TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Webové stránky pro výuku a testování stereometrie

Bakalářská práce

Studijní program: B1701 – Fyzika

Studijní obory: 7504R006 – Fyzika se zaměřením na vzdělávání
7504R015 – Matematika se zaměřením na vzdělávání

Autor práce: **Adéla Horáková**

Vedoucí práce: Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

Liberec 2019

Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2017/2018**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Adéla Horáková**
Osobní číslo:	**P16000207**
Studijní program:	**B1701 Fyzika**
Studijní obory:	**Fyzika se zaměřením na vzdělávání**
	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Název tématu:	**Webové stránky pro výuku a testování stereometrie**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je tvorba vlastních webových stránek, které budou sloužit jako interaktivní pomůcka při výuce, procvičování, ale i testování stereometrie na střední škole. Webové stránky budou vytvořeny na základě prostudovaných dostupných středoškolských učebnic, sbírek úloh a webových stránek zabývajících se problematikou stereometrie. Na webových stránkách bude umístěna teorie, řešené i neřešené příklady (především stereometrické konstrukční úlohy) a taktéž testy. K vytvoření webových stránek lze s výhodou užít geometrického programu GeoGebra.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

- Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia stereometrie. Prometheus,Praha 2009. ISBN 978-80-7196-389-9.
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha 2010.ISBN 978-80-7196-356-1.
- Kiselev, A. P.: Kiselev's geometry. Book II. Stereometry (adapted from Russian by Alexander Givental). Hardcover, Sumizdat 2008.
- Hohenwarter, M. Hohenwarter, J.: Introduction to GeoGebra Version 4.4. Florida Atlantic University, Boca Raton, USA. International GeoGebra Institute 2013.
- Ročenky české matematické olympiády.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **19. dubna 2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18. dubna 2019**

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

Technická univerzita v Liberci · 10 ·
L.S.

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

V Liberci dne 24. dubna 2018

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že texty tištěné verze práce a elektronické verze práce vložené do IS STAG se shodují.

10. 4. 2019 Adéla Horáková

Poděkování

Touto cestou bych chtěla poděkovat paní Mgr. Daniele Bímové za poskytnutí konzultace, cenných rad, a připomínek při vedení mé bakalářské práce.

Anotace

Stereometrie je jedním z témat vyučovaných na středních školách v ČR. Při výuce stereometrie lze s výhodou užít moderních metod výpočetní techniky a především také vhodných geometrických programů, např. geometrického programu GeoGebra. V programu GeoGebra je možné vytvořit zdrojové soubory pro interaktivní teoretický výklad stereometrie, ale také zdrojové soubory pro vytvoření grafického zadání, řešení, zápisu konstrukce, ale i metodických pokynů řešených stereometrických úloh a taktéž zdrojové soubory grafického zadání neřešených stereometrických konstrukčních úloh a testů. Všechny výše uvedené zdrojové soubory je možné použít pro tvorbu webových stránek zaměřených na výuku a testování stereometrie.

Klíčová slova

Stereometrie, webové stránky, GeoGebra, studijní materiály, testování, procvičování, stereometrické úlohy

Annotation

Stereometry is one of the topics taught at secondary schools in the Czech Republic. Modern methods of a computing technics and above all also suitable geometric softwares, e.g. geometric freeware GeoGebra, can be used with advantage in the teaching process of the stereometry. In GeoGebra it is possible to create source files for interactive theoretical explanation of stereometry, but also source files for creating a graphical input, a solution, a symbolic notation of a construction, as well as methodical instructions of solved stereometric tasks and also source files of graphic input of unsolved stereometric constructive tasks and tests. All the above-mentioned source files can be used for creating web pages focused on teaching and testing stereometry.

KeyWords

Stereometry, websites, GeoGebra, study materials, testing, practising, stereometric tasks

Obsah

Úvod

Stereometrie je jedním z témat vyučovaných na středních školách v České republice. Jedná se o oblast geometrie, která se zabývá geometrií v prostoru a která k úspěšnému zvládnutí vyžaduje dostatečnou úroveň prostorové představivosti. Prostorová představivost je mj. potřebná v mnoha pracovních odvětvích, například v letectví, strojírenství, architektuře a mnoha dalších. Při výuce stereometrie je možné využít množství geometrických programů. Jedním z vhodných geometrických programů je např. freewarový program GeoGebra. Veškeré ilustrační obrázky i dynamické applety zařazené do této práce byly vytvořeny právě v programu GeoGebra. Sestavené dynamické applety mají učitelům a studentům středních škol pomoci s výukou, procvičováním a testováním různých stereometrických témat interaktivní formou. Tato práce by měla sloužit ke zlepšení výuky stereometrie na středních školách a pomoci studentům s lepší orientací v prostoru a snazším vytvořením představ objektů a situací při řešení prostorových úloh.

Bakalářská práce je rozdělena do šesti kapitol, které jsou dále členěny do několika podkapitol. V první kapitole jsou v tabulce připomenuta základní tělesa, která si studenti jistě pamatují již ze základní školy. Dále jsou zmíněny základní geometrické pojmy v prostoru a je definováno rovnoběžné promítání, v němž jsou zobrazeny objekty v celé bakalářské práci i v dynamických appletech.

Druhá kapitola je věnována polohovým vlastnostem geometrických útvarů v prostoru. Postupně jsou nejprve vyloženy a posléze procvičeny vzájemné polohy dvou přímek, dvou rovin, a nakonec vzájemné polohy přímky a roviny. V každé podkapitole se nacházejí ukázkové příklady obsahující slovní i grafické řešení. Na webových stránkách jsou tyto příklady vloženy v podobě dynamických appletů, se kterými studenti mohou pohybovat tak, aby získali co nejlepší úhel pohledu na danou prostorovou situaci. V další podkapitole jsou probírány řezy těles. K této podkapitole je vytvořeno několik úloh na procvičení. Na webových stránkách jsou applety dvojího druhu. V appletech s řešenými příklady jsou postupy řešení krokovány pomocí dynamického nástroje programu GeoGebra (tzv. posuvníku) a v appletech s neřešenými úlohami jsou uvedena pouze zadání úloh (slovní i grafická) sloužící studentům k procvičení získaných znalostí.

Ve třetí kapitole se zabýváme metrickými úlohami, tj. jsou probírány odchylky dvou přímek, dvou rovin a odchylky přímky s rovinou, dále pak také vzdálenosti bodů, přímek a rovin. Při řešení metrických úloh jsou s výhodou užita geometrická tělesa, jako jsou krychle, kvádry, jehlany a další, za účelem získání názornějších představ.

V kapitole objemy a povrchy těles jsou připomenuty pojmy objem a povrch a jsou sepsány známé vzorce pro výpočtem objemů a povrchů základních těles jako krychle, kvádr, jehlan, kužel, válec a koule. Je vybráno a uvedeno několik úloh na procvičení, k nimž se postupy a výpočty nacházejí v dynamických appletech umístěných na webových stránkách.

Poslední kapitola stručně seznamuje s historickým vývojem geometrie, především prostorové. Jedná se o část, která má přiblížit časovou linii některých objevů, sahajících dokonce i několik staletí před náš letopočet.

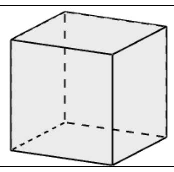
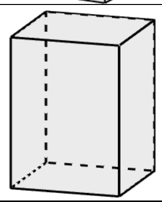
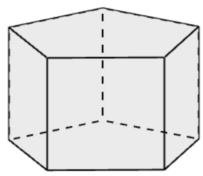
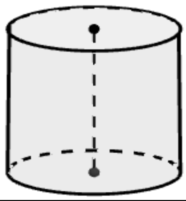
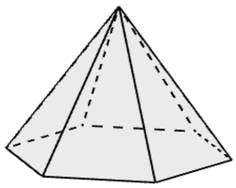
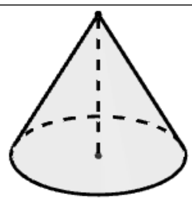
Bakalářská práce je podkladem tzv. GeoGebra knihy. Ta tvoří volně přístupné webové stránky obsahující pdf soubory s teoretickými poznámkami, řešenými příklady, úlohami na procvičení a testy. Takto připravené webové stránky mohou sloužit jako učební a testovací pomůcky. Jedná se o stránky, které mají pomoci studentům při studium stereometrie a učitelům s vymýšlením aktivit vhodných při výuce stereometrie.

Webové stránky v podobě GeoGebra knihy s názvem „Výuka a testování stereometrie" lze najít pod odkazem: https://ggbm.at/y8x7yuaz

1 Zavedení základních objektů a pojmů

1.1 Tělesa

K modelování různých prostorových situací budeme s výhodou využívat sepětí základních geometrických pojmů a objektů s tělesy. Uvedeme tedy přehled základních geometrických těles a zopakujeme některé jejich charakteristické vlastnosti. [1]

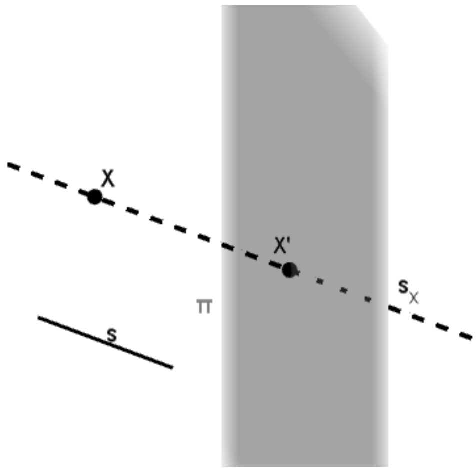
Název	Obrázek	Základní charakteristické vlastnosti
Krychle		- všechny stěny jsou tvořeny shodnými čtverci
Kvádr		- protější stěny jsou tvořeny shodnými obdélníky, popř. čtverci
Hranol		- obě podstavy tvoří shodné n-úhelníky - boční stěny jsou tvořeny obdélníky, případně rovnoběžníky pravidelný *n*-boký hranol: - pravidelné *n*-úhelníky tvoří podstavy - obdélníky, popř. čtverce tvoří stěny hranolu
Rotační válec		- rotací obdélníku, popř. čtverce kolem přímky, která obsahuje jednu jeho stranu, vznikne rotační válec - podstavy jsou tvořeny shodnými kruhy
Jehlan		- podstava je tvořena n-úhelníkem - boční stěny jsou tvořeny trojúhelníky pravidelný *n*-boký jehlan: - podstava je pravidelný *n*-úhelník - boční stěny jsou tvořeny shodnými rovnoramennými trojúhelníky
Kužel		- vzniká rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem přímky, která obsahuje jednu jeho odvěsnu

Tabulka 1

1.2 Rovnoběžné promítání

Obrázky vložené v textu i používané v appletech jsou zobrazeny v rovnoběžném promítání, které je poměrně názorné a jednoduché.

Rovnoběžné promítání je určeno rovinou π a přímkou *s,* která protíná rovinu π právě v jednom bodě, tj. přímka *s* je s rovinou π různoběžná. Rovina π se nazývá průmětna, přímka *s* určuje směr promítání. Průmět *X'* libovolného bodu *X* v prostoru získáme takto: Bodem *X* vedeme přímku s_x rovnoběžnou s přímkou *s*; bod *X'* je průsečík přímky s_x s průmětnou π. [3]



Obrázek 1.2-1- Rovnoběžné promítání

Při konstrukci rovnoběžných průmětů prostorových útvarů využíváme těchto vlastností rovnoběžného promítání:

1) Průmětem přímky je přímka nebo bod.
2) Průmětem dvou rovnoběžných přímek jsou dvě rovnoběžné přímky nebo dva body.
3) Jestliže se dvě rovnoběžné přímky *p*, *q* zobrazí (promítnou) jako dvě přímky, potom průměty úseček *AB*, *CD*, které leží po řadě na přímkách *p*, *q*, jsou úsečky *A'B'*, *C'D'*, přičemž platí: $|A'B'| : |C'D'| = |AB| : |CD|$.
   Tato vlastnost platí také tehdy, když úsečky *AB* a *CD* leží na jedné přímce.
4) Geometrické útvary, které leží v rovinách rovnoběžných s průmětnou (v tzv. průčelných rovinách), se zobrazí jako útvary shodné s promítanými útvary, tj. se svými vzory.

1.3 Základní pojmy geometrie v prostoru

Část geometrie zabývající se prostorovou geometrií nazýváme stereometrie. Prostor se skládá z bodů, jeho nejdůležitějšími podmnožinami jsou roviny a přímky. Roviny budeme označovat malými písmeny řecké abecedy*: α, β, …, π, ρ, σ*, …

Budeme-li uvažovat základní geometrické objekty či útvary, které leží v určité rovině v prostoru, můžeme využít všech dosavadních znalostí z planimetrie. V souladu s tím budeme používat dosavadní označení pro body (*A, B, C*, …) a přímky (*a, b, c*, ...).

Vztahy mezi základními objekty lze vyjádřit a zapsat takto:

Bod je prvkem přímky (tj. bod leží na přímce) … $A \in p$;

Bod je prvkem roviny (tj. bod leží v rovině) … $A \in \alpha$;

Přímka je podmnožinou roviny (tj. přímka leží v rovině) … $p \subset \sigma$.

Rovina je jednoznačně určena a) třemi body, které neleží na jedné přímce

b) přímkou a bodem, který na ní neleží

c) dvěma různoběžnými přímkami

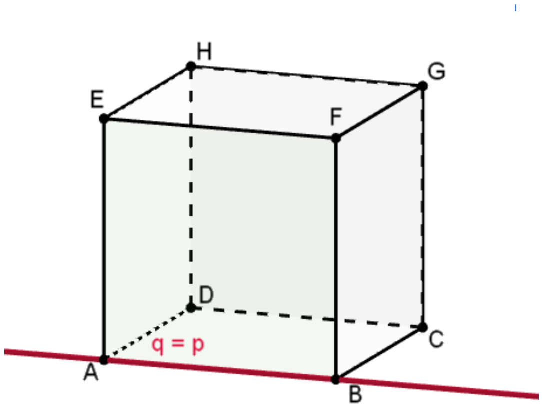
d) dvěma různými navzájem rovnoběžnými přímkami

Rovinu α určenou body A, B, C nazýváme rovina ABC a označujeme ji $\alpha \equiv \leftrightarrow ABC$. Jestliže bod A neleží na přímce p, lze mluvit o jediné rovině Ap; jestliže přímky p, q jsou různoběžné, lze mluvit o jediné rovině pq (tyto roviny označujeme $\beta \equiv \leftrightarrow Ap$ nebo $\gamma \equiv \leftrightarrow pq$).

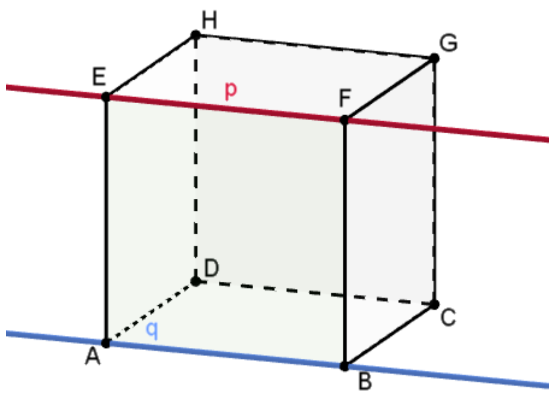
2 Polohové vlastnosti útvarů v prostoru

2.1 Vzájemná poloha dvou přímek

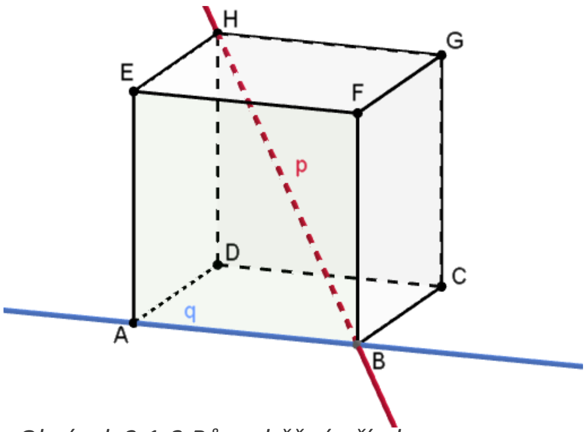
Z planimetrie víme, že v jedné rovině mohou být dvě různé přímky buď rovnoběžné totožné, rovnoběžné různé nebo různoběžné podle toho, jestli buď mají společný alespoň jeden bod, nebo nemají. V prostoru však existuje také dvojice přímek, které neleží v jedné rovině. Takové přímky se nazývají mimoběžné.



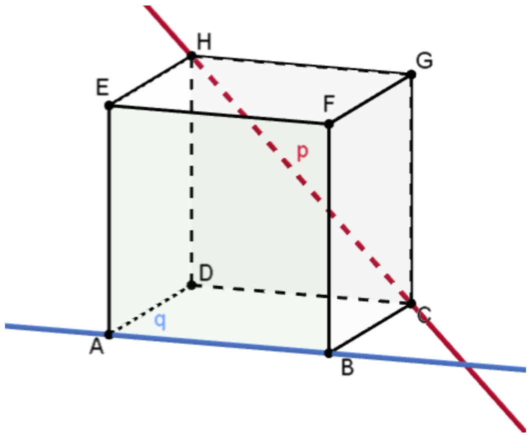
Obrázek 2.1-1 Rovnoběžné totožné (splývající) přímky



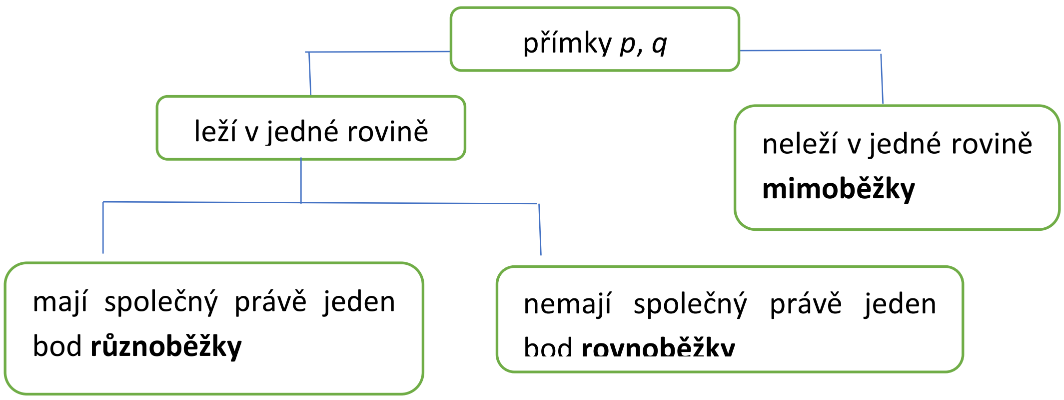
Obrázek 2.1-2 Rovnoběžné různé přímky



Obrázek 2.1-3 Různoběžné přímky



Obrázek 2.1-4 Mimoběžné přímky



Dvě přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, když jsou totožné nebo když leží v jedné rovině a nemají žádný společný bod.

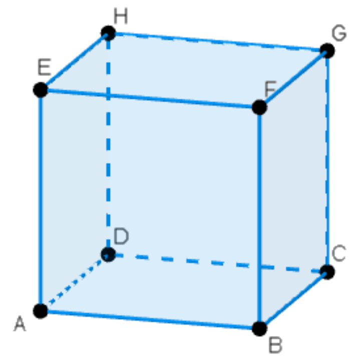
Pro každé dvě různé rovnoběžné přímky prostoru existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.

O rovině $\gamma \equiv pq$ mluvíme tehdy, když přímky *p, q* jsou různoběžné nebo rovnoběžné různé.

Příklad 2.1.1

Rozhodněte o vzájemné poloze jednotlivých dvojic přímek:

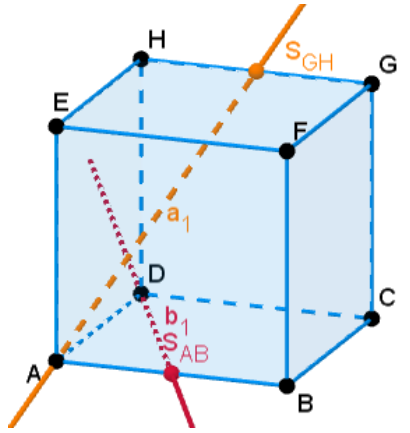
1) $a_1 \equiv AS_{GH}$, $b_1 \equiv DS_{AB}$
2) $a_2 \equiv BS_{CG}$, $b_2 \equiv AS_{CH}$
3) $a_3 \equiv AS_{CH}$, $b_3 \equiv S_{AE}S_{GH}$
4) $a_4 \equiv EC$, $b_4 \equiv AS_{GH}$



Obrázek 2.1-5 Základní krychle

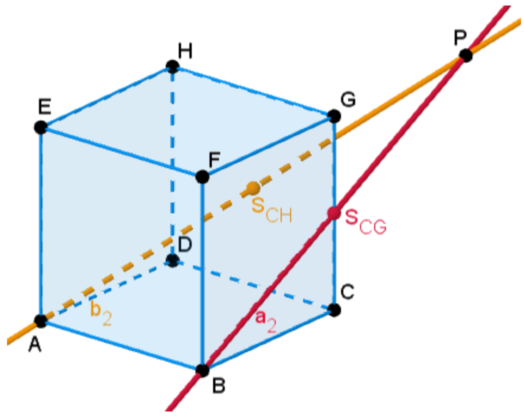
Řešení: Obrázky jsou pouze ilustrační, na webových stránkách lze s obrázky otáčet tak, aby byly pro studenty více názorné.

1) Z obrázku 2.1-6 je patrné, že přímky a_1 a b_1 nemají žádný společný bod a neleží v jedné rovině, proto jsou přímky <u>mimoběžné</u>.



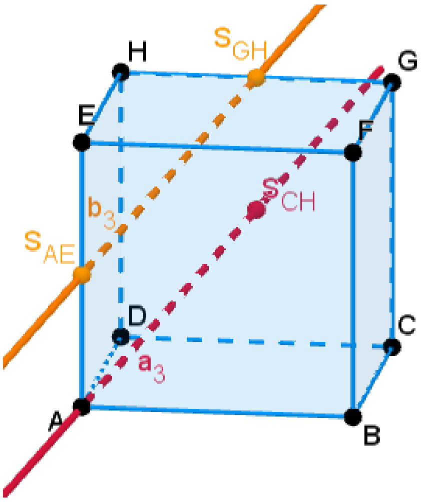
Obrázek 2.1-6

2) Z obrázku 2.1-7 je zřejmé, že přímky a_2 a b_2 leží v rovině ABS_{CG} a že mají společný bod *P*, proto jsou tyto přímky navzájem <u>různoběžné</u>.



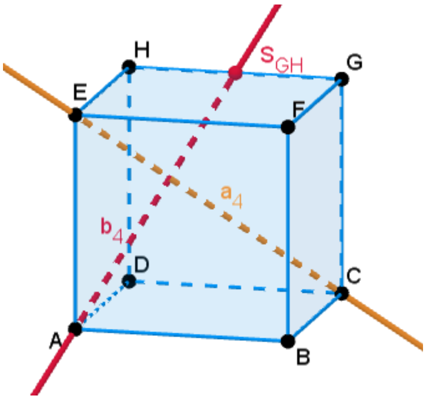
Obrázek 2.1-7

Z obrázku 2.1-8 je patrné, že přímka b_3 leží ve stejné rovině jako přímka a_3, ale přitom nemají žádný společný bod, proto jsou tyto přímky rovnoběžné.

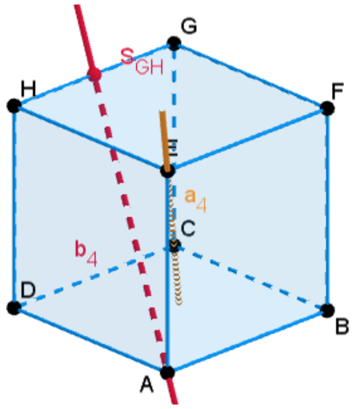


Obrázek 2.1-8

3) Z obrázku 2.1-9 není hned na první pohled zřejmé, zda se jedná o různoběžky nebo mimoběžky. Proto je vložen obrázek 2.1-10, na němž je krychle zobrazena z jiného úhlu pohledu. Díky tomuto obrázku můžeme říct, že přímky a_4 a b_4 neleží v jedné rovině a nemají společný průsečík, proto jsou přímky mimoběžné.



Obrázek 2.1-9

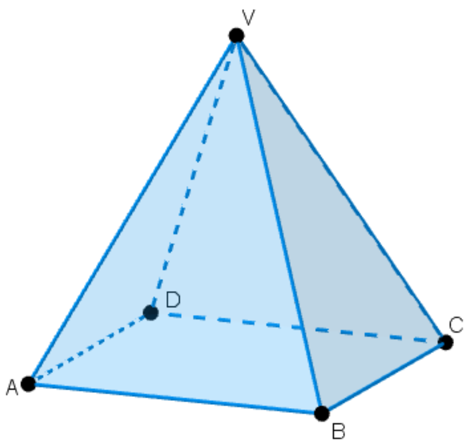


Obrázek 2.1-10

Příklad 2.1.2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Rozhodněte o vzájemné poloze dvojice přímek:

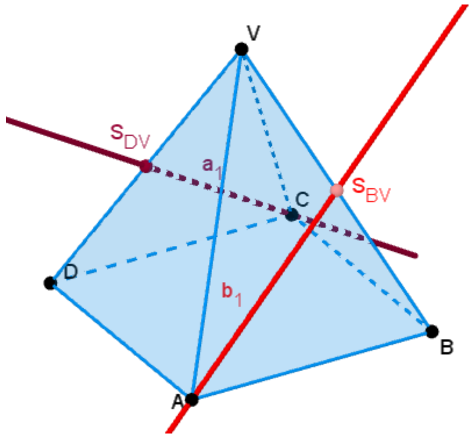
1) $a_1 \equiv CS_{DV}$, $b_1 \equiv AS_{BV}$
2) $a_2 \equiv AB$, $b_2 \equiv S_{CV}S_{DV}$
3) $a_3 \equiv CS_{DV}$, $b_3 \equiv BS_{AV}$
4) $a_4 \equiv DS_{BC}$, $b_4 \equiv S_{BV}S_{DV}$



Obrázek 2.1-11

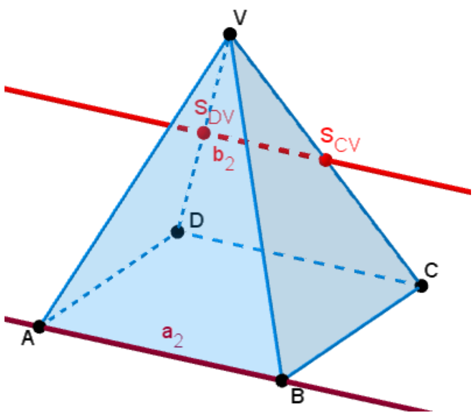
Řešení: Obrázky umístěné v textu práce jsou pouze ilustrační, na webových stránkách lze s obrázky otáčet tak, aby prostorové situace byly pro studenty více názorné.

1) Z obrázku 2.1-12 je patrné, že přímka a_1 neleží ve stejné rovině jako přímka b_1, proto jsou přímky mimoběžné.



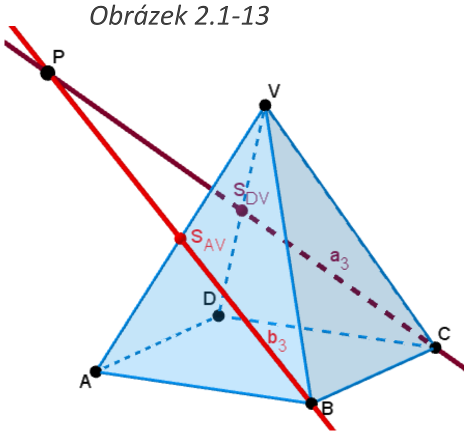
Obrázek 2.1-12

2) Z obrázku 2.1-13 je zřejmé, že přímkou a_2 lze proložit rovinu, která by obsahovala i přímku b_2. Přímky ale nemají žádný společný bod, a proto jsou rovnoběžné.



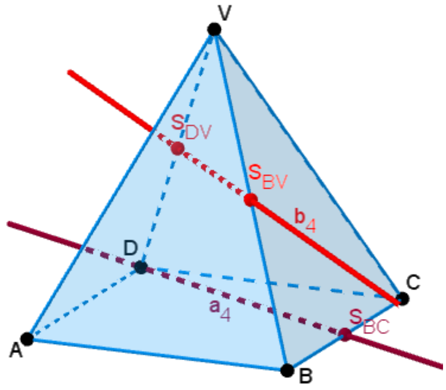
Obrázek 2.1-13

3) Z obrázku 2.1-14 je patrné, že přímky a_3 a b_3 leží v jedné rovině BCS_{DV} a mají právě jeden společný bod P, proto jsou tyto přímky různoběžné.



Obrázek 2.1-14

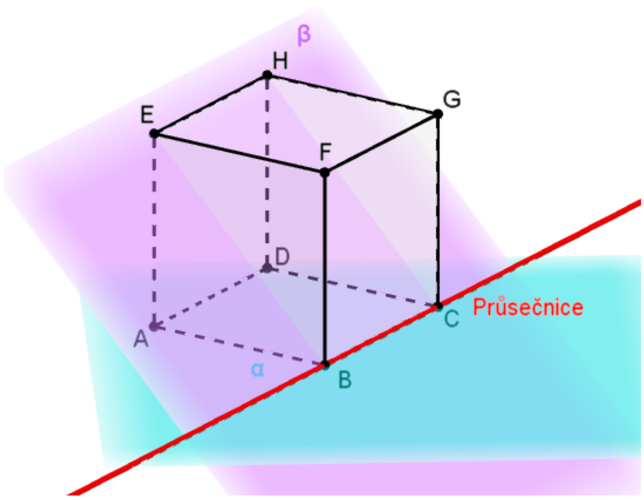
4) Z obrázku 2.1-15 je vidět, že přímka a_4 neleží s přímkou b_4 v jedné rovině, a také že nemajíc žádný společný bod, proto jsou přímky <u>mimoběžné</u>.



Obrázek 2.1-15

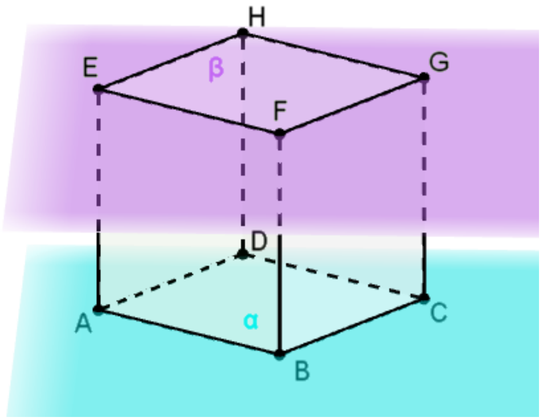
2.2 Vzájemná poloha dvou rovin

Určení vzájemné polohy dvou rovin rozhodneme podle jejich průniku. Mají-li dvě různé roviny neprázdný průnik, potom je jejich průnikem přímka, kterou nazýváme průsečnice těchto rovin. Dvě různé roviny s neprázdným průnikem se nazývají různoběžné.

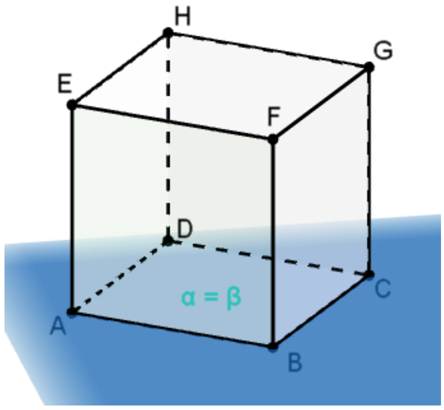


Obrázek 2.2-1 Různoběžné roviny

Druhá možnost je, že roviny buď mají nekonečně mnoho společných bodů, nebo mají prázdný průnik. V těchto případech říkáme, že roviny jsou buď rovnoběžné totožné (splývající), nebo rovnoběžné různé.



Obrázek 2.2-2a Rovnoběžné různé roviny



Obrázek 2.2-2b Rovnoběžné totožné roviny

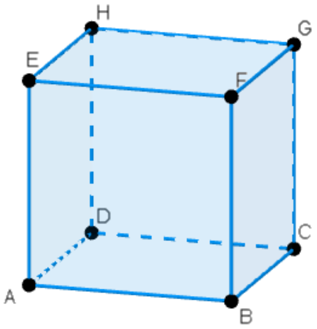
roviny α, β

průnikem je přímka	průnikem není přímka
α a β jsou různoběžné	**α a β jsou rovnoběžné**

Příklad 2.2.1

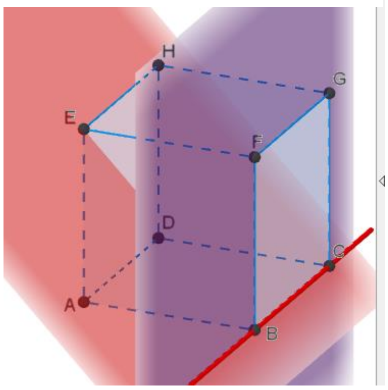
Je dána krychle *ABCDEFGH*. Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin:

1. $\alpha \equiv BCH$, $\beta \equiv BCF$
2. $\eta \equiv EFG$, $\vartheta \equiv BCD$
3. $\delta \equiv S_{AB}S_{GH}S_{CG}$, $\varphi \equiv EFS_{CD}$



Obrázek 2.2-3

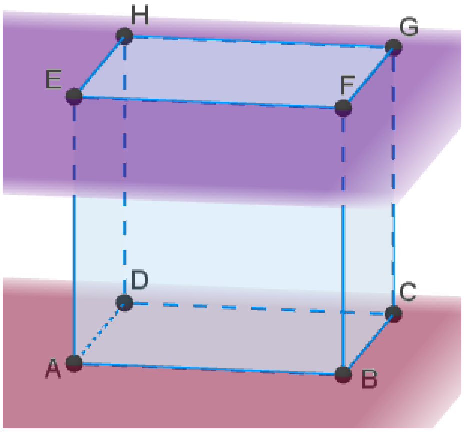
Řešení: Obrázky v textu jsou pouze ilustrační, na webových stránkách lze s obrázky otáčet, čímž se stávají názornějšími.



Obrázek 2.2-4

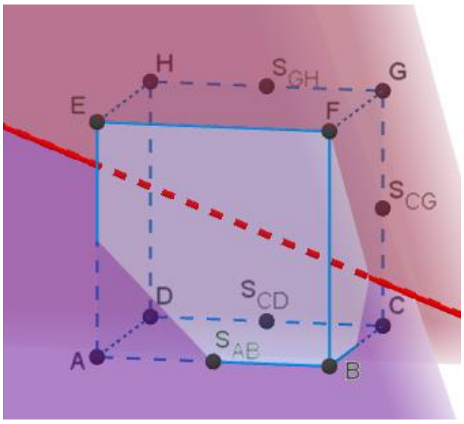
1) Z obrázku 2.2-4 je patrné, že rovina α s rovinou β mají společnou přímku, proto jsou roviny navzájem <u>různoběžné</u>.

2) Z obrázku 2.2-5 je zřejmé, že rovina η je s rovinou ϑ <u>rovnoběžná různá,</u> neboť roviny nemají žádný společný bod.



Obrázek 2.2-5

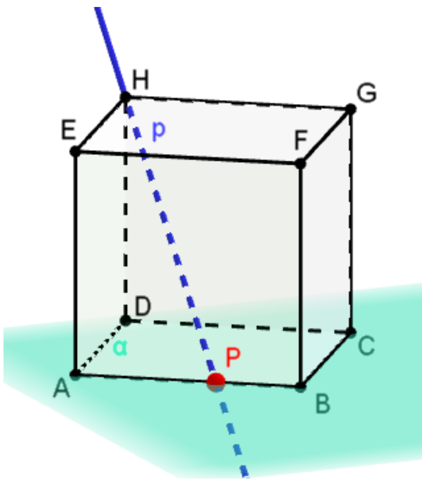
3) Z obrázku 2.2-6 je vidět, že rovina δ má s rovinou φ společnou přímku, proto jsou tyto roviny navzájem <u>různoběžné</u>.



Obrázek 2.2-6

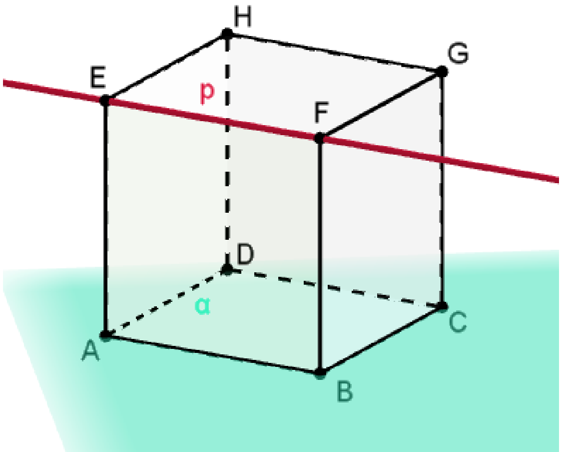
2.3 Vzájemná poloha přímky a roviny

Vzájemná poloha přímky a roviny je rovněž určena jejich průnikem. Jestliže průnikem přímky a roviny je právě jeden bod, říkáme, že přímka a rovina jsou různoběžné, a jejich společný bod nazveme průsečík. Průsečík označíme *P*.

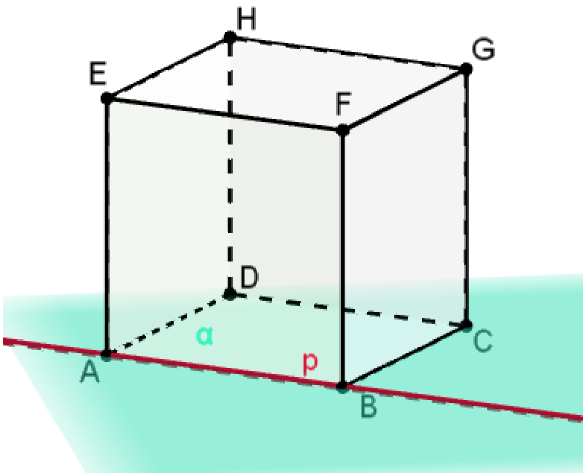


Obrázek 2.3-1 Různoběžná poloha přímky a roviny

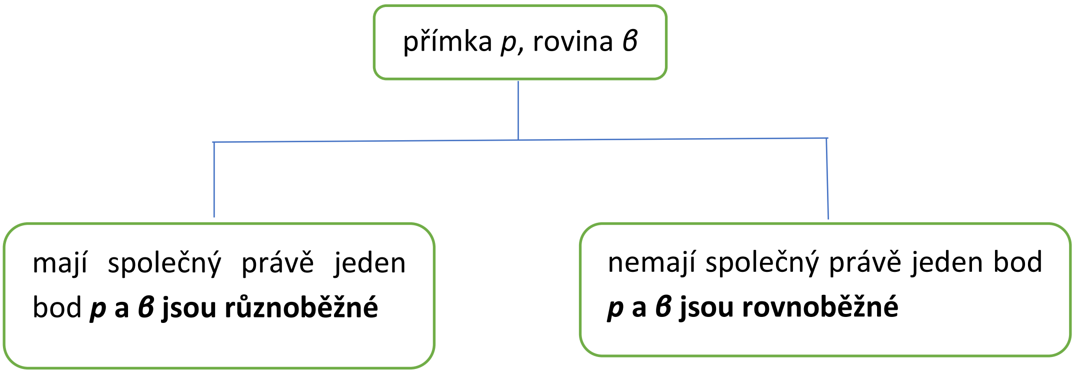
V opačném případě přímka a rovina buď nemají žádný společný bod, nebo mají alespoň dva společné body. Přímka je rovnoběžná s rovinou právě tehdy, když s ní nemá žádný společný bod, nebo v ní leží.



Obrázek 2.3-2a Rovnoběžná různá poloha přímky a roviny



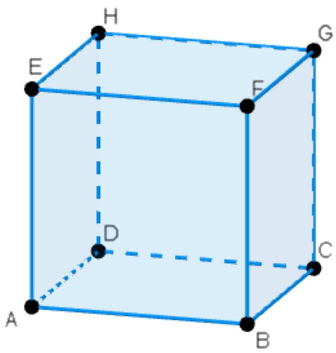
Obrázek 2.3-2b Rovnoběžná totožná poloha přímky a roviny



Příklad 2.3.1

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny.

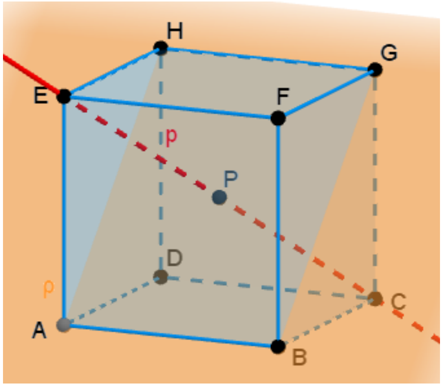
1) $p \equiv EC,\ \rho \equiv ABH$
2) $q \equiv BF,\ \delta \equiv EGC$
3) $n \equiv FH,\ \eta \equiv BDH$
4) $m \equiv AG,\ \varepsilon \equiv BHS_{AB}$



Obrázek 2.3-3

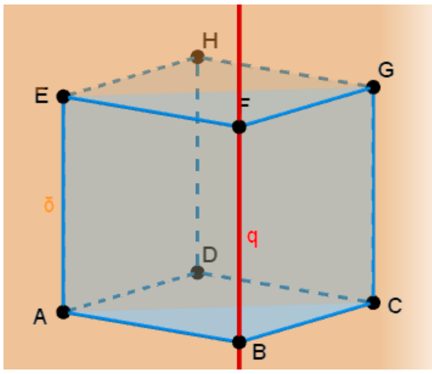
Řešení: Obrázky vložené v textu práce jsou pouze ilustrační, na webových stránkách lze s obrázky otáčet tak, aby byl získán vhodný pohled na danou prostorovou situaci. Pro každého studenta může být tak úhel pohledu jiný.

1) Z obrázku 2.3-4 je patrné, že bod P je společný bod přímky p a roviny ρ, proto je vzájemná poloha přímky a roviny <u>různoběžná</u>.



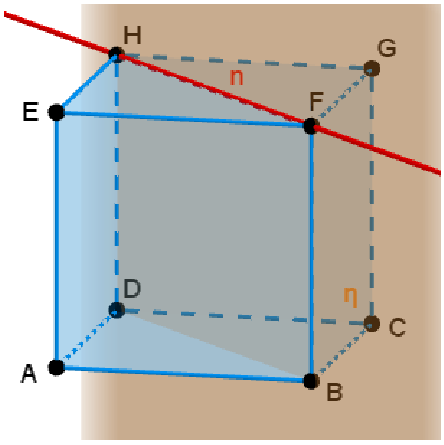
Obrázek 2.3-4

2) Z obrázku 2.3-5 je zřejmé, že rovina δ nemá s přímkou q žádný společný bod, proto jsou navzájem <u>rovnoběžné různé</u>.



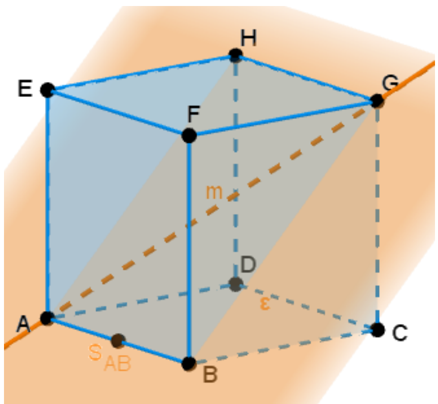
Obrázek 2.3-5

3) Z obrázku 2.3-6 je vidět, že přímka n leží v rovině η, proto jsou navzájem <u>rovnoběžné totožné</u> (splývající).



Obrázek 2.3-6

4) Z obrázku 2.3-7 vidíme, že přímka m leží v rovině ε, proto jsou navzájem <u>rovnoběžné totožné</u> (splývající).

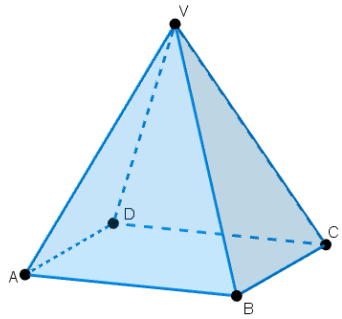


Obrázek 2.3-7

Příklad 2.3.2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny.

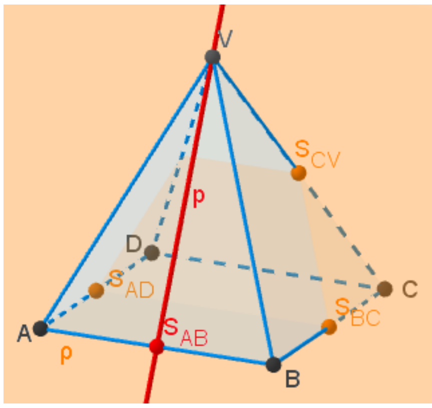
1) $p \equiv S_{AB}V$, $\rho \equiv S_{AD}S_{BC}S_{CV}$
2) $q \equiv S_{AD}S_{BV}$, $\sigma \equiv ACV$
3) $n \equiv S_{AV}C$, $\eta \equiv S_{BC}S_{AD}V$
4) $m \equiv S_{AB}S_{AV}$, $\varepsilon \equiv ABV$



Obrázek 2.3-8

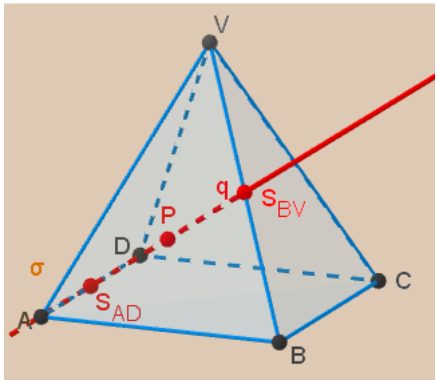
Řešení:

1) Přímka p nemá s rovinou ρ žádný společný bod a zároveň přímka p v rovině ρ neleží, proto je jejich vzájemná poloha <u>rovnoběžná různá</u> (obrázek 2.3-9).



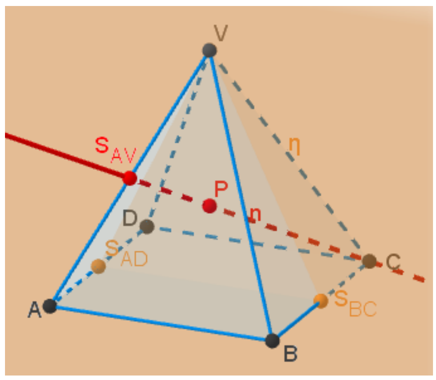
Obrázek 2.3-9

2) Přímka q má s rovinou σ společný bod P, proto je jejich vzájemná poloha <u>různoběžná</u> (obrázek 2.3-10).



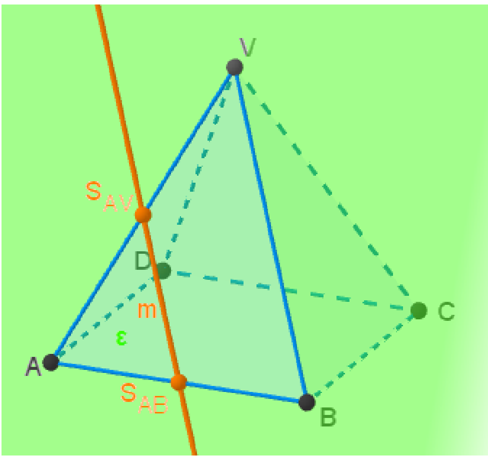
Obrázek 2.3-10

3) Přímka n má s rovinou η společný bod P, proto je jejich vzájemná poloha <u>různoběžná</u> (obrázek 2.3-11).



Obrázek 2.3-11

4) Všimněme si, že přímka m, která je daná body S_{AB} a S_{AV}, které leží v rovině $\varepsilon = ABV$, tedy i přímka m leží v rovině ε.



Obrázek 2.3-12

2.4 Rovnoběžnost

Vztah „být rovnoběžný“ zapisujeme symbolem „//“, např. $p \parallel q$, $a \parallel \alpha$, $\sigma \parallel u$, $\alpha \parallel \rho$.

Věta 2.4.1

a) Jestliže mají dvě rovnoběžné přímky p, q společný bod, potom jsou totožné.
b) Jestliže dvě rovnoběžné roviny α, β mají společný bod, potom jsou totožné.
c) Jestliže je přímka p rovnoběžná s rovinou δ a má s ní společný bod, potom tato přímka p leží v této rovině δ.

Důkaz

a) Jestliže jsou přímky p, q rovnoběžné, potom jsou buď totožné, nebo nemají společný žádný bod. Mají-li tedy společný bod, pak jsou totožné, tj. $p = q$.
b) Jestliže jsou roviny α, β rovnoběžné, potom $\alpha = \beta$ nebo $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Z toho plyne, že pokud tyto roviny mají společný bod, jsou totožné.
c) Jestliže je přímka p rovnoběžná s rovinou ρ, potom přímka p buď leží v rovině ρ, nebo s ní nemá žádný společný bod. Jestliže tedy přímka p a rovina ρ mají společný bod, pak přímka p leží v rovině ρ.

Z planimetrie víme, že pro všechny přímky p, q, r v rovině platí asociativnost rovnoběžnosti přímek: Jestliže je přímka p rovnoběžná s přímkou q a přímka q je rovnoběžná s přímkou r, potom přímka p je rovnoběžná s přímkou r. Podobnou vlastnost má rovnoběžnost též v prostoru, i když v prostoru se v tomto ohledu objevují jisté odlišnosti.

Věta 2.4.2

a) Jestliže jsou dvě přímky rovnoběžné s danou přímkou v prostoru, potom jsou tyto přímky také navzájem rovnoběžné.

b) Jestliže každá ze dvou rovin je rovnoběžná s danou třetí rovinou, potom jsou také tyto dvě roviny navzájem rovnoběžné.
c) Jestliže jedna ze dvou přímek, které jsou navzájem rovnoběžné, je rovnoběžná s danou rovinou, potom také druhá z těchto přímek je rovnoběžná s danou rovinou.
d) Jestliže je přímka rovnoběžná s jednou ze dvou rovin, které jsou navzájem rovnoběžné, potom je tato přímka rovnoběžná také s druhou rovinou.
e) Jestliže jsou dvě přímky rovnoběžné s danou rovinou, potom jsou tyto přímky navzájem rovnoběžné.

Ukážeme, že tvrzení e) je nepravdivé. Jeho negace zní: Existují dvě přímky, které jsou rovnoběžné s danou rovinou a zároveň tyto přímky nejsou navzájem rovnoběžné. Toto tvrzení je pravdivé – jako příklad můžeme uvést přímky *EF*, *EH* a rovinu *ABC*, které jsou určeny vrcholy krychle *ABCDEFGH*. Tím je na konkrétním příkladu ukázáno, že tvrzení e) je nepravdivé.

Zvláštní případy tvrzení c, d

c) $(p \parallel q \wedge q \subset \sigma) \Rightarrow p \parallel \sigma$, d) $(p \subset \sigma \wedge \sigma \parallel \rho) \Rightarrow p \parallel \rho$

Věta 2.4.3
Jestliže rovina obsahuje dvě přímky, které jsou různoběžné, a každá z přímek je rovnoběžná s další rovinou, potom obě tyto roviny jsou navzájem rovnoběžné.

Důkaz
Předpokládejme, že věta neplatí. Existují tedy dvě roviny α, β a v rovině α dvě různoběžné přímky p, q, které jsou obě rovnoběžné s rovinou β. Přitom roviny α, β jsou různoběžné, jejich průsečnici označíme r. Přímky p, q, r leží v rovině α, přičemž p a q jsou různoběžky, proto aspoň jedna z nich je různoběžná s přímkou r. Nechť je to například přímka p. Průsečík přímek p, r leží v rovině β, neboť přímka r leží také v rovině β. Přímka p má s rovinou β společný alespoň jeden bod a je s touto rovinou rovnoběžná, proto podle věty 2.4.2c v rovině β leží. Různoběžné roviny α, β mají tedy společné dvě různoběžné přímky, což je ve sporu s tvrzením uvedeném v 2.2. Negace věty 2.4.3 je tedy nepravdivá, a proto věta 2.4.3 platí. Věta 2.4.3 byla dokázána pomocí tzv. důkazu sporem.

2.5 Řezy krychle

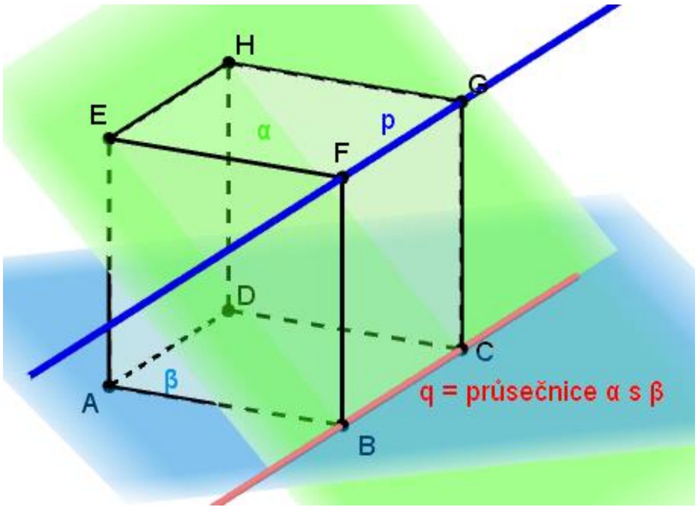
Řezem tělesa rozumíme průnik tělesa a roviny. Řezy těles se používají v technickém kreslení např. při znázorňování vnitřku předmětů.

Řez krychle rovinou je rovinný útvar, jehož hranicí je průnik povrchu krychle a roviny řezu, tj. hranice řezu krychle rovinou se skládá z průniků roviny řezu se stěnami krychle.

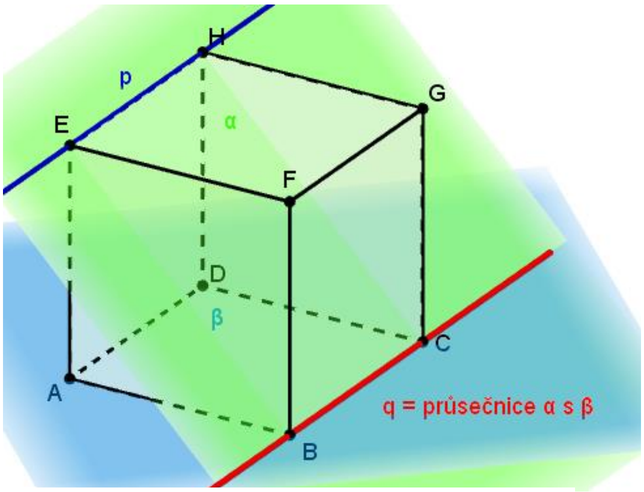
Při konstrukci řezu krychle rovinou lze použít následující věty.

Věta 2.5.1
Jestliže je rovina různoběžná se dvěma navzájem rovnoběžnými různými rovinami, potom je protíná v navzájem rovnoběžných přímkách.

Věta 2.5.2
Jestliže je přímka rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami, potom je rovnoběžná také s jejich průsečnicí.



Obrázek 2.5-1



Obrázek 2.5-2

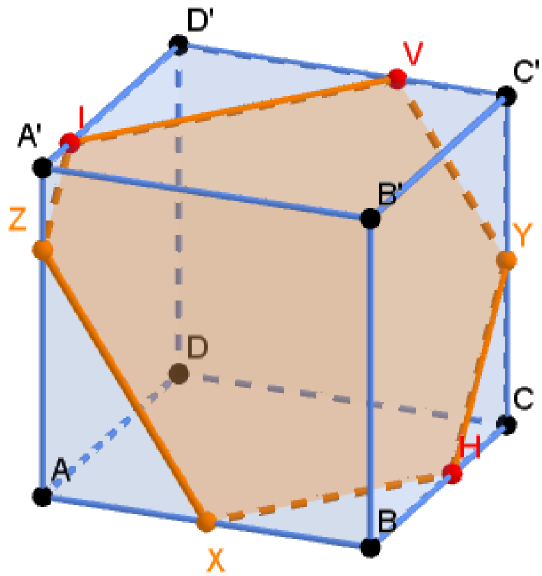
Důležitý je zvláštní případ věty 2.5.2, kde uvažovaná přímka leží v jedné z daných rovin a je rovnoběžná s druhou rovinou.

Příklad 2.5.1

Zobrazte řez roviny $\sigma \equiv XYZ$ s krychlí v základní poloze; bod X je střed hrany AB, bod Y je střed hrany CC' a bod Z leží na hraně AA' tak, že platí $|AZ| = 3/4\ |AA'|$.

Řešení:

1. XZ
2. p; Y ∊ p ∧ p // XZ
3. V; V ∈ p ∩ C'D'
4. ↔ DC
5. F; F ∈ p ∩ ↔ DC
6. XF
7. H; H ∈ XF ∩ BC
8. q; V∈ q ∧ q // XH
9. I; I ∈ q ∩ A'D'
10. ZI
11. HY
12. šestiúhelník *XHYVIZ*



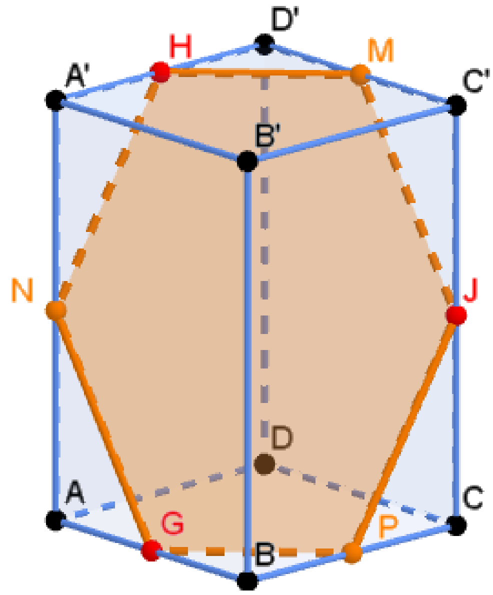
Obrázek 2.5-3 Řez krychle rovinou XYZ

Příklad 2.5.2

Zobrazte řez roviny $\delta \equiv MNP$ s kvádrem v základní poloze. Body M, N, P jsou postupně středy hran $C'D'$, AA' a BC.

Řešení:

1. M → M', kde M' je pravoúhlý průmět bodu M do roviny ABC (M' ∈ CD)
2. N → N', kde N' je pravoúhlý průmět bodu N do roviny ABC (N' = A)
3. NM
4. N'M'
5. E; E ∈ NM ∩ N'M'
6. EP
7. G; G ∈ EP ∩ AB
8. GN
9. p; M ∈ p ∧ p // GN
10. J; J ∈ p ∩ CC'
11. q; M ∈ q ∧ q // GP
12. H; H ∈ q ∩ A'D'
13. šestiúhelník *MHNGPJ*



Obrázek 2.5-4 Řez rovinou MNP

Na webových stránkách se studentům zobrazují v jednotlivých krocích též pomocné přímky a body. Obrázky 2.5-3 a 2.5-4 představují řezy v konečné fázi, tj. v posledním kroku řešení.

2.6 Úlohy k procvičení

Úloha 1

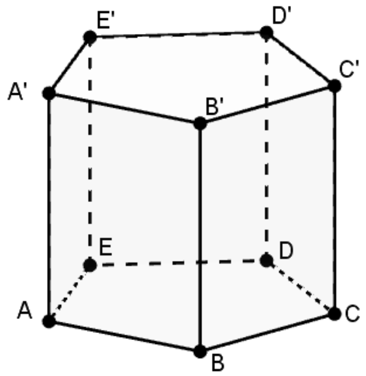
V krychli *ABCDEFGH* určete, které jsou s přímkou $p \equiv S_{CD}A$ rovnoběžné, mimoběžné nebo různoběžné.

$q \equiv EH$, $r \equiv BF$, $s \equiv HG$, $t \equiv FS_{CD}$, $l \equiv S_{AB}C$, $m \equiv S_{CH}S_{AE}$, $n \equiv AD$

Úloha 2

V pravidelném pětibokém hranolu *ABCDEA'B'C'D'E'* určete vzájemnou polohu dvou přímek.

1) $p_1 \equiv CA'$, $q_1 \equiv D'B'$
2) $p_2 \equiv AE'$, $q_2 \equiv CD'$
3) $p_3 \equiv E'B'$, $q_3 \equiv S_{BC}S_{ED}$

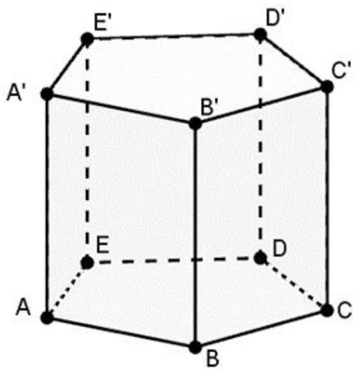


Obrázek 2.6-1

Úloha 3

V pravidelném pětibokém hranolu *ABCDEA'B'C'D'E'* určete vzájemnou polohu dvou rovin.

1) $\alpha_1 \equiv BCA'$, $\beta_1 \equiv AEC'$
2) $\alpha_2 \equiv S_{AA'}S_{CC'}S_{DD'}$, $\beta_2 \equiv ACE$

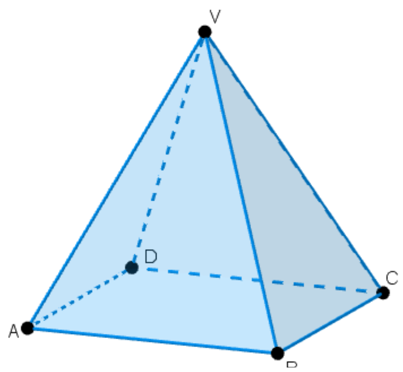


Obrázek 2.6-2

Úloha 4

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*.
Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin:

1. $\alpha \equiv BCV$, $\beta \equiv S_{AV}S_{CD}S_{DV}$
2. $\gamma \equiv ACV$, $\delta \equiv BCS_{BV}$
3. $\eta \equiv S_{AV}S_{DV}S_{BV}$, $\vartheta \equiv ABC$

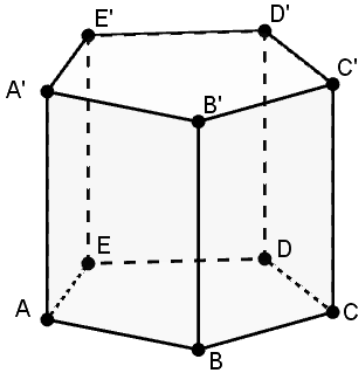


Obrázek 2.6-3

Úloha 5

V pravidelném pětibokém hranolu *ABCDEA’B’C’D’E’* určete vzájemnou polohu přímky a roviny.

1) $p_1 \equiv EC$, $\alpha_1 \equiv BDE'$
2) $p_2 \equiv S_{AE}C$, $\alpha_2 \equiv S_{AA'}S_{CC'}D'$
3) $p_3 \equiv AB$, $\alpha_3 \equiv ECC'$



Obrázek 2.6-4

Úloha 6

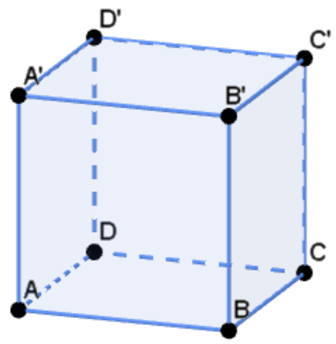
Zobrazte řez roviny *δ ≡ BMN* s krychlí *ABCDA’B’C’D’* v základní poloze. *M* je vnitřní bod hrany *A'B'* a *N* je vnitřní bod hrany *CC'*.

Úloha 7

Krychle *ABCDA’B’C’D’* v základní poloze protněte rovinou *ρ*, která půlí hrany *AB*, *AD* a *CC'*.

Úloha 8

Zobrazte řez roviny *δ ≡ BMN* s kvádrem v základní poloze; *M* je vnitřní bod stěnové úhlopříčky *BC'*, *N* leží na dokreslení hrany *A'B'* za bodem *A'*.



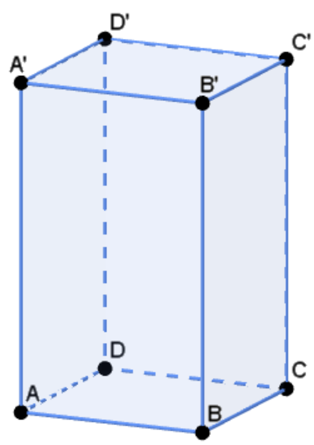
Obrázek 2.6-5

Úloha 9

Zobrazte řez roviny *ρ ≡ KLM* s kvádrem *ABCDA’B’C’D’* v základní poloze. *K ≡ A'*, bod *L* leží na dokreslení hrany *BB'* za bodem *B* tak, že |*B'L*| = |*BB'*| a bod *M* leží na dokreslení hrany *B'C'* za bodem *C'* tak, že |*C'M*| = ½ |*B'C'*|.

Úloha 10

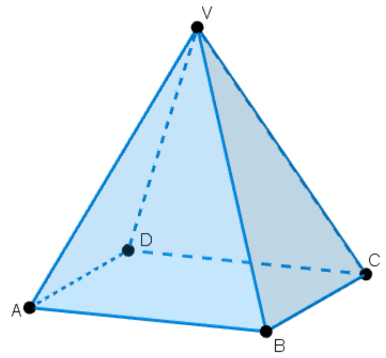
Zobrazte řez roviny *γ ≡ KLM* s kvádrem *ABCDA’B’C’D’* v základní poloze. *K* je vnitřní bod hrany *AB*, *L* je vnitřní bod hrany *B'C'* a *M* je vnitřní bod hrany *DD'*.



Obrázek 2.6-6

Úloha 11

Zobrazte řez roviny $\alpha \equiv MNP$ s pravidelným čtyřbokým jehlanem $ABCDV$. Bod M je střed hrany AV, bod P je střed hrany CV a N je vnitřní bod hrany BV takový, že platí $3|BN| = |BV|$.



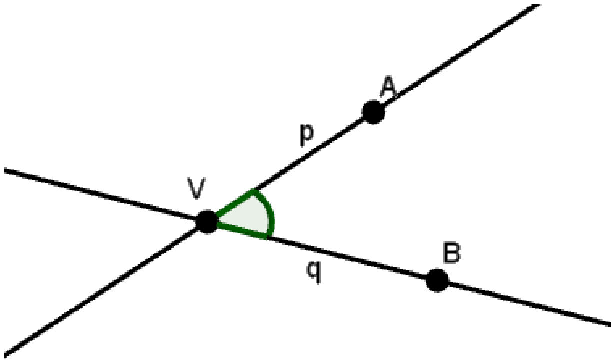
Obrázek 2.6-7

3 Metrické úlohy

3.1 Odchylka přímek

Definice
Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost ostrého nebo pravého úhlu, jehož ramena leží na uvažovaných přímkách.

Například pro dvě přímky znázorněné na obrázku (obr. 3.1-1) platí, že jejich odchylka je $|\measuredangle AVB|$. Odchylku dvou různoběžných přímek p a q označujeme symbolem $|\measuredangle pq|$. Pro úplnost definujme také odchylku rovnoběžných přímek, tj. jestliže $p \parallel q \Rightarrow |\measuredangle pq| = 0°$.



Obrázek 3.1-1 Odchylka dvou přímek

Při definování odchylky přímek v prostoru se vychází z následujících dvou vět:

Věta 3.1.1
Každým bodem v prostoru lze vést s danou přímkou právě jednu rovnoběžku.

Věta 3.1.2
Nechť p_1, q_1 jsou různoběžky a p_2, q_2 jsou rovněž různoběžky a to takové, že $p_1 \parallel p_2$, $q_1 \parallel q_2$. Pak pro odchylky $|\measuredangle p_1 q_1|$, $|\measuredangle p_2 q_2|$ platí, že $|\measuredangle p_1 q_1| = |\measuredangle p_2 q_2|$.

Odchylku dvou mimoběžných přímek definujeme takto: Jsou dány mimoběžné přímky p, q. Libovolným bodem v prostoru vedeme přímky $p´$, $q´$, přičemž $p´ \parallel p$ a $q´ \parallel q$. Odchylkou mimoběžných přímek p, q nazýváme odchylku různoběžných přímek $p´$, $q´$. Často volíme zmíněný bod na jedné z mimoběžek p, q. V tomto případě platí, že:

$$|\measuredangle pq| = |\measuredangle pq´| \quad nebo \quad |\measuredangle pq| = |\measuredangle p´q|.$$

Lze dokázat, že odchylka dvou mimoběžných přímek nezávisí na volbě zmíněného bodu, kterým vedeme rovnoběžky s danými přímkami. Tento důkaz v tomto textu ale neuvádíme.

V následujícím textu jsou v příkladech popsány kroky, které vedou k jejich řešení. V dynamických appletech jsou tyto kroky propojeny s jednotlivými objekty ve 3D konstrukcích. Tzn. krokováním se zobrazí v appletech příslušné kroky řešení a na závěr i výsledné řešení. Pro lepší názornost jsou přidány pomocné rovinné obrázky, viz obrázky 3.1-2 a 3.1-4.

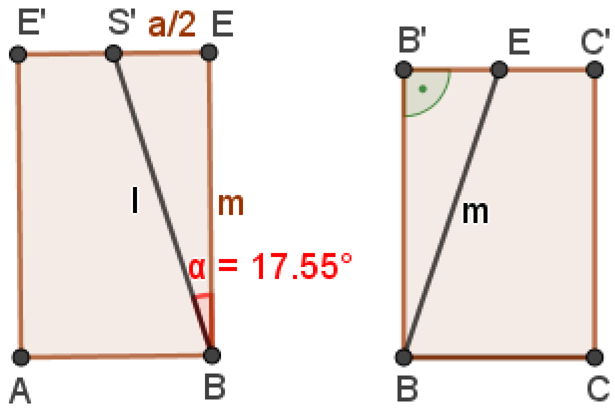
Příklad 3.1.1

Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDA'B'C'D'*; *S'* je střed horní podstavy. Určete odchylku přímky *BS'* od stěny *BCC'B'*.

Řešení:

Jednotlivé kroky řešení:

1) k; $k \perp \gamma\,(BCC') \wedge S' \in k$
2) E; $E \in k \cap B'C'$
3) $\triangle\, S'EB$
4) obdélník ABEE'
5) $\measuredangle EBS'$
6) obdélníková stěna *BCC'B'*



Obrázek 3.1-2

Početní řešení se (v dynamickém appletu) mění podle délek hran, které se rozhodneme použít. Jejich hodnoty v appletu nastavíme pomocí hodnot příslušných posuvníků.

V našem případě je délka hrany a = 2 a délka hrany b = 3.

Výpočet délky úsečky *BE:*

$\triangle\, BEB'$: $m^2 = b^2 + (a/2)^2$

$$m = \sqrt{b^2 + (\tfrac{a}{2})^2}$$

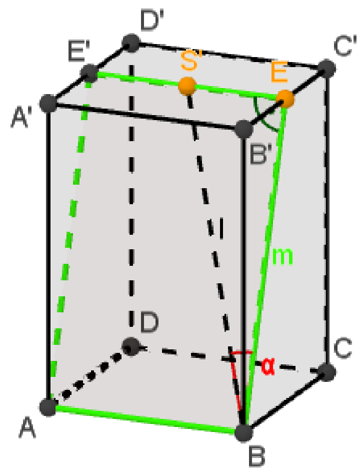
$$m = \sqrt{10}$$

Výpočet délky úsečky *BS':*

$\triangle\, BES'$: $l^2 = m^2 + (a/2)^2$

$$l = \sqrt{m^2 + (\tfrac{a}{2})^2}$$

$$l = \sqrt{11}$$



Obrázek 3.1-3

Výpočet hledané odchylky $\alpha = |\measuredangle EBS'|$:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{l}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{2}\right)/l$$

$$\alpha = 17{,}55°$$

Odchylka přímky *BS'* od stěny *BCC'B'* je rovna 17,55°.

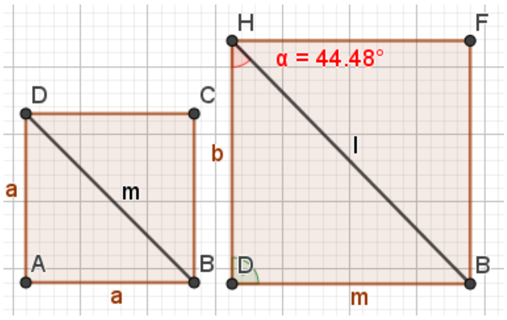
Příklad 3.1.2

V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* určete odchylku přímky *AE* s přímkou *BH*.

Řešení:

Jednotlivé kroky řešení:

1) *AE*
2) *BH*
3) *k*; $H \in k \wedge k \parallel AE$
4) $\triangle$ *BDH*
5) $\measuredangle$ *BHD*



Obrázek 3.1-4

Hodnota výsledného početní řešení záleží stejně jako v příkladu 3.1.1 na zvolené velikosti hran čtyřbokého hranolu. V ukázkovém příkladě je zvolena délka hrany a = 2,5 a délka hrany b = 3,6.

Výpočet délky úsečky $m \equiv BD$:

$$m^2 = |AB|^2 + |AD|^2$$

$$m = \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2}$$

$$m = a\sqrt{2}$$

$$m = 2{,}5\sqrt{2}$$

Výpočet délky úsečky $l \equiv BH$:

$$l^2 = m^2 + |DH|^2$$

$$l = \sqrt{m^2 + |DH|^2}$$

$$l = \sqrt{m^2 + b^2}$$

$$l = 5{,}05$$

Výpočet hledané odchylky α:

$$sin\ \alpha = \frac{m}{l}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{m}{l}\right)$$

$$\alpha = 44{,}48°$$

Velikost odchylky přímek *AE* a *BH* je 44,48°.

Pomocí odchylky dvou přímek lze definovat kolmost přímek.

3.2 Kolmost přímek

Definice
Přímka *p* je kolmá k přímce *q* (symbolicky zapisujeme $p \perp q$) právě tehdy, když platí, že $|\sphericalangle pq| = 90°$.

Uvědomme si, že touto definicí jsme vzhledem k předchozímu výkladu rozšířili pojem kolmosti i na mimoběžné přímky. Rozšíříme jej ještě na úsečky: Dvě úsečky nazýváme kolmé právě tehdy, když leží na kolmých přímkách.

3.3 Kolmost přímky a roviny

Tento vztah se definuje pomocí kolmosti přímek.

Definice
Říkáme, že přímka je kolmá k rovině právě tehdy, když je tato přímka kolmá ke všem přímkám této roviny.

Věty, které platí o kolmosti přímek a rovin:
Věta 3.3.1
Kritérium kolmosti přímky a roviny: Je-li přímka *p* kolmá ke dvěma různoběžným přímkám *a, b* roviny σ, pak je kolmá k této rovině.

Věta 3.3.2
Daným bodem lze vést k dané rovině právě jednu kolmici.

Věta 3.3.3
Všechny kolmice k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné.

Věta 3.3.4
Daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu kolmou rovinu.

Věta 3.3.5
Všechny roviny kolmé k téže přímce jsou navzájem rovnoběžné.

Věta 3.3.6
Jestliže je daná rovina rovnoběžná s rovinou, která je kolmá k dané přímce, potom je daná rovina také kolmá k této přímce.

Věta 3.3.7
Jestliže je daná přímka kolmá k jedné ze dvou rovnoběžných rovin, potom je kolmá také ke druhé rovině.

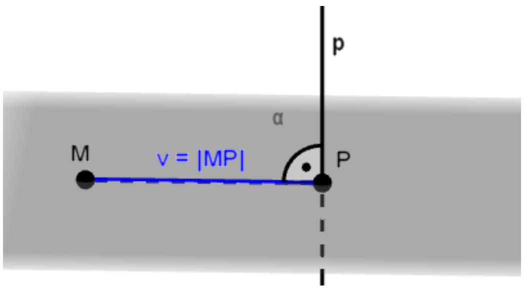
Věta 3.3.8
Jestliže je daná rovina kolmá k jedné ze dvou rovnoběžných přímek, potom je kolmá také ke druhé z těchto přímek.

Věta 3.3.9
Úsečka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke dvěma různoběžným přímkám nebo úsečkám této roviny.

Věta 3.3.10
Přímka rovnoběžná s některou přímkou kolmou k dané rovině je k této rovině kolmá.

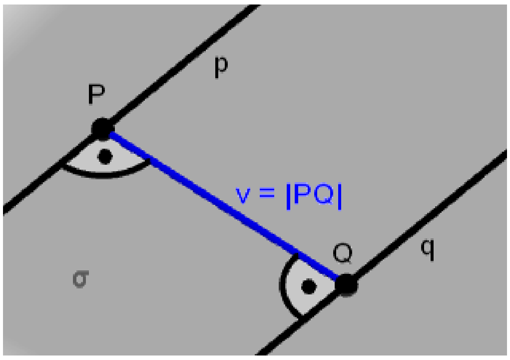
3.4 Vzdálenost bodů, přímek a rovin

- Vzdálenost dvou bodů *M, N* v prostoru je délka úsečky *MN*; značí se $v(M, N) = |MN|$.
- Vzdálenost bodu *M* od přímky *p* v prostoru lze definovat jako vzdálenost bodu *M* od bodu *P*, který je průsečíkem přímky *p* a k ní kolmé roviny *α* vedené bodem *M* (obrázek 3.4-1). Značí se $v = v(M, p) = |MP|$. Můžeme ji též vypočítat jako vzdálenost bodu *M* od přímky *p* v rovině jimi určené.



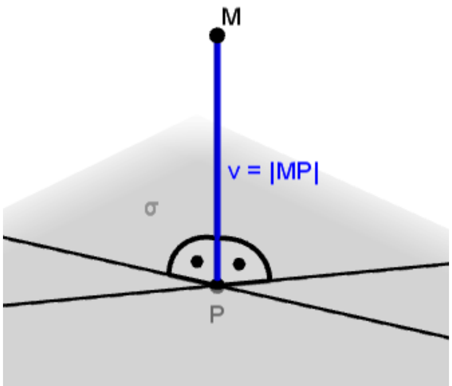
Obrázek 3.4-1

- Vzdálenost dvou rovnoběžek p, q v prostoru je rovna jejich vzdálenosti v rovině σ jimi určené (obrázek 3.4-2). Značí se $v = v\ (p, q)$.



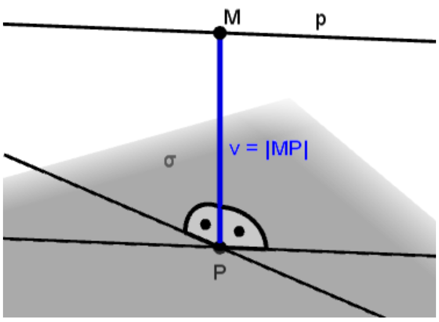
Obrázek 3.4-2

- Vzdáleností dvou mimoběžek p, q se rozumí délka úsečky PQ, kde P, Q jsou po řadě průsečíky mimoběžek p, q s takovou příčkou mimoběžek (tj. přímkou, jež obě mimoběžky protíná), která je k oběma z nich kolmá. Značí se opět $v = v\ (p, q) = |PQ|$.
- Vzdálenost bodu M od roviny σ nazýváme vzdálenost bodu M od paty P kolmice vedené bodem M k rovině σ (obrázek 3.4-3). Značí se $v = v\ (M, \sigma) = |MP|$.



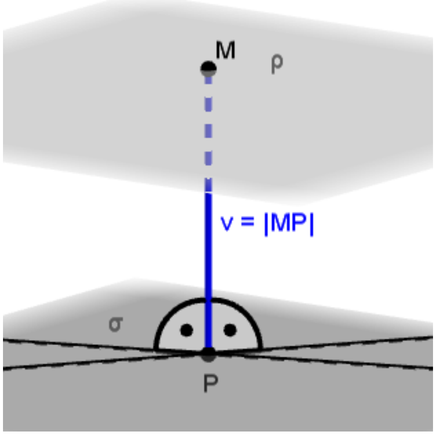
Obrázek 3.4-3

- Vzdáleností přímky p od roviny σ s ní rovnoběžné rozumíme vzdálenost libovolného bodu M přímky p od roviny σ (obrázek 3.4-4). Značí se $v = v\ (p, \sigma)$ nebo $v = |MP|$, kde P je pata kolmice vedené bodem M k rovině σ.



Obrázek 3.4-4

- Vzdáleností dvou rovnoběžných rovin σ, ρ rozumíme vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny, např. vzdálenost bodu *M* roviny ρ od roviny σ (obrázek 3.4-5). Pro vrstvu s hraničními rovinami ρ, σ se tato vzdálenost nazývá výška vrstvy.



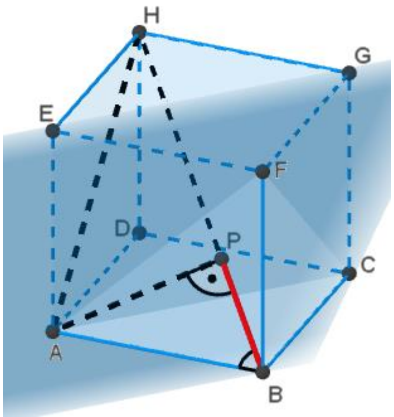
Obrázek 3.4-5

Příklad 3.4.1

Krychle *ABCDEFGH* má délku hrany *a* v cm. Vypočítejte vzdálenost bodu *B* od roviny *ACF*.

Z grafického náhledu je vidět, že tělesová úhlopříčka *BH* je kolmá k rovině *ACF*. Úhlopříčka *BH* protne rovinu *ACF* v bodě *P*.

Bod *P* je pata kolmice *BH* k rovině *ACF* a vzdálenost, kterou hledáme, je tedy velikost úsečky *BP*. Při početním řešení lze využít podobnosti pravoúhlých trojúhelníků *ABH* (|∡*BAH*| = 90°) a PBA (|∡*BPA*| = 90°).

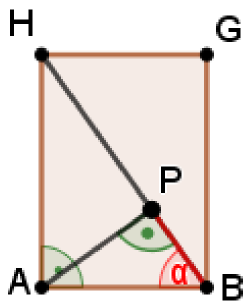


Obrázek 3.4-5

$\Delta\ PBA: cos\alpha = \frac{|PB|}{|AB|}$ $\qquad$ $\Delta\ ABH: cos\alpha = \frac{|AB|}{|BH|}$

$$\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BH|}$$

$$|PB| = \frac{|AB|^2}{|BH|} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a\ cm$$

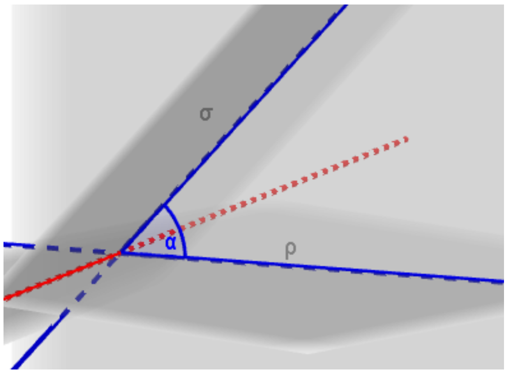


Obrázek 3.4-6

3.5 Odchylka dvou rovin

Definice

Odchylka α dvou rovin ρ, σ je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá (obrázek 3.5-1). Značíme ji $\alpha = |\measuredangle\ \rho, \sigma|$.



Obrázek 3.5-1

Pro navzájem rovnoběžné různé roviny platí, že každá rovina, která je s nimi různoběžná (např. rovina kolmá k těmto rovinám), je protíná v navzájem rovnoběžných přímkách. Odtud mj. plyne platnost následujících věty:

Věta 3.5.1
Odchylka dvou rovnoběžných rovin je 0°.

Pro různoběžné roviny platí:
Věta 3.5.2
Jestliže je daná rovina kolmá k průsečnici dvou různoběžných rovin, potom je kolmá k oběma těmto rovinám.

Věta 3.5.3
Odchylka různoběžných rovin je rovna odchylce jejich přímek kolmých k průsečnici těchto rovin.

Jiný způsob určení odchylky dvou rovin pomocí odchylky dvou přímek:
Věta 3.5.4
Odchylkou dvou rovin rozumíme odchylku dvou přímek, z nichž jedna je kolmá k první a druhá ke druhé rovině.

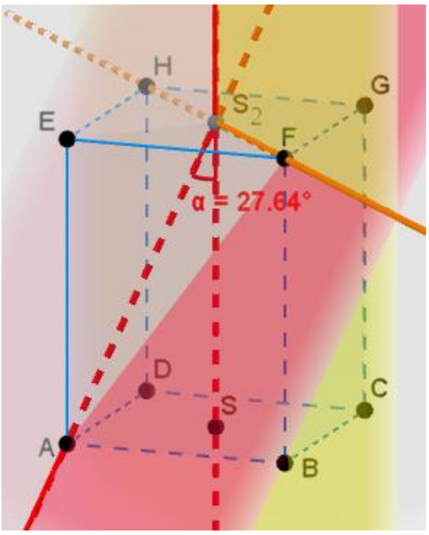
Příklad 3.5.1

V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH*, určete odchylku roviny *AFH* s rovinou *BDH*.

Řešení:

Jednotlivé kroky řešení:

1) rovina *AFH*
2) rovina *BDH*
3) průsečnice roviny *AFH* s *BDH*
4) rovina *ACE*; *ACE* ⊥ *AFH* ∧ *ACE* ⊥ *BDH*
5) p; p ≡ průsečnice roviny *AFH* s *ACE*
6) q; q ≡ průsečnice roviny *BDH* s *ACE*
7) odchylka α = | ∡ AS_2S |= | ∡ *p*, *q* |



Obrázek 3.5-2

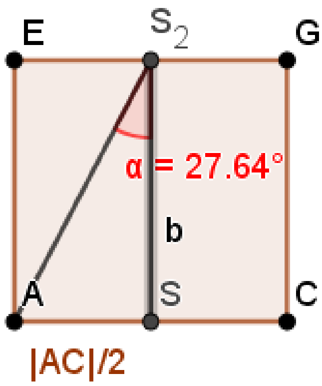
Výsledná hodnota početního řešení záleží na velikosti hran pravidelného čtyřbokého hranolu. Vypočtená hodnota odchylky na obrázku 3.5-2 odpovídá velikostem hran a = 2 a b = 2,7.

Výpočet odchylky α:

$$tan\alpha = \frac{\frac{|AC|}{2}}{|SS_2|}$$

$$\alpha = arctan\left(\frac{a\sqrt{2}}{b}\right)$$

$$\alpha = 27{,}64°$$



Obrázek 3.5-3

Odchylka roviny AFH s rovinou BDH je pro zvolené hodnoty hran rovna 27,64°.

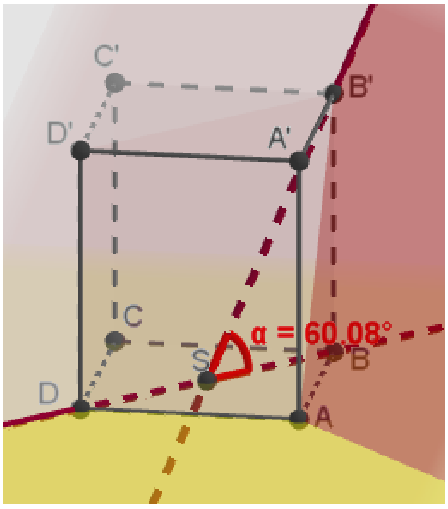
Příklad 3.5.2

Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDA'B'C'D'*. Určete odchylku roviny *ABC* od roviny *ACB'*.

Řešení:

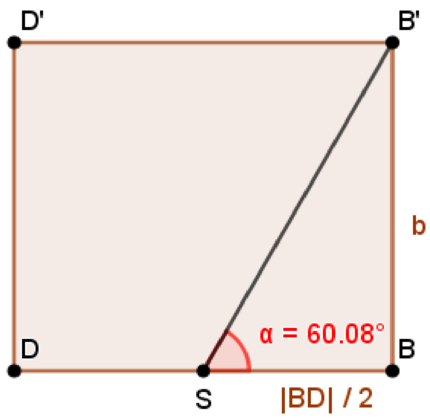
Jednotlivé kroky řešení ve stručnosti uvádějí zjištění velikosti odchylky daných rovin ABC a ACB:

1) rovina *ABC*
2) rovina *ACB'*
3) průsečnice roviny *ABC* s *ACB'*
4) rovina *BDB'*; *BDB'* ⊥ *ABC* ∧ *BDB'* ⊥ *ACB'*
5) *p*; *p* ≡ průsečnice roviny *ABC* s *BDB'*
6) *q*; *q* ≡ průsečnice roviny *ACB'* s *BDB'*
7) odchylka α = | ∡*BSB'* |=| ∡ *p*, *q* |



Obrázek 3.5-4

Výsledná hodnota početního řešení opět závisí na hodnotách velikostí hran hranolu, které si zvolíme. V dynamickém appletu je možné hodnoty velikostí hran hranolu měnit nastavením hodnot příslušných posuvníků. Vypočtená hodnota odchylky daných rovin *ABC* a *ACB'* odpovídá zvoleným hodnotám hran *a* = 3,5 a *b* = 4,3 (viz obrázek 3.5-5)
Dále následuje obecný postup výpočtu odchylky α rovin ABC a *ACB'*:



Obrázek 3.5-5

$$tan\alpha = \frac{|BB\prime|}{\frac{|BD|}{2}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$\alpha = arctan\left(\frac{b\sqrt{2}}{a}\right) = 60{,}08°$$

Roviny ABC a *ACB'* spolu svírají úhel 60,08°.

3.6 Kolmost dvou rovin

Definice

Rovina je kolmá k dané rovině právě tehdy, když je kolmá k některé přímce této roviny. Kolmost rovin *α, β* nebo rovin *ABC, KLM* zapisujeme symbolicky takto: *α* ⊥ *β* nebo ↔*ABC* ⊥ ↔*KLM*.

O kolmosti dvou rovin platí tyto nadcházející věty:

Věta 3.6.1

Kritérium kolmosti dvou rovin: Roviny σ, τ jsou k sobě kolmé, jestliže jedna z nich je kolmá k některé přímce druhé roviny.

Věta 3.6.2

Jestliže dvě různoběžné roviny σ, τ jsou kolmé k rovině γ, pak průsečnice rovin σ, τ je kolmá k rovině γ.

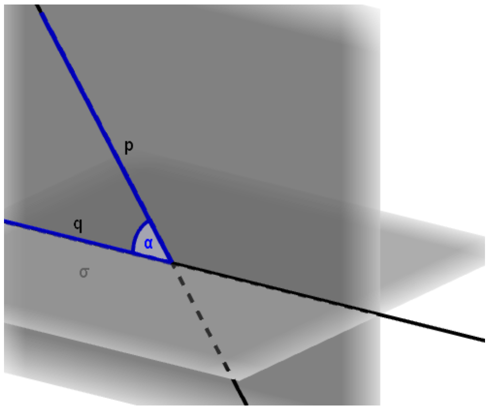
Věta 3.6.3

Nechť roviny σ, τ jsou navzájem kolmé. Jestliže přímka *k* leží v rovině σ a je kolmá k průsečnici rovin σ, τ, pak je též kolmá k rovině τ.

3.7 Odchylka přímky a roviny

Definice

Odchylka α přímky p a roviny σ je odchylka přímky p a přímky q, která je průsečnicí roviny σ a roviny kolmé k rovině σ procházející přímkou p (obrázek 3.7-1). Značí se $\alpha = |\measuredangle\, p, \sigma| = |\measuredangle\, p, q|$.



Obrázek 3.7-1

Následující věty vyjadřují vztahy mezi kolmostí a rovnoběžností přímek a rovin:

Věta 3.7.1
Jestliže přímka p a rovina σ jsou kolmé k rovině τ, pak jsou navzájem rovnoběžné.

Věta 3.7.2
Jestliže přímka p a rovina σ mají společný bod a jsou kolmé k rovině τ. Pak přímka p leží v rovině σ.

Věta 3.7.3
Jestliže rovina σ je rovnoběžná s přímkou p kolmou k rovině τ, pak jsou roviny σ, τ navzájem kolmé.

Jestliže přímka p není kolmá k rovině σ, potom přímka q z definice odchylky přímky a roviny je určena jednoznačně; je to pravoúhlý průmět přímky p do roviny σ. Přitom $\alpha = |\measuredangle\, p, \sigma| = 0°$, právě když $p \parallel \sigma$. Jestliže je $p \perp \sigma$, pak přímka q sice není určena jednoznačně, avšak vždy dostáváme $\alpha = |\measuredangle\, p, \sigma| = |\measuredangle\, p, q| = 90°$.

3.8 Úlohy k procvičení

Úloha 1
V pravidelném čtyřbokém hranolu $ABCDEFGH$ s délkou podstavné hrany a a výškou o délce b, určete odchylku dvojice přímek:

1. $p \equiv AB$, $q \equiv BC$
2. $k \equiv CD$, $l \equiv EG$
3. $n \equiv AD$, $m \equiv AH$

Úloha 2

V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany *a* a výškou o délce *b* určete odchylku dvou přímek:

1. $p \equiv AD$, $q \equiv FG$
2. $n \equiv AH$, $m \equiv BE$
3. $k \equiv AE$, $l \equiv FH$

Úloha 3

Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany *a* a výškou *b*. Určete odchylku rovin:

1. *ABC*, *BDF*
2. *ABC*, *BEG*
3. *ABE*, *ABG*

Úloha 4

Pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH* má podstavnou hranu délky *a* a výšku délky *b*. Vypočítejte vzdálenost bodů:

1. *C*, *E*
2. *A*, *H*
3. *B*, *D*

Úloha 5

Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH*. Určete vzdálenost vrcholu *G* od tělesové úhlopříčky *BH*. S délkou podstavné hrany *a* a výškou *b*.

Úloha 6

Pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH* má podstavnou hranu délky *a* a výšku *b*. Vypočítejte vzdálenost:

1. bodu *A* od přímky *CD*
2. bodu *H* od přímky *BC*
3. bodu *F* od přímky *EG*

Úloha 7

Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany *a* a s výškou *b*. Vypočítejte vzdálenost:

1. bodu *E* od roviny *BCG*
2. bodu *A* od roviny *BDH*
3. bodu *E* od roviny *AFD*

Úloha 8

Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany *a* a s výškou *b*. Určete vzdálenost bodu *A* od roviny *BDE*.

4 Objemy a povrchy těles

4.1 Objem těles

Výpočet objemu tělesa patří k nejstarším, a i v současné době stále potřebným užitím geometrie v praktickém životě. Definice objemu tělesa je analogií k definici obsahu obrazce v planimetrii. [1]

Definice
Objem tělesa je kladné reálné číslo přiřazené danému tělesu takovým způsobem, že platí:

1. Shodná tělesa mají objemy sobě rovné.
2. Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles

Navzájem se nepronikajícími se tělesy rozumíme taková tělesa, která jsme schopni rozložit na konečný počet navzájem se nepronikajících jednotkových krychlí. Počet těchto krychlí se pak rovná objemu tělesa, jehož objem jsme počítali.

K označení objemu používáme písmeno *V* – první písmeno slova „volumen“ (latinsky objem).

4.2 Povrchy těles

Definice
Povrchem tělesa je rozumíme obsah jeho hranice. K označení povrchu používáme písmeno *S*.

Pokud se hranice tělesa skládá z jednoduchých rovinných obrazců (u mnohostěnů) nebo pokud ji můžeme „rozvinout“ do roviny, takovým způsobem, že je ji možné zpětně opět složit ze známých rovinných obrazců (např. u rotačního válce a rotačního kužele), je výpočet povrchu velmi jednoduchý. Povrch se v takovém případě bude rovnat součtu obsahů rovinných obrazců, z nichž se skládá hranice tělesa.

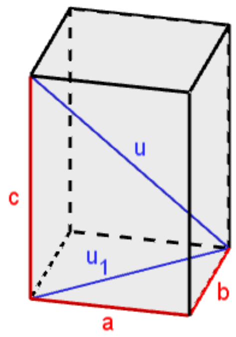
Pokud bychom chtěli určit povrch tělesa, u kterého neumíme složit jeho hranici z rovinných obrazců nebo u kterého je určení hranice velmi pracné, můžeme postupovat jiným způsobem a to následovně: Hranici tělesa pokryjeme tenkou vrstvou nějakého materiálu, např. alobalu, a zvážíme materiál, který k tomuto pokrytí potřebujeme. Pak ze známého vzorce $m = V * \rho$,, kde m je hmotnost použitého materiálu, V je objem materiálu a ρ je hustota materiálu, jeho úpravou pak získáme vztah $V = \frac{m}{\rho}$. Dělíme-li objem *V* materiálu tloušťkou jeho vrstvy, dostaneme přibližnou hodnotu povrchu tělesa. Pokud je vrstva použitého materiálu tenčí, tím jsme schopni určit povrch přesněji.

4.3 Přehled vzorců

Přehled vzorců pro výpočet objemů a povrchů těles, se kterými budeme pracovat.

V následujících vzorcích je *V* objem, *S* povrch, S_p obsah podstavy, S_{pl} obsah pláště, *v* výška tělesa, *u* tělesová úhlopříčka, u_1 stěnová úhlopříčka, *r* poloměr řídicí kružnice, *d* průměr řídicí kružnice.

Kvádr



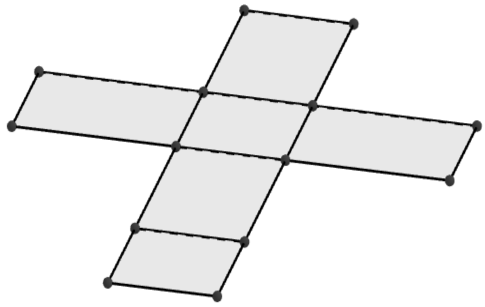
$$V = abc$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

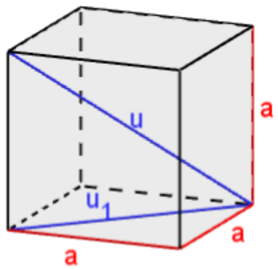
Obrázek 4.3-1

Síť kvádru:



Obrázek 4.3-2

Krychle



$$V = a^3$$

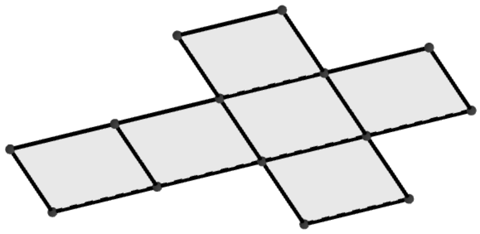
$$S = 6a^2$$

$$u = a\sqrt{3}$$

$$u_1 = a\sqrt{2}$$

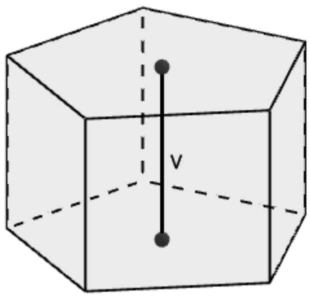
Obrázek 4.3-3

Síť krychle:



Obrázek 4.3-4

Hranol

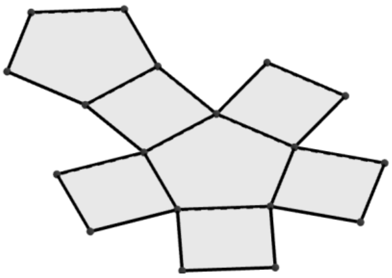


$$V = S_p * v$$

$$S = 2S_p + S_{pl}$$

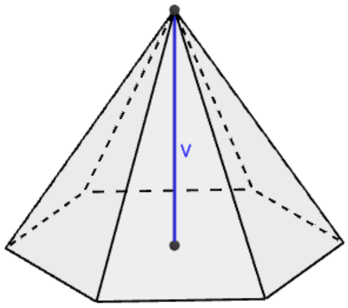
Obrázek 4.3-5

Síť hranolu:



Obrázek 4.3-6

Jehlan

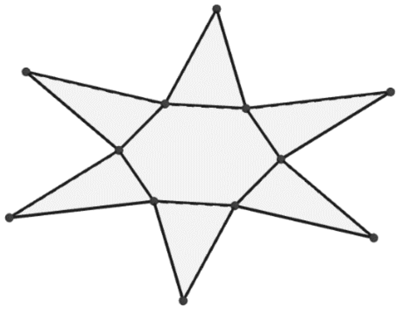


Obrázek 4.3-7

$$V = \frac{1}{3} S_p * v$$

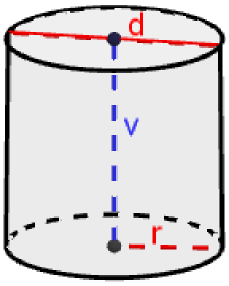
$$S = S_p + S_{pl}$$

Síť jehlanu:



Obrázek 4.3-8

Rotační válec



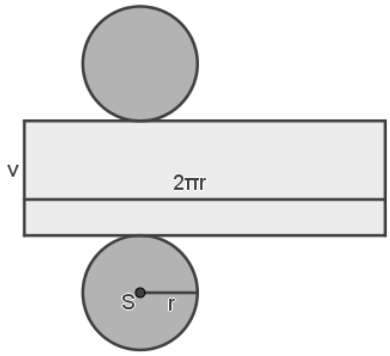
Obrázek 4.3-9

$$V = \pi r^2 v = \frac{1}{4} \pi d^2 v$$

$$S = 2\pi r\,(r + v)$$

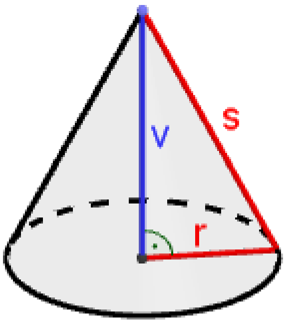
$$S_{pl} = 2\pi r v = \pi d v$$

Síť válce:



Obrázek 4.3-10

Rotační kužel



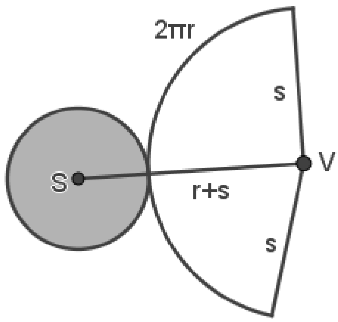
Obrázek 4.3-11

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

$$S = \pi r^2 + \pi r = \pi r\,(r + s)$$

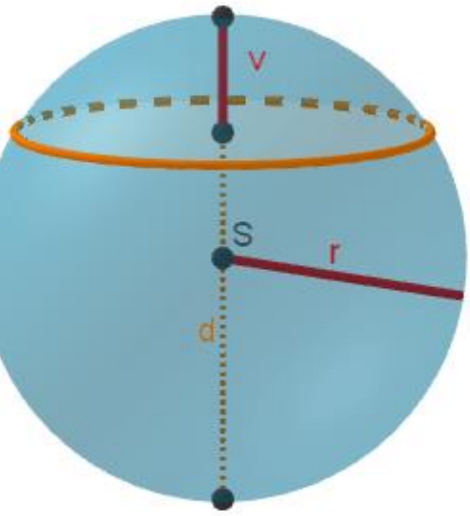
$$S_{pl} = \pi r s$$

Síť kužele:



Obrázek 4.3-12

Koule a její části



Obrázek 4.3-13

$V = \frac{4}{3} * \pi * r^3$

$S = 4 * \pi * r^2$

Povrch kulového pásu a kulového vrchlíku: $S = 2\pi r v$

Objem kulové úseče: $V = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$

Objem kulové výseče $V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

V uvedených vzorcích představuje *r* poloměr kulové plochy koule, *v* výšku kulové úseče.

4.4 Úlohy k procvičení

Úloha 1

Určete objem kvádru, jestliže jeho povrch je 136 a délky hran jsou v poměru 1 : 2 : 5.

Úloha 2

Určete objem kvádru, jestliže jeho povrch je 304 a délky hran jsou v poměru 2 : 4 : 5.

Úloha 3

Objem kvádru je 1.728 m^3. Určete povrch kvádru, pokud víme, že hrany jsou v poměru 3/4 : 2/3 : 5/6.

Úloha 4

Vypočítejte objem pravidelného pětibokého jehlanu, pokud znáte velikost podstavné hrany *a* = 5.6 a délku pobočné hrany *b* = 11.8.

Úloha 5

Určete objem a povrch rotačního kužele o poloměru *r* řídící kružnice a o výšce *v*. Velikosti uvažujte v cm.

Úloha 6

Spočítejte povrch a objem rotačního kužele, když je průměr jeho podstavy roven 8 cm a platí že s = 5 cm. Průměr d = 8 cm ⇒ Poloměr r = 4 cm.

Úloha 7

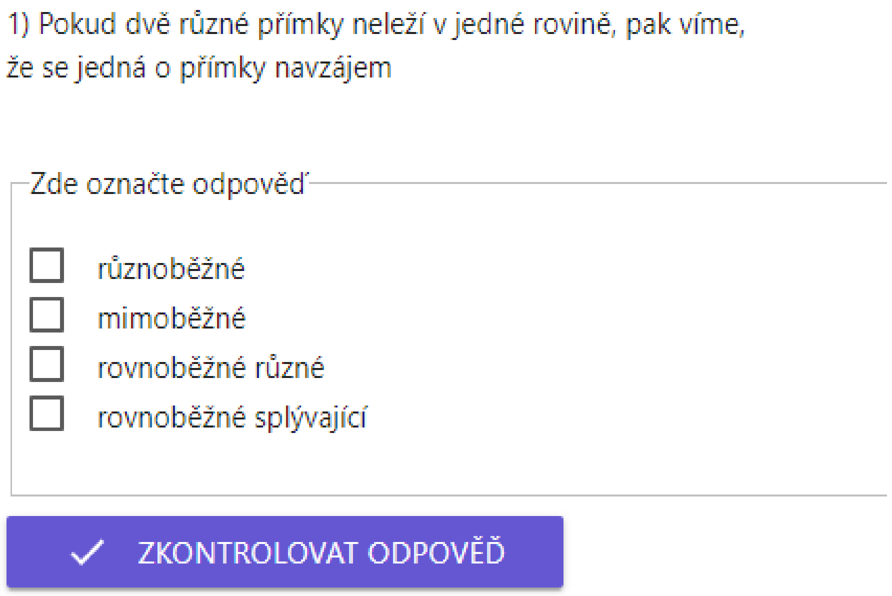
Určete povrch jehlanu s obdélníkovou podstavou, když víme, že obdélník má rozměry a a b. Je dána i v jehlanu.

Úloha 8

Spočítejte objem a povrch koule o poloměru r.

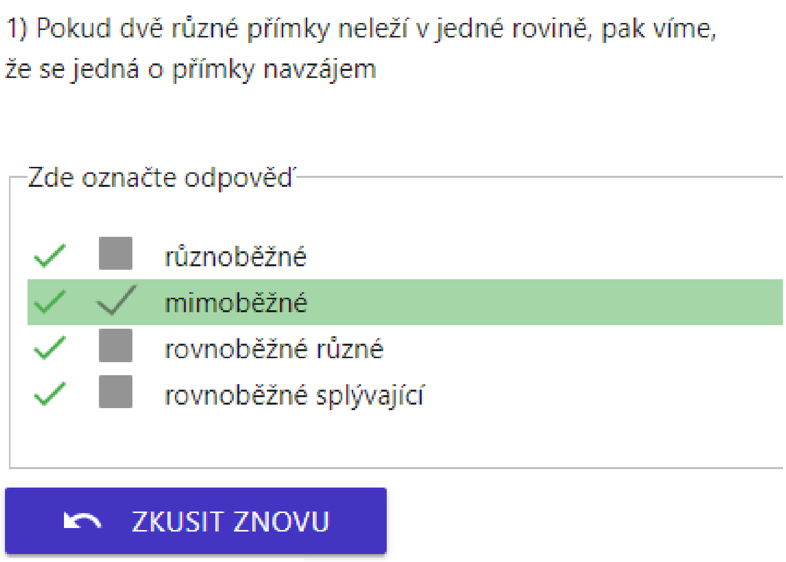
5 Testování

Tato kapitola se zaměřuje na testování získaných dovedností ze stereometrie. Pro učitele může sloužit jako inspirace k vytvoření kontrolních prací určených pro studenty středních škol. Tytéž otázky (některé též doplněné o grafické zadání) jsou dostupné na webových stránkách. Přitom jsou užity otázky dvojího druhu – otázky s otevřenou odpovědí a otázky s uzavřenými odpověďmi. V případě otázek s uzavřenými odpověďmi mohou studenti vybírat správnou odpověď nebo správné odpovědi z několika nabízených odpovědí. Na obrázku 5.0-1 vidíme ukázku otázky s uzavřenými odpověďmi v té podobě, v jaké se vyskytuje na webových stránkách GeoGebry.

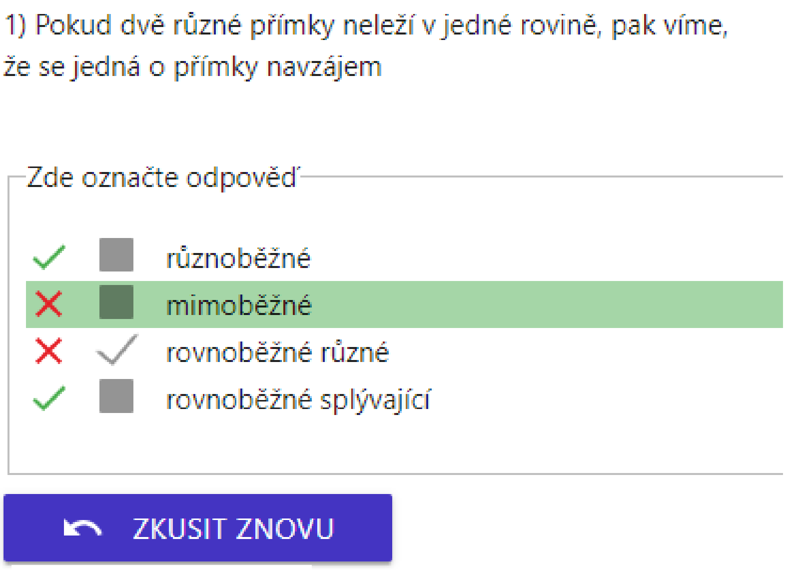


Obrázek 5.0-1

Už i webové stránky GeoGebry umožňují vytvoření online testování. Online testování je v současné době možné pouze v omezené podobě, prozatím totiž bohužel není možné vytvořit jeden velký test s konečným vyhodnocením až na konci testu. Správné výsledky je třeba zkontrolovat zvlášť u každé otázky aktivováním tlačítka „zkontrolovat odpověď“. Na obrázku 5.0-2 je zobrazena situace, kdy byla zvolena správná odpověď. Současně je také vidět vyhodnocení otázky v online prostředí GeoGebra stránek. Zachycená situace na obrázku 5.0-3 představuje zvolení špatné odpovědi a opět vyhodnocení této chybné odpovědi v online prostředí GeoGebry. Při online vyhodnoceních se v prvním sloupci zobrazují správně či chybně zvolené odpovědi. Správně zvolené odpovědi jsou vyznačeny zeleným „zaškrtávátkem“ a chybné odpovědi jsou znázorněny červeným křížkem. Ve druhém sloupci se objevují odpovědi zvolené testovanou osobou, přitom šedé čtverce ukazují, že odpověď nebyla zvolená. Zelené „zaškrtávátko“ ve druhém sloupci značí zvolenou odpověď testovanou osobou.

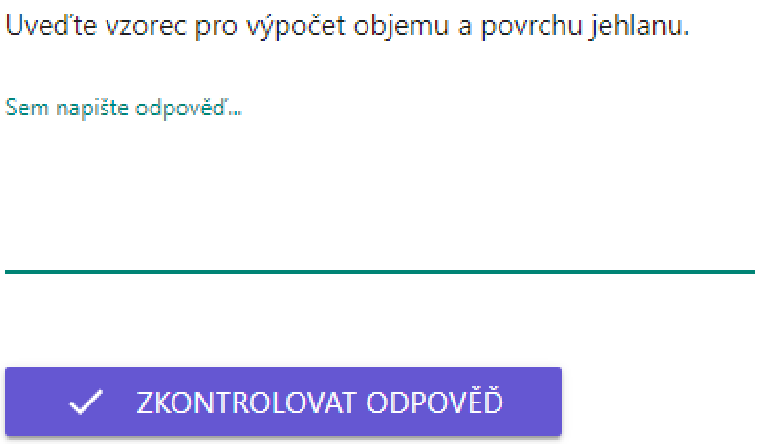


Obrázek 5.0-2



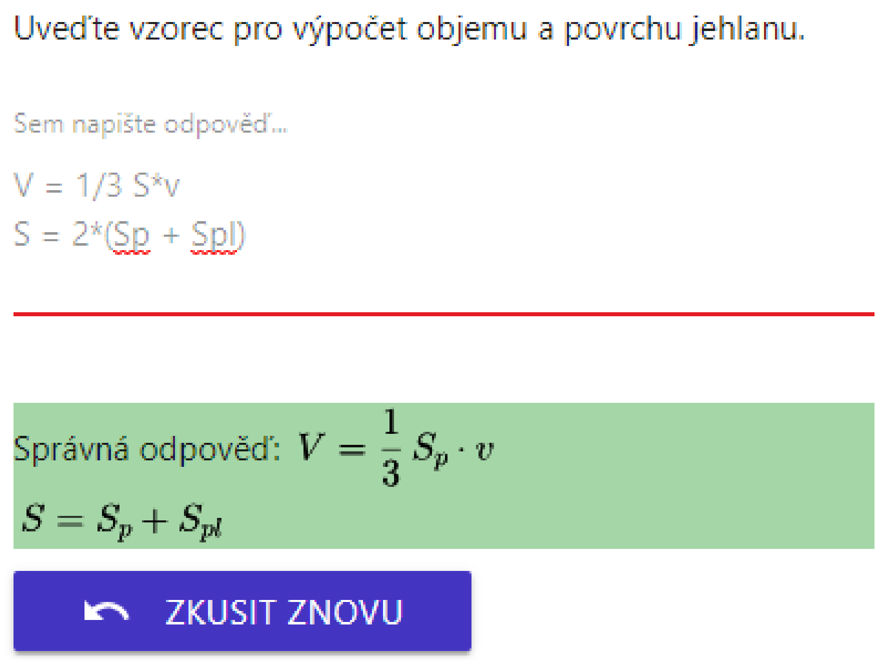
Obrázek 5.0-3

Na obrázku 5.0-4 lze vidět ukázku otázky s otevřenou odpovědí. V online prostředí GeoGebra stránek je možné k tomuto typu otázky napsat slovní odpověď



Obrázek 5.0-4

V tomto případě vyhodnocení se ukáže pouze správná odpověď nastavená administrátorem (např. učitelem) testu. Je na samotné testované osobě, aby porovnala svou odpověď s uvedenou správnou odpovědí, viz obrázek 5.0-5

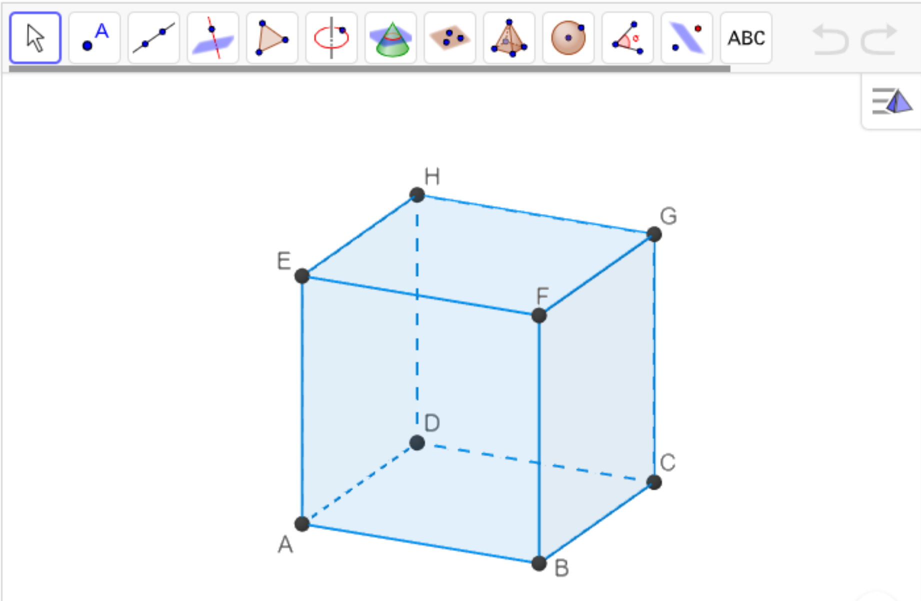


Obrázek 5.0-5

Mimo jiné si na webových stránkách GeoGebry mohou studenti během testování ověřit správnost svého řešení v online prostředí GeoGebry. V tomto prostředí musí být již vloženo zadání příslušné úlohy administrátorem – učitelem. Bohužel toto prostředí v tuto chvíli neumožňuje uložení výsledného řešení a jeho následné sdílení se zkoušejícím. V tomto vidíme velký nedostatek testování na webových stránkách GeoGebra. Vzhledem k nepřetržitému vývoji ať už samotného programu GeoGebra nebo jeho webových stránek věříme, že i online testování bude stále zdokonalováno.

Na obrázku 5.0-6 se nachází ukázka úlohy doplněné o online prostředí GeoGebry, ve kterém je možné testovanými osobami řešení úlohy zkoušet.

1) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zobrazte řez krychle s rovinou $\alpha \equiv MNO$, přitom bod *M* je střed hrany *EH*, bod *N* je střed hrany *BC* a bod *O* lež v bodě *G*.



Obrázek 5.0-6

V následujících podkapitolách je sepsán přehled otázek vytvořených a vložených na webových stránkách GeoGebra stránkách. Všechny otázky jsou dostupné na webovém linku: https://ggbm.at/y8x7yuaz

5.1 Polohové vlastnosti v prostoru:

1) Pokud dvě různé přímky neleží v jedné rovině, pak víme, že se jedná o přímky navzájem
   a) různoběžné
   b) mimoběžné
   c) rovnoběžné různé
   d) rovnoběžné totožné

2) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky $p \equiv CE$ a přímky
$q \equiv S_{AB}S_{BC}$. Přímky p a q jsou:
   a) rovnoběžné různé
   b) mimoběžné
   c) různoběžné
   d) rovnoběžné totožné

3) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* a přímka $p \equiv CS_{BV}$. Rozhodněte, která z následujících přímek bude s přímkou p mimoběžná:
   a) $q \equiv BC$
   b) $l \equiv AD$
   c) $m \equiv S_{AD}V$
   d) $n \equiv S_{CV}B$

4) Pokud jsou dvě roviny navzájem různoběžné, tak platí, že:
   a) jejich průnikem je přímka
   b) jejich průnikem není přímka

5) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete vzájemnou polohu roviny $\alpha \equiv ABH$ s rovinou $\beta \equiv CBG$.
   a) rovnoběžné různé
   b) rovnoběžné splývající
   c) různoběžné

6) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Určete vzájemnou polohu roviny $\sigma \equiv BDV$ s rovinou $\rho \equiv S_{BC}S_{CD}S_{CV}$.
   a) rovnoběžné splývající
   b) rovnoběžné různé
   c) různoběžné

7) Je dána krychle *ABCDEFGH* a přímka $p \equiv FH$. O kterých rovinách můžeme tvrdit, že jsou s přímkou p rovnoběžné totožné.
   a) $\alpha \equiv ACG$
   b) $\beta \equiv BDF$
   c) $\delta \equiv ADE$
   d) $\rho \equiv EFG$

8) Je dán pravidelný pětiboký hranol *ABCDEFGHIJ* a přímka $q \equiv AI$. Rozhodněte, která z následujících rovin je s přímkou *q* rovnoběžná:
   a) *BCG*
   b) *ABE*
   c) *FID*
   d) *AFD*

Řezy:

1) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zobrazte řez krychle s rovinou $\alpha \equiv MNO$, přitom bod *M* je střed hrany *EH*, bod *N* je střed hrany *BC* a bod *O* leží v bodě *G*.

2) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zobrazte řez roviny $\sigma \equiv TUV$ s krychlí *ABCDEFGH*, kde bod *T* leží na dokreslení hrany *AB* a platí |*AT*| = 2 *|*AB*|, bod *U* leží na dokreslení hrany *AD* a platí |*AU*| = 5/4 * |*AD*| a bod *V* leží na hraně *EH*.

3) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zobrazte řez roviny $\delta \equiv POQ$ s krychlí *ABCDEFGH,* kde bod *P* leží na *EF* a |*PF*| = 3*|*EP*|, bod *O* leží na *AE* a |*OA*|= 2*|*EO*| a bod *Q* je střed hrany *CG*.

4) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zobrazte řez roviny $\beta \equiv XYZ$ s krychlí *ABCDEFGH*, přitom bod *X* leží na hraně *AD*, bod *Y* je střed hrany *BF* a bod *Z* je střed hrany *GH*.

5) Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH*. Zobrazte řez roviny $\alpha \equiv MNO$ s pravidelným čtyřbokým hranolem *ABCDEFGH*, kde bod *M* je střed hrany *DH*, bod *N* leží na dokreslení hrany *BC* za bodem *C* a platí, že |*BN*| = 2*|*BC*|, a bod *O* je střed hrany *GH*.

6) Je dán pravidelný čtyřboký hranol *ABCDEFGH*. Zobrazte řez roviny $\alpha \equiv MNO$ s pravidelným čtyřbokým hranolem *ABCDEFGH,* kde bod *M* leží na hraně *DC*, bod *N* je střed hrany *FG* a bod *O* je střed hrany *AE*.

5.2 Metrické úlohy:

1) Definujte odchylku dvou různoběžných přímek?
   Odpověď: Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost ostrého nebo pravého úhlu, jehož ramena leží na uvažovaných přímkách.

2) Kolik různých rovnoběžek s danou přímkou lze vést daným bodem v prostoru.
   a) Právě jednu
   b) Minimálně dvě
   c) Nekonečně mnoho
   d) Jiný počet

3) Jak velký musí být úhel mezi dvěma přímkami, aby platilo $p \perp q$?
   a) 30°
   b) 45°
   c) 60°
   d) 90°

4) Definujte odchylku dvou rovin?
   Odpověď: Odchylka α dvou rovin ρ, σ je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.

5) Definujte odchylku přímky s rovinou?
   Odpověď: Odchylka α přímky p a roviny σ je odchylka přímky p a přímky q, která je průsečnicí roviny σ a roviny kolmé k rovině σ procházející přímkou p.

6) Je pravda, že pokud jsou přímka p a rovina α kolmé k rovině β, že jsou navzájem rovnoběžné?
   a) Ano
   b) Ne

7) V krychli $ABCDEFGH$ s délkou hrany 5 cm určete odchylku α přímky $p \equiv AG$ s přímkou $q \equiv CD$.
   a) α = 48,23°
   b) α = 54,74°
   c) α = 63,2°
   d) α = 85,17°

8) V krychli *ABCDEFGH* s délkami hran a = 3 cm určete odchylku α přímky $p \equiv AS_{BC}$ s přímkou $q \equiv AB$.
   a) α = 13,56°
   b) α = 20,43°
   c) α = 26,57°
   d) α = 33,36°
   e) jiná

9) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a = 6,3 cm určete odchylku přímky $p \equiv S_{DH}S_{GH}$ s rovinou $\beta \equiv CDG$.
   a) α = 0°
   b) α = 33°
   c) α = 55°
   d) α = 66°
   e) jiná

10) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a = 4,8 cm určete odchylku přímky $q \equiv CB$ s rovinou $\delta \equiv AFH$.
   a) α = 17°
   b) α = 23,5°
   c) α = 42,2°
   d) α =45°
   e) jiná

11) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a = 5 cm určete odchylku α roviny $\phi \equiv ABC$ s rovinou $\rho \equiv EFG$.
   a) α = 0°
   b) α = 30°
   c) α = 60°
   d) α = 90°
   e) jiná

12) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a = 5 cm určete odchylku roviny $\sigma \equiv ABC$ s rovinou $\rho \equiv ABG$.
   a) α = 54,74°
   b) α = 56,30°
   c) α = 63°
   d) α = 66°
   e) jiný

13) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a = 5 cm určete odchylku α roviny $\delta \equiv BCG$ s rovinou $\beta \equiv BCH$.

a) $\alpha = 30°$
b) $\alpha = 45°$
c) $\alpha = 60°$
d) $\alpha = 75°$
e) jiná

14) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a = 7 cm určete odchylku roviny $\beta \equiv ABC$ s rovinou $\delta \equiv BDG$.

a) $\alpha = 35{,}21°$
b) $\alpha = 54{,}44°$
c) $\alpha = 60{,}82°$
d) $\alpha = 65{,}33°$
e) jiný

15) V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany a = 3,5 cm a s délkou pobočné hrany b = 5 cm určete odchylku roviny $\beta \equiv BCE$ s rovinou $\sigma \equiv BS_{EF}S_{GH}$.

a) α = 11,5°
b) α = 15,7°
c) α = 17,65°
d) α = 19,7°
e) jiný

16) V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany a = 8,5 cm a délkou pobočné hrany b = 2 cm určete odchylku roviny $\beta \equiv BCE$ s rovinou $\sigma \equiv BS_{EF}S_{GH}$.

a) $\alpha = 11{,}96°$
b) $\alpha = 12{,}45°$
c) $\alpha = 46{,}79°$
d) $\alpha = 55{,}23°$
e) jiný

17) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a . Určete vzdálenost bodu *A* od bodu *H*.

a) $|AH| = a^2$
b) $|AH| = a\sqrt{2}$
c) $|AH| = a\sqrt{3}$
d) $|AH| = a$

18) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany *a*. Určete vzdálenost bodu *A* od bodu *G*.

a) $|AG| = a^2$
b) $|AG| = a\sqrt{2}$
c) $|AG| = a\sqrt{3}$
d) $|AG| = a$
e) Jiná

19) V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany $a = 5$ cm a s délkou pobočné hrany $b = 9$ cm vypočítejte vzdálenost bodu *D* od přímky $p \equiv S_{EH}S_{FG}$.

a) 8,5 cm
b) 9,34 cm
c) 9,5 cm
d) 9,99 cm
e) jiná

20) V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany $a = 5$ cm a s délkou pobočné hrany $b = 2{,}5$ cm vypočítejte vzdálenost bodu *A* od přímky $p \equiv FH$.

a) 4,33 cm
b) 4,66 cm
c) 5,33 cm
d) 5,66 cm
e) jiná

21) V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany $a = 3$ cm a s délkou pobočné hrany $b = 5$ cm vypočítejte vzdálenost bodu *C* od přímky $p \equiv AH$.

a) 1,9 cm
b) 2,21 cm
c) 2, 97 cm
d) 3,95 cm
e) jiná

22) V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany a = 6 cm a s délkou pobočné hrany b = 2 cm vypočítejte vzdálenost bodu B od přímky $p \equiv DG$.

a) 5,21 cm
b) 5,92 cm
c) 6,29 cm
d) 6,52 cm
e) jiná

23) V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany a = 4 cm a s délkou pobočné hrany b = 2,5 cm vypočítejte vzdálenost bodu C od roviny $\sigma \equiv BDF$.

a) 2,33 cm
b) 2,52 cm
c) 2,84 cm
d) 2,96 cm
e) jiná

24) V pravidelném čtyřbokém hranolu *ABCDEFGH* s délkou podstavné hrany a = 3 cm a s délkou pobočné hrany b = 7 cm vypočítejte vzdálenost bodu F od roviny $\delta \equiv ACE$.

a) 2,13 cm
b) 2,52 cm
c) 2,81 cm
d) 9,11 cm
e) jiná

25) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a = 4 cm určete vzdálenost bodu A od roviny $\beta \equiv S_{CG}S_{EH}S_{FG}$.

a) 1,7 cm
b) 2,7 cm
c) 3,14 cm
d) 7 cm
e) jiná

26) V krychli *ABCDEFGH* s délkou hrany a = 6 cm určete vzdálenost bodu B od roviny $\phi \equiv S_{AE}S_{CG}F$.

a) 4,9 cm
b) 5,2 cm
c) 5,7 cm
d) 6,1 cm
e) jiná

5.3 Objemy a povrchy těles:

1) Uveďte vzorec pro výpočet objemu a povrchu jehlanu.

Odpověď: $V = \frac{1}{3}S_p * v$

$S = S_p + S_{pl}$

2) Uveďte vzorec pro výpočet povrchu válce.

Odpověď: $S = 2\pi r\,(r + v)$

3) Z jakých rovinných geometrických obrazců se skládá síť rotačního kužele.

Odpověď: kruh, kruhová výseč

4) Napište vzorce pro výpočet objemu a povrchu koule?

Odpověď: $V = \frac{4}{3} * \pi * r^3$

$S = 4 * \pi * r^2$

5) Z jakých částí rovinných geometrických obrazců je tvořena síť pětibokého jehlanu?

Odpověď: rovnoramenné trojúhelníky (5), pětiúhelník

6) Z jakých částí rovinných geometrických obrazců je tvořena síť pravidelného čtyřbokého jehlanu?

Odpověď: čtverec, rovnoramenné trojúhelníky (4)

7) Definujte objem tělesa?
Odpověď: Objem tělesa je kladné reálné číslo přiřazené danému tělesu takovým způsobem, že platí:
    1. Shodná tělesa mají objemy sobě rovné.
    2. Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles

8) Definujte povrch tělesa?
Odpověď: Povrchem tělesa je rozumíme obsah jeho hranice. K označení povrchu používáme písmeno *S*.

9) Určete objem kvádru, jestliže jeho povrch je 376 a délky hran jsou v poměru 3 : 4 : 5.
a) V = 420
b) V = 480
c) V = 560
d) V = 600
e) jiný

10) Součet obsahů tří stěn kvádru, které procházejí týmž vrcholem, je 279. Jeho rozměry jsou v poměru 2 : 3 : 5. Určete objem kvádru.
a) V = 810
b) V = 790
c) V = 760
d) V = 750
e) jiný

11) Součet obsahů tří stěn kvádru, které procházejí týmž vrcholem, je 279. Jeho rozměry jsou v poměru 2 : 3 : 5. Určete délky stěnových úhlopříček kvádru.
a) u_1 =10.8 , u_2 = 15.3 , u_3 = 19.1
b) u_1 = 9.5 , u_2 = 10.8 , u_3 = 14.3
c) u_1 = 10 , u_2 = 14 , u_3 = 18
d) u_1 =10.8 , u_2 = 16.2 , u_3 = 17.5
e) jiný

12) Rozměry kvádru jsou v poměru 3 : 4 : 7. Jeho objem je 672. Určete povrch kvádru.

a) S = 400
b) S = 444
c) S = 488
d) S = 500
e) jiný

6 Střípky z historie

První, nejjednodušší stereometrické představy vznikaly obdobně jako první planimetrické úvahy, a to z praktických potřeb. Už v pozdní době ledové vyráběl člověk nástroje geometrických tvarů. Neolitické nálezy potvrzují, že geometrické představy pokročily se vznikem hrnčířství, tkalcovství, stavební techniky a umění. Velký vliv na geometrické představy mělo zemědělství, zejména tím, že si vynutilo měření ploch a objemů. Pozorování hvězdné oblohy přispělo ke vzniku geometrických poznatků o kouli.

Matematika, a tedy i geometrie byla zpočátku především praktickou naukou vytvářenou k měřením a výpočtům. Její výklad zahrnoval většinou konkrétní úlohy, ne obecná pravidla. S prvními stereometrickými, stejně jako planimetrickými poznatky se setkáváme u vyspělých starověkých národů žijících v údolích velkých řek, jako je Nil, Eufrat a Tigrid. Nejstarší písemné památky jsou dochovány právě zejména z oblasti starého Egypta (egyptské papyry) a Mezopotámie (klínové tabulky).

Jednou z nejpozoruhodnějších egyptských úloh je úloha uvedená v tzv. moskevském papyru (18. století před naším letopočtem), ve které se počítá objem kolmého komolého jehlanu se čtvercovou základnou (pyramida). V papyru je spolu s textem uveden i náčrt a schéma výpočtu. Komolý jehlan je zobrazen jako nevelký lichoběžník. V textu nejsou rozdělovací znaménka a operace umocnit „na druhou“ je značena hieroglyfem „jít mimo“. Je kupodivu, že pro postup výpočtu je použit správný vzorec.

Matematika jako teoretické odvětví vědění se začíná rozvíjet teprve ve starém Řecku. O počátek rozvoje matematiky jako vědy se zasloužili zejména **Thalés z Milétu** (7. – 6. století před naším letopočtem) a **Pýthagoras ze Samu** (6. století před naším letopočtem). Thalés má velký podíl na přetvoření geometrie jako deduktivního systému. Ze sbírky návodů k řešení různých úloh (např. na výpočet výměry polí, objemu sýpek a hrází, rozměrů cihel) vytvořil abstraktní vědu, která začala zkoumat geometrické tvary. Pýthagoras se se svou školou začal zabývat pravidelnými mnohostěny. Pythagorejci znali čtyři z pěti pravidelných mnohostěnů (čtyřstěn, šestistěn, osmistěn a dvanáctistěn); dvacetistěn studoval později **Theaitetos z Athén** (5. – 4. století před naším letopočtem). Pythagorejci se však ve stereometrii nedostali na úroveň svých planimetrických znalostí.

Stereometrii jako zvláštní disciplínu, kterou by měl kromě čtyř pythagorejských oborů (aritmetiky, geometrie, astronomie a hudby) studovat budoucí státník, jmenuje poprvé **Platón** (5. – 4. století před naším letopočtem). V Platónově škole byl proveden důkaz o počtu pravidelných mnohostěnů. Platón učinil nauku o pravidelných mnohostěnech součástí svého idealistického názoru. Podle něho se oheň skládal ze čtyřstěnů, vzduch z osmistěnů, voda z dvacetistěnů a země z krychlí; obrys světa pak tvořil dvanáctistěn. Pravidelným mnohostěnům se ještě dnes říká *„platonská tělesa“*. Platónovi je také připisováno jedno z nejjednodušších mechanických řešení jedné ze tří proslulých úloh starověku – *zdvojení krychle* (tj. sestrojení hrany krychle, která má dvakrát větší objem než daná krychle).

Démokritos (5. – 4. století před naším letopočtem) věnoval ve svých geometrických spisech velkou pozornost určování obsahu obrazců, povrchů a objemů těles. Zřejmě jako první zjistil, že objem jehlanu se rovná jedné třetině objemu hranolu o stejné podstavě a výšce. Důkaz této věty však provedl až cca za padesát let **Eudoxos z Knidu**. Démokritos zobecnil větu pro jehlany s mnohoúhelníkovou podstavou. A protože pro něj byl kruh mnohoúhelníkem o velmi velkém počtu stran, vyplývalo z věty pro jehlany zobecnění i pro kužele.

V zemích Římského impéria byla střediskem vědy, a tedy i matematiky Alexandrie. **Eukleidés** (4. – 3. století před naším letopočtem) se jako první soustavně zabýval stereometrií. Shrnul do té doby známé stereometrické poznatky v posledních třech knihách (jedenácté, dvanácté a třinácté) svých *Základů*. Jedenáctá kniha obsahuje poznatky o kolmých a rovnoběžných přímkách a rovinách, o úhlech vytvářených přímkami a rovinami, poznatky o rovnoběžnostěnu a nakonec o hranolu. Ve dvanácté knize jsou věty dokazující objemové vztahy těles, zejména jehlanů, kuželů, válců a koulí. Kniha neobsahuje žádné výpočty objemů či obsahů (povrchů), neboť ty spadaly do praktické geodézie, nikoli do teoretické geometrie. Eukleidovy *Základy* vynikají přesností, jsou vybudovány podle jednotného logického schématu.

Velkým matematikem 3. století před naším letopočtem byl **Archimédés**. Na rozdíl od **Eukleida** přinesl do matematiky mnoho svých vlastních objevů. Jeho objevy při stanovování povrchů a objemů těles ohraničených křivými plochami jsou začátkem myšlenek, na kterých byl po dvou tisících letech budován integrální počet. Archimédés objevil tzv. polopravidelné mnohostěny, které jsou po něm pojmenovány.

Na počátku našeho letopočtu byli známějšími alexandrijskými matematiky v oblasti geometrie **Héron** (1. století našeho letopočtu) a **Pappos** (3. a 4. století našeho letopočtu). Díla Héronova obsahují daleko víc aplikací než teorií. Jeho *Stereometrie* obsahuje kromě měření objemů geometrických těles i měření objemů staveb, divadel, amfiteátrů, plaveckých bazénů, studní, lodí, vinného sudu apod. Pappova *Matematická sbírka* je stručně a jasně napsaná příručka geometrie s historickými poznámkami, zlepšeními a obměnami existujících vět a důkazů. Mnohé výsledky starověkých autorů jsou známy jen díky této sbírce.

V počátcích rozvoje matematického vědění v Evropě měly velký význam překlady původních děl z arabštiny a řečtiny, včetně Eukleidových *Základů*. Pro rozvoj geometrie byla významná kniha *Geometrická praktika* **Leonarda Pisánského**, nazývaného také **Fibonacci** (12. – 13. století našeho letopočtu). Kniha obsahuje kromě výsledků, které byly známé již ve starověku, i výsledky, kterých dosáhl sám autor.

V 15. a 16. století nastalo období renesance – znovuzrození umění a vědy, a tedy i matematiky. V této době tvořil například **Leonardo da Vinci** (1452-1519). V traktátu o malířství vyložil geometrickou perspektivu, jeho zápisníky obsahují poznámky o rovnoplochých útvarech a tělesech stejného objemu.

Již Pappos poznal, že objem rotačního tělesa se vypočítá jako součin dráhy těžiště a obsahu rotujícího obrazce. Tato věta však byla zapomenuta a znovu ji objevil německý hvězdář a matematik působící i v Praze, **Johannes Kepler** (1571-1630). Užil ji k výpočtu objemu různých rotačních těles, mezi jiným též k výpočtu objemu sudů. Dnes nazýváme tuto větu Guldinovým pravidlem, třebaže ji **Paul Guldin** (1577-1643) ani neobjevil, ani nedokázal.

Vztahy mezi počtem vrcholů, hran a stěn u mnohostěnů byly zkoumány již ve starověku. Švýcarský matematik působící také v Berlíně a v Petrohradě, **Leonard Euler** (1707-1783), studoval mnohostěny vyhovující tzv. Eulerově větě. Dokázal, že mezi takové mnohostěny patří zejména všechny konvexní mnohostěny. Mnohostěny, pro něž platí Eulerova věta, se nazývají Eulerovy mnohostěny.

Prostorové vztahy mezi přímkami a mezi přímkami a rovinami úspěšně studovali francouzští matematici **Adrien Matie Legendre** (1752-1833) a **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857). Legendre se v podstatě jako první zabýval mimoběžkami. K rozšíření znalostí prostorových útvarů přispěla deskriptivní geometrie, jejíž základy položil **Gaspard Monge** (1746-1818).

Závěr

Tato bakalářská práce byla zamýšlena jako interaktivní elektronický materiál určený zejména pro studenty a učitele středních škol, na kterých se vyučuje stereometrie. Tomuto účelu jsou tedy obsah a náročnost práce přizpůsobeny.

V práci byla zopakována základní tělesa, která studenti znají již ze základní školy, byl vysvětlen pojem rovnoběžné promítání, neboť veškeré objekty v bakalářské práci i v dynamických appletech jsou v tomto promítání zobrazeny. Dále byly vysvětleny vzájemné polohy přímek, rovin a roviny s přímkou. Všechny případy jsou doplněny názornými obrázky, u přímek např. zobrazujícími čtyři různé vzájemné polohy, tedy přímky rovnoběžné totožné, rovnoběžné různé, různoběžné a mimoběžné. Díky možnosti nahlédnutí na jednotlivé situace v dynamických prostorových appletech by mělo být možné vytvořit si představu, jak se dané objekty ve 3D prostoru zobrazují. Podrobněji zpracovanou podkapitolou je podkapitola věnovaná řezům těles. Příklady zaměřené na řezy těles se (i s jejich krokovanými konstrukcemi) vyskytují na webových stránkách v nejhojnějším počtu, a to právě proto, že řešení úloh tohoto typu bývá pro některé studenty problematické a hůře představitelné.

Další uvedenou kapitolou je kapitola věnovaná metrickým úlohám. Mezi tyto úlohy řadíme úlohy týkající se vzdáleností bodu od přímky, dvou přímek, dvou rovin nebo přímky od roviny a odchylek dvou rovin, dvou přímek a přímky s rovinou. K úlohám tohoto typu je na webových stránkách zařazeno několik názorných appletů, které mají opět studentům pomoci s názornější představou daného problému.

Čtvrtá kapitola je zaměřena na další typy metrických úloh, přesněji na počítání objemů a povrchů základních těles s užitím známých vzorců. V textu práce se nacházejí pouze slovní zadání úloh k procvičení kdežto v GeoGebra knize „Výuka a testování stereometrie“ jsou umístěny dynamické GeoGebra applety obsahující řešení těchto úloh. Na webových stránkách https://ggbm.at/y8x7yuaz

Hlavním cílem této práce bylo vytvoření vlastních webových stránek za pomoci programu GeoGebra. Tyto stránky mají možnost využívat studenti i učitelé k interaktivní výuce, procvičování, ale i k testování získaných dovedností. Většina úloh se na webových stránkách vyskytuje s úplným řešením, v závislosti na povaze dané úlohy buď s grafickým řešením či s početním i s grafickým řešením. Úlohy zařazené do textu práce jsou bez řešení, ale na webových stránkách jsou jejich řešení vložena. Pro učitele je vytvořen navíc pdf soubor s úlohami pro testování. Tento soubor obsahuje souhrnné úlohy z kapitol dva až čtyři.

V celé bakalářské práci jsou obrázky vytvořené v programu GeoGebra. Jejich názornost je lépe viditelná na webových stránkách, kde lze s nimi otáčet a pohybovat. Obrázky v textu bakalářské práce jsou statické a vybrané tak, aby zachycovali nejpodstatnější situace a nejnázornější pohled.

Literatura

[1] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-178-7.

[2] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.

[3] ODVÁRKO, Oldřich, Miloš BOŽEK, Marta RYŠÁNKOVÁ a Jozef SMIDA. *Matematika pro II. ročník gymnázií*. 1. Praha: státní pedagogické nakladatelství, 1985.

[4] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.

[5] POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-166-3.

[6] BENDA, Petr, Berta DAŇKOVÁ a Josef SKÁLA. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 3. Praha: státní pedagogické nakladatelství, 1966.

[7] KISELEV, A. P.*: Kiselev's geometry. Book II – Stereometry* (adapted from Russian by Alexander Givental). Hardcover, Sumizdat 2008. 180 p. ISBN 978-0-9779852-1-0

[8] SLAUGHT, H. E. – LENNES, N. J.: *Solid geometry with problems and applications*. Allyn and Bacon, Chicago, USA 1919. p. 211