, že žádná ordinální funkce společenského uspořádání nemůže současně splňovat podmínky (U), (T), (P), (I) a (D). Tato věta tak inspirovala vznik mnoha knih i článků, které se snaží nějakým způsobem tento problém překonat. Jednou z možností je oslabování některých podmínek, kladených na agregační proces (viz např. [15], [4], [6], [12]).

2.4. Funkce společenského výběru

V předchozí kapitole jsme se zabývali ordinální funkcí společenského blahobytu, kdy výsledkem agregace preferencí jednotlivých voličů bylo skupinové uspořádání alternativ neboli skupinová preference. V některých případech ale není třeba znát úplné pořadí všech jednotlivých alternativ, postačí určit pouze vítěze. Proto má smysl uvažovat tzv. funkci společenského výběru, jejímž výstupem je pouze jediná vítězná alternativa (případně množina vítězných alternativ). V literatuře nalezneme tento typ funkce pod názvy *choice function* ([1]), *social choice rule* ([15]) nebo *social choice function* ([6]).

Definice 2 *Funkcí společenského výběru* nazýváme agregační funkci f, která profilu (příslušnému množině voličů V a množině alternativ A) přiřadí podmnožinu A^* množiny A.

Funkci společenského výběru f lze jednoduše odvodit z ordinální funkce společenského blahobytu F. Pro profil $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ definujme

$$f(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \{a \in A\,;\, aRb\ \forall b \in A\} = A^*,$$

kde $R = F(R_1, R_2, \ldots, R_n)$. Výstupem funkce f je tedy množina alternativ, které jsou ve skupinovém uspořádání R preferovány před všemi ostatními alternativami.

Obráceně to však takto jednoduché není, protože ne každá funkce společenského výběru bude schopna generovat pořadí alternativ, které poskytuje agregace pomocí ordinální funkce společenského blahobytu (viz například [20]).

Je důležité také zmínit, že v Definici 2 není přesně specifikována množina A^*, která je výsledkem agregace pomocí funkce společenského výběru. Obecně tak mohou nastat tyto tři případy:

- Pokud $A^* = \emptyset$, pak funkce nedokázala vybrat vítěze.
- Pokud $A^* \neq \emptyset$ a obsahuje více než jeden prvek, pak funkce našla více vítězů, mezi nimiž již dále neumí rozhodnout.
- Pokud $A^* = \{a\}$ (tj. množina vítězů obsahuje jedinou alternativu), pak funkce našla jediného vítěze.

Je zřejmé, že ve většině situací je žádoucí případ, kdy množina vítězů je jednoprvková.

Jak už bylo výše zmíněno, funkci společenského výběru lze jistým způsobem chápat jako speciální případ ordinální funkce společenského blahobytu. Proto má smysl i po těchto funkcích požadovat jisté rozumné vlastnosti, které budou jakousi analogií k podmínkám, které jsme po ordinálních funkcích společenského blahobytu požadovali ve Větě 2 (Arrowova věta). Analogií k této Větě je pro funkce společenského výběru Věta 3, kterou uvedeme níže po zavedení potřebných pojmů.

Uvažujme nyní funkci společenského výběru f a nechť $A^* = f(R_1, \ldots, R_n)$ je množina vítězů odpovídající profilu $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$. Pro tuto funkci dále uvažujme následující vlastnosti:

(U*) **Univerzální definiční obor** (Universal domain)

Definičním oborem funkce f je celá množina $\mathcal{R}^n$.

Touto podmínkou požadujeme, aby funkce f dokázala přiřadit vítěze (množinu A^*) libovolnému profilu z $\mathcal{R}^n$.

(D*) **Neexistence diktátora** (Non-dictatorship)

Mezi voliči neexistuje diktátor. Přitom za diktátora je označován volič $i \in V$ takový, že pro každý profil $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ a všechny alternativy $a \in A$ platí $a^* R_i a \Leftrightarrow a^* \in f(R_1, R_2, \ldots, R_n)$.

(RC*) **Omezení výběru** (Range constraint)

Existují alespoň tři navzájem různé alternativy z množiny A, které funkce f někdy vybere jako vítěze, tj. pro každou z těchto tří alternativ existuje profil z $\mathcal{R}$, pro nějž tato alternativa patří do množiny vítězů A^*.

(R*) **Rozhodnost** (Resoluteness)

Pro každý profil $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ existuje právě jedna alternativa $a^* \in A$ tak, že $f(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \{a^*\}$ (zkráceně budeme psát pouze $f(R_1, R_2, \ldots, R_n) = a^*$).

Tato podmínka zajišťuje, aby funkce f za jakékoli situace vždy určila vítěze a navíc aby tento vítěz byl právě jeden.

(M*) **Manipulovatelnost** (Manipulability)

Funkce f se nazývá *manipulovatená voličem $i \in V$ při profilu* $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$, jestliže platí, že pokud volič i uvede falešnou preferenci R'_i (kde $R'_i \neq R_i$), pak f vybere jako vítěze alternativu a', kterou volič i ostře preferuje před alternativou a^*, kterou by f vybrala v případě, že by volič i uvedl pravdivou preferenci R_i.

(SP*) **Nemanipulovatelnost, odolnost vůči strategiím** (Strategy-proofness)

Funkce f je nemanipulovatená (odolná vůči strategiím), když není manipulovatelná, tj. když neexistuje profil z $\mathcal{R}^n$ takový, při němž by funkce f byla manipulovatelná některým voličem $i \in V$.

Než se dostaneme k samotné Větě 3, uvedeme několik poznámek, které se týkají ne/manipulovatelnosti funkce společenského výběru. Zhruba řečeno, funkce f je nemanipulovatelná, pokud žádný volič nemůže nikdy profitovat z toho, že by místo své skutečné preference uvedl preferenci falešnou. Následující poznámka pochází od samotného A. Gibbarda : "... i když je funkce f (volební systém) manipulovatelná, tak to ještě neznamená, že za daných okolností je některý volič skutečně schopen výsledky ovlivnit (neboli zmanipulovat). Říkáme jen, že za určitých okolností by někdo byl takové manipulace schopen."(cit. [11], str. 590).

Definice manipulovatelnosti předpokládá, že některý z voličů může mít zisk (profit) v případě, že neuvede své skutečné preference, ale falešné preference (neboli zvolí nějakou volební strategii k dosažení svých skutečných preferencí). To ale předpokládá, že bude znát volební mechanismus (funkci společenského výběru) a že bude vědět, jaké jsou preference ostatních voličů, a že ostatní voliči nezmění své preference v důsledku jeho falešné preference. Navíc se předpokládá, že tato manipulovatelnost je možná pouze pro určitý profil. Z těchto úvah tak plyne, že i když je funkce f manipulovatelná, voliči nejsou nijak zvlášť motivováni k uvádění falešných preferencí. Je to proto, že ne vždy se jim to vyplatí. Informace o možné manipulovatelnosti se ale do jisté míry využít dá. Pokud volič ví, že je používaný volební systém manipulovatelný, má pro něj smysl zkoumat, jestli může profitovat z použití nějaké volební strategie. Naopak pokud ví, že funkce není manipulovatelná, použití strategií pro něj nemá smysl a není tak třeba vynakládat prostředky na její případné hledání. [3]

Nyní již vyslovíme tvrzení, které zhruba říká, že pokud máme dostatečně rozumnou funkci společenského výběru, pak je buď manipulovatelná, nebo mezi voliči existuje diktátor. Toto tvrzení dokázali nezávisle na sobě A. Gibbard [11] a M. A. Satterthwaite [20].

Věta 3 Gibbard-Satterthwaite Theorem
Neexistuje funkce společenského výběru, která by současně splňovala všechny podmínky (U), (RC*), (R*), (D*) a (SP*).*

Věta říká, že neexistuje pravidlo (funkce společenského výběru), které by pro libovolný profil (výsledek hlasování) vybralo právě jednoho vítěze (a to z nejméně tří možných) a přitom nebylo manipulovatelné a mezi voliči neexistoval diktátor. Jinými slovy, každá funkce společenského výběru f porušuje alespoň jednu z podmínek uvedených v této větě, tzn. že připouští aspoň jednu možnost z následujících:

- Pro některý z profilů není funkce f schopna určit vítěze (porušení (U*)).

- Mezi voliči existuje diktátor (porušení (D*)). V tomto případě vlastně agregace individuálních preferencí vůbec nemá smysl, protože vítěze vždy určí volič, který je diktátorem, a to bez ohledu na preference ostatních voličů.
- Funkce f nedokáže najít jediného vítěze (porušení (R*)). Množina vítězů by v tomto případě byla víceprvková a bylo by nutno mezi těmito alternativami dále rozhodnout o jediném vítězi.
- Počet alternativ, které může funkce f vybrat jako vítěze je menší než tři (porušení (RC*)). V takovém případě se vybírá pouze ze dvou možných alternativ a v této situaci všechny ostatní podmínky z Věty 3 splňuje pravidlo prosté většiny (viz [16]). Toto pravidlo je podrobněji popsáno v Kapitole 3.1.
- Funkce f je manipulovatelná (porušení (SP*)).

Od doby publikování Gibbard-Satterthwaiteovy věty se objevilo mnoho knih i článků, které ukazují, že pokud oslabíme nebo případně úplně vynecháme kteroukoli z podmínek ve Větě 3, pak existuje funkce společenského výběru, která splňuje všechny ostatní podmínky a která by byla použitelná pro demokratické určení vítězné alternativy. Jednou z možností je například omezení množiny přípustných profilů, kdy uvažujeme pouze tzv. Blackovy jednovrcholové preference (blíže viz [6] nebo [12]). Je ale otázkou, zda jsme ochotni některou z podmínek oslabit či se jí dokonce vzdát, protože všechny jsou dosti zásadní a jejich vynechání by mohlo mít nežádoucí důsledky (viz např. [6]).

Postupem času se také ukázalo, že Arrowova věta a Gibbard-Satterthwaiteova věta mají k sobě velmi blízko a že se dají i dokázat použitím téměř stejného postupu, jak již bylo zmíněno výše (viz [18] a [25]).

2.5. Kardinální funkce společenského blahobytu

V předchozích kapitolách jsme připouštěli pouze ordinální uspořádání alternativ a ukázali jsme, že za tohoto předpokladu neexistuje ordinální funkce společenského blahobytu ani funkce společenského výběru, které by splňovaly soubor určitých velmi rozumných požadavků (viz Věta 2 a Věta 3). Jedinou možností, jak nějakou takovou funkci najít, byla zatím pouze cesta oslabení některého z požadavků, které jsme na tyto funkce kladli. Ukazuje se ale (viz např. [21]), že nemožnost existence těchto funkcí plyne také z toho, že uvažujeme pouze ordinální uspořádání alternativ. V tomto případě totiž máme relativně málo informací o preferencích (síle a typu) jednotlivých voličů a nemůžeme ani porovnávat intenzity preferencí mezi voliči navzájem. Pokud však umožníme voličům doplnit své ordinální preference o kardinální informaci (např. kolikrát je pro daného voliče lepší alternativa a než alternativa b) a umožníme tyto informace také mezi sebou porovnávat, existuje agregační mechanismus splňující všechny podmínky Arrowovy věty. Takovou funkci pak nazýváme kardinální funkcí společenského blahobytu a v literatuře ji nalezneme většinou pod označením *cardinal social welfare function* ([12]) nebo *social welfare functional* ([6], [15]).

Uvažujme tedy opět (konečnou) množinu voličů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ a konečnou množinu alternativ $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Ke každému voliči $i \in V$ uvažujme jeho individuální *funkci užitku* $W_i : A \to \mathbb{R}$, která každé alternativě $a \in A$ přiřadí reálné číslo $W_i(a)$. Číslo $W_i(a)$ lze interpretovat jako velikost (míru) užitku, kterou voliči i přináší alternativa a.

Individuální funkce užitku W_i generuje relaci (slabého) uspořádání $R_i \in \mathcal{R}$ množiny alternativ. Pro libovolné alternativy $a, b \in A$ stačí definovat

$$aR_ib \Leftrightarrow W_i(a) \geq W_i(b).$$

Naopak to však možné není. Funkce užitku v sobě obsahuje více informací než jen pouhé ordinální uspořádání, takže je zřejmé, že samotné ordinální uspořádání alternativ není schopné individuální funkci užitku generovat.

Uspořádanou n-tici funkcí individuálních užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ budeme nazývat *profilem užitků*.

Definice 3 *Kardinální funkcí společenského blahobytu* nazýváme agregační funkci F_C, která profilu užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ přiřadí relaci R na množině alternativ A.

Funkce F_C tedy na základě individuálních funkcí užitku W_i, $i = 1, \ldots, n$ (tj. na základě profilu užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$) uspořádá všechny alternativy z množiny A. Pokud porovnáme funkce F a F_C, pak jejich výstup je stejný (uspořádání alternativ), ale funkce F_C používá jako vstup bohatší informace než F.

Definice 3 je stejně jako v případě ordinální funkce společenského blahobytu vyslovena hodně obecně, tj. zatím nepožadujeme, aby funkce F_C dokázala pracovat s libovolným profilem užitků a ani aby výsledné uspořádání R množiny alternativ bylo úplné a tranzitivní.

Jak už bylo zmíněno výše, budeme nyní při agregaci využívat navíc i informace o individuálním užitku jednotlivých voličů pro různé alternativy. Tyto informace však s sebou přináší i problémy s jejich interpretací i zpracováním. Lze snadno ukázat, že pro voliče $i \in V$ mohou různé funkce užitku W_i generovat stejné uspořádání R_i. Uvažujeme–li například množinu alternativ $A = \{a, b, c\}$ a voliče $i \in V$, pak funkce W_i a W_i', kde

$$W_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = a \\ 3 & \text{pro } x = b \\ 2 & \text{pro } x = c \end{cases} \qquad \text{a} \qquad W_i'(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{pro } x = a \\ 10 & \text{pro } x = b \\ 8 & \text{pro } x = c, \end{cases}$$

generují stejné uspořádání R_i alternativ: bR_icR_ia. Z definic funkcí W_i a W_i' je ale vidět, že každá nese jinou kardinální informaci; při použití funkce W_i volič považuje alternativu b za třikrát lepší než alternativu a, zatímco při použití W_i' ji považuje za dvacetkrát lepší.

Dále je také nutno brát v úvahu, že pokud pro každého voliče $i \in V$ místo funkce užitku W_i použijeme funkci užitku $k \cdot W_i$, kde $k \in \mathbb{R}^+$ je kladná konstanta, pak zřejmě profily užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a $(k \cdot W_1, k \cdot W_2, \ldots, k \cdot W_n)$ nesou stejnou informaci a liší se pouze o škálování.

Z výše uvedeného je patrné, že je nutné umět rozeznat, které informace v profilu užitků skutečně vyjadřují sílu preference a které jsou pouze důsledkem různé reprezentace těchto preferencí. K tomuto účelu si nejdříve zavedeme různé možnosti porovnávání užitků a to pomocí tzv. smyslupných tvrzení o užitcích.

Obecně je těchto možností porovnávání mnoho, my použijeme pouze následující dvě:

- **Porovnávání úrovně** (Level comparison, LC)
  Nechť $a, b \in A$, $i, j \in V$ a nechť $W_i(a) \geq W_j(b)$. Pak říkáme, že *užitek i-tého voliče z alternativy a je aspoň tak velký jako užitek j-tého voliče z alternativy b*. Pokud $i = j$, porovnáváme užitky týkající se jednoho voliče (tzv. individuální porovnání), v případě $i \neq j$ pak dvou různých voličů (tzv. interpersonální porovnávání).

- **Porovnávání jednotkové** (Unit comparison, UC)
  Pro $a, b, c, d \in A$ a $i, j \in V$ uvažujme reálné číslo λ splňující vztah $W_i(a) - W_i(b) = \lambda\,(W_j(c) - W_j(d))$. Pak číslo λ vyjadřuje *poměr mezi „ziskem/ztrátou i-tého voliče v případě změny z alternativy b na a" a „ziskem/ztrátou j-tého voliče v případě změny z alternativy d na c"* neboli má smysl tyto (jednotkové) změny užitků porovnávat. Pro $i = j$ opět porovnáváme tyto změny pro jednoho voliče, pro $i \neq j$ pro dva různé voliče.

Výše uvedené typy možného porovnávání užitků použijeme k vytvoření klasifikace kardinálních funkcí společenského blahobytu. Vytvoříme tak několik tříd těchto funkcí a to v závislosti na tom, jaký typ měřitelnosti (ordinální nebo kardinální) a porovnatelnosti (individuální nebo interpersonální) užitků budeme uvažovat (viz podmínky ONC, CNC, OLC a CUC níže). Třídy budou specifikovány pomocí přípustných transformací, které nezmění význam profilu užitků. Stanovíme tedy, vůči kterým změnám vstupního profilu užitků budou kardinální funkce společenského blahobytu z dané třídy invariantní.

Definice 4 Nechť F_C je kardinální funkce společenského blahobytu. Říkáme, že profily užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a $(W_1', W_2', \ldots, W_n')$ *nesou stejnou informaci*, jestliže $F_C(W_1, W_2, \ldots, W_n) = F_C(W_1', W_2', \ldots, W_n')$. V tomto případě se pak funkce F_C nazývá *invariantní* vůči změně profilů užitků z $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ na $(W_1', W_2', \ldots, W_n')$ a naopak.

V klasickém přístupu Arrowa bylo možné pouze individuální ordinální porovnávání alternativ, žádné kardinální ani interpersonální porovnávání nebylo přípustné. Tento předpoklad lze vyjádřit následující podmínkou:

Definice 5 (ONC) Individuální ordinální porovnávání bez interpersonálního porovnávání (Ordinal measurability with No interpersonal Comparability)
Říkáme, že profily užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a $(W'_1, W'_2, \ldots, W'_n)$ *nesou stejnou informaci ve smyslu* ONC, jestliže pro každého voliče $i \in V$ existuje (pozitivní) monotonní transformace $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že pro všechny alternativy $a \in A$ platí $W'_i(a) = \varphi_i(W_i(a))$. Říkáme, že funkce F_C *splňuje podmínku* ONC, jestliže $F_C(W_1, \ldots, W_n) = F_C(W'_1, \ldots, W'_n)$ pro všechny dvojice profilů užitků $(W_1, \ldots, W_n), (W'_1, \ldots, W'_n)$, které nesou stejnou informaci typu ONC.

Podmínka ONC umožňuje individuální funkce užitku libovolně monotonně transformovat (přeškálovat) a to bez ztráty informace. Monotonní tranformaci lze reprezentovat libovolnou rostoucí funkcí, tj. funkcí, která zachovává uspořádání vstupních hodnot.

Dále uvažujme situaci, kdy je možno porovnávat míru individuálního užitku pro jednotlivé alternativy, nicméně stále ještě nepřipouštíme interpersonální porovnání užitků. Tuto situaci vyjádříme podmínkou:

Definice 6 (CNC) Individuální kardinální porovnávání bez interpersonálního porovnání (Cardinal measurability with No interpersonal Comparability)
Říkáme, že profily užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a $(W'_1, W'_2, \ldots, W'_n)$ *nesou stejnou informaci ve smyslu* CNC, jestliže pro každého voliče $i \in V$ existují konstanty $k_i \in \mathbb{R}^+$ a $q_i \in \mathbb{R}$ takové, že $W'_i = k_i \cdot W_i + q_i$. Říkáme, že funkce F_C *splňuje podmínku* CNC, jestliže $F_C(W_1, \ldots, W_n) = F_C(W'_1, \ldots, W'_n)$ pro všechny dvojice profilů užitků $(W_1, \ldots, W_n), (W'_1, \ldots, W'_n)$, které nesou stejnou informaci typu CNC.

Individuální funkce užitku je za podmínky CNC určena jednoznačně až na (pozitivní) afinní transformaci, tj. je možno ji libovolně přeškálovat (kladnou konstantou) a posunout všechny hodnoty o libovolnou konstantu.

Abychom umožnili i interpersonální porovnávání užitků, uvažujeme dále následující podmínku:

Definice 7 (OLC) Individuální ordinální porovnávání s interpersonálním porovnáváním úrovní (Ordinal measurability with interpersonal Level Comparability)
Říkáme, že profily užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a $(W_1', W_2', \ldots, W_n')$ *nesou stejnou informaci ve smyslu* OLC, jestliže existuje (pozitivní) monotonní transformace $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $i \in V$ a $\forall a \in A$ platí $W_i'(a) = \varphi(W_i(a))$. Říkáme, že funkce F_C *splňuje podmínku* OLC, jestliže $F_C(W_1, \ldots, W_n) = F_C(W_1', \ldots, W_n')$ pro všechny dvojice profilů užitků $(W_1, \ldots, W_n), (W_1', \ldots, W_n')$, které nesou stejnou informaci typu OLC.

V případě podmínky OLC lze bez ztráty informace obsažené v profilu užitků jednotlivé individuální funkce užitků monotonně transformovat, ale pouze v případě, že pro všechny individuální funkce užitků je tato transformace stejná. V případě podmínky ONC se tyto transfomace mohly pro jednotlivé voliče lišit, takže proto nebylo umožněno interpersonální porovnávání.

Poslední situací, kterou zde budeme uvažovat, je situace, kdy můžeme porovnávat také interpersonální jednotkový užitek ze změny varianty (tj. umožníme interpersonální jednotkové porovnávání).

Definice 8 (CUC) Individuální kardinální porovnávání s interpersonálním jednotkovým porovnáváním (Cardinal measurability with interpersonal Unit Comparability)
Říkáme, že profily užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a $(W_1', W_2', \ldots, W_n')$ *nesou stejnou informaci ve smyslu* CUC, jestliže existují konstanty $k \in \mathbb{R}^+$ a $q_i \in \mathbb{R}$, $i \in V$, takové, že pro všechna $i \in V$ platí $W_i' = k \cdot W_i + q_i$. Říkáme, že funkce F_C *splňuje podmínku* CUC, jestliže $F_C(W_1, \ldots, W_n) = F_C(W_1', \ldots, W_n')$ pro všechny

dvojice profilů užitků $(W_1, \ldots, W_n), (W'_1, \ldots, W'_n)$, které nesou stejnou informaci typu CUC.

V případě podmínky CUC je tedy možno bez ztráty informace individuální funkce užitku přeškálovat (všechny ale se stejnou kladnou konstantou) a posunout (pro každé $i \in V$ lze přitom použít jinou reálnou konstantu).

Výše jsme uvedli několik situací, v nichž můžeme prohlásit, že dva různé profily užitků nesou stejnou informaci, tj. jejich agregací dostneme stejné skupinové uspořádání množiny alternativ. Tento výčet však rozhodně není úplný, další typy podmínek lze nalézt například v [15].

Po zavedení různých možností, jak srovnávat užitky, nás bude zajímat, jakým způsobem je možno tyto individuální funkce užitku W_i (resp. celý profil užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$) agregovat do výsledného skupinového uspořádání množiny alternativ. S použitím dodatečných podmínek (ONC, CNC, OLC nebo CUC), týkajících se právě této měřitelnosti a porovnatelnosti užitků, lze vyslovit analogii Arrowovy věty (Věta 2). Předtím je ale nutno přeformulovat podmínky, které jsou v ní použity, do jazyka funkcí užitku, protože nyní místo individuálních uspořádání R_i, $i \in V$, jsou vstupem do agregace právě individuální funkce užitků W_i, $i \in V$.

Uvažujme nyní kardinální funkci společenského blahobytu F_C a nechť relace $R = F_C(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ poskytuje výsledné skupinové uspořádání množiny alternativ pro vstupní profil užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$. Pro tuto funkci pak uvažujme následující vlastnosti:

($\mathrm{U_C}$) **Univerzální definiční obor** (Universal domain)

Definičním oborem funkce F_C je množina všech profilů užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$.

($\mathrm{T_C}$) **Tranzitivita**

Výsledné skupinové uspořádání je tranzitivní, tj. $R \in \mathcal{R}$.

($\mathrm{P_C}$) **Paretovský princip** (Weak Pareto Principle)

Pro libovolný profil užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a každé dvě alternativy platí *implikace:*

$$W_i(a) > W_i(b)\ \forall i \in V \implies aPb.$$

($\mathrm{I_C}$) **Nezávislost na irelevantních alternativách** (Independence of irrelevant alternatives)

Pro všechny dvojice profilů užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ *a* $(W'_1, W'_2, \ldots, W'_n)$ *a všechny dvojice alternativ* $a, b \in A$ *platí implikace*

$$(W_i(a) = W'_i(a) \wedge W_i(b) = W'_i(b))\ \forall i \in V \implies (aRb \Leftrightarrow aR'b),$$

kde $R' = F_C(W'_1, W'_2, \ldots, W'_n)$.

($\mathrm{D_C}$) **Neexistence diktátora** (Non-dictatorship)

Mezi voliči neexistuje diktátor; diktátorem je volič $i \in V$ takový, že pro libovolný profil užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a všechny alternativy $a, b \in A$ platí $W_i(a) > W_i(b) \Leftrightarrow aPb$.

Nyní lze již vyslovit následující věta (viz [15]):

Věta 4 *Nechť má množina alternativ alespoň tři navzájem různé prvky. Potom neexistuje kardinální funkce společenského blahobytu, která splňuje podmínku ONC nebo CNC a také současně všechny podmínky* ($\mathrm{U_C}$), ($\mathrm{T_C}$), ($\mathrm{P_C}$), ($\mathrm{I_C}$) *a* ($\mathrm{D_C}$).

Tato věta je přímou analogií Arrowovy věty, protože ani jedna z podmínek ONC a CNC nepřipouští porovnávání užitku mezi jednotlivými voliči navzájem. Pokud interpersonální porovnávání umožníme, pak se situace radikálně změní. V tomto případě totiž již funkce F_C splňující výše uvedených pět podmínek existuje (viz např. [15] nebo [6]):

Věta 5 *Nechť má množina alternativ alespoň tři navzájem různé prvky. Potom existuje kardinální funkce společenského blahobytu, která splňuje podmínku OLC nebo CUC a zároveň všechny podmínky* ($\mathrm{U_C}$), ($\mathrm{T_C}$), ($\mathrm{P_C}$), ($\mathrm{I_C}$) *a* ($\mathrm{D_C}$).

Příkladem funkce F_C splňující podmínky Věty 5 s variantou podmínky OLC, je tzv. *maximin*, která výslednou relaci R určuje následujícícm způsobem: pro libovolný profil užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a každé dvě alternativy $a, b \in A$ definujme

$$aRb \iff \min_{i \in V} W_i(a) \geq \min_{i \in V} W_i(b).$$

Pro určení skupinové preference mezi alternativami a a b jsou tedy použity nejhorší hodnoty užitků těchto alternativ daných individuálními funkcemi užitku jednotlivých voličů. Tato funkce lze rozšířit na tzv. *leximin*, kdy v případě rovnosti nejhorších hodnocení (užitků) je pro porovnání alternativ a a b použito jejich druhé nejhorší hodnocení. To znamená, že pokud

$$W_{i_a}(a) := \min_{i \in V} W_i(a) = W_{i_b}(b) := \min_{i \in V} W_i(b),$$

pak rozhodnutí o skupinové preferenci mezi a a b provedeme na základě hodnot

$$\min_{i \in V \setminus \{i_a\}} W_i(a) \quad \text{a} \quad \min_{i \in V \setminus \{i_b\}} W_i(b).$$

Pokud je hodnota odpovídající alternativě a větší (resp. menší) než hodnota odpovídající alternativě b, pak aPb (resp. bPa). Pokud jsou obě hodnoty stejné, použijeme pro porovnání jejich třetí nejhorší hodnocení. Tak pokračujeme až do doby, kdy se nám podaří preference mezi a a b stanovit. Pokud se nepodaří rozhodnout ani při porovnání jejich nejlepších hodnocení (tj. posledních, co zbydou k porovnání), pak aIb.

Nyní na příkladu ukážeme, jak lze funkce *maximin* a *leximin* použít k agregování individuálních funkcí užitku a vytvořit tak výsledné skupinové uspořádání množiny alternativ.

Příklad 1 Uvažujme čtyři voliče, tj. $V = \{1, 2, 3, 4\}$, a množinu čtyř alternativ $A = \{a, b, c, d\}$. Funkce užitku pro jednotlivé voliče jsou dány v Tabulce 2.1 vlevo. Pro lepší práci s hodnotami individuálních funkcí užitku pro jednotlivé alternativy je vhodné si tyto hodnoty pro každou z alternativ seřadit podle velikosti - viz jednotlivé řádky v Tabulce 2.1 vpravo.

	a	b	c	d
W_1	1	10	5	2
W_2	3	2	4	7
W_3	5	1	2	5
W_4	7	4	3	3

$W_i(a)$	1	3	5	7
$W_i(b)$	1	2	4	10
$W_i(c)$	2	3	4	5
$W_i(d)$	2	3	5	7

Tabulka 2.1: Funkce užitku k Příkladu 1.

Při použití funkce *maximin* porovnáváme alternativy pouze podle jejich nejhoršího hodnocení od jednotlivých voličů. Je tedy zřejmé, že dostáváme následující vztahy: aIb, cId, cPa, cPb, dPa a dPb. Výsledné skupinové uspořádání pak dostáváme ve tvaru: $cIdPaIb$. Vidíme tedy, že jsme zatím nedokázali rozlišit mezi alternativami a a b a také mezi c a d. V této situaci můžeme použít funkci *leximin*. V případě indiferentních alternativ použijeme k porovnání i jejich další hodnocení. Pro alternativy a a b stačí porovnat jejich druhé nejhorší hodnocení a dostaneme jejich skupinovou preferenci aPb. Pro rozhodnutí o alternativách c a d musíme využít až jejich třetí nejhorší hodnocení a dostáváme výslednou preferenci dPc. Pomocí funkce *leximin* je tedy skupinové uspořádání alternativ ve tvaru $dPcPaPb$.

Funkce *maximin* a *leximin* splňují podmínku OLC, tudíž výsledek agregace bude stejný, pokud místo původních funkcí užitku $W_i(x), i = 1, 2, 3, 4$ použijeme jejich libovolnou monotonní pozitivní transformaci. Uvažujme například transformaci ve tvaru $W_i'(x) = 2W_i(x)+3, i = 1, 2, 3, 4$. Hodnoty těchto transformovaných funkcí užitku a také seřazené hodnoty pro jednotlivé alternativy (v řádcích) jsou uvedeny v Tabulce 2.2.

	a	b	c	d
W_1'	5	23	13	7
W_2'	9	7	11	17
W_3'	13	5	7	13
W_4'	17	11	9	9

$W_i'(a)$	5	9	13	17
$W_i'(b)$	5	7	11	23
$W_i'(c)$	7	9	11	13
$W_i'(d)$	7	9	13	17

Tabulka 2.2: Transformované funkce užitku k Příkladu 1.

Pro agregaci pomocí funkce *leximin* použijeme analogické postupy jako v případě agregace výchozích funkcí užitku a dojdeme ke stejnému výslednému uspořádání alternativ, tj. dostaneme preference $dPcPaPb$. $\circ$

Funkcí F_C splňující Větu 5 s variantou podmínky CUC je například tzv. *pravidlo utilitarismu*. V tomto případě je skupinové uspořádání pro každý profil užitků $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ a každé dvě alternativy $a, b \in A$ definováno vztahem

$$aRb \iff \sum_{i \in V} W_i(a) \geq \sum_{i \in V} W_i(b).$$

Zde tedy porovnáváme celkový součet užitků, který daná alternativa přináší všem voličům dohromady - nejlepší alternativou je ta, pro niž je tento celkový součet největší.

Příklad 2 Uvažujme opět čtyři voliče, tj. $V = \{1, 2, 3, 4\}$, a množinu čtyř alternativ $A = \{a, b, c, d\}$. Navážeme na Příklad 1, tj. funkce užitku jsou dány v Tabulce 2.1 vlevo. Skupinovou relaci preference nyní získáme pomocí *pravidla utilitarismu*. V tomto případě potřebujeme pro každou z alternativ celkový užitek, tj. dopočteme

$$\sum_{i \in V} W_i(a) = 16, \quad \sum_{i \in V} W_i(b) = 17, \quad \sum_{i \in V} W_i(c) = 14, \quad \sum_{i \in V} W_i(d) = 17.$$

Porovnáním výše uvedených hodnot (tj. použitím *pravidla utilitarismu*) získáme výslednou skupinovou preferenci ve tvaru $bIdPaPc$.

Jak už bylo výše zmíněno, *pravidlo utilitarismu* je funkce splňující podmínku CUC, tj. skupinová preference bude zachována i v případě, že každou z individuálních funkcí užitku afinně transformujeme; přitom musíme použít pro všechna $i \in V$ stejnou škálovací konstantu, konstanty pro posunutí se obecně mohou lišit. Uvažujme tedy následující transformované funkce užitku W_i'', $i \in V$:

$$\begin{aligned} W_1''(x) &= 2W_1(x) - 2, \\ W_2''(x) &= 2W_2(x) + 3, \\ W_3''(x) &= 2W_3(x)) + 7, \\ W_4''(x) &= 2W_4(x)). \end{aligned}$$

Funkční hodnoty těchto upravených funkcí je opět vhodné shrnout do tabulky (viz Tabulka 2.3). V posledním řádku této tabulky je navíc pro každou z alternativ spočítán součet hodnot příslušných užitků od všech voličů.

	a	b	c	d
W_1''	0	18	8	2
W_2''	9	7	11	17
W_3''	17	9	11	17
W_4''	14	8	6	6
$\sum$	40	42	36	42

Tabulka 2.3: Transformované funkce užitku k Příkladu 2.

Použitím *pravidla utilitarismu* pak dostaneme výslednou skupinovou preferenci $bIdPaPc$, tj. stejnou jako v případě použití původních funkcí užitku. ○

Z Příkladů 1 a 2 je patrné, že výsledné skupinové uspořádání alternativ je ovlivněno metodou agregace individuálních funkcí užitku.

Z výše uvedených úvah a zejména pak z Vět 4 a 5 je tedy zřejmé, že pokud budeme po voličích požadovat bohatší informace než jen ordinální uspořádání alternativ, pak lze nalézt takovou agregační proceduru, která rozumným způsobem z individuálních preferencí vytvoří i preferenci skupinovou. Je ale otázkou, zda jsou voliči vždy schopni tyto dodatečné informace věrohodně poskytnout.

Kapitola 3

Příklady agregačních funkcí

V předchozích částech byly obecně představeny agregační funkce, pomocí nichž lze agregovat individuální preference a získat buď výslednou skupinovou preferenci nebo množinu vítězných alternativ. Jak ale plyne z Věty 2 (Arrowova věta), resp. z Věty 3 (Gibbard-Satterthwaiteova věta), neexistuje žádná taková funkce, která by splňovala soubor určitých rozumných vlastností. Oba tyto výsledky tak ve své podstatě objasňují, proč je obtížné najít nějakou „dostatečně dobrou“ agregační metodu.

V této kapitole se proto zaměříme na některé používané agregační metody a představíme jejich vlastnosti. U vybraných také poskytneme přímo jejich charakterizaci, tj. soubor nutných a postačujících podmínek, které splňují. Budeme se zabývat pouze ordinálními funkcemi společenského blahobytu a funkcemi společenského výběru, příklady kardinálních funkcí společenského blahobytu byly uvedeny na konci předchozí kapitoly.

3.1. Pravidlo prosté většiny

Jedním z předpokladů, které jsme až dosud uvažovali, byl požadavek na minimální počet tří alternativ. Nyní však tento předpoklad opustíme a budeme předpokládat, že množina A je pouze dvouprvková[1]. Je zřejmé, že v této situaci nemá příliš smysl striktně rozlišovat mezi ordinální funkcí společenského bla-

[1] Situace, kdy $A = \{a\}$ je nezajímavá, protože není z čeho vybírat, alternativa a je vždy nejlepší.

hobytu a ordinální funkcí společenského výběru, protože v principu dávají stejnou informaci.

Uvažujme nyní dvouprvkovou množinu alternativ $A = \{a, b\}$ a opět konečnou množinu voličů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. V této situaci lze o vítězi rozhodnout podle tzv. *pravidla prosté většiny.*

Definice 9 Ordinální funkce společenského výběru f se nazývá *pravidlo prosté většiny*, jestliže

$$a \in f(R_1, \ldots, R_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{card}\,\{i \in V;\ aR_ib\} \geq \mathrm{card}\,\{i \in V;\ bR_ia\}$$

pro každý profil $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$.

Prakticky to znamená, že pro určení vítěze stačí porovnat počet voličů, kteří preferují alternativu a před alternativou b, s počtem voličů, kteří preferují b před a. Z definice je též patrné, že voliči, pro něž jsou obě alternativy stejně dobré, jsou zastoupeni v obou množinách a tedy nemají žádný vliv na výsledek volby. Na následujícím jednoduchém příkladu ilustrujeme, jak lze pomocí pravidla prosté většiny rozhodnout o vítězi v případě výběru ze dvou alternativ.

Příklad 3 Uvažujme množinu 35 voličů, jejichž preference mezi alternativami a a b jsou dány v Tabulce 3.1 vlevo.

počet voličů	preference
14	aPb
13	bPa
8	aIb

počet voličů	preference
22	aRb
21	bRa

Tabulka 3.1: Preference voličů v Příkladu 3.

K určení skupinového vítěze pomocí pravidla prosté většiny (dle Definice 9 stačí porovnat počet voličů, kteří (slabě) preferují a před b, resp. b před a. Tyto údaje jsou uvedeny v Tabulce 3 vpravo. Protože počet voličů, kteří preferují a před b je vyšší, vítězem je alternativa a. Zároveň je zřejmé, že pokud bychom neuvažovali nerozhodné voliče, výsledek volby by byl stejný. $\circ$

Pravidlo prosté většiny lze charakterizovat pomocí tří níže uvedených vlastností.

Definice 10 (Anonymita, symetrie v argumentech) Nechť Π je množina všech permutací množiny $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ordinální funkce společenského výběru f se nazývá *anonymní*, jestliže pro všechny profily $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ a všechny permutace $\pi \in \Pi$ platí

$$f(R_1, \ldots, R_n) = f(R_{\pi(1)}, \ldots, R_{\pi(n)}).$$

Vlastnost anonymity vyjadřuje, že všichni voliči jsou si rovni. To znamená, že při agregaci záleží pouze na jejich preferencích a nikoli například na jejich označení (indexu, jménu) nebo na pořadí, v němž svou preferenci poskytnou.

Než uvedeme další vlastnost, zavedeme si následující označení. Uvažujme množinu všech permutací množiny alternativ A a označme ji symbolem Φ. Nechť $\phi \in \Phi$ a nechť $R \in \mathcal{R}$ je relace na A. Symbolem $\phi(R)$ označme relaci na množině A takovou, že

$$\phi(a)\, \phi(R)\, \phi(b) \quad \Longleftrightarrow \quad aRb.$$

Definice 11 (Neutralita) Ordinální funkce společenského výběru f se nazývá *neutrální*, jestliže pro všechny profily $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ a všechny permutace $\phi \in \Phi$ platí

$$f(R_1, \ldots, R_n) = \phi^{-1}\left(f(\phi(R_1), \ldots, \phi(R_n)\right),$$

kde ϕ^{-1} je inverzní permutace k permutaci ϕ.

Podmínka neutrality zaručuje, že žádná z alternativ není zvýhodněna vůči ostatním. Rovnost v definici říká, že pokud alternativy přejmenujeme, poté vybereme vítěze a pak alternativám přiřadíme jejich původní jména, dostaneme stejný výsledek, jako kdybychom pracovali s původním označením alternativ. Znamená to tedy, že pokud pouze zaměníme označení jednotlivých alternativ, zůstane výsledek volby stejný.

Definice 12 (Striktní monotonie) Nechť $i \in V$ a nechť $R_i, R_i' \in \mathcal{R}$ jsou dvě stejné relace s výjimkou vztahu mezi jedinou dvojicí alternativ a a b, pro které platí

$$\neg(aR_ib) \wedge aR_i'b \qquad \text{nebo} \qquad bR_ia \wedge \neg(bR_i'a).$$

Ordinální funkce společenského výběru f se nazývá *striktně monotonní*, jestliže pro všechny profily $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ a všechny voliče $i \in V$ platí implikace

$$f(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n) = \{a\} \Longrightarrow f(R_1, \ldots, R_i', \ldots, R_n) = \{a\},$$

$$f(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_n) = \{a, b\} \Longrightarrow f(R_1, \ldots, R_i', \ldots, R_n) = \{a\}.$$

Podmínka se týká situace, kdy se jeden z voličů rozhodne změnit své preference týkající se alternativ a a b a to tak, že „vylepší“ pozici alternativy a vzhledem k alternativě b. Pokud byla alternativa a jediným vítězem pro původní preference, zůstane jediným vítězem i po této změně. Navíc, pokud byly původně vítězné obě alternativy a a b, tak po změně preference je jediným vítězem alternativa a. Znamená to, že v případě remízy (tj. víceprvkové množiny vítězů) by k rozhodnutí o jediném vítězi stačila změna preferencí jediného z voličů.

Lze ukázat, že pravidlo prosté většiny splňuje všechny tři výše uvedené vlastnosti, a také že právě tyto vlastnosti jsou zároveň i charakterizací této agregační funkce.

Věta 6 *[16] V případě dvouprvkové množiny alternativ je pravidlo prosté většiny jedinou ordinální funkcí společenského výběru, které má vlastnosti anonymity, neutrality a striktní monotonie.*

Význam této charakterizace spočívá v tom, že v situaci pouze se dvěma alternativami mnoho různých ordinálních funkcí společenského výběru splývá právě s metodou prosté většiny. Jednou z těchto funkcí je i Bordova metoda nebo některé z tzv. bodovacích funkcí (viz následující kapitoly), které pro dvě alternativy dávají stejný výsledek jako pravidlo prosté většiny. Protože pravidlo prosté většiny pro dvě alternativy splňuje všechny ostatní podmínky z Arrowovy věty, je zřejmé, že (bez zásadní modifikace) nelze rozšířit na situaci s více než dvěma alternativami. [4]

3.2. Bordovy metody

Uvažujme nyní opět situaci, kdy množina M obsahuje více než dvě alternativy. Další možností, jak získat použitelnou agregační funkci, je opustit požadavek na nezávislost funkce na irelevantních alternativách. V tomto případě je k agregaci možné použít například tzv. *bodovací funkce* (scoring functions). Jsou to funkce, které k agregaci využívají číselné hodnoty, které jsou přiřazeny alternativám podle jejich pořadí v individuálních uspořádáních poskytnutých jednotlivými voliči. Speciálním případem bodovacích funkcí jsou funkce založené na použití tzv. *Bordovy hodnoty*. Tato hodnota, kterou je nutno určit pro každou alternativu, lze pak použít buď pro určení vítězné alternativy (viz Bordova metoda z Definice 14) nebo pro konstrukci skupinového uspořádání všech alternativ (viz Bordova pořadová metoda z Definice 18).

3.2.1. Bordova metoda

Obě Bordovy metody jsou založeny na tzv. *Bordově hodnotě*, která je v závislosti na poskytnutých preferencích přiřazena každé z alternativ. Předpokládejme, že každý volič uspořádá všechny alternativy od nejvíce preferované k nejméně preferované. Poté jsou jednotlivým alternativám přiřazeny číselné hodnoty odpovídající jejich pořadí, tj. nejlepší alternativa obdrží jeden bod, druhá v pořadí dva body atd., nejhorší alternativa obdrží m bodů. Pokud se volič nemůže mezi některými z alternativ rozhodnout (tj. umístí je na stejné místo), je těmto alternativám přiřazeno jejich průměrné pořadí. Pro každou z alternativ $a \in A$ pak sečteme její body od všech voličů a získáme její celkové skóre, Bordovu hodnotu $B(a)$.

Toto zavedení Bordovy hodnoty se ale ukazuje jako nepříliš vhodné pro teoretické zkoumání vlastností agregačních metod, které ji používají. Z tohoto důvodu se pro teoretické úvahy alternativně Bordova hodnota zavádí následujícím způsobem.

Definice 13 Uvažujme profil $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$. Pro každou alternativu $a \in A$

definujeme *Bordovu hodnotu* $B^*(a)$ alternativy a vztahem

$$B^*(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(\mathrm{card}\,\{b \in A;\, bR_i a\} - \mathrm{card}\,\{b \in A;\, aR_i b\}\big).$$

Z výše uvedeného je zřejmé, že Bordovu hodnotu lze počítat více způsoby, viz Příklad 4.

Příklad 4 Uvažujme dva voliče a množinu čtyř alternativ $A = \{a, b, c, d\}$. Každý z voličů seřadil tyto alternativy od nejlepší po nejhorší a k dispozici máme tak dvě pořadí:

$$a\,b\,c\,d \quad \text{a} \quad b\,c\,a\,d.$$

Nejdříve pro všechny alternativy určíme jejich Bordovu hodnotu B podle pořadí. Pro alternativu a dostáváme $B(a) = 1 + 3 = 4$, neboť tato alternativa se u jednoho voliče umístila na prvním místě a u druhého na třetím místě. Dále, $B(b) = 2 + 1 = 3$, protože alternativa b obsadila druhé a první místo. Obdobně dopočteme také $B(c) = 3 + 2 = 5$ a $B(d) = 4 + 4 = 8$.

Nyní použijeme k výpočtu Bordovy hodnoty vztah z Definice 13. Pro alternativu a dostáváme $B^*(a) = (1 - 4) + (3 - 2) = -2$, neboť první volič považoval jedinou alternativu za lepší nebo stejně dobrou jako a a čtyři alternativy za horší nebo stejně dobré jako a, zatímco druhý volič považoval tři alternativy za lepší nebo stejně dobré jako a a dvě alternativy za horší nebo stejně dobré jako a. Obdobně vypočteme hodnoty pro zbylé alternativy: $B^*(b) = (2 - 3) + (1 - 4) = -4$, $B^*(c) = (3 - 2) + (2 - 3) = 0$ a $B^*(d) = (4 - 1) + (4 - 1) = 6$. $\circ$

Z předchozího Příkladu vyplývá, že oba způsoby výpočtu dávají na první pohled odlišné výsledky. Všimněme si ale, že pro vypočtené Bordovy hodnoty jsme dostali $B(b) < B(a) < B(c) < B(d)$ a $B^*(b) < B^*(a) < B^*(c) < B^*(d)$. Bordovu hodnotu použijeme ale jen pro výběr nejlepší alternativy (resp. později i k určení pořadí všech alternativ), takže je podstatné pouze to, která z alternativ dosáhla v porovnání s ostatními alternativami nižší (případně vyšší) celkové hodnoty. Samotná Bordova hodnota pro danou alternativu bez porovnání s hodnotami ostatních alternativ nemá žádnou vypovídací schopnost. Pro další použití tak nezáleží na tom, zda použijeme Bordovy hodnoty B nebo B^*. Navíc lze snadno ukázat, že pro libovolnou alternativu $a \in A$ mezi hodnotami $B(a)$ a $B^*(a)$ platí vztah

$$B^*(a) = 2 \cdot B(a) - (m + 1),$$

kde m je počet alternativ (viz také str. 50). Dále v textu budeme pro výpočet Bordovy hodnoty používat výpočet založený na pořadích, tj. hodnotu B, která se vypočítá jednodušeji než B^*.

Bordovu hodnotu lze použít k výběru nejlepší alternativy, neboli k definici ordinální funkce společenského výběru.

Definice 14 Ordinální funkce společenského výběru f se nazývá *Bordova metoda*, jestliže pro každý profil $(R_1, \dots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ platí

$$f(R_1, \dots, R_n) = \{a \in A;\ B(a) \le B(b)\, \forall b \in A\}.$$

Jak rozhodnout o vítězi pomocí Bordovy metody ukážeme v Příkladu 5.

Příklad 5 Uvažujme čyři voliče, jejichž preference na množině pěti alternativ $A = \{a, b, c, d, e\}$ jsou dány následujícími vztahy:

volič 1	$a\, P_1\, b\, P_1\, c\, P_1\, d\, P_1\, e$
volič 2	$c\, P_2\, d\, I_2\, a\, P_2\, b\, P_2\, e$
volič 3	$a\, I_3\, e\, I_3\, d\, P_3\, b\, P_3\, c$
volič 4	$b\, P_4\, c\, P_4\, d\, P_4\, a\, P_4\, e.$

Vzhledem k těmto preferencím je jednotlivým alternativám od voličů přiřazeno bodové ohodnocení, viz Tabulka 3.2.

volič	a	b	c	d	e
1	1	2	3	4	5
2	2,5	4	1	2,5	5
3	2	4	5	2	2
4	4	1	2	3	5
celkem	**9,5**	11	11	13,5	17

Tabulka 3.2: Bodové ohodnocení jednotlivých alternativ v Příkladu 5.

U voličů 1 a 4 je stanovení bodů zřejmé, jednotlivé alternativy obdržely tolik bodů, jaké bylo jejich pořadí v uspořádání od nejlepší k nejhorší. U voliče 2 obě alternativy a a d obdržely $\frac{2+3}{2} = 2,5$ bodů, protože se tyto dvě alternativy dělily o druhé až třetí místo. Volič 3 považoval celkem tři alternativy a, e a d za nejlepší, takže každá z těchto alternativ obdržela průměrných $\frac{1+2+3}{3} = 2$ bodů. V poslední řádku tabulky je vypočtena pro každou z alternativ její Bordova hodnota. Nejnižší hodnoty dosáhla alternativa a, která je tak vítěznou alternativou při skupinové volbě pomocí Bordovy metody. ◦

Obdobně jako pravidlo prosté většiny, i Bordova metoda lze charakterizovat pomocí několika vlastností. Jednou z těchto vlastností je již výše zavedená neutralita (Definice 11). Další vlastností je tzv. konzistence (viz Definice 15 níže), která se týká situace, kdy jsou voliči rozděleni do dvou skupin a stejnou agregační metodou je v obou skupinách určena vítězná alternativa (případně množina vítězných alternativ). Pokud patří alternativa a mezi vítězné alternativy v obou skupinách voličů, pak je přirozené požadovat, aby při použití stejné agregační metody použité pro agregování nezměněných názorů všech voličů najednou byla opět mezi vítězi. Dále navíc alternativu, která byla mezi vítězi pouze v jedné skupině voličů, považujeme za horší než je alternativa, která patřila mezi vítěze v obou skupinách voličů. Pro vyslovení definice konzistence lze bez újmy na obecnosti rozdělení voličů z množiny $V = \{1, 2, \dots, n\}$ uvažovat ve tvaru $V = V_1 \cup V_2$, kde $V_1 = \{1, 2, \dots, p\}$, $V_2 = \{p+1, p+2, \dots, n\}$ a $1 \leq p < n$ je přirozené číslo. Takto definované množiny V_1 a V_2 jsou neprázdné a disjunktní. V závislosti na tomto členění voličů rozdělíme i profil $(R_1, \dots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ na dva dílčí profily $(R_1, \dots, R_p) \in \mathcal{R}^p$ a $(R_{p+1}, \dots, R_n) \in \mathcal{R}^{n-p}$.

Definice 15 (Konzistence) Uvažujme množinu voličů $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Ordinální funkce společenského výběru f se nazývá *konzistentní*, jestliže pro každé přirozené číslo p splňující $1 \leq p < n$ a každý profil $(R_1, \dots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ platí

$$f(R_1, \dots, R_p) \cap f(R_{p+1}, \dots, R_n) \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad f(R_1, \dots, R_n) = f(R_1, \dots, R_p) \cap f(R_{p+1}, \dots, R_n).$$

Definice 16 (Věrohodnost, Faithfulness) Ordinální funkce společenského výběru f se nazývá *věrohodná*, jestliže pro $V = \{1\}$ a libovolný profil $(R_1) \in \mathcal{R}$ platí

$$f(R_1) = \{a \in A;\ aR_1b,\ b \in A\}.$$

Vlastnost věrohodnosti lze vyjádřit tak, že v případě pouze jednoho voliče je individuální preference zároveň i preferencí skupinovou, tj. alternativa, která je voličem preferována před všemi ostatními alternativami, je vítězem skupinové volby.

Definice 17 (Zrušení, Cancellation) Ordinální funkce společenského výběru f má vlastnost *zrušení*, jestliže pro každý vyvážený profil $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ platí

$$f(R_1, \ldots, R_n) = A.$$

Vyváženým profilem přitom rozumíme profil $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ takový, že pro všechny dvojice navzájem různých alternativ $a, b \in A$ platí, že

$$\mathrm{card}\,\{i \in V;\ a\,R_i\,b\} = \mathrm{card}\,\{i \in V;\ b\,R_i\,a\}.$$

Vlastnost zrušení říká, že pokud pro všechny navzájem různé dvojice alternativ a a b je počet voličů preferujících a před b stejný jako počet voličů preferujících b před a, pak agregační funkce neumí nalézt vítěze – v tomto případě jsou vítězi všechny alternativy.

Následující tvrzení říká, že Bordova medoda splňuje všechny výše uvedené vlastnosti, a také že tyto vlastnosti jsou zároveň i charakterizací této agregační metody.

Věta 7 *[22] Jedinou ordinální funkcí společenského výběru, která má vlastnosti neutrality, konzistence, věrohodnosti a zrušení, je Bordova metoda.*

3.2.2. Bordova pořadová metoda

Bordovu hodnotu jsme dosud využili jen k určení vítězné alternativy, ale tato hodnota lze využít také pro konstrukci skupinového uspořádání alternativ, tj. pro definování ordinální funkce společenského blahobytu.

Definice 18 Ordinální funkce společenského blahobytu F se nazývá *Bordova pořadová metoda*, jestliže pro každý profil $(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ a každé alternativy $a, b \in A$ platí

$$a\,R\,b \qquad \Longleftrightarrow \qquad B(a) \leq B(b),$$

kde $R = F(R_1, \ldots, R_n)$.

Příklad 6 V tomto příkladu navážeme na Příklad 5, kde jsme vypočetli následující Bordovy hodnoty pro všech pět uvažovaných alternativ:

$$B(a) = 9,5 \qquad B(b) = 11 \qquad B(c) = 11 \qquad B(d) = 13,5 \qquad B(e) = 17.$$

Z těchto hodnot je zřejmé, že výsledné skupinové uspořádání alternativ dostáváme ve tvaru $a\,R\,b\,I\,c\,R\,d\,R\,e$, resp. $a\,P\,b\,I\,c\,P\,d\,P\,e$ pokud použijeme ostré preference. ○

Bordova pořadová metoda splňuje všechny vlastnosti Arrowovy věty (viz např. [4]), s výjimkou vlastnosti (I), tj. nezávislosti na irelevantních alternativách. Porušení této vlastnosti ilustrujeme na následujícím příkladu.

Příklad 7 Uvažujme pět voličů a jejich preference na množině čtyř alternativ $A = \{a, b, c, d\}$. Tři voliči se shodli na pořadí alternativ $a\,b\,c\,d$ (uspořádáno od nejlepší k nejhorší) a zbylí dva voliči stanovili své pořadí jako $b\,c\,d\,a$. Pro každou z alternativ nyní vypočteme její Bordovu hodnotu:

$$\begin{aligned}
B(a) &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11,\\
B(b) &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8,\\
B(c) &= 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13,\\
B(d) &= 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18.
\end{aligned}$$

V tomto případě je tedy skupinové pořadí alternativ $b\,a\,c\,d$.

Uvažujme nyní druhou situaci, kdy první tři voliči ponechají uspořádání alternativ stejné (tj. $a\,b\,c\,d$), ale zbylí dva voliči své pořadí upraví na $b\,a\,c\,d$. Bordovy hodnoty pro jednotlivé alternativy se změní a dostáváme $B(a) = 7$, $B(b) = 8$, $B(c) = 15$ a $B(d) = 20$. Celkové pořadí alternativ je nyní tedy $a\,b\,c\,d$.

Když se zaměříme na vztah alternativ a a b, můžeme si všimnout, že v celkovém skupinovém pořadí si alternativy a a b vyměnily místo; zatímco v první situaci byla alternativa b lepší než a, v druhé byla naopak horší. K této změně došlo i přesto, že jednotliví voliči nezměnili své preference týkající se těchto dvou alternativ; v obou situacích první tři voliči preferovali a před b a zbylí dva pak b před a. Znamená to, že skupinová preference mezi a a b závisela nejen na relativní pozici těchto dvou alternativ vůči sobě, ale také na jejich pozici vůči ostatním alternativám. Tím je zřejmě porušena podmínka (I) nezávislosti na irelevantních alternativách. $\circ$

Ve Větě 7 jsme představili charakterizaci Bordovy metody jako funkce společenského výběru. Obdobná charakterizace lze provést i pro Bordovu pořadovou metodu, viz [17]. Pro charakterizaci jsou použity čtyři vlastnosti: neutralita, konzistence, zrušení a monotonie. První tři podmínky jsou analogií k podmínkám z Definic 11, 15 a 17. Přitom tato analogie je v principu stejná jako například v případě dvojic podmínek (U) a (U*) nebo (D) a (D*) použitých v Arrowově, resp. Gibbard-Satterwaitheově větě.

Podmínka monotonie lze pro ordinální funkce společenského blahobytu vyslovit v následujícícm tvaru: Nechť $a, b \in A$ jsou navzájem různé alternativy a nechť $(R_1, \ldots, R_n), (R'_1, \ldots, R'_n) \in \mathcal{R}^n$. Tyto dva profily nechť jsou shodné s výjimkou existence jednoho voliče $i \in V$ a alternativy $c \in A \setminus \{a, b\}$ takových, že cR_ia a aR'_ic. Potom platí implikace $aRb \;\Rightarrow\; aP'b$, kde P' je ostrá relace preference indukovaná relací $R' = F(R'_1, \ldots, R'_n)$.

Podmínka říká, že pokud původně platilo aRb a jeden z voličů následně změnil svou preferenci týkající se alternativ a a c z původních cR_ia na aR'_ic, pak v novém skupinovém uspořádání je alternativa a striktně preferována před alternativou b (tj. $aP'b$). Monotonie tedy zaručuje posílení skupinové preference mezi dvěma alternativami a to pomocí vylepšení pozice lepší z alternativ vzhledem k jiné z alternativ.

Věta 8 *[17] Jedinou ordinální funkcí společenského blahobytu, která má vlastnosti neutrality, konzistence, zrušení a monotonie, je Bordova pořadová metoda.*

Přesnou formulaci všech podmínek a také důkaz tvrzení o charakterizaci Bordovy pořadové metody lze nalézt v [17].

3.3. Bodovací funkce

Jak už bylo zmíněno v předchozí části, Bordova metoda patří mezi tzv. *bodovací funkce*. Opět uvažujme množinu m alternativ A a množinu voličů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Bodovací funkce se většinou používají v případě agregace ostrých preferencí, tj. dále budeme předpokládat, že každý volič poskytne ostrou preferenci P_i na množině alternativ (tj. nepřipouštíme nyní indiferenci mezi alternativami). Tím je pro každého voliče jednoznačně dáno ostré uspořádání všech alternativ od nejlepší k nejhorší. Množinu všech ostrých uspořádání na množině A označme symbolem $\mathcal{L}$. Dále uvažujme tzv. *bodovací vektor* $\mathbb{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m$. Hodnota s_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, je přitom bodová hodnota, která je přiřazena voličem alternativě, která je na j-tém místě v jeho individuálním uspořádání alternativ. Celkové skóre $S(a)$ pro alternativu $a \in A$ je určeno jako součet bodových hodnot získaných touto alternativou od všech voličů, tj. je dáno vztahem

$$S(a) = \sum_{i \in V} s_{q(i)},$$

kde $q(i) = \operatorname{card}\{b \in A; bP_i a\} + 1$, $\forall i \in V$. Podle toho, jakým způsobem je stanovem bodovací vektor, bude vítězem buď alternativa s nejvyšším nebo nejnižším celkovým skóre. V následující definici převzaté z [23] je uvažována vítězná alternativa s nejvyšším skóre.

Definice 19 Nechť je dán vektor $\mathbb{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m$ a profil $(P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{L}^n$. Ordinální funkce společenského výběru $f^{\mathbb{s}}$ se nazývá *jednoduchá bodovací funkce*, jestliže platí

$$a \in f^{\mathbb{s}}(P_1, \ldots, P_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad S(a) \geq S(b)\ \forall b \in A.$$

Přitom $S(a) = \sum_{i \in V} s_{q(i)}$, kde $q(i) = \operatorname{card}\{b \in A; bP_i a\} + 1$, $\forall i \in V$.

Bordova metoda je speciálním případem jednoduché bodovací funkce s vektorem $\mathbb{s} = (m, m-1, \ldots, 2, 1)$. S ohledem na výše uvedenou definici je však vítězem alternativa s nejvyšším celkovým skóre. Stejný výsledek jako Bordova metoda by dala i každá bodovací funkce s bodovacím vektorem $\mathbb{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ splňujícím podmínky $s_1 > s_m$ a $s_j - s_{j-1} = s_{j+1} - s_j$, $\forall j = 2, \ldots, m-1$ (viz [23]).

Pokud bychom uvažovali bodovací vektor tvaru $\mathbb{s} = (1, 2, \ldots, m-1, m)$, pak by pro libovolnou alternativu $a \in A$ bylo celkové skóre $S(a)$ rovno přímo Bordově hodnotě $B(a)$. V této situaci by ale vítězem byla alternativa s nejnižším skóre.

Dalším příkladem jednoduché bodovací funkce je *pravidlo plurality*, které získáme při použití bodovacího vektoru $\mathbb{s} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. V tomto případě tak volič dává vždy právě jeden hlas (bod) své nejvíce preferované alternativě a všechny ostatní alternativy jsou ohodnoceny nulou. Vítěznou alternativou (případně alternativami) je pak ta, která získala nejvíce hlasů (bodů).

V definici bodovací funkce není žádný požadavek na složky bodovacího vektoru $\mathbb{s}$, obecně tak připouštíme kladné, nulové i záporné hodnoty „bodů“ přidělovaných alternativám podle jejich pořadí. Vzhledem ke způsobu výběru vítězné alternativy (s maximálním celkovým skóre) je vhodné uvažovat vektor $\mathbb{s}$ splňující podmínky $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_m$ a případně i $s_1 > s_m$. Znamená to, že čím je alternativa výše v uspořádání poskytnutým voličem, tím více bodů obdrží. Různou volbou bodovacího vektoru lze pak modelovat různé situace při výběru jedné nebo i více alternativ.

Pokud bychom potřebovali z množiny alternativ vybrat dvě nejlepší, můžeme použít například pravidlo plurality a pak vybrat dvě alternativy s nejvyšším skóre. Volič ale v tomto případě dává hlas pouze jedné alternativě a výběr druhé už nemůže ovlivnit. Toto se dá vyřešit použitím bodovacího vektoru $\mathbb{s} = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, kdy každému voliči umožníme zvolit právě dvě alternativy – budou to ty, které umístí ve svém pořadí na první a druhé místo. Pokud známe počet voličů, kteří se zúčastní hlasování, pomocí bodovacího vektoru $\mathbb{s} = (1, 0, 0 \ldots, 0, 1-n)$, kde n je počet voličů, dáváme každému voliči automaticky právo veta. Alternativa, která se umístí u některého z voličů na posledním místě, obdrží $1 - n$ bodů a její celkové skóre je už nutně nekladné. Kladného celkového skóre tak může alternativa dosáhnout pouze v případě, že ji žádný volič neumístil na poslední místo.

Příklad 8 Stejně jako v Příkladu 7 uvažujme pět voličů a jejich preference na množině čtyř alternativ $A = \{a, b, c, d\}$. Tři voliči se shodli na pořadí alternativ $a\,b\,c\,d$ (uspořádáno od nejlepší k nejhorší) a zbylí dva voliči stanovili své pořadí jako $b\,c\,d\,a$. Budeme uvažovat pět různých situací, v nichž rozhodneme o vítězi postupně pomocí pěti jednoduchých bodovacích funkcí s bodovacími vektory $\mathbb{s}^1, \mathbb{s}^2, \mathbb{s}^3, \mathbb{s}^4$ a $\mathbb{s}^5$, kde

$$\begin{aligned}
\mathbb{s}^1 &= (4, 3, 2, 1),\\
\mathbb{s}^2 &= (2, 0, -2, -4),\\
\mathbb{s}^3 &= (1, 0, 0, 0),\\
\mathbb{s}^4 &= (1, 0, 0, -5),\\
\mathbb{s}^5 &= (4, 1, 1, 0).
\end{aligned}$$

Pro každou z alternativ a každý z bodovacích vektorů (tj. každou bodovací funkci $f^{\mathbb{s}^j}$, $j = 1, \ldots, 5$) vypočteme její celkové skóre a určíme vítěze – viz jednotlivé řádky v Tabulce 3.3.

Funkce $f^{\mathbb{s}^1}$ a $f^{\mathbb{s}^2}$ odpovídají Bordově metodě a vítěznou alternativou je b.

Funkce $f^{\mathbb{s}^3}$ je pravidlo plurality a tomto případě je vítězem alternativa a, protože „nasbírala“ nejvíce prvních míst.

Funkce $f^{\mathbb{s}^4}$ je modifikované pravidlo plurality kombinované s právem veta, protože alternativa na posledním místě obdrží -5 bodů. Vítězem je nyní alternativa b. Alternativa a se sice vícekrát umístila na prvním místě, ale je penalizována za to, že dva voliči ji umístili až na místo poslední.

	a	b	c	d	vítěz
$\mathbb{s}^1$	14	**17**	12	7	b
$\mathbb{s}^2$	-2	**4**	-6	-16	b
$\mathbb{s}^3$	**3**	2	0	0	a
$\mathbb{s}^4$	-7	**2**	0	-15	b
$\mathbb{s}^5$	**12**	11	5	2	a

Tabulka 3.3: Celkové skóre alternativ z Příkladu 8 pro jednotlivé bodovací vektory.

Pomocí funkce $f^{\mathbb{s}^5}$ můžeme rozhodovat v situaci, kdy je velká váha (počet bodů) kladena tomu, když je alternativa považována za nejlepší a mezi dalšími pořadími již není moc významný rozdíl. Volbou hodnoty s_1 (body pro nejlepší alternativu) lze tuto významnost prvního a dalších míst ovlivnit – zesílit nebo zmírnit. Jak je vidět z Tabulky 3.3, v případě použití bodovacího vektoru $\mathbb{s}^5$ je vítězem alternativa a. ◦

Z výše uvedeného je patrné, že volba bodovacího vektoru obecně ovlivní výsledek agregace pomocí použité jednoduché bodovací funkce. Navíc platí (viz např. [2]), že pro pevně zvolený profil lze vhodnou volbou bodovací funkce zajistit vítězství pro libovolnou alternativu. V [2] je pak také stanovena podmínka (týkající se vlastností profilu preferencí), která zaručí, že všechny bodovací funkce vyberou stejného vítěze.

V [23] lze nalézt další typy bodovacích funkcí, jejich vlastnosti a také charakterizace. Mimo jiné je zde také dokázáno tvrzení o charakterizaci Bordovy metody (Věta 7), přičemž v důkaze je použito právě faktu, že se jedná o speciální případ jednoduché bodovací funkce.

3.4. Condorcetovy funkce

Pod označením Condorcetovy funkce se skrývá skupina agregačních funkcí, které splňují jistou podmínku, někdy nazývanou jako Condorcetovo kritérium.

Předpokládejme, že voliči poskytli své preference na množině alternativ A, tj. že máme k dispozici profil. Alternativa z množiny A se nazývá *Condorcetova alternativa* nebo také *Condorcetův vítěz*, jestliže při párovém srovnávání porazí všechny ostatní alternativy z množiny A. Alternativa $a \in A$ je tedy Condorcetovým vítězem, jestliže pro každou alternativu $b \in A \setminus \{a\}$ platí, že

$$\operatorname{card}\{i \in V;\, a\, P_i\, b\} > \operatorname{card}\{i \in V;\, b\, P_i\, a\}.$$

Alternativa se nazývá *Condorcetův poražený*, jestliže je při párovém srovnávání se všemi ostatními alternativami poražena.

Agregační funkce se nazývá *Condorcetova funkce* nebo také *Condorcetova metoda*, jestliže jako vítěze vybere Condorcetovu alternativu, kdykoli tato alternativa existuje.

Condorcetova funkce nemusí vždy nalézt vítěze, protože pro danou A a daný profil obecně nemusí existovat Condorcetův vítěz (a ani Condorcetův poražený). Situace, kdy neexistuje Condorcetův vítěz a dojde k tzv. cyklům, se nazývá Condorcetův paradox (viz Příklad 10).

Samotné nalezení Condorcetova vítěze je celkem jednoduché, stačí porovnat všechny dvojice alternativ. Navíc princip, na jehož základě je vítězná alternativa vybrána, je velmi blízký tomu, co považujeme za demokratickou volební metodu.

Naneštěstí lze ukázat (viz např. [24]), že žádna z bodovacích funkcí není Condorcetovou funkcí, tj. ani často používaná Bordova metoda nemusí jako vítěze vybrat Condorcetovu alternativu. Nicméně nikdy jako vítěze nevybere Condorcetova poraženého (viz např. [4]).

Jak už bylo zmíněno (a jak také uvidíme z Příkladů níže), Condorcetova alternativa neexistuje vždy. Někdy se proto uvažuje tzv. *slabá Concorcetova alternativa*. Pro takovou alternativu požadujeme, aby neprohrála při žádném z párových srovnávání s ostatními alternativami, tj. aby nad všemi ostatními buď zvítězila nebo aspoň remizovala. Zatímco Condorcetova alternativa (pokud existuje) je jediná, slabých Condorcetových alternativ může být více. Příkladem slabé Condorcetovy alternativy je alternativa a z Příkladu 13 níže.

Příklad 9 Uvažujme pět voličů a jejich preference na množině čtyř alternativ $A = \{a, b, c, d\}$. Tři voliči se shodli na pořadí alternativ $a\,b\,c\,d$ (uspořádáno od nejlepší k nejhorší) a zbylí dva voliči stanovili své pořadí jako $b\,c\,d\,a$. V Příkladu 7 jsme pomocí Bordovy metody jako vítěze určili alternativu b.

Nyní zjistíme, zda v tomto případě existuje Condorcetův vítěz, případně Condorcetův poražený. Při párovém srovnávání dostáváme následující výsledky:

	vítěz		vítěz
$a : b = 3 : 2$	a	$b : c = 5 : 0$	b
$a : c = 3 : 2$	a	$b : d = 5 : 0$	b
$a : d = 3 : 2$	a	$c : d = 5 : 0$	c

Vidíme, že alternativa a zvítězila ve všech párových porovnáváních s ostatními alternativami a je tedy Condorcetovým vítězem. Alternativa d je poražena při všech párových srovnáváních a je tedy Condorcetovým poraženým. $\circ$

Příklad 10 Uvažujme množinu čtyř alternativ $A = \{a, b, c, d\}$ a tři voliče s preferencemi $a\,b\,c\,d$, $b\,d\,c\,a$ a $c\,a\,b\,d$ (uspořádáno od nejlepší k nejhorší). Párovým srovnáváním dostáváme následující výsledky:

	vítěz		vítěz
$a : b = 2 : 1$	a	$b : c = 2 : 1$	b
$a : c = 1 : 2$	c	$b : d = 3 : 0$	b
$a : d = 2 : 1$	a	$c : d = 2 : 1$	c

Alternativa d je poražena při všech párových srovnáváních a je tedy Condorcetovým poraženým. Dále vidíme, že při párových porovnáváních a porazila b, alternativa b porazila c a c porazila a. Žádná z alternativ tedy nezvítězila ve všech párových porovnáváních s ostatními alternativami a Condorcetův vítěz neexistuje. $\circ$

Z předchozího příkladu je tedy vidět, že způsob volby používající párové porovnávání alternativ nemusí generovat vítěze ani tranzitivní skupinové uspořádání alternativ (viz také podmínky Arrowovy věty).

Dále se ukazuje (viz např. [9], [14]), že pravděpodobnost, že Condorcetův vítěz existuje, se snižuje s narůstajícím počtem alternativ a/nebo voličů. Pro tuto pravděpodobnost byly odvozeny i explicitní formule (např. v [14] i pro případ slabých preferencí). Jen pro zajímavost (viz [4]), pro 25 voličů a 11 alternativ je pravděpodobnost existence Condorcetova vítěze menší než $\frac{1}{2}$.

V [8] je uveden přehled devíti základních Condorcetových funkcí včetně jejich vlastností. Některé z nich nyní představíme blíže.

3.4.1. Kemenyho pravidlo

Mezi Condorcetovy funkce se řadí tzv. *Kemenyho pravidlo*, které poskytuje kromě vítěze i celkové tranzitivní uspořádání množiny alternativ. Navíc se ukazuje, že toto pravidlo má mezi Condorcetovými funkcemi vyjímečné postavení.

Z důvodu snadnějšího formálního zavedení Kemenyho pravidla (viz [24], [8], [12]) označme nyní alternativy $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Dále předpokládejme, že všechna uspořádání alternativ (neboli všechny používané relace) jsou ostré. Profily nyní uvažujeme ve tvaru $\mathbb{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{L}^n$. Pro libovolné uspořádání $P \in \mathcal{L}$ zaveďme tzv. *volební matici* $\mathbb{X}^P = (x_{jk})_{j,k=1}^m$, kde

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pokud} \quad a_j \, P \, a_k, \\ -1 & \text{pokud} \quad a_k \, P \, a_j, \\ 0 & \text{pokud} \quad j = k. \end{cases}$$

Obdobně definujeme i pro celý profil $\mathbb{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{L}^n$ *volební matici* $\mathbb{X}^{\mathbb{P}} = (n_{jk})_{j,k=1}^m$, kde n_{jk} je rozdíl počtu voličů, kteří preferují a_j před a_k a počtu voličů, kteří preferují a_k před a_j, tj.

$$n_{jk} = \text{card}\,\{i \in V;\, a_j \, P_i \, a_k\} - \text{card}\,\{i \in V;\, a_k \, P_i \, a_j\}.$$

Definice 20 Ordinální funkce společenského blahobytu K se nazývá *Kemenyho pravidlo* (*Kemenyho metoda*), jestliže $\forall \mathbb{P} \in \mathcal{L}^n$ platí

$$P \in K(\mathbb{P}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{X}^{\mathbb{P}} \cdot \mathbb{X}^P \geq \mathbb{X}^{\mathbb{P}} \cdot \mathbb{X}^{P'} \quad \forall P' \in \mathcal{L},$$

kde $P \in \mathcal{L}$ a

$$\mathbb{X}^{\mathbb{P}} \cdot \mathbb{X}^P = \sum_{j,k=1}^{m} n_{jk} \cdot x_{jk}.$$

Kemenyho pravidlo je zde sice zavedeno jako ordinální funkce společenského blahobytu, ale obecně se může stát, že toto pravidlo nebude jednoznačné (viz Příklad 12). Jako výsledek při agregaci tak nemusíme dostat jedinou skupinovou preferenci na množině A, ale více preferencí splňující maximalizační podmínku z Definice 20. Symbol $K(\mathbb{P})$ tak označuje obecně množinu všech těchto vhodných preferencí. Tato situace plyne také z toho (odvození a bližší vysvětlení viz např. [24]), že maximalizace výrazu $\mathbb{X}^{\mathbb{P}} \cdot \mathbb{X}^P$ přes všechna možná ostrá uspořádání množiny A jistým způsobem zaručuje minimalizaci (ve smyslu minimálního mediánu) součtu „vzdáleností“ jednotlivých individuálních preferencí z profilu $\mathbb{P}$ a hledané skupinové preference $P \in \mathcal{L}$.

Velkou nevýhodou Kemenyho pravidla je jeho vyšší výpočetní náročnost. Ta roste s počtem alternativ, protože jejich počet určuje rozměry volebních matic používaných při výpočtu. Výhodou je naopak to, že v sobě spojuje výhody bodovacích funkcí (zejm. vlastnost konzistence – viz Definice 15) a Condorcetových funkcí (najde Condorcetova vítěze, pokud existuje).

Věta 9 *[8] Kemenyho pravidlo je jedinou funkcí společenského blahobytu, která je neutrální, konzistentní a Condorcetova.*

Příklad 11 Uvažujme množinu tří alternativ $A = \{a, b, c\}$ a devět voličů. Na množině A je možných právě $3! = 6$ různých ostrých uspořádání, z nichž mohou voliči vybírat:

$$\begin{array}{ll|ll} P_1 & a\,b\,c & P_4 & b\,c\,a \\ P_2 & a\,c\,b & P_5 & c\,a\,b \\ P_3 & b\,a\,c & P_6 & c\,b\,a \end{array}$$

Každému z těchto uspořádání odpovídá volební matice $\mathbb{X}^{P_i}$, $i = 1, 2 \dots, 6$. Pro ilustraci uvedeme alespoň dvě z nich:

$$\mathbb{X}^{P_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{X}^{P_5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nejdříve uvažujme případ, že tři voliči stanovili svou preferenci jako P_1, dva voliči jako P_3 a zbylí čtyři chtějí uspořádání P_5. Označme tento profil jako $\mathbb{P}$. Naším úkolem je najít výsledné skupinové uspořádání alternativ pomocí Kemenyho pravidla.

Pro profil $\mathbb{P}$ určíme volební matici $\mathbb{X}^{\mathbb{P}}$ pomocí

$$\mathbb{X}^{\mathbb{P}} = 3 \cdot \mathbb{X}^{P_1} + 2 \cdot \mathbb{X}^{P_3} + 4 \cdot \mathbb{X}^{P_5} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro jednotlivá uspořádání $P_1, \dots, P_6$ nyní určíme tzv. Kemenyho skóre $K(P_i) = \mathbb{X}^{\mathbb{P}} \cdot \mathbb{X}^{P_i}$, $i = 1, \dots, 6$. Zvoleným skupinovým uspořádáním je pak to, které dosáhne nejvyššího skóre. Postupně tedy vypočítáme

$$K(P_1) = \mathbf{14}, K(P_2) = 10, K(P_3) = -6, K(P_4) = -10, K(P_5) = 6, K(P_6) = -14.$$

Z výsledků vidíme, že výsledné uspořádání je P_1 (tj. $a\,b\,c$), resp. vítěznou alternativou je alternativa a. Snadno lze také ověřit, že alternativa a je zároveň i Condorcetovým vítězem.

Nechť nyní voliči změnili svůj názor a čtyři z nich stanovili svou preferenci jako P_1, další tři jako P_4 a zbylí dva jako P_5. Tomuto profilu $\mathbb{P}'$ odpovídá volební matice $\mathbb{X}^{\mathbb{P}'}$ ve tvaru

$$\mathbb{X}^{\mathbb{P}'} = 4 \cdot \mathbb{X}^{P_1} + 3 \cdot \mathbb{X}^{P_4} + 2 \cdot \mathbb{X}^{P_5} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kemenyho skóre pro jednotlivá uspořádání jsou nyní

$$K(P_1) = \mathbf{14}, K(P_2) = -6, K(P_3) = 2, K(P_4) = 6, K(P_5) = -2, K(P_6) = -14.$$

Z výsledků vidíme, že skupinové uspořádání je opět P_1 s vítěznou alternativou a. V tomto případě však Condorcetův vítěz neexistuje, protože při párovém srovnávání a porazí b, b porazí c a nakonec c poráží a. ∘

Příklad 12 Uvažujme opět množinu tří alternativ $A = \{a, b, c\}$ a 18 voličů. Stejně jako v Příkladu 11 je na množině A možných šest různých ostrých uspořádání $P_1, \dots, P_6$ a k nim příslušné volební matice $\mathbb{X}^{P_i}$, $i = 1, 2 \dots, 6$.

Uvažujme situaci, kdy pět voličů stanovilo svou preferenci jako P_1, tři voliči jako P_3, pět voličů jako P_4 a zbylých pět upřednostňuje uspořádání P_5. Označme tento profil jako $\mathbb{P}$. Výsledné skupinové uspořádání alternativ určíme opět pomocí Kemenyho pravidla.

Pro profil $\mathbb{P}$ určíme volební matici $\mathbb{X}^{\mathbb{P}}$ pomocí

$$\mathbb{X}^{\mathbb{P}} = 5 \cdot \mathbb{X}^{P_1} + 3 \cdot \mathbb{X}^{P_3} + 5 \cdot \mathbb{X}^{P_4} + 5 \cdot \mathbb{X}^{P_5} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 8 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro jednotlivá uspořádání $P_1, \dots, P_6$ nyní vypočteme Kemenyho skóre $K(P_i) = \mathbb{X}^{\mathbb{P}} \cdot \mathbb{X}^{P_i}$, $i = 1, \dots, 6$ a dostáváme

$$K(P_1) = \mathbf{16}, K(P_2) = -16, K(P_3) = 8, K(P_4) = \mathbf{16}, K(P_5) = -8, K(P_6) = -16.$$

Z výsledků vidíme, že uspořádání P_1 (tj. $a\,b\,c$) a P_4 (tj. $b\,c\,a$) dosáhla nejvyššího skóre, tj. Kemenyho pravidlo poskytlo dvě možná skupinová uspořádání, mezi nimiž už neumí rozlišit.

Snadno lze také ověřit, že pro uvažovaný profil $\mathbb{P}$ neexistuje Condorcetův vítěz. Je to také zřejmé z toho, že ve dvou skupinových uspořádáních navrhovaných Kemenyho pravidlem jsou na prvním místě dvě různé alternativy. ◦

3.4.2. Copelandova funkce

Druhou z Condorcetových funkcí, kterou si představíme blíže, je Copelandova funkce. Na rozdíl od Kemenyho pravidla se ale jedná o funkci společenského výběru, tj. pomocí této funkce je možno vybrat pouze vítěznou alternativu (množinu vítězných alternativ) a nikoli získat celkové skupinové uspořádání alternativ.

Definice 21 Ordinální funkce společenského výběru C se nazývá *Copelandova funkce*, jestliže pro každý profil $\mathbb{P} \in \mathcal{L}^n$ platí

$$a_j \in C(\mathbb{P}) \quad \Longleftrightarrow \quad c(a_j) \geq c(a_k)\, \forall a_k \in A,$$

kde $\forall a_j \in A$ je $c(a_j)$ *Copelandovo skóre* alternativy a_j dané vztahem

$$c(a_j) = \operatorname{card}\{a_k \in A;\, n_{jk} > 0\} - \operatorname{card}\{a_k \in A;\, n_{kj} > 0\}.$$

Copelandovo skóre pro alternativu a_j je tedy rovno rozdílu počtu alternativ, které alternativa a_j porazí při párovém porovnávání, a počtu alternativ, které naopak porazí alternativu a_j. Jednoduše řečeno, je to počet vítězství minus počet proher alternativy a_j při párových porovnáváních se všemi ostatními alternativami.

Vzhledem k Větě 9 nemá Copelandova funkce tak hezké vlastnosti jako Kemenyho pravidlo. Například obecně negeneruje tranzitivní skupinové uspořádání, takže je vhodná jen k výběru nejlepší alternativy. Další nevýhodou je, že v situaci, kdy neexistuje Condorcetův vítěz, je relativně velká pravděpodobnost, že množina vítězů bude víceprvková. Tato pravděpodobnost je větší než při použití Kemenyho funkce a zvyšuje se se snižujícím se počtem alternativ [8]. Velkou výhodou Copelandovy funkce je ovšem její snadné použití.

Příklad 13 Uvažujme množinu pěti alternativ $A = \{a, b, c, d, e\}$ a čtyři voliče, kteří vyjádřili svůj názor na uspořádání alternativ (od nejlepší k nejhorší) takto: $a\,b\,c\,d\,e$, $c\,d\,a\,b\,e$, $a\,e\,d\,b\,c$ a $b\,c\,d\,a\,e$. Pomocí Copelandovy funkce určíme vítěznou alternativu. Nejdříve provedeme párové srovnávaní pro všechny dvojice alternativ a určíme jednotlivé dílčí vítěze:

	vítěz
$a : b = 3 : 1$	a
$a : c = 2 : 2$	/
$a : d = 2 : 2$	/
$a : e = 4 : 0$	a
$b : c = 3 : 1$	b

	vítěz
$b : d = 2 : 2$	/
$b : e = 3 : 1$	b
$c : d = 3 : 1$	c
$c : e = 3 : 1$	c
$d : e = 3 : 1$	d

Vidíme, že v případě tří dvojic ((a, c), (a, d) a (b, d)) nelze rozhodnout, která z alternativ je lepší. Z párových porovnávání také vidíme, že neexistuje Condorcetova alternativa, tj. alternativa, která při párových porovnáváních porazí všechny ostatní alternativy.

Pro určení vítěze tedy pro každou z alternativ určíme Copelandovo skóre:

alternativa	počet výher	počet proher	Copel. skóre
a	2	0	**2**
b	2	1	1
c	2	1	1
d	1	1	0
e	0	3	-3

Nejvyššího skóre dosáhla alternativa a, která je tím pádem vítěznou alternativou dle Copelandovy funkce. ◦

3.4.3. Blackova funkce

Na závěr uvedeme ještě jednu Condorcetovu funkci, tzv. *Blackovu funkci*. Alternativa je vítěznou alternativou dle Blackovy funkce v případě, že je buď Condorcetovou alternativou nebo (pokud Condorcetova alternativa neexistuje) vítěznou alternativou určenou pomocí Bordovy metody. Použijeme-li profil z Příkladu 13, pro nějž neexistovala Condorcetova alternativa, pak je vítěznou alternativou dle Blackovy funkce alternativa a, která dosáhla nejnižší Bordovy hodnoty ($B(a) = \mathbf{9}$, $B(b) = 11$, $B(c) = 11$, $B(d) = 12$, $B(e) = 17$).

Další Condorcetovy funkce včetně jejich vlastností jsou popsány např. v [8] nebo [12].

Závěr

Cílem práce bylo přehledně popsat základy teorie společenského výběru a tento cíl byl dle mého názoru splněn. Jsem si však vědoma toho, že jde skutečně jen o pohled na povrch této teorie. Hlouběji jsem se bohužel nemohla ponořit z důvodu omezeného rozsahu této práce.

Na začátku práce jsem čtenáře uvedla do rozsáhlé problematiky skupinového rozhodování a zmínila několik různých přístupů a pohledů na skupinové rozhodování. Poté jsem se již zaměřila na samotnou teorii společenského výběru, stručně popsala její historii a také uvedla potřebné základní pojmy a označení.

Další část práce jsem pak věnovala představení tří základních typů agregačních funkcí a popisu jejich vlastností. Nejdříve jsem představila ordinální funkce společenského blahobytu, což jsou funkce, které profilu individuálních preferencí přiřadí jedinou preferenci skupinovou. Z Arrowovy věty (Věta 2) ale bohužel plyne, že najít takovou funkci, která by splňovala několik rozumných požadavků, je nemožné. Pokud nepotřebujeme znát uspořádání všech alternativ, ale postačí nám určit pouze vítěze, lze použít k agregaci některou z funkcí společenského výběru, které jsem obecně popsala v Kapitole 2.4. Ani v tomto případě však nelze najít dostatečně rozumnou funkci, jak plyne z Gibbard-Satterthwaiteovy věty (Věta 3). Proto má smysl uvažovat i kardinální agregační funkce (Kapitola 2.5). Od voličů je ale v tomto případě požadována bohatší (kardinální) informace o jejich preferencích na množině alternativ. Tato bohatší informace však už umožňuje konstruovat rozumné agregační funkce, z nichž některé jsem v práci přímo zmínila.

Závěrečnou kapitolu jsem věnovala některým konkrétním agregačním funkcím (pravidlo prosté většiny, Bordovy metody, bodovací funkce a Condorcetovy funkce). Uvedla jsem jejich charakterizace (nebo alespoň jejich nejdůležitější vlastnosti), popsala vztahy mezi některými z nich a ilustrovala jejich použití na konkrétních příkladech.

Téma společenského výběru je i v současné době stále aktuální a navíc i velice zajímavé, takže jsem při studiu literatury narazila na spoustu dalších námětů, které by stály za samostatné zpracování. Za zmínku stojí například tato temata:

- bodovací funkce a jejich vlastnosti,
- Condorcetovy funkce a jejich vlastnosti
- Nakamurovo číslo, které indikuje pravděpodobnost cyklů při agregaci individuálních preferencí do skupinové preference,
- Arrowova věta a možnosti oslabování jejích některých předpokladů,
- hodnocení soutěží (sportovních, pěveckých, chovatelských apod.), kdy jsou soutěžící hodnoceni skupinou porotců a případně i podle více kritérií (disciplín),
- vztah skupinového a vícekriteriálního rozhodování,
- agregace rozhodnutí porotců v soudní porotě.

Doufám, že budu mít v budoucnu příležitost se k některým z nich vrátit.

Literatura

[1] Arrow, K., J.: *Social choice and individual values.* Second edition, New York: Wiley, 1963.

[2] Baharad, E., Nitzan, S.: *On the selection of the same winner by all scoring functions.* Soc. Choice Welfare 26 (2006), str. 597—601.

[3] Barbera, S.: *Strategy-proof Social Function.* Handbook of Social Choice and Welfare, K. J. Arrow, A. K. Sen and K. Suzumura (eds.), Volume 2, Netherlands: North-Holland, chapter 25, 2010, str. 731—831.

[4] Bouyssou, D., Marchant, T., Perny, P.: *Social Choice Theory and Multicriteria Decision Aiding.* Decision-making Process Concepts and Methods. Ed. Denis Bouyssou et al. ISTE, Wiley, 2009, str. 741–770.

[5] Campbell, D. E., Kelly, J. S.: *Chapter 1 Impossibility theorems in the arrovian framework.* Handbook of Social Choice and Welfare, Volume 1, 2002, str. 35-94.

[6] Dryzek, J. S., List, Ch.: *Social Choice Theory and Deliberative Democracy: A Reconcilitation.*, B. J. Pol. S. 33, str. 1-28.

[7] Fiala, P.: *Skupinové rozhodování.* VŠE v Praze, Praha, 1997.

[8] Fishburn, P. C.: *Condorcet social choice functions.* SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 33, No. 3 (Nov., 1977), str. 469-489.

[9] Gehrlein, W. V. : *The probability of a Condorcet winner with a small number of voters.* Economics Letters 59, 1998, str. 317–321.

[10] Genanakoplos, J.: *Three brief proofs of Arrow's Impossibility Theorem.* Economic Theory, July 2005, Volume 26, Issue 1, str. 211-215.

[11] Gibbard, A.: *Manipulation of Voting Schemes: A General Result.* Econometrica, Vol. 41, No. 4 (Jul., 1973), str. 587-601.

[12] Hwang, Ch., Lin, M.: *Group Decision Making under Multiple Criteria: Methods and Applications.* Lecture Notes in economics and Mathematical Systems. Vol. 281, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.

[13] Lee, J. R.: *Chaotic elections: Constructing and decomposing an election profile using various voting procedures*, [online], [cit. 2016-02-04]. Dostupné z: http://www.ithaca.edu/hs/depts/math/docs/capstone/2014/lee.pdf.

[14] Lepelley, D., Martin, M.: *Condorcet's paradox for weak preference orderings.* European Journal of Political Economy Vol. 17, 2001, str. 163–177.

[15] List, Ch.: *Social Choice Theory*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), [Online], [cit. 2016-02-02]. Dostupné z: http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/social-choice/.

[16] May, K. O. : *A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision*. Econometrica, Vol. 20, No. 4 (Oct., 1952), str. 680-684.

[17] Nitzan, S., Rubinstein, A. : *A further characterization of Borda ranking method*. Public Choice, 1981, Volume 36, Number 1, str. 153-158.

[18] Reny, P. J.: *Arrow's theorem and the Gibbard-Satterthwaite theorem: a unified approach*. Economic Letters. Volume 70, Issue 1, January 2001, str. 99-105.

[19] Salles, M.: *A brief history of social choice.* [online], [cit. 2016-02-26]. Dostupné z http://www.econ.sinica.edu.tw/webtools/thumbnail/download/2013090215153345654/?fd=Conferences_NFlies&Pname=0313.pdf

[20] Satterthwaite, M. A.: *Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions*. Journal of Economic Theory, Vol. 10, Issue 2, April 1975, str. 187-217.

[21] Sen, A., Maskin, E.: *The Arrow impossibility theorem*. Columbia University Press, New York, 2014.

[22] Young, H. P.: *An Axiomatization of Borda's Rule*. Journal of Economic Theory 9, 1974, str. 145-149.

[23] Young, H. P.: *Social Choice Scoring Functions*. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 28, No. 4 (Jun., 1975), str. 824-838.

[24] Young, H. P., Levenglick, A.: *A Consistent Extension of Condorcet's Election Principle* . SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 35, No. 2 (Sep., 1978), str. 285-300.

[25] Yu, N. N.: *A One-Shot Proof of Arrow's Theorem and the Gibbard-Satterthwaite Theorem*. Economic Theory Bulletin, Volume 1, Issue 2, November 2013, str. 145-149.