UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

KONSTRUKČNÍ ÚLOHY – PRACOVNÍ LISTY

Vypracovala:	Tamara Fryčková
Studijní obor:	Matematika
	Geografie
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Rok:	2023

Bibliografické identifikační údaje

Autor:	Tamara Fryčková
Název práce:	Konstrukční úlohy – pracovní listy
Typ práce:	bakalářská
Katedra:	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce:	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Rok:	2023
Jazyk:	čeština
Anotace:	Cílem práce je vytvořením pracovních listů z konstrukční geometrie pro studenty středních škol a pro učitele středních škol. Pracovní listy jsou zpracovány ve formě listu v programu GeoGebra. Text této práce obsahuje potřebnou teorii k vyřešení daných úloh, zadání daných úloh i jejich řešení.
Klíčová slova:	planimetrie, trojúhelník, čtyřúhelník, konstrukce, pracovní list, GeoGebra
Počet stran:	43
Počet příloh:	15

Bibliographical identifications

Author:	Tamara Fryčková
Title:	Construction tasks – Worksheets
Type of thesis:	Bachelor
Department:	Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Year:	2023
Language:	Czech
Annotation:	The aim of this thesis is to create worksheets for structural geometry. These worksheets are made for High School students or High School teachers and were made in the form of dynamic sheets in GeoGebra software. The text of the thesis itself contains the required theory, descriptions of the worksheets and solutions.
Key words:	planimetry, triangle, quadrilateral, construction, worksheet, GeoGebra
Number of pages:	43
Number of attachments:	15

Prohlášení

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph.D., a v seznamu jsem uvedla všechny použité zdroje.

V Olomouci: Podpis:

Poděkování

Především bych chtěla poděkovat vedoucí mé práce, paní RNDr. Lence Juklové, Ph.D., za skvělé vedení po celou dobu, cenné rady a připomínky při zpracovávání mé bakalářské práce. Mé poděkování patří i mým nejbližším a rodině za podporu a pochopení po celou dobu mého studia.

Obsah

Úvod

Bakalářská práce se zaměřuje na pracovní listy konstrukčních úloh, protože jako budoucí učitelka matematiky jsem si vědoma, že planimetrie tvoří velkou část výuky nejen na základní škole, ale i na střední škole.

Z důvodu časové náročnosti rýsování v hodině se často nestihne probrat ideální množství látky a student tudíž nemusí pochopit všechny důležité souvislosti. Planimetrie je základ geometrie, tudíž je pro studenta důležité mít planimetrii skvěle prostudovanou. Student by měl být schopen rozboru, kde se vysvětlují dané kroky, samotné konstrukce, kde prokáže schopnost používání pomůcek na rýsování, až po podmínky řešitelnosti.

V časovém rozmezí hodiny je téměř nemožné se studenty procvičit všechny typy příkladů, proto je mým cílem vytvořit pracovní listy, které můžou sloužit nejen učitelům jako podklady ve výuce, ale i jako příklady pro studenty k samostudiu. Protože je každý příklad zaměřen na jinou problematiku v planimetrii, mohou pracovní listy v mé bakalářské práci zefektivnit výuku základů pro geometrii a jejich výpočty.

K přípravě pracovních listů jsem využila program GeoGebra, který je volně dostupný software. Tento program lze všeobecně využívat k názornosti problematiky v matematice a je jednoduše ovladatelný. Z tohoto důvodu je ideálním využitím nových technologií a velice jasně dokáže studentovi danou problematiku vysvětlit. Veškeré obrázky, které jsou použity v bakalářské práci, jsou také vypracovány právě v programu GeoGebra.

Bakalářská práce se skládá ze dvou kapitol. V první kapitole se zaměřuji na teorii potřebnou k vypracování pracovních listů. Zaměření se týká především základních tvarů, trojúhelníků a čtyřúhelníků. Zahrnuty jsou zde základní definice, důležité věty a názorné ukázky formou obrázků. Ve druhé kapitole je vysvětlen obsah řešení, jeho dané součásti, vypracované zadání, včetně jejich řešení. Součástí je také příloha, která je na konci bakalářské práce. V příloze najde čtenář zadání daných úloh, včetně parametrů vybraných tak, aby příklady měly minimálně jedno řešení a dobře se daly použít i pomůcky k rýsování.

Jelikož podporuji vývoj nových technologií, které můžou studentům rozvíjet jejich přehled o učivu a zároveň logiku při jeho používání, jsem velice ráda, že jsem mohla v mé bakalářské práci využít právě program GeoGebra.

1 Planimetrie

Planimetrie je část geometrie, která se zabývá geometrickými útvary v rovině. V následujícím textu se počítá s faktem, že čtenář je již seznámen se základními polohovými vlastnostmi v planimetrii, jako je například definice přímky nebo polohy přímek. V této bakalářské práci se budeme zaměřovat především na trojúhelníky a čtyřúhelníky a jejich vlastnosti. Text v následných podkapitolách je převzatý ze zdrojů [1], [2] a [4].

1.1 Základní množiny bodů

Na úvod bychom si měli připomenout základní pojmy a jejich vlastnosti, se kterými je čtenář určitě již plně seznámen. Mezi základní útvary planimetrie řadíme například bod, přímku, polorovinu, úhel, dvojici úhlů, dvojici přímek.

Definice 1 Bod určujeme jako průsečík dvou čar a označujeme písmeny velké abecedy.

Poznámka. Body nazveme totožné v momentě, kdy spolu splývají, píšeme $A = B$.

Definice 2 Přímka je čára, která prochází dvěma body.

Poznámka. Dvěma body prochází jediná přímka. Pokud existuje další přímka, která obsahuje tyto body, pak se jedná o přímky totožné a všechny body přímky jsou taktéž totožné. Body, které leží na stejné přímce, nazýváme incidentní.

Definice 3 Bod rozděluje přímku na dvě navzájem opačné polopřímky a je jejich společných počátkem.

Poznámka. Každý jiný bod, který není počátkem, je vnitřním bodem dané polopřímky. Pomocí vnitřního bodu (např. X) a počátku (např. P) pak můžeme označit polopřímku PX.

Definice 4 Úsečka AB je průnik dvou polopřímek: polopřímky AB a polopřímky BA, kdy body A, B nejsou totožné, tj. $A \neq B$.

Definice 5 Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné poloroviny a je jejich společnou hranicí (hraniční přímkou).

Poznámka. Hraniční přímka náleží oběma polorovinám.

Definice 6 Dvě různé polopřímky VA, VB se společným počátkem V dělí rovinu na dva úhly AVB.

Definici úhlu můžeme popsat i jinými slovy, a to tak, že se jedná o oblast roviny, která je ohraničená polopřímkami se společným bodem (počátkem).

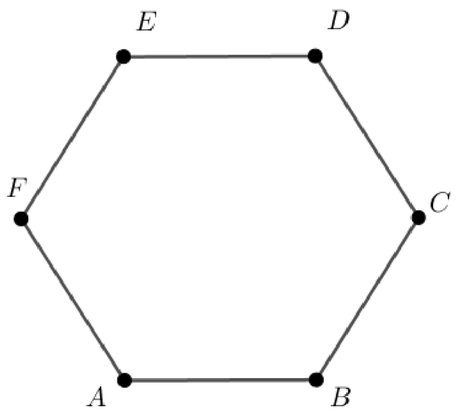
Polopřímky VA, VB se nazývají ramena úhlu a V se nazývá vrchol úhlu.

Definice 7 Konvexní úhel nazýváme takový úhel, kdy φ je $0 \leq \varphi \leq 180°$.

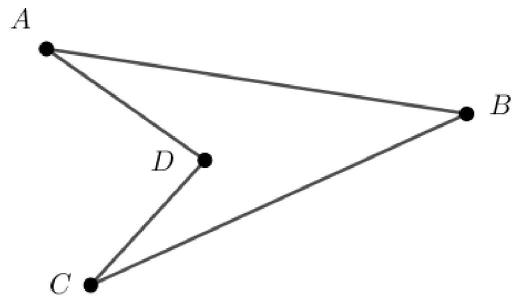
Poznámka. Pokud je úhel $180° < \varphi < 360°$, pak nazýváme tento úhel nekonvexní. Úhel $\varphi = 180°$ nazýváme úhel přímý a úhel $\varphi = 360°$ se nazývá úhel plný.

Definice 8 Geometrický útvar se nazývá konvexní, je-li jakákoliv úsečka s krajními body v libovolných dvou bodech útvaru součástí tohoto útvaru.

Poznámka. Pokud geometrický útvar má dva krajní body spojené úsečkou, která není součástí útvaru, pak se daný útvar nazývá nekonvexní.

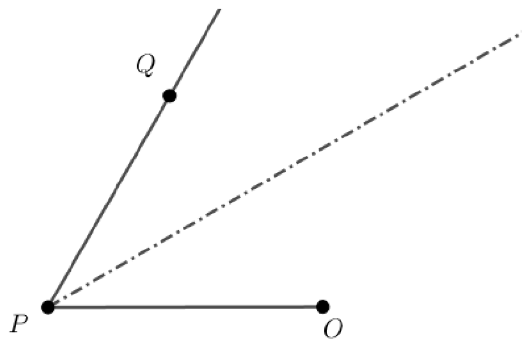


Obrázek 1: Konvexní šestiúhelník



Obrázek 2: Nekonvexní čtyřúhelník

Definice 9 Osa úhlu je polopřímka s počátkem ve vrcholu úhlu, která půlí daný úhel na dva shodné úhly.



Obrázek 3: Osa úhlu $\sphericalangle OPQ$

1.2 Trojúhelník

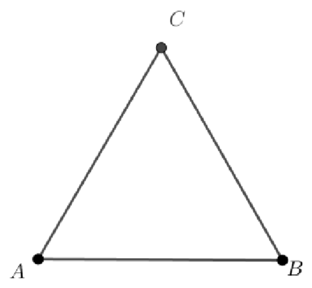
Trojúhelník je určen třemi nekolineárními body (tj. body neležící na jedné přímce), které nazýváme vrcholy a úsečky určené těmito body se nazývají strany daného trojúhelníku.

Definice 10 Trojúhelník ABC je průnik polorovin ABC, BCA, CAB. Přitom body A, B, C jsou různé a neleží na jedné přímce.

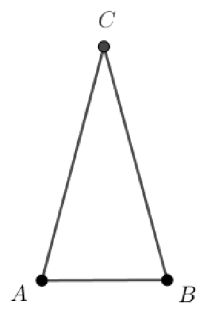
Poznámka. Trojúhelníky můžeme dále třídit.

Trojúhelník ABC nazveme:

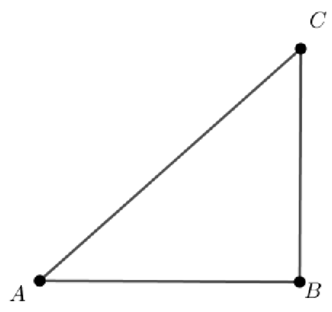
- pravoúhlý, jestliže je jeden z vnitřních úhlů roven 90°
- rovnostranný, jsou-li všechny jeho strany sobě rovny (všechny vnitřní úhly jsou shodné)
- rovnoramenný, jsou-li jeho dvě strany rovny a svírají stejný úhel se stranou třetí
- různostranný (obecný), má-li každá strana jinou velikost (jeho úhly se od sebe liší)



Obrázek 4: Trojúhelník rovnostranný



Obrázek 5: Trojúhelník rovnoramenný



Obrázek 6: Trojúhelník pravoúhlý

Poznámka. V pravoúhlém trojúhelníku platí tzv. Pythagorova věta.

Věta 1 Pythagorova věta

Jestliže a, b, c jsou délky stran (a, b jsou odvěsny a c je přepona) pravoúhlého trojúhelníku, pak platí vztah $c^2 = a^2 + b^2$.

Věta obrácená k Pythagorově větě

Jestliže platí vztah $c^2 = a^2 + b^2$, potom jsou a, b, c, délky stran pravoúhlého trojúhelníku.

Věta 2 Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.

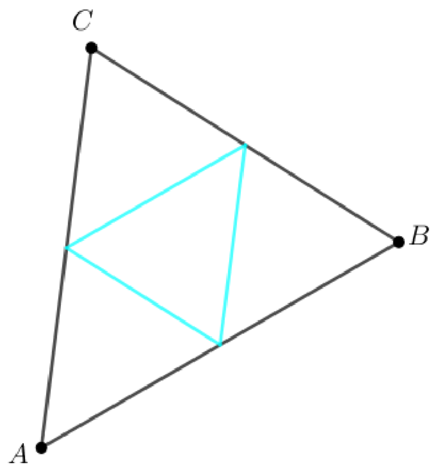
Věta 3 Součet velikostí jakýkoliv dvou stran trojúhelníku musí být větší než velikost strany třetí.

Poznámka. Tuto nerovnost nazýváme tzv. **trojúhelníkovou nerovností.** Pokud nastane situace, že součet velikostí dvou stran je roven velikosti strany třetí, pak třetí bod leží na úsečce, která je spojnicí dvou prvních bodů, tzn., nejedná se o trojúhelník. Proto musí platit $|AB| < |AC| + |BC|$, (resp. $|AC| < |AB| + |BC|$, resp. $|BC| < |AC| + |AB|$).

Věta 4 Proti shodným stranám trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly. Proti větší straně trojúhelníku leží i větší úhel a naopak.

Definice 11 Střední příčka trojúhelníku je úsečka, spojující středy dvou stran trojúhelníku.

Věta 5 Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje. Její délka je rovna polovině délky této strany.

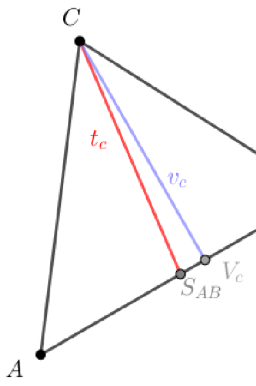


Obrázek 7: Střední příčky v trojúhelníku

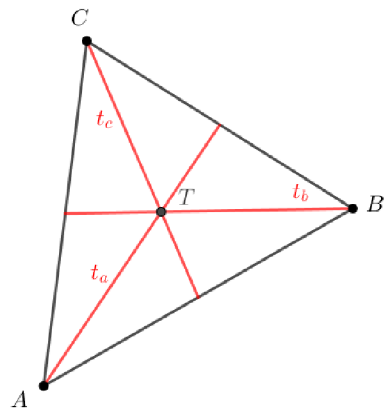
Definice 12 Kolmice spuštěná z vrcholu na protější stranu se nazývá výška trojúhelníku. Průsečík kolmice s protější stranou se nazývá pata výšky. Výšky se protnou v jediném bodě, které nazýváme ortocentrum. Značíme ho O.

Definice 13 Těžnice trojúhelníku je úsečka, která spojuje vrchol a střed protější strany. Těžnice se protínají právě v jednom bodě, který nazýváme těžiště trojúhelníku. Značíme ho T.

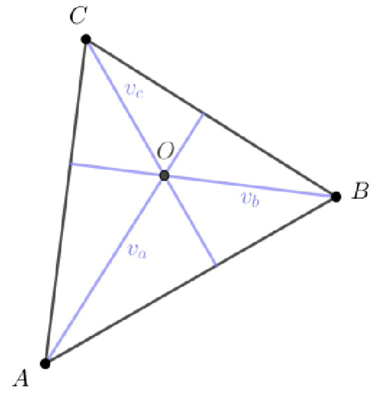
Poznámka. Vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna dvěma třetinám velikosti těžnice. Tedy vzdálenost těžiště a středu odpovídající strany je rovna jedné třetině velikosti těžnice.



Obrázek 8: Těžnice a výška na stranu c



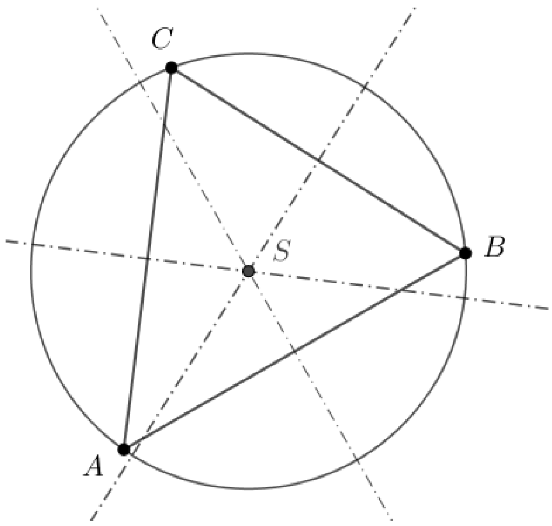
Obrázek 9: Těžnice a těžiště



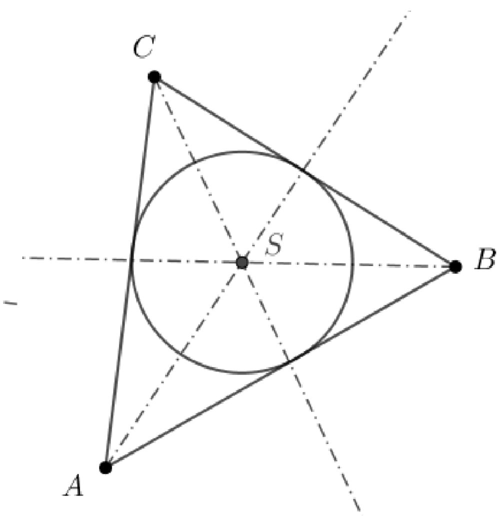
Obrázek 10: Výšky a ortocentrum

Definice 14 Kružnice opsaná trojúhelníku je kružnice, které náleží všechny vrcholy daného trojúhelníku. Střed kružnice opsané trojúhelníku je průsečík os stran trojúhelníku.

Definice 15 Kružnice vepsaná trojúhelníku je kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníku. Střed kružnice vepsané trojúhelníku je průsečík všech vnitřních úhlů trojúhelníku.



Obrázek 11: Kružnice opsaná trojúhelníku ABC



Obrázek 12: Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC

Definice 16 Trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A'B'C'$, právě když existuje kladné číslo k tak, že pro jejich strany platí $|A'B'| = k \cdot |AB|,\ |B'C'| = k \cdot |BC|,\ |C'A'| = k \cdot |CA|$, neboli $c' = k \cdot c,\quad a' = k \cdot a,\quad b' = k \cdot b.$

Poznámka. Číslo k se nazývá koeficient podobnosti trojúhelníků ABC, $A'B'C'$. Je-li $k < 1$, pak se jedná o zmenšení trojúhelníku $A'B'C'$, pokud $k > 1$, pak ses jedná o zvětšení trojúhelníku $A'B'C'$. Pokud $k = 1$, trojúhelníky jsou shodné.

Věta 6 Dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.

Věta 7 Dva trojúhelníky, které mají stejný poměr velikosti délek dvou stran a úhlu jimi sevřeného, jsou podobné.

Věta 8 (Věta Ssu) Každé dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich.

Věta 9 (Věta sus) Každé dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném.

Věta 10 (Věta sss) Každé dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují ve třech stranách.

Věta 11 (Věta usu) Každé dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých.

1. 3 Mnohoúhelníky

Lomená čára $A_0, A_1, \dots, A_n$ $(n \geq 2)$ se skládá z úseček, z nichž každé dvě sousední mají společný právě jeden krajní bod a neleží na téže přímce, tudíž $|A_0A_1|, |A_1A_2|, \dots, |A_{n-1}A_n|$. Tyto úsečky se nazývají strany lomené čáry a body - $A_0, A_1, \dots, A_n$ se nazývají vrcholy lomené čáry. Lomená čára se nazývá uzavřená, jestliže - $A_0 = A_n$.

Definice 17 Uzavřená lomená čára spolu s částí roviny ohraničenou touto lomenou čárou se nazývá mnohoúhelník.

Poznámka. Nejmenší možný mnohoúhelník je trojúhelník.

Věta 12 Počet úhlopříček v n-úhelníku je $\frac{1}{2}\, n\, (n-3)$.

Věta 13 Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku se rovná $(n-2) \cdot 180°$.

Poznámka. Pravidelný n-úhelník má shodné všechny své strany i všechny vnitřní úhly.

1. 3. 1. Čtyřúhelníky

Definice 18 $n -$ úhelník, kde $n = 4$, se nazývá čtyřúhelník.

Definice 19 Čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici, nazýváme tětivový.

Příklad. Mezi tětivové čtyřúhelníky patří například čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník atp.

Věta 14 Součet protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je roven 180°.

Definice 20 Čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici, nazýváme tečnový.

Příklad. Mezi tečnové čtyřúhelníky patří například čtverec, kosočtverec, deltoid, atp.

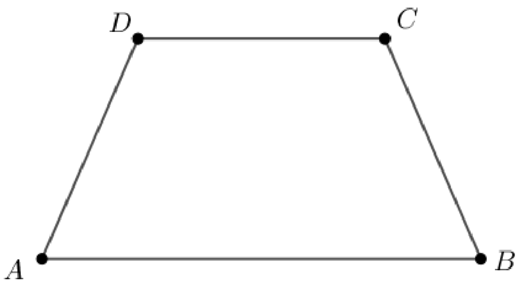
Věta 15 Součty délek dvojic protějších stran tečnového čtyřúhelníku jsou si rovny.

Definice 21 Čtyřúhelník, kterému lze vepsat i opsat kružnici, nazýváme dvojstředový.

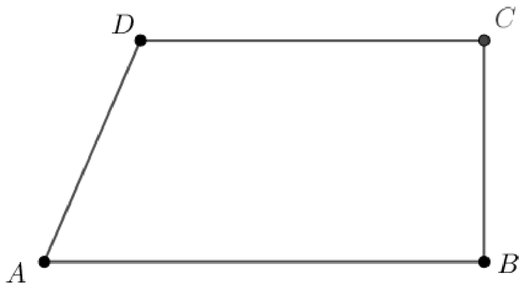
Příklad. Mezi dvojstředové čtyřúhelníky patří například čtverec.

Čtyřúhelníky dělíme na:

- Různoběžníky – takový čtyřúhelník, kde ani jedna dvojice stran není se sebou rovnoběžná
- Lichoběžníky – takový čtyřúhelník, kde dvě jeho strany jsou rovnoběžné (tzv. základny) a zbylé dvě strany rovnoběžné nejsou (tzv. ramena).
    - Lichoběžníky můžeme dále dělit: obecný, rovnoramenný a pravoúhlý lichoběžník
- Rovnoběžníky – takový čtyřúhelník, kde obě dvojice stran jsou se sebou rovnoběžné
    - Rovnoběžníky dále dělíme
        - podle velikostí úhlů (kosoúhlé – kosočtverec, kosodélník; pravoúhlé – čtverec, obdélník)
        - podle velikostí stran (rovnostranné – kosočtverec, čtverec; různostranné – obdélník, kosodélník)



Obrázek 13: Rovnoramenný lichoběžník



Obrázek 14: Pravoúhlý lichoběžník

Věta 16 Úhlopříčky ve čtverci půlí úhly u odpovídajících vrcholů.

Věta 17 Strany čtverce jsou na sebe navzájem kolmé a velikost všech stran je stejná.

Věta 18 Strany obdélníků jsou na sebe navzájem kolmé a dvojice rovnoběžných mají stejnou velikost.

Věta 19 Úhlopříčky ve čtverci se půlí a jsou na sebe navzájem kolmé.

Věta 20 Obdélník i čtverec je středově souměrný se středem souměrnosti v průsečíku úhlopříček.

Věta 21 Úhel, který svírají úhlopříčky obdélníku nad stranou BC, resp. BA, je dvojnásobek úhlu, jenž svírá úhlopříčka se stranou AB, resp. CB. Označme S průsečík úhlopříček AC, BD obdélníku $ABCD$. Platí: $|\sphericalangle BSC| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB| a\, |\sphericalangle ASB| = 2 \cdot |\sphericalangle CBD|$.

2 Konstrukční úlohy

Všechny rozbory a řešení jsou zpracovány stejným způsobem, jako v [3].

Každá konstrukční úloha má řešení, které se skládá z rozboru úlohy, popisu konstrukce (konstrukce samotná je součástí popisu konstrukce u neparametrických úloh), důkazu správnosti konstrukce, podmínky řešitelnosti a diskuse. Důkazy v pracovních listech v následující podkapitole nebudeme uvádět, jelikož budeme používat při konstrukci pouze shodná a podobná zobrazení, či množiny bodů dané vlastnosti.

Rozbor úlohy je zásadní částí řešení konstrukční úlohy. V rámci rozboru je provedena analýza celé situace, která obsahuje nalezení všech nutných podmínek, které vedou ke stanovení postupu při řešení úlohy. Zde také zjistíme, zda jsou potřeba pouze ekvivalentní kroky, či je potřeba doložit i důkaz určitého kroku. Součástí rozboru je i obrázek, ve kterém jsou ideálně zřetelně vyznačeny všechny zadané informace a metrické údaje.

Popis konstrukce obsahuje jednotlivé kroky, které nám stručně popisují postup konstrukce hledaného planimetrického útvaru. Je založen na analýze rozboru konstrukční úlohy. Pokud se jedná o neparametrickou úlohu, pak bezprostředně po popisu konstrukce následuje i samotná konstrukce hledaného útvaru s danými metrickými údaji.

Podmínky řešitelnosti uvádíme v každém řešení parametrické konstrukční úlohy. Na základě provedeného rozboru a následného popisu konstrukce v nich sumarizujeme všechny nutné a postačující podmínky potřebné ke konstrukci daného útvaru.

Diskuse o počtu řešení je nedílnou součástí řešení konstrukční úlohy. Uvádíme ji jak u parametrických úloh, tak i u neparametrických úloh.

2.1 Pracovní listy

Dané pracovní listy jsou vypracovány s minimálním používáním matematických znaků a zkratek, jelikož jsou určeny především k samostudiu či procvičování pro středoškolské studenty. Tímto se potenciálně zamezí špatnému vyložení a přispěje k správnému pochopení problematiky příkladu.

Pracovní listy čtenář najde na odkazu níže:

https://www.geogebra.org/u/tamara_fry%C4%8Dkov%C3%A1

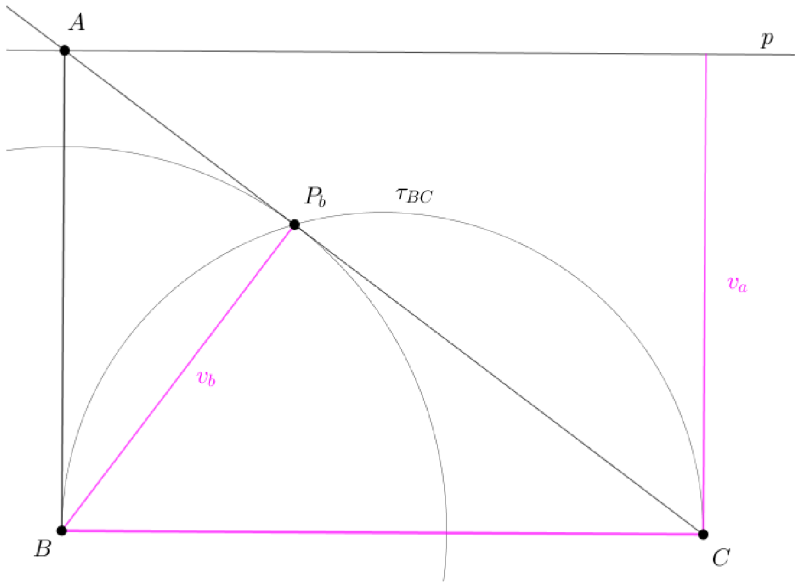
Seznam použitých symbolů

$A, B, A', \dots$	body $A, B, A', \dots$
p, q	přímka p, q
strana AB	úsečka s krajními body (vrcholy) A a B
polopřímka AX	polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem X
$\sphericalangle\, OPQ$	úhel s vrcholem P a rameny OP a PQ
$k(A, r)$	kružnice k se středem A a poloměrem r
$\|AB\|$	velikost úsečky AB
ρ	poloměr kružnice trojúhelníku vepsané
r	poloměr kružnice trojúhelníku opsané
v	kolmice z vrcholu $C/B/A$ na protější stranu
t	úsečka z vrcholu $C/B/A$ na střed protější strany
P	průsečík kolmice z vrcholu $C/B/A$ na protější stranu a protější strany
τ	Thaletova kružnice
α, β, γ	vnitřní úhly trojúhelníku u vrcholu A, B, C
T	průsečík úsečky z vrcholu $C/B/A$ na střed protější strany a protější strany
e, f	úhlopříčky ve čtyřúhelníku
o	osa pásu rovnoběžek

1. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li $\boldsymbol{a, v_a, v_b}$.

Rozbor

Vrchol A je vzdálen v_a od strany BC, tj leží na přímce p, která je rovnoběžná s úsečkou BC a ve vzdálenosti v_a od přímky BC. Pata výšky P_b leží na Thaletově kružnici τ_{BC} nad úsečkou BC a současně je ve vzdálenosti v_b od bodu B, tj. náleží kružnici $l(B, v_b)$.



Obrázek 15

Popis konstrukce

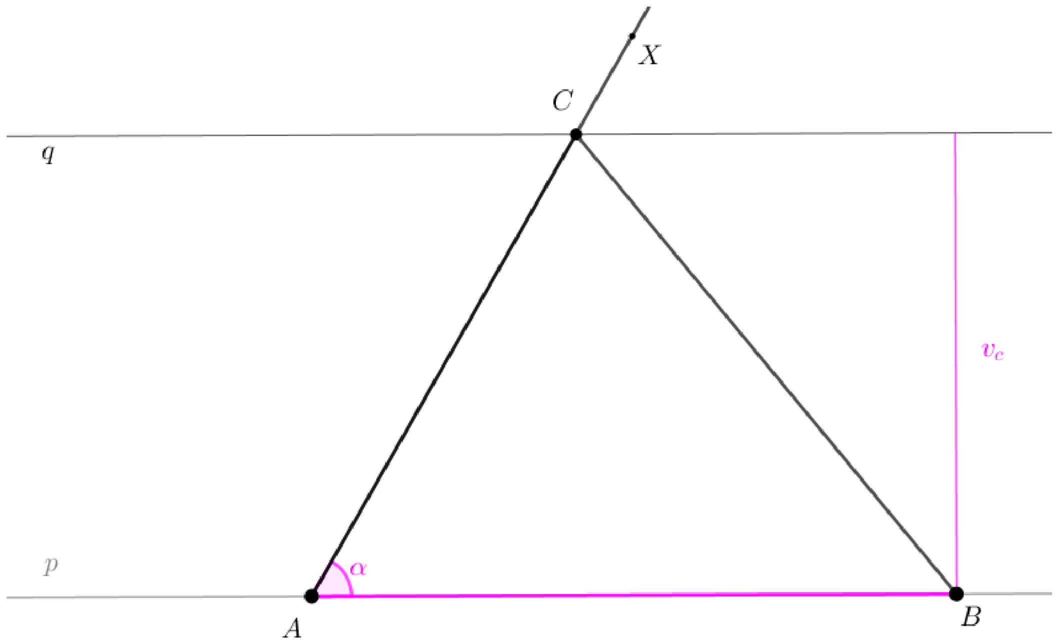
1. Umístíme stranu $BC, |BC| = a$.
2. Narýsujeme Thaletovu kružnici τ_{BC}.
3. Sestrojíme kružnici $l(B, v_b)$.
4. Sestrojíme průsečík P_b Thaletovy kružnice τ_{BC} a kružnice l. P_b je pata výšky na stranu AC.
5. Narýsujeme polopřímku z bodu C s vnitřním bodem V_b.
6. Sestrojíme rovnoběžku p se stranou BC, která bude ve vzdálenosti v_a od strany BC.
7. Sestrojíme vrchol A jako průsečík polopřímky CV_b a rovnoběžky p.
8. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má právě jedno řešení v polorovině, pro $v_b < a$. Pro $v_b \geq a$ (kružnice se středem B a poloměrem v_b neprotne Thaletovu kružnici) daná úloha nemá žádné řešení.

2. **Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li c, v_c, α**

Rozbor

Uvažujme rovnoběžky p, q, jenž jsou od sebe vzdáleny v_c. Vrcholy trojúhelníku A, B leží na přímce p a vrchol C leží na přímce q. Zároveň víme, že strany AB a AC svírají úhel α, tudíž polopřímka AX bude svírat se stranou AB úhel α. Z toho vyplývá, že vrchol C bude náležet přímce q a zároveň polopřímce AX.



Obrázek 16

Popis konstrukce

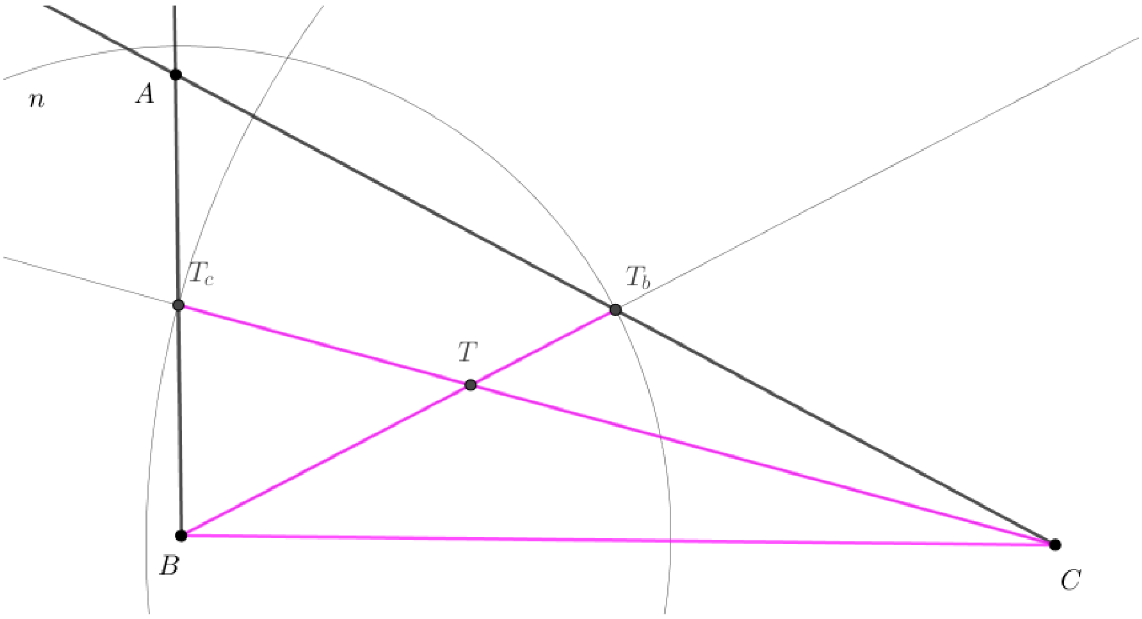
1. Umístíme stranu $AB, |AB| = c$.
2. Narýsujeme přímku q, jenž je ve vzdálenosti v_c od přímky $p = \leftrightarrow AB$ a je s ní rovnoběžná.
3. Narýsujeme polopřímku AX, která svírá úhel velikosti α se stranou AB.
4. Sestrojíme vrchol C jako průsečík polopřímky AX a přímky q.
5. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má jedno řešení v polorovině pro $\alpha < 180°$. Úloha nemá žádné řešení pro $\alpha \geq 180°$ (jinak spor s větou o součtu úhlů v trojúhelníku).

3. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li a, t_c, t_b.

Rozbor

Víme, že těžiště je vždy vzdáleno $\frac{2}{3}$ délky těžnice od odpovídajícího vrcholu trojúhelníku a $\frac{1}{3}$ délky těžnice od středu protější strany. Tudíž těžiště T trojúhelníku ABC náleží kružnici $k(B;\ \frac{2}{3}t_b)$ a kružnici $l(C;\ \frac{2}{3}t_c)$. Střed T_c strany AB je vzdálen o t_c od bodu C, proto leží na polopřímce CT a kružnici $m(C;\ t_c)$. Střed T_b strany AC je vzdálen o t_b od bodu B, proto leží na polopřímce BT a kružnici $n(B;\ t_b)$. Bod A leží na polopřímkách BT_c a CT_b.



Obrázek 17

Popis konstrukce

1. Umístíme stranu $BC, |BC| = a$.
2. Sestrojíme kružnici $k(B;\ \frac{2}{3}t_b)$.
3. Sestrojíme kružnici $l(C;\ \frac{2}{3}t_c)$.
4. Sestrojíme průsečík T kružnice k a kružnice l.
5. Narýsujeme polopřímku CT.
6. Sestrojíme kružnici $m(C;\ t_c)$.
7. Sestrojíme průsečík T_c kružnice m a polopřímky CT.
8. Narýsujeme polopřímku BT.
9. Sestrojíme kružnici $n(B;\ t_b)$.

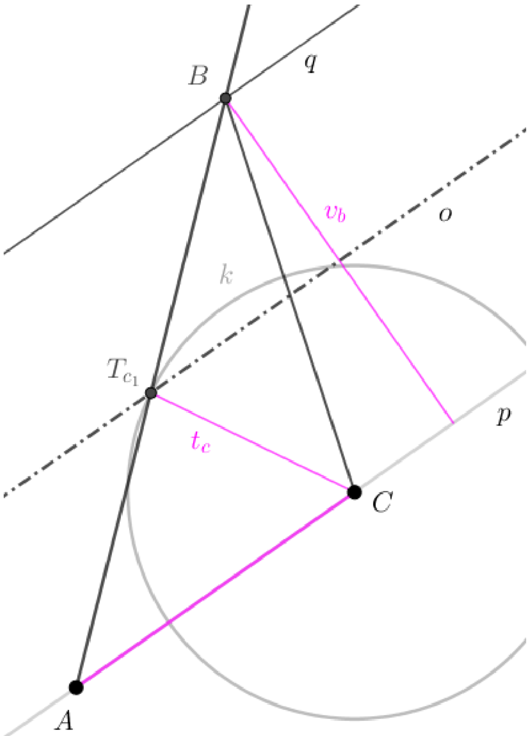
10. Sestrojíme průsečík T_b kružnice n a polopřímky BT.
11. Narýsujeme polopřímku BT_c.
12. Narýsujeme polopřímku CT_b.
13. Sestrojíme vrchol A jako průsečík polopřímek BT_c a CT_b.
14. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnost a diskuse Konstrukční úloha má právě jedno řešení v polorovině pro $a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c$. Pokud by průsečík kružnice k a kružnice l byl pouze jeden (tj. a = $\frac{2}{3}\ t_b + \frac{2}{3}\ t_c$), pak těžiště leží na straně BC, tedy neexistuje trojúhelník ABC. Pokud kružnice k a kružnice l nemají žádný průsečík (tj. $a\ > \frac{2}{3}\ t_b + \frac{2}{3}\ t_c$), pak úloha nemá řešení.

4. **Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li b, t_c, v_b**

Rozbor

Uvažujme rovnoběžky p, q, jenž jsou od sebe vzdáleny v_b. Vrcholy A, C trojúhelníku ABC leží na rovnoběžce p a vrchol B leží na rovnoběžce q. Jelikož T_c je střed strany AB, leží T_c na ose pásu rovnoběžek p, q a zároveň na kružnici $k(C;\ t_c)$. Bod B leží na polopřímce AT_c a současně na rovnoběžce q.



Obrázek 18

Popis konstrukce

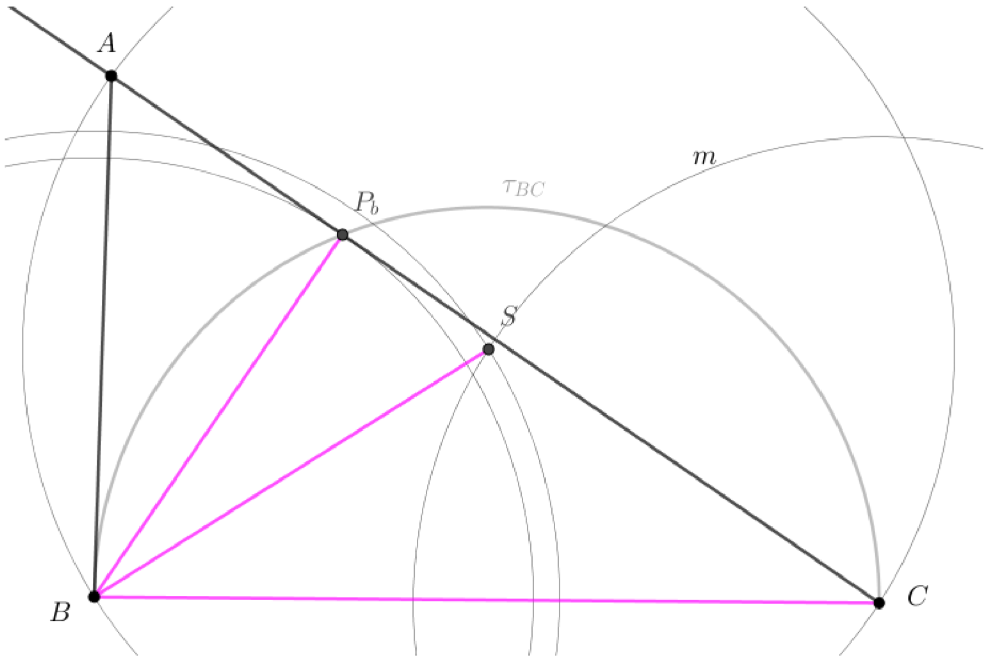
1. Umístíme stranu AC, $|AC| = b$.
2. Sestrojíme rovnoběžku q se stranou AC, která bude ve vzdálenosti v_b od strany AC,
3. Narýsujeme osu pásu o.
4. Sestrojíme kružnici $k(C, t_c)$.
5. Sestrojíme průsečík T_c kružnice k a osy pásu o.
6. Narýsujeme polopřímku AT_c.
7. Sestrojíme vrchol B jako průsečík přímky q a polopřímky AT_c.
8. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má 2 řešení v polorovině pro $\frac{1}{2}v_b < t_c$. Pokud osa pásu o a kružnice k má právě jeden průsečík (tj. $\frac{1}{2}\ v_b = t_c$), úloha má pouze jedno řešení. Neprotne-li se osa pásu o s kružnicí k (tj. $\frac{1}{2}\ v_b\ > t_c$), pak úloha nemá žádné řešení.

5. **Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li a, v_b, r**

Rozbor

Nechť P_b je pata výšky z vrcholu B, která je vzdálena v_b od vrcholu B. Bod P_b tedy leží na kružnici $k(B;\ v_b)$ a jelikož jde o patu kolmice, leží také na Thaletově kružnici τ_{BC}. Bod A náleží kružnici trojúhelníku opsané, jako i body B, C. Střed kružnice trojúhelníku opsané leží na kružnicích $l(B, r)$ a $m(C, r)$. Bod A leží na kružnici $n(S, r)$ a na polopřímce CP_b.



Obrázek 19

Popis konstrukce

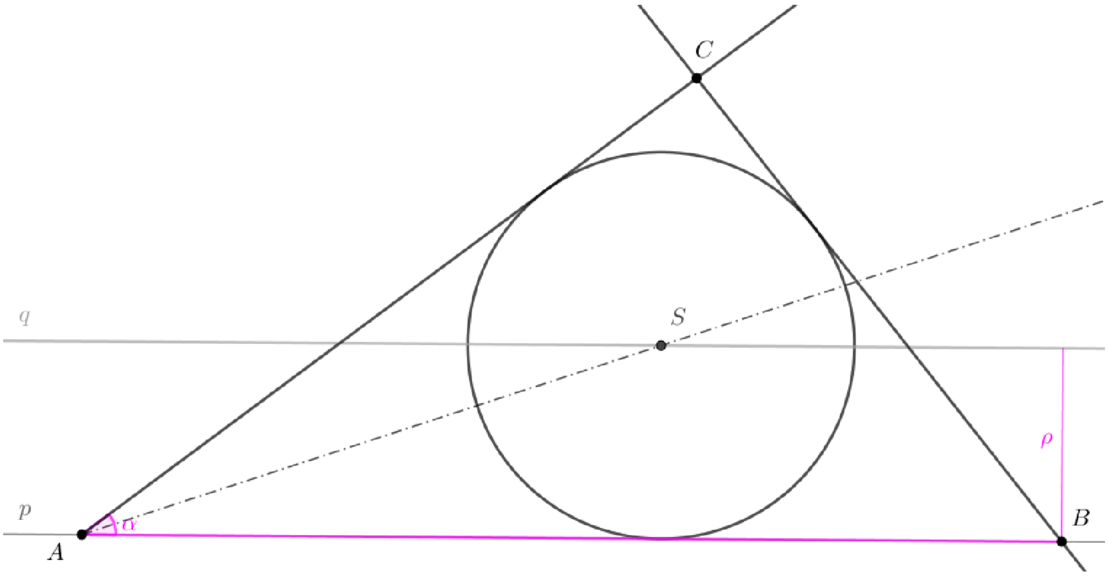
1. Umístíme stranu $BC, |BC| = a$.
2. Sestrojíme kružnici $k(B, v_b)$.
3. Narýsujeme Thaletovu kružnici τ_{BC}.
4. Sestrojíme průsečík P_b Thaletovy kružnice τ_{BC} a kružnice k.
5. Narýsujeme polopřímku CP_b.
6. Sestrojíme kružnici $l(B, r)$.
7. Sestrojíme kružnici $m(C, r)$
8. Sestrojíme průsečík S kružnice l a kružnice m.
9. Sestrojíme kružnici $n(S, r)$.
10. Sestrojíme vrchol A jako průsečík kružnice n a polopřímky CP_b.
11. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má 2 řešení v polorovině pro $v_b < a < 2r$. Pokud průsečík kružnic l, m je pouze jeden (tj. $v_b < a = 2\,r$) pak průsečík leží na straně BC má daná úloha 1 řešení v polorovině. Pokud se kružnice l, m neprotnou (tj. $a\ > 2\,r$) nebo pokud $v_b\ \geq a$, potom úloha nemá řešení.

6. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li c, α, ρ

Rozbor

Uvažujme dvě rovnoběžky, p, q, jenž jsou od sebe vzdáleny ρ. Strana AB trojúhelníku ABC leží na přímce p, střed S kružnice vepsané náleží přímce q. Jelikož střed kružnice vepsané je průsečík os úhlů trojúhelníku, střed S náleží ose úhlu α. Strany trojúhelníku a, b, c jsou tečny ke kružnici vepsané. Bod C tedy bude náležet tečně ke kružnici, které náleží i bod B a současně bod C bude ležet na polopřímce AX, která svírá se stranou AB úhel α.

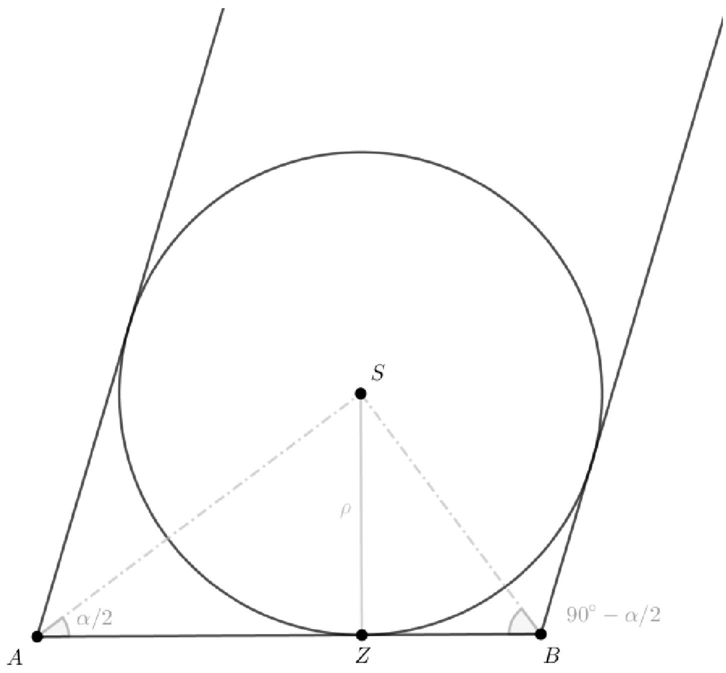


Obrázek 20

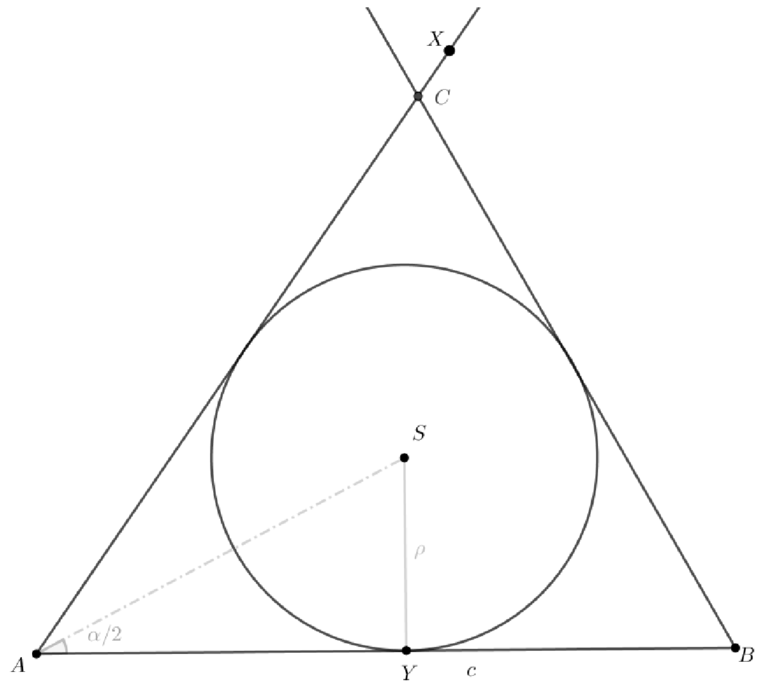
Popis konstrukce

1. Umístíme stranu AB, $|AB| = c$.
2. Sestrojíme polopřímku AX, $|\sphericalangle BAX| = \alpha$.
3. Narýsujeme přímku q vzdálenou ρ od přímky p, která s ní bude rovnoběžná.
4. Narýsujeme osu úhlu α.
5. Sestrojíme průsečík S osy úhlu a přímky q.
6. Sestrojíme kružnici $o(S;\ \rho)$ (kružnice se dotýká polopřímky AX i přímky AB).
7. Narýsujeme tečnu t ke kružnici o, která prochází bodem B a je různá od přímky AB.
8. Sestrojíme vrchol C jako průsečík polopřímky AX a tečny t.
9. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má právě jedno řešení v polorovině pro $\rho < \frac{c}{\cot\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}} \wedge \rho < \frac{c}{\cot\frac{\alpha}{2}}$. Pro $\rho \geq \frac{c}{\cot\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\alpha}{2}} \wedge \rho \geq \frac{c}{\cot\frac{\alpha}{2}}$ úloha nemá řešení. Podmínky jsou odvozeny z obrázku 21 a obrázku 22. Po úpravě získáme dané podmínky.



Obrázek 21

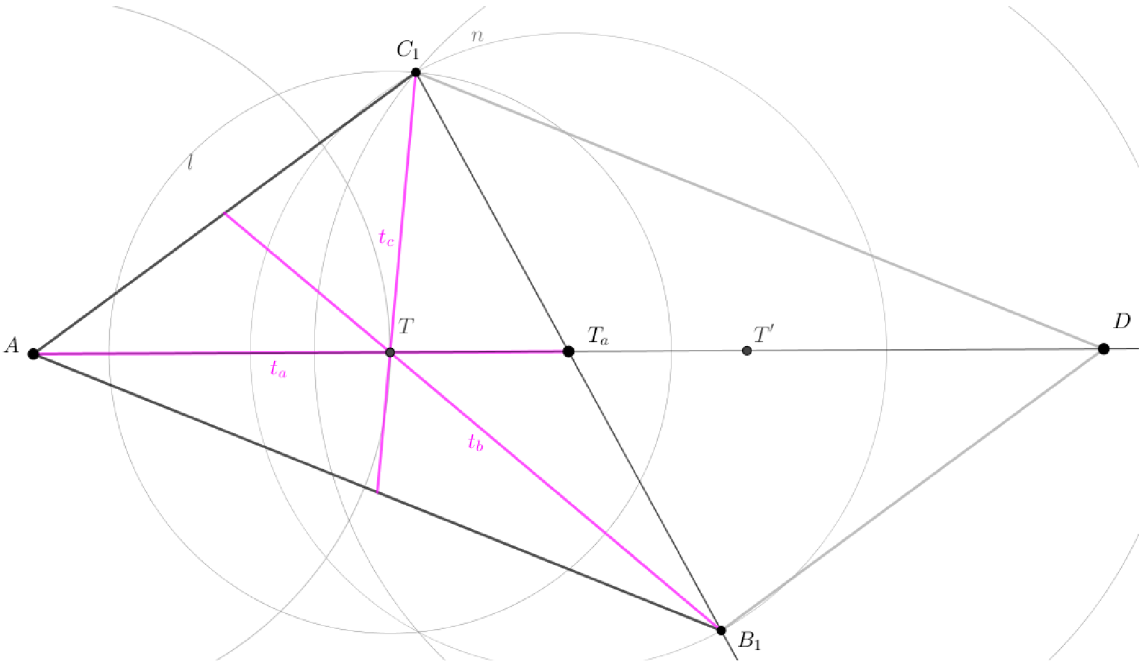


Obrázek 22

7. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li t_a, t_b, t_c.

Rozbor

Uvažujme rovnoběžník $ABCD$. Nechť $|AD| = 2t_a$ je úhlopříčka v rovnoběžníku. Jelikož těžiště je vzdáleno vždy $\frac{2}{3}$ velikosti těžnice od příslušného vrcholu, bude bod T ležet na kružnici $k(A, \frac{2}{3}\ t_a)$ a současně na AD. Bod T_a je střed úsečky AD a je také střed souměrnosti rovnoběžníku $ABCD$. Dále obraz T' bodu T ve středové souměrnosti se středem T_a leží na úsečce AD. Platí: $|CT| = \frac{2}{3}\ t_c$ a $|CT'| = \frac{2}{3}\ t_b$, proto bod C leží na kružnici $l(T, \frac{2}{3} t_c)$ a současně leží na kružnici $m(T', \frac{2}{3} t_b)$. Bod B je krajní bod strany BC, kterou půlí bod T_a.



Obrázek 23

Popis konstrukce

1. Umístíme stranu AT_A, $|AT_a| = t_a$.
2. Narýsujeme bod D, který leží na polopřímce AT_a, $|AD| = 2t_a$.
3. Sestrojíme kružnici $k(A, \frac{2}{3} t_a)$.
4. Sestrojíme průsečík T úsečky AD a kružnice k.
5. Sestrojíme obraz T' bodu T ve středové souměrnosti se středem T_a.
6. Sestrojíme kružnici $l(T, \frac{2}{3}\ t_c)$.
7. Sestrojíme kružnici $m(T', \frac{2}{3}\ t_b)$.

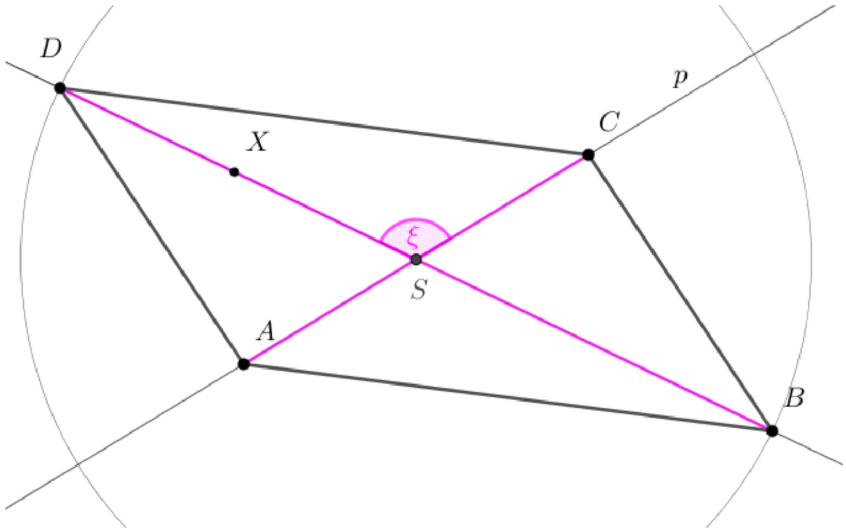
8. Sestrojíme vrchol C jako průsečík kružnice l a kružnice m.
9. Narýsujeme polopřímku CT_a.
10. Sestrojíme kružnici $n(T_a, |T_aC|)$.
11. Sestrojíme vrchol B jako průsečík kružnice n a polopřímky CT_a. $B \neq C$.
12. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má dvě řešení v polorovině, pokud délky těžnic splňují trojúhelníkovou nerovnost. Pokud se délky těžnice na stranu AC a těžnice na stranu AB rovnají (tj $t_b = t_c$), pak má daná úloha jedno řešení. Pokud mají kružnice l a kružnice m pouze jeden průsečík (tj $t_a = t_b + t_c$, resp. $t_b = t_a + t_c$, resp. $t_c = t_a + t_b$), pak daná úloha nemá řešení. Pokud kružnice l a kružnice m nemají žádný průsečík (tj. $t_a > t_b + t_c$, resp. $t_b > t_a + t_c$, resp. $t_c > t_a + t_b$), pak daná úloha nemá žádné řešení.

8. **Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, znáte-li e, f, ξ, kde ξ je úhel, který svírají úhlopříčky nad stranou AB**

Rozbor

Uvažujme přímku p, na které leží body A, C. Úsečka $|AC| = e$, kde e je úhlopříčka v hledaném rovnoběžníku. Z vlastností úhlů a vlastností rovnoběžníků víme, že úhel nad stranou AB je shodný s úhlem nad stranou CD. Také víme, že úhlopříčky se navzájem půlí, proto $|\sphericalangle CSX| = \xi$, kde bod S je střed úhlopříčky AC. Bod D leží na kružnici $k(S; \frac{1}{2}f)$ a zároveň leží na polopřímce SX. Bod C leží na kružnici k a přímce SD, zároveň $C \neq D$.



Obrázek 24

Popis konstrukce

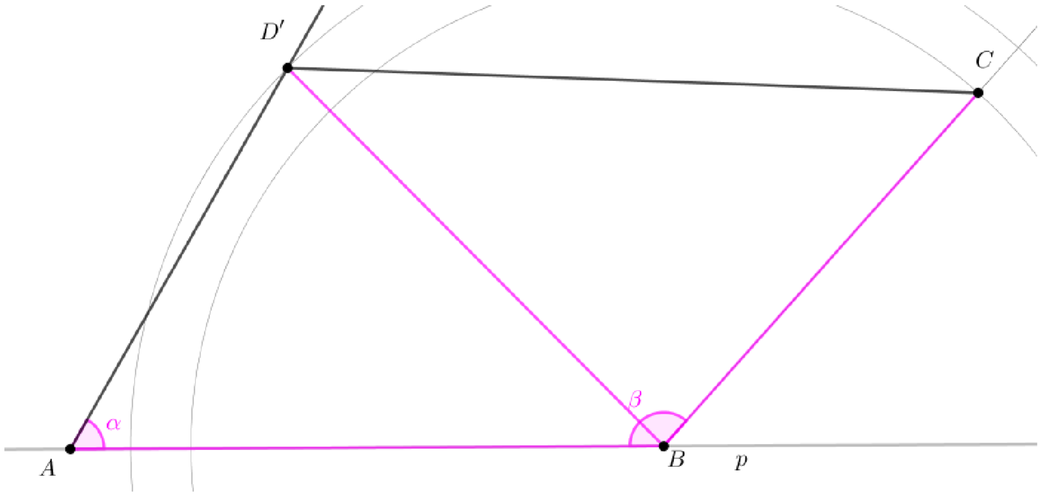
1. Umístíme $AC, |AC| = e$.
2. Najdeme střed S úsečky AC.
3. Sestrojíme úhel CSX, $|\sphericalangle CSX| = \xi$.
4. Sestrojíme kružnici $k(S; \frac{1}{2}f)$.
5. Sestrojíme vrchol D jako průsečík kružnice k a polopřímky SX.
6. Narýsujeme přímku DS.
7. Sestrojíme vrchol B jako průsečík kružnice k a polopřímky DS.
8. Sestrojíme rovnoběžník $ABCD$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má právě jedno řešení v polorovině pro $\xi < 180°$. Pokud je úhel $\xi \geq 180°$, potom daná úloha nemá řešení.

9. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li $a, b, f = |BD|, \alpha, \beta$

Rozbor

Uvažujme přímku p, na které leží body A, B. Známe velikosti úhlů $|\sphericalangle BAX| = \alpha$ a $|\sphericalangle ABY| = \beta$. Bod D leží na kružnici $k(B;\ f)$ a současně na polopřímce AX. Bod C leží na kružnici $l(B;\ b)$ a zároveň leží na polopřímce BY.



Obrázek 25

Popis konstrukce

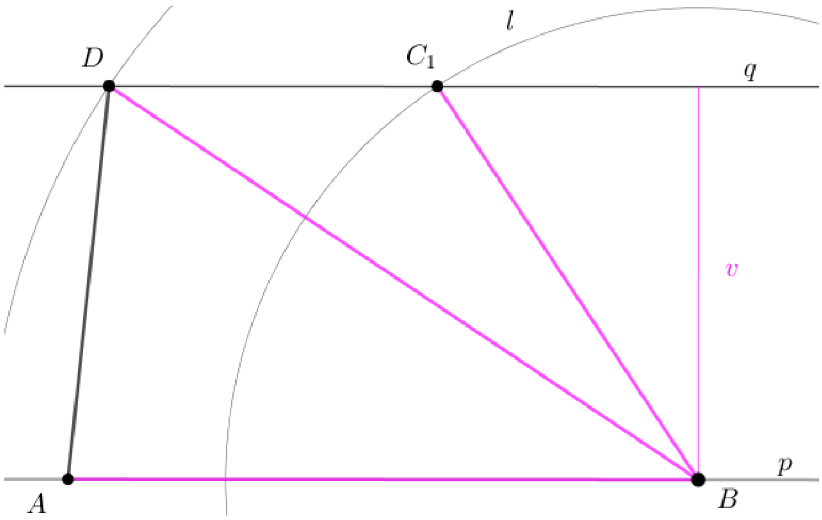
1. Umístíme stranu AB, $|AB| = a$.
2. Narýsujeme polopřímku BY, $|\sphericalangle ABY| = \beta$.
3. Sestrojíme kružnici $l(B;\ b)$.
4. Sestrojíme vrchol C jako průsečík kružnice l a polopřímky BY.
5. Narýsujeme polopřímku AX, $|\sphericalangle BAX| = \alpha$.
6. Sestrojíme kružnici $k(B, f)$.
7. Sestrojíme vrchol D jako průsečík kružnice k a polopřímky AX.
8. Sestrojíme obecný čtyřúhelník $ABCD$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Trojúhelník ABD je dán podle věty Ssu, tedy má dvě řešení v polorovině pro $a > f > a \cdot \cos\alpha$. Jedno řešení má pro $f = a \cdot \cos\alpha \wedge f >$. Úloha nemá řešení pro $f < a \cdot \cos\alpha \vee f = a$. Analogicky diskuse a podmínky řešitelnosti pro trojúhelník BDC podle věty sus, přičemž $|\sphericalangle DBC| = \big|\beta - |\sphericalangle ABD|\big|$. Čtyřúhelník má řešení, pokud mají řešení oba trojúhelníky a je jejich sjednocením.

10. Sestrojte lichoběžník $\boldsymbol{ABCD}$, znáte-li $\boldsymbol{a, b, f = |BD|, v}$

Rozbor

Uvažujme rovnoběžky p, q, jenž jsou od sebe vzdáleny v. Víme, že se jedná o rovnoběžky, jelikož známe vlastnosti lichoběžníku (základna je rovnoběžná s protilehlou stranou). Body A, B leží na přímce p. Bod D leží na kružnici $k(B, f)$ a současně leží na přímce q. Bod C leží na kružnici $l(B, b)$ a současně leží na přímce q.



Obrázek 26

Popis konstrukce

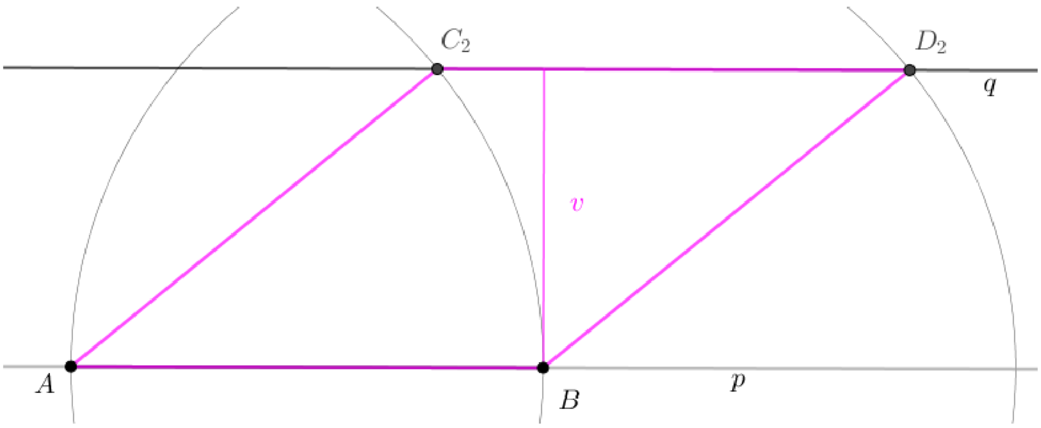
1. Umístíme stranu AB, $|AB| = a$.
2. Narýsujeme rovnoběžku q, která je rovnoběžná se stranou AB ve vzdálenosti v.
3. Sestrojíme kružnici $k(B;\ f)$.
4. Sestrojíme vrchol D jako průsečík kružnice k a přímky q.
5. Sestrojíme kružnici $l(B;\ b)$.
6. Sestrojíme vrchol C jako průsečík kružnice l a přímky q.
7. Sestrojíme lichoběžník $ABCD$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Úloha má dvě řešení v polorovině pro $b > v$. Pokud kružnice l a přímka q budou mít jeden společný bod (tj. $b = v$), nebo pokud bude strana BC delší než úhlopříčka f (tj. $b > f$), nebo pokud $k = v \wedge b > v$, potom má daná úloha jedno řešení v polorovině. Pokud kružnice l a přímka q nebude mít průsečík (tj. pro $b < v$), nebo pokud kružnice k a přímka q nebudou mít průsečík (tj. $k < v$), nebo pokud $k = v = b$ (tj. pak $C = D$) daná úloha nemá řešení.

11. Sestrojte kosočtverec $\boldsymbol{ABCD}$, znáte-li $\boldsymbol{a, v}$.

Rozbor

Uvažujme rovnoběžky p, q, které jsou od sebe vzdáleny v. Body A, B náleží přímce p. Z vlastností kosočtverce víme, že všechny jeho strany mají stejnou délku. Bod C leží na kružnici $k(B, a)$ a zároveň leží na přímce q. Bod D leží na kružnici $l(C, a)$ a současně leží na přímce q.



Obrázek 27

Popis konstrukce

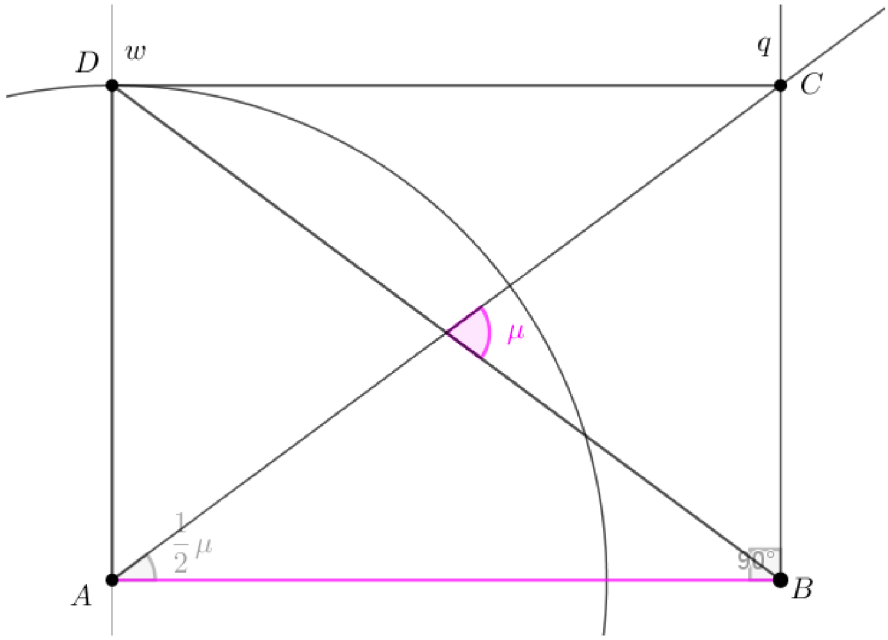
1. Umístíme stranu $AB. |AB| = a$.
2. Narýsujeme přímku q, která je rovnoběžná se stranou AB a jsou vzdáleny o v.
3. Sestrojíme kružnici $k(B, a)$.
4. Sestrojíme vrchol C jako průsečík kružnice k a přímky q.
5. Sestrojíme kružnici $l(C, a)$.
6. Sestrojíme vrchol C jako průsečík kružnice l a přímky q.
7. Sestrojíme kosočtverec $ABCD$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má dvě řešení v polorovině pro $v < a$. Mají-li kružnice k, l pouze jeden průsečík s přímkou p (tj. pro $v = a$), potom má daná úloha jedno řešení (a tím je čtverec, což je speciální případ kosočtverce). Pokud kružnice s přímkou p nemají ani jeden průsečík (tj. pro $v > a$), pak daná úloha nemá žádné řešení.

12. Sestrojte obdélník $ABCD$, znáte-li $a, \mu = |\sphericalangle BSC|$

Rozbor

Uvažujme přímku p, na které leží body A, B. Z vlastností úhlů a obdélníku víme, že úhel, který svírají úhlopříčky stranou BC je dvakrát větší než úhel, který svírá táž úhlopříčka se stranou AB. Bod C leží na polopřímce AY, kdy $|\sphericalangle BAY| = \frac{1}{2}\mu$ a současně na kolmici q, které náleží bod B. Bod D leží na kolmici w, které náleží bod A, a zároveň leží na kružnici $l(A, |BC|)$.



Obrázek 28

Popis konstrukce

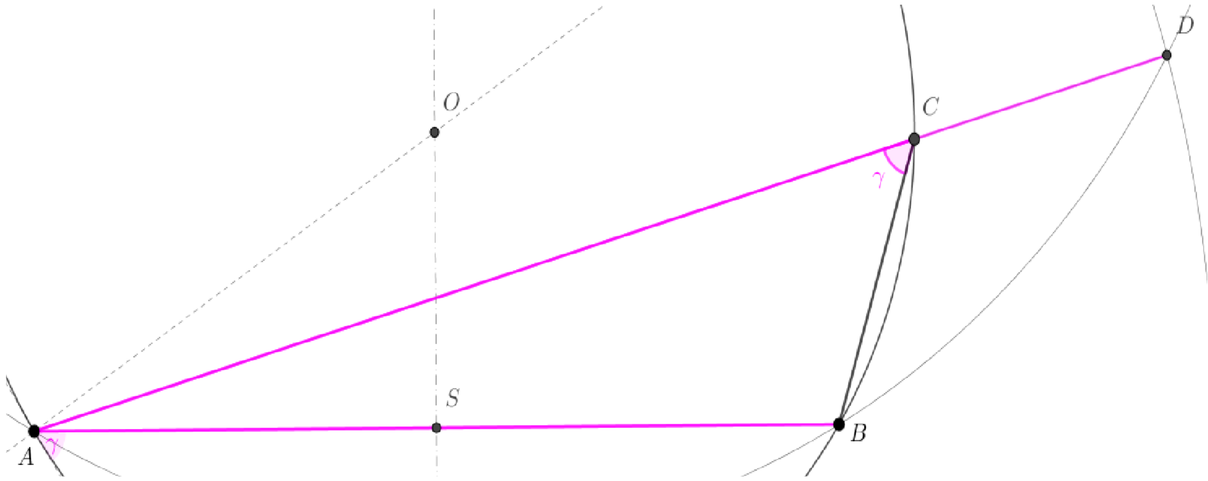
1. Umístíme stranu $AB, |AB| = a$.
2. Narýsujeme polopřímku $AY, |\sphericalangle BAY| = \frac{1}{2}\mu$.
3. Sestrojíme kolmici $q,\ B\epsilon\ q$.
4. Sestrojíme vrchol C jako průsečík polopřímky AY a kolmice q.
5. Sestrojíme kolmici $w, A \epsilon w$.
6. Sestrojíme kružnici $l(A, |BC|)$.
7. Sestrojíme vrchol D jako průsečík kolmice w a kružnice l.
8. Sestrojíme obdélník $ABCD$.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má právě jedno řešení v polorovině pro $\mu < 180°$. Pro $\mu \geq 180°$, pak daná úloha nemá řešení.

13. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li $a + b, c, \gamma$

Rozbor

Uvažujme trojúhelník ABD, v němž platí $|AD| = a + b$ a bod D leží na polopřímce AC. Trojúhelník BCD je rovnoramenný $|\sphericalangle BCD| = 180° - \gamma$, zbylé dva úhly jsou shodné, proto úhly CBD a BDC mají velikost $\frac{\gamma}{2}$. Bod C leží na kružnicovém oblouku l, což je množina bodů, ze které vidíme stranu AB pod úhlem velikosti γ. Jelikož u vrcholu D je úhel poloviční (tj. velikosti $(\frac{\gamma}{2})$), leží bod D na kružnicovém oblouku k, ze kterého je vidět strana AB pod úhlem velikosti $\frac{\gamma}{2}$. Bod D tedy leží na k a současně na kružnici $m(A, a + b)$. Bod C leží na l, a zároveň leží na AD.



Obrázek 29

Popis konstrukce

1. Umístíme stranu AB, $|AB| = c$.
2. Sestrojíme kružnicový oblouk $k, k = \{X, \sphericalangle AXB = \frac{\gamma}{2}\}$.
3. Sestrojíme kružnici $m, m(A, a + b)$.
4. Sestrojíme vrchol D jako průsečík kružnice m a kružnicového oblouku k. Bod D je vrchol trojúhelníku ABD.
5. Sestrojíme kružnicový oblouk $l, l = \{X, \sphericalangle AXB = \gamma\}$.
6. Sestrojíme vrchol C jako průsečík kružnicového oblouku l a strany AD.
7. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má 2 řešení, pokud mají k a m dva průsečíky. Pokud mají jeden společný bod (bod dotyku), pak má úloha právě jedno řešení, a to je O' střed úsečky AD, trojúhelník je rovnoramenný se základnou AB a B je vrchol pravého úhlu nad průměrem AD kružnice n. Odtud 1 řešení pro $c = (a + b) \cos \gamma$ a 2 řešení pro $c > (a + b) \cos \gamma$.

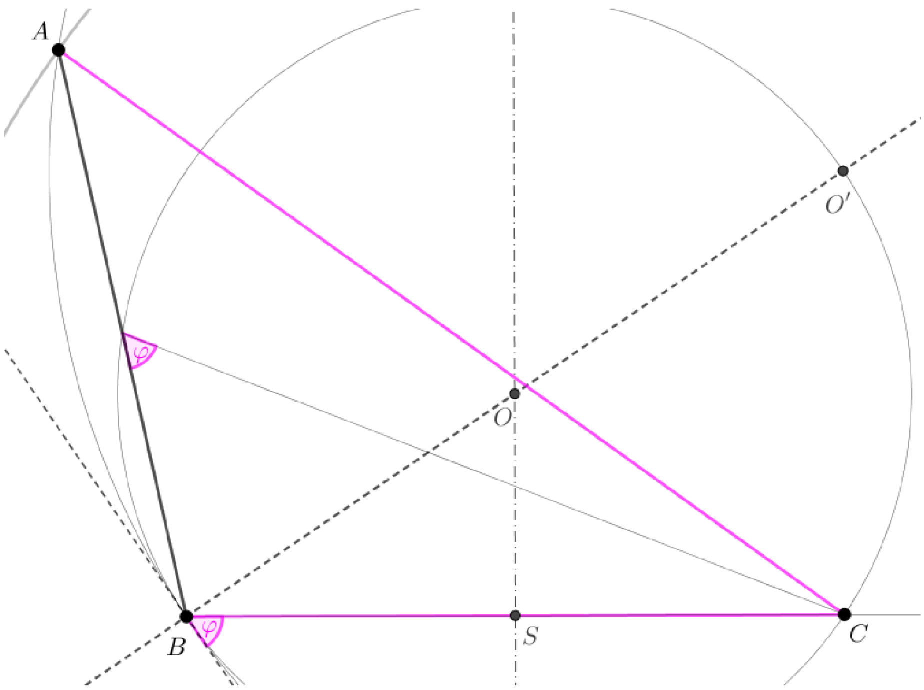
14. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li a, b, φ, kde φ je odchylka těžnice z vrcholu C od strany AB.

Rozbor

Střed S_{AB} strany AB patří množině k bodů, z nichž jde stranu BC vidět buď pod úhlem velikosti φ (pro $0 < \varphi \leq 90°$), nebo pod úhlem velikosti $180° - \varphi$ (pro $90° < \varphi < 180°$). Nemůžeme říct přesně, zda známe odchylku φ jako velikosti úhlu $BS_{AB}C$ nebo $AS_{AB}C$. Uvažujme B' jako obraz bodu B ve středové souměrnosti se středem C. Pak úsečka $S_{AB}C$ je střední příčkou trojúhelníku ABB', a tedy úhel BAB' má stejnou velikost jako úhel $BS_{AB}C$. Bod A patří množině l bodů, z nichž je úsečku BB' vidět pod úhlem velikosti φ (pro $0 < \varphi \leq 90°$), nebo pod úhlem $180° - \varphi$ (pro $90° < \varphi < 180°$). Současně bod A leží na kružnici $m(C, b)$.

Poznámka ke konstrukci středu O' kružnicového oblouku l: Úhel BOC je středový úhel pro obvodový úhel $BS_{AB}C$ a úhel $BO'B'$ je středový úhel pro obvodový BAB', tedy $|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle BO'B'|$. Protože C je středem úsečky BB', je $OC \parallel O'B'$. Protože platí $|\sphericalangle BO'C| = |\sphericalangle BSAB|$ a $O' \in k$, platí také $|\sphericalangle BO'B'| = 2\,|\sphericalangle BO'C| = 2|\sphericalangle BAB'|$, takže úhel $BO'B'$ je středový úhel pro obvodový úhel $BA'B'$.

Platí tedy $O' \in k \cap \mapsto BO$.



Obrázek 30

Popis konstrukce

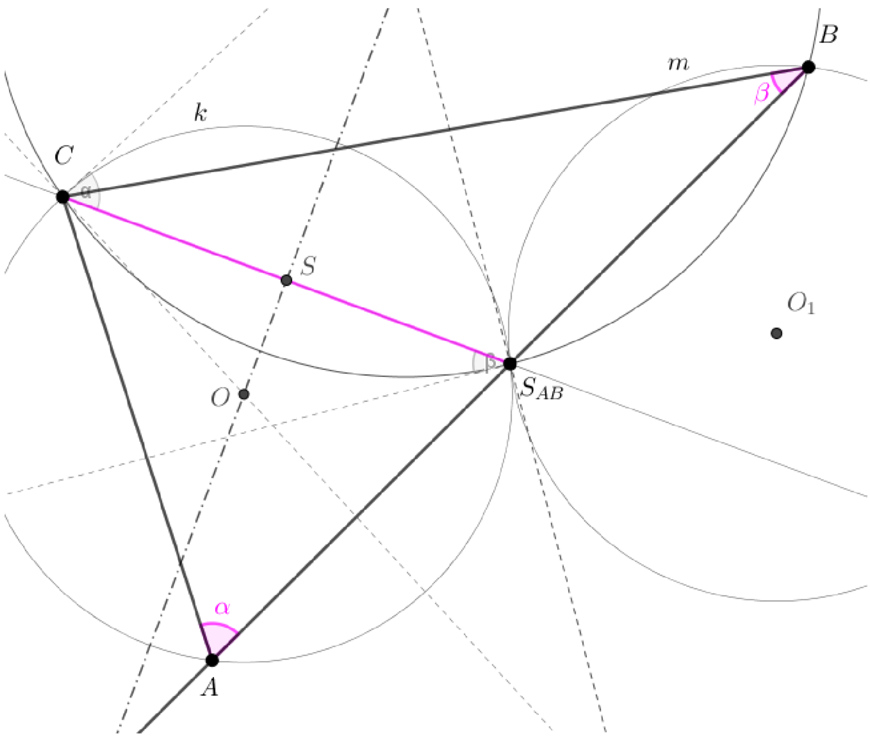
1. Umístíme stranu $BC, |BC| = a$.
2. Sestrojíme kružnicový oblouk $k, k = \{X, |\sphericalangle CXB| = \varphi\}$.
3. Narýsujeme polopřímku BO, kde O je střed k.
4. Sestrojíme průsečík O' polopřímky BO a k.
5. Sestrojíme obraz B' bodu B ve středové souměrnosti se středem C.
6. Sestrojíme kružnicový oblouk $l, l = \{Y,\ |\sphericalangle BYB'| = \varphi\}$.
7. Sestrojíme kružnici $m, m(C, b)$.
8. Sestrojíme vrchol A jako průsečík kružnice m a kružnicového oblouku l.
9. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má 2 řešení v případě, že l a m mají 2 průsečíky (tj. $a > b \cos\frac{\varphi}{2}$). V případě, že mají jeden průsečík, úloha má právě jedno řešení (tj.$a = b\ cos\frac{\varphi}{2}$). V případě, že nemají ani jeden průsečík (tj. $a < b \cos\frac{\varphi}{2}$), pak daná úloha nemá žádné řešení.

15. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li α, β, t_c

Rozbor

Bod A leží na kružnicovém oblouku k, který je množinou bodů, ze které jde vidět úsečka $S_{AB}C$ pod úhlem velikosti α. Bod B leží na kružnicovém oblouku l, který je množinou bodů, ze které jde vidět úsečka $S_{AB}C$ pod úhlem velikosti β. Protože S_{AB} je střed strany, je bod A souměrný s bodem B ve středové souměrnosti se středem S_{AB}. Bod B tedy leží na kružnicovém oblouku l a současně leží na kružnicovém oblouku m, která je obrazem kružnicového oblouku k ve středové souměrnosti se středem S_{AB}.



Obrázek 31

Popis konstrukce

1. Umístíme stranu CS_{AB}, $|CS_{AB}| = t_c$.
2. Narýsujeme osu úsečky CS_{AB}.
3. Sestrojíme úhel $S_{AB}CX$, $|\sphericalangle S_{AB}CX| = \alpha$.
4. Sestrojíme kružnicový oblouk $k, k = \{X, |\sphericalangle CXS_{AB}| = \alpha\}$.
5. Sestrojíme kružnicový oblouk $l, l = \{Y, |\sphericalangle S_{AB}YC| = \beta\}$.
6. Sestrojíme kružnicový oblouk m, který je obrazem kružnicového oblouku k ve středové souměrnosti se středem S_{AB}.
7. Sestrojíme vrchol B jako průsečík l a m.

8. Narýsujeme polopřímku BS_{AB}.
9. Sestrojíme vrchol A jako průsečík polopřímky BS_{AB} a k.
10. Sestrojíme trojúhelník ABC.

Podmínky řešitelnosti a diskuse Konstrukční úloha má jedno řešení v polorovině pro $\alpha + \beta < 180°$. Pokud nastane, že $\alpha + \beta \geq 180°$, potom daná úloha nemá žádné řešení.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo zpracování středoškolských příkladů z planimetrie, které budou zároveň vytvořeny jako pracovní listy v programu GeoGebra, čehož bylo dosaženo. Příklady byly vybrány podle náročnosti a problematiky, tudíž zde student může nalézt konstrukční úlohy od jednodušší problematiky až po náročnější. Výběr byl také přizpůsoben učivu na střední škole, aby dané pracovní listy byly vhodné k použití při výuce. Ke zpracování jsem zvolila konstrukční úlohy z planimetrie, jednalo se především o trojúhelníky a čtyřúhelníky.

Pracovní listy byly vytvořeny jak pro učitele k jejich přípravě do hodin, tak i pro studenty k samostudiu. Jedná se o materiály, které mohou být také využity jako příjemné zpestření hodiny či zajímavým srovnáním, kdy se v hodinách matematiky využije novější technologie. Program GeoGebra a jeho ovládání je jednoduché, tudíž může být využito i jako náplň hodin, rozvíjet obzory studentům jak v planimetrii, tak i v jiných tématech matematiky.

Jsem ráda, že jsem mohla pracovat v tomto programu a zjistit, jak přínosné to pro studenta i učitele může být.

Literatura

[1] POMYKALOVÁ E. *Matematika pro gymnázia - Planimetrie,* 4. vydání, Praha: Prometheus, 1993. ISBN 80-7196-174-4

[2] KADLEČEK J. *Geometrie v rovině a prostoru pro střední školy*, 1. vydání, Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-017-9

[3] CHODOROVÁ M., a kol. *Řešení vybraných konstrukčních úloh*, Olomouc, Dostupné z: https://kag.upol.cz/data/upload/17/KU-120120.pdf

[4] MOLNÁR J., *Planimetrie*, 1. vydání, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. ISBN 80-244-0370-6

Seznam příloh

1. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li stranu a, v_a, v_b. Konstrukci proveďte pro $a = 4$ cm, $v_a = 3$ cm, $v_b = 3$ cm.

2. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li stranu c, v_c, α. Konstrukci proveďte pro $c = 5$ cm, $v_c = 4$ cm, $\alpha = 60°$.

3. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li a, t_c, t_b. Konstrukci proveďte pro $a = 5$ cm, $t_b = 3$ cm, $t_c = 5$ cm.

4. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li b, t_c, v_b. Konstrukci proveďte pro b = 6 cm, t_c = 3 cm, v_b = 4 cm.

5. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li a, v_b, r. Konstrukci proveďte pro a = 6 cm, v_b = 3 cm, r = 4 cm.

6. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li c, α, ρ. Konstrukci proveďte pro $c = 7$ cm, $\alpha = 50°, \rho = 3$ cm.

7. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li t_a, t_b, t_c. Konstrukci proveďte pro t_a = 7 cm, t_b = 6 cm, t_c = 5 cm.

8. Sestrojte rovnoběžník ABCD, znáte-li e, f, ξ, kde ξ je úhel, který svírají úhlopříčky nad stranou AB. Konstrukci proveďte pro e = 5 cm, f = 8 cm, ξ = 120°.

9. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li a, b, f, α, β. Konstrukci proveďte pro a == 6 cm, b = 4 cm, f = 5 cm, α = 50°, β = 90°.

10. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, znáte-li a, b, f, v. Konstrukci proveďte pro a = 7 cm, b = 6 cm, v = 5 cm, f = 8 cm.

11. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, znáte-li a, v. Konstrukci proveďte pro a = 6 cm, v = 5 cm.

12. Sestrojte obdélník $ABCD$, znáte-li a, μ, kde μ je úhel, který svírají úhlopříčky nad stranou BC. Konstrukci proveďte pro a = 6 cm, μ = 110°.

13. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li $a + b, c$, γ. Konstrukci proveďte pro $a + b = 9$ cm, $c = 6$ cm, $\gamma = 60°$.

14. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li a, b, φ, kde φ je odchylka těžnice z vrcholu C od strany AB. Konstrukci proveďte pro a = 5 cm, b = 7 cm, φ = 50°.

15. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li α, β, t_c. Konstrukci proveďte pro α = 60°, β = 40°, t_c = 6 cm.