UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Taťána Honkyšová

Učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol a učitelství technické a informační výchovy pro střední školy a 2. stupeň základních škol

Sudoku a Kakuro

Olomouc 2023

Vedoucí práce: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne 20. 6. 2023 Taťána Honkyšová

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat doc. Mrg. Karlu Pastorovi, Ph.D. za odborné vedení mé práce, za věnovaný čas, cenné poznámky a připomínky, za nesmírnou ochotu a trpělivost, za pomoc se stylistickou úpravou textu. Dále bych chtěla vyjádřit poděkování Mgr. Monice Ortové za laskavou pomoc a podporu s přípravou materiálu pro praktickou část mé diplomové práce. V neposlední řadě patří poděkování mým dětem, které mi byly velkou podporou po celou dobu mého studia.

Obsah

ÚVOD

Diplomová práce se věnuje logickým hrám Sudoku a Kakuro.

Toto téma jsem vybrala mezi jinými hlavně proto, že sama rada hraji logické hry, hádanky, rébusy, hry na uvažování a třídění. Občas jsem schopná u luštění prosedět do hluboké noci, a údajně je to „dobrý“ návyk, i když nejspíš v jinou denní dobu. Podle slov mých děti jsem nesmírně chytrá a inteligentní, zde by mohla být nějaká souvislost. I když opět – co bylo dříve, vejce nebo kuře? Hraje člověk hry, kde musí přemýšlet, protože jeho mozek podobnou “potravu“ potřebuje kvůli nějakému vyššímu IQ? Nebo naopak systematickým hraním her jeho mozkové závity se stočí ještě více a rozhodování budou přesnými a rychlými jako šíp? Každopádně, nikdo se nebude dohadovat o tom, že hrání logických her neprospívá, je zbytečné ba dokonce škodlivé. V jedné zajímavé knížce Marcel Danesi (knížka se jmenuje „The Puzzle Instinkt“) říká, že lidská láska k neznámému, k hádankám, k tajemnu je jako instinkt stejně vlastní lidské přirozenosti jako humor, jazyk, umění, hudba a další tvůrčí schopnosti, které odlišují lidstvo od ostatních druhů. Nikdo neví, proč lidé rádi řeší hádanky, stejně jako nikdo neví, proč se něčemu smějeme. Danesi tvrdí, že instinkt hádanek vedl k objevům v matematice a vědě a k převratům filozofického myšlení. Hádanky naplňují hluboko zakořeněnou potřebu lidí dávat věcem smysl a jsou stejně staré jako mýty, magie a okultní umění.

Čistě prozaicky netradiční úlohy do vzdělávacího procesu patří, logické hádanky lze rozhodně využít nejen v hodinách matematiky. Nicméně, s učiteli, kteří pravidelně zařazují úlohy tohoto druhu do výuky jsem se moc často nesetkala. Stojí za tím více věcí, a jednou z nich může být ta, že se jim nechce začínat s něčím, čemu moc nerozumí, neumí, neví jak na to, nechtějí vystupovat z komfortní zóny. Tato práce by mohla sloužit vodítkem a být nápomocná pro zařazení logických úloh do výuky.

Diplomová práce je zaměřená na problematiku logických her Sudoku a Kakuro a zařazení těchto her do výuky matematiky na 2. stupni základní školy.

V teoretické části jsem vynaložila maximální úsilí pro shromáždění historických faktů a zajímavosti, jelikož z mé praktické zkušenosti hodně záleží na podání materiálu. Žáci mají rádi historky, pak je to více baví. Dále v teoretické části se zabývám vlastně praktickou stránkou, a to strategiemi a techniky pro vyluštění Sudoku a Kakuro. Mým cílem bylo sestavení podrobných návodů, které pomohou každému, kdo by se do luštění chtěl pustit, ať sám, nebo se svými žáky, a nemusel by dlouho pátrat a hledat jak na to. Také v teoretické části uvádím výhody a benefity využívání logických her při výuce matematiky s oporou na kurikulární dokumenty.

Cílem praktické části bylo navrhnout metodický postup pro zařazení Sudoku a Kakuro do výuky, vytvořit pomocné materiály a doplňující úlohy na procvičení strategii a technik a ověřit v praxi zvládání technik řešení logických her Sudoku a Kakuro.

TEORETICKÁ ČÁST

1 Sudoku

1.1 Úvod do Sudoku

Sudoku je hra založená na logice, která se tradičně odehrává na mřížce sestávající z 9 sloupců a 9 řad. Tato mřížka je dá–le rozdělena do devíti samostatných čtverců, vyznačených tlustou čárou, o rozměrech 3 x 3, to znamená, že každý čtverec obsahuje 9 políček. Některá políčka jsou předvyplněná, ta jsou jakousi nápovědou, pomohou vám začít s řešením. Úlohou je doplnit čísla do každého políčka tak, aby se objevily právě jednou v každé řadě, sloupci a čtverci. Jednoduše řečeno, každý řádek, sloupec, čtverec musí obsahovat čísla od 1 do 9, ale nikdy ne dvě stejná čísla.

4		5		2				
			7	1			4	
8			4		9	3	6	
	3	7			5	6		
1	9						5	2
		4	2		1	9		3
		3	5		2			1
	2	1		9				
				4	3	5		9

Obr. 1 Sudoku 9 x 9

Správně sestavena úloha Sudoku má jedinečné řešení. Úroveň obtížnosti hádanky velmi často určuje množstvím předvyplněných čísel - čím více čísel, tím spíše je úloha jednodušší, není to ovšem pravidlem a podle počtu předvyplněných nápověd nelze obtížnost Sudoku určit. Obtížnost Sudoku se hodnotí nejen podle počtu políček k vyplnění, ale také podle počtu a druhu technik potřebných k jejich vyřešení. Možná třídění úrovně obtížnosti: začátečník, lehká, střední, zapeklitá, ďábelská a diabolická (Beginner, Easy, Medium, Tricky, Fiendish, Diabolical), nicméně v různých zdrojích se názvy mohou lišit, např. Gentle, Moderate, Tough, Diabolical, Extreme.

7		8				4		1
	5	9				7	3	6
3	4	1	7	6				8
9	1	3	2	7	6			
6	8	4				9	2	7
			4	8	9	1	6	3
1				3	2	6	7	4
8	3	7				5	1	
4		6				3		9

7	6	8	9	2	3	4	5	1
2	5	9	1	4	8	7	3	6
3	4	1	7	6	5	2	9	8
9	1	3	2	7	6	8	4	5
6	8	4	3	5	1	9	2	7
5	7	2	4	8	9	1	6	3
1	9	5	8	3	2	6	7	4
8	3	7	6	9	4	5	1	2
4	2	6	5	1	7	3	8	9

Obr. 2 Příklad lehkého Sudoku a jeho řešení

Při řešení lehkého Sudoku byly použité základní techniky prohledávání („scanování“) celé tabulky, určení políčka, kam patří pouze to dané číslo a žádné jiné ve vztahu k umístění stejného čísla ve vedlejších sloupcích, řádcích nebo čtvercích.

Při řešení středně těžkého Sudoku (obr.3) byla použitá mimo jednoduchých technik technika vpisků. To bylo dostačující k vyřešení.

5	7	2						
						9	8	5
			6	3	5		4	
				7		5	6	3
9			2		8			7
1	5	7		4				
	9		8	2	1			
2	3	5						
						2	7	4

5	7	2	9	19	9	1	1	1
	1	1		1	2	9	8	5
	1	9	6	3	5	7	4	2
	2		1	7	9	5	6	3
9			2	5	8	1	1	7
1	5	7	9	4	9		2	9
7	9		8	2	1		5	
2	3	5	9	9	9	1	19	19
	1	1	5	9	9	2	7	4

5	7	2	9	8	4	6	3	1
3	4	6	7	1	2	9	8	5
8	1	9	6	3	5	7	4	2
4	2	8	1	7	9	5	6	3
9	6	3	2	5	8	4	1	7
1	5	7	3	4	6	8	2	9
7	9	4	8	2	1	3	5	6
2	3	5	4	6	7	1	9	8
6	8	1	5	9	3	2	7	4

Obr. 3 Středně těžké Sudoku a průběh řešení

Podle výzkumu Felgenhauera a Jarvise (Mathematics of Sudoku I, 2006) je celkový počet možných mřížek Sudoku 6670903752021072936960. To je přibližně $6{,}671 \times 10^{21}$. Toto číslo bylo vypočteno pomocí různých redukčních metod a počítačových programů (Felgenhauer, 2006).

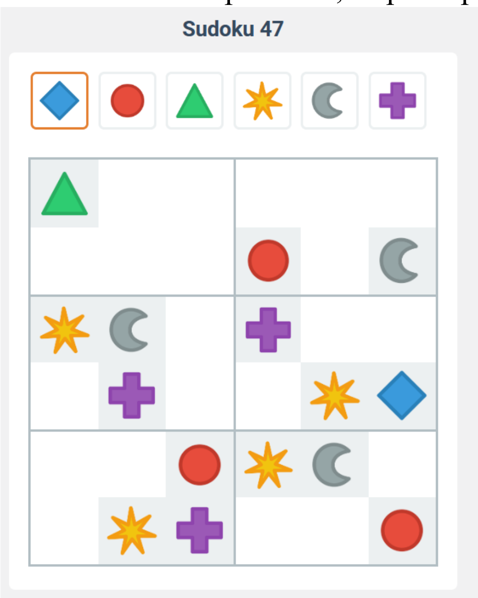
Jednou z atraktivních vlastností Sudoku je, že se můžete spolehnout výhradně na logiku při řešení úlohy, není třeba hádat, ale vždy existuje logická cesta, která pomocí určitých kroků (způsobů uvažování) dovede k správnému výsledku. Tento fakt je potřeba skutečně zdůraznit, jelikož nezkušené hráči mají tendenci ve snaze se rychleji dopracovat k výsledku hledané číslo uhodnout a tím si zaručit prohru a celé řešení vzdát (z vlastní zkušenosti se žáky 7 – 9 tříd ZŠ). Způsob řešení pomocí logických kroků je možný díky použití "algoritmů pro řešení člověkem" ("'human solve algorithms") v procesu tvorby úlohy, ať už je generována digitálně nebo ručně vytvořena. Minimálním počtem předvyplněných čísel pro dosažení jedinečného řešení je 17, což ale také nezaručuje jeho řešitelnost. Pokud je čísel méně, může mít hádanka více možných řešení.

Vyskytují se i kratší varianty Sudoku, než již uvedená mřížka 9 x 9, které mohou mít různé rozměry, jako například 4 x 4, 6 x 6 nebo 8 x 8. Tyto varianty jsou ideální pro ty, kteří se chtějí naučit základy Sudoku nebo hledají rychlejší a jednodušší hru. Podobně jako standardní hra, také tyto varianty vyžadují, abyste vyplnili mřížku tak, že každé číslo se objeví přesně jednou v každé řadě a sloupci. Pro mřížky 4 x 4 a 6 x 6 jsou k dispozici čísla od 1 do 4, respektive od 1 do 6.

Existuje více možných způsobů, postupů, kroků, jak Sudoku řešit. Při řešení složitějších Sudoku, ať už se jedná o tradiční verzi nebo kratší variantu, mohou být užitečné vpisky tužkou čísel, která jsou možnými kandidáty na jedinečné obsazení daného políčka. Dále v průběhu řešení lze zvolit "cestu", kterou bude probíhat vizuální analýza, může to být řádek, sloupec, pole, zvolená taktika záleží na hráči a jeho zkušenostech.

Hra Sudoku je snadná pro pochopení, nevyžaduje provedení žádných výpočtů a každá jednotlivá úloha se liší od ostatních, čímž poskytuje velmi širokou škálu možných logických situací. Hlavními faktory pro úspěšné řešení hádanky jsou soustředění, pozornost a v neposlední řadě nacvičená technika luštění. Odměnou je úspěch a spokojenost s vlastním výkonem, pro což se hry vlastně hrají.

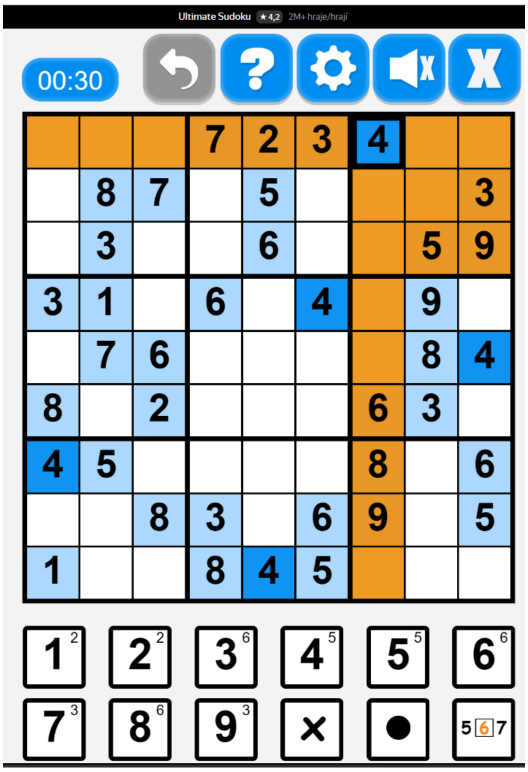
Kromě klasické existují další varianty Sudoku, jako Diagonální Sudoku, Mega Sudoku, Jidoku, Barevné Sudoku, HyperSudoku, Součtové Sudoku a mnoho dalších. Většinou se jedná o doplnění klasického Sudoku dalšími pravidly, například čísla se nesmí vyskytovat v určité oblasti dvakrát, nebo součet čísel v zadaných polích má mít určitou hodnotu a podobně. V této práci se zabývám pouze klasickou verzi a v Sudoku používám pouze čísla. Stejně dobře lze použít tvary, obrázky postaviček nebo ovoce a podobně, na principu strategii řešení a konečném



Obr. 4 Barevné Sudoku 6 x 6, úloha na umimematiku.cz

výsledku se to nijak neodráží. Tento způsob zadávání úlohy je vhodný pro menší žáky nebo děti předškolního věku, může pro ně být více atraktivní a srozumitelný. Ve starším věku, kdy žáci již hodně pracují s čísly, právě číselná podoba Sudoku je pro ně více komfortní a srozumitelnější.

Sudoku lze hrát v papírové tištěné podobě, ale také on-line nebo v aplikacích na různých zařízeních výpočetní techniky. Sudoku v interaktivní podobě může být pro hráče přitažlivější - automatické odpočítávání času pro nadšence rychlosti, jednoduché odstranění nebo změna čísel v řešení bez nutnosti gumovat v případě papírové verze. Některé programátorsky vydařené aplikace nabízí možnost vpisování již zmíněných kandidátů, pozastavení hry, obnovení hry od začátku, zvolení obtížnosti, návrat o několik kroků zpět, "hinty", čili nápovědy, vyhodnocení správnosti, které proběhne okamžitě v aplikaci, barevné rozlišení herních políček. Nicméně je poměrně velké množství příznivců papírových verzi, Sudoku díky své již zažité popularitě je součásti téměř každého časopisu pro volný čas (ačkoliv zde se vyskytují nekvalitní špatně sestavené hlavolamy), vydávají se i brožury, věnující se hře Sudoku. V praxi doporučuji žákům využívat oboje, tištěné Sudoku umožňuje informační pauzu, což je naprostou nutností z hlediska psychohygieny a zdravého životního stylu.



Obr. 5 Interaktivní hlavolam Sudoku

Existuje také Sudoku Solver čili řešitel, kdy hráč po zadání čísel z úlohy může zkontrolovat správnost svého "papírového" řešení. Konkrétní webové stránky lze dohledat zadáním klíčových slov.

Velmi užitečným nástrojem nejen pro kontrolu řešení, ale také pro naučení se Sudoku slouží program, tvořeny v MS Excel s názvem Sudoku Visual Solver Open Source, tvůrce

Norbert Limberský. Program byl vytvořen v roce 2007, kdy Sudoku bylo módním hitem a zažívalo bum, ovšem i nyní funguje spolehlivě. Program využívá dosazování možných kandidátů a lze prohlédnout po krocích, jak řešení probíhá.

1.2 Historie, vznik a současnost Sudoku

Historie hry Sudoku, která zaujala miliony lidí po celém světě, je fascinujícím příběhem, v němž se proplétají nitky různých kultur, matematických konceptů a lidské fascinace hádankami. Tato kapitola se zabývá zajímavou cestou Sudoku a sleduje jeho původ od starověkých číselných her až po jeho současnou digitální inkarnaci.

1.2.1 Magické čtverce

Původ Sudoku lze vysledovat až ke konceptu magických čtverců, matematické kuriozitě, která fascinuje lidi již po tisíciletí. Magický čtverec je mřížka čísel, obvykle kladných celých čísel, uspořádaná tak, že součty čísel v každém řádku, každém sloupci a obou hlavních úhlopříčkách jsou stejné. Obvykle čísla ve čtverci se nesmí opakovat. Tato tabulka čísel je často spojována s magii a mystikou. První zmínky o magickém čtverci pocházejí ze starověké Číny, kde se objevil ve dvou legendách. První legenda, známá jako Velký plán nebo Legenda o Lo Shu, pochází z roku 650 př. n. l. Vypráví o císaři Yu, který během potopy způsobené řekou Lo objevil želvu s magickým čtvercem 3×3 na krunýři. Tento čtverec je unikátní, protože všechny ostatní čtverce 3×3 vznikají zrcadlením nebo rotací čtverce Lo Shu. Magická konstanta čtverce je 15. Uprostřed je vždy číslo 5, které v Číně symbolizuje střed, považovaný za pátou a

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 6 Magická želva se čtvercem Lo Shu a jeho číselná reprezentace

nejdůležitější světovou stranu. Dokola se střídají sudá a lichá čísla.

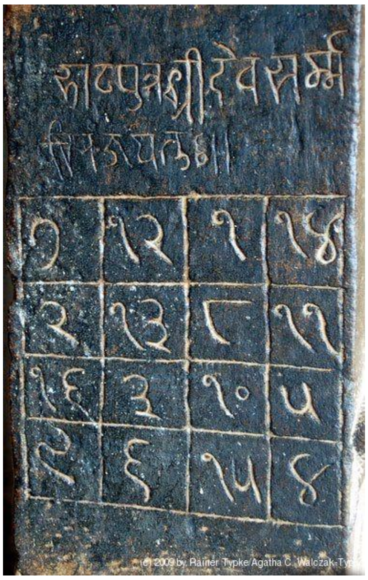
Druhá legenda, Říční mapa, vypráví o posvátné želvě, která se vynořila z řeky Ho s magickým čtvercem (opět 3×3) na krunýři. V taoismu je součet dvou sousedních čísel v čtverci Lo Shu považován za symbol základních prvků (kov, dřevo, oheň, voda a země ve středu, kde prvky symbolizují spíše jejich vlastnosti).

Magické čtverce byly nalezeny na amuletech v Indii, Číně a starověkém Egyptě. Odtud se rozšířily do Persie, Mezopotámie a mezi Araby. Arabové dokázali vytvářet čtverce až o straně

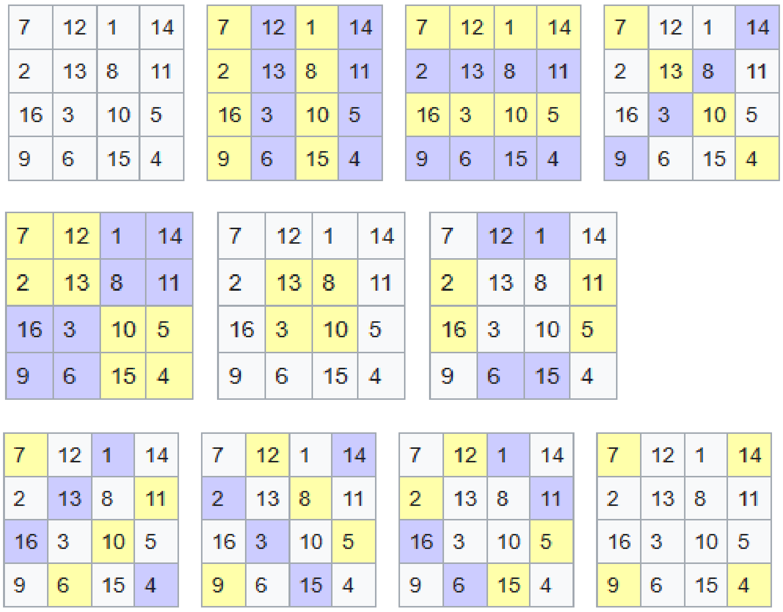
6 a přivezli tento matematický fenomén do Evropy (Magický čtverec – mystický rébus s tisíciletou historií, 2019).

Tisíc let starý panmagický čtverec (také diabolický) s názvem „Chautisa Yantra“ byl nalezen v Indii, v Chrámě Parsvanatha Temple, Khajuraho. Chautisa znamená 34, což je konstantou tohoto čtverce čtvrtého řádu. Čtverec obsahuje čísla od 1 do 16. Součet čísel každého řádku, sloupce, úhlopříčky, lomené úhlopříčky, součet čísel vnitřního čtverce 2x2, rohů každého čtverce 3x3 a 4x4, dvou sad čtyř symetrických čísel (1+11+16+6 a 2+12+15+5) a součet dvou prostředních údajů dvou krajních sloupců a řádků (12+1+6+15 a 2+16+11+5) se rovná 34. Jedná se o nejpřesnější magický čtverec o řádu 4x4 (Famous magic squares, 2013). Další záhadou je, proč vůbec sochy lidí určité povahy a matematická tabulka se umístily do náboženského chrámu.

Obr. 7 Chrám Parsvanatha, Khajuraho



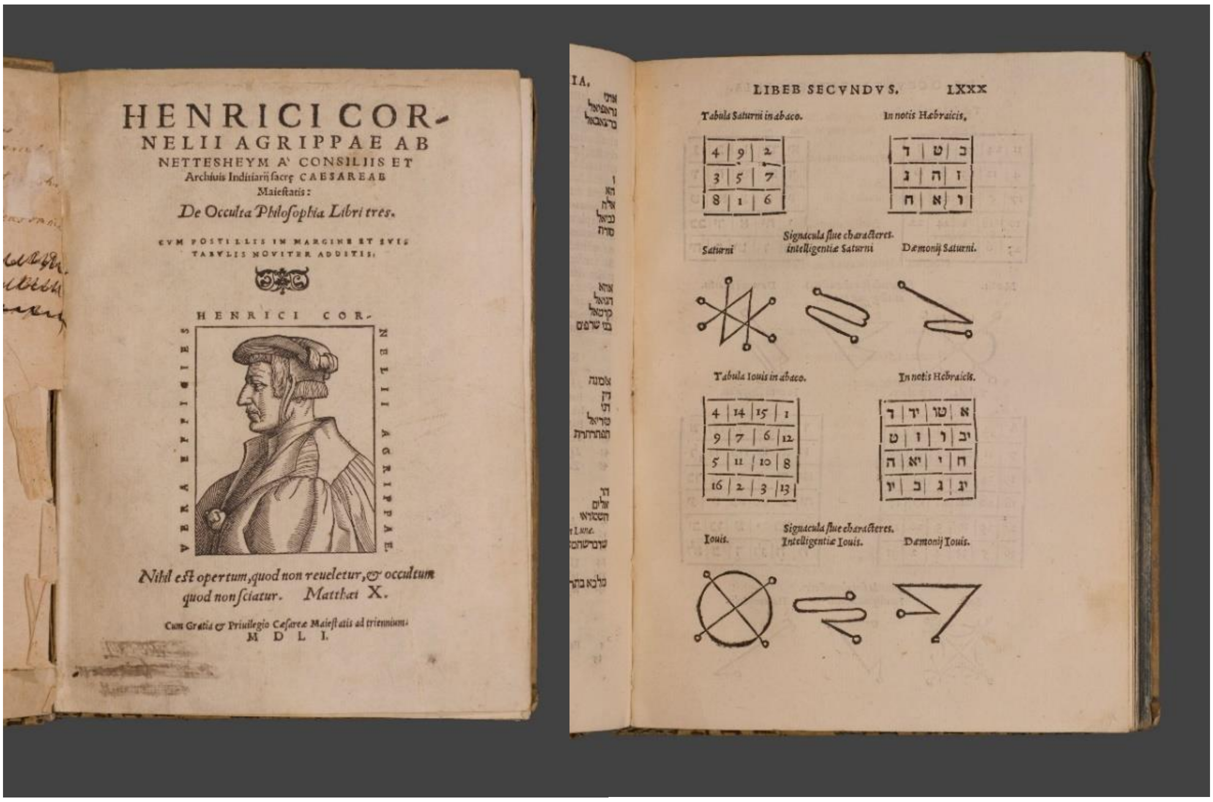
Obr. 8 Magický čtverec "Chautisa Yantra"



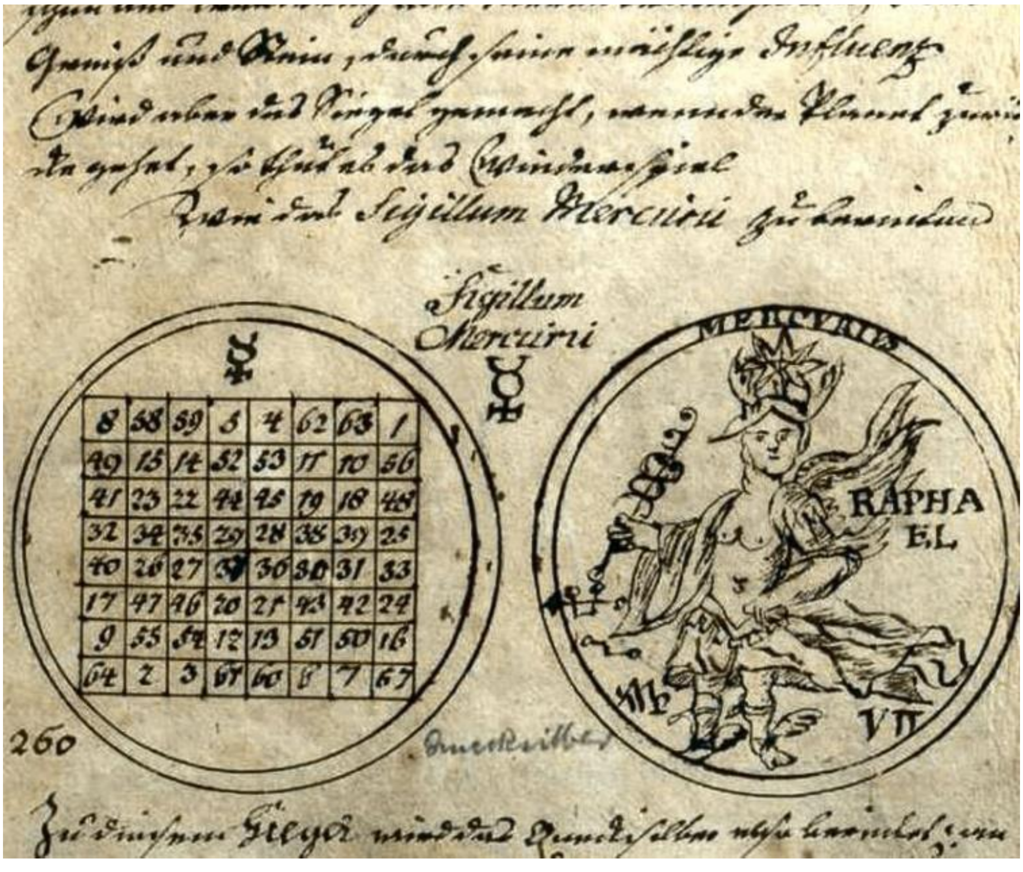
Obr. 9 Přepis magického čtverce a zmíněné součty

Poprvé se magický čtverec v Evropě objevil v roce 1300 v díle Manuela Maschopula. Později Luca Pacioli sestavil sbírku čtverců a Heinrich Cornelius Agrippa von Nettesheim ve svém díle De Occulta Philosophia (Okultní filozofie) je zpopularizoval po celé Evropě.

Agrippa se pokusil obhájit magii očištěnou od prvků démonů jako představitelů černé magie a začlenit ji do neoplatónského systému hierarchií (Hierarchie v neoplatónském systému je uspořádání bytostí do řad a stupňů podle jejich vzdálenosti od nejvyššího principu - Jednoho (neboli Boha)). Jednotlivým planetám přiřadil magické čtverce a popsal jejich využití při vyvolávání démonů a andělů. Čtverec třetího řádu známý z legendy o Lo Shu je přiřazen Saturnu. V tomto čtverci hledali středověcí alchymisté také tajemství přeměny základních kovů ve zlato (Magický čtverec – mystický rébus s tisíciletou historií, 2019).



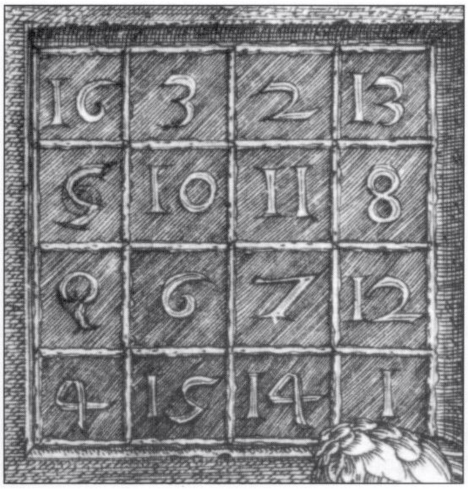
Obr. 10 Titulní stránka díla z díla De Occulta Philosophia Libri tres; Diagramy a magické čtverce z díla De Occulta Philosophia Libri tres



Obr. 11 Část typické knihy kouzel z 18. století s "Agrippovým" čtvercem Merkur, planetou Merkur a andělem Rafaelem

Lékař Paracelsus používal magické čtverce k léčení.

V roce 1514 zobrazil německý renesanční umělec a matematik Albrecht Dürer (1471-1528) na rytině nazvané Melancholie I následující (symetrický) magický čtverec 4x4:



Obr. 12 Albrecht Dürer, Melancholia I - detail; Albrecht Dürer, Melancholia I

Doposud probíhají bouřlivé diskuse o poselstvích, která Dürer ve svém díle ponechal. Například, pokud zaměníte čísla 4 a 1 čtvrtým a prvním písmenem anglické abecedy, pak dolní řádek zní D1514A, což jsou iniciály autora a rok tvorby díla. Nebo pokud veškerá písmena jména Albrecht Dürer nahradíte čísly, které udávají místo v abecedě, po sečtení všech čísel obdržíte 135, k tomu přičtete 1, což je symbolem Boha, a obdržíte 136 – součet všech čísel magického čtverce od 1 do 16 (Famous magic squares, 2013).

V období renesance bylo hraní her oblíbenou zábavou, stejně jako je tomu dnes. Jednou z obzvláště oblíbených her byl právě magický čtverec. Tyto hlavolamy byly široce dostupné a prodávaly se na trzích po celé Evropě. Věřilo se, že slouží jako amulety, které mohou chránit před nemocemi, a vyráběly se z cínu pro masy a ze stříbra nebo zlata pro bohaté. Navzdory symbolickým souvislostem, které někteří pozdější badatelé spojují s magickými čtverci a alchymií, byly v té době považovány prostě za zábavu a hru. Často si je kupovali i poutníci a byly běžnou záležitostí (Garner, 2012).

Další zajímavý magický čtverec, který stoji za zmínku, je čtverec, ve kterém místo čísel jsou písmena. Slova na magickém čtverci lze číst ve všech směrech, je tedy palindromem. Slova jsou následující: Sator – sázeč, rozsévač, Arepo – zpravidla pojaté jako jméno, Tenet – dogma, držení, Opera – práce, dřina, péče a Rotas – kola (Zajímavé druhy Magických čtverců, 2020).

Magický čtverec SATOR byl objeven na mnoha různých místech po celém světě, například v Pompejích, v Aquincum u Budapešti, Dura Europos na Eufratu a v bazilice Santa Maria Maggiore v Římě. Mnoho interpretací čtverce SATOR se vztahuje na zemědělství, částečně zahrnuje i náboženský nebo rituální význam, mohl být používán jako návod pro zemědělství pro římské legionáře, kteří byli odměněni půdou po dobyvačných taženích. R. Camilleri v knize "Il quadrato magico, un mistero che dura da duemila anni" uvádí mnoho překladů čtverce:

Rozsévač drží pluh, dílny, kola.
Rozsévač Arepo udržuje klášter svou prací.
Neúnavný rozsévač, dělník Arepo, drží dílny, kola.
Laskavý otec se snaží odolat ničivým zvratům kol osudu.
Rozsévač, který vlastní pole, pomáhá kolům.
Rozsévač ohně, Arepo, drží hořící kola a jejich práci.
Dělník pomocí svého tažného koně udržuje kola svého pluhu v pohybu.
Spasitel bez odchýlení vede vůz se svou prací.

Poté, co rozsévač zaoral bere válce (SVELATO L’ENIGMA DEL SIGNIFICATO DEL QUADRATO MAGICO DEL SATOR?, 2021).

Obr. 13 Oppède-le-Vieux, Francie; Pompeje, Itálie; katedrála v Sieně, Itálie

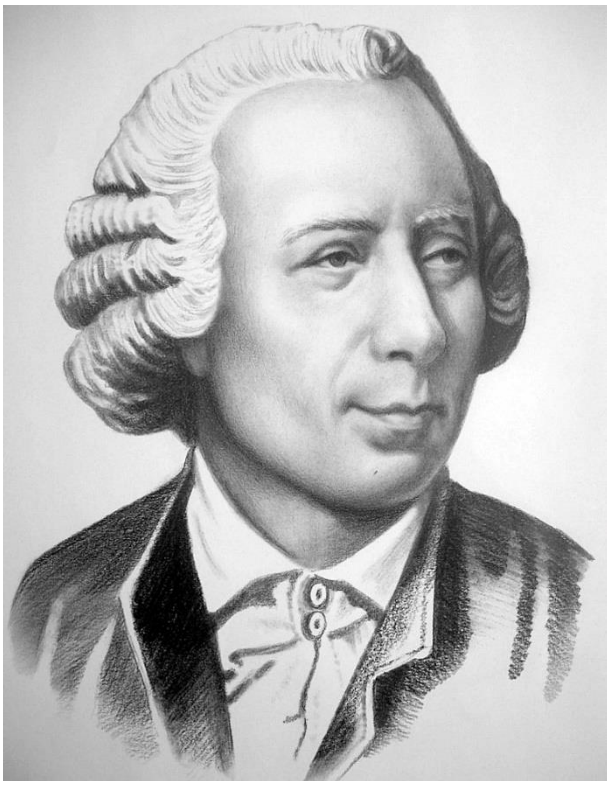
Magické čtverce si díky svým zajímavým vlastnostem udržely oblibu až do 21. století.

1.2.2 Latinské čtverce

Předchůdcem současné podoby Sudoku jsou latinské čtverce. Latinský čtverec řádu n je čtverec *n x n* s *n* různými symboly. Každý řádek a každý sloupec obsahuje celou sadu symbolů, od prvního po *n*, přičemž každý symbol v řádku a sloupci se vyskytuje pouze jednou. Latinský čtverec, na rozdíl od magického, nemá magickou konstantu. Vlastně Sudoku 4x4 je speciálním případem latinského čtverce.

Myšlenka latinských čtverců je známá již od středověku, ne-li dříve. V arabských rukopisech ze 13. století se občas objevují nejstarší známé latinské čtverce, kterým se často přisuzuje mystický nebo kabalistický význam. Čtverec, v arabštině označovaný jako wafq majazi, je mřížka vyplněná buňkami, kde každý řádek a každý sloupec obsahuje stejnou sadu symbolů, na rozdíl od magického čtverce, kde se symboly neopakují. Ahmad al-Buni (zemřel 1225) byl matematik, filozof a známý sufi z Alžírska, který proslul jako autor knihy Shams al-Ma'arif, nejdůležitějšího textu své doby týkajícího se talismanů a věštby. Jeho práce byly zaměřeny na esoterickou hodnotu písmen a témata spojená s matematikou, kouzly a spiritualitou. Al-Buni také předvedl konstrukci magických čtverců, například latinského čtverce 4 x 4, kde použil písmena z Božího jména (Darling, 2016).

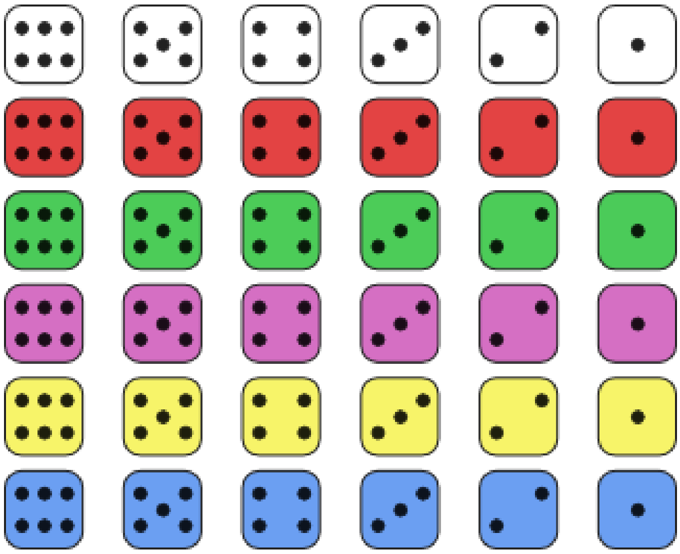
Jedním z prvních, kdo se vážně zabýval matematikou latinských čtverců, je Leonhard Euler (1707-1783), významný švýcarský matematik a fyzik. Euler zavedl koncept latinského čtverce, který nazval „novým druhém magického čtverce“, použil místo čísel písmena latinky. Poté přidal řecká písmena pro sestavení dvojíc a čtvercům říkal „řecko-římské čtverce“, nyní známé jako řecko-latinské čtverce. Dvojice z písmen řecké abecedy (α, β, γ, δ) a písmen latinské abecedy (a, b, c, d) byla tvořená tak, že každé písmeno se vyskytovalo pouze jednou v každém řádku a každém sloupci dle pravidel latinských čtverců (Crilly, 2010; History of Sudoku, 2023).



A α	B γ	C δ	D β
B β	A δ	D γ	C α
C γ	D α	A β	B δ
D δ	C β	B α	A γ

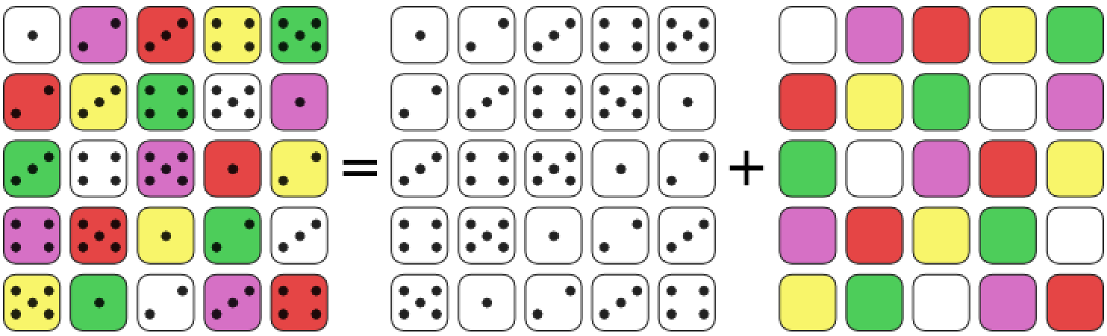
Obr. 14 Leonhard Euler a jeho řecko-latinský čtverec

Eulera zaujala následující hádanka (1779): je-li dáno šest různých pluků, z nichž každý má šest důstojníků, z nichž každý má jednu ze šesti různých hodností, lze těchto 36 důstojníků uspořádat do čtverce 6x6 tak, aby v každém řádku a sloupci byl jeden důstojník každé hodnosti a pluku? Pro názornost označíme každý pluk jinou barvou a každá ze šesti hodností odpovídá číslu na vrchní straně kostky (Numb3rs 218: All's Fair, 2010).



Obr. 15 Barvené a číselné znázornění hádanky

Hádanku lze jednoduše vyřešit, pokud obsahuje pět různých pluků a pět různých hodnosti, to stejné platí pro sedm.



Obr. 16 Řešení pro pět hodnosti a pět pluků

K vyřešení důstojnické hádanky by tedy stačilo najít dvojici latinských čtverců 6 x 6, které budou odpovídat Eulerovým požadavkům, tj. po překrytí čtverců se každá dvojice symbolů (nebo hodnot a barev na kostkách) vyskytne v celém čtverci právě jednou. Euler, po neúspěšném hledání řešení, prohlásil, že takové uspořádání je nedosažitelné, ačkoli nemohl poskytnout přesný důkaz. Také vyslovil domněnku, že takové dvojice ortogonálních čtverců neexistují pro libovolné $n = 4k+2$, kde k je celé číslo větší než 0 (tj. čtverce řádu 6, 10, 14, 18, 22,...) V roce 1901 Gaston Tarry, francouzský matematik - samouk, potvrdil Eulerovu hypotézu v tom, že skutečně neexistuje dvojice ortogonálních latinských čtverců 6. řádu. Předpokládalo se, že hypotéza platí i v případě dalších řádů. Avšak v roce 1960 s pomocí počítačů matematici R. C. Bose, S. S. Shrikhande a E. T. Parker (Bose, 1960) hypotézu vyvrátili a prokázali existenci ortogonálních latinských čtverců řádu 10, 14, 18, 22,…Ortogonální latinské čtverce, mimo čtverců 1. a 2. řádu, neexistují jedině v případě hlavolamu 36 důstojníků (6 x 6) (Crilly, 2010).

1.2.3 Praktické využití latinských čtverců

Arthur Cayley (16. srpna 1821 - 26. ledna 1895) byl britský matematik, který je široce uznáván jako jeden z nejdůležitějších matematiků 19. století. Je známý svými příspěvky k teorii algebraických rovnic, teorii matic, teorii skupin a geometrii. Cayleyovy práce zahrnují zavedení pojmu abstraktní skupiny a průkopnické práce v oblasti matic a lineární algebry. Je také známý svými studiemi latinských čtverců. Ve 30. letech 20. století se tento koncept objevil znovu ve spojení s teorii kvaziskupin a smyček jako zobecnění konceptu skupin. Latinské čtverce a kvaziskupiny (včetně smyček) jsou úzce propojeny. Vlastnost latinských čtverců (každý prvek se v každém řádku a sloupci objeví přesně jednou) odpovídá určitým algebraickým strukturám, jako jsou kvaziskupiny.

Můžeme si představit kvaziskupinu jako množinu s binární operací (operace se dvěma vstupy). Tato operace může být reprezentována pomocí tabulky, kde prvky v řádcích a sloupcích odpovídají vstupům operace a prvky v tabulce odpovídají výstupům.

Pokud tato tabulka splňuje podmínky latinského čtverce, pak odpovídající kvaziskupina má vlastnost, že každá operace je "řešitelná" z obou stran - to znamená, že pro každou dvojici prvků existuje přesně jedno řešení rovnice $a * x = b$ a také $x * a = b$.

Každý latinský čtverec může být považován za tabulku operací kvaziskupiny a naopak, každá kvaziskupina definuje latinský čtverec. Ačkoli kvaziskupiny jsou abstraktním matematickým konceptem, mají řádu praktických aplikací.

Latinský čtverec je čistě kombinatorický objekt, který reprezentuje způsob, jak uspořádat prvky tak, aby každý prvek byl v každém řádku a sloupci přesně jednou. Toto uspořádání je užitečné pro plánování experimentů, konstrukci rozvrhů a další aplikace, kde je důležité zajistit rovnoměrné rozložení prvků. Například, vědec, který testuje pět verzí experimentálního léku, může své testovací subjekty rozdělit do pěti skupin a náhodně přiřadit jednu verzi každé skupině pro testování během první fáze experimentu. Latinský čtverec pak může být použit k naplánování dalších čtyř fází, takže každá verze léku je testována na každé skupině testovacích subjektů bez duplikace. Ve 30. letech 20. století o s podobnými experimenty na základě latinských čtverců přišel statistik sir Ronald Aylmer Fisher, který zkoumal účinnost hnojiv na výnosy plodin, čímž způsobil revoluci v zemědělských metodách (Crilly, 2010).

Kvaziskupiny na druhou stranu jsou algebraické struktury. Poskytují rámec pro studium operací, které mají určité vlastnosti (například "řešitelnost" z obou stran, jak bylo popsáno výše). Tento rámec umožňuje matematikům zkoumat vlastnosti těchto operací, jako jsou jejich symetrie, invarianty a vztahy k jiným algebraickým strukturám. Mohou být použité v kryptografii při návrhu šifrovacích algoritmů. Například, některé blokové šifry používají operace založené na kvaziskupinách pro míchání (permutaci) a zaměňování (substituci) dat. Kvaziskupiny mohou také být použity při konstrukci hash funkcí.

Latinské čtverce se také hojně používají v konečné geometrii. Konkrétně se vzájemně ortogonální latinské čtverce používají k navrhování konečných projekčních rovin a blokových plánů.

Další oblastí, kde latinské čtverce nacházejí významné uplatnění, je teorie kódování, kde se využívají k vytváření kódů s maximální možnou vzdáleností mezi kódovými slovy. Mohou být použity v konstrukci určitých typů kódů, jako jsou například error-correcting codes (kódy pro opravu chyb). Latinské čtverce také naleznou uplatnění v návrhu experimentů, což je důležité například pro testování bezpečnosti kódů nebo šifrovacích systémů.

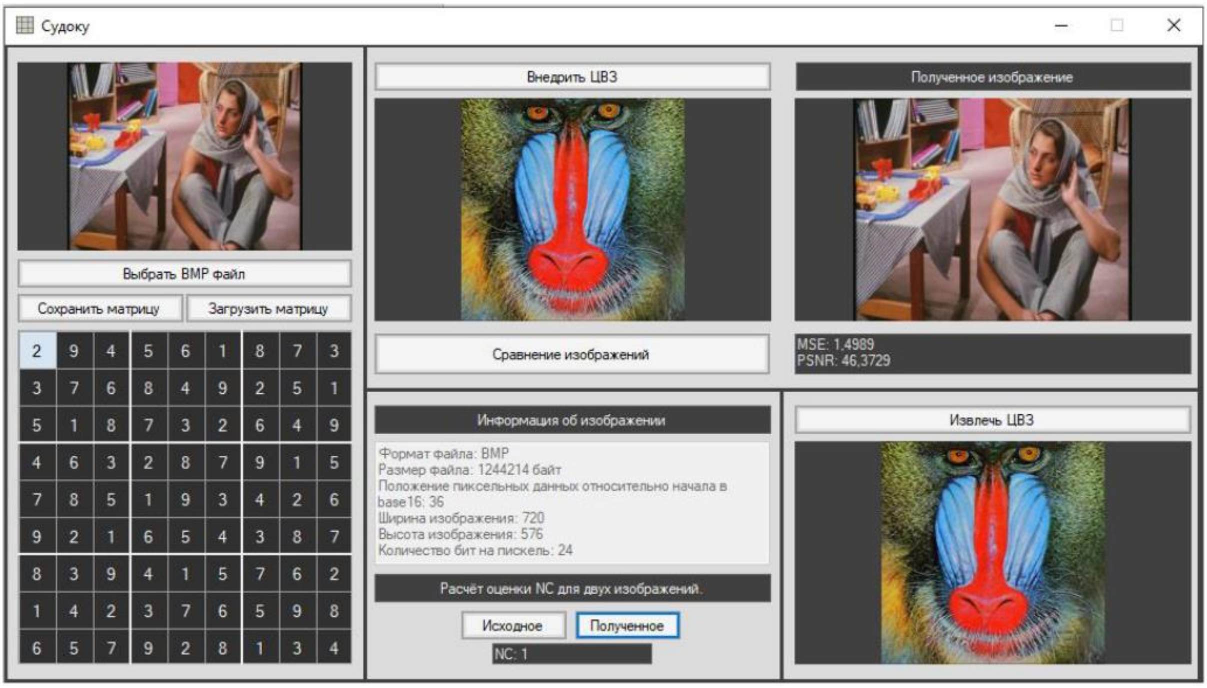
V kryptografii se latinské čtverce používají k vytváření substitučních tabulek pro šifrovací algoritmy.

Celkově se latinské čtverce ukázaly být zajímavou oblastí studia. Jejich všestrannost a široká škála aplikací vedly k četnému vývoji a pokroku v matematických oborech, jako je kombinatorika, kódy opravující chyby, ortogonální pole a další. S rozvojem počítačových aplikací a technologií navíc latinské čtverce našly ještě praktičtější využití jako nástroj pro řešení problémů v oborech, jako je Data Science, strojové učení a umělá inteligence. V posledních letech projevili vědci zájem také o konstrukci magických čtverců s omezeními na prvky použité v jednotlivých řádcích a sloupcích.

Sudoku je specifickým typem latinského čtverce, který má dodatečné omezení, že každé číslo se musí objevit právě jednou v každém podčtverci (bloku). Sudoku taktéž je předmětem zkoumání. Matematici pokládají otázky "Kolik vyplněných Sudoku mřížek existuje?", "Jaký je minimální počet nápověd v platné hádance?" a "Jakými způsoby mohou být Sudoku mřížky symetrické?" a řeší je pomocí kombinatoriky a teorie grup. Analýza Sudoku se obecně dělí na analýzu vlastností nevyřešených hádanek (jako je minimální možný počet daných nápověd) a analýzu vlastností vyřešených hádanek.

Výzkumníci použili k řešení hádanek Sudoku celočíselné lineární programování. Vymysleli funkci, která přijímá dvourozměrné pole představující potenciální řešení hry Sudoku a vrací, zda se jedná o platné řešení.

Sudoku matice lze použít v obrazové steganografii. Obrazová steganografie je technika, která se používá ke skrytí informací uvnitř obrázků. Tyto informace mohou být jakéhokoli typu, například text, další obrázky nebo dokonce zvukové soubory. Technika se často používá pro zajištění důvěrnosti dat, ochranu autorských práv nebo jiných účelů (Hsiao, 2021)



Obr. 17 Okno programu pro vkládání vodoznaku na základě matice Sudoku

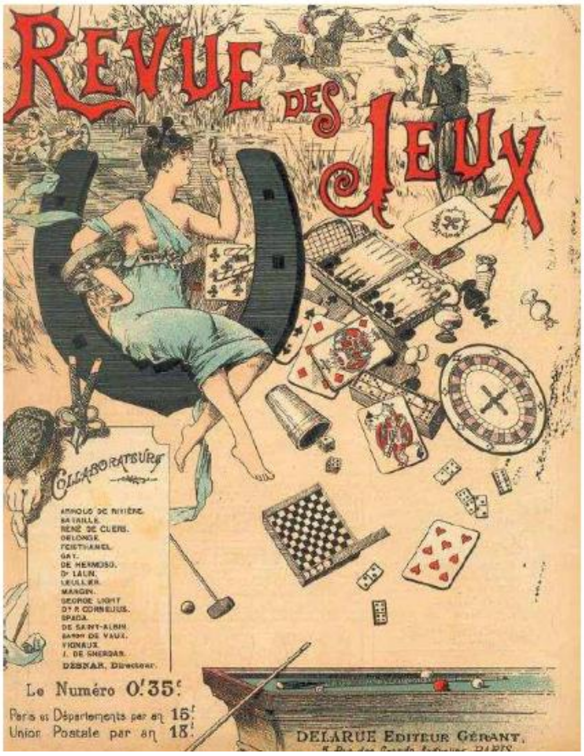
Mějme Sudoku mřížku, která je naplněna čísly od 1 do 9. Tuto mřížku lze použít jako klíč pro určení, kde a jak budou informace vloženy do obrázku. Například informace vložit do pixelů obrázku podle vzoru daného Sudoku mřížkou, nebo použít čísla z mřížky Sudoku jako klíč pro šifrování informací, které se mají skrýt. Pro detekování nebo extrahování informací je potřeba znát původní Sudoku matici. Technika steganografie je pro odesílání důvěrných dat přes veřejné počítačové sítě považována za vhodnější než technika kryptografie.

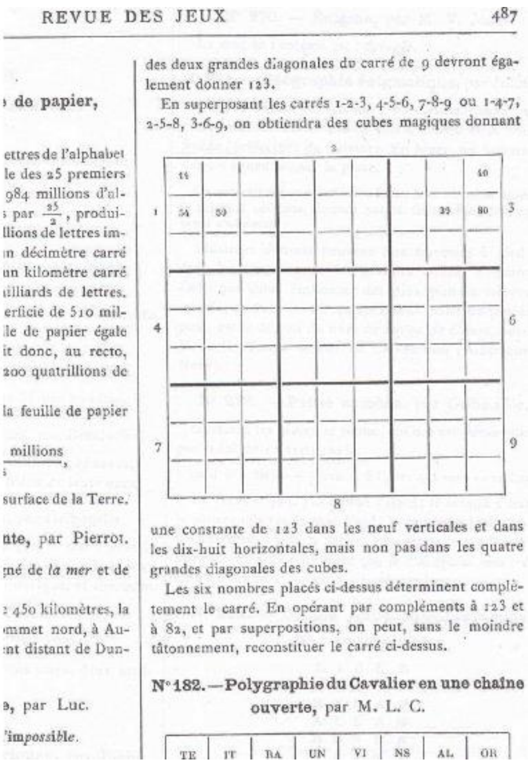
Na podobném principu funguje digitální vodoznak (digital watermark) nebo transformace obrázku (image scrambling, vizuální obsah nebo jeho část je nerozpoznatelný, vypadá jako náhodný šum nebo abstraktní vzor) pomocí matice Sudoku jako kódovacího klíče (Algorithm for embedding and extracting digital watermarks in image using Sudoku matrix, 2019).

1.2.4 Moderní historie Sudoku

Předchůdce Sudoku se několikrát objevily ve francouzských novinách a časopisech koncem 19. století.

V těchto případech se jednalo spíše o početní problém než o logický, jak tomu je v moderním Sudoku.





REVUE DES JEUX 487

des deux grandes diagonales du carré de 9 devront également donner 123.

En superposant les carrés 1-2-3, 4-5-6, 7-8-9 ou 1-4-7, 2-5-8, 3-6-9, on obtiendra des cubes magiques donnant une constante de 123 dans les neuf verticales et dans les dix-huit horizontales, mais non pas dans les quatre grandes diagonales des cubes.

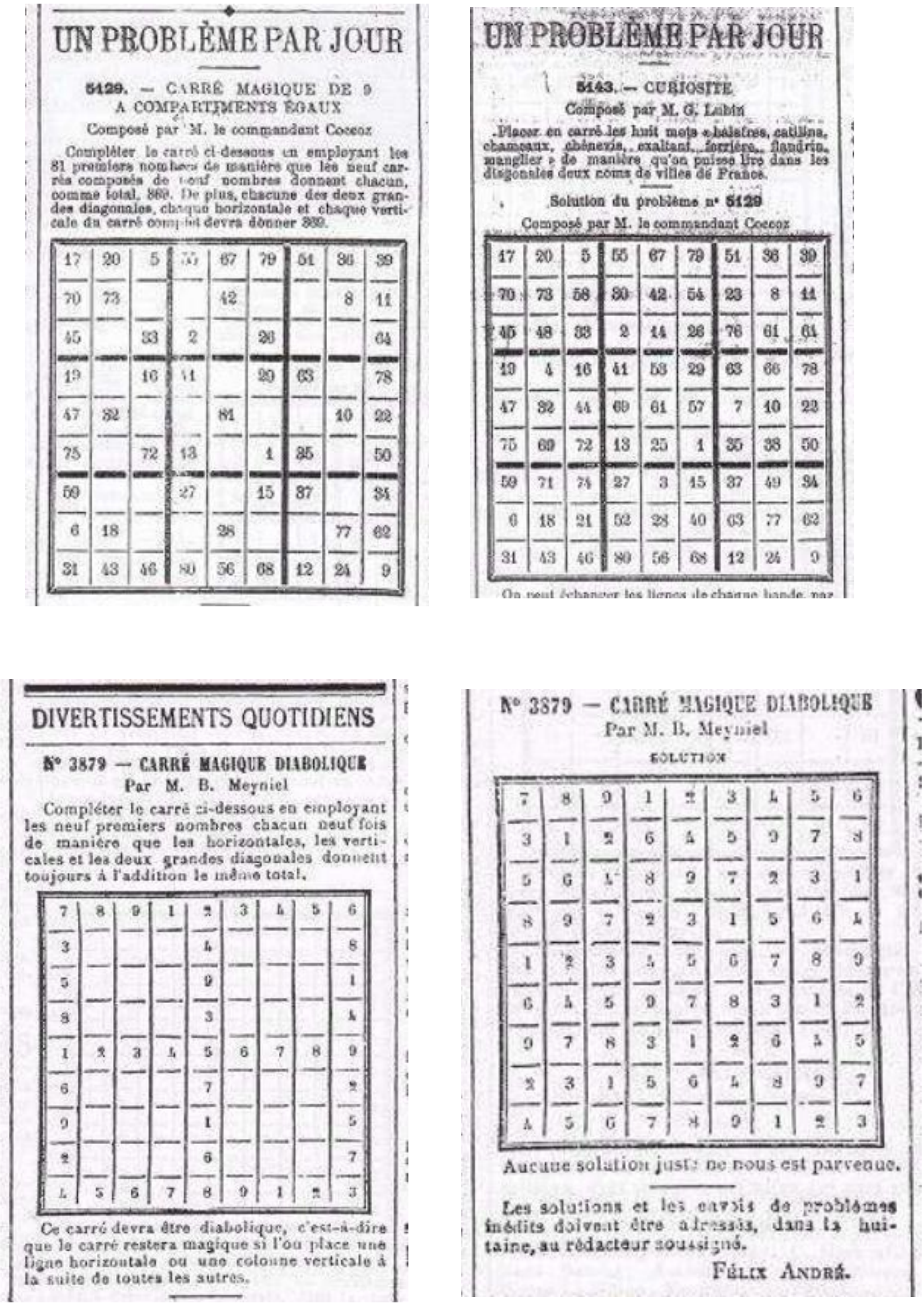
Les six nombres placés ci-dessus déterminent complètement le carré. En opérant par compléments à 123 et à 82, et par superpositions, on peut, sans le moindre tâtonnement, reconstituer le carré ci-dessus.

N° 182. — Polygraphie du Cavalier en une chaine ouverte, par M. L. C.

TE	IT	BA	UN	VI	NS	AL	OR

Obr. 18 La Revue des Jeux (Recenze her), 21. srpna 1891. První známý výskyt mřížky 9x9 složené ze čtverců 3x3

Ačkoli mřížka 9 x 9 byla rozdělená na devět čtverců (bloků) 3 x 3, což se současnému Sudoku podobá, obsahovala dvojciferná čísla, zbývající bylo potřeba doplnit podle určitého předem daného součtu. Ovšem, podobně Sudoku, součet byl stejný pro sloupec, řádek a blok. Nejvíce se podobá Sudoku úloha z obrázku (obr. 18), kde jsou čísla 1 až 9. Ačkoli nejsou v tomto hlavolamu, který dostal název carré magique diabolique ("ďábelský magický čtverec"), označeny bloky, každý blok 3×3 skutečně obsahoval čísla 1-9 a dodatečné omezení lomených úhlopříček vedlo pouze k jednomu řešení (Boyer, 2006).



UN PROBLÈME PAR JOUR

5129. — CARRÉ MAGIQUE DE 9 A COMPARTIMENTS ÉGAUX

Composé par M. le commandant Coccoz

Compléter le carré ci-dessous en employant les 81 premiers nombres de manière que les neuf carrés composés de neuf nombres donnent chacun, comme total, 369. De plus, chacune des deux grandes diagonales, chaque horizontale et chaque verticale du carré complet devra donner 369.

17	20	5	55	67	79	51	36	39
70	73			42			8	11
45		33	2		26			64
19		16	41		29	63		78
47	32			81			10	22
75		72	13		1	35		50
59			27		15	37		34
6	18			28			77	62
31	43	46	80	56	68	12	24	9

UN PROBLÈME PAR JOUR

5143. — CURIOSITÉ

Composé par M. G. Lubin

Placer en carré les huit mots « bélîtres, catilina, chameaux, chènevis, exaltant, ferrière, flandrin, manglier » de manière qu'on puisse lire dans les diagonales deux noms de villes de France.

Solution du problème nº 5129

Composé par M. le commandant Coccoz

17	20	5	55	67	79	51	36	39
70	73	58	30	42	54	23	8	11
45	48	33	2	14	26	76	61	64
19	4	16	41	53	29	63	66	78
47	32	44	69	81	57	7	10	22
75	60	72	13	25	1	35	38	50
59	71	74	27	3	15	37	49	34
6	18	21	52	28	40	65	77	62
31	43	46	80	56	68	12	24	9

On peut échanger les lignes de chaque bande, par

DIVERTISSEMENTS QUOTIDIENS

Nº 3879 — CARRÉ MAGIQUE DIABOLIQUE

Par M. B. Meyniel

Compléter le carré ci-dessous en employant les neuf premiers nombres chacun neuf fois de manière que les horizontales, les verticales et les deux grandes diagonales donnent toujours à l'addition le même total.

7	8	9	1	2	3	4	5	6
3				4				8
5				9				1
8				3				4
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6				7				2
9				1				5
2				6				7
4	5	6	7	8	9	1	2	3

Ce carré devra être diabolique, c'est-à-dire que le carré restera magique si l'on place une ligne horizontale ou une colonne verticale à la suite de toutes les autres.

Nº 3879 — CARRÉ MAGIQUE DIABOLIQUE

Par M. B. Meyniel

SOLUTION

7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	1	2	6	4	5	9	7	8
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5
2	3	1	5	6	4	8	9	7
4	5	6	7	8	9	1	2	3

Aucune solution juste ne nous est parvenue.

Les solutions et les envois de problèmes inédits doivent être adressés, dans la huitaine, au rédacteur soussigné.

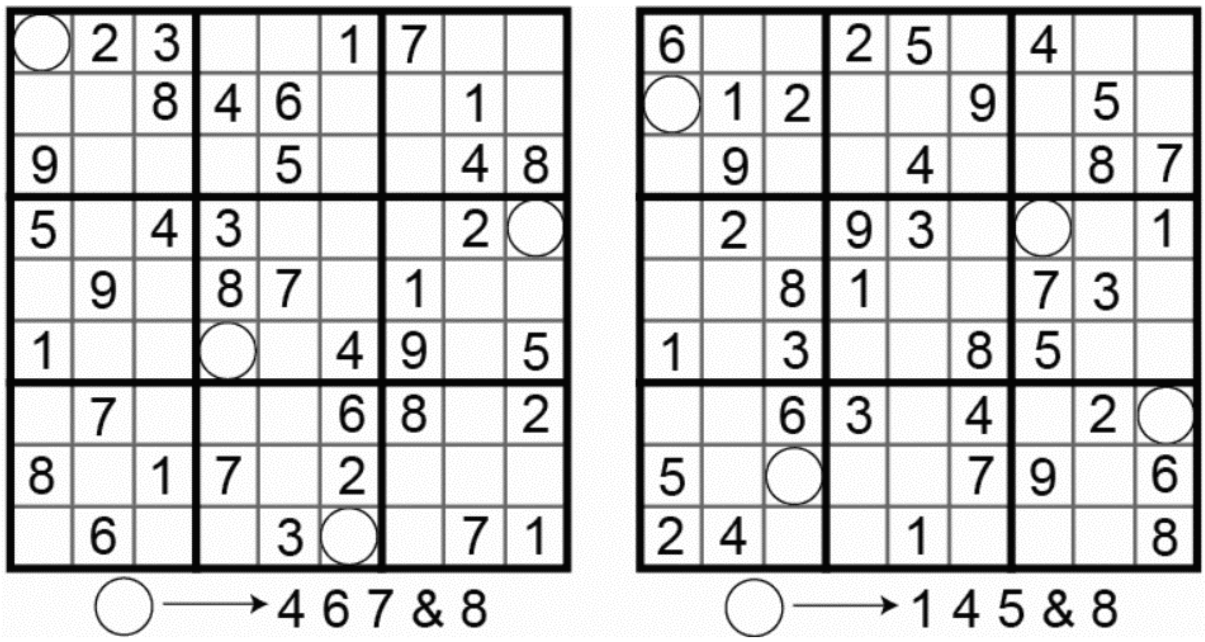
Félix André.

Obr. 19 Le Siècle, 19. listopadu 1892 - zadání; 3. prosince 1892 – řešení;

La France, 6. července 1895 - zadání; 21. července 1895 - řešení

Moderní hlavolam Sudoku se zrodil koncem 70. let 20. století.

Howard Garns, elegantně oblečený architekt s knírkem, který měl zálibu v pískání, byl hluboce fascinován hádankami. Ve svém volném čase, když odešel z firmy Daggett, Indianapolis, ve věku 74 let vytvořil hlavolam, který pojmenoval "Number Place" (Místo pro číslo). Garns převzal koncept latinských čtverců Eulera a aplikoval rozdělení mřížky do bloků 3 x 3, každý blok obsahoval všechna čísla od 1 do 9. Hlavolam byl poprvé zveřejněn v květnovém čísle časopisu Dell Pencil Puzzles and Word Games v roce 1979 (vydání 16). Garns vytvořil pro Dell mnoho hlavolamů a zjednodušil pravidla na ta, které se používají dnes.



Obr. 20 První Number Place puzzles. (Dell Pencil Puzzles & Word Games č. 16, str. 6, 1979-05)

Zde jsou původní pokyny: "V tomto hlavolamu je vaším úkolem umístit číslo do každého prázdného políčka tak, aby každý řádek vodorovně, každý sloupec svislé a každý malý čtverec s 9 políčky uvnitř velkého čtverce (je jich 9) obsahoval každé číslo od 1 do 9. Nezapomeňte, že žádné číslo se nesmí objevit v žádném řádku, v žádném sloupci ani v žádném malém čtverci s 9 políčky více než jednou; to vám pomůže vyřešit hlavolam. Čísla v kroužcích pod diagramem vám poskytnou nápovědu - každé z těchto čtyř čísel patří do jednoho z kruhových políček v diagramu (ne nutně v uvedeném pořadí)." (Pegg Jr., 2005)

Navzdory svému inovativnímu designu si hra "Number Place" zpočátku nezískala výraznou popularitu. Její sláva začala stoupat až poté, co byla v roce 1984 znovu publikována v japonském časopise Nikoli. Garns bohužel v říjnu 1989 zemřel a nebyl svědkem celosvětové senzace, kterou se jeho výtvor stal v následujících letech (Sudoku history, 2023).

V dubnu 1984 japonská společnost Nikoli objevila publikovanou v časopise Dell hádanku „Number Place“ a představila ho japonskému publiku na stránkách časopisu Monthly Nikolist, který se hlavolamům věnuje. Hlavolam se původně jmenoval **Sū**ji wa **doku**shin ni kagiru 数字は独身に限る ("čísla jsou omezená na jeden výskyt") a stal se velmi populárním. Popularita hlavně byla zaručená tím, že se jednalo o číselný hlavolam, křížovky v japonštině nebyly ideálním typem pro luštění. V roce 1986, po několika důležitých vylepšeních, zejména díky symetrickým vzorům a snížení počtu daných nápověd, se Sudoku stalo jedním z nejprodávanějších puzzle v Japonsku. Kaji Maki, prezident společnosti Nikoli, si uvědomil, že jediným problémem s hádankami Sudoku byl jejich dlouhý název, a zkrátil ho na Sudoku 数独 - (Su = číslo, číslice; Doku = jednotlivý, svobodný). Kaji Maki nechal si název opatřit ochrannou známkou. Jak popularita rostla, konkurenční společnosti zůstaly u nechráněného názvu Number Place neboli "nanpure". I dnes se v mnoha japonských logických časopisech píše anglicky "Number Place". Ve Spojených státech a jinde se nazývá Sudoku ("jedno číslo" v japonštině). Japonci tedy používají angličtinu a anglicky mluvící lidé japonštinu (Pegg Jr., 2005).

Wayne Gould, který působil dlouhá léta jako soudce v Hongkongu, po předání kolonie Číně se svého místa vzdal a jal se cestovat. V roce 1997 navštívil Japonsko, kde v knihkupectví narazil na zajímavý hlavolam. Hlavolam byl číselný, a Gould i bez znalosti japonštiny přišel na to, jak se úloha luští. Wayne Gould byl těmito hádankami tak nadšený, že se rozhodl vytvořit počítačový program, který Sudoku různých obtížnosti bude generovat. V roce 2004 navštívil Londýn, aby přesvědčil redaktory londýnského listu The Times opublikovat hádanky Sudoku. Gould nabídl své hádanky The Times zcela zdarma. The Times se rozhodl to zkusit a 12. listopadu 2004 spatřil svět první hlavolam Sudoku (s názvem Su Doku pro zachování ochranné známky) v Evropě.

Publikování Sudoku v londýnských Times bylo jen začátkem obrovského fenoménu, který se rychle rozšířil po celé Británii a jejích přidružených zemích Austrálii a Novém Zélandu. O tři dny později začal The Daily Mail publikovat hádanky Sudoku pod názvem „Codenumber“. The Daily Telegraph v Sydney následoval 20. května 2005. Do konce května 2005 byla hádanka pravidelně publikována v mnoha národních novinách ve Velké Británii, včetně The Daily Telegraph, The Independent, The Guardian, The Sun a The Daily Mirror. V květnu 2005 hlavolam Sudoku se objevil v Kanadě, Indii, Portugalsku, JAR, Švýcarsku a USA. V červnu

2005 vyšel výtisk Lidových novin s prvním Sudoku c České republice, za správné vyluštění byla finanční odměna. (Sinden, 2005).

V červenci 2005 zařadil Channel 4 do své služby Teletext denní hru Sudoku a Sky One spustil největší Sudoku na světě – hlavolam o velikosti 275 stop (84 metrů) vyřezaný do strany kopce v Chipping Sodbury u Bristolu. BBC Radio 4's Today začal číst čísla nahlas ve první rádiové verzi Sudoku. Slavné britské celebrity jako Jade Goody z Big Brothera a Carol Vorderman, autorka knihy How to do Sudoku, jsou přesvědčení o jeho přínosech jako mentálním cvičení. Dokonce i časopis Teachers, který je vydávaný za podpory vlády, doporučil Sudoku jako mozkové cvičení ve třídách a vznikly hypotézy, že řešení Sudoku je schopno zpomalit progresi mozkových poruch, jako je Alzheimerova choroba (Sudoku history, 2023).

1.2.5 Soutěže v Sudoku

Mistrovství světa v řešení logických úloh (World Puzzle Championship) probíhá jednou ročně od roku 1992. Mistrovství světa v řešení Sudoku (World Sudoku Championship) probíhá jednou ročně od roku 2006 a od roku 2011 je soutěž místem konání a časovou následnosti sloučená s World Puzzle Championship. První World Sudoku Championship proběhl v roce 2006 v Itálii (Lucca), první mistryní světa v řešení Sudoku se stala Jana Tylová. Světový rekord v řešení standardního hlavolamu Sudoku 9×9 je 1 minuta a 23,93 sekundy, který v roce 2018 stanovil Thomas Snyder z USA.

WPF Sudoku/Puzzle Grand Prix je projekt Světové hádankářské federace (World Puzzle Federation), vznikl v roce 2013 z popudu českých zástupců. Jsou to online turnaje, připravovány autoři z celého světa, kterých se účastní hráče a jsou zakončeny při mistrovství světa velkým finále pro 10 nejlepších. WPF - sdružení právnických osob se zájmem o hlavolamy. Členem může být pouze jedna organizace z každé země. WPF se řídí olympijským standardem.

Každý rok se uskutečňuje národní šampionát v Sudoku a logických úlohách, který je organizován Hráčskou asociací od roku 2012. Tato tradice navazuje na mistrovství v Sudoku, které od roku 2006 pořádal Vítězslav Koudelka, a na celostátní soutěže jednotlivců a skupin v logice, které od roku 1992 pořádal Svaz českých hádankářů a křížovkářů. Kromě národního šampionátu je v každoročním kalendáři zahrnuta řada dalších turnajů, které jsou součástí HALAS ligy. Počet turnajů naživo se mění podle zájmu hráčů a možností organizátorů, a proto výbor HALAS do ligy zařazuje i vybrané online turnaje.

Od roku 2011 probíhají také několikrát středoškolské turnaje po celé republice. Více o soutěžích a soutěžním materiálu se lze dozvědět na webu Hráčské Asociace Logických her A Sudoku (HALAS) http://sudokualogika.cz/

Vydařené akce probíhají pod hlavičkou Czech Open – mezinárodní festival šachu a her. Poslední je CZECH OPEN 2023 - VI. ročník soutěže v Sudoku a řešení logických úloh, který se koná 15. července 2023 (https://www.czechopen.net/)

1.2.6 Ručně tvořené vs počítačem generované Sudoku

Rozšíření Sudoku výrazně napomohl nástup počítačů. Byly vyvinuty algoritmy, které dokážou generovat hádanky Sudoku různých obtížností, což nadšencům zajišťuje stálý přísun nových hádanek k řešení. Tyto počítačem generované hádanky přispěly k popularizaci hry Sudoku na digitálních platformách a zpřístupnily ji širšímu publiku. Umění ručního vytváření hádanek Sudoku je však stále živé a stále se používá. Na svých webových stránkách nakladatelství Nikoli razí heslo: „Dobře udělané Sudoku je potěšením pro řešitelé“, což znamená ručně sestavené symetrické Sudoku, které nese svoje estetické poslání pro luštitele.

Nobuhiko Kanamoto, šéfredaktor časopisu Nikoli, pojednává o rozdílu mezi počítačem generovanými Sudoku hádankami a těmi, které vytvořili lidé ručně. Podle něj jsou nejlepší Sudoku hádanky náročné, avšak nikoli stresující, jsou poutavé, nikoli nudné. Proto ručně vytvořené Sudoku jsou estetický pohledné, předvyplněná čísla mohou být symetrický uspořádané nebo mohou mít tvar obrázků, což zvyšuje radost z luštění.

Maki Kaji (1951 – 2021), kmotr Sudoku, prezident společnosti Nikoli, byl přesvědčený o jedinečnosti hlavolamů Nikoli, protože byly vyvíjený za účelem vytvořit chytrý a elegantní hlavolam se zaměřením na proces, ne na konečné výsledky. Tvrdil, že uživatele dávají přednost hádankám od Nikoli. „Můžete vymyslet program na tvorbu hlavolamů Sudoku, ale nikdy nevytvoříte hlavolamy Sudoku od Nikoli.“ (Why hand made, 2021)

Obr. 21 Maki Kaji, foto Yasuyoshi CHIBA

O přínosu ručně tvořeného Sudoku hovoří i Thomas Snyder, americký vítězce World Sudoku Championship (třikrát) a World Puzzle Championship, který se také věnuje tvorbě Sudoku. Ve své knížе The Art of Sudoku píše: Počítačem vygenerované hádanky budou vypadat jako náhodné cákance inkoustu ve srovnání s těmi, které najdete zde, kde lidský dotek vytvořil esteticky příjemné a logicky zajímavé výzvy, které by žádný počítač nikdy nedokázal (Snyder, 2012).

Několik ukázek z knihy:

95

	1	2	3	4	5	6	7	
	6						8	
	4						3	
	7			1			5	
		8				9		
			9		4			
			5		1			
		7				3		
		6	8	7	2	4		

95

8	1	2	3	4	5	6	7	9
9	6	3	1	2	7	5	8	4
7	4	5	6	9	8	1	3	2
4	7	9	2	1	6	8	5	3
6	2	8	7	5	3	9	4	1
5	3	1	9	8	4	2	6	7
2	8	4	5	3	1	7	9	6
1	5	7	4	6	9	3	2	8
3	9	6	8	7	2	4	1	5

Obr. 22 Sudoku z knihy The Art of Sudoku Thomase Snydera

108

				5				
			4	2	1			
		3	7		8	9		
	4	9				2	7	
3	1						6	4
5								9
				1				
			2	3	4			
		5	6		7	8		

108

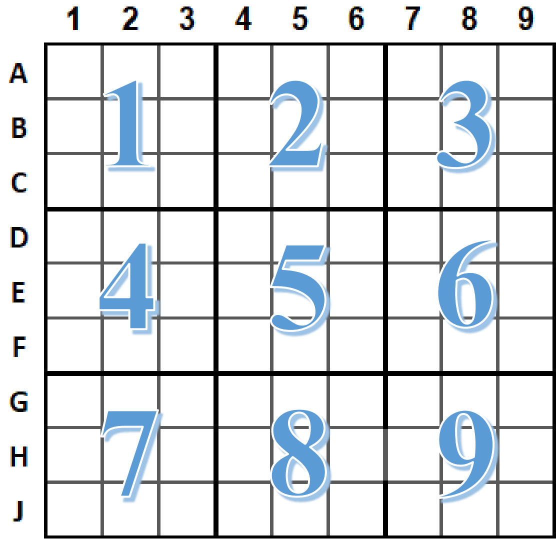
7	8	4	3	5	9	1	2	6
9	5	6	4	2	1	7	3	8
1	2	3	7	6	8	9	4	5
6	4	9	5	8	3	2	7	1
3	1	8	9	7	2	5	6	4
5	7	2	1	4	6	3	8	9
2	6	7	8	1	5	4	9	3
8	9	1	2	3	4	6	5	7
4	3	5	6	9	7	8	1	2

Obr. 23 Hlavolam Sudoku z knihy Thomase Snydera The Art of Sudoku

1.3 Techniky řešení Sudoku

Nejprve se dohodneme na použité terminologii, jelikož stálé názvy jsou v angličtině vžité, při překladu se ovšem lze setkat s různými variacemi.

Cela tabulka Sudoku 9 x 9 ponese název ***mřížka*** *(grid v angličtině)*. ***Mřížka*** bude rozdělená na menší ***čtverce*** *(sub-grid)* 3 x 3 (jinde také bloky), nejmenším čtverečkům budeme říkat ***políčka*** (jinde také buňky). ***Řádky*** pro jednodušší vysvětlení jsou označeny písmeny



Obr. 24 Prázdná mřížka Sudoku

anglické abecedy, ***sloupce*** – čísly.

Pamatujme hlavní pravidlo – není potřeba hádat. Pro úspěšné řešení Sudoku musí každý řádek, sloupec, čtverec obsahovat čísla od 1 do 9, číslo v rámci řádku, sloupce, čtverce se neopakuje.

1.3.1 Začátečnické techniky

Jediná možná pozice

Řešení začínáme hledáním **jednoznačného umístění čísla**. Pokládáme si otázky typu: **pokud** je 2 v tomto řádku, může být v tomto políčku? Nebo **když** 5 je v tomto čtverci, mohla by být v tomto sloupci? Procházet můžeme řádky, sloupce, čtverce. Pro začátečníky doporučuji začít u čísla jedna a proházet mřížku po čtvercích. Otázky: pokud jednička je v prvním čtverci a ve třetím čtverci na určitých řádcích, kde by mohla být ve druhém čtverci? Lehké Sudoku nabízí rychlé nalezení takových jednoznačných umístění.

Se získáním více zkušenosti lze nejprve prohlédnout mřížku, vyhledat číslo s největším výskytem a začít u tohoto čísla, my však budeme procházet čísla od 1 do 9, abychom se neztratili. Když projdeme čísla od 1 do 9 a určíme pozice pro veškerá čísla, která bylo možné určit, vracíme se na začátek. **Opakujeme** postup. Je to základem algoritmu řešení – častá iterace, jelikož vzhledem k doplněným číslům se mění podmínky řešení. Pamatujeme – pokud v řádku, sloupci, čtverci zbývají dvě prázdná políčka, je velká šance najít správná čísla.

Příklad 1 – hledání jedním směrem: Pokud je číslo 1 na řádku A a řádku B, může být ve třetím čtverci pouze na řádku C, kde pro 1 je pouze jediné místo – C7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				7	1	9			8
B		1				6			3
C		8	9				1	4	2

Obr. 25 Příklad 1

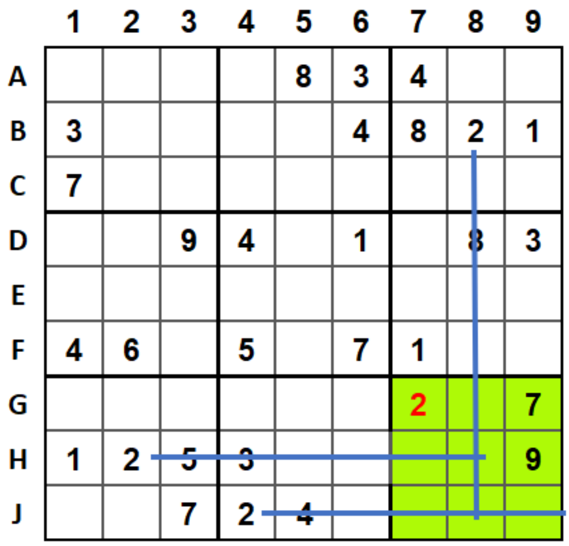
Příklad 2 – hledání ve čtvercích: Podíváme se na řádek E, vyznačený zelenou barvou. Do kterého políčka v tomto řádku bychom mohli umístit číslo 8?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2		4			9			
B	9			7				4	8
C			1	2		8			
D	4				8		1		9
E									
F	8		5		6				2
G				6		1	9		
H	1	9				2			7
J				4			8		1

Obr. 26 Příklad 2

Číslo 8 nemůže být ve 4. čtverci, ani v 5. čtverci, jelikož v těchto čtvercích číslo 8 už je, nutně bude ve čtverci 6. Nemůže ale být v 7. a 9. sloupcích, jediná pozice pro číslo 8 je E8.

Příklad 3 – hledání několika směry: Určíme pozici čísla 2 v 9. čtverci. Modrou čárou jsou znázorněný řádky a sloupce, ve kterých se číslo 2 nacházet nemůže, zbývá pouze jediná možnost, a to G7.



Obr. 27 Příklad 3

Jediné možné číslo

Při používání této techniky zkoumáme políčko a zjišťujeme, zda je možnost určit jediné možné číslo, které do políčka patří. V políčku může být pouze jedno nějaké číslo, protože zbývajících osm je již použito v příslušném řádku, sloupci a čtverci.

Příklad 4: Podíváme se na 4. čtverec, zaměříme se na políčko D2. V řádku D jsou čísla 1, 6, 7, 8. Ve sloupci 2 jsou čísla 9 a 5. Ve čtverci samotném pak kromě 8 a 7 ještě 3 a 4. Čísla 1,3,4,5,6,7,8,9 nemohou v políčku D2 být, proto zbývá jedině číslo 2.

Technika vyloučení

Poněkud složitější je zjišťování chybějícího čísla vylučovací metodou. vylučujeme všechna možná místa, kde číslo být nemůže a pokud zbyde jediné volné políčko, pak číslo patří právě tam.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				1		4			
B			1				9		
C		9		7		3		6	
D	8	2	7				1		6
E									
F	3		4				5		9
G		5		4		2		3	
H			8				6		
J				8		6			

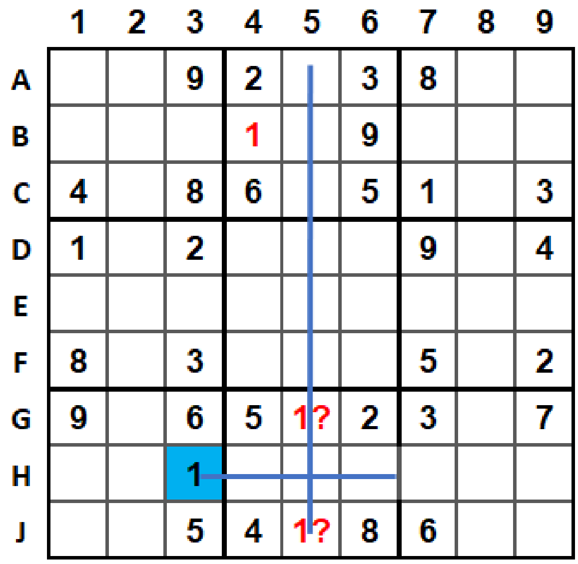
Obr. 28 Příklad 4

Příklad 5: Zamíříme se na pátý sloupec. Zde chybí čísla 2, 3, 4, 7. Budeme dosazovat tato čísla na jednotlivá volná místa a zjišťovat, zda se tam hodí. Řádek A obsahuje 6 a 9, nevylučuje žádné z hledaných čísel. Ale ve 2. čtverci čísla 4 a 7 jsou, proto na volných políčkách A5 a B5 mohou být jedině 2 a 3. V řádku B už 3 je, proto nemůže být na B5, bude tam 2, číslo 3 patří do A5. Přesnou pozici pro čísla 4 a 7 ve sloupci 5 nelze zatím určit. Pro tento případ se použije technika vpisků, které se budeme věnovat později.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				6	3			9	
B		3			2	4		1	8
C			2	1	9	7			
D		4	9	3	1	2	5		
E				7	6	5			
F			3	4	8	9	1	2	
G				9	5	3	4		2
H	6	9		2				3	
J		2				6			

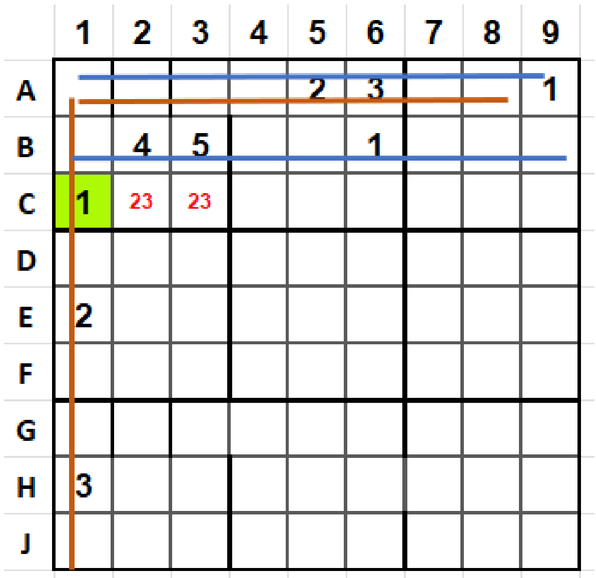
Obr. 29 Příklad 5

Příklad 6 – blokace 1: V políčku H3 je číslo 1, které znemožňuje umístit 1 někam jinam do řádku H. V 8. čtverci číslo 1 bude nutně v 5. sloupci, přesné místo nelze určit, což ale znamená, že v jiných políčkách sloupce 5 číslo 1 nebude. Proto ve čtverci 2 pro jedničku zbývá jedno jediné místo, a to B4.



Obr. 30 Příklad 6

Příklad 7 – blokace 2: Čísla 2 a 3 v řádku A a sloupci 1 nechávají pouze jediná dvě místa pro 2 a 3 v prvním čtverci. Číslo 1 nemůže být v řádcích A a B, už tam jednou je. Políčka C2 a C3 blokují čísla 2 a 3. Pro číslo 1 zbývá pouze C1.



Obr. 31 Příklad 7

Příklad 8 – blokace 3: Zkoumáme 2. čtverec a 5. sloupec. V jednom ze dvou žlutých políček musí být šestka. Žádná 6 (a také žádná 9) tedy nemůže být ve dvou modrých políčkách. V 8. čtverci jsou tedy 6 a 9 v zelených poličkách. Vezmeme-li toto v úvahu, na G7 může být pouze 8. Úvaha, proč zůstává pouze 8, je následující. Které číslo musí být v oranžovém políčku G7? Ne 1, 3 nebo 4, ty už jsou ve stejném sloupci. Ne 2, 5 nebo 7, ty už jsou ve stejném řádku. Ne 4 nebo 5, ty už jsou ve stejném čtverci. Zbývají tedy 6, 8 a 9 - ale 6 a 9 musí být na zelených políčkách, takže na oranžové políčko zbývá jen 8.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				8	6	4	3		
B				7	6	2			
C	6			1	9	3			
D				2	3	1			
E				5			1		
F									
G	7			69	2	69	8		5
H				4		7			
J				3		5	4		

Obr. 32 Příklad 8

1.3.2 Pokročilejší techniky

Vpisky (kandidáti)

Pokud jsou veškeré možnosti jednoznačného určení vyčerpané, použijeme techniku vpisků neboli techniku kandidátů. Technika vpisků je jedna z nejzákladnějších strategií používaných při řešení hry Sudoku. Tato technika spočívá v zaznamenání všech možných čísel, která mohou být umístěna do konkrétního prázdného políčka. To se obvykle dělá tak, že se malými číslicemi napíší kandidáti do prázdných políček. Zapisujeme tužkou, abychom kandidáty mohli po dalších logických úvahách vygumovat. Například, máme v políčku kandidáty {4, 5, 7}. Logickou úvahou jsme došli k tomu, že číslo 7 umístíme do jiného prázdného políčka v řádku, sloupci nebo čtverci. Pak číslo 7 z množiny možných kandidátů odstraníme. Počítačové aplikace taktéž umožňují tuto techniku provádět pomocí zapisování malých čísel do prázdného políčka.

Technika vpisků je velmi užitečná, protože pomáhá hráčům vizualizovat možnosti a omezit výběr čísel pro každé políčko. Tato technika je zvláště užitečná v pozdějších fázích hry, kdy se počet možných čísel pro některá políčka stává velmi malým.

Například, kandidáty můžeme doplnit v Sudoku z příkladu 5. Jsou to čísla 4 a 7 ve sloupci 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A				6	3			9	
B		3			2	4		1	8
C			2	1	9	7			
D		4	9	3	1	2	5		
E				7	6	5			
F			3	4	8	9	1	2	
G				9	5	3	4		2
H	6	9		2	47			3	
J		2			47	6			

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	17	6	3	8	2	9	4
B	9	3	6	5	2	4	7	1	8
C	4	8	2	1	9	7	6	5	3
D	7	4	9	3	1	2	5	8	6
E	2	1	18	7	6	5	3	4	9
F	5	6	3	4	8	9	1	2	7
G	18	178	178	9	5	3	4	6	2
H	6	9	4	2	7	1	8	3	5
J	3	2	5	8	4	6	9	7	1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	5	7	6	3	8	2	9	4
B	9	3	6	5	2	4	7	1	8
C	4	8	2	1	9	7	6	5	3
D	7	4	9	3	1	2	5	8	6
E	2	1	8	7	6	5	3	4	9
F	5	6	3	4	8	9	1	2	7
G	8	7	1	9	5	3	4	6	2
H	6	9	4	2	7	1	8	3	5
J	3	2	5	8	4	6	9	7	1

Obr. 33 Průběh řešení hlavolamu z příkladu 5

Na pomoc při hledání vhodných kandidátů lze využít počítačové aplikace, například na webu https://www.sudoku-solutions.com. Aplikace má velké množství funkcí, které pomohou jak při kontrole, tak s naučením se technikám řešení. Aplikace mimo jiné umožňuje řešení pro vybrané políčko, částečné řešení s nastavenými preferencemi, vyhodnocení úrovně obtížnosti, kontrolu validity a unikátního řešení.

Obr. 34 Okno programu Sudoku Solver

Při vyplnění kandidátů můžete přijít na to, že v určitých políčkách je pouze jedno číslo, ačkoli to nebylo zřejmě před vyplněním všech možných kandidátů – bude to řešením daného políčka. Pokud existuje pouze jeden kandidát, říkáme o **Naked single**, v češtině něco jako odhalený nebo viditelný jednotlivec. Pokud v řádku, sloupci, čtverci jsou políčka, obsahující více než jednoho kandidáta, ale jen v jednom z políček se vyskytuje dané číslo, v žádném jiném, mluvíme o **Hidden single**, čili skrytém jednotlivci. Proto odstraníme z políčka ostatní čísla. Právě zbývající číslo bude jedinečným řešením.

1	69	4589
2	7	4589
459	3	5

Obr. 35 Naked single - zelená značka, Hidden single - růžová značka

Naked pair – viditelná dvojice

Příklad 9: Políčka A2 a A5 obsahují pouze dvě čísla 1 a 7. Jsou možné pouze dvě možnosti – A2 – 1, A5 – 7 nebo A2 – 7, A5 -1. To znamená, že ve stejném řádku ani 1, ani 7 nikde jinde se vyskytovat nemohou, proto tato čísla z dalších kandidátů můžeme vymazat. Na A9 zbyde pouze 4, zbytek také přehodnotíme.

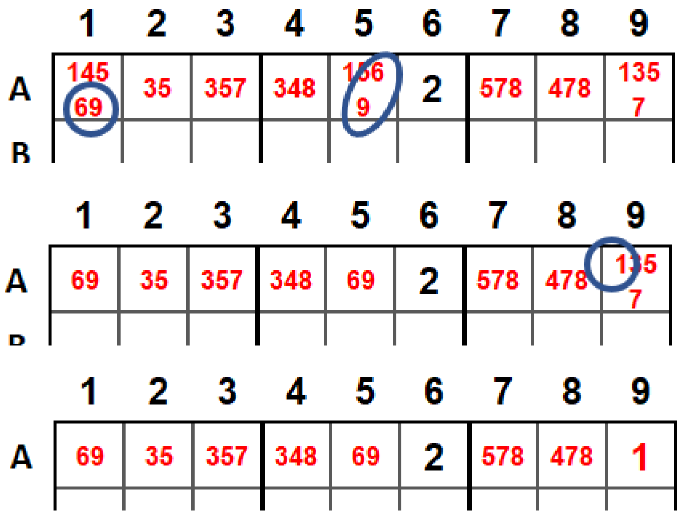
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	17	237 9	123 48	17	5	348	248 9	147

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	17	239	238	17	5	38	289	4

Obr. 36 Příklad 9

Hidden pair – skrytá dvojice

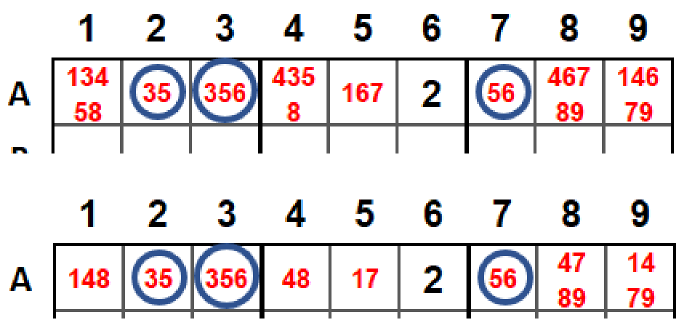
Příklad 10: 6 a 9 se objevují pouze v A1 a A5, je to skrytá dvojice, ostatní čísla z těchto políček lze odstranit, dvě políčka – pro dvě čísla, buď 6 nebo 9. Jakmile odstraníme zbytečné kandidáty z těchto dvou políček, {6, 9} se stává naked pair, na A9 se objeví hidden {1}.



Obr. 37 Příklad 10

Naked triples – viditelná trojice

Příklad 11: A2, A3, A7 obsahují podmnožinu {3,5,6}, což znamená, že čísla z této množiny nemohou být v jiných políčkách než A2, A3, A7. Můžeme odstranit 3,5 a 6 z jiných políček.



Obr. 38 Příklad 11

Nutno podotknout, že není podmínkou, aby alespoň jedno políčko obsahovalo všechna čísla množiny {3,5,6}. I v případě, že A3 bude obsahovat {3,6}, stále se bude jednat o naked triples.

Viditelné a skryté n-tice (naked and hidden n-tuples)

Můžeme zobecnit vlastnosti popsaných dvojic a trojic do viditelných a skrytých n-tic.

Pokud **n políček** obsahuje pouze čísla $\{a_1,\ldots, a_n\}$, tato čísla lze **odstranit z jiných políček** entity.

Pokud **n čísel** $\{a_1,\ldots, a_n\}$ jsou obsazený pouze v **n políčkách** v entitě, pak lze **odstranit všechna ostatní čísla z těchto políček**.

Přesný význam **viditelná – neviditelná n-tice**:

Viditelná n-tice - n buněk obsahuje pouze n čísel, skrytá n-tice znamená, že n čísel je obsaženo pouze v n buňkách. Viditelná n-tice umožňuje odstranění n čísel z ostatních políček. Skrytá n-tice umožní odstranit ostatní čísla z n políček, skrytá n-tice se stává viditelnou.

Row Claim – řádek nárokuje číslo

Příklad 12: V řádku B je omezen výskyt čísla 2 pouze na čtverec 3, číslo 2 může být pouze na B7, B8, B9. Ostatní čísla 2 jako možné kandidáty lze odstranit.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A							125 7	258	279
B	136 79	489	5	134 679	8	136 7	126 79	259	236 79
C							4	125 89	236 79

Obr. 39 Příklad 12

Box Claim – čtverec nárokuje číslo

Příklad 13: Číslo 4 se objevuje jako kandidát v políčkách prvního čtverce a tato políčka se nachází v jednom řádku C. Pak tato čtyřka jako kandidát může být odstraněná ze všech ostatních políček stejného řádku. To samé platí pro sloupec.

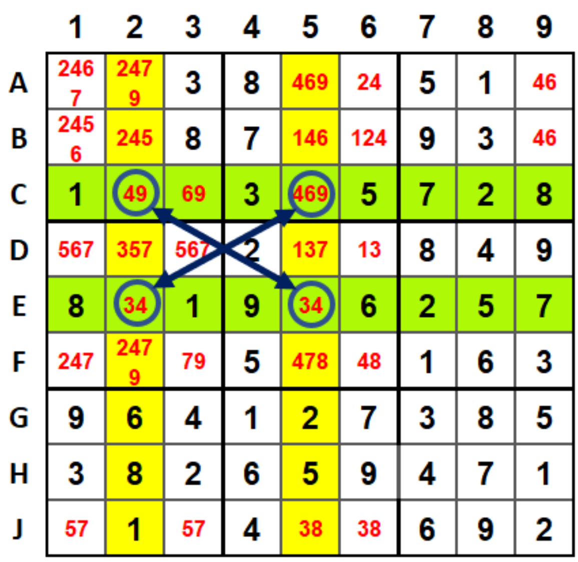
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3	8	9	127	5	127	124 67	124 67	124 6
B	6	5	127	4	127 8	127 8	9	127 8	7
C	124 7	124 7	124 7	6	123 789	123 789	12~~4~~ 578	12~~4~~ 578	12~~4~~ 578

Obr. 40 Příklad 13

X – Wing – technika obdélníku, X -křídlo

Předpokládejme, že číslo ***x*** se vyskytuje jako kandidát pouze dvakrát ve dvou řádcích (sloupcích) a že tyto dva výskyty jsou ve stejných sloupcích (řádcích). Pak ***x*** se nemůže vyskytovat nikde jinde v těchto dvou sloupcích (řádcích).

Příklad 14: v řádku C a v řádku E ve sloupcích 2 a 5 se objevuje jako kandidát číslo 4, pouze na těchto dvou místech, **nikde jinde v řádku C a v řádku E nejsou**. Z toho plyne, že pokud 4 bude na C2, nutně bude na E5 a naopak, pokud 4 bude na C5, pak nutně bude na E2. Každopádně, číslo 4 bude ve sloupci 2 a sloupci 5 buď na řádku C nebo na řádku E. Nikde jinde být nemůže, proto ostatní kandidáty 4 ve sloupcích 2 a 5 lze odstranit. **Pokud kandidát**, o kterém uvažujeme, v našem případě 4, **se vyskytne i na jiných pozicích v řádku, techniku X-Wing nelze použít.**



Obr. 41 Příklad 14

Swordfish – technika „mečoun“

Jedná se o trojité X-Wing. Předpokládejme, že číslo ***x*** se vyskytuje jako kandidát nejvýše třikrát ve třech řádcích (sloupcích) a že tyto výskyty jsou ve stejných sloupcích (řádcích). Pak ***x*** se nemůže vyskytovat nikde jinde v těchto třech sloupcích (řádcích). Na rozdíl od X-Wing Swordfish neformuje obdélník a pracuje se šesti kandidáty.

Příklad 15: V řádcích B, E, F se vyskytuje jako kandidát číslo 1, toto číslo se nachází zároveň ve sloupcích 1, 5 a 7. Jsou to políčka B1, B7, E5, E7, F1 a F5. Pomůcka – když dokážete spojit veškerá políčka s kandidáty do uzavřené smyčky, jedná se o Swordfish, lze tedy odstranit veškeré jedničky ze sloupců, ve kterých se nachází uvedená políčka. Políčka, ze kterých lze 1 odstranit, jsou vyznačené žlutě. Možné kombinace umístění čísla 1 jsou B1, F5, E7 nebo F1, E2, B7.

XY-Wing (také Y-Wing) – technika XY-křídlo

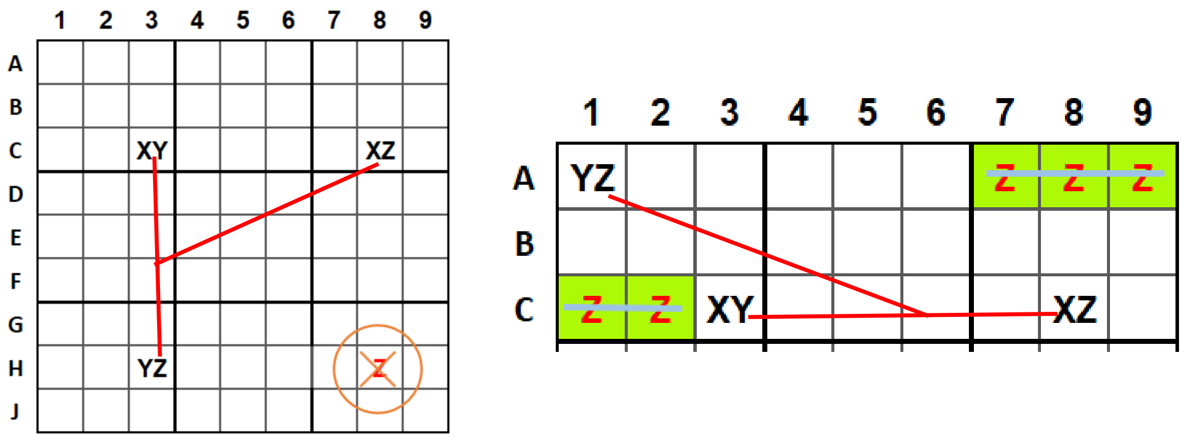
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	16	2	17	5	3	8	9	176
B	17	8	3	4	9	6	17	2	5
C	176	5	9	12	8	27	4	3	16
D	163	16	5	9	4	27	173	8	12
E	2	7	8	6	13	5	13	4	9
F	13	4	4	27	13	8	5	6	

Obr. 42 Příklad 15

Jako X-Wing a Swordfish je to technika vylučovací, která tvoří určitý vzorec (pattern) rozložení kandidátu. Mějme tři políčka, ve kterých jsou vždy právě dva kandidáti ve tvaru ***xy, yz, xz***. Jedno políčko, pivot, s kandidáty ***xy***, je spojený s dalšími dvěma políčky ***yz***, ***xz*** společnou entitou, to znamená, že pivot se nachází v jedné entitě (řádku, sloupci, čtverci) s každým z těchto dvou políček. Přičemž políčka ***yz*** a ***xz*** nemají nic společného. Pivotu se také říká „kmen“ Y, další dvě políčka jsou jeho „větve“.

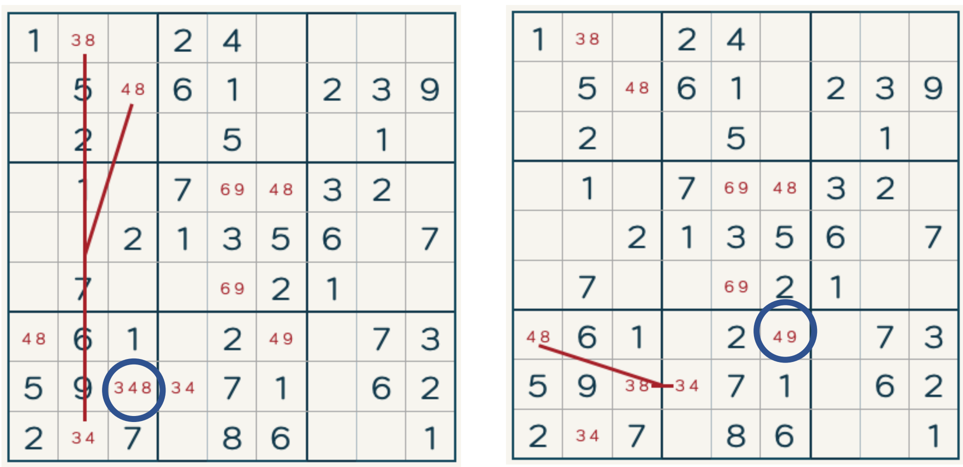
Následující obrázek znázorňuje vyloučení čísla ***z*** jako možného kandidáta. Kandidáti ***xy*** se nachází v jednom řádku s ***xz*** a v jednom sloupci s ***yz***, přičemž ***yz*** a ***xz*** společnou entitu nemají. Podmínka je splněná. Pokud na C3 je číslo ***x***, pak na C9 je nutně ***z***, což vylučuje možného kandidáta ***z*** na H8. Pokud na C3 je ***y***, pak na H3 je nutně ***z***, což opět vylučuje ***z*** jako možného kandidáta na H8. XY-Wing nemusí nutně pravý úhel, dostačující je splnění podmínek výše uvedených.

Rozložení nemusí být pravoúhlé, dostačující je splnění podmínek. V další ukázce z obr. 46 ***xy*** se nachází v jednom řádku s ***xz*** a v jednom čtverci s ***yz***, přičemž ***yz*** a ***xz*** společnou entitu nemají. Dle stejné logiky vzniká možnost odstranění všech čísel ***z*** jako kandidátů v řádku A a C.



Obr. 44 XY-Wing

Příklad 16: Řešením prvního XY-Wing eliminujeme číslo 4, vzniká další XY-Wing, který je náročnější na odhalení. Ten umožní odstranit číslo 4 a zbude pouze 9.



Obr. 43 Příklad 16

Existují i další techniky pro řešení nejvyšších úrovní obtížnosti. Zmíněné techniky budou pro naši potřebu dostačující. Nejsložitějším úkolem je rozeznat vzor a správně použít odpovídající techniku. Pokud vše selže a máme pocit, že jsme se zasekli, použijeme důkaz sporem. Vybereme jednoho možného kandidáta a pokračujeme v luštění. Když vyřešíme celou mřížku, našli jsme řešení. Pokud předpoklad vede k rozporu, vyškrtneme toto číslo ze seznamu kandidátů a bereme v úvahu další. Je možné, že bude potřeba projít vícero takových „větvení“. Někteří tento způsob neuznávají a tvrdí, že se nejedná o logiku, ale hádání. Nicméně, platná logika to je a vyžaduje trpělivost s tužkou a papírem.

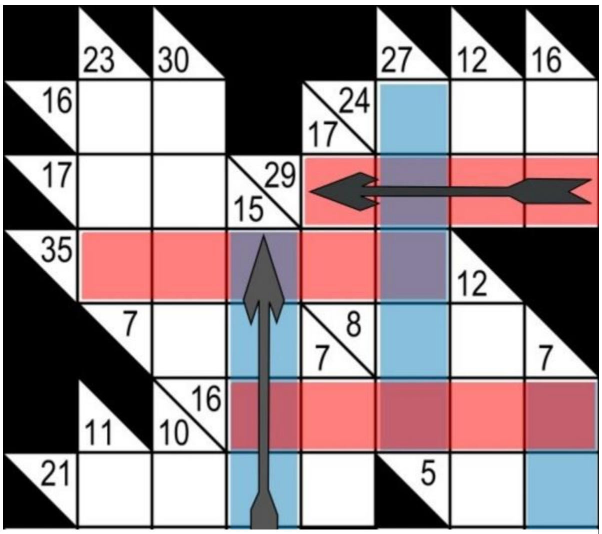
2 Kakuro

2.1 Úvod do Kakuro

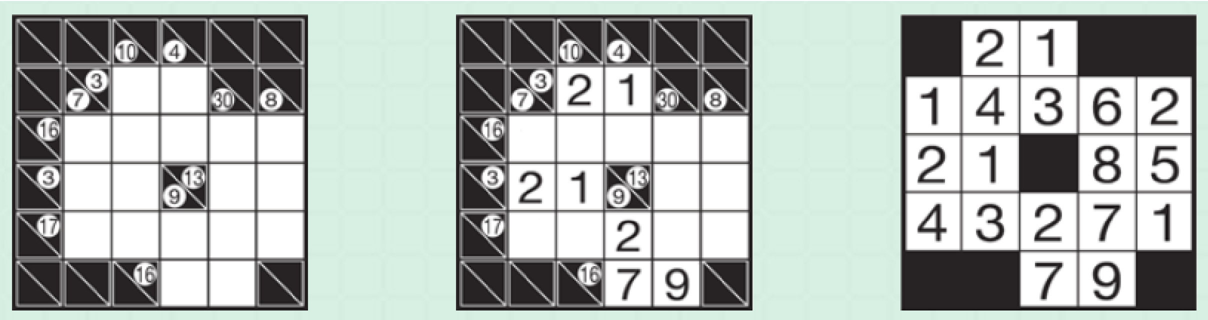
Kakuro, jak i Sudoku, je logická hra s čísly. Je také známá pod názvy Cross Sums, Cross Addition, CrossSam, Tashizan Cross, Tashizan puzzle, Kakkuro, Kasan Kurosu, Samcro, KaKuRo, Croco Puzzle, Zahlenschwede, Zahlenschwedenrätsel, Kreuzsummenrätsel, Careul Sumelo. Tato hra je často přirovnávána k Sudoku, avšak přestože obě hry sdílejí některé společné rysy, jako je například využití mřížky a čísel, strategie a průběh hry jsou odlišné. Podobně jako v Sudoku se ve hře Kakuro pro vyplnění prázdných políček využívají čísla od 1 do 9. Se Sudoku má hra společnou také podmínku neopakovatelnosti, která znamená, že čísla v řádcích a sloupcích se nesmí opakovat. Mřížka Kakuro však může být nepravidelná, na rozdíl od Sudoku, kde mřížka má tvar čtverce. Můžeme se setkat s obrazci mnoha typů, mřížka Kakuro připomíná klasickou křížovku. Původní název hry Cross Sums také nasvědčuje tomu, že hra byla zamýšlená jako křížovka s čísly, prototypem tedy je skutečně slovní hlavolam (Kakuro history, 2023).

Řádky a sloupce v terminologii hry Kakuro označujeme jako segmenty, a to hlavně proto, že jeden řádek nebo sloupec může mít více segmentů (více skupin prázdných políček).

Mřížka hlavolamu Kakuro je rozdělena na bílá a černá (nebo tmavá) políčka. Černá políčka jsou rozdělena úhlopříčkou a, podobně křížovkám, obsahují vodítka – číselné klíče pro segmenty, které se nacházejí vpravo nebo pod nimi. Klíče mohou být dvouciferné a představují sebou součet čísel v odpovídajícím segmentu. Součet čísel ve vodorovném segmentu se musí



Obr. 45 Číselný klíč a odpovídající segment



Obr. 46 Ukázka zadání, průběhu a hotové řešení Kakuro ze stránek nakladatelství Nikoli

rovnat klíči nad úhlopříčkou v černém políčku vlevo od segmentu; podobně součet čísel ve svislém segmentu se musí rovnat číslu pod úhlopříčkou v černém poli v horní části segmentu.

Počet políček u klíče udává kombinaci čísel, při sečtení kterých obdržíme součet, uvedený klíčem. Například, na obr. 46 číslo 16 ve druhém segmentu shora obdržíme součtem pěti čísel, říkáme „16 na 5“, kdežto to v posledním segmentu musíme využít kombinaci dvou čísel – „16 na 2“ (Chisholm, 2006).

Cílem hry je vyplnit bílá políčka čísly od 1 do 9 tak, aby součet čísel v každém řádku nebo sloupci odpovídal číslu uvedenému v příslušném černém políčku. Navíc, v každém řádku nebo sloupci se nesmí opakovat žádné číslo. Například pro cílový součet 4 lze použit kombinaci 3 a 1, nikoliv 2 a 2. Čísla v řádku nebo sloupci se mohou zadávat v libovolném pořadí, například čísla pro součet sedmi se mohou objevit v pořadí 1-2-4, 1-4-2, 2-1-4, 2-4-1, 4-1-2 nebo 4-2-4.

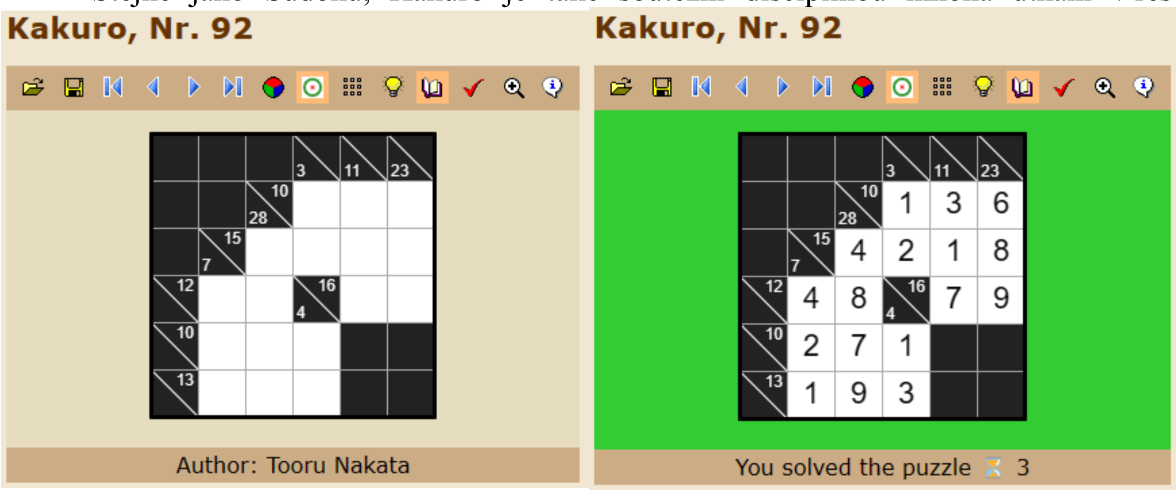
Na rozdíl od křížovky, kde stejné slovo se nemůže objevit několikrát, v Kakuro stejný klíč se často objeví vícekrát. Přestože pro daný klíč může existovat více možných kombinaci čísel, pouze jedná je správná. Jako u Sudoku, platí – správně sestavený hlavolam Kakuro má pouze jedno řešení, ke kterému lze dojít logickou cestou a není potřeba hádat.

Kakuro je hra, která vyžaduje strategické myšlení a matematické dovednosti, při luštění se používají matematické operace. Hráči musí používat dedukci a kombinatoriku, aby našli správné kombinace čísel, které splňují požadavky hry. Kakuro také poskytuje významnou mentální výzvu, protože často existuje mnoho možných řešení, která je třeba prozkoumat.

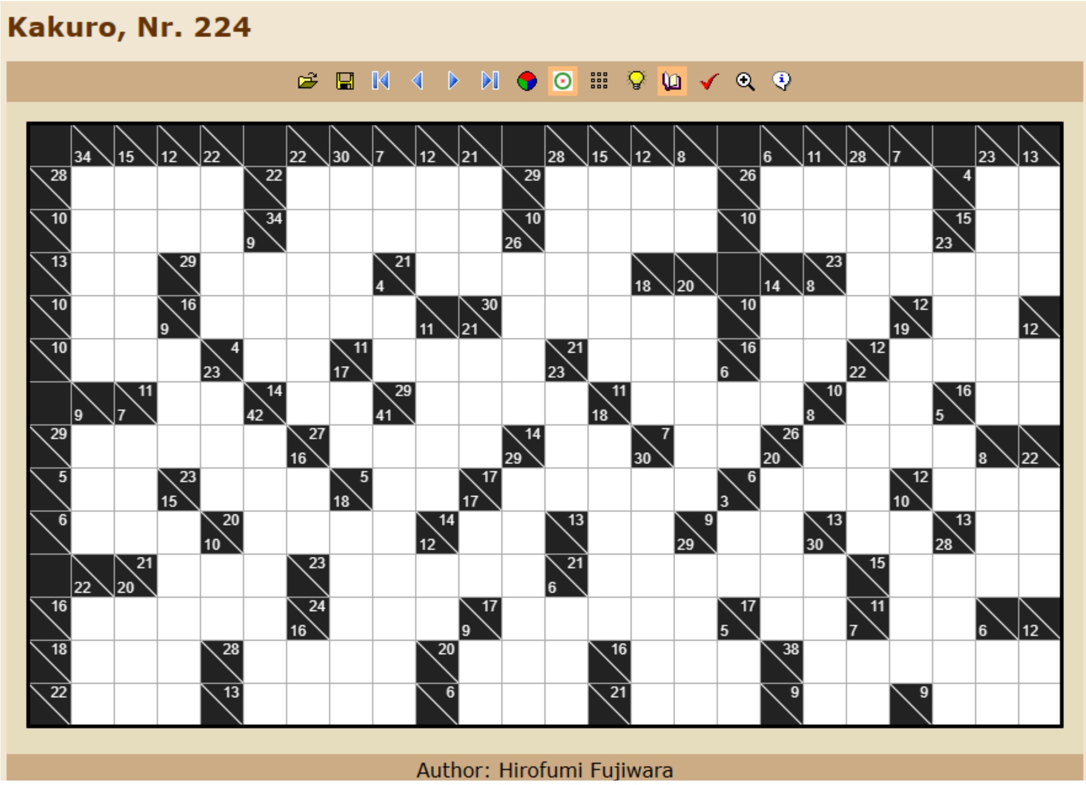
Hlavolam je nezřídka součástí sbírek logických her a hlavolamů. Je také často zahrnut v novinách a časopisech po celém světě. Hra je dostupná v digitální formě na mnoha webových stránkách a jako aplikace pro mobilní zařízení.

Hlavolamy Kakuro mohou mít různou obtížnost, od snadné až po těžkou. Obtížnost Kakuro závisí na počtu políček v mřížce, počtu zadaných nápověd a složitosti číselných kombinací potřebných k vyřešení hádanky. Například A. Chisholm ve sbírce rébusů Kakuro je dělí na čtyři úrovně: báječnou, záškodnickou, záludnou a děsivou. V jiné sbírce hlavolamů (z anglického originálu The Virgin Book of Kakuro) jsou úrovně tři – snadné rébusy, středně obtížné rébusy a obtížné rébusy (Chisholm, 2006; Kakuro, 2006). Nicméně, zařadit hádanky podle obtížnosti není úplně snadné. Neexistuje pro to žádná obecně uznávaná metoda, proto se jednoduše může stát, že hlavolam, označovaný za středně těžký, jinde bude pod značkou „lehký“.

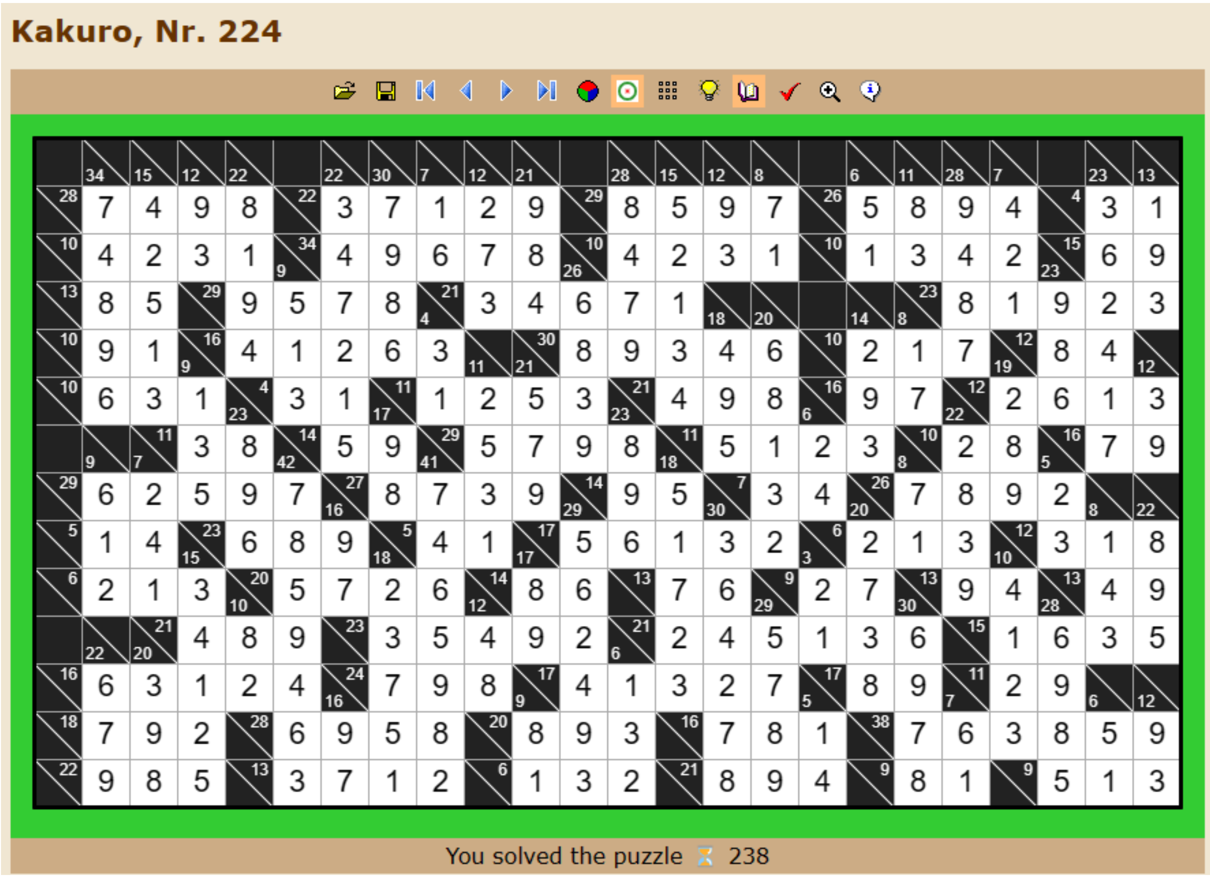
Stejně jako Sudoku, Kakuro je také soutěžní disciplínou mnoha utkání v řešení logických úloh. Soutěže mohou být individuální nebo týmové, online nebo prezenční. Mohou zahrnovat různé úrovně obtížnosti a velikostí mřížek. Některé soutěže mohou mít také časový limit, v němž musí účastníci dokončit co nejvíce hádanek. Většinou soutěže probíhají pod hlavičkou Sudoku a jiné logické hry nebo Sudoku a Kakuro. Například dříve zmiňovaný festival, který pořádá Czech Open Pardubice, každoročně zařazuje Kakuro na seznam logických her.



Obr. 47 Hlavolam na webu janko.at, zařazený do kategorie "lehký"



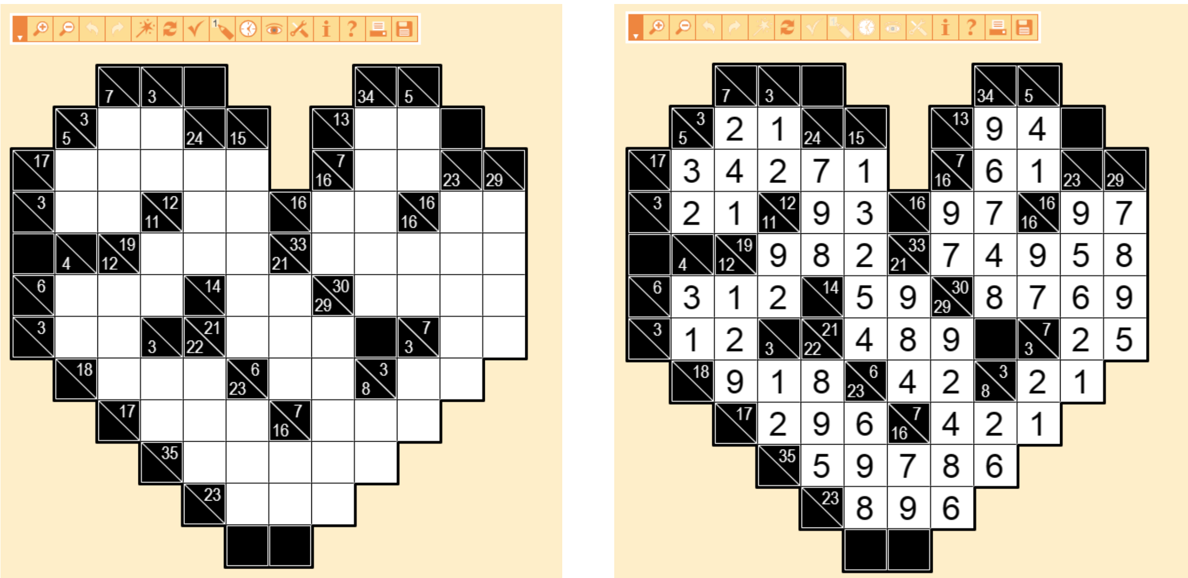
Obr. 49 Složitý hlavolam Kakuro ze stránek janko.at



Obr. 48 Řešení složitého hlavolamu

Kromě soutěží v řešení samotné logické úlohy Kakuro probíhají soutěže v kódování a programování. V rámci soutěže „Classic Coding Competition“ jsou účastníci vyzváni řešit kvantovou verzi hlavolamu Kakuro, kde jsou přidány nová omezení. Například, každá prázdná buňka by měla obsahovat číslo od 0 do 3 a nelze přiřazovat pevné hodnoty proměnným ani manuálně řešit hádanku. Definice proměnných a omezení je ponechána na řešitelích“, pokud zůstávají věrné původnímu problému. Pro nalezení řešení problému se používá Groverův algoritmus (https://www.classiq.io/competition/kakuro). Příklad soutěžní práce Solving Classiq Coding Competition with the Wolfram Quantum Framework, Nikolay Murzin zde: https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/2550740.

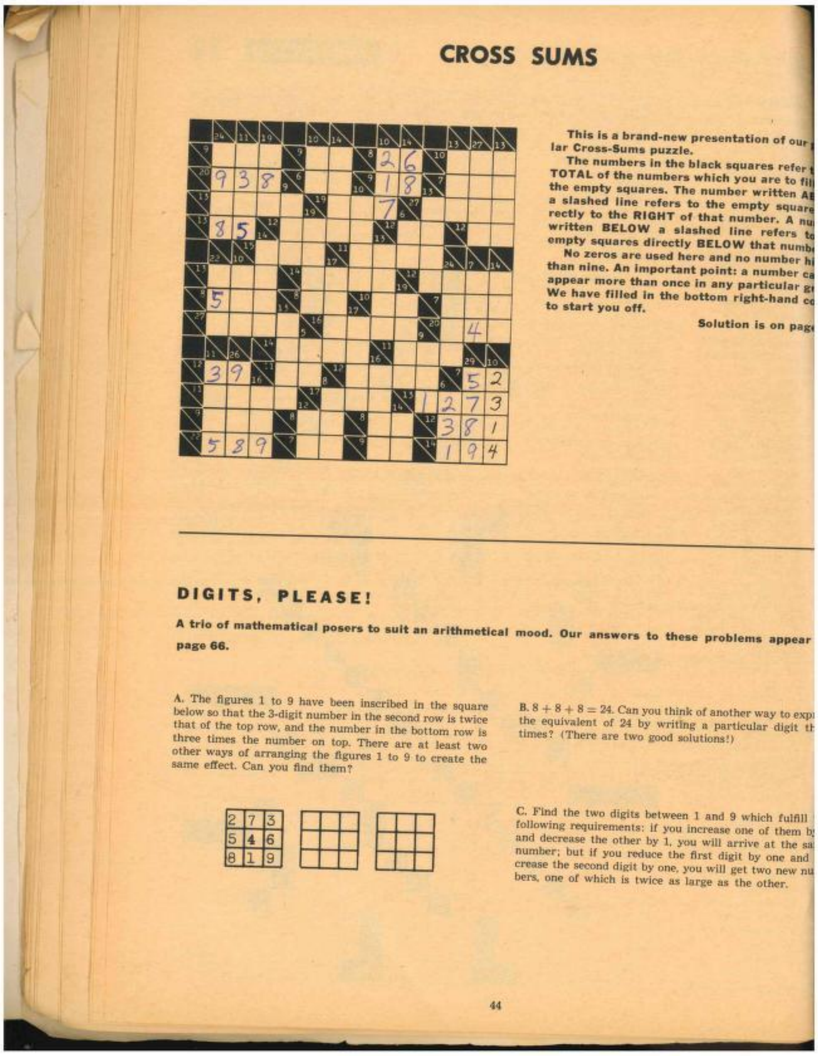
Varianty Sudoku se od sebe liší délkou segmentů, množstvím klíčů a také tvarem. Nadšenci hlavolamů při tvorbě hodně dbají na estetickou stránku a usilují o dodržení symetrického uspořádání.



Obr. 50 Zadání a řešení Heart Kakuro, https://www.conceptispuzzles.com/

2.2 Historie a současnost Kakuro

Cesta Kakuro začala v červenci 1966, kdy časopis Dell Official Crossword Puzzles nabídl luštitelům zbrusu nový hlavolam s názvem Cross Sums. S touto číselnou podobou křížovky přišel zaměstnanec Dell kanadský stavební konstruktér Jacob E. Funk.Od té doby



CROSS SUMS

This is a brand-new presentation of our
lar Cross-Sums puzzle.

The numbers in the black squares refer
TOTAL of the numbers which you are to fi
the empty squares. The number written A
a slashed line refers to the empty square
rectly to the RIGHT of that number. A nu
written BELOW a slashed line refers t
empty squares directly BELOW that numb

No zeros are used here and no number h
than nine. An important point: a number c
appear more than once in any particular g
We have filled in the bottom right-hand c
to start you off.

Solution is on pag

DIGITS, PLEASE!

A trio of mathematical posers to suit an arithmetical mood. Our answers to these problems appear page 66.

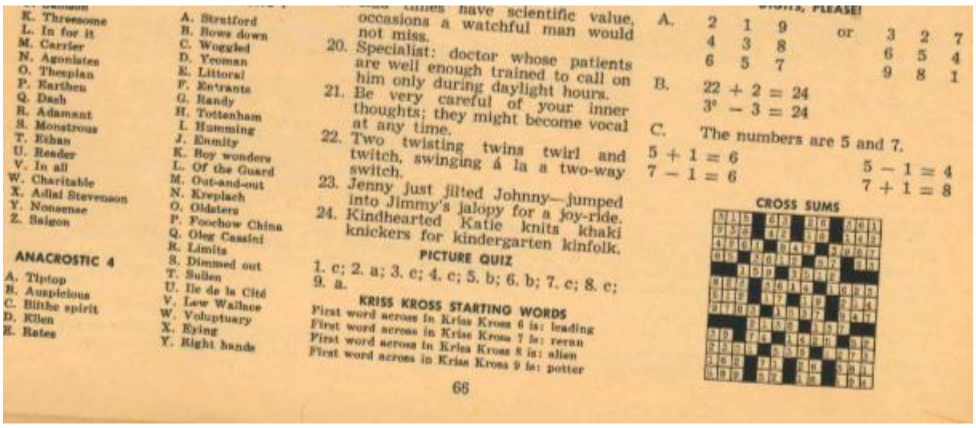
A. The figures 1 to 9 have been inscribed in the square below so that the 3-digit number in the second row is twice that of the top row, and the number in the bottom row is three times the number on top. There are at least two other ways of arranging the figures 1 to 9 to create the same effect. Can you find them?

2	7	3
5	4	6
8	1	9

B. 8 + 8 + 8 = 24. Can you think of another way to exp
the equivalent of 24 by writing a particular digit t
times? (There are two good solutions!)

C. Find the two digits between 1 and 9 which fulfill
following requirements: if you increase one of them b
and decrease the other by 1, you will arrive at the sa
number; but if you reduce the first digit by one and
crease the second digit by one, you will get two new nu
bers, one of which is twice as large as the other.

44



K. Threesome
L. In for it
M. Carrier
N. Agonistes
O. Thespian
P. Earthen
Q. Dash
R. Adamant
S. Monstrous
T. Ethan
U. Reader
V. In all
W. Charitable
X. Adlai Stevenson
Y. Nonsense
Z. Saigon

ANACROSTIC 4

A. Tiptop
B. Auspicious
C. Blithe spirit
D. Ellen
E. Rates

A. Stratford
B. Bows down
C. Woggled
D. Yeoman
E. Littoral
F. Entrants
G. Randy
H. Tottenham
I. Humming
J. Enmity
K. Boy wonders
L. Of the Guard
M. Out-and-out
N. Kreplach
O. Oldsters
P. Foochow China
Q. Oleg Cassini
R. Limits
S. Dimmed out
T. Sullen
U. Ile de la Cité
V. Lew Wallace
W. Voluptuary
X. Eying
Y. Right hands

have scientific value, occasions a watchful man would not miss.

20. Specialist: doctor whose patients are well enough trained to call on him only during daylight hours.
21. Be very careful of your inner thoughts; they might become vocal at any time.
22. Two twisting twins twirl and twitch, swinging á la a two-way switch.
23. Jenny just jilted Johnny—jumped into Jimmy's jalopy for a joy-ride.
24. Kindhearted Katie knits khaki knickers for kindergarten kinfolk.

PICTURE QUIZ

1. c; 2. a; 3. c; 4. c; 5. b; 6. b; 7. c; 8. c; 9. a.

KRISS KROSS STARTING WORDS

First word across in Kriss Kross 6 is: leading
First word across in Kriss Kross 7 is: reran
First word across in Kriss Kross 8 is: alien
First word across in Kriss Kross 9 is: potter

66

DIGITS, PLEASE!

A. 2 1 9 / 4 3 8 / 6 5 7 or 3 2 7 / 6 5 4 / 9 8 1

B. $22 + 2 = 24$

$3^3 - 3 = 24$

C. The numbers are 5 and 7.

$5 + 1 = 6$ $\quad$ $5 - 1 = 4$

$7 - 1 = 6$ $\quad$ $7 + 1 = 8$

CROSS SUMS

Obr. 51 str. 44 časopisu Official Crossword Puzzles z července 1966, kde byla poprvé opublikována hra Cross Sums a řešení na str.66

Cross Sums hlavolamy se pravidelně objevovaly na stránkách časopisů Dell a Games v USA a jiných státech. Hlavolam Kakuro prošel podobnou cestu jako Sudoku (Kakuro history, 2023).

Deník The Guardian v článku „The new grid on the block" popisuje zajímavý souběh okolnosti, díky kterému hra Kakuro jako taková vznikla a pokořila celé Japonsko. V roce 1980 Maki Kaji, o kterém jsem se zmiňovala již dříve, byl na výletě v USA, kde krátil čas svojí vášní pro dostihy. Zálibě v koních konkurovala pouze láska k hlavolamům, a tak Maki Kaji na cestu zpět si pořídil americkou sbírku křížovek. Ovšem kvůli špatné angličtině nemohl křížovky luštit, když si všiml osamělého číselného hlavolamu pod názvem Cross Sums. V Japonsku začal navrhovat vlastní verzi Cross Sums, která měla tak obrovský úspěch, že se pomalu podobala posedlosti (The new grid on the block, 2011).

Kaji svoji verzi pojmenoval Kasan Kurosu (加算クロス), první slovo v japonštině znamená „sčítání" a druhé je přepisem japonské výslovnosti slova „cross". O šest let později, v roce 1986, tento název zkrátil na snadno zapamatovatelné Kakkuro, neboli Kakuro. Hra je o něco náročnější než Sudoku, ale je stejně návyková pro své fanoušky v Japonsku opět hlavně kvůli tomu, že se jedná o čísla, ne slova. Úspěch hry Kakuro vytvořil vlastní průmysl, Nikoli, nejznámější japonské nakladatelství logických knih, prodalo do roku 2005 více než milion výtisků Kakuro. Podle Maki Kaji bylo Kakuro nejpoužívanějším hlavolamem nakladatelství Nikoli v letech 1986 až 1992, kdy ho předstihl hlavolam Sudoku (Kakuro - Rules and strategy of puzzle games, 2022).

V roce 2005 Kakuro představili čitatelům deníky The Guardian a The Daily Mail. Právě v těchto letech zažila hádanka Kakuro největší úspěch, kdy bylo vydáno velké množství knih a sbírek, věnujících se Kakuro. Knihy Kakuro byly také vystaveny na Frankfurtském knižním veletrhu 2005. V současné době hra Kakuro se pravidelně objevuje v tisku jako denní příloha nebo také jako sbírka hlavolamů (Kakuro, 2006).

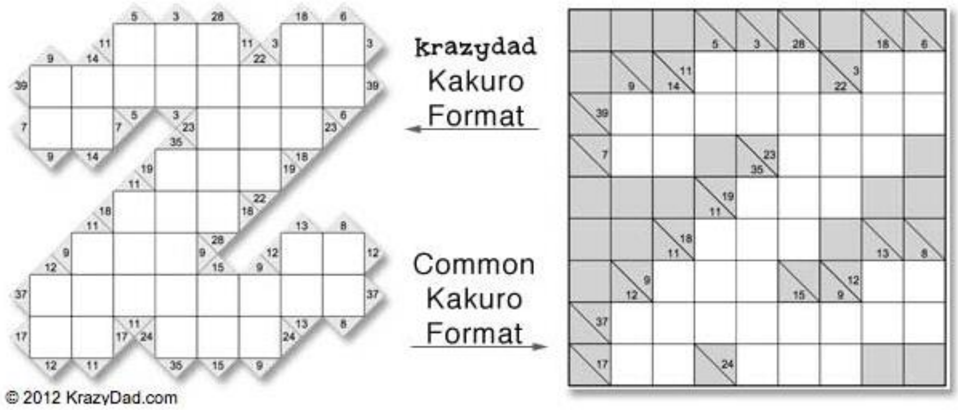
Popularita hry Kakuro také podpořila komunikaci v oblasti hlavolamů mezi britskými a japonskými nadšenci, které spojuje společná vášeň do logických hádanek. Navzdory použití čísel je Kakuro zkouškou logiky, což ho činí atraktivním pro lidi všech věkových kategorií a úrovní dovedností.

Kakuro je také předmětem bádání a vědeckých výzkumů. Většina se zabývá efektivními způsoby řešení, algoritmy, používanými při sestavení a řešení, strojovým učením, umělou inteligenci, inteligenci hejna, aplikaci rekurentních relačních sítí (RRN) pro řešení hádanek a experimentální ověřování funkčnosti a účinnosti. Kakuro, jako NP-úplný problém řešení, což znamená, že je obecně výpočetně obtížně řešitelný, slouží pro modelování a simulaci dat ve formě číselných kombinací (Developing a Kakuro Puzzle Solver Using Swarm Intelligence, Wen-Li Wang , Matthew Shuster , Mei-Huei Tang). Programátoři pracují na technice rozpoznávání hlavolamu v tištěné a psané podobě, přenesení do digitální podoby a následném řešení hlavolamu (např. End-to-end system for recognizing and solving Kakuro puzzles, Sameep Bagadia a Nihit Desai).

Opět s pokrokem v oblasti IT většinu hlavolamů pro tisk a webové stránky generují počítačové programy. Jelikož poptávka po roce 2005 byla velmi vysoká, začaly se šířit jako lavina nekvalitní hádanky. Některé programy pro sestavení hlavolamu používají algoritmus brute-force, jinak hrubou sílu, pak tento hlavolam je velmi těžké vyřešit bez pomocí počítače pouze lidským uvažováním. Taktéž nekvalitně generované hlavolamy nemají elegantní a vkusný vzhled, vypadají jako čísla náhodně rozmístěné na mřížce. Nicméně, jako i v případě Sudoku, za opravdovou lahůdku se považuje ručně tvořený hlavolam, který vždy vytváří symetrický obrazec a dopřává luštiteli estetický zážitek (Kakuro Trivia, 2023).

Thomas Snyder, o kterém jsem se také zmiňovala v kapitole o Sudoku, nezabývá se pouze tímto hlavolamem, ale je také tvůrcem dalším hádanek, mezi jinými i Kakuro. Je zakladatelem webu Grandmaster Puzzles, který spojuje celou komunitu nadšených luštitelů a tvůrců hlavolamu (https://www.gmpuzzles.com/). „Grandmaster Puzzles se nad tuto záplavu (nekvalitních hlavolamů) povznáší elegantními, ručně vytvořenými návrhy, jejichž autory jsou jedni z nejlepších světových konstruktérů puzzle. Grandmaster Puzzle může vynikat svým vizuálním vzhledem - ohromí vás, protože zdánlivé umělecké dílo slouží jako dvojnásobný hlavolam. Může vynikat svými kroky při řešení - s jedinečnou logickou cestou, která ve vás vyvolává dojem, že při rozplétání každé nové vrstvy čtete myšlenky konstruktéra. Grandmaster Puzzle bude především vynikat mezi ostatními logickými hádankami a dopřeje vaší mysli nesčetné potěšení.“ přesvědčují zakladatele webu (Grandmaster Puzzles, 2023).

Dalším zajímavým projektem je KrazyDad (https://krazydad.com/), které vytvořil Jim Bumgardner, programátor, hudebník, umělec, tvůrce hlavolamů, učitel s vášni pro tvorbu software a softwarových hráček. Tvůrce předkládá své hádanky ve vlastním kreativním formátu a také v obvyklém tvaru.

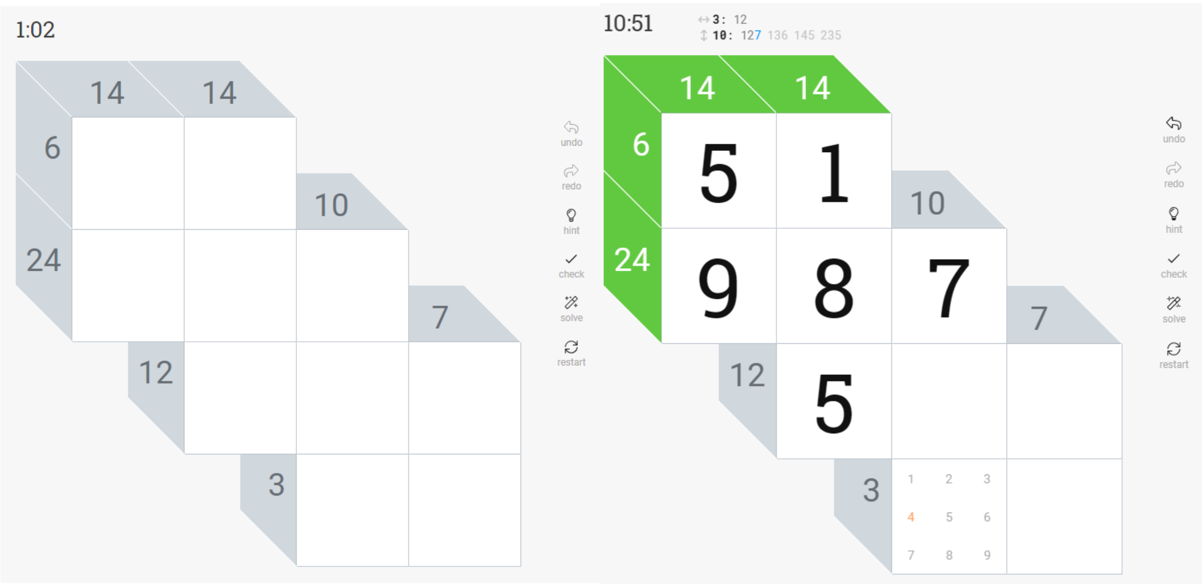


Obr. 52 Příklad zadání z webu https://krazydad.com/kakuro/

Bastien Vial-Jaime, stříbrný medailista z mistrovství světa v Sudoku a zároveň tvůrce hlavolamů, vede kanál 81 Cells na YouTube. Natáčí videa o speedsolvingu, který spočívá v co nejrychlejším řešení hlavolamů Sudoku. Podle vedoucího kanálu speedsolving je přede vším ostatním důkaz mistrovství, kdy člověk dokáže cíleně se dostat k jádru hádanky. Ačkoli tento kanál je primárně o Sudoku a jeho variantech, Bastien vytváří i jiné druhy hádanek. V další kapitole rozebereme po krocích řešení Kakuro, který Bastien Vial-Jaime opublikoval na webu http://enigm-attic.blogspot.com/.

2.3 Techniky řešení Kakuro

Níže je vyobrazená ukázka interaktivního hlavolamu. Výhoda webu https://www.kakurogame.com/ je ve velmi „čistém“ srozumitelném i pro začátečníka provedení, v průběhu hry lze zvolit úroveň a velikost mřížky, využít možné kombinace čísel, nápovědu, krok zpět, kontrolu řešení a samotné řešení. Aplikaci lze stáhnout pro iOS a Android.



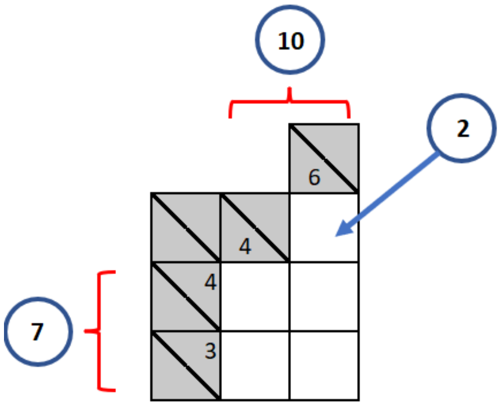
Obr. 53 Interaktivní hlavolam Kakuro z https://www.kakurogame.com/

Jedinečné součty

Již jsem se zmiňovala o klíčích neboli součtech pro daný segment. Úkolem je najít vhodnou kombinaci čísel, která v součtu dají klíč. Na obrázku 53 dolní segment má klíč 3, součet čísla 3 lze zapsat pouze jedinou možnou kombinací, a to 2 + 1. Pro segment „10 na 3“ lze použít několik kombinací: 1, 2, 7 nebo 1, 3, 6 nebo 1, 4, 5 nebo 2, 3, 5. Součet, který lze zapsat pouze jedinou možnou kombinací čísel se nazývá **jedinečný součet** (také **jednoznačný součet**, v angličtině **magic-block**). Tabulka jedinečných součtů je velkým pomocníkem při luštění. Nejkratší jednoznačný součet je „3 na 2“ kombinace 1,2, tudíž i nejkratší segment musí mít nejméně dvě políčka. Nejdelší segment má devět políček, největší možný součet je „45 na 9“ (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +7 + 8 + 9), který je také jedinečným součtem. Kromě tabulky jedinečných součtů využívám tabulku všech možných součtů, případně její část. Výše zmíněný interaktivní hlavolam zobrazuje možné součty v průběhu řešení. Jedinečné součty při opakovaném používání se velmi rychle zapamatovávají. Tabulku součtů uvedu v příloze.

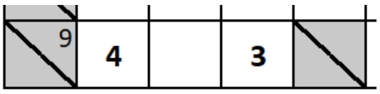
Rozdíl součtů

Na obr. 54 je znázorněná další technika – **rozdíl součtů v segmentech**. Segmenty s klíči 4 a 6 dávají v součtu 10. Segmenty s klíči 4 a 3 dávají dohromady 7. První políčko v segmentu s klíčem 6 je osamocené a rovná se rozdílu součtů, tj. 2 (10 – 7 = 2).



Obr. 54 Rozdíl součtů

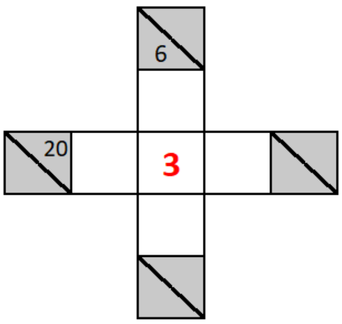
Osamělé políčko



Obr. 55 Osamělé políčko

Na obr. 55 v segmentu zůstalo jen jedno prázdné políčko. V tomto případě jeho hodnota se bude rovnat rozdílu klíče a součtu hodnot vyplněných políček segmentu, 9 – (4 + 3) = 2.

Jedinečné průsečíky (cross reference)



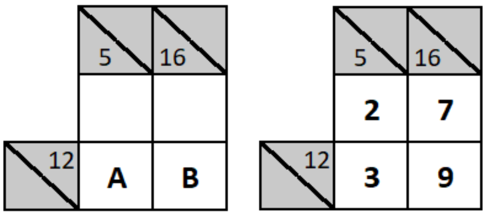
Obr. 56 Jedinečné průsečíky

Segmenty s klíči 20 a 6 se kříží (obr. 56) a mají společné jedno políčko. Klíč 6 má jedinečný součet (1 + 2 + 3), kdyžto „20 na 3" má několik kombinací (3,8,9 nebo 4,7,9 nebo 5,6,9 nebo 5,7,8). Jediné společné číslo v obou sadách kombinací je 3, proto musí být průsečík 3.

Snižování počtu kombinací (combo reference)

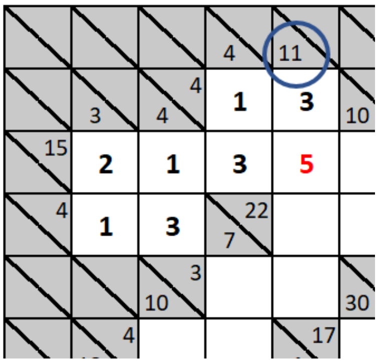
Pro segment „12 na 2“ existují následující kombinace: ({3,9}, {4,8}, {5,7}). První políčko A protíná segment „5 na 2“ s kombinacemi 1,4 a 2,3. Vzhledem k tomu, že se v nich neobjevuje ani 5, ani 7, nebude připadat v úvahu kombinace 5,7 z „12 na 3“. Stále zbývají kombinace 3,9 a 4,8.

Druhé políčko B protíná segment „16 na 2“, který má pouze jednu kombinaci 7,9, a protože s kombinaci 4,8 nesdílí žádná společná čísla, můžeme tuto kombinaci odstranit, takže zůstane pouze jedna kombinace pro segment „12 na 2“, a to 3, 9 (Kakuro techniques)



Obr. 57 Snižování počtu kombinací

Uzamčené políčko

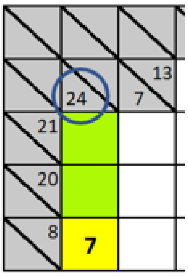


Obr. 58 Uzamčené políčko

Ve výřezu hlavolamu na obr. 58 zkoumáme segment „11 na 4“, pro který existuje jedinečný součet 1, 2, 3 a 5. Číslo 3 už je v prvním políčku, zbývají čísla 1, 2 a 5. Čísla 1 a 2 již jsou v segmentu s klíčem 15. Zbývá pouze číslo 5, žádné jiné tam být nemůže, políčko je uzamčené.

Minimální / maximální hodnota kombinace

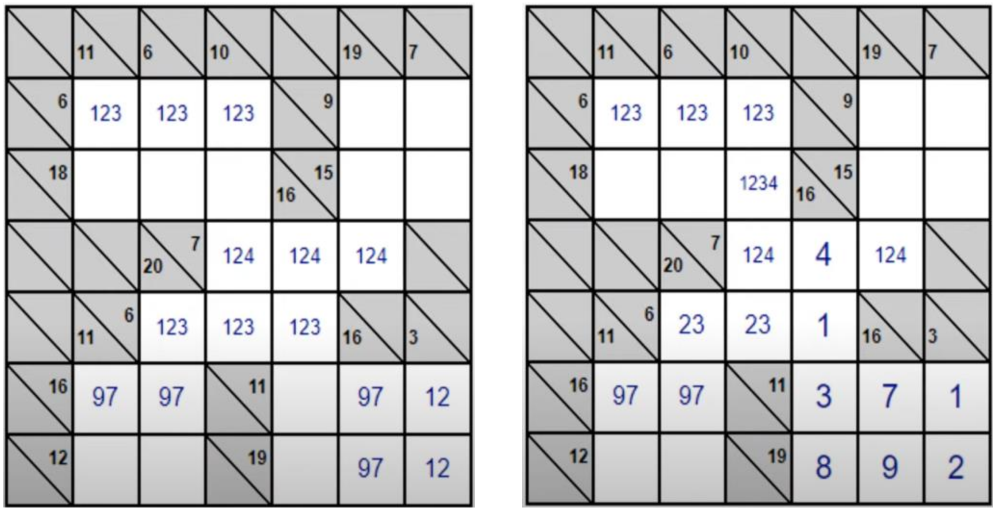
Někdy je užitečné zjistit minimální nebo maximální hodnotu z množiny hodnot součtu, kterou lze umístit do určitého políčka. Svislý segment „24 na 3“ má jedinečný součet 7, 8, 9. Je zřejmé, že do posledního políčka patří číslo s minimální hodnotou, číslo 7 (8 = 8; 9 > 8).



Obr. 59 Minimální hodnota kombinace

Vpisky (kandidáty)

Techniku vpisků, která již byla popsána v kapitole o technikách řešení Sudoku, lze využít také při řešení Kakuro. Do prázdných políček zapisujeme možné kandidáty na základě součtových kombinací a pomocí logických úvah nevhodné kandidáty postupně odstraňujeme.



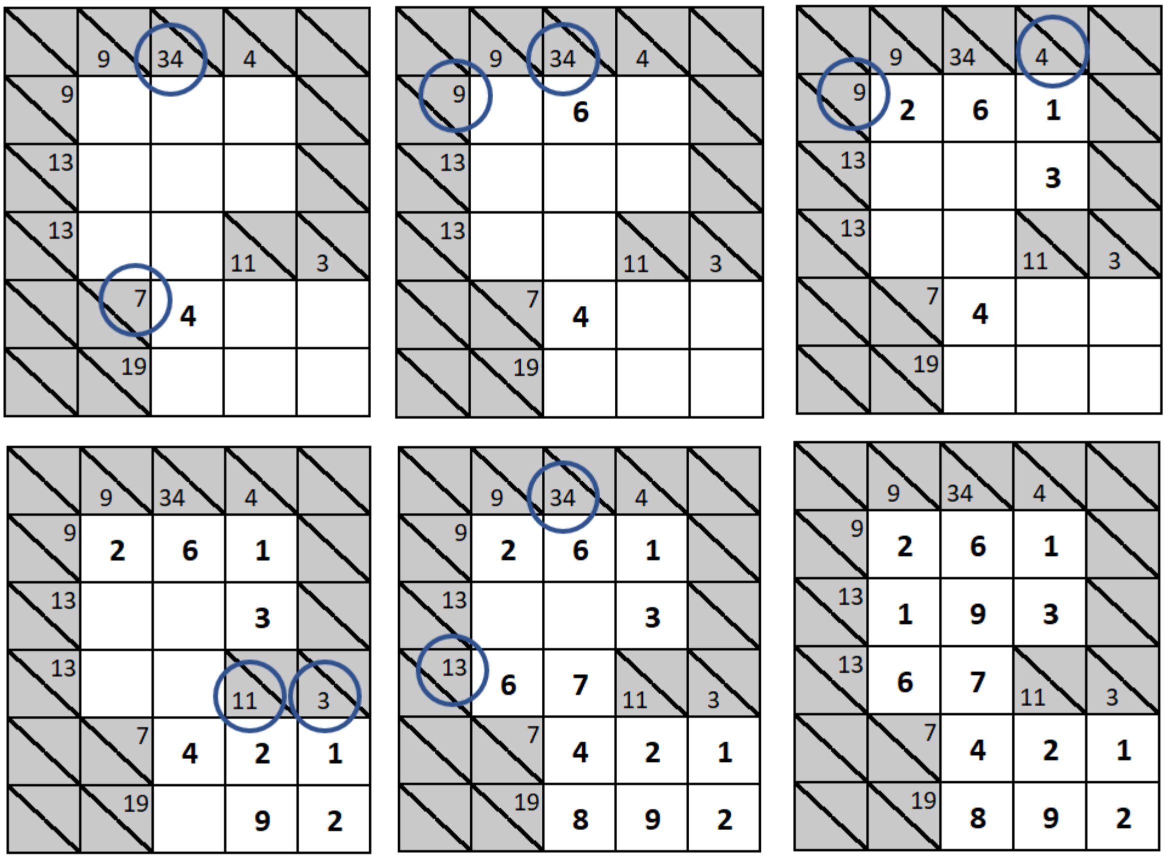
Obr. 60 Technika vpisků

TIPY PRO LUŠTITELE

1. Začněte s nejkratšími segmenty.
2. Hledejte jedinečné průsečíky.
3. Hledejte jedinečné součty a snažte se je maximálně využít.
4. Dělejte vpisky hodnot, kterých může nabývat číslo v políčku.
5. Vždy dvakrát kontrolujte, než napíšete číslo do políčka.
6. Nikdy nehádejte!
7. Pamatujte – existuje pouze jedno řešení (Why Is Kakuro Harder Than Sudoku?, 2023).
8.

2.4 Příklady řešení hlavolamů Kakuro

Postup řešení Kakuro, snadná úroveň



Obr. 61 Postupné řešení, v prvním řádku a), b), c); v druhém řádku d), e), f)

a) Segment „34 na 5“ má jedinečný součet 4, 6, 7, 8 a 9, segment „7 na 3“ pak 1, 2, 4. Jedinečným průsečíkem bude číslo 4.

b) Označený segment „9 na 3“ má kombinaci ({1,2,6}, {1,3,5}, {2,3,4}), z těchto kombinací pouze první obsahuje číslo 6, což je jedinečným průsečíkem se segmentem „34 na 5“, zároveň zbývá pouze jediná kombinace {1,2,6}.

c) Segment „4 na 2“ taktéž má jedinečný součet 1 a 3. Průsečíkem je číslo 1. Mohli bychom uvažovat i jinak: pokud jediná možná kombinace je {1,2,6} a číslo 6 už je použito, pak v prvním políčku segmentu může být buď 1, nebo 2. Ovšem 2 to být nemůže, jelikož 4 – 2 = 2, a dvakrát stejné číslo nelze použít. V úvahu připadá pouze číslo 1.

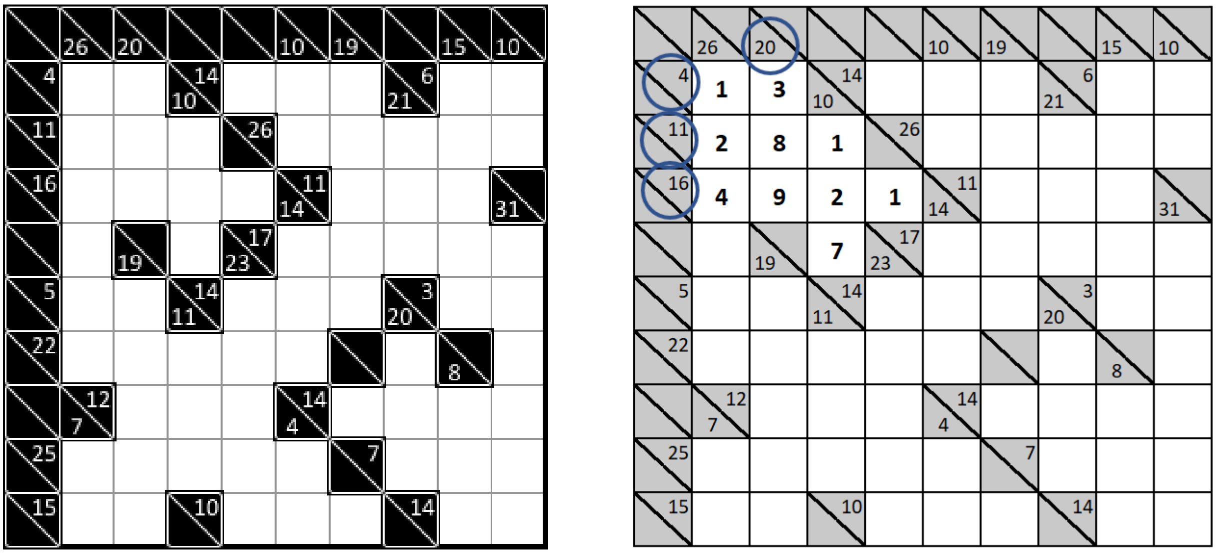
d) Segment „7 na 3“ stále má dvě prázdná políčka, do kterých patří čísla 1 a 2. Správné pořadí zjistíme pomocí následujících úvah. Segment „11 na 2“ nemůže obsahovat číslo 1, pak druhé prázdné políčko by mělo být 10, což není možné. Pokud by číslo

2 bylo v prvním políčku „3 na 2“, pak druhé políčko by mělo být 1. Pak bychom nemohli zajistit součet 19 v segmentu „19 na 3“ (19 – 1 = 18, tento součet nelze nakombinovat pomocí dvou různých jednociferných čísel).

e) V segmentu „34 na 5“ do dvou prázdných políček zbývá doplnit čísla 7 a 9. Označený segment „13 na 2“ může mít kombinace ({4,9}, {5,8}, {6,7}), odstraníme kombinaci {5,8}, neobsahuje ani jedno z čísel 7 a 9. Pokud bychom do druhého políčka „13 na 2“ umístili 9, pak v prvním políčku by měla být 4. Což není v rozporu s kombinaci {2,3,4}, kterou může mít vertikální segment „9 na 3“, ale ve zbývajícím políčku by měla být 3, to ale není možné, byly by dvě čísla 3 v jednom segmentu „13 na 3“. Takže do zkoumaného políčka umístíme číslo 7, do prvního políčka segmentu „13 na 2“ pak 6.

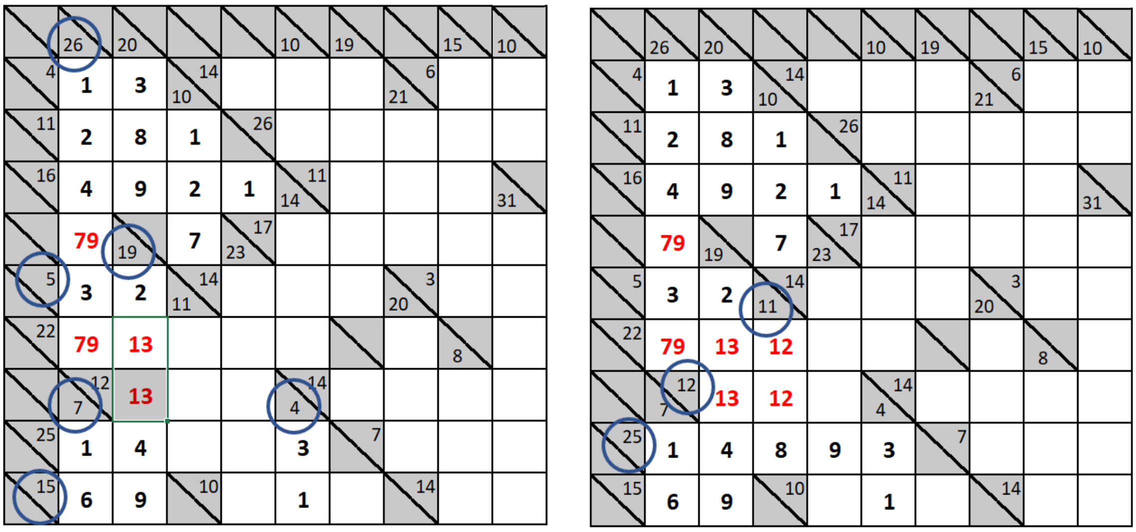
f) Doplníme zbývající dvě prázdná políčka (Kakuro - Wikimedia Commons, 2021).

Postup řešení hlavolamu Bastiena Vial-Jaime



Obr. 62 Zadání; a) - postup řešení

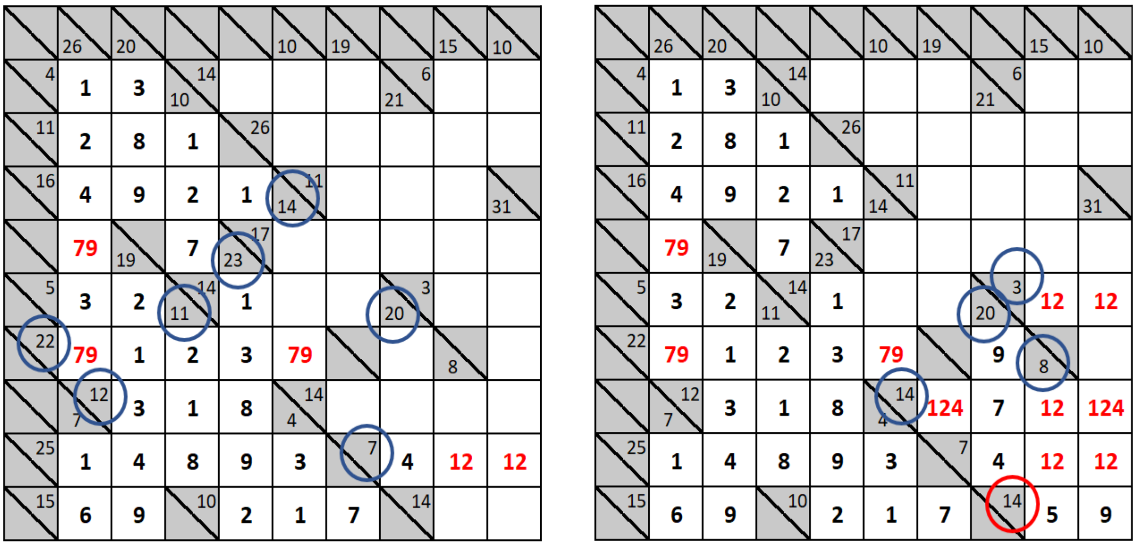
a) Při luštění si pomůžeme tabulkou součtů, proto je nebudu pokaždé vypisovat. Segment „4 na 2“ – v druhém políčku musí být 3, jelikož do svislého segmentu „20 na 3“ se 1 nehodí, zbytek by se rovnal 19, tento součet nelze nakombinovat ze dvou různých jednociferných čísel, maximální možný součet pro taková dvě čísla je 17. Stejnou úvahou zjistíme umístění čísla 8 do „20 na 3“ (9 to být nemůže, pak by kombinace pro „11 na 3“ by měla být 1, 9, 1, což není možné dle pravidel). Pro „11 na 3“ zbývá umístit do prázdných políček dvě čísla, jejichž součet bude 11 – 8 = 3, je to kombinace 1 a 2. První políčko je uzamčené číslem 1 nad ním, můžeme sem dát jen 2. „16 na 4“ – zbývá doplnit 3 čísla, součet kterých je 16 – 9 = 7, jediná kombinace je 1, 2, 4. První políčko uzamčené čísly 1 a 2 nad ním, umístíme jedině 4, stejně tak 1 a 2.



Obr. 63 Pokračování postupu řešení b), c)

b) „5 na 2“ má pouze dvě kombinace, 1 a 4 použít nelze, zbývá 3 a 2, z toho lze pro první políčko použít jedině 3. Pro „26 na 6“ zbývá doplnit dvě políčka se součtem 26 - 10 = 16, což je jedinečný součet 7 a 9. V tuto chvíli ale nemůžeme určit přesnou pozici, proto využijeme vpisky. „15 na 2“ může mít dvě kombinace: 7, 8 a 6, 9. Průsečík se segmentem „7 na 2“ bude číslo 6, doplníme do těchto segmentů ještě 1 a 9. U segmentu „4 na 2“ do prvního uzamčeného políčka patří 3, pod ním bude číslo 1. Segment „19 na 5“ už obsahuje 9, zbývající čísla musí dávat v součtu 10, což je jedinečný součet 1, 2, 3 a 4. Číslo 2 v tomto segmentu už je, zbývá 1, 3 a 4. Políčko nad číslem 9 je uzamčené, může tam být pouze 4. Ohledně pozic čísel 1 a 3 zatím nemůžeme rozhodnout, vepíšeme je jako kandidáty.

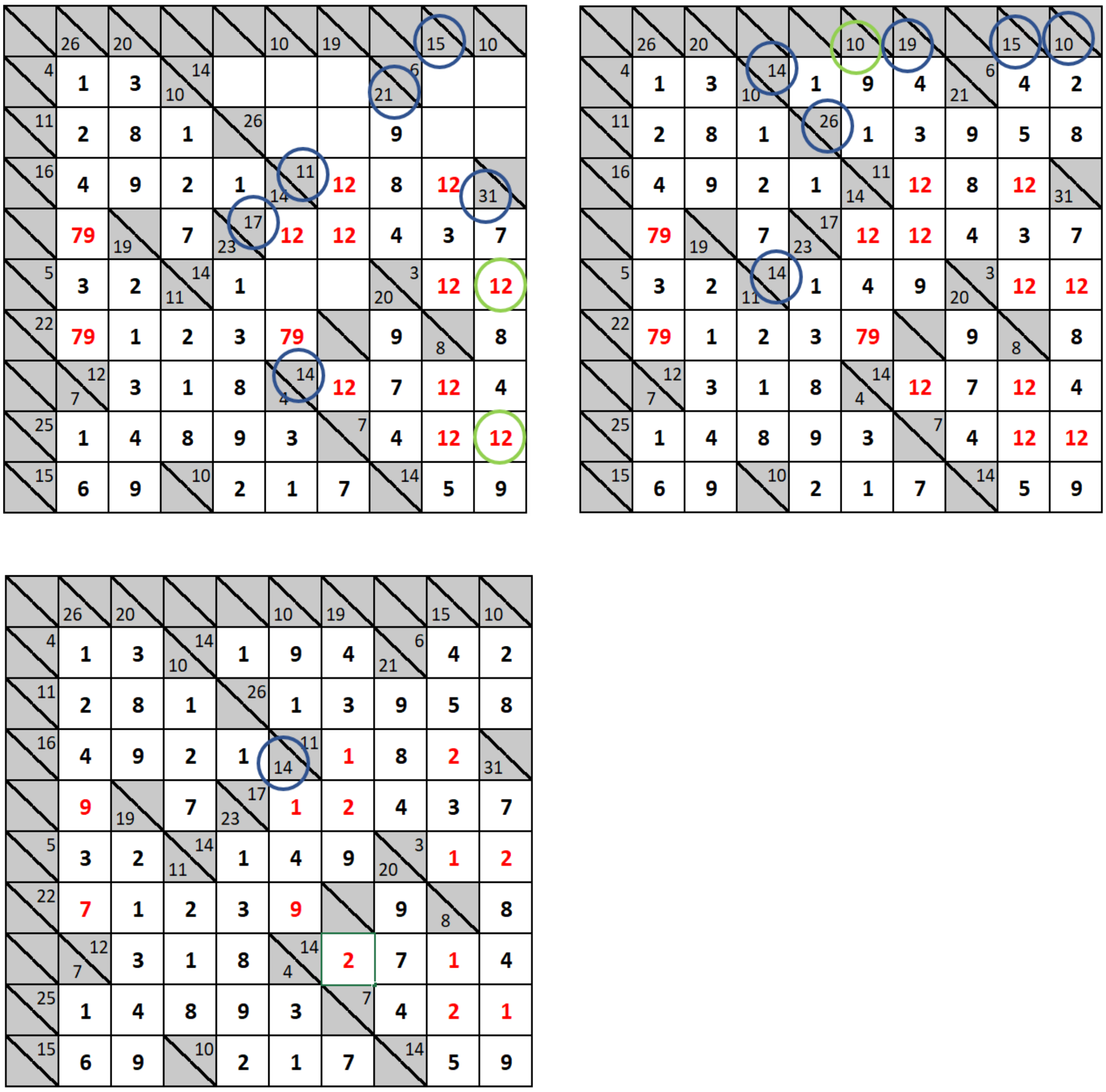
c) Segment „25 na 5“ – zbývá doplnit dvě čísla v součtu 25 - (1 +4 +3) = 17, opět jedinečný součet 8 a 9. Segment „11 na 3“ nemůže obsahovat 9, jinak by dvě zbývající políčka měly být 1 a 1, což nejde. Vepíšeme číslo 8 a ihned zprava 9. Pozici 1 a 2 v „11 na 3“ nemůžeme určit, použijeme vpisky.



Obr. 64 Pokračování postupu řešení d), e)

d) Zkoumáme „12 na 3“. Pokud v prvním políčku bude 1, pak v druhém musí být jedině 2 a v třetím 9, což ale nejde. Tuto možnost tedy zamítneme a vepíšeme po pořadí čísla 3, 1, 8. To nám umožní jednoznačně určit pozici čísel 2 v segmentu „11 na 3“ a také čísla 3 v „19 na 5“. V segmentu „23 na 5“ chybí tři čísla v součtu 23 - (8 + 9) = 6, což je jedinečný součet s kombinaci 1, 2, 3. Číslo 3 je v uzamčeném políčku, jiné tam být nemůže. Tak stejně číslo 2. Ohledně pozic čísel 7, 9 v „22 na 5“ se nemůžeme rozhodnout, vepíšeme kandidáty. Průsečíkem kombinací pro klíče 20 a 7 je číslo 4, které patří do prvního políčka v „7 na 3“. Ostatní čísla vepíšeme jako kandidáty.

e) V segmentu „20 na 3“ chybí 7 a 9. Číslo 9 nemůže být průsečíkem se segmentem „14 na 4“, proto 9 bude v prvním políčku segmentu „20 na 3“, ihned pod ním bude číslo 7. Do „14 na 4“ doplníme kandidáty 1, 2, 4 (součet má být 14 - 7 = 7). Segment „8 na 3“ jako poslední číslo může mít pouze 5. Druhé políčko v „14 na 2“ (pro názornost označený červeným kroužkem) bude 9. Do políček „3 na 2“ vepíšeme kandidáty 1 a 2.



Obr. 65 Pokračování postupu řešení f), g), h)

f) V segmentu „31 na 5“ vidíme jev, se kterým jsem se setkali při řešení Sudoku, a to viditelný pár (Naked pair) 12 (v zelených kroužcích). Podle pravidel, která platí i zde, čísla 1 a 2 z ostatních políček segmentu můžeme odstranit, místo kandidátů 1, 2 a 4 zbude pouze číslo 4, které také odstraníme jako kandidáta z prvního políčka „14 na 4“. Zkoumáme „31 na 6“, musíme doplnit dvě čísla se součtem 31 - (9 + 1 + 2 + 4) = 15. Což mohou být pouze čísla 7 a 8, 6 a 9 nepřipadají v úvahu, 9 v segmentu už je. Zatím nevím, kam přesně je umístit, ale podíváme se na „17 na 5“. Pokud by v posledním políčku tohoto segmentu bylo číslo 8, pak by součet zbývajících čtyř hodnot měl být 9. Avšak neexistuje kombinace čtyř různých jednociferných čísel, která by dohromady měla 9. Proto ve zmíněném políčku musí být 7, další prázdné políčko v „31 na 6“ bude 8. Nyní zkoumáme vztah „17 na 5“ a „21 na 3“. Do „17 na 5“ zbývá doplnit čísla v součtu 10 (jedinečný součet 1, 2, 3, 4), jediné číslo, které může být průsečíkem kombinací pro klíče 17 a 21 je číslo 4. Druhé políčko u segmentu s klíčem 21 musí být 8. 9 tam být nemůže, jelikož se kříží se segmentem s klíčem 11, podobný případ jsme už řešili. Doplníme kandidáty 1 a 2 do „11 na 3" a vrátíme se k segmentu s klíčem 17. Jak jsme zjistili, potřebujeme umístit ještě tři čísla, a to 1, 2 a 3. V políčku, které je průsečíkem segmentů s klíči 17 a 15, může být jen číslo 3 dle pravidla „Naked pair". Zbývající 1 a 2 vepíšeme jako kandidáty.

g) Podíváme se na segment „10 na 2", kombinace 1 a 9 nevyhovuje – v prvním políčku nemůže být 9 kvůli segmentu s klíčem 6, v druhém políčku být nemůže kvůli kolizi s další devítkou. Proto v prvním políčku segmentu s klíčem 10 bude číslo 2, ve druhém číslo 8. Dále vepíšeme čísla v „15 na 2", která v tuto chvíli jsou zřejmá – 4 a 5. Do „26 na 5" zbývá doplnit dvě čísla se součtem 26 – (9 + 5 + 8) = 4, jedinečný součet kterého je 1 a 3. Segment „19 na 5" nemůže obsahovat 1 – pravidlo „Naked pair". Na toto místo umístím 3 a doplním 1. „10 na 2" (zelený kroužek) – doplním 9. Segment „14 na 2" má dvě prázdná políčka, do kterých umístíme jedině 1 a 4, druhá možnost (2 a 3) nepřipadá v úvahu kvůli obsazení segmentu „19 na 5", ve kterém je číslo 3 a viditelná dvojice 1, 2. Segment „19 na 5" má osamělé políčko, doplníme 19 - (4 + 3 + 1 + 2) = 9, taktéž doplníme osamělé políčko v „14 na 3".

h) Segment „14 na 3" nemůže obsahovat 7, jedině 9. Dále řetězově odstraňujeme nevhodné kandidáty a jsme u finále. Upravená políčka se zbývajícím jedním číslem jsem ponechala v červené barvě.

Kakuro Solver, aplikaci pro kontrolu, případně řešení hlavolamů Kakuro, najdeme například na adrese https://www.dcode.fr/kakuro-solver. Její používání je poněkud náročnější na čas a na pozornost, vyžaduje přesné zadání úlohy. Je to dáno různorodostí mřížky Kakuro a také počtem a rozmístěním segmentů. Aplikační implementace pro mobilní zařízení, která by předpokládala naskenování vyplněné mřížky a následnou kontrolu řešení, je ze stejných důvodů náročným úkolem.

3 Zařazení logických her Sudoku a Kakuro do výuky matematiky

3.1 Systém kurikulárních dokumentů a oblast Matematika a její aplikace

Kurikulární dokumenty v České republice jsou základními nástroji pro plánování a provádění vzdělávání na všech úrovních školství. Systém kurikulárních dokumentů na státní úrovni představuje sebou dva hlavní dokumenty: Národní program vzdělávání (Bílou knihou) a Rámcové vzdělávací programy.

Bílá kniha je strategický dokument, který vytvořilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky. Definuje základní směry a cíle vzdělávací. Bílá kniha popisuje zásady a metody vzdělávání, strukturu vzdělávacího systému, standardy kvality a měření výsledků vzdělávání.

Rámcový vzdělávací program (RVP) je základní dokument, který definuje obsah a požadavky na vzdělávání na různých úrovních školství, včetně základního, středního a vyššího odborného vzdělávání. RVP stanovuje všeobecné vzdělávací cíle a očekávané výstupy pro jednotlivé předměty a oblasti učení. RVP také obsahuje směrnice pro vyučovací metody, hodnocení žáků a studentů a další aspekty výuky.

Strategie vzdělávání, které vychází RVP, zdůrazňuje rozvoj klíčových kompetenci, což je „souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti…. V etapě základního vzdělávání jsou za klíčové považovány: kompetence k učení; kompetence k řešení problémů; kompetence komunikativní; kompetence sociální a personální; kompetence občanské; kompetence pracovní; kompetence digitální.“ (RVP ZV - Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021)

RVP je určen pro všechny školy a školská zařízení, která poskytují vzdělávání podle školského zákona. Každá škola pak na základě RVP vytváří svůj vlastní školní vzdělávací program (ŠVP), který je přizpůsoben konkrétním podmínkám a potřebám dané školy.

V České republice je základní vzdělání řízeno Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (RVP ZV). V roce 2021 byl RVP ZV revidován v rámci Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030 (Strategie 2030+) s cílem modernizovat obsah vzdělávání tak, aby odpovídal dynamice a potřebám 21. století. Nová verze RVP ZV zavádí vzdělávací oblast Informatika a rozvoj digitální gramotnosti žáků zařazuje na úroveň klíčové kompetence. Nový přístup zdůrazňuje vývoj výpočetního myšlení a porozumění principům fungování digitálních technologií, jako jsou algoritmy, kódování a modelování. Tato změna však ovlivňuje také další oblasti vzdělávání, včetně matematiky (RVP ZV - Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021).

RVP ZV vymezuje celkem devět vzdělávacích oblasti. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je tvořena jedním oborem Matematika a její aplikace a v základním vzdělávání se zaměřuje na praktické dovednosti a vědomosti pro každodenní život a další studium. Obsahuje čtyři tematické okruhy: Čísla a početní operace, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru a Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Vzdělávání v této oblasti se zaměřuje na rozvoj klíčových kompetencí, včetně praktických dovedností, paměti, logického a abstraktního myšlení a kritického uvažování.

Nestandardní aplikační úlohy a problémy v kontextu Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) lze chápat jako úlohy a problémy, které se odlišují od běžných nebo standardních úloh, se kterými se žáci setkávají běžně ve škole.

Standardní a nestandardní aplikační úlohy se liší v několika ohledech:

Standardní aplikační úlohy:

- jsou předem dané a standardizované,
- řeší se podle předem daných postupů a algoritmů,
- většinou mají jednoznačnou a předem danou odpověď,
- často jsou součástí standardního vzdělávacího plánu.

Nestandardní aplikační úlohy:

- jsou navržený učiteli podle jejich zkušeností, představ a zaměření školy,
- často nemají jednoznačnou řešení a žáci musí využít své kreativity a inovativního myšlení,
- jsou zaměřeny na ukázání zajímavosti a využitelnosti matematiky v reálných situacích,
- bývají součástí nestandardního vzdělávacího plánu.

Využití nestandardních aplikačních úloh v matematice má několik výhod. Tyto úlohy podporují rozvoj kreativity a inovativního myšlení, pomáhají žákům lépe porozumět matematickým konceptům a principům a zvyšují jejich motivaci k učení matematiky (Prágrová, 2022; Brant, 2008).

Vyučování matematiky zahrnuje mimo jiné práci se žáky, kteří vyžadují zvláštní pedagogickou pozornost, jako jsou matematicky nadaní nebo talentovaní žáci. Práce s těmito žáky obecně vyžaduje specifickou vzdělávací pomoc. Jedním ze způsobů, jak rozvíjet jejich dovednosti, je prostřednictvím nestandardních matematických úloh, které rozvíjejí logické a kombinatorické myšlení žáků, podporují jejich vnímání prostorových vztahů a ukazují kontext matematiky v každodenním životě. Řešení nestandardních matematických úloh není vždy závislé na znalostech, takže se jedná o novou vzdělávací situaci pro žáky, kteří jsou obvykle zvyklí na známé algoritmické řešení běžných úloh. Řešení logických úloh, pokud jsou dobře zvolené dle rozumové vyspělosti žáků, umožňují vyniknout i žákům v matematice méně úspěšným (RVP ZV - Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021).

Nestandardní úlohy často vyžadují větší míru kreativity, logického a kombinatorického myšlení a schopnosti aplikovat matematické koncepty v reálném životě. Mohou také vyžadovat, aby studenti přistupovali k řešení problémů z různých úhlů pohledu nebo používali různé strategie k nalezení řešení. Cílem těchto úloh je často rozvíjet schopnosti studentů řešit složitější a více dimenzionální problémy, než jsou ty, které jsou běžně prezentovány v standardních učebnicích nebo testech.

Nestandardní úlohy mohou být užitečné pro rozvíjení dovedností, které jsou důležité pro úspěch v reálném světě, jako je schopnost identifikovat a definovat problémy, generovat a vyhodnocovat možná řešení, rozhodovat se a implementovat řešení. Tyto dovednosti jsou klíčové pro řadu oborů, včetně vědeckých oborů, technologie, inženýrství a matematiky, stejně jako pro řadu dalších oblastí, jako je podnikání a management.

Očekávanými výstupy tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy jsou:

žák

- M-9-4-01 užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací
- M-9-4-02 řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

Minimální doporučená úroveň pro úpravy očekávaných výstupů v rámci podpůrných opatření:

žák

- M-9-4-01p samostatně řeší praktické úlohy
- M-9-4-01p hledá různá řešení předložených situací
- M-9-4-02p aplikuje poznatky a dovednosti z jiných vzdělávacích oblastí - využívá prostředky výpočetní techniky při řešení úloh (RVP ZV - Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021)

Logické hry Sudoku a Kakuro svojí povahou odpovídají učivu tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy a přispívají rozvoji vymezených RVP klíčových kompetenci.

3.2 Přehled odborné literatury a publikací

Ve své knize The Mathematics of Games and Puzzles: From Cards to Sudoku vidí autor Sudoku jako hru matematickou ne pro to, že je mřížka vyplněna čísly. Byla by stejně matematická, kdyby Sudoku bylo poskládáno z obrázků nebo barevných útvarů. Matematické je Sudoku proto, že k jeho vyřešení musíte přemýšlet jako matematik, hledat vzorce a používat pečlivou logiku (Benjamin, 2013). Řešení může vyžadovat logické uvažování, dedukci a "reductio ad absurdum" (důkaz sporem), což jsou součásti matematiky.

V úvodu knihy Terry Stickelsa, tvůrce hlavolamů a autor mnoha knih na toto téma, vztah žáků k matematice je popsán spíše jako negativní. V 50. letech byli žáci trestáni za špatné chování tím, že museli po škole dělat matematické úlohy. V následujících desetiletích se objevilo několik hnutí v matematice, které se snažily vyvážit zvládnutí výpočetních dovedností a konceptuální porozumění. Všechna tato hnutí selhala a hlavní stížnost žáků na matematiku byla, že je nudná. Terry Stickels vytvořil knihu s hádankami, která má za cíl motivovat žáky nejen k učení matematiky, ale také k tomu, aby si ji užili. Hádanky mohou být použity jako doplněk tradičního učiva matematiky a mohou být použity k motivaci výuky základních algebraických nebo geometrických pojmů. Hádanky také mohou být použity k aplikaci těchto abstraktních pojmů na konkrétní problémy. Rébusy mohou také sloužit jako bonusové body pro žáky, kteří dokončí zadané úkoly včas (Stickels, 2009). Kniha obsahuje mimo Sudoku velké množství matematických úloh a hádanek.

Hraní logických her, jako jsou Kakuro a Sudoku, přispívá rozvoji kognitivních dovedností. Tyto hry posilují paměť, schopnost vidět souvislosti, rozpoznávání vzorců a řešení problémů, zatímco jejich „návykový" charakter podporuje pravidelné procvičování těchto dovedností. Ačkoli výše zmíněný přínos lze sledovat v každém věku, děti mohou být obzvlášť příznivě ovlivněny díky jejich schopnosti rozvíjet a posilovat tyto klíčové schopnosti v průběhu kritických období vývoje mozku (Diamond, 2011).

Sudoku přijímá hráče k logickému a deduktivnímu uvažování. Cílem hry je správně umístit čísla na základě informací, které jsou již k dispozici. Tím, že hráč musí rozhodovat, kde umístit každé číslo, Sudoku podporuje důležité dovednosti rozhodování a kritického myšlení. Tato hra také rozvíjí schopnosti soustředění a plánování, protože úspěšné řešení často vyžaduje předvídání několika kroků dopředu. Výzkum naznačuje, že pravidelná hra Sudoku může zlepšit pracovní paměť a rychlost zpracování informací (Friedman, 2016).

Podobně i hra Kakuro má řadu benefitů pro zdokonalení myšlenkových procesů. Kakuro může napomoci ke zklidnění mysli a poskytnout přestávku od každodenní rutiny. Důležitou výhodou hraní Kakuro je rozvoj trpělivosti. Hráči musí strategicky a trpělivě pracovat na řešení každé hry, což může vést k upevňování používání podobného chování i v běžném životě. Ačkoli ještě neexistují konkrétní vědecké studie, které by zkoumaly účinky hraní Kakuro na kognitivní schopnosti, zkušenosti a sebereflexe hráčů naznačují podobné přínosy jako u Sudoku. I když exaktní studia o přínosu Kakuro nejsou (zatím), není to důvod, proč bychom tyto hlavolamy nemohli vyzkoušet a přesvědčit se o jejích funkcionalitě v hodinách matematiky.

Jedním z dalších zajímavých aspektů hraní těchto logických her je, že se mohou stát prostředkem pro učení kritického myšlení a dovedností rozhodování. Kritické myšlení je schopnost analyzovat informace nebo situace a dospět k uváženému a dobře podloženému závěru. To zahrnuje schopnost objektivně zhodnotit informace z různých zdrojů, identifikovat a vyhodnotit argumenty, detekovat problémy nebo chyby v logice, řešit problémy systematicky a efektivně, a také reflektovat a zpochybňovat vlastní proces myšlení. Kritické myšlení je klíčovou dovedností v mnoha oblastech života, včetně vzdělávání. Řada studií ukazuje, že zapojení do her, které vyžadují strategické myšlení a rozhodování, může vést k vylepšení těchto dovedností (Adachi, 2013).

Dovednost efektivně shromažďovat, vyhodnocovat, interpretovat informace a správně jimi operovat, rozpoznat pravdivé, relevantní a úplné informace je zárukou úspěchu. Pouze v tomto případě lidský mozek nechybuje při rozhodování. Naopak nepřesná, falešná nebo irelevantní informace způsobí špatná rozhodnutí. Pokud bude mozek efektivně provozován, člověk bude prožívat harmonický spokojený život. Sudoku je jednoduchá hádanka, která trénuje děti i dospělé v mnoha důležitých myšlenkových návycích, které zlepšují fungování mozku a zlepšují naše rozhodovací schopnosti. Sudoku rozvíjí fluidní inteligenci, část lidské mentální kapacity, která řeší nové problémy, která vytváří nová řešení starých dosud nevyřešených výzev. Takto vidí život se Sudoku autor výborné knihy Why and how sudoku in schools Jerry Martin. Ve své knize potvrzuje již zde uvedené úvahy o benefitech, které zařazování Sudoku a jiných logických her do výuky přináší (Martin, 2022). Jerry Martin provozuje webové stránky https://www.sudokuasateachingtool.org/team-sudoku.html a vede na YouTube kanál @SudokuGuy, kde sdílí své nadšení pro Sudoku a ukazuje různé vychytávky pro luštitelé.

Logické hry jako Sudoku a Kakuro mohou mít pozitivní dopad na duševní zdraví. Několik studií naznačuje, že hraní těchto her může pomoci snížit stres a zlepšit náladu (Pine, 2020). Hry, které vyžadují soustředění a zamyšlení, mohou také pomoci při snižování úzkosti.

Nicméně, je důležité poznamenat, že ačkoli hraní těchto logických her má mnoho přínosů, mělo by být považováno za doplněk, nikoli náhradu jiných forem výukového procesu. Měly by být vnímány jako součást širšího spektra aktivit zaměřených na podporu péče o duševní zdraví a rozvoj kognitivních schopností, také získávání znalosti, zkušenosti a dovednosti.

Za velmi podnětnou považuji práci “Using Simplified Sudoku to Promote and Improve Pattern Discovery Skills Among School Children”, autorem které je Khairul Amilin Tengah z Universiti Brunei Darussalam. Autor došel k závěru, že Sudoku může být použito jako příklad problémové úlohy, cílem které je podpora a zlepšení dovedností žáků detekovat vzory. Cílovou skupinou jsou žáci čtvrté až šesté tříd, nicméně jsem přesvědčená, že závěry článku a uvedené strategie lze použít jako inspiraci i pro práci se staršími žáky. V článku se uvádí tři strategie pro řešení zjednodušeného Sudoku: strategie „Zřejmé chybějící číslo“, strategie „Eliminace“ a strategie „Buď toto nebo tamto“ a podrobná doporučení pro učitele, jak se žáky pracovat. Autor s oporou na relevantní zdroje zdůrazňuje, že od žáků se v matematice očekává nejen pochopení procedurálních, ale i konceptuálních principů. Žáci by měli být schopni aplikovat matematické principy na reálné problémy a rozvíjet hluboké porozumění a schopnost využívat matematiku. Jeden z efektivních přístupů k dosažení těchto cílů je výuka matematiky prostřednictvím problémově orientovaného učení.

Stanic a Kilpatrick (1989) (in Tengah, 2011) uvádějí, že řešení problémů lze využít mimo jiné jako zdůvodnění výuky a učení se matematice, jako zdroj motivace k učení pro žáky, jako prostředek výuky nových pojmů a dovedností, jako formu procvičování k upevnění dovedností a znalosti a jako umění matematického objevování.

Schopnost detekce vzorů je jednou z klíčových dovedností, kterou žáci potřebují při řešení matematických úloh. I když tuto dovednost nelze přímo vyučovat, je možné ji u dětí rozvíjet pomocí různých aktivit, jako jsou hry a hádanky. Například pro výuku řešení problémů může být užitečný jednoduchý hlavolam jako je Rubikova kostka. Studie prokazují účinnost her ve výukovém procesu a hádanky zvyšují zapojení žáků do výuky a motivují k učení.

Sudoku je příkladem jednoduché a cenově dostupné hry, která může podpořit rozvoj dovedností řešení problémů. Kromě zábavy a pocitu úspěchu po dokončení, Sudoku také posiluje matematické dovednosti, jako jsou pokus a omyl, odhad a kontrola, logické uvažování, zužování výběru, hledání vzorů, vylučovací proces a další.

Z dlouhodobého hlediska Sudoku bylo také zmíněno jako nástroj, který může pomoci zpomalit průběh Alzheimerovy choroby. Sudoku lze využívat nejen jako prostředek při výuce v různých oblastech a úrovních matematiky, ale také v jiných předmětech, jako je chemie a informatika (Tengah, 2011).

Inspirativní přístup nabízí autorka článku Learning to Hypothesize with Confidence through Sudoku Game Play (Ting, 2009), která používá hru Sudoku jako ideální, autentický kontext pro začlenění modálních sloves a hovorových výrazů k výuce užitečných jazykových funkcí, vytváření hypotéz a tvorbu logických závěrů. Podle mého názoru, podobnou aktivitu lze vytvořit i pro výuku matematiky.

Při hledání vhodných zdrojů a inspiraci jsem narazila na knihu Algebraic Sudoku, autor Tony G. Williams,Ed.D. Kniha nabízí sbírku úloh, které kombinují Sudoku a řešení matematických problému, jako například rovnice, zlomky, Autor tvrdí, že „spojením vzrušení ze Sudoku a důležitosti algebry dosáhnete vítězné kombinace“ (Williams, Ed.D., 2011).Princip je jednoduchý a dobře uplatnitelný. Po zvolení mřížky Sudoku (nebo i Kakuro) učitel připraví sadu úloh takovým způsobem, že řešení jednotlivé úlohy bude sloužit jako číslo v mřížce hlavolamu. Autor nabízí nebát se záporných čísel a dohodnout se se žáky, že do mřížky buď budou zapisovat čísla se znaménkem minus nebo znaménko rovnou opustí (správnou odpověď ale zaznamenají). Příklad algebraické úlohy, kde se používá standardní mřížka 9 x 9:

Directions: Multiply or divide, and place the products or quotients in the appropriate cells of the Sudoku grid. Then solve the puzzle.

(A4) $-35 \div (-7) =$	**(D5)** $-27 \div 3 =$	**(F6)** $111 \div (-37) =$
(A8) $42 \div (-6) =$	**(D7)** $-5 \bullet -1 =$	**(G1)** $-63 \div 21 =$
(A9) $-3 \bullet 3 =$	**(D8)** $33 \div (-11) =$	**(G4)** $-7 \bullet (-1) =$
(B1) $-14 \bullet -\frac{1}{2} =$	**(E1)** $-\frac{2}{3} \bullet -6 =$	**(G6)** $\frac{3}{5} \div -\frac{3}{25} =$
(B5) $8 \bullet -\frac{1}{8} =$	**(E3)** $\frac{3}{5} \div (-\frac{1}{5}) =$	**(G7)** $-4 \div (-\frac{1}{2}) =$
(B9) $72 \div (-9) =$	**(E5)** $-2 \bullet (-3) =$	**(H1)** $-0.1 \bullet 10 =$
(C3) $-81 \div (-9) =$	**(E7)** $99 \div (-11) =$	**(H5)** $28 \div (-7) =$
(C4) $24 \bullet -0.25 =$	**(E9)** $-1.75 \bullet 4 =$	**(H8)** $-0.4 \bullet 5 =$
(C6) $-48 \div 6 =$	**(F2)** $56 \div (-7) =$	**(I1)** $100 \div (-20) =$
(C9) $-13 \div (-13) =$	**(F3)** $-175 \div (-25) =$	**(I2)** $-42 \div 6 =$
(D4) $-\frac{1}{4} \bullet 32 =$	**(F5)** $-25 \bullet -\frac{1}{5} =$	**(I6)** $-4 \div (-\frac{2}{3}) =$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4									
5									

Puzzle #3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	8	7	2	6	4	9	-3	-1	-5
2	1	3	4	2	5	-8	9	6	-7
3	6	5	9	1	-3	7	4	8	2
4	5	9	-6	-8	2	4	7	3	1
5	3	-1	7	-9	6	5	2	-4	8
6	4	2	-8	7	1	-3	-5	9	6
7	2	6	3	5	-9	1	8	7	4
8	-7	4	5	-3	8	6	1	-2	9
9	-9	-8	1	4	-7	2	6	5	3

Obr. 66 Příklad algebraické úlohy ve spojení se Sudoku

Pro složitější úlohy autor nabízí zredukovat mřížku na menší počet políček, například 6 x 6 nebo 4 x 4.

Pro někoho, kdo stále pochybuje o aktivním zapojení mozku při řešení logických úloh, může být zajímavý následující fakt: na fyziologické úrovni byl zjištěn pozitivní vliv hry Sudoku na podporu kognitivních funkci. Studie Role of prefrontal cortex during Sudoku task: fNIRS study (Ashlesh, 2020) zkoumala využití funkční blízké infračervené spektroskopie (fNIRS) pro sledování aktivace prefrontálního kortexu během řešení Sudoku. Výsledky naznačují, že řešení Sudoku, které zapojuje kognitivní funkce jako rozhodování a řešení problémů, může podporovat kognitivní funkce a může být slibným nástrojem pro neurorehabilitaci a kognitivní terapii u neuropsychiatrických poruch. Výsledky taktéž ukazují aktivaci prefrontálního kortexu během řešení Sudoku, což naznačuje, že tato hra může podporovat kognitivní funkce. Mnoho studií se zaměřilo na nalezení algoritmu pro řešení Sudoku, ale zkoumání neuronových substrátů zapojených do Sudoku bylo výzvou.

PRAKTICKÁ ČÁST

4 Hry Sudoku a Kakuro v hodinách matematiky

4.1 Úvod do praktické části

Praktické části mé závěrečné práci jsem se věnovala průběžně po dobu dvou let (2. pololetí šk. r. 2019/2020, šk. r. 2020/2021, 2. pololetí šk. r. 2021/2022). Pracovala jsem se žáky dvou šestých (celkem 44 žáků), dvou sedmých (celkem 33 žáků) a dvou osmých tříd (30 žáků).

Jedna se o základní školu s celkovým počtem 320 žáků.

Logické úlohy jsem se rozhodla zařazovat do výuky takovým způsobem, aby byla dosažená nejvyšší možná úroveň zájmu o hru. Pro úspěšné zvládnutí pravidel a technik je potřeba, aby logické rébusy žáky bavily a bylo pro ně radosti hádanky vyřešit. K dosažení toho cíle jsem použila následující metody:

- Krátký dotazník ústní formou ohledně hry (Sudoku a Kakuro současně).
- Představení hry (Sudoku nebo Kakuro), seznámení se s pravidly (zapojení žáků, které hru znají, společně se dopracujeme k pravidlům).
- Zapojení žáků, které mají zkušenosti s luštěním, do vysvětlování postupů.
- Skupinová práce, menší skupiny (3-4 členy ve skupině). Když skupina neví kudy dál, vysílá vedoucího na konzultaci k jiné skupině.
- Skupinové řešení zadání (celá třída). Žáci se postupně střídají u tabule, jsou zvyklí, že k tabuli vyběhne ten, kdo má nápad. Přednost má ten, kdo u tabule ještě nebyl a má co říct. Umí sami řídit pořadí. Vždy se najde několik jedinců, kteří pracují samostatně a výsledek ověřují se skupinovým nebo si vyžádají řešení pro kontrolu. Většinou se najde alespoň jeden žák, který něco vyluští a nezajímá se, zda to má správně. Zřídkakdy žáci chtějí řešit zadání ve dvojici. Do skupinové práce se rádi zapojují žáci, kterým luštění nejde, mají radost, když mohou „vylítnout“ k tabuli. Nikdy nedošlo k sabotáži úlohy.

Seznámení s herním prostředím proběhlo prezenčně, ovšem po zbytek školního roku 2019/2020 výuka probíhala distančně.

Jelikož většinu této doby výuka probíhala distanční formou, bylo zapotřebí přizpůsobit vysvětlení postupů řešení úloh, společnou práci, zadávání, zpětnou vazbu této formě výuky.

Pro dosažení cílů diplomové práce bylo potřeba dosáhnout dílčích cílů (znalost herního prostředí, dodržování pravidel hry, schopnost a ochotu hlavolam samostatně luštit). K dosažení vytčených cílů jsem zvolila následující postup:

- seznámení se s herním prostředím
- seznámení se s pravidly hry
- představení postupu řešení hádanky a používaných technik nejlehčí úrovně
- nácvik provádění technik při řešení hlavolamů určeným postupem
- skupinové řešení hlavolamů
- samostatné řešení hlavolamů
- zvyšování úrovně obtížnosti a ukázka technik pro řešení obtížnějších hádanek
- skupinové řešení hlavolamů
- samostatné řešení hlavolamů bez časového omezení
- samostatné řešení hlavolamů s časovým omezením

4.2 Úvodní hodiny do Sudoku a Kakuro

1. Úvodní hodiny do Sudoku a Kakuro proběhly prezenční formou. Během úvodní hodiny byl ve třídách proveden následující dotazník formou rozhovoru ústní formou:
2. Slyšel jsi někdy o hře, která se jmenuje Sudoku?
3. A co taková hra Kakuro, znáš ji?
4. Kde jsi se o těchto hrách poprvé dozvěděl? Bylo to ve škole, od kamarádů, nebo jsi na ně narazil na internetu?
5. Sudoku je docela zábavná hra, co myslíš? Hraješ ji někdy?
6. Jestli hraješ Sudoku, jak často to děláš? Každý den, jednou týdně, nebo jen když se nudíš?
7. Když hraješ Sudoku, vybíráš si lehké, střední nebo těžké úrovně?
8. A co Kakuro, hraješ i tu?
9. Jestli hraješ Kakuro, jak často to děláš?
10. Když hraješ Kakuro, vybíráš si lehké, střední nebo těžké úrovně?
11. Kterou hru máš raději, Sudoku nebo Kakuro? A proč?
12. Co tě na těchto hrách nejvíce baví?

13. Co tě na těchto hrách nebaví nebo co je na nich nejtěžší?
14. Myslíš, že když hraješ Sudoku a Kakuro, zlepšuješ se v matematice? Co tě k této myšlence vede?
15. Myslíš, že by měly být Sudoku a Kakuro součástí matematiky ve škole? Proč si to myslíš?

Rozhovor probíhal ve dvou šestých, dvou sedmých a dvou osmých třídách.

Vyhodnocení dotazníku provedeného formou ústního rozhovoru je poněkud odlišné od vyhodnocení písemných dotazníků, protože odpovědi mohou být méně strukturované a mohou zahrnovat slovní vyjádření nebo gesta.

Postup, kterého jsem se držela při vyhodnocení dotazníku:

Příprava: Rozhodla jsem se, že odpovědi budu průběžně zaznamenávat a třídit dle připravených kategorií, například pro první otázku sloupečky „ano“, „ne“, pro třetí „doma“, „škola“, „kamarádi, spolužáci“, „internet“, „časopis, noviny“ a „jiné“. Pro otázku "Co tě na těchto hrách nejvíce baví?" pak kategorie "řešení hádanek", "výzva", "relaxace", „jen tak“.

Zaznamenávání odpovědí: Během rozhovoru jsem pečlivě zaznamenávala odpovědi žáků. Věděli účel mých poznámek a dali mi časový prostor.

Transkripce odpovědí: Po dokončení rozhovorů (po hodině) jsem zkontrolovala, zda tomu, co jsem napsala, sama rozumím a nezapomenu význam případných zkratek.

Analýza dat: Po kódování odpovědí jsem analyzovala data. Počítala jsem, kolik respondentů dali odpovědi do určitých kategorií, a vyhodnoťte trendy nebo vzory, které mohou být v odpovědích viditelné.

Vizualizace dat: Pro lepší pochopení výsledků je vhodné vytvořit graf nebo tabulku, které znázorňují, jaké odpovědi byly nejběžnější. Souhrnnou tabulku přikládám.

Při vyhodnocení dotazníku jsem maximálně usilovala přistupovat k ústním odpovědím s otevřenou myslí a snažit se objektivně interpretovat to, co respondenti sdělují. Snažila jsem se pochopit odpovědi v kontextu, v jakém byly dány. Respektuji soukromí a anonymitu žáků, proto neuvádím žádná jména.

Interpretace a závěry: O hře Kakuro neslyšel nikdo, nebo si toho názvu nevšimli. Podle obrázků hru Kakuro poznali čtyři žáci šestých tříd, dva žáci sedmých tříd a čtyři žáci osmých tříd. Hru Sudoku znají, viděli nebo slyšeli o ní většina žáků. Sudoku hrají doma rodiče nebo sourozenci, což je pozitivním příkladem a vzorem trávení volného času. Žáci jedné z osmých tříd uvedli, že se s hrou seznámili a hráli na prvním stupni v hodinách matematiky s třídní učitelkou. Zájem o Sudoku u této skupiny respondentů byl vyšší ve srovnání s ostatními. Motivací hrát Sudoku ve volném čase je možnost se odreagovat, vyluštit hádanku a čelit výzvě. Jak již bylo zmíněno, žáci hrají doma dle vzoru rodinných příslušníků. Hlavolam je více atraktivní, pokud není složitý a rychle se dá vyřešit. Jen malá část respondentů byla ochotná věnovat řešení více času a úsilí. Valná většina žáků, hrajících Sudoku, hraje sporadický. Názory ohledně spojitosti mezi luštěním Sudoku a zlepšením v matematice nebyly jednotné. Méně než polovina respondentů byla přesvědčená, že hraní Sudoku jím pomůže zlepšit se v matematice,

Tabulka 1 Výsledky krátkého dotazníku

číslo otázky	kategorie otázky	třídy		
		6	7	8
1	ano	34	30	27
	ne	4	1	0
2	ano	4	2	4
	ne	33	29	23
3	škola	0	0	15
	doma	11	11	2
	kamarádi, spolužáci	1	1	0
	internet	2	2	3
	časopis, noviny	10	7	7
	jiné (nevím)	14	10	0
4	ano, je	15	20	20
	ne, nevím	23	11	7
	ano, hraju	8	13	15
	ne, nehraju	30	18	12
5	denně	0	1	3
	týdně	2	7	7
	nesleduji, nehraji	31	19	12
	nudím se	5	4	5
6	lehké	0	6	10
	střední	0	4	8
	těžké	0	0	0
	nevyznám se v tom	38	21	9

číslo otázky	kategorie otázky	třídy		
		6	7	8
7	ne	38	31	27
11	řešení hádanek	10	6	2
	výzva	0	4	6
	relaxace	4	5	8
	jen tak (ňevím)	12	5	5
	řeší to doma rodiče	4	8	4
	prostě mi to jde	8	3	2
12	musím přemýšlet	15	16	15
	když se zaseknu	0	4	8
	trvá moc dlouho	11	4	0
	jen tak (nevím)	12	7	4
13	ano	9	15	7
	ne	4	14	11
	nevím	25	2	9
14	ano	22	20	25
	ne	0	0	0
	nevím	16	11	2

Celkem respondentů	38	31	27

zbytek není o tom přesvědčen nebo nikdy o tom neuvažoval. Nicméně, na otázku, zda by bylo vhodné zařadit zmíněné logické hry do výuky matematiky, odpovídali žáci vesměs pozitivně. Komentáře k této otázce byly: „Bylo by to super, nemuseli bychom dělat úlohy“, „Můžeme se ulejt“, „Bylo by to super, nemusíme nic v hodině dělat“. Pouze několik žáků, pravidelně hrajících Sudoku, jsou přesvědčení, že zařazení do výuky by jím prospělo a pomohlo by jím lépe matematiku pochopit a naučit se logický uvažovat.

Dále bych doporučovala podobný rozhovor s dotazníkem, zkráceným o otázky, zda žáci znají hru, provést na konci školního roku a porovnat výsledky.

V návaznosti na výsledky dotazníku jsem provedla průzkum mezi učiteli prvního a druhého stupně. Z deseti učitelů prvního stupně v době průzkumu Sudoku do výuky zařazují dvě učitelky. Logické úlohy jiného typu zařazuje do výuky každý z nich. Kakuro nezkoušel nikdo. Na stejné otázky tři učitelů druhého stupně jsem obdržela odpovědí – Sudoku ani Kakuro do výuky nezařazují, jinak nestandartní úlohy a logické hry zařazují pravidelně.

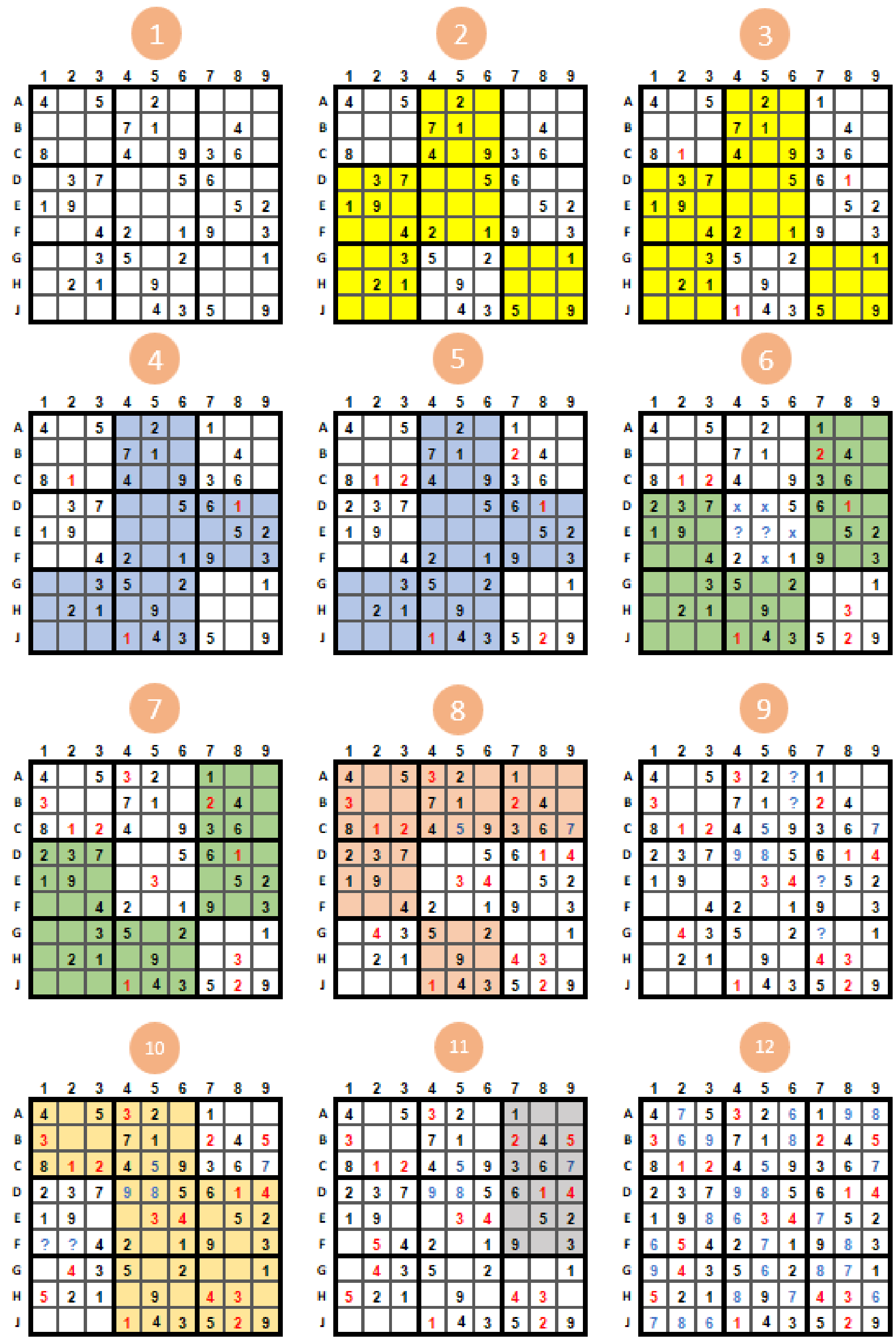
4.3 Pravidla Sudoku a praktická cvičení

Pro seznámení se s herním prostředím Sudoku jsem využila materiál, který jsem předložila v teoretické části – historická fakta a zajímavosti, popis herního prostředí a výklad pravidel. Dále jsem maximálně možně využila zkušenosti žáků, které umí Sudoku řešit a také mnohdy dokážou vysvětlit vrstevníkům látku více srozumitelným způsobem. V prvních fázi naučení se práce se sudoku žáci pokládají otázky typu: „Které z čísel 1 až 9 chybí ve 3. řadě hádanky?“, „Je chybějící číslo ve stejném čtverci, řádku, sloupci?“, „Jak můžete ověřit, že jste číslo doplnili správně?“, „Proč nelze chybějící číslo umístit do tohoto políčka?“, „Když jsou v určitých řádcích a sloupcích následující čísla, které číslo by mohlo patřit do políčka?“, „Jaký by byl další vhodný krok?“,

Pro nácvik techniky řešení jsem vypracovala úlohy pro společnou a samostatnou práci. Níže předložené úlohy jsem řešila se žáky všech zmíněných tříd vzhledem k jejích zkušenostem se Sudoku.

1. **Procvičování techniky hledání chybějícího čísla ve čtverci (úroveň obtížnosti – lehké)**

Pokyny: Zkoumej čtverce a rozhoduj se kam můžeš umístit číslo. Začínej číslem 1 a pokračuj do 9, prohlédni si každý čtverec a uvažuj. Začít můžeš libovolným čtvercem dle vlastní úvahy. Nevyplňuj jiná čísla, než se kterým momentálně pracuješ, i když vidíš kam patří. Učíme se hádanku řešit systematický a postupně bez chyb. Doplň ve čtvercích veškerá čísla, která lze vyřešit. Doplněná čísla pravidelně kontroluj. Až dojdeš k číslu 9, začni opět od 1. Po vyčerpání všech možnosti využij pravidla dvou prázdných políček – pokud v řádku, sloupci nebo čtverci zbydou dvě volná políčka, je velká šance je vyřešit, můžeš se o to pokusit.



Obr. 67Postup řešení technikou hledání chybějícího čísla

Poznámky k řešení:

- První obrázek – zadání úlohy.
- Na druhém obrázku jsou žlutě zbarvené čtverce, které číslo 1 obsahují.

- Obrázek 3 – pomocí logických úvah, popsaných v teoretické části, doplňujeme jedničky, provedeme vizuální kontrolu, zda číslo 1 je doplněno v každém čtverci a je na svém místě.
- Obrázek 4 – modrá barva označuje čtverce, ve kterých se nachází číslo 2.
- Obrázek 5 vyobrazuje popsaným způsobem nalezené dvojky, nezapomeneme provést kontrolu.
- Obrázek 6 – zelenou barvou jsou označeny čtverce, které již trojku obsahují. Otazníky v prostředním čtverci jsou příkladem toho, že pokud bychom začali řešit tímto čtvercem, tak nemůžeme přesně určit, na kterém místě se číslo 3 nachází, ovšem vidíme pouze dvě možná místa, označené otazníky.
- Obrázek 7 – zkoumáme první a druhý čtverec, pak řešení prostředního čtverce bude zřejmé. Doplníme čísla 4 do příslušných políček a zkontrolujeme správnost.
- Obrázek 8 – oranžovou barvou jsou označený čtverce, obsahující číslo 4 a doplněné čtyřky. Zároveň použijeme pravidlo dvou prázdných políček a doplníme čísla 7 a 5 do řádku C.
- Obrázek 9 – pokusíme se použít pravidlo dvou prázdných políček ve sloupcích 6 a 7 a v řádku D. Podaří se nám to pouze v řádku D, čísla, o kterých se nemůžeme rozhodnout, jsou zatím označená otazníky (později se v takových případech naučíme využívat techniku vpisků).
- Obrázek 10 – doplnili jsme nějaká čísla a je na místě začít od začátku. Jelikož jsme zcela doplnili čísla 1 až 4, označíme žlutou barvou čtverce, obsahující číslo 5. Vyřešili jsme 5 ve třetím čtverci. Ve čtvrtém zatím se nemůžeme rozhodnout a přejdeme ke čtverci 7. Zde číslo 5 můžeme umístit a na základě toho se nyní rozhodneme, do kterého políčka dáme číslo 5.
- Obrázek 11 – ve čtvercích 3 a 6 jsou dvě prázdná políčka v každém, tato políčka lze vyřešit.
- Obrázek 12 – Sudoku dořešíme řetězově, jak budou přibývat doplněná čísla, hledáním jednoho nebo dvou prázdných políček.

Úloha byla řešená v hodině matematiky při distančním vyučování, kdy jsem promítala obrázky jeden po druhém a společně se žáky jsme doplňovali čísla, já jsem je pomocí grafického tabletu zapisovala. U této úlohy jsem trvala na dodržování postupu, jelikož jsem sledovala následující cíle:

- žák vidí souvislosti mezi polohou již vepsaných čísel a polohou hledaného čísla;
- žák logický uvažuje o umístění čísla a pokládá otázky typu: „Může v tomto políčku prvního čtverce být jednička, když je ve druhém čtverci v řádku B a ve čtvercích pod ním v sloupcích 1 a 3?“
- žák postupuje systematický dle zadání;
- žák dokáže se soustředit na konkrétní část hlavolamu;
- žák pamatuje pořadí čísel a uvědomuje si nutnost opakování postupu pro úspěšné vyřešení úlohy

Při distanční výuce jsem hodiny nahrávala a byly žákům příslušné třídy k dispozici. Veřejně přístupné video pro žáky s příkladem řešení jsem nahrála na YouTube a je k dispozici zde https://www.youtube.com/watch?v=7F0xe7SMUzI

2. Samostatná úloha na opakování řešení Sudoku po čtvercích (úroveň obtížnosti – lehké)

Pokyny: Postupuj po čtvercích v zadaném pořadí, pořadí je znázorněno číslem v kroužku u příslušného čtverce. Do každého čtverce doplň chybějící čísla, pak teprve přecházej k řešení dalšího čtverce. Čtverec číslo 5 (prostřední) bude v pořadí šestý. Pozor – nepřecházej k řešení dalšího čtverce, dokud nevyřešíš stávající čtverec. Pracuj samostatně a předlož řešení.

Úloha byla řešena v rámci distanční výuky jako domácí úloha. Žáci posílali výstřižek obrazovky nebo ofocené řešení na papíře.

		9				1		
7	5						3	8
8	1	2		9		7	5	4
1		7		2		6		9
6			7		8			3
5								1
2			4		1			6
	7		2		3		4	
		3	9	8	5	2		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3	4	9	8	5	7	1	6	2
B	7	5	6	1	4	2	9	3	8
C	8	1	2	3	9	6	7	5	4
D	1	3	7	5	2	4	6	8	9
E	6	9	4	7	1	8	5	2	3
F	5	2	8	6	3	9	4	7	1
G	2	8	5	4	7	1	3	9	6
H	9	7	1	2	6	3	8	4	5
J	4	6	3	9	8	5	2	1	7

Obr. 68 Zadání úlohy pro řešení po čtvercích a řešení této úlohy

3. Cvičení na rychlou orientaci v mřížce – lehké až středně těžké Sudoku

V prezenční výuce každý žák řeší samostatně, dle potřeby kontroluje řešení s učitelem nebo sousedem v lavici. My jsme řešili skupinově v distanční hodině, žáci komentovali postup a sdíleli své úvahy, já jsem zapisovala odpovědí.

Cíl cvičení:

- žák neustálé má přehled o celé ploše mřížky Sudoku;
- žák rychle dohledá potřebné číslo v celé mřížce

Pokyn: Postupně doplňuj veškerá čísla od 1 do 9 tak, jak to půjde, po celé mřížce (uvažuj o řádku, sloupci nebo čtverci). Napřed doplň veškeré jedničky, nevyplňuj ta políčka, o kterých se nemůžeš rozhodnout, nehádej! Pokračuj s číslem 2, pak 3 a tak dále do 9. Až dokončíš práci s devítkou, postup opakuj a začni opět od jedničky. Doplňuj pouze čísla, která jsou zrovna na řadě. Například, pokud doplňuješ trojky a vidíš, že vedle do políčka patří sedmička, nevšímej si toho a pokračuj s číslem 3. Sedmičky doplníš, až přijde na sedmičky řada. Když budeš mít více zkušenosti v luštění, můžeš doplňovat veškerá čísla zároveň, nyní ale máš jiný úkol – postupné doplňování stejných čísel.

Průběh řešení (čísla, o kterých se momentálně nemůžeme rozhodnout, jsou naznačená křížkem):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A					1	3		9	8
B		9	8			2			4
C	6		7	9					
D	1		5		7				6
E		4	3		8		9	7	
F	9				3		1		2
G						4	3		1
H	8			6			2	4	
J	5	2		3	9				

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A					1	3		9	8
B		9	8			2		1	4
C	6	1	7	9					
D	1		5		7				6
E		4	3	1	8		9	7	
F	9				3		1		2
G						4	3		1
H	8		x	6		x	2	4	
J	5	2	x	3	9	x			

Zde se dostáváme do situace, kdy 1 ze sloupce 6 musí nutně být ve čtverci 8, můžeme tedy nyní jednoznačně určit, že ve čtverci 5 číslo 1 bude na místě E4

Obr. 69 Cvičení na rychlou orientaci v mřížce

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			2		1	3		9	8
B		9	8			2		1	4
C	6	1	7	9				2	
D	1		5	2	7				6
E	2	4	3	1	8		9	7	
F	9				3		1		2
G					2	4	3		1
H	8		x	6		x	2	4	
J	5	2	x	3	9	x			

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			2		1	3		9	8
B	3	9	8			2		1	4
C	6	1	7	9				2	3
D	1		5	2	7			3	6
E	2	4	3	1	8		9	7	
F	9				3		1		2
G					2	4	3		1
H	8	3	x	6		x	2	4	
J	5	2	x	3	9	x			

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4		2		1	3		9	8
B	3	9	8			2		1	4
C	6	1	7	9	4			2	3
D	1		5	2	7		4	3	6
E	2	4	3	1	8		9	7	
F	9			4	3		1		2
G					2	4	3		1
H	8	3	x	6		x	2	4	
J	5	2	x	3	9	x			

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	5	2	7	1	3	6	9	8
B	3	9	8	5	6	2	7	1	4
C	6	1	7	9	4	8	5	2	3
D	1	8	5	2	7	9	4	3	6
E	2	4	3	1	8	6	9	7	5
F	9	7	6	4	3	5	1	8	2
G	7	6	9	8	2	4	3	5	1
H	8	3	1	6	5	7	2	4	9
J	5	2	4	3	9	1	8	6	7

Obr. 70 Cvičení na rychlou orientaci v mřížce a dokončení úlohy

4. Řešení Sudoku s použitím kandidátů – středně těžké Sudoku.

Úloha předpokládá vysvětlení a pochopení techniky vpisků. Úloha je určená žákům 8. a 9. tříd.

Pokyny: Doplň veškerá čísla, o kterých se můžeš rozhodnout kam patří. Postupuj od 1 do 9, pravidelně kontroluj správnost doplnění. Zkoumej políčka, která nemůžeš jednoznačně vyřešit a zapisuj do nich čísla, o kterých se rozhodneš, že by tam být mohla.

Komentáře k úloze:

2. obrázek - 1, 2 je málo, nedoplníme nic. 3 je více, doplníme všechny. 4 je málo, 5 doplníme jen jednu. 6, 7 je málo, doplníme jednu 8 a jednu 9, po vyplnění ještě jednou zkontrolujeme, zda se situace nezměnila.

3. obrázek - doplníme 6 ve 4. čtverci a ve stejném čtverci ihned se nabídne 1, také 2 a 7. Pamatujeme - pokud jsou pouze dvě políčka prázdná, je velká šance je doplnit. Doplníme řadu D. Čtverec 2, sloupec 6 - chybí 2, 4, 6. Číslo 6 nemůže být na A, bude na B6 nebo C6. Stejně tak číslo 4 nemůže být na C6, bude na A6 nebo B6. Číslo 2 by mohlo být ve kterémkoliv z těchto tři políček. Když je číslo 1 nutně ve sloupci 4, pak ve čtverci 8 může být pouze ve sloupci 5, na řádku J, nyní v tomto čtverci doplníme i 2. V řádku E je pouze jedno místo pro 1, jelikož na E7 a E8 musí být buď 4, nebo 7. Použijeme pravidlo odhalených dvojíc a číslo 1 z E7 a E8 odstraníme (výsledek je vidět na dalším obrázku).

4. obrázek - ve čtverci 3 budeme zkoumat číslo 2. Musí být nutně ve sloupci 9, jelikož v tomto sloupci zatím není a může být pouze ve 3.čtverci. Ostatní políčka čtverce již 2 obsahovat nebudou. V tom stejném čtverci 3 můžeme jednoznačně určit 5. Musí nutně být ve sloupci 8, jediné možné místo je B8. Vepíšeme zbývající kandidáty do 3. čtverce. Zkontrolujeme, zda není možné vyřešit jednoznačná políčka, doplníme čísla, se kterými jsme si jistí.

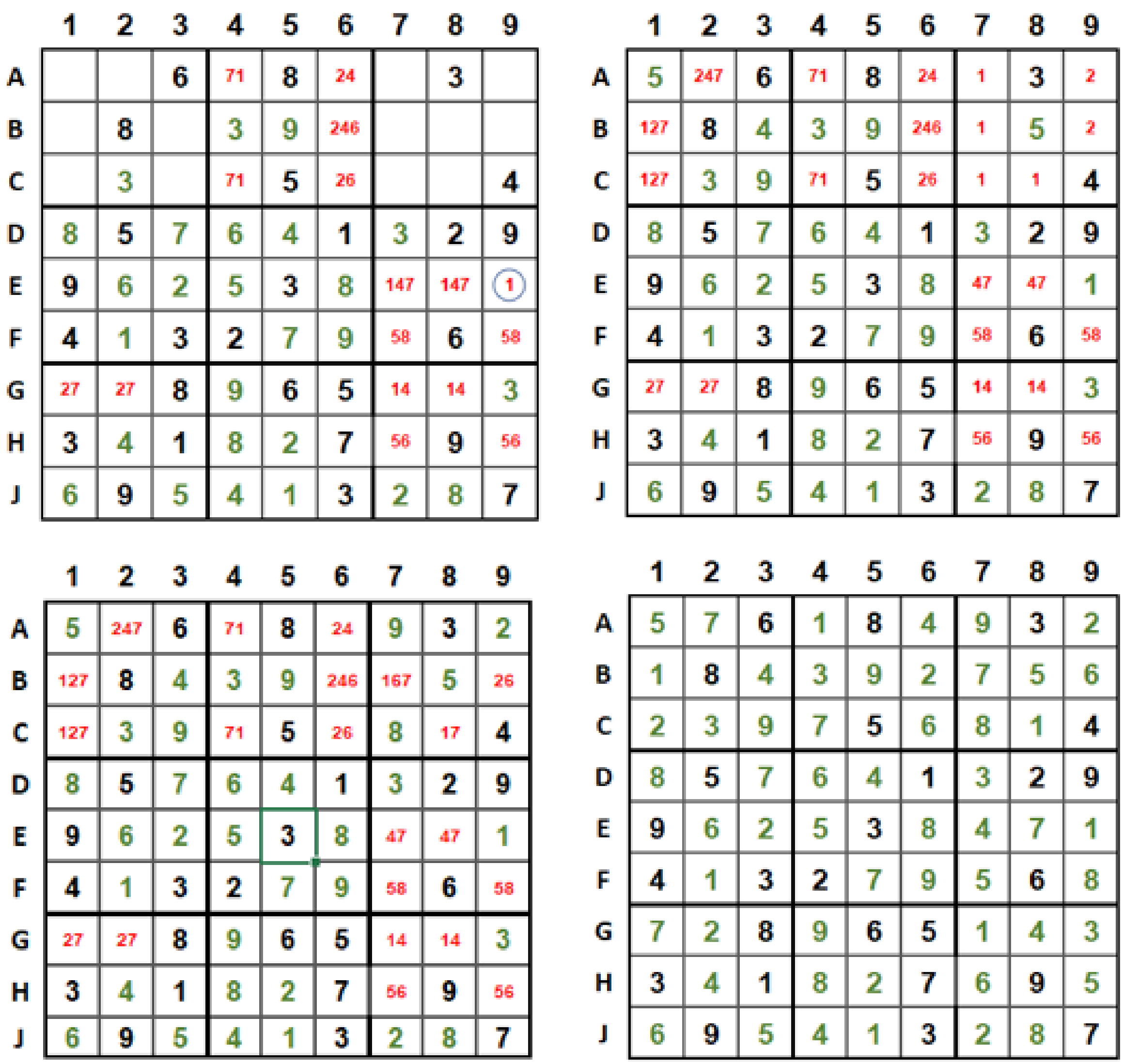
5. obrázek - v řádku A číslo 2 může být pouze na se na A9, je to jediný kandidát. Přesné místo 8 a 9 zjistíme pomocí jednoduchých úvah, které již umíme.

6. obrázek – řetězové odhalujeme jednotlivá čísla.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			6		8			3	
B		8							
C					5				4
D		5				1		2	9
E	9				3				
F	4		3	2				6	
G			8		6	5			
H	3		1			7		9	
J		9				3			7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A			6		8			3	
B		8		3					
C		3			5				4
D	8	5				1	3	2	9
E	9			5	3				
F	4		3	2				6	
G			8	9	6	5			3
H	3		1			7		9	
J		9				3			7

Obr. 71 Sudoku - řešeni s použitím techniky vpisků



Obr. 72 Pokračování a dokončení úlohy s použitím techniky vpisků

5. Úloha na propojení řešení rovnic a Sudoku.

Úloha je vhodná pro žáky 8. třídy nebo v rámci opakování pro žáky 9. třídy. Úlohu lze zařadit do skupinové práce (v menších skupinách, dvojicích). Úloha je inspirovaná stránkou https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2023/01/10/sudomates-de-los-problemas/ , princip je podobný úlohám, popisovaným v teoretické části (přehled odborné literatury a publikací). Zde je náhled, celou úlohu uvedu v příloze.

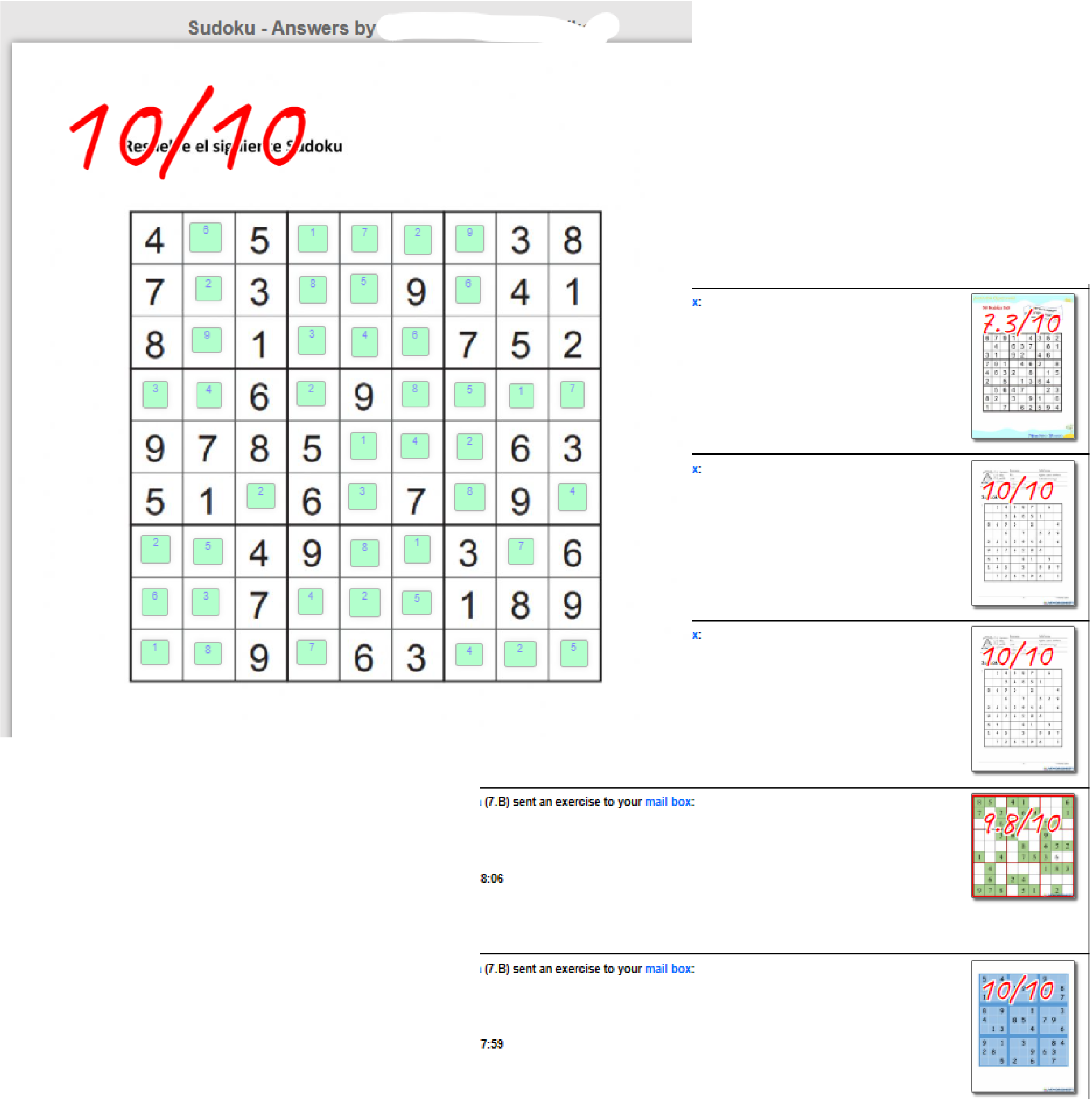
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B									
C									
D									
E									
F									
G									
H									
J									

	rovnice	řešení		rovnice	řešení
A1	3a+4=a+18		A2	6-3(2p-4)= -18	
A3	2c-3(c-4)=c+2		A6	0,5t - 3t+5=0	
A9	4(1/4+x)=5		B6	1-6(y+3) = -23	
B7	-2s -5 = -11		C1	4u-7 = 5-2u	
D3	-2x-13= -3x-5		D5	5z+2= 2z+5	
D8	4r+9= 6r-5		E1	4s-2s=18	
E6	2/3 + 3t/4 = 31/6		E8	7x-10=x+2	
E9	-9 = p-14		F4	2(a+2)=3(a-1)	
F7	4/6 = m/9		F8	2b +4=6a-32	
G1	-4(x+6)=-40		G3	2x-7=20-x	
G4	8y-(2y-3)=9		H4	2(8+p)=22	
I2	3d - (d+4)= -2		I6	5c-3=2c +12	
I8	3x -2 = 16				

6. Řešení úloh v on-line prostředí

Po zvládnutí technik žáci již samostatně procvičovali zadané úlohy. Během distanční výuky jsem objevila užitečnou platformu pro zadávání úloh, a hlavně kontrolu a možnost zpětné vazby. Je to web https://www.liveworksheets.com/, práce s kterým je intuitivní, a v době Covidových opatření bylo nám, učitelům, umožněno zdarma využívat plán pro velkou skupinu žáků, vytvářet třídy, tvořit úlohy (což jsem skutečně hojně využívala na domácí úlohy a na písemky). Také webová stránka disponuje velkou zásobou uživatelských úloh, které lze případně přizpůsobit svým potřebám. Velkou výhodou je možnost, jak již bylo zmíněno, okamžitého hodnocení, také žák mohl zjistit správné výsledky.

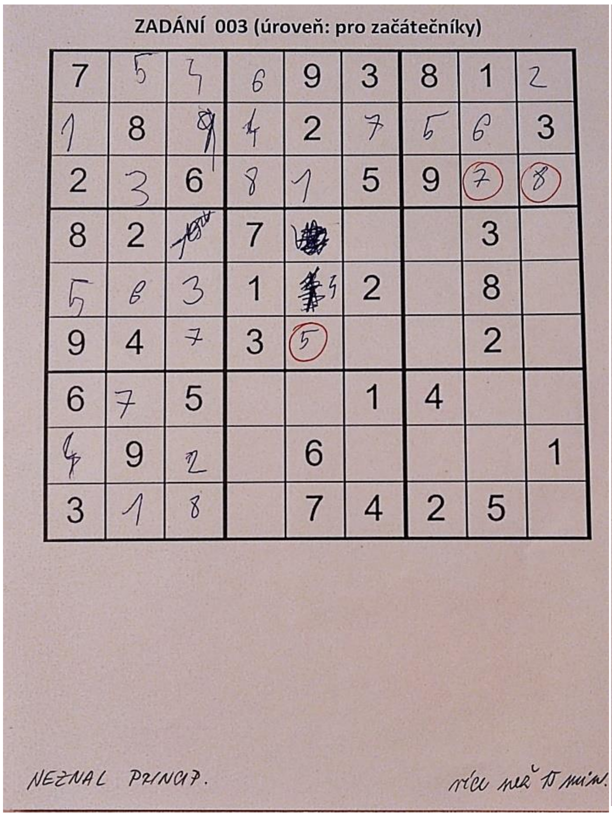
Zásoby úloh jsem využívala pro řešení Sudoku. Níže přikládám několik vyřešených úloh.

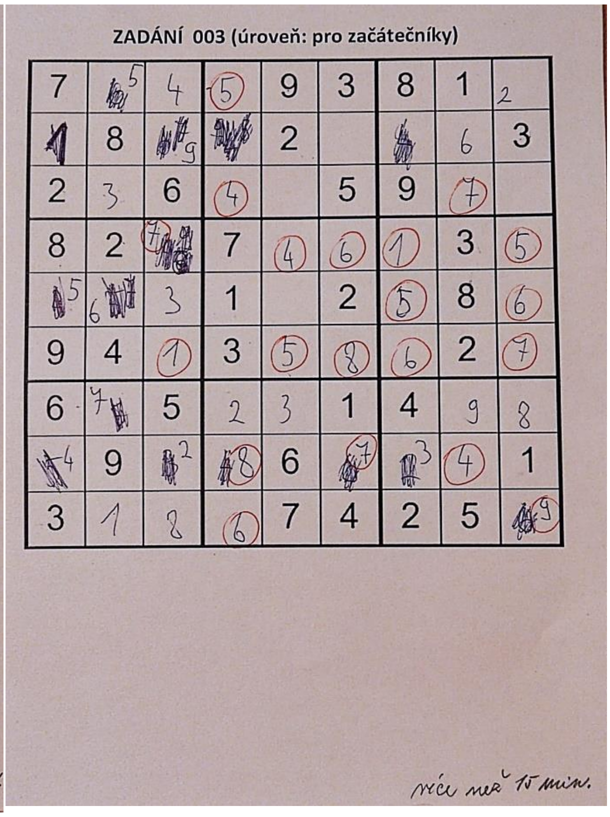


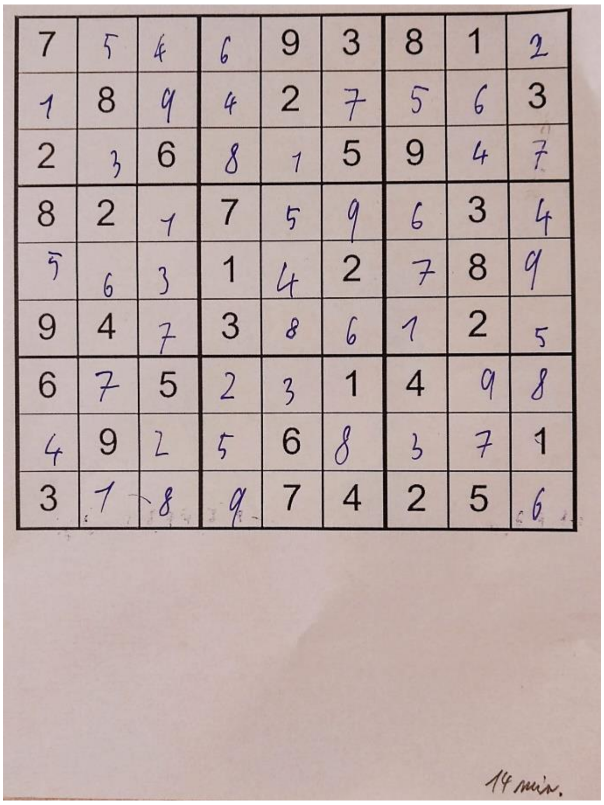
Obr. 73 Vyřešené úlohy na https://www.liveworksheets.com/ - okno s jednou úlohou a okno oznámení odevzdaných úloh pro učitele

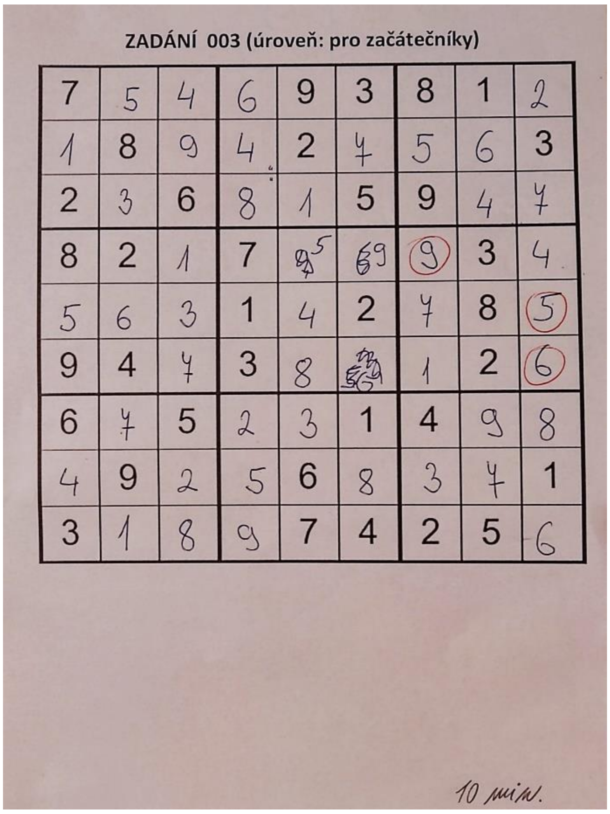
Během krátké doby prezenční výuky žáci řešili připravené úlohy na papír. Zjistila jsem, že žáci vyšších ročníků nějak výrazně nepředbíhají žáky mladších tříd. Nejspíš to bude dáno tím, že jsem začala pracovat sice s různými věkovými skupinami, ale ze stejnou úrovni zkušenosti.

Níže předkládám náhledy řešení žáků již ze září 2020/2021. Jedná se o žáky deváté třídy (bývalé osmé).









Obr. 74 Práce žáků 9. třídy

4.4 Pravidla Kakuro a praktická cvičení

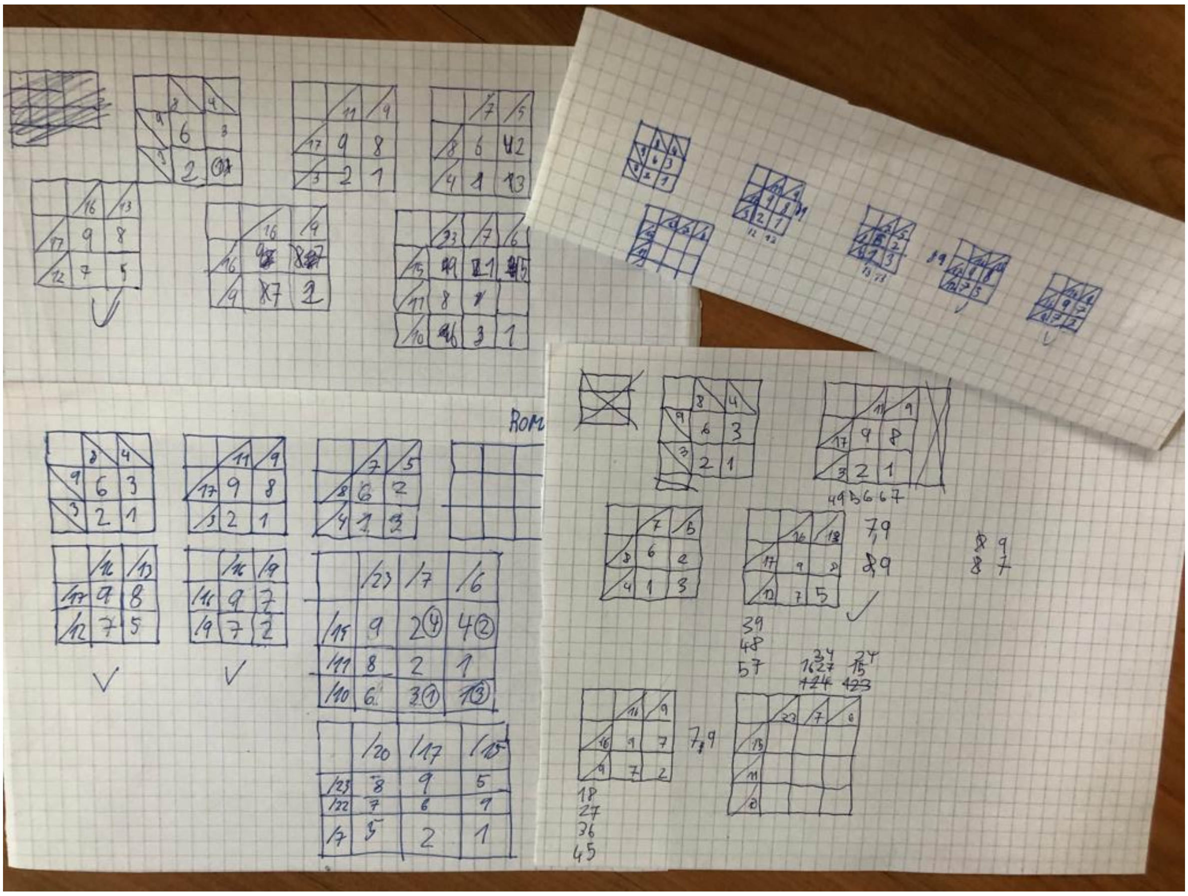
Hlavolam Kakuro jsem zmiňovala a ukazovala žákům během úvodní hodiny s dotazníkovým šetřením a rozhovorem.

Dalším krokem bylo bližší představení Kakuro a jeho pravidel. Hra Kakuro je sama o sobě mnohém náročnější než Sudoku, alespoň v začátcích. Roli hraje také fakt, že žáci s tímto hlavolamem nemají žádné zkušenosti. Vysvětlování pravidel a postupů jednoduchého Kakuro jsem předvedla pomocí prezentace s komentářem. Prezentace probíhala během hodin distanční výuky.

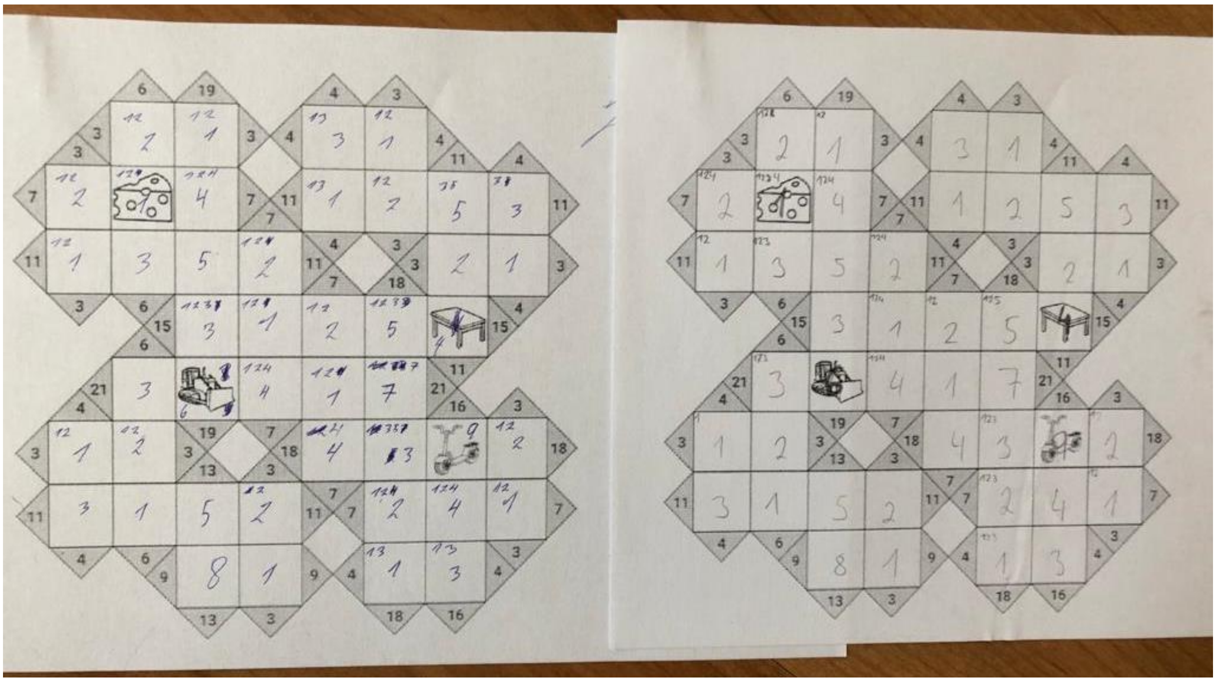
Zde uvádím pouze náhled několika snímků, samotná prezentace bude nahrána do souboru zvlášť. Prezentace vznikla na základě předlohy na webu https://bigideas4littlescholars.com/beyond-sudoku-kakuro-and-futoshiki/ (Puzzle Tutorials)

Zároveň se uvedením do pravidel a postupů hrání je potřeba představit tabulku jedinečných součtů. Je to pomůcka, bez které začínající luštitel bude těžko pokračovat a hrozí, že ho to přestane bavit a luštění vzdá.

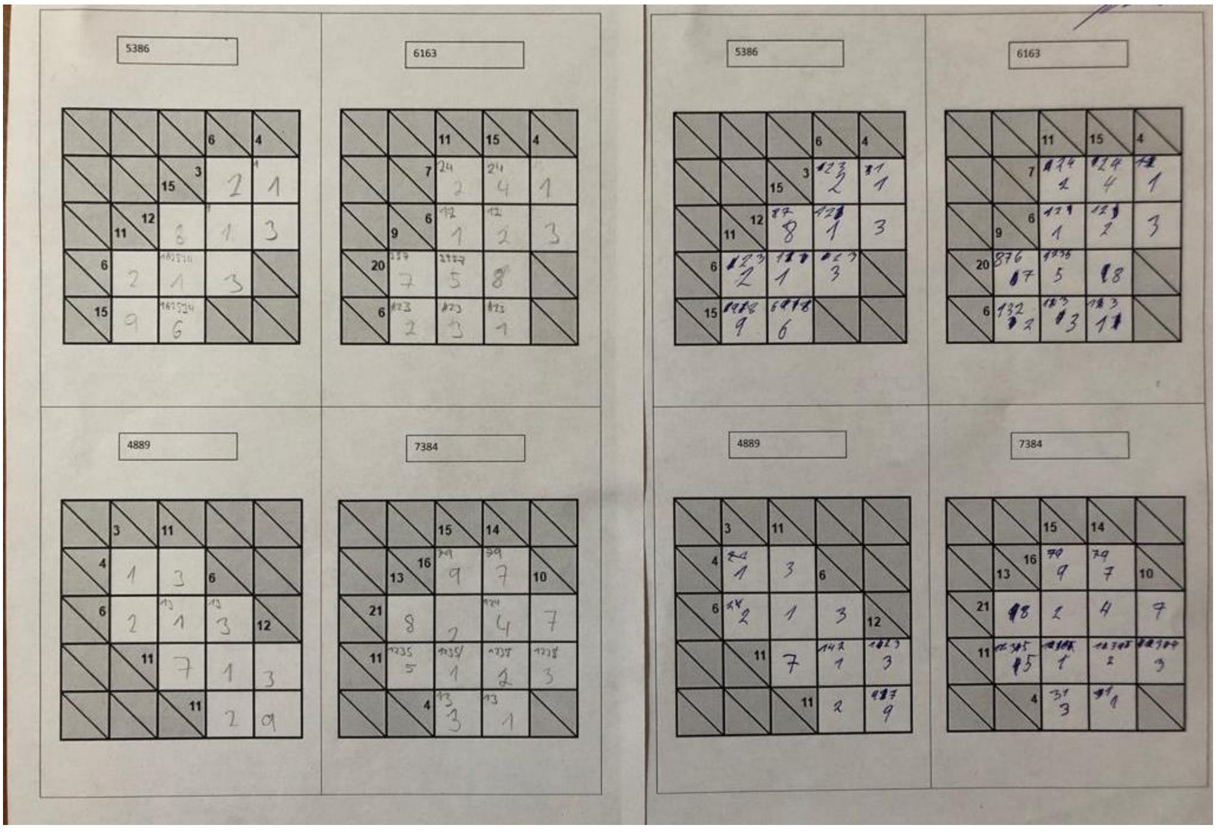
Procvičování v distanční výuce nebylo tak efektivní a pro žáky zajímavé, jako v případě Sudoku. Nebavilo je to, nechápali způsob luštění. Teprve když jsme měli možnost pracovat ve třídě, téměř okamžitě znali a chápali princip. Jak již bylo zmíněno, úlohy samotné bez jakýchkoliv inovaci byly pro žáky dost náročné. Proto jsme postupovali od jednoduché mřížky ve tvaru čtverce 3 x 3 a pokračovali k mřížce 5 x 5. Níže přikládám práce žáků sedmé, osmé a deváté tříd.



Obr. 75 Práce žáků 7. třídy na mřížce 3 x 3

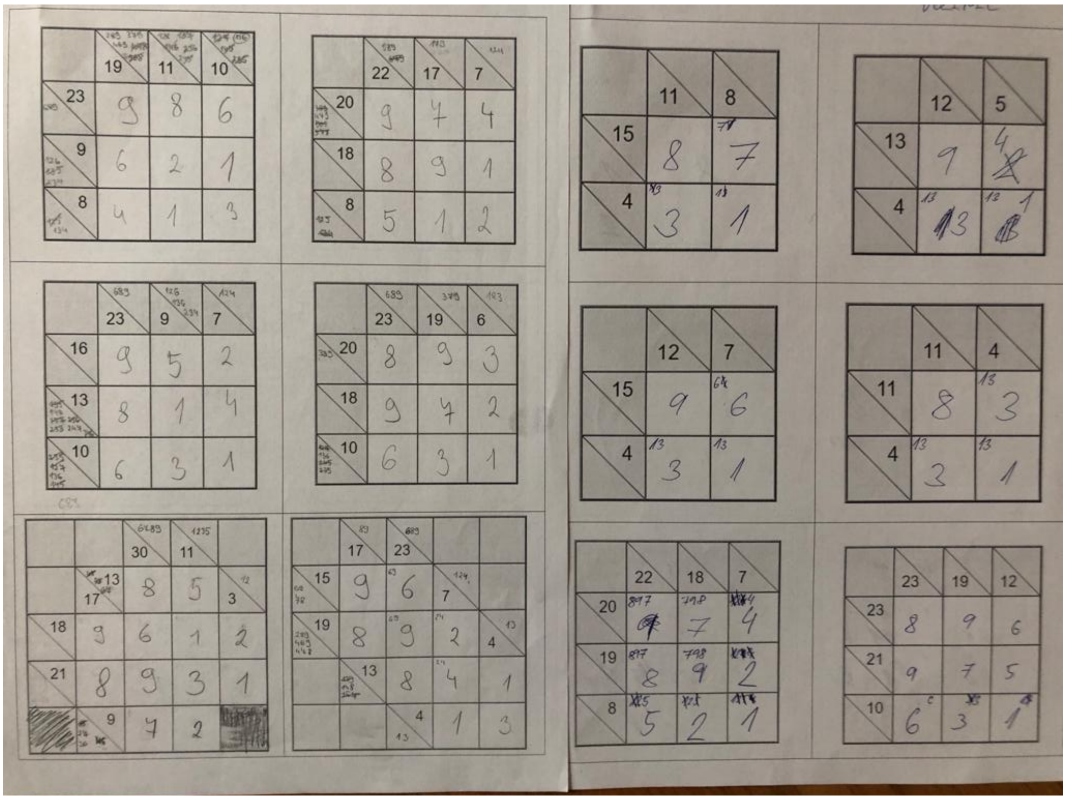


Obr. 77 Práce žáků 9. třídy na složité mřížce

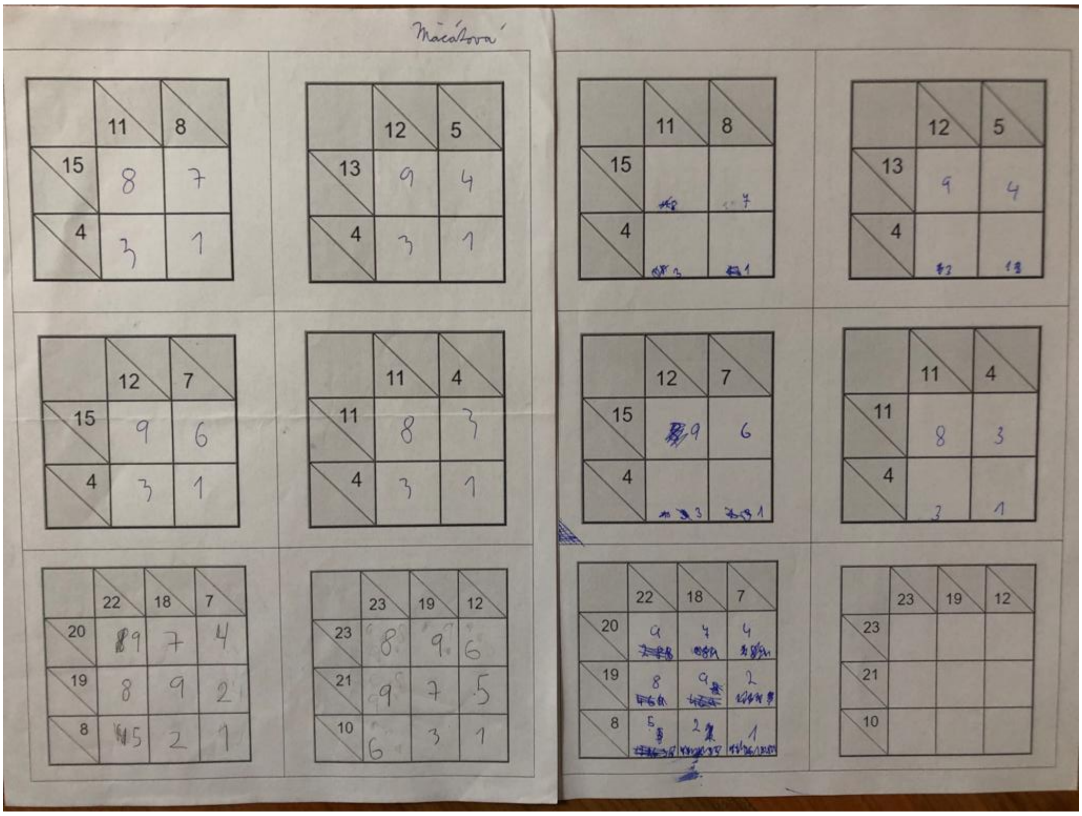


Obr. 76 Práce žáků 8. třídy na mřížce 5 x 5

Zde považuji za vhodné zmínit, že u větších mřížek žáci používali celou součtovou tabulku, nejen jedinečné součty.



Obr. 79 Práce žáků 9. třídy na mřížce 3 x 3 až 5 x 5



Obr. 78 Práce žáků 8. třídy na mřížce 3 x 3 až 4 x 4

Pro tvorbu úloh je vhodné použít aplikace na webových stránkách. Nejvíce vydařená aplikace z mnoha mnou odzkoušených je na webu https://www.kakuros.com/, kde zároveň zjistit kontrolní řešení.

4.5 Moje postřehy a závěry během práce se žáky

Žáci, kteří neuspěli při řešení zadání Sudoku, mají také horší výsledky z matematiky a jiných předmětů. Samozřejmě zde mohou hrát roli kognitivní schopnosti, které jsou dané. Nicméně při pozorování průběhu řešení v hodině jsem postřehla, že slabší žáci nedokážou se na úlohu soustředit, věnují řešení velice krátkou dobu, pak mají snahu „odběhnout jinam“, otáčí se na souseda, snaží se o jiné aktivity na počítači a vrací se k práci po napomenutí, mnohém méně samovolně. Z odpovědí na dotazy, jaké mají problémy s řešením Sudoku a Kakuro tito žáci odpovídají: „Je to na mě moc těžký“, „Mne to nebaví“, „Nevím kde začít“, „Zasekl jsem se a už nechci pokračovat“, „Nevím, co tam mám jako dát, netuším, jak na to mám přijít, to nepotřebuju v životě tyhle věci“, „Nechci to, k čemu mi to bude, mne to unavuje, „Bolí mne z toho mozek“, „Paní učitelko, upřímně to nechci už nikdy v životě vidět“.

Samozřejmě není to stoprocentním pravidlem, i žáci prospěchově silní ne vždy najdou vztah k úlohám typu Sudoku a Kakuro. Také se nechali slyšet, že je to nebaví, že je to náročné, že mají i tak dost práce, aby svoje „mozkové buňky zatěžovali ještě tady tím“. Nicméně, jejich návyk odvádět práci poctivě a dobře, hlavně, aby „dostali jedničku“, zde funguje také. Je zbytečné u takto mladých lidí zmiňovat výhody řešení úloh, „zatěžujících mozkové buňky“. Učitel chápe a zná přinos těchto úloh pro rozvoj matematického myšlení, kritického myšlení, schopnosti sledovat vzory a rychlosti rozhodování. Nicméně, pro žáky to nic neznamená, zatím si nepřipouštějí, že mozek je třeba udržovat v „ostrém“ stavu, taktéž paměť. Že pro jejich život je extrémně důležité umět se rozhodnout, důvěřovat sám sobě a umět se ocenit a pochválit. Nicméně, já stejně s oblibou říkám, že jak cvičí tělo a vidí výsledky, tak stejně každou úlohou, ne nutně matematickou, ale i jazykovou, fyzikální a podobně, cvičí mozek, učí ho pracovat a být pružnější. Řešení logických úloh je také v rámci psychohygieny odpočinkem a možností vytrhnout se z víru sociálních síti. Tyto myšlenky lze dostávat postupně do podvědomí žáků právě pomocí zařazení logických úloh do výukového procesu, vytváření návyku se podobné činnosti věnovat a vnímat potěšení a úspěch.

Několik žáků, kteří jsou slabší ve výuce, ale řeší logické úlohy doma (většinou po vzoru rodičů), jsou schopni u hádanky vydržet a baví je to. Zažívají pocit vítězství a úspěchu. Jelikož jim tento typ úloh jde (ve většině případů se jedná o Sudoku, protože vůbec nezahrnuje početní operace), rádi by je v hodině matematiky viděli častěji.

Mohu odvodit, že logické hry neovlivní schopnost řešit početní matematické problémy. Dvě slečny a chlapec, žáci dvou osmých tříd, řeší Sudoku systematický (jedna z dívek se této činnosti věnuje pravidelně s matkou, soutěží mezi sebou, využívají papírovou podobu), i těžké varianty. Tito žáci nejsou úspěšní v řešení rovnic nebo ve výpočtu slovních úloh. Sudoku ve třídě vyluští nejrychleji ze všech spolužáků. Dívka, která řeší Sudoku s matkou, je mezi prospěchově nejslabšími žáky. Avšak pozoruji rozdíl mezi zmíněnými žáky a žáky stejné prospěchové úrovně, ale nezabývající se luštěním jakýchkoliv logických rébusů.

Tři žáci, které jsem měla možnost delší dobu pozorovat, vykazují v hodině matematiky schopnost pochopit sled události slovní úlohy (vysledovat pattern) a vyjmenovat aktéry úlohy mnohém rychleji než spolužáci stejné prospěchové úrovně. Vykazují schopnost pracovat pečlivěji a dokážou se soustředit na delší dobu. Dokážou se odhodlat k řešení zadání v hodině matematiky a radovat se úspěšně vyřešené úloze nebo části úlohy ve větší míře než spolužáci stejně prospěchové. Ovšem je těžké usoudit, zda je to důsledek aktivit, spojených s řešením logických úloh, jelikož zmíněné žáci řešili podobný typ úloh ještě před tím, než jsem třídám Sudoku a Kakuro představila. Pro určení významného závěru by bylo zapotřebí delší časový úsek a pozorování případného pokroku žáků, kteří se logickým úlohám pravidelně nevěnovali.

Řešení hádanek může zvyšovat sebevědomí žáků a spokojenost se svým výkonem. Z rozhovoru se žáky: „Mám dědečka, který také Sudoku luští, a luští už dlouho. Nedávno jsem vyluštil Sudoku, které mu nešlo. To byl super pocit, jsem prostě dobrej.“

ZÁVĚR

V rámci své diplomové práce jsem se intenzivně zabývala studiem logických her Sudoku a Kakuro a jejich potenciálem pro výuku matematiky na 2. stupni základní školy. Práce představuje komplexní pohled na toto témata, od historického kontextu až po pedagogické aplikace.

Teoretická část práce poskytuje hluboké pochopení logiky a strategií, které jsou základem úspěšného řešení her Sudoku a Kakuro. Detailně jsem rozebrala historii těchto her a zajímavosti, které jsem v průběhu zpracování teoretické části zjistila.

Ve své práci jsem také provedla rozsáhlý průzkum odborné literatury, který umožňuje další rozšíření teoretických poznatků a nabízí cenné zdroje pro kreativní tvorbu nestandardních úloh a pedagogický výzkum.

Aplikovaná část práce spočívala v sestavení sady cvičných úloh Sudoku, přípravě instruktážního videa, podrobných postupů a návodů pro řešení hlavolamů Sudoku a Kakuro, také v přípravě úvodní prezentace pro Kakuro. Tato sada úloh a prezentace poskytují praktický základ pro implementaci těchto her do výuky matematiky.

Cíle mé práce byly naplněny. Podařilo se mi prozkoumat možnosti využití Sudoku a Kakuro v pedagogickém procesu, připravit praktické materiály pro jejich výuku a přispět tak k teoretickému i praktickému poznání tohoto zajímavého tématu.

Přestože moje práce pokrývá široký spektrum tematických oblastí, otevírá také nové možnosti pro další pedagogický výzkum. Například, budoucí studie by mohly prozkoumat efektivitu různých vyučovacích metod při výuce Sudoku a Kakuro, nebo by se mohly zaměřit na vliv těchto her na prospěch žáků v matematice. Věřím, že tato práce poskytne solidní základ pro takový výzkum a přispěje k dalšímu rozvoji oblasti výuky matematiky a rozvoji klíčových kompetenci pomocí logických her.

POUŽITÁ LITERATURA

HARTSTON, William. A Brief History of Puzzles: Baffling Brainteasers from the Sphinx to Sudoku: Baffling Brainteasers from the Sphinx to Sudoku. London: Atlantic Books, 2019. ISBN 978-17-864-9426-9.

WILLIAMS, ED.D., Tony G. Algebraic Sudoku: Book 1. United States of America: Lorenz Educational Press, 2011. ISBN 978-1-4291-2271-9.

Algorithm for embedding and extracting digital watermarks in image using sudoku matrix. Ученые заметки ТОГУ [online]. 2019, (10/2) [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://pnu.edu.ru/media/ejournal/articles-2019/TGU_10_100.pdf

BROOKER, Helen, Keith A. WESNES, Clive BALLARD, et al. An online investigation of the relationship between the frequency of word puzzle use and cognitive function in a large sample of older adults. International Journal of Geriatric Psychiatry [online]. 2019, 34(7), 921-931 [cit. 2023-06-16]. ISSN 08856230. Dostupné z: doi:10.1002/gps.5033

PRÁGROVÁ, Karolína. Aplikační úlohy ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. Brno, 2022. Diplomová práce. Masarykova Univerzita. Vedoucí práce Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

VLAŠÁK, Emil. Do nitra Sudoku. In: Šachový software. Ing. Emil Vlašák. Dostupné také z: https://vlasak.biz/sudokupdf.pdf

Famous magic squares. Magischvierkant.com [online]. Arie Breedijk, 2013 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.magischvierkant.com/two-dimensional-eng/famous/

BOSE, R. C., S. S. SHRIKHANDE a E. T. PARKER. Further Results on the Construction of Mutually Orthogonal Latin Squares and the Falsity of Euler's Conjecture. Canadian Journal of Mathematics [online]. 1960, 12, 189-203 [cit. 2023-06-16]. ISSN 0008-414X. Dostupné z: doi:10.4153/CJM-1960-016-5

Grandmaster Puzzles: About. Gmpuzzles.com [online]. Grandmaster Puzzles, 2023 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.gmpuzzles.com/about

History of Sudoku [online]. UK: Silurian Software Limited, 2023 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.sudokudragon.com/sudokuhistory.htm

DIAMOND, Adele a Kathleen LEE. Interventions Shown to Aid Executive Function Development in Children 4 to 12 Years Old. Science [online]. 2011, 333(6045), 959-964 [cit. 2023-06-19]. ISSN 0036-8075. Dostupné z: doi:10.1126/science.1204529

Jediné opravdu původní japonské sudoku. Praha: Ottovo nakladatelství, 2006. ISBN 80-7360-413-2.

CHISHOLM, Alastair. Kakuro: 201 rébusů. Praha: BB art, 2006.

Kakuro: 100 rebusů. Praha: BB art, 2006. ISBN 4-02-084141-1.

Kakuro history. Conceptispuzzles.com [online]. Conceptis, 2023 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.conceptispuzzles.com/index.aspx?uri=puzzle/kakuro/history

Kakuro - Rules and strategy of puzzle games [online]. 2022 [cit. 2023-06-17]. Dostupné z: https://gambiter.com/puzzle/Kakuro.html

Kakuro techniques [online]. [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://www.kakuro.com/techniques.php

Kakuro Trivia. Puzzles Pages [online]. Paul Alan Grosse, 2023 [cit. 2023-06-17]. Dostupné z: http://www.puzzles.grosse.is-a-geek.com/kaktriv.html

Kakuro - Wikimedia Commons [online]. 2021 [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://commons.m.wikimedia.org/wiki/Kakuro#

DARLING, David. Latin square [online]. Great Britain: David Darling 2016©, 2016 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.daviddarling.info/encyclopedia/L/Latin_square.html

TING, Y. L. Teresa. Learning to Hypothesize with Confidence through Sudoku Game Play. ERIC [online]. https://eric.ed.gov/?, 2009 [cit. 2023-06-19]. ISSN ISSN-1559-663X. Dostupné z: http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ923445.pdf

Magický čtverec – mystický rébus s tisíciletou historií. Mozkolam.cz [online]. Mozkolam.cz, 2019 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://mozkolam.cz/historie-hlavolamu/magicky-ctverec/

CRILLY, A. J. Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát. Praha: Slovart, 2010. ISBN 978-80-7391-409-7.

FELGENHAUER, Bertram a Frazer JARVIS. Mathematics of Sudoku I [online]. 2006 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.646.8115

PEGG JR., Ed. Math Games: Sudoku Variations [online]. 2005 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://web.archive.org/web/20061013120205/http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_09_05_05.html

STICKELS, Terry. Math Puzzles and Brainteasers, Grades 6–8. United States of America: Jossey-Bass, 2009. ISBN 978-0-470-22720-6.

ADACHI, Paul J. C. a Teena WILLOUGHBY. More Than Just Fun and Games: The Longitudinal Relationships Between Strategic Video Games, Self-Reported Problem Solving Skills, and Academic Grades. Journal of Youth and Adolescence [online]. 2013, 42(7), 1041-1052 [cit. 2023-06-19]. ISSN 0047-2891. Dostupné z: doi:10.1007/s10964-013-9913-9

BRANT, Jiří. Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Metodický portál: Články [online]. 2005, 13.07.2005 [cit. 2023-06-19]. ISSN 1802-4785. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/253/NESTANDARDNI-APLIKACNI-ULOHY-A-PROBLEMY.html

Numb3rs 218: All's Fair: All's Fair. Numb3rs Math Activities [online]. https://pi.math.cornell.edu/~numb3rs/kostyuk, 2010 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://pi.math.cornell.edu/~numb3rs/kostyuk/num218.htm

BRANT, Jiří. Pojetí vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v RVP ZV - aktualizovaná verze. Metodický portál: Články [online]. 2008, 29.01.2008 [cit. 2023-06-19]. ISSN 1802-4785. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/1930/POJETI-VZDELAVACI-OBLASTI-MATEMATIKA-A-JEJI-APLIKACE-V-RVP-ZV-AKTUALIZOVANA-VERZE.html

Puzzle Tutorials. Big Ideas for Little Scholars [online]. Big Ideas for Little Scholars, 2023 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://bigideas4littlescholars.com/puzzle-tutorials/

HSIAO, Tsung-Chih, Dong-Xu LIU, Tzer-Long CHEN a Chih-Cheng CHEN. Research on Image Steganography Based on Sudoku Matrix. Symmetry [online]. 2021, 13(3)(387) [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://doi.org/10.3390/sym13030387

ASHLESH, Patil, Kishore K. DEEPAK a Kochhar Kanwal PREET. Role of prefrontal cortex during Sudoku task: fNIRS study. Translational Neuroscience [online]. 2020, 11(1), 419-427 [cit. 2023-06-19]. ISSN 2081-6936. Dostupné z: doi:10.1515/tnsci-2020-0147

RVP ZV - Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2021 [cit. 2023-06-19]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

SEILER, Jens. Rychle počítat-- a lépe si pamatovat: se sudoku. [Praha]: Euromedia Group, 2007. ISBN 978-80-242-1872-4.

FRIEDMAN, Naomi P., Akira MIYAKE, Lee J. ALTAMIRANO, Robin P. CORLEY, Susan E. YOUNG, Sally Ann RHEA a John K. HEWITT. Stability and change in executive function abilities from late adolescence to early adulthood: A longitudinal twin study. Developmental Psychology [online]. 2016, 52(2), 326-340 [cit. 2023-06-19]. ISSN 1939-0599. Dostupné z: doi:10.1037/dev0000075

SINDEN, Pete. Sudoku: přes 200 puzzle!. Praha: Academia, 2005. ISBN 80-200-1352-0.

Sudoku. Janko.at [online]. Angela und Otto Janko, 2023 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.janko.at/Raetsel/Sudoku/index.htm

Sudoku history. Https://www.conceptispuzzles.com/index.aspx [online]. Conceptis, 2023 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.conceptispuzzles.com/index.aspx?uri=puzzle/sudoku/history

Sudoku Puzzle -- Teaching Tips. Educationworld.com [online]. EDUCATION WORLD, 2023 [cit. 2023-06-19]. Dostupné z: https://www.educationworld.com/a_lesson/sudoku/sudoku_tips.shtml

Sudoku Tutoriál DushanCz: YouTube kanál [online]. [cit. 2023-06-19]. Dostupné z: https://www.youtube.com/@dushancz5176

MEPHAM, Michael S. Sudoku 3. Velké Přílepy: Lucka, 2005. ISBN 80-86325-09-1.

BOYER, Christian. Supplément de l'article "Les ancêtres français du sudoku [online]. 2006 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://web.archive.org/web/20071010081626/http://cboyer.club.fr/multimagie/English/SudokuAncestors.htm

SVELATO L’ENIGMA DEL SIGNIFICATO DEL QUADRATO MAGICO DEL SATOR?: di Ferdinando De Rosa e Floriana Bartolucci [online]. Itálie, 2021 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: http://www.ilpuntosulmistero.it/svelato-lenigma-del-significato-del-quadrato-magico-del-sator-di-ferdinando-de-rosa-e-floriana-bartolucci/

SNYDER, Thomas. The Art of Sudoku. Saint Emilion Ct: Grandmaster Puzzles, 2012. ISBN 978-0-9850094-0-3.

PINE, Russell, Theresa FLEMING, Simon MCCALLUM a Kylie SUTCLIFFE. The Effects of Casual Videogames on Anxiety, Depression, Stress, and Low Mood: A Systematic Review. Games for Health Journal [online]. 2020, 9(4), 255-264 [cit. 2023-06-19]. ISSN 2161-783X. Dostupné z: doi:10.1089/g4h.2019.0132

BENJAMIN, Arthur T. The Mathematics of Games and Puzzles: From Cards to Sudoku: Course Guidebook. United States of America: THE GREAT COURSES, 2013.

The new grid on the block. Theguardian.com [online]. UK: Guardian News and Media Limited 2011, 2011 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.theguardian.com/g2/story/0,,1569223,00.html

LOUIS LEE, N. Y., Geoffrey P. GOODWIN a P. N. JOHNSON-LAIRD. The psychological puzzle of Sudoku. Thinking & Reasoning [online]. 2008, 14(4), 342-364 [cit. 2023-06-16]. ISSN 1354-6783. Dostupné z: doi:10.1080/13546780802236308

DANESI, Marcel. The Puzzle Instinct: The Meaning of Puzzles in Human Life. Indiana: Indiana University Press, 2002. ISBN 0-253-34094-2.

BROOKER, Helen, Keith A. WESNES, Clive BALLARD, et al. The relationship between the frequency of number-puzzle use and baseline cognitive function in a large online sample of adults aged 50 and over. International Journal of Geriatric Psychiatry [online]. 2019, 34(7), 932-940 [cit. 2023-06-16]. ISSN 08856230. Dostupné z: doi:10.1002/gps.5085

DELAHAYE, Jean-Paul. The Science behind Sudoku. Scientific American [online]. 2006, 294(6), 80-87 [cit. 2023-06-16]. ISSN 0036-8733. Dostupné z: doi:10.1038/scientificamerican0606-80

TENGAH, Khairul A. Using Simplified Sudoku to Promote and Improve Pattern Discovery Skills Among School Children. Journal of Mathematics Education at Teachers College [online]. 2011, (2), 53-62 [cit. 2023-06-16]. ISSN 2156-1397. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/277245624_Using_Simplified_Sudoku_to_Promote_and_Improve_Pattern_Discovery_Skills_Among_School_Children

GARNER, Elizabeth A. What's the Real Secret Magic in the Magic Square? [online]. 2012 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.albrechtdurerblog.com/real-secret-in-the-magic-square/

MARTIN, Jerry. Why and how sudoku in schools: a low-tech tool to train brain gain. United Kingdom: Rowman & Littlefield, 2022. ISBN 9781475865783.

Why hand made. Nikoli.co.jp [online]. Japan: NIKOLI Co., 2021 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/sudoku/why_hand_made/

Why Is Kakuro Harder Than Sudoku?. Osgamers.com [online]. Old School Gamers, 2023 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://osgamers.com/frequently-asked-questions/why-is-kakuro-harder-than-sudoku

Zajímavé druhy Magických čtverců. Mozkolam.cz [online]. Mozkolam.cz, 2020 [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://mozkolam.cz/historie-hlavolamu/zajimave-druhy-magickych-ctvercu/

BOKŠTEFL, Luboš. 100 + 1 sudoku pro každého. Praha: Dokořán, 2005. ISBN 80-7363-043-5.

ZDROJE OBRÁZKŮ

[1] Albrecht Dürer, Melancholia I. In: . Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square

[2] Barvené a číselné znázornění hádanky. In: . Dostupné také z: https://pi.math.cornell.edu/~numb3rs/kostyuk/num218.htm

[3] Číselný klíč a odpovídající segment. In: . Dostupné také z: https://hobbylark.com/puzzles/how-to-play-kakuro-puzzles

[4] Hlavolam Bastien Vial-Jaime [online]. In: . [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: http://enigm-attic.blogspot.com/search/label/Kakuro

[5] Hlavolam na webu janko.at, zařazený do kategorie "lehký". In: . Dostupné také z: https://www.janko.at/Raetsel/Kakuro/092.a.htm

[6] Chrám Parsvanatha, Khajuraho. In: . Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/wiki/Parshvanatha_temple,_Khajuraho#/media/File:Parsvanatha_Temple_side_1_Khajuraho.jpg

[7] Kakuro [online]. [cit. 2023-06-16]. Dostupné z: https://commons.m.wikimedia.org/wiki/Kakuro

[8] Kakuro – Rules & Strategies: video [online]. In: . 2021 [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=BYX93SLkNrQ

[9] La Revue des Jeux (Recenze her), 21. srpna 1891. První známý výskyt mřížky 9x9 složené ze čtverců 3x3. In: . Dostupné také z: https://web.archive.org/web/20061210103525/http://cboyer.club.fr/multimagie/SupplAncetresSudoku.pdf

[10] Leonhard Euler. In: .

[11] Le Siècle, 19. listopadu 1892 - zadání; 3. prosince 1892 – řešení; La France, 6. července 1895 - zadání; 21. července 1895 - řešení. In: . Dostupné také z: https://web.archive.org/web/20061210103525/http://cboyer.club.fr/multimagie/SupplAncetresSudoku.pdf

[12] Magická želva se čtvercem Lo Shu. In: . Dostupné také z: https://mozkolam.cz/wp-content/uploads/2019/12/lo-shu.jpg

[13] Magický čtverec "Chautisa Yantra". In: . Dostupné také z: https://i.pinimg.com/originals/e6/ca/53/e6ca53e0a689696a0017ab9c9605dbbd.jpg

[14] Maki Kaji. In: . Dostupné také z: https://dailysudokupuzzles.com/wp-content/uploads/2023/04/image-4-1024x683.png

[15] Oppède-le-Vieux, Francie; Pompeje, Itálie; katedrála v Sieně, Itálie. In: . Dostupné také z: http://www.ilpuntosulmistero.it/svelato-lenigma-del-significato-del-quadrato-magico-del-sator-di-ferdinando-de-rosa-e-floriana-bartolucci/

[16] První Number Place puzzles. (Dell Pencil Puzzles & Word Games č. 16, str. 6, 1979-05). In: . Dostupné také z: https://web.archive.org/web/20061013120205/http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_09_05_05.html

[17] Přepis magického čtverce. In: . Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/wiki/Parshvanatha_temple,_Khajuraho

[18] Řecko-latinský čtverec. In: . Dostupné také z: https://www.sudokudragon.com/peulersquares.png

[19] Řešení pro pět hodnosti a pět pluků. In: . Dostupné také z: https://pi.math.cornell.edu/~numb3rs/kostyuk/num218.htm

[20] Složitý hlavolam Kakuro [online]. In: . [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://www.janko.at/Raetsel/Kakuro/224.a.htm

[21] Stránky časopisu Dell Official Crossword Puzzle, červenec 1966 [online]. In: . [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://archive.org/details/dellofficialcrosswordpuzzlesjuly1966/page/44/mode/2up

[22] Ukázka zadání, průběhu a hotové řešení Kakuro ze stránek nakladatelství Nikoli. In: . Dostupné také z: https://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/kakuro/

SEZNAM OBRÁZKŮ

Příloha 1 – součtová tabulka včetně jednoznačných součtů

Pomůcka pro luštitele Kakuro a Killer Sudoku

2	3	12	12345	15	5
	4	13	12346	16	
	5	14 23	12347 12356	17	
	6	15 24	12348 12357 12456	18	
	7	16 25 34	12349 12358 12367 12457 13456	19	
	8	17 26 35	12359 12368 12458 12467 13457 23456	20	
	9	18 27 36 45	12369 12378 12459 12468 12567 13458 13467 23457	21	
	10	19 28 37 46	12379 12469 12478 12568 13459 13468 13567 23458 23467	22	
	11	29 38 47 56	12389 12479 12569 12578 13469 13478 13568 14567 23459 23468 23567	23	
	12	39 48 57	12489 12579 12678 13479 13569 13578 14568 23469 23478 23568 24567	24	
	13	49 58 67	12589 12679 13489 13579 13678 14569 14578 23479 23569 23578 24568 34567	25	
	14	59 68	12689 13589 13679 14579 14678 23489 23579 23678 24569 24578 34568	26	
	15	69 78	12789 13689 14589 14679 15678 23589 23679 24579 24678 34569 34578	27	
	16	79	13789 14689 15679 23689 24589 24679 25678 34579 34678	28	
	17	89	14789 15689 23789 24689 25679 34589 34679 35678	29	
3	6	123	15789 24789 25689 34689 35679 45678	30	
	7	124	16789 25789 34789 35689 45679	31	
	8	125 134	26789 35789 45689	32	
	9	126 135 234	36789 45789	33	
	10	127 136 145 235	46789	34	
	11	128 137 146 236 245	56789	35	
	12	129 138 147 156 237 246 345	123456	21	6
	13	139 148 157 238 247 256 346	123457	22	
	14	149 158 167 239 248 257 347 356	123458 123467	23	
	15	159 168 249 258 267 348 357 456	123459 123468 123567	24	
	16	169 178 259 268 349 358 367 457	123469 123478 123568 124567	25	
	17	179 269 278 359 368 458 467	123479 123569 123578 124568 134567	26	
	18	189 279 369 378 459 468 567	123489 123579 123678 124569 124578 134568 234567	27	
	19	289 379 469 478 568	123589 123679 124579 124678 134569 134578 234568	28	
	20	389 479 569 578	123689 124589 124679 125678 134579 134678 234569 234578	29	
	21	489 579 678	123789 124689 125679 134589 134679 135678 234579 234678	30	
	22	589 679	124789 125689 134689 135679 145678 234589 234679 235678	31	
	23	689	125789 134789 135689 145679 234689 235679 245678	32	
	24	789	126789 135789 145689 234789 235689 245679 345678	33	
4	10	1234	136789 145789 235789 245689 345679	34	
	11	1235	146789 236789 245789 345689	35	
	12	1236 1245	156789 246789 345789	36	
	13	1237 1246 1345	256789 346789	37	
	14	1238 1247 1256 1346 2345	356789	38	
	15	1239 1248 1257 1347 1356 2346	456789	39	
	16	1249 1258 1267 1348 1357 1456 2347 2356	1234567	28	7
	17	1259 1268 1349 1358 1367 1457 2348 2357 2456	1234568	29	
	18	1269 1278 1359 1368 1458 1467 2349 2358 2367 2457 3456	1234569 1234578	30	
	19	1279 1369 1378 1459 1468 1567 2359 2368 2458 2467 3457	1234579 1234678	31	
	20	1289 1379 1469 1478 1568 2369 2378 2459 2468 2567 3458 3467	1234589 1234679 1235678	32	
	21	1389 1479 1569 1578 2379 2469 2478 2568 3459 3468 3567	1234689 1235679 1245678	33	
	22	1489 1579 1678 2389 2479 2569 2578 3469 3478 3568 4567	1234789 1235689 1245679 1345678	34	
	23	1589 1679 2489 2579 2678 3479 3569 3578 4568	1235789 1245689 1345679 2345678	35	
	24	1689 2589 2679 3489 3579 3678 4569 4578	1236789 1245789 1345689 2345679	36	
	25	1789 2689 3589 3679 4579 4678	1246789 1345789 2345689	37	
	26	2789 3689 4589 4679 5678	1256789 1346789 2345789	38	
	27	3789 4689 5679	1356789 2346789	39	
	28	4789 5689	1456789 2356789	40	
	29	5789	2456789	41	
	30	6789	3456789	42	
			12345678	36	8
			12345679	37	
			12345689	38	
			12345789	39	
			12346789	40	
			12356789	41	
			12456789	42	
			13456789	43	
			23456789	44	
			123456789	45	9

Příloha 2 - rovnice se Sudoku

Pokyny:

1. Vyřeš rovnici, řešení zapiš do tabulky. Každé políčko má své souřadnice – řádek a sloupec, například první políčko má souřadnice A1. Doplň čísla v mřížce Sudoku dle výsledků řešení rovnic.
2. Vylušti Sudoku, které sestavíš ze svých odpovědí.
3. Držím palce, ať vše vyjde 😊

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B									
C									
D									
E									
F									
G									
H									
J									

	rovnice	řešení		rovnice	řešení
A1	$3a+4=a+18$		A2	$6-3(2p-4)= -18$	
A3	$2c-3(c-4)=c+2$		A6	$0,5t - 3t+5=0$	
A9	$4(1/4+x)=5$		B6	$1-6(y+3) = -23$	
B7	$-2s -5 = -11$		C1	$4u-7 = 5-2u$	
D3	$-2x-13= -3x-5$		D5	$5z+2= 2z+5$	
D8	$4r+9= 6r-5$		E1	$4s-2s=18$	
E6	$2/3 + 3t/4 = 31/6$		E8	$7x-10=x+2$	
E9	$-9 = p-14$		F4	$2(a+2)=3(a-1)$	
F7	$4/6 = m/9$		F8	$2b +4=6a-32$	
G1	$-4(x+6)=-40$		G3	$2x-7=20-x$	
G4	$8y-(2y-3)=9$		H4	$2(8+p)=22$	
I2	$3d - (d+4)= -2$		I6	$5c-3=2c +12$	
I8	$3x -2 = 16$				

ŘEŠENÍ

Doplněné výsledky:

	rovnice	řešení		rovnice	řešení
A1	3a+4=a+18	7	A2	6-3(2p-4)= -18	6
A3	2c-3(c-4)=c+2	5	A6	0,5t - 3t+5=0	2
A9	4(1/4+x)=5	1	B6	1-6(y+3) = -23	1
B7	-2s -5 = -11	3	C1	4u-7 = 5-2u	2
D3	-2x-13= -3x-5	8	D5	5z+2= 2z+5	1
D8	4y+9=6y-5	7	E1	4s-2s=18	9
E6	2/3 + 3t/4 = 31/6	6	E8	7x-10=x+2	2
E9	-9 = p-14	5	F4	2(a+2)=3(a-1)	7
F7	4/6 = m/9	6	F8	2b + 4 = 6b -32	9
G1	-4(x+6)=-40	4	G3	2x-7=20-x	9
G4	8y-(2y-3)=9	1	H4	2(8+p)=22	3
I2	3d - (d+4)= -2	1	I6	5c-3=2c +12	5
I8	3x -2 = 16	6			

Získaná mřížka Sudoku:

7	6	5			2			1
					1	3		
2								
		8		1			7	
9					6		2	5
			7			6	9	
4		9	1					
			3					
	1				5		6	

Vyřešená mřížka Sudoku:

7	6	5	8	3	2	9	4	1
8	9	4	6	7	1	3	5	2
2	3	1	5	9	4	7	8	6
6	5	8	2	1	9	4	7	3
9	7	3	4	8	6	1	2	5
1	4	2	7	5	3	6	9	8
4	2	9	1	6	8	5	3	7
5	8	6	3	4	7	2	1	9
3	1	7	9	2	5	8	6	4

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Taťána Honkyšová
Katedra:	Matematiky
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.
Rok obhajoby:	2023

Název práce:	Sudoku a Kakuro
Název v angličtině:	Sudoku and Kakuro
Anotace práce:	Diplomová práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. Teoretická část se zabývá podrobným zavedením a analyzováním logických her Sudoku a Kakuro. Je zde představena historie těchto her, stejně jako jejich logické principy a strategie. Důraz je kladen na vztah těchto her k oblasti matematiky a jejich potenciální aplikaci ve výuce matematiky na základních školách. Praktická část práce se zaměřuje na integraci her Sudoku a Kakuro do výuky matematiky na základních školách. Byla vytvořena sada cvičných úloh, instruktážní video a úvodní prezentace pro Kakuro. Materiály jsou navrženy tak, aby podpořily zájem studentů o matematiku a **rozvoj** jejich logického myšlení a řešení problémů.
Klíčová slova:	Sudoku, Kakuro, logická hra, magické čtverce, latinské čtverce, nestandardní aplikační úlohy a problémy, klíčové kompetence
Anotace v angličtině:	The thesis is divided into theoretical and practical parts. The theoretical part deals with a detailed introduction and analysis of Sudoku and Kakuro logic games. The history of these games is presented, as well as their logical principles and strategies. Emphasis is placed on the relation of these games to the field of mathematics and their potential application in the teaching of mathematics in primary schools. The practical part of the thesis focuses on the integration of Sudoku and Kakuro games into the teaching of mathematics in primary schools. A set of practice problems, an instructional video and an introductory presentation for Kakuro were created. The materials are designed to promote students' interest in mathematics and the development of their logical thinking and problem solving skills.

Klíčová slova v angličtině:	Sudoku, Kakuro, logic game, magic squares, latin squares, non-standard application tasks and problems, key competencies
Přílohy vázané v práci:	Příloha 1 – součtová tabulka včetně jednoznačných součtů Příloha 2 - rovnice se Sudoku
Rozsah práce:	114 stran, 3 strany přílohy
Jazyk práce:	Český jazyk