



Provozně  
ekonomická  
fakulta

# Produkční funkce v makroekonomii

Diplomová práce

Vedoucí práce:

doc. Mgr. David Hampel, Ph.D.

Bc. Adéla Koláčková

Brno 2015



Na tomto místě bych chtěla projevít dík především vedoucímu své diplomové práce doc. Mgr. Davidu Hampelovi, Ph.D., za jeho ochotu, vstřícnost, věcné připomínky a rady, které mi dopomohly k napsání této práce. Zároveň také děkuji své nejbližší rodině, která mě během studia trpělivě podporovala a byla mi oporou i v nejtěžších situacích.



### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto práci: **Produkční funkce v makroekonomii** vypracoval/a samostatně a veškeré použité prameny a informace jsou uvedeny v seznamu použité literatury. Souhlasím, aby moje práce byla zveřejněna v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů, a v souladu s platnou *Směrnicí o zveřejňování vysokoškolských závěrečných prací*.

Jsem si vědom/a, že se na moji práci vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, a že Mendelova univerzita v Brně má právo na uzavření licenční smlouvy a užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 Autorského zákona.

Dále se zavazuji, že před sepsáním licenční smlouvy o využití díla jinou osobou (subjektem) si vyžádám písemné stanovisko univerzity o tom, že předmětná licenční smlouva není v rozporu s oprávněnými zájmy univerzity, a zavazuji se uhradit případný příspěvek na úhradu nákladů spojených se vznikem díla, a to až do jejich skutečné výše.

V Brně dne 4. ledna 2016

---



## **Abstract**

Kolářková, A. Production Functions in Macroeconomics. Diploma thesis. Brno: Mendel University, 2015.

Diploma thesis is concerned with production functions and their utilization in macroeconomics. Theoretical part describes and summaries general knowledge about production functions and their basics in macroeconomic theory. Productions functions are described from the point of productivity measurement and estimation of potential product. In theoretical part, indicators of productivity and their alternatives are sum up.

Practical part is based on estimation of Cobb-Douglas, CES and Sato production functions by least squares and non-linear least squares method. Results are compared and discussed with similar works in conclusion of thesis.

## **Keywords**

Production functions, indicators of productivity, total factor productivity, OECD database, least squares method, non-linear least squares method, Cobb-Douglas production function, CES production function, Sato production function.

## **Abstrakt**

Kolářková, A. Produkční funkce v makroekonomii. Diplomová práce. Brno: Mendelova univerzita v Brně, 2015.

Diplomová práce se věnuje produkčním funkcím a jejich využití z pohledu makroekonomie. Teoretická část práce popisuje a shrnuje základní poznatky o produkčních funkcích a popisuje jejich základ v makroekonomické teorii. Produkční funkce jsou ilustrovány z pohledu měření produktivity a využití pro odhad potenciálního produktu. V teoretické části je pojednáno o indikátorech produktivity a jejich alternativách.

Praktická část práce je věnována odhadům Cobbovy-Douglasovy, CES a Sato produkční funkce s využitím metody nejmenších nelineárních a nejmenších lineárních čtverců. Výsledky jsou porovnány mezi sebou a diskutovány s obdobnými pracemi v závěru práce.

## **Klíčová slova**

Produkční funkce, indikátory produktivity, souhrnná produktivita faktorů, databáze OECD, metoda nejmenších čtverců, metoda nelineárních nejmenších čtverců, Cobbova-Douglasova produkční funkce, CES produkční funkce, Sato produkční funkce.





# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod a cíl práce</b>	<b>15</b>
1.1	Úvod.....	15
1.2	Cíl práce.....	16
<b>2</b>	<b>Metodika</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Literární část</b>	<b>19</b>
3.1	Produkční funkce.....	19
3.1.1	Vstupy a výstupy .....	19
3.1.2	Produkční funkce v krátkém časovém období.....	20
3.1.3	Produkce v dlouhém časovém období .....	21
3.2	Produkční funkce v makroekonomii.....	23
3.2.1	Teorie ekonomického růstu .....	25
3.2.2	Produkční funkce a poptávka po práci .....	30
3.2.3	Produkční funkce pro měření produktivity.....	31
3.2.4	Produktivita práce a kapitálu .....	36
3.2.5	Produkční přístup k odhadu potenciálního produktu .....	40
3.3	Indikátory produktivity .....	44
3.3.1	Hrubý a čistý domácí produkt.....	45
3.3.2	Hrubý a čistý národní produkt.....	45
3.3.3	Environmentální domácí produkt .....	46
3.3.4	ANS analýza .....	46
3.3.5	Koncept parity kupní síly .....	46
3.3.6	Indexy .....	47
3.3.7	Alternativní způsoby měření SPF .....	47
<b>4</b>	<b>Praktická část</b>	<b>48</b>
4.1	Česká republika.....	51
4.1.1	Cobbova-Douglasova produkční funkce.....	52
	CES produkční funkce .....	55

---

4.1.2	Sato produkční funkce.....	56
4.2	Slovensko.....	58
4.2.1	Cobbova-Douglasova produkční funkce.....	59
4.2.2	CES produkční funkce.....	61
4.2.3	Sato produkční funkce.....	63
4.3	Maďarsko.....	65
4.3.1	Cobbova-Douglasova produkční funkce.....	66
4.3.2	CES produkční funkce.....	68
4.3.3	Sato produkční funkce.....	68
4.4	Řecko.....	68
4.4.1	Cobbova-Douglasova produkční funkce.....	69
4.4.2	CES produkční funkce.....	71
4.4.3	Sato produkční funkce.....	71
<b>5</b>	<b>Diskuze a závěry</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Literatura</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Vstupy</b>	<b>83</b>

## Seznam obrázků

<b>Obr. 1</b>	<b>Grafické znázornění vztahů celkového, mezního a průměrného produktu</b>	<b>21</b>
<b>Obr. 2</b>	<b>Izokvanta</b>	<b>22</b>
<b>Obr. 3</b>	<b>Výnosy z rozsahu</b>	<b>23</b>
<b>Obr. 4</b>	<b>Tok národního důchodu</b>	<b>25</b>
<b>Obr. 5</b>	<b>Intenzivní produkční funkce</b>	<b>27</b>
<b>Obr. 6</b>	<b>Produkční a investiční funkce</b>	<b>28</b>
<b>Obr. 7</b>	<b>Odvození agregátní poptávky po práci</b>	<b>31</b>
<b>Obr. 8</b>	<b>Skutečný a potenciální produkt odhadnutý produkčním přístupem; Srovnání produkčních mezer za využití rozdílných filtrů</b>	<b>42</b>
<b>Obr. 9</b>	<b>Diagram měření potenciálního produktu pomocí produkčního přístupu</b>	<b>43</b>
<b>Obr. 10</b>	<b>Vykreslení izokvant Cobbovy-Douglasovy produkční funkce v lineárním a nelineárním tvaru pro Českou republiku</b>	<b>55</b>
<b>Obr. 11</b>	<b>Vykreslení izokvant CES produkční funkce pro Českou republiku</b>	<b>56</b>
<b>Obr. 12</b>	<b>Vykreslení izokvant pro Sato produkční funkci České republiky pro rok 2005 (vlevo) a rok 2011 (vpravo)</b>	<b>58</b>
<b>Obr. 13</b>	<b>Vykreslení izokvant Cobbovy-Douglasovy produkční funkce v nelineárním a lineárním tvaru pro Slovensko</b>	<b>61</b>
<b>Obr. 14</b>	<b>Vykreslení izokvant CES produkční funkce pro Slovensko</b>	<b>63</b>
<b>Obr. 15</b>	<b>Vykreslení izokvant Sato produkční funkce pro Slovensko</b>	<b>64</b>
<b>Obr. 16</b>	<b>Ukázka nesprávného vykreslení izokvant na základě odhadnutých parametrů Sato produkční funkce pro Maďarsko (vlevo) a Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pro Maďarsko (vpravo)</b>	<b>77</b>

## Seznam tabulek

<b>Tab. 1</b>	<b>Možnosti měření produktivity</b>	<b>32</b>
<b>Tab. 2</b>	<b>Porovnání přístupů v měření produktivity v databázích OECD</b>	<b>38</b>
<b>Tab. 3</b>	<b>Popisné statistiky vstupních hodnot pro Českou republiku</b>	<b>51</b>
<b>Tab. 4</b>	<b>Výstup programu Gretl pro Českou republiku pomocí metody OLS</b>	<b>53</b>
<b>Tab. 5</b>	<b>Odhad Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců pro Českou republiku</b>	<b>54</b>
<b>Tab. 6</b>	<b>Porovnání výsledků rozdílných metod pro Českou republiku</b>	<b>55</b>
<b>Tab. 7</b>	<b>Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Českou republiku pomocí metody OLS</b>	<b>57</b>
<b>Tab. 8</b>	<b>Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Českou republiku pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců</b>	<b>57</b>
<b>Tab. 9</b>	<b>Popisné charakteristiky vstupních hodnot pro Slovensko</b>	<b>58</b>
<b>Tab. 10</b>	<b>Odhad Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců pro Slovensko</b>	<b>59</b>
<b>Tab. 11</b>	<b>Výstup programu Gretl pro Slovensko pomocí metody OLS</b>	<b>60</b>
<b>Tab. 12</b>	<b>Porovnání výsledků rozdílných metod pro Slovensko</b>	<b>61</b>
<b>Tab. 13</b>	<b>Výstup programu Gretl CES produkční funkce pro Slovensko</b>	<b>62</b>
<b>Tab. 14</b>	<b>Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Slovensko pomocí metody OLS</b>	<b>63</b>
<b>Tab. 15</b>	<b>Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Slovensko pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců</b>	<b>64</b>
<b>Tab. 16</b>	<b>Popisné charakteristiky vstupních dat pro Maďarsko</b>	<b>65</b>
<b>Tab. 17</b>	<b>Odhad Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců pro Maďarsko</b>	<b>66</b>
<b>Tab. 18</b>	<b>Výstup programu Gretl pro Maďarsko</b>	<b>67</b>

---

<b>Tab. 19 Porovnání výsledků rozdílných metod pro Maďarsko</b>	<b>67</b>
<b>Tab. 20 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Maďarsko</b>	<b>68</b>
<b>Tab. 21 Popisné charakteristiky vstupních dat pro Řecko</b>	<b>69</b>
<b>Tab. 22 Odhad Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců pro Řecko</b>	<b>70</b>
<b>Tab. 23 Výstup programu Gretl pro Řecko pomocí metody OLS</b>	<b>70</b>
<b>Tab. 24 Porovnání výsledků rozdílných metod pro Řecko</b>	<b>71</b>
<b>Tab. 25 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Řecko pomocí metody OLS</b>	<b>72</b>
<b>Tab. 26 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Řecko pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců</b>	<b>72</b>
<b>Tab. 27 Shrnutí provedených odhadů v programu Gretl</b>	<b>74</b>
<b>Tab. 28 Výsledné hodnoty odhadů Cobbovy-Douglasovy produkční funkce</b>	<b>75</b>
<b>Tab. 29 Vstupní data pro Českou republiku</b>	<b>83</b>
<b>Tab. 30 Vstupní data pro Maďarsko</b>	<b>84</b>
<b>Tab. 31 Vstupní data pro Slovensko</b>	<b>86</b>
<b>Tab. 32 Vstupní data pro Řecko</b>	<b>88</b>



# 1 Úvod a cíl práce

## 1.1 Úvod

Vývoj ekonomie je postaven na mnoha disciplínách, jako například matematice, ekonometrii, teorii makroekonomie, mikroekonomie a dalších. Studium ekonomie jako mezioborové vědy může být složité, zvláště z hlediska vědeckého přístupu k řešení problémů a tvorby teorie. Produkční funkce jsou významnou součástí ekonomického výkladu a využívaným prostředkem ekonomické analýzy.

Z matematického hlediska se produkční funkcí rozumí technologická závislost vstupů a výstupů výrobního procesu. Z mikroekonomického hlediska je produkční funkce chápána jako vztah mezi výrobními faktory a maximálním výstupem, kterého lze s danými prostředky dosáhnout. V mikroekonomii je základem teorie firmy, která je zaměřena na velikost výstupu a rozhodování o volbě výrobních faktorů. Tato teorie se zabývá také určením optima velikosti nákladů. Při rozhodování je zohledňována délka období.

Na makroekonomické úrovni hovoříme o agregátní produkční funkci, kterou získáváme agregací produkčních funkcí na úrovni firem. Z historického hlediska se jednalo o komplikované téma, neboť se názory ekonomů na možnosti agregace lišily. V otázkách využití agregátních produkčních funkcí není jasné, zda opravdu vystihují realitu a tyto modely jsou přijímány za podmínek snadné zastupitelnosti a homogenosti kapitálu a práce. Agregátní produkční funkce je základem neoklasických teorií. Těchto funkcí je využito v Solowově modelu ekonomického růstu, je základem poptávkové strany trhu práce nebo teorie reálných hospodářských cyklů.

V praxi je centrálními bankami využíváno produkčního přístupu pro získání potenciálního produktu ekonomiky. Koncept potenciálního produktu je odrazovým můstkem pro monetární a fiskální politiku, jelikož se jedná o ukazatele, který odráží nabídkovou stranu ekonomiky a jeho působení na udržitelný a neinflační ekonomický růst. Produkční funkce je také významným nástrojem pro měření produktivity. Z tohoto hlediska je využívána například k výpočtům určitých charakteristik v databázích OECD. Měření produktivity je možno provádět více způsoby, můžeme brát ohled pouze na jeden z výrobních faktorů, nebo můžeme brát v potaz vícefaktorovou produktivitu. Dalším významným nástrojem pro měření produktivity je souhrnná produktivita faktorů, která může být dále využívána v teorii ekonomického růstu.

Otázka produktivity zemí a jejího měření je významným tématem. Na podporu rozvoje této oblasti a správného přístupu byla založena Mezinárodní komise pro měření ekonomického výkonu (CMEPSP). Komise nepovažuje produkčně orientovaný systém měření blahobytu za vhodný, a proto se orientuje na důchodové ukazatele. Cílem její práce je využití nových poznatků vývoje ekonomik a rozšíření základních indikátorů životní úrovně a sociálních podmínek. V ekonomii je pro určení produktivity využíváno indikátorů produktivity. Mezi nejvýznamnější ukazatele patří produktivita práce. Tento indikátor je v základu vyjádřen jako výstup ekonomiky na

počet odpracovaných hodin, celkové zaměstnanosti, anebo služby práce. Dnes se obrací pozornost také na alternativní indikátory tohoto charakteru, neboť je potřeba brát ohled rovněž na vzdělání pracovníků nebo pracovní zkušenosti. S ukazatelem produktivity práce získáváme informace o dynamické míře hospodářského růstu, konkurenceschopnosti nebo životní úrovni zemí. Dalším indikátorem produktivity je produktivita kapitálu. Hlavní problematikou je ocenění kapitálu. Základem je ocenění fixního kapitálu s dobou použitelnosti delší než jeden rok.

Mezi tradiční ukazatele produktivity a ekonomické úrovně patří hrubý a čistý domácí produkt a hrubý a čistý národní produkt. K alternativám potom můžeme zařadit koncepty, které se snaží zohlednit nedostatky těchto ukazatelů. Jedná se například o zohlednění poškození životního prostředí či udržitelnost dlouhodobé spotřeby.

## 1.2 Cíl práce

Cílem teoretické části této diplomové práce je shrnout důležité poznatky o produkčních funkcích na makroekonomické úrovni a možnostech jejich využití. Při její tvorbě bude využito poznatků z bakalářské práce Produkční funkce a odhad jejích parametrů. Kromě produkčních funkcí bude část práce věnována také indikátorům produktivity, které jsou jedněmi z ukazatelů ekonomické úrovně země. Cílem bude také zjišťování souvislostí mezi odhady makroekonomických produkčních funkcí a indikátory, které se vztahují k produktivitě.

Praktická část této práce bude věnována odhadu parametrů produkčních funkcí, jejich následné interpretaci a porovnání s vybranými zeměmi. Cílem této části práce bude také porovnání výsledků s vědeckými články obdobného charakteru. Odhady parametrů budou získány pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců a metody nejmenších čtverců za využití programu Gretl. Výsledky práce budou interpretovány v závěrečné kapitole práce.



## 2 Metodika

Praktická část diplomové práce bude věnována odhadu parametrů produkčních funkcí pro vybrané státy Evropské unie pomocí metody nejmenších čtverců a metody nejmenších nelineárních čtverců. Kapitola Metodika je zpracována pomocí knihy Williama Greena (2012).

Metoda nejmenších čtverců je jednou z nejčastěji využívaných technik k odhadu hodnot modelů lineární regrese. Tato metoda je využitelná pouze u regresních modelů lineárních v parametrech. Na modely nelineární v parametrech, které nelze linearizovat se využívá iterativních metody, mezi které patří také metoda nelineárních čtverců.

Metoda nejmenších čtverců je založena na minimalizaci součtu čtverců reziduí ESS. Tento vztah můžeme pomocí vzorce vyjádřit jako

$$ESS = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2,$$

kde jsou  $e_i$  reziduální odchylky a vyjadřují rozdíl pozorovaných a vypočtených hodnot. Metoda nejmenších čtverců minimalizuje sumu čtverců reziduí ESS. Jedná se o metodu, která je srozumitelná a jednoduchá na aplikaci.

Pro dosažení dobrých vlastností odhadů je nezbytné, aby lineární model splňoval několik podmínek. Klasický lineární model musí splňovat tyto podmínky:

- I. Regresní model je lineární v parametrech, má aditivně připojený chybový člen a je správně specifikován.
- II. Chybový člen má nulovou střední hodnotu.
- III. Vysvětlující proměnné nejsou korelovány s chybovým členem.
- IV. Nedochází ke korelaci.
- V. V modelu se nevyskytuje heteroskedasticita.
- VI. V modelu se nevyskytuje multikolinearita.
- VII. Chybový člen modelu má normální rozdělení.

Splnění těchto podmínek je možno ověřit pomocí testů, které nám potvrdí nebo vyvrátí správnost modelu.

Nelineárním modelem rozumíme model nelineární v parametrech. Nelineární modely jsou hojně využívány v ekonomii, kdy jsou používány na modelování specifických ekonomických vztahů. Mezi nelineární modely řadíme modely mocninné, logaritmické, a další. Výhodami těchto modelů je, že ve srovnání s lineárními modely obsahují méně parametrů, které jsou přímo interpretovatelné. Mezi nevýhody řadíme využití iterativních metod a nutnost nastavení počátečních odhadů. Některé modely lze linearizovat a získat tedy model v lineárním tvaru. Po jejich zpětné transformaci do nelineárního tvaru však nemusí reziduální rozptyl dosahovat minima.

Obecně zapisujeme model nelineární v parametrech jako

$$Y_i = f(x_i, \theta) + e_i; e_i \sim iid(0, \sigma^2); i = 1, \dots, n,$$

kde  $x_i$  je vektor (o rozměrech  $1 \times k$ ) vysvětlujících veličin vztažených k hodnotě  $y_i$  a  $\theta$  je vektor parametrů o rozměrech  $1 \times p$ . Odhad parametrů  $\hat{\theta}$  získáme minimalizací sumy čtverců

$$ESS(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \hat{\theta}))^2.$$

Minimalizace sumy nelineárních čtverců je dosahováno pomocí iterace, tedy postupného dosahování výsledku. Součástí iterativních metod je procedura pro hledání počátečních odhadů, pravidlo pro vylepšování odhadu parametrů v nové iteraci a pravidlo pro ukončení výpočtu.

Problematika nastavení počátečních odhadů je složitá a pro její realizaci jsou vyvinuty specializované procedury. Jednodušším způsobem nastavení počátečních odhadů je například náhodná volba počátečních parametrů. Pravidlo pro ukončení výpočtu by se nemělo zakládat na počtu opakování. Nejčastěji využívanými metodami pro hledání minima ESS je Gaussův-Newtonův algoritmus, Newtonův Rhapsodův algoritmus nebo Levenbergův-Marquardtův algoritmus.

## 3 Literární část

### 3.1 Produkční funkce

Z historického hlediska byla produkční funkce využívána jako významný nástroj hospodářské analýzy neoklasické tradice. Mezi první ekonomy, kteří algebraicky formulovali vztah přeměny mezi vstupy a výstupy, patří Phillip Wickseed nebo také Johann von Thünen. Během historie přišli různí ekonomové s rozdílnými druhy produkčních funkcí, které se lišily vstupy, interpretací nebo způsoby jejich měření (Mishra, 2007).

Výrobu chápeme jako proces transformace vstupů na výstupy s cílem zhotovení produktů a nabídky služeb. Zásadní vliv na chování firmy při přeměně vstupů má technologická omezenost a finanční situace podniku. Vhodným nástrojem pro analýzu rozhodování firem je vytvoření abstraktního modelu výroby – produkční funkce (Buchta, 2006).

Produkční funkce vyjadřuje vztah mezi vstupy a maximálním množstvím výstupu, kterého lze dosáhnout na současné úrovni technologického pokroku. Technologickým pokrokem se rozumí způsob přeměny vstupů na výstupy (Holman, 2002).

*„Produkční funkci charakterizujeme jako vztah mezi množstvím vstupů, které byly použity při výrobě v daném období, a maximálním objemem výstupu, který vstupy svým fungováním v daném období vytvořily.“<sup>1</sup>*

Tento vztah zobrazuje závislost produkce na množství výrobních faktorů (tedy vstupů). V závislosti na délce období rozdělujeme výrobní faktory na fixní a variabilní. V krátkém období považujeme výrobní faktory za fixní, čili obtížně měnitelné, naopak v dlouhém časovém horizontu se výrobní faktory považují za variabilní a tedy měnitelné (Holman, 2005).

#### 3.1.1 Vstupy a výstupy

Výstupem produkční funkce je produkt. Za vstupy jsou považovány výrobní faktory, kterými jsou dle Hořejší (2006):

- práce ( $L$ ),
- kapitál ( $K$ ),
- půda ( $A$ ).

Produkt firmy je závislou proměnnou a mění se v souvislosti se změnou v množství vstupních výrobních faktorů při dané úrovni technologie. Produkční funkci můžeme vyjádřit podle Holmana (2002) jako

---

<sup>1</sup> HOŘEJŠÍ, Bronislava. *Mikroekonomie*. 4., rozš. vyd. Praha: Management Press, 2006, 573 s. ISBN 80-7261-150-x.

$$Y = f(K, L, \dots).$$

Takto definovaná produkční funkce disponuje následujícími vlastnostmi:

- *Výstup může být vyroben různými kombinacemi vstupů.*
- *Ukazuje technologická omezení výroby, protože vychází z dané úrovně technologie.*
- *Nepředpokládají se zbytečné a neefektivní výrobní procesy.<sup>2</sup>*

### 3.1.2 Produkční funkce v krátkém časovém období

Krátké období je definováno jako interval, v němž není možné měnit všechny vstupy. Alespoň jeden z výrobních faktorů je považován za fixní. Obvykle bývá za fixní proměnnou považován kapitál, jehož objem není možné měnit okamžitě díky problémům s tím spojeným (např. časová náročnost dané změny). Variabilní proměnnou je potom objem práce, který je možno změnit poměrně rychle a jednoduše (Holman, 2002).

Krátkodobá produkční funkce vychází z předpokladu, kdy je vstupní proměnná kapitál považována za fixní a proměnné práce a výstup jsou variabilní. Produkční funkce v krátkém období nám ukazuje, jak se mění výstup (produkt) v závislosti na změnách variabilního vstupu (práce). Produkční funkce pro krátké období je dle Hořejší (2006) vyjádřena jako:

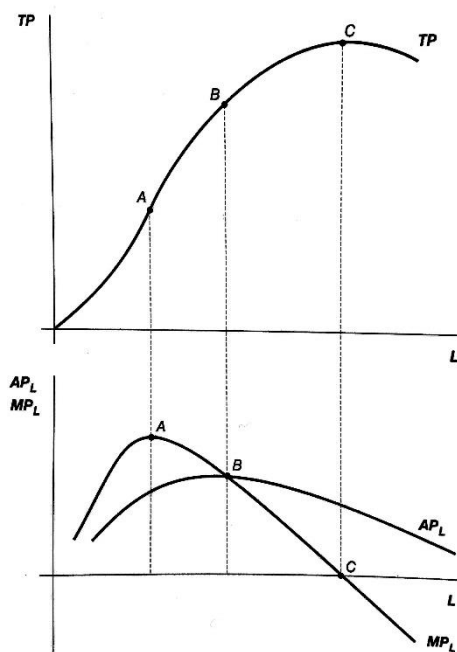
$$Q = f(L).$$

Při práci s produkčními funkcemi v krátkém období nás zajímá celkový, mezní a průměrný produkt. Celkový produkt je vyjádřením celkového fyzického výstupu. Průměrný produkt nám ukazuje objem produkce vyrobený jednou jednotkou výrobního faktoru a mezní produkt vyjadřuje, o kolik se změní výstup zapojením dodatečné jednotky vstupu (Macáková, 2010).

Obr. 1 zobrazuje vztahy mezi celkovým, mezním a průměrným produktem. Svého maxima dosahuje produkční funkce ve chvíli, kdy bude mezní přírůstek roven nule. V matematickém vyjádření získáváme tento vztah první derivací celkového produktu. Celkový produkt je od této fáze klesající, protože při růstu množství práce a fixním množstvím kapitálu již není využití tohoto kapitálu efektivní (např. 2 počítače pro 4 zaměstnance).

---

<sup>2</sup> HOŘEJŠÍ, Bronislava. *Mikroekonomie*. 4., rozš. vyd. Praha: Management Press, 2006, 573 s. ISBN 80-7261-150-x.



Obr. 1 Grafické znázornění vztahů celkového, mezního a průměrného produktu

Zdroj: MACÁKOVÁ, Libuše. *Mikroekonomie: základní kurs*. 11. vyd. Slaný: Melandrium, 2010, 275 s. ISBN 978-80-86175-70-6.

Křivka celkového produktu a její tvar jsou ovlivněny zákonem klesajících výnosů. „Jestliže jsou do výrobního procesu přidávány stále stejné přírůstky variabilního vstupu, přičemž množství ostatních vstupů se nemění, výsledné přírůstky celkového produktu budou od určitého bodu klesat, tj. bude klesat mezní produkt variabilního vstupu.“<sup>3</sup>

### 3.1.3 Produkce v dlouhém časovém období

Pro dlouhé časové období platí, že se jedná o časově neurčený interval, ve kterém jsou všechny vstupy považovány za variabilní (Buchta, 2006).

Cílem firmy je vybrat takovou kombinaci výrobních faktorů, která zajistí dosažení efektivní produkce za podmínky maximalizace zisku. Omezujícími faktory jsou technologické možnosti nebo rozpočtová omezení. Cílem produkční funkce je určit, jaký objem produkce vytvoříme při proměnlivých množstvích vstupů (Schiller, 2004).

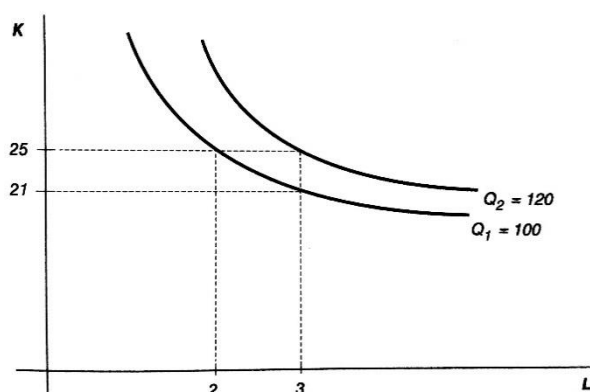
<sup>3</sup> HOŘEJŠÍ, Bronislava. *Mikroekonomie*. 4., rozš. vyd. Praha: Management Press, 2006, 573 s. ISBN 80-7261-150-x.

Jestliže je složka kapitálu v krátkém období uvažována jako neměnná, pak v dlouhém období jsou obě proměnné práce i kapitál považovány za variabilní. Dlouhodobou produkční funkci vyjadřuje Holman (2002) jako

$$Q = f(K, L).$$

Produkční funkce v dlouhém období lze znázornit pomocí izokvant, které ukazují, s jakými kombinacemi vstupů je možné vyrobit stejný objem produkce. Poměr mezní míry technické substituce znamená nahrazení kapitálu prací v takovém poměru, že se v konečném důsledku nezmění objem výstupu. Poměr nahrazování vstupů odpovídá převrácenému poměru jejich mezních produktů. Tento vztah interpretuje Macáková (2010) jako

$$MRTS = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{MP_L}{MP_K}.$$

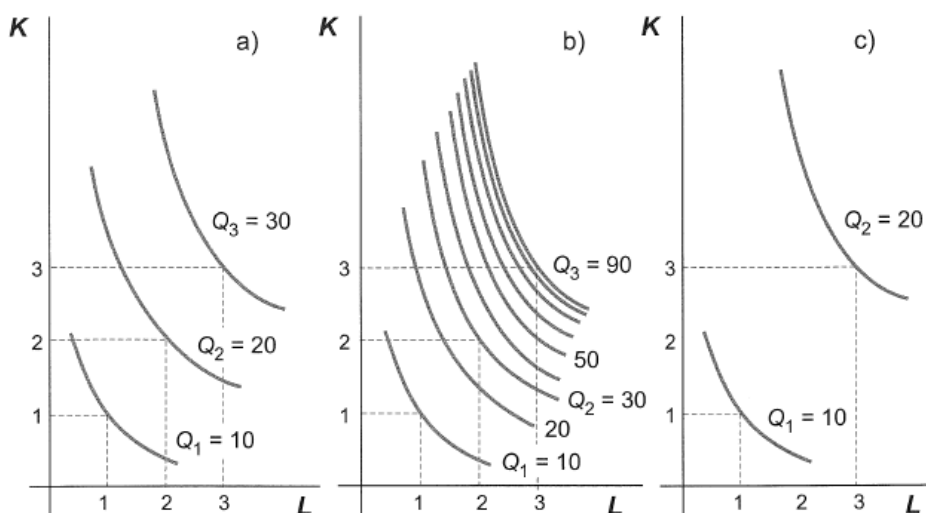


Obr. 2 Izokvanta

Zdroj: MACÁKOVÁ, Libuše. *Mikroekonomie: základní kurs*. 11. vyd. Slaný: Melandrium, 2010, 275 s. ISBN 978-80-86175-70-6.

Tzv. „produkční kopec“, trojrozměrný graf proměnných \$K\$ a \$L\$ získáváme v trojrozměrném grafu pomocí izokvant. Ve dvourozměrném zjednodušení můžeme tento graf zobrazit pomocí mapy izokvant (Kajsík, 2011).

V dlouhém období nalézáme analogický vztah mezi množstvím vstupů a výstupů jako v krátkém období. V dlouhém období hovoříme o výnosech z rozsahu, které popisují účinky proporcionálních změn ve všech vstupech. V případě vyšší změny objemu produkce, než je změna objemu výrobních faktorů, se jedná o rostoucí výnosy z rozsahu. Klesající výnosy z rozsahu jsou definovány jako menší změna výstupu v porovnání se změnou vstupních výrobních faktorů. Konstantní výnosy z rozsahu jsou vymezeny stejnými přírůstky vstupů i výstupu (Samuelson, 2013).



Obr. 3 Výnosy z rozsahu

Zdroj: HOŘEJŠÍ, Bronislava. *Mikroekonomie*. 4., rozš. vyd. Praha: Management Press, 2006, 573 s. ISBN 80-7261-150-x.

Na Obr. 3 můžeme sledovat tři typy výnosů z rozsahu. Podle vzdálenosti izokvant je rozpoznatelné, o jaké výnosy z rozsahu se jedná. V případě a) jsou izokvanty stejně vzdálené, výnosy z rozsahu jsou tedy konstantní. Pokud se jedná o rostoucí výnosy z rozsahu, izokvanty se k sobě přibližují, jak vidíme ve variantě b). Posledním typem výnosů z rozsahu jsou klesající výnosy, jejichž izokvanty se od sebe oddalují, viz graf c).

### 3.2 Produkční funkce v makroekonomii

Definovat produkční funkci na úrovni firem není tak složité, jako vymezit tutéž problematiku na úrovni průmyslu, odvětví anebo celé ekonomicky. Agregovaná produkční funkce se získá jako množství výrobních faktorů a výstupu agregací prostřednictvím individuálních firem v dané ekonomice, odvětví apod. Použití agregátní produkční funkce má svá úskalí. Jelikož se jednotlivé firmy liší ve své produkci, odlišné struktuře nákladů a dalšími parametry, může dojít ke zkreslení produkční funkce agregátní úrovně (Mishra, 2007).

Základy agregátní produkční funkce byly v minulosti zpochybňovány díky problému agregace i teorii kapitálu. I přesto je však agregátní produkční funkce využívána v teoretické i aplikované analýze. V rámci hlavního neoklasického proudu makroekonomie je agregátní produkční funkce základem ekonomického růstu, teorie reálných hospodářských cyklů nebo krátkodobé poptávky po práci (Felipe, 2014).

Také podle Fishera (1969) vystupují mezi agregátními produkčními funkcemi a reálnými modely otázky, zda agregátní produkční funkce opravdu vystihují realitu, či nikoliv. Modely jsou přijímány nejen za předpokladu snadné zastupitelnosti kapitálu a práce, ale také za podmínky homogenosti práce i kapitálu.

Whitaker (1975) zpracoval dílo Alfreda Marshalla, jež definoval agregátní produkční funkci vzorcem

$$P = f(L, E, C, A, F),$$

kde  $L$  je práce,  $E$  efektivita práce,  $C$  je kapitál,  $A$  je úroveň technologie a  $F$  hnojivo půdy. Marshallova produkční funkce je považována za první neoklasický model růstu.

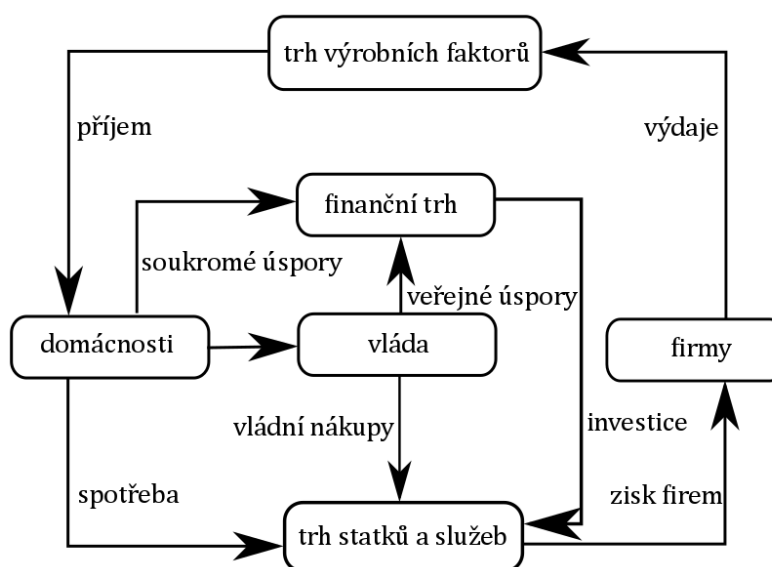
V období Světové hospodářské krize až do 2. světové války věnovali ekonomové pozornost možnosti ekonomického růstu bez násilných výkyvů. Hojně využívanou produkční funkcí tohoto období byla Cobbova-Douglasova produkční funkce. Její oblíbenost byla podpořena rozvojem lineárního programování a přízní ekonomů (Mishra, 2007).

V roce 1957 přišel americký ekonom Solow se svou studií *Technical Change and the Aggregate Production Function*. Výsledky studie ukázaly, že data USA z let 1909-1949 lze modelovat pomocí agregátní produkční funkce a potvrzují neutrální technickou změnu.

Výstupem ekonomiky jsou zboží a služby známé jako hrubý domácí produkt – HDP. Tento výstup je závislý na množství jeho vstupů a schopnosti převést vstupy na výstup, který je prezentován právě produkční funkcí. Celkový výkon ekonomiky se rovná jeho celkovému důchodu, a proto lze skrze výrobní faktory a produkční funkce určit národní důchod. Pro snadnější pochopení souvislostí lze využít Obr. 4, který znázorňuje tok národního důchodu z firem k domácnostem prostřednictvím trhu výrobních faktorů (Mankiw, 2010).

Tento koloběh můžeme začít například u domácností, které mají určité potřeby, které jsou uspokojovány prostřednictvím poptávky na trhu statků a služeb, a následnou spotřebou. Na trhu statků a služeb se setkává poptávka s nabídkou firem, kterým plyne ze spotřeby domácností zisk. Na trhu výrobních faktorů se střetává nabídka práce s poptávkou po práci. Firmy si tedy pronajímají výrobní faktory, kterým plyne z tohoto pronájmu příjem. Z příjmu odvádějí domácnosti daně, které jsou prostřednictvím vlády distribuovány na vládní nákupy a veřejné úspory. Veřejné i soukromé úspory domácnosti plynou prostřednictvím investic finančního trhu zpět do koloběhu důchodů (Mankiw, 2010).





Obr. 4 Tok národního důchodu

Zdroj: MANKIWI, N. *Macroeconomics*. 7th ed. New York: Worth Publishers, 2010, xxxiv, 598 s. ISBN 9781429238120., vlastní zpracování

„Agregátní produkční funkce kombinuje práci ( $L$ ) a reálný kapitál ( $K$ ) jako vstupy a tyto vstupy dává do souvislosti s výstupem v podobě reálného agregátního produktu ekonomiky ( $Q$ ). Agregátní produkt je dále ovlivňován produktivitou práce a kapitálu, jež odráží úroveň technologie dostupné v ekonomice ( $A$ ).

$$Q = f(K, L, A)^{4}$$

Výrobními faktory jsou vstupy, které jsou využívány pro výrobu zboží a služeb. Kapitál je množina nástrojů, které jsou používány zaměstnanci. Práce je čas, který tráví zaměstnanci prací (Mankiw, 2010).

### 3.2.1 Teorie ekonomického růstu

Teorie ekonomického růstu hledají odpovědi na otázky rozdílů v úrovni důchodu mezi státy nebo v oblasti míry přírůstků nebo úbytků důchodu na jednoho obyvatele v dlouhém časovém horizontu. Ekonomický růst je výsledkem zvrátů dostupných vstupů a intenzity produktivity těchto výrobních faktorů. V teorii růstu se můžeme setkat se dvěma typy ekonomického růstu. Extenzivní ekonomický růst je způsoben zvyšujícím množstvím výrobních faktorů. O intenzivním ekonomickém růstu se hovoří tehdy, pokud dochází k intenzivnějšímu využití výrobních faktorů, které má

<sup>4</sup> JUREČKA, Václav. *Makroekonomie*. 1. vyd. Praha: Grada, 2010, 332 s. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-3258-9.

daná země k dispozici. Příkladem může být zvyšování kvality výrobních faktorů. V reálném světě se setkáváme s kombinací těchto typů (Jurečka, 2010).

Životní úroveň a blahobyt země se odvíjí od toho, kolik výrobků a služeb je schopná daná země vytvořit za dané období a jakým tempem je zvyšována ekonomická úroveň země. Hospodářský růst bývá pokládán za jeden z hlavních cílů hospodářské politiky. Z krátkodobého hlediska je přikládán větší význam na složky agregátní poptávky. Z dlouhodobého hlediska se bere v úvahu vliv práce a kapitálu a efektivita jejich využití. Dlouhodobě je růst potenciálního produktu ekonomiky podmíněn růstem kapacity výroby, především tedy růstem výrobních zdrojů a efektivností, s jakou jsou ve výrobě využívány. Složitost rozboru hospodářského růstu je spojena s obtížnou kvantifikací daných faktorů, které působí na ekonomický růst. V teoriích se setkáváme s různými přístupy k ekonomickému růstu. Klasická teorie ekonomického růstu bývá spojována s extenzivním růstem a nebyl zde uvažován technologický pokrok. Přístup dalších škol je rozebírán dále v této kapitole (Spěváček, 2010).

Pokud hovoříme o ekonomickém růstu, setkáváme se se třemi základními pilíři, na jejichž základě jsou teorie rozvíjeny. Jedná se o produkční funkci, funkci úspor a funkci nabídky práce, která souvisí s růstem populace (Chen, 2003).

### **Solowův model ekonomického růstu**

Neoklasický model ekonomického růstu, se kterým přišel Robert Solow, je považován za základ teorie této problematiky. Tento model je složen z produkční a investiční funkce dlouhého období. V této teorii využívá Solow dlouhodobou agregátní Cobbovu-Douglasovu produkční funkci a kapitál je chápán ve smyslu fyzického kapitálu. Solowův model ekonomického růstu znázorňuje vliv úspor, růstu populace a technologického pokroku na úroveň produkce v dané ekonomice a její růst v průběhu času. Tvar produkční funkce je dán klesajícími výnosy z kapitálu<sup>5</sup> (Holman, 2010).

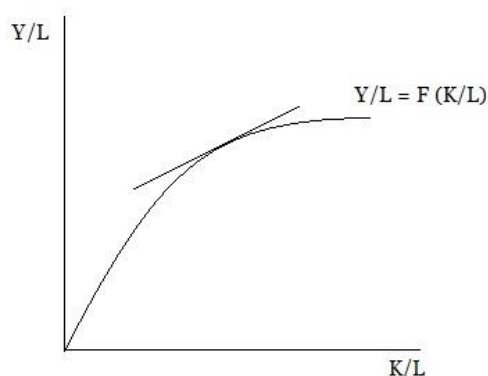
Holman ve své knize Makroekonomie (2004) zdůrazňuje, že základem tohoto modelu je produkční funkce, ve které dochází ke změně kapitálu i práce. Základní vlastností této funkce jsou konstantní výnosy z rozsahu.<sup>6</sup> Podělením rovnice vstupem práce získáváme tzv. intenzivní produkční funkci ve tvaru

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}\right).$$

Průběh intenzivní produkční funkce, která vyjadřuje produkt na obyvatele, můžeme sledovat na Obr 5. Podělením produkční funkce počtem obyvatel získáváme obecněji využitelné vyjádření.

<sup>5</sup> Zvyšování kapitálu na pracovníka vede ke stále menším přírůstkům produktu na pracovníka.

<sup>6</sup> Daný přírůstek vstupů vyvolá stejný přírůstek výstupu.



Obr. 5 Intenzivní produkční funkce

Zdroj: HOLMAN, Robert. *Makroekonomie: středně pokročilý kurz*. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck, 2004, xiv, 424 s. Beckovy ekonomické učebnice. ISBN 80-7179-764-2., vlastní zpracování

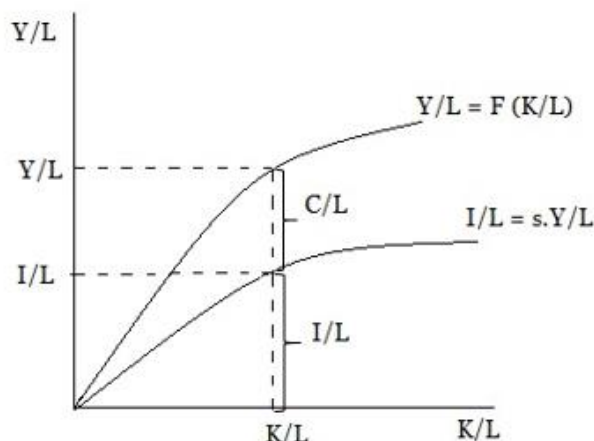
Podle Jurečky (2010) je základem Solowova modelu ekonomického růstu agregátní produkční funkce kombinující práci a reálný kapitál při vnímání technologického omezení na současné úrovni v daný moment. Tento model se soustřeďuje především na sledování podílu produktu na pracovníka. Model funguje na principu akumulace kapitálu, kdy se díky ní zvyšuje podíl kapitálu na jednoho pracovníka. To pozitivně ovlivní také produktivitu a následně HDP na obyvatele. Vzhledem k tomu, že model je založen na produkční funkci, pro kterou platí zákon klesajících mezních výnosů, vede stoupající podíl kapitálu na pracovníka k ochabující dynamice růstu HDP na hlavu. Ve chvíli, kdy už nedochází k růstu kapitálu na hlavu, ekonomika se nachází ve stabilním stavu a ekonomický růst zastaví. Tyto klesající výnosy z kapitálu ovlivňují tvar intenzivní produkční funkce.

Kromě produkční funkce je model založen také na dlouhodobé investiční funkci. V dlouhém období je naplněn předpoklad o vyrovnaném veřejném rozpočtu a domácí produkt je složen pouze z úspor a spotřeby. Po úpravách získáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{I}{L} = s \frac{Y}{L},$$

kde  $s$  vyjadřuje míru úspor, kterou můžeme definovat jako podíl úspor na důchod. Vyjádřením dlouhodobé investiční funkce získáváme vztah, ze kterého je patrné, že s růstem domácího produktu investice rostou. Investice rostou s rostoucí mírou úspor.

Při zakreslení produkční i investiční funkce do jednoho grafu lze vidět, jak velký produkt je vyráběn na jednoho pracovníka a rozdělení tohoto produktu mezi spotřebu a investice (Holman, 2004).



Obr. 6 Produkční a investiční funkce

Zdroj: HOLMAN, Robert. *Makroekonomie: středně pokročilý kurz*. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck, 2004, xiv, 424 s. Beckovy ekonomické učebnice. ISBN 80-7179-764-2., vlastní zpracování

V modelu je zahrnut také vliv opotřebení, kdy ke zvětšení kapitálu dochází pouze v situaci, kdy jsou investice větší než opotřebení kapitálu. V tzv. stálém stavu se ekonomika nachází ve chvíli, kdy investice nahrazují opotřebení kapitálu. Jedná se o stav dlouhodobé rovnováhy. Z těchto poznatků tedy vyplývá, že při daných mírách úspor a opotřebení kapitálu roste hospodářství země do stabilního stavu. V tomto stavu je kapitál i produkt na pracovníka neměnný (Holman, 2004).

Neoklasický model růstu je založen na vlivu technologického pokroku, který umožňuje růst i po dosažení stabilního stavu. Vlivem technologického pokroku dojde ke zvýšení produktivity vstupů a dojde ke zvýšení výstupu na jednotku vstupu. Tento rostoucí objem vstupu je za podmínek ceteris paribus zdrojem zvýšených hrubých investic, které se promítají do kapitálové akumulace, které přinesou růst produkce na hlavu. Technologický pokrok v Solowově modelu překonává restriktive zákona klesajících mezních výnosů a umožňuje trvalý ekonomický růst (Jurečka, 2010).

### Harrodův-Domarův model ekonomického růstu

V ekonomických teoriích se setkáváme také s Harrodovým-Domarovým modelem ekonomického růstu, na nějž reagoval svou teorií Solow. Tento model je založen na možnosti dlouhodobě nevyrovnaného ekonomického růstu a nestability růstu. Naopak Solowův model je založen na stabilních stavech. Harrodův-Domarův model využívá dvoufaktorovou produkční funkci ve specifickém tvaru a to Leontiefovou produkční funkci s fixními proporcemi.

Leontiefova produkční funkce je charakteristická fixními proporcemi. Tato funkce musí splňovat předpoklady o striktní komplementaritě a nulové nahraditelnosti. Tento typ produkční funkce může být zapsán jako

$$Y = \min(\varepsilon_L L, \varepsilon_K K),$$

kde  $\varepsilon_L$  a  $\varepsilon_K$  jsou konstanty, které měří přínos daného vstupu na výstup (Mandal, 2008).

Předpoklady, kterými se Harrod-Domarův model vyznačuje, jsou:

- Konstantní podíl příjmů je ukládán do úspor.
- Množství práce a kapitálu potřebné k výrobě jednotky produkce jsou dané.
- Pracovní síla se vyznačuje konstantním růstem a je stanovena demografickými silami (Hahn, 1964).

Na požadavky trvalého růstu produkce můžeme nahlížet ze stran obou vstupů. Kapitál a práce nejsou na stejné úrovni, protože kapitál je na rozdíl od práce získáván prostřednictvím produkce. Dalším předpokladem pro Harrodův-Domarův model je nulová elasticita substituce mezi výrobními faktory a konstantní relativní cena práce a kapitálu. Jediným faktorem, který může způsobit růst, jsou investice. Jak ve své práci zmiňuje Hahn (1964), je pro vyrovnaný růst nezbytná rovnost míry ekonomického růstu a míry růstu nabídky práce, jinak vzniká nezaměstnanost. V případě vstupu kapitálu musí být zajištěna rovnost úspor a investic. Kapitálová zásoba roste mírou danou poměrem investic a kapitálu a zároveň musí být rovna míře růstu příjmu. Jedině takto může být zajištěn stabilní růst (Hahn, 1964).

V modelu se rozlišují tři typy růstů. Pokud se tato tempa rovnají, jde o optimální tempo růstu. V Harrodově-Domarově modelu jsou rozlišena tato tempa růstu:

- Skutečné tempo růstu – skutečně dosažené tempo růstu v ekonomice.
- Přirozené tempo růstu – vyjádřeno tempem růstu obyvatelstva schopného práce a tempem růstu produktivity práce dané vlivem technologického pokroku.
- Zaručené tempo růstu – ekonomický růst, pokud je plně využito disponibilního kapitálu.

Porovnání temp růstu mohou v ekonomice nastat tyto situace:

- Pokud zaručené převyšuje skutečné tempo růstu, potom jsou investice větší než úspory.
- Pokud je zaručené tempo větší než přirozené tempo růstu, potom je na trhu nedostatek pracovní síly.
- Je-li přirozené tempo růstu větší než zaručené, pracovní síla roste rychleji než produkce. Důsledkem je nezaměstnanost.

Model nezahrnuje mechanismus, který by vyrovnával všechna tempa růstu, důsledkem čehož je model nazýván jako „model s rovnováhou na ostří nože“. Vyrovnání temp může nastat pouze v případě zásahů do ekonomiky (Varadzin, 2004).

Harrodův-Domarův model byl využíván v rozvojových zemích pro ekonomické plánování. S požadovanou mírou ekonomického růstu je hodnota míry úspor známá. V případě, že země nebyla schopna generovat danou úroveň úspor, je stanovena omluva při zadlužení země (Chen, 2003).

### **Olsonův model ekonomického růstu**

Ve své práci *Accounting for State Economic Growth: a Production Function Approach* zkoumá Brierly Olsonovu teorii vlivu politické organizace na ekonomický růst. Olsonova teorie říká, že demokracie dovoluje takové politické uspořádání, které ústí v neefektivní alokaci zdrojů. Rostoucí politická organizace má v závěru negativní vliv na ekonomický růst. Olsonův přístup k teorii růstu je založen na dynamickém pohledu na aktivitu politiků. Distribuční politika prováděna za účelem zisku může celkově snížit výkonnost ekonomiky, protože dávky jsou přijímány úzkou skupinou, ale jsou rozptýlovány obecně. Olson zahrnuje tuto proměnou do ekonomického růstu zavedením nové proměnné. Produkční přístup umožňuje zkoumat vliv systému na ekonomický růst a umožňuje vymežit dopad politické organizace na trh kapitálu i práce. Tato proměnná je vyjádřena jako počet neziskových organizací v daném státu. Změna tlaku politického systému měří změny v počtu těchto organizací (Brierly, 1993).

Pro odhad vlivu této proměnné na ekonomický růst bylo ve článku využito Cobbovy-Douglasovy produkční funkce a translogaritmické produkční funkce. Koeficient determinace s využitím modelu Cobbovy-Douglasovy produkční funkce byl nízký, model vysvětloval jen malou variabilitu modelu. Z těchto výsledků vyplynulo, že změna kapitálu ovlivňuje ekonomický růst pozitivně, naopak změny organizace ovlivňují ekonomický růst negativně. Práce se v tomto modelu ukázala jako proměnná, která nemá na ekonomický růst velký dopad. Z těchto důvodů nebyl model považován za příliš vhodný. Výsledky modelu za využití translogaritmické produkční funkce s využitím proměnné změny organizace byly porovnány se stejným modelem bez využití této proměnné. Zahrnutí proměnné změny organizace se ukazuje jako vhodné, je vysvětlena větší variabilita modelu. Ekonometrický model s translogaritmickou funkcí potvrdil negativní vliv změny organizace na ekonomický růst. Práce přispívá k ekonomickému růstu oproti modelu s Cobbovou-Douglasovou produkční funkcí více. Kapitál je pozitivně korelován s ekonomickým růstem. Příklad odhadu proměnných Olsonova modelu ekonomického růstu je vhodnou ukázkou využití ekonometrických modelů v praxi (Brierly, 1993).

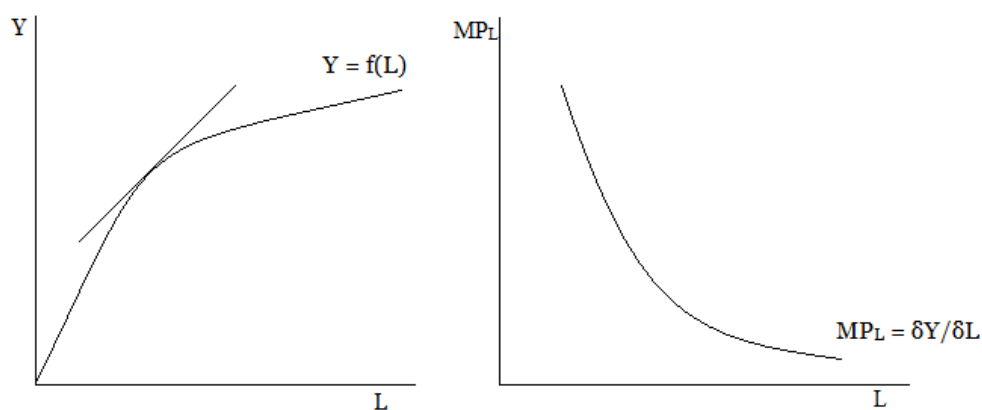
### **3.2.2 Produkční funkce a poptávka po práci**

Trh práce je dán střetem nabídky a poptávky po práci. V neoklasické teorii je to právě poptávka po práci, která je odvozena od produkční funkce. Celkový produkt práce je produkt, který byl vytvořen daným množstvím práce. Mezní produkt práce je veličina, která vyjadřuje, jak se změní množství produktu při zapojení dodatečné jednotky práce. Grafickým znázorněním produkční funkce a následným odvozením křivky mezního produktu práce znázorníme klesající křivku mezního produktu práce. Její tvar je dán klesajícími výnosy z práce. Poptávka po práci je dána mezním nákladem na práci, tedy mzdou (Holman, 2010).

V makroekonomickém modelu je reálný náklad na práci ztotožněn s reálnou mzdou a rovnice poptávky po práci lze zapsat jako

$$MP_L = W/P,$$

kde  $MP_L$  je mezní produkt práce,  $W$  je mzda a  $P$  je cenová hladina. Mezní produkt práce se tedy rovná reálné mzdové sazbě. Z grafů na Obr. 7 agregátní produkční funkce můžeme odvodit křivku poptávky po práci. Tato křivka je dána sklonem tečny k produkční funkci. Nalevo je znázorněna agregátní produkční funkce, která ukazuje závislost produktu na množství práce. Tečna produkční funkce měří mezní produkt práce v daném bodě. Graf v pravé části znázorňuje mezní produkt práce, který je současně křivkou poptávky po práci (Holman, 2010).



Obr. 7 Odvození agregátní poptávky po práci

Zdroj: HOLMAN, Robert. *Makroekonomie: středně pokročilý kurz*. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck, 2004, xiv, 424 s. Beckovy ekonomické učebnice. ISBN 80-7179-764-2.

### 3.2.3 Produkční funkce pro měření produktivity

Produktivitu můžeme definovat jako poměr měření výstupu na objem využitých vstupů. Měření produktivity by mělo přinést odpovědi na otázky týkající se:

1. Technologie – technologie je často uváděnou příčinou růstu produktivity.
2. Efektivity – o plné účinnosti hovoříme v případě, kdy je ve výrobním procesu dosaženo maximálního výstupu s danou technologií a pevným množstvím vstupů.
3. Úspory provozních nákladů – podle Harbergera (1998) by měření produktivity v praxi mělo identifikovat úsporu provozních nákladů ve výrobě.
4. Benchmarkingu výrobních procesů – na úrovni podnikových procesů může vést měření produktivity k srovnání efektivity a identifikaci nedostatků.

5. Životní úrovně – v oblasti životní úrovně je měření produktivity klíčovým prvkem při posuzování životního standardu. Může se jednat o jednoduchý příjem na obyvatele, nebo posouzení dlouhodobého trendu v oblasti vícefaktorové produktivity<sup>7</sup> (OECD, 2013).

Produktivita může být měřena více způsoby. Volba metody měření produktivity záleží na účelu a také na dostupnosti a kvalitě dat. V níže uvedené tabulce můžeme sledovat nejčastěji používané metody měření produktivity práce, kapitálu a vícefaktorové produktivity. Mezi nejrozšířenější metody patří takové, jež měří výstup na základě hrubého produktu, nebo přidané hodnoty. Rozdíl může být také v tom, zda jsou měřeny zvlášť vstupy práce a kapitálu, anebo je tento vliv na výstup brán jako celek. Přehled metod měření je shrnut v Tab. 1 a jednotlivé metody budou vysvětleny dále (OECD, 2013).

Tab. 1 Možnosti měření produktivity

Metoda měření	Vstupy			
	<i>práce</i>	<i>kapitál</i>	<i>práce a kapitál</i>	<i>práce, kapitál a další vstupy</i>
<i>Hrubý výstup</i>	produktivita práce založená na hrubém výstupu	produktivita kapitálu založená na hrubém výstupu	produktivita práce a kapitálu založená na hrubém výstupu	KLEMS vícefaktorová produktivita
<i>Přidaná hodnota</i>	produktivita práce založená na přidané hodnotě	produktivita kapitálu založená na přidané hodnotě	produktivita práce a kapitálu založená na přidané hodnotě	X
	Jednofaktorové měření produktivity		Vícefaktorové měření produktivity (MFP)	

Zdroj: Measuring Productivity: Measurement Of Aggregate And Industry-Level Productivity Growth. Francie: OECD manuals, 2001

<sup>7</sup> Vícefaktorová produktivita je využívána k posouzení základní výrobní kapacity v ekonomice.



Produktivita práce založená na hrubém výstupu je definována jako podíl množství hrubého výstupu na množství vstupu práce. Tento vztah nám ukazuje, jak produktivně se práce podílí na tvorbě hrubého výstupu. Produktivita práce jen částečně odráží kapacitu pracovníků nebo jejich snahu. Bez ohledu na to, jestli bereme produktivitu práce založenou na hrubém výstupu nebo na přidané hodnotě je nutné mít na paměti, že do ukazatele se promítá vliv dalších vstupů. Mezi společné patří změny v kapitálu, stejně jako změny v technologii, nebo organizaci, vliv úspor z rozsahu, různých stupňů využití kapacity a chyb v měření. Produktivita práce založená na hrubém výstupu je pak ovlivněna také meziproduktem, proto je tento ukazatel značně ovlivněn outsourcingem (základní faktor práce nahrazen meziproduktem). S vyšší mírou outsourcingu se ukazatel produktivity práce založené na hrubém výstupu zvyšuje a špatná interpretace může vést k mylným závěrům (technologický pokrok, produktivita jednotlivců). Výhodou tohoto přístupu je jednoduchost výpočtu (není potřeba znát hodnotu meziprojektu, pouze konečný výstup). Ukazatel záleží pouze z části na změně konkrétního sledovaného vstupu, obvykle je ovlivněn i dalšími vstupy uvedenými výše (OECD, 2013).

Produktivita práce založená na přidané hodnotě redukuje, ne však eliminuje, vliv substituce práce outsourcingem. Je méně závislá, dojde-li k nahrazení práce outsourcingem, nebo k vertikální integraci. Produktivita práce založená na přidané hodnotě je nejen jednoduchá k výpočtu, ale je méně ovlivněna v případech substituce práce za outsourcing. Samozřejmě i zde je ukazatel ovlivněn souhrnným vlivem více faktorů, které mohou být špatně interpretovány, navíc různé přístupy k měření přidané hodnoty mají svá teoretická i praktická omezení. Cílem měření na agregátní hladině je zjištění životní úrovně. Produktivita se přímo promítá do životní úrovně úpravou změny pracovní doby, nezaměstnanosti nebo demografických změn. Metoda se často využívá jako referenční statistika pro mzdová vyjednávání. Hlavní výhodou je opět snadná měřitelnost ukazatele (OECD, 2013).

Produktivita práce je užitečným ukazatelem, který je relativně snadno měřitelný, je klíčovým faktorem při určování životní úrovně. Přesto jen částečně odráží osobní schopnosti pracovníků nebo intenzitu jejich úsilí. Pro zjištění, jak efektivní je práce v kombinaci s dalšími faktory produktivity, je vhodné provádět analýzu vícefaktorové produktivity (OECD, 2013).

Stejně jako lze měřit produktivitu práce ve vztahu k přidané hodnotě, nebo hrubému výstupu lze měřit produktivitu kapitálu. Platí zde stejná omezení, která byla popsána výše u jednofaktorové metody produktivity práce. Z těchto důvodů se aplikuje vícefaktorový přístup zahrnující práci i kapitál. Vícefaktorová produktivita práce a kapitálu založená na přidané hodnotě zobrazuje vliv kombinace faktorů práce a kapitálu k vytvářené přidané hodnotě. Nejde o ukazatel, vhodný k měření technologické změny, přesto lze využít k měření kapacity v odvětví, analýze strukturálních změn. Jednoduchost spočívá zejména v datech, které jsou běžně dostupné (OECD, 2013).

Dalším vícefaktorovým modelem v měření produktivity je metoda KLEMS. Jedná se o souhrnný index kombinace různých vstupů (práce, kapitál, energie, materiál a služby), které jsou váženy současnou cenou v poměru k hrubému výstupu. KLEMS je komplexním přístupem pro měření technologické změny odvětví, protože vstupy meziproductů jsou zcela známy a pokryty. Limitem přístupu je požadavek na data a také propojení a vliv mezi jednotlivými odvětvími, které může být v konečné podobě těžké interpretovat, než jako je tomu v případě vícefaktorového přístupu v měření produktivity ve vztahu k přidané hodnotě (OECD, 2013).

Data získaná metodou KLEMS jsou využívána výzkumníky, kteří se zabývají růstovým účetnictvím. Databáze KLEMS<sup>8</sup> je významným zdrojem výstupů a indikátorů růstu produktivity, které jsou porovnatelné v rámci jednotlivých odvětví a z hlediska různých časových období. Hlavním cílem této databáze je zjišťování srovnávacích trendů produktivity. Vzhledem k šíři vstupních údajů jsou tato data využitelná i jinak. Databáze KLEMS vychází z národních statistik a je zpracována podle harmonických postupů. Vstup práce je zde založen na odpracovaných hodinách a mzdách různých druhů práce. Odpracované hodiny byly klasifikovány podle pohlaví, věku a vzdělání. Hodnota práce samostatně výdělečných osob je hodnocena jako odpracovaná hodina zaměstnanců. To je významné především pro odvětví, jako je například zemědělství, obchod nebo osobní služby. Pro zohlednění vstupu kapitálu jsou preferovány kapitálové služby. Databáze jsou vedeny na podrobné odvětvové úrovni, ale zároveň jsou tyto informace agregovány pro celkové hospodářství (O'Mahony, 2009).

Souhrnná produktivita faktorů je významným zdrojem měření produktivity a následně také ekonomického růstu. Růst této souhrnné aktivity je označován jako intenzivní růst. Naopak růst faktoru práce nebo kapitálu jako extenzivní typ růstu. Vysvětlení rozdílů mezi typy těchto růstů najdeme na straně 25 této práce. Souhrnná produktivita těchto faktorů je definována jako

$$SPF(t) = \frac{Q(t)}{N(t)},$$

kde  $Q(t)$  vyjadřuje hrubý domácí produkt ve stálých cenách a  $N(t)$  agregovanou práci a kapitál. Vyjádřením proměnné  $Q$  získáváme agregátní produkční funkci, která odpovídá Solowově tvaru produkční funkce potřebné pro vyjádření ekonomického růstu. Produkční funkce bude tedy ve tvaru

$$Q(t) = SPF(t)N(t).$$

Produkt v čase je charakterizován celkovým množstvím kapitálu a práce a souhrnné produktivity vyjadřující intenzivní faktory. (Hájek, 2009)

---

<sup>8</sup> Databáze dostupná na: <http://www.euklems.net/>

Dynamické charakteristiky mohou být vyjádřeny pomocí indexů nebo temp růstu. Touto problematikou se zabývá růstové účetnictví. Hájek (2009) dochází k vyjádření intenzivních a extenzivních faktorů úpravou rovnice indexů, která je ve tvaru

$$I(Q) = I(SPF)I(N).$$

Logaritmizací této rovnice získáváme rovnici ve tvaru:

$$\ln I(Q) = \ln I(SPF) + \ln I(N)$$

Pomocí dynamických parametrů intenzity můžeme následně vyjádřit intenzivní ekonomický růst  $i$  a extenzivní ekonomický růst  $e$  jako

$$i = \frac{\ln I(SPF)}{|\ln I(SPF)| + |\ln I(N)|} \quad \text{a} \quad e = \frac{\ln I(N)}{|\ln I(SPF)| + |\ln I(N)|}.$$

Podmínkou vyjádření podílu vlivu intenzivních a extenzivních faktorů na vývoj produktu je vztah, který platí mezi těmito dynamickými parametry. Oba faktory musí pokrývat 100 % obou vlivů při zohlednění protichůdného nebo kompenzačního působení. Dynamické faktory mají výhodu snadné srovnatelnosti, použitelnosti, časové srovnatelnosti a přesnosti výpočtu.

Solow (1957) vychází ve své práci z produkční funkce, kterou propojil s indexem produktivity. Na straně vstupů je uvažováno o práci i kapitálu a vzniká zde otázka jejich substituce. V tomto případě se setkáváme s produkční funkcí ve tvaru

$$Q(t) = SPF(t)F[L(t), K(t)],$$

kde  $SPF$  vyjadřuje posun produkční funkce. V Solowově podání se tedy jedná o technický pokrok. Práce a kapitál v rovnici vyjadřují souhrnný vstup. Využitím Cobbovy-Douglasovy produkční funkce, kterou Solow použil pro vysvětlení neoklasické teorie růstu, získáváme agregátní produkční funkci jako rovnici

$$Q(t) = SPF(t)L(t)^\alpha K(t)^{1-\alpha}.$$

Vyjádřením tempa růstu využíváme koeficientu  $\alpha$  jako váhy pracovní elasticity produktu a koeficientu  $(1 - \alpha)$  jako kapitálové elasticity produktu. Tempo růstu je vyjádřeno jako

$$G(Q) = \alpha G(L) + (1 - \alpha)G(K) + G(SPF).$$

Při splnění předpokladu, kdy je mezní produkt práce roven ceně práce a mezní produkt kapitálu roven ceně kapitálu, jsou elasticity těchto faktorů rovny důchodovým

podílům těchto faktorů. Tento vztah označuje Solow jako formulaci růstového účetnictví. To rozkládá tempo růstu produktu na příspěvek růstu práce, kapitálu a příspěvek růstu SPF.

Jedním z vhodných nástrojů pro měření produktivity je právě souhrnná produktivita faktorů. Kromě klasického přístupu k měření souhrnné produktivity se dnes setkáváme i s alternativními přístupy, které zohledňují další faktory ovlivňující vstupy produkčních funkcí (Sixta, 2011).

### 3.2.4 Produktivita práce a kapitálu

Za nejdůležitější vstup produkční funkce bývá považována práce. Tento výrobní faktor může být vyjádřen jako celková zaměstnanost, počet odpracovaných hodin anebo jako služby práce. Využitím faktoru počtu zaměstnanců nezohledňujeme změny v pracovní době, proto je doporučováno využívat počtu odpracovaných hodin. Významným kapitálem každého pracovníka je úroveň vzdělávání a pracovních zkušeností, které mohou být v produkční funkci zohledněny jako služby práce. Tento přístup je založen na předpokladu rozdělení služeb práce do vzdělanostních stupňů, čemuž odpovídá počet hodin práce. Mezní produktivita zaměstnanců je dalším předpokladem této teorie a zaměstnanci jsou na jejím základě odměňováni. V tomto konceptu se setkáváme také s pojmem efekt složení pracovní síly. Jedná se o případ, kdy dochází k vyššímu počtu odpracovaných hodin více vzdělanými zaměstnanci, čili růst služeb práce je vyšší, než růst odpracovaných hodin (Sixta, 2011).

Vltavská (2009) se ve své práci zaměřuje na problematiku měření vlivu lidského kapitálu na souhrnnou produktivitu faktorů. Vltavská rozkládá službu práce, která je použita jako vstup práce na příspěvek složení pracovní síly a na příspěvek počtu odpracovaných hodin. V této práci je využito alternativního výpočtu souhrnné produktivity faktorů. To, jak je práce produktivní, je ovlivněno kvalitou vstupu práce, které jsou rozděleny do 4 kategorií podle ukončeného vzdělání. Pojetí této problematiky odpovídá předpokladu, že služby práce korespondují s počtem odpracovaných hodin v daných skupinách podle dosaženého vzdělání, a pracovníci jsou odměňováni na základě mezních produktivit. Tuto neznámou veličinu nahradila Vltavská (2009) průměrnými mzdami podle odvětví a stupně vzdělání.

Podle organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (OECD) je měření produktivity práce důležité pro ekonomickou a statistickou analýzu zemí. Produktivita práce bývá indikátorem, který odhaluje několik ekonomických ukazatelů. S ukazatelem produktivity práce získáváme informace o dynamické míře hospodářského růstu, konkurenceschopnosti nebo životní úrovni zemí. Jak již bylo uvedeno výše, produktivita práce může být měřena několika způsoby. Obecně je produktivita práce chápána jako měření účinnosti využití vstupů k produkci výroby a služeb (Freeman, 2008).

Za objem výstupu je v metodice OECD podle Rebecy Freeman použit hrubý domácí produkt nebo hrubá přidaná hodnota. Mezi těmito výstupy se projevuje silná korelace, která byla ověřena výpočty OECD. Preference ve výpočtu získává hrubá

přidaná hodnota, ve které není zahrnut vliv daní. Měření vstupů musí zahrnovat čas, úsilí a dovednosti pracovní síly. Freeman potvrzuje všeobecný aspekt vhodnosti vstupu jako celkového počtu odpracovaných hodin. Celková zaměstnanost není obecně pro výpočet vhodná, jelikož nezohledňuje změny v pracovní době zaměstnanců (Freeman, 2008).

Produktivita práce je vysvětlována jako vztah mezi objemem produkce a objemem práce (pracovního vstupu). Na úrovni makroekonomie se pracuje se vztahem mezi reálným HDP a počtem zaměstnaných osob. Vyjádřením HDP na pracovníka se odrážejí rozdíly pracovního práva mezi zeměmi (např. počet pracovních hodin, přesčasy,...). Naopak pokud vyjádříme HDP na odpracovanou hodinu, můžeme vyloučit vliv extenzivních faktorů. Tento ukazatel tedy zohledňuje rozdíly složení pracovní síly v zemích (Spěváček, 2010).

Organizace OECD se zabývá různými přístupy měření produktivity práce a následným porovnáním výsledků. Ve svých pracích chtějí ukázat, jak se mění produktivita práce při použití různých vstupů. OECD využívá databáze produktivity a systém jednotkových nákladů a souvisejících ukazatelů. V databázi produktivity OECD je využívána produktivita práce na hodinu a je spočítána jako hrubý domácí produkt na odpracovanou hodinu. V systému OECD jednotkových nákladů práce a souvisejících ukazatelů, je produktivita práce definována buď jako produktivita práce na hodinu nebo produktivita práce na zaměstnanou osobu. Jednotkové náklady jsou měřeny jako průměrné náklady práce na jednotku výstupu. Ty mohou být vyjádřeny, jako podíl celkových nákladů na výstup, anebo jako poměr pracovních nákladů na produktivitu práce (výstup za hodinu). Produktivitu práce definují jako skutečný výstup na celkový počet odpracovaných hodin. Produktivitu práce na zaměstnanou osobu můžeme vymezit jako skutečný výstup v poměru s celkovými zaměstnanými v dané zemi. Mezi udržováním těchto databází existují rozdíly, kterými jsou četnost aktualizací, zdroje dat, měření vstupů a výstupů. Shrnutí rozdílů těchto databází můžeme sledovat v Tab. 2.

I přesto, že obě databáze využívají stejné zdroje, jsou aktualizovány v různých časech. Databáze produktivity je aktualizována ročně, naopak Systém jednotkových nákladů a souvisejících ukazatelů na čtvrtletní bázi. Mezi hlavní zdroje vstupních dat patří u Databáze produktivity i Systému jednotkových nákladů a souvisejících ukazatelů systém národních účtů, přičemž další zdroje jsou využívány, pokud nejsou v systému národních účtů dostupná. Zdroje dat se také liší u různých zemí. Příkladem je například Turecko, kde je využito OECD roční statistiky pracovní síly (Freeman, 2013).

Tab. 2 Porovnání přístupů v měření produktivity v databázích OECD

	<b>OECD databáze produktivity</b>	<b>Systém jednotkových nákladů a souvisejících ukazatelů</b>
<b>Měření vstupu</b>	celkový počet odpracovaných hodin	celková zaměstnanost osob
<b>Měření výstupu</b>	HDP ve stálých cenách národní měny	hrubá přidaná hodnota ve stálých cenách národní měny
<b>Zdroje vstupů</b>	systém národních účtů, OECD výhled zaměstnanosti, OECD ekonomický výhled, OECD roční statistiky pracovní síly, národní zdroje	systém národních účtů, OECD roční statistiky pracovní síly
<b>Zdroje výstupů</b>	systém národních účtů	systém národních účtů
<b>Aktualizace</b>	ročně	čtvrtletně
<b>Měření produktivity</b>	produktivita práce za hodinu	produktivita práce na hodinu nebo počet zaměstnaných osob

Zdroj: FREEMAN, Rebecca. *Labour Productivity Indicators: Comparison Of Two Oecd Databases Productivity Differentials & The Balassa-Samuelson Effect* [online]. July, 2008, 76 s.

Rozdílné přístupy uplatňuje OECD také v případě měření výstupu. V databázích produktivity je využíváno hrubého domácího produktu ve stálých cenách získaného výdajovou metodou a podle systému národních účtů je definován jako celkové konečné výdaje v kupních cenách. Tohoto výstupu je využíváno především proto, že se jedná o dostupný zdroj, který je také konzistentní s ostatními zdroji Databáze produktivity. Systém OECD jednotkových nákladů práce využívá hrubou přidanou hodnotu vyjma nepřímo měřených finančních zprostředkovatelských služeb. Produkce je měřena v národní měně a ve stálých cenách. Tento výstup je používán z toho důvodu, že jsou vyloučeny činnosti, u nichž není žádný vstup práce a zohledňuje produktivitu práce podle Mezinárodní standardní průmyslové klasifikace. Podle výsledků měření, které byly zveřejněny v publikaci Rebeccy Freeman, existuje mezi vstupy těchto databází i výstupy těchto databází silná korelace, pokud jsou v obou databázích uplatněny jako vstup odpracované hodiny v zaměstnání. Při použití různých vstupů má korelace sazeb růstu produktivity práce v celém hospodářství klesající trend (Freeman, 2013).

Kromě faktoru práce se v produkční funkci setkáváme také s faktorem kapitálu. Základním problémem popisu kapitálu je způsob jeho ocenění a jeho konzistence s dalšími faktory. Sixta (2011) pracuje s tímto vstupem jako fixním kapitálem zahrnující produkty s dobou použitelnosti delší než jeden rok. Tohoto ocenění využívá

mnoho analýz díky dobré dostupnosti údajů. Fixní kapitál je oceňován v běžných reprodukčních cenách a využívá metody nepřetržité inventarizace<sup>9</sup>. Alternativou pojetí fixního kapitálu je snaha o lepší zhodnocení přínosu aktiva pro daný proces výroby. Hlavní směr stavů kapitálu je ovlivněn vývojem hrubé tvorby fixního kapitálu a systémem vyřazování likvidních aktiv. Změna poměru mezi stroji a stavbami mění souhrnné odpisové sazby a to se následně odráží v nárůstech nebo poklesech stavu kapitálu (Sixta, 2011).

Při hodnocení investic do kapitálu je vhodné zkoumat jejich vývoj ve stálých cenách, neboť v běžných cenách jsou tyto investice ovlivněny kurzem koruny a dovozních cen. Pro statistické účely dochází také odhadu kapitálových služeb, jejichž cílem je zrcadlit snižování efektivnosti aktiva s ohledem na jeho stáří. Tyto odhady jsou získávány pomocí standardizovaných koeficientů. Pro jejich získání je potřeba zvolit průběh efektivnosti na základě stáří aktiva a průběh standardizované hodnoty odvozené od diskontní sazby. Výhodou využití kapitálových služeb pro odhad produktivity jsou jejich vlastnosti, kdy se jedná o intervalový ukazatel, který odráží vývoj investic a efektivnost aktiv. Kapitálové služby byly do standardů systému národních účtů zapojeny v roce 2008, ale získávání těchto údajů je v praxi náročné (Sixta, 2011).

Praktickou ukázkou využití produkčních funkcí může být výstup článku Josefa Černého. Ten ve své práci *Comparison of Cobb-Douglas Production Functions of Chosen Countries by Using Econometric Model* vysvětluje produkční funkci jako základní ekonomický nástroj na praktickém využití odhadu parametrů produkčních funkcí. Se znalostí potenciálního produktu a struktury vlivu pracovní síly a kapitálu může produkční funkce přispět k lepšímu poznání podnikatelského prostředí a lepšímu přizpůsobení strategie na úrovni mezinárodní i národní. Ve své práci využívá Cobbovy-Douglasovy produkční funkce ve tvaru:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta},$$

kde  $Q$  je výstup ve fyzických jednotkách,  $L$  je práce a  $K$  kapitál.  $A$ ,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou parametry. Parametr  $A$  se týká úrovně technologického pokroku dané země, parametry  $\alpha$  a  $\beta$  jsou elasticitami práce a kapitálu.

Při odhadování parametrů Cobbovy-Douglasovy produkční funkce používá Černý pro proměnnou výstupu hrubý domácí produkt, za proměnnou kapitál dosazuje tvorbu kapitálu a proměnná práce je reprezentována pracovní silou. Ve své práci Černý využívá linearizaci produkční funkce. Porovnání odhadů parametrů pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců a metodou linearizace produkční funkce se budeme věnovat v praktické části práce.

---

<sup>9</sup> Metoda kombinující ocenění a odepisování s cílem zohlednění reálné životnosti aktiva. Kapitálová zásoba je oceněna jako součet současných fixních investic minulé zásoby kapitálu s ohledem na jeho opotřebení.

### 3.2.5 Produkční přístup k odhadu potenciálního produktu

Produkční přístup je využíván k odhadu potenciálního produktu. Tento přístup a jeho srovnání s ostatními metodami je pojednán v práci Hlouška a Polanského (2007). Potenciální produkt a mezera výstupu jsou důležitými proměnnými při nastavování stabilizační politiky země. Podle České národní banky je odhad potenciálního produktu definován jako úroveň reálného výstupu s absencí tlaků na změnu inflace a ekonomika dosahuje maximálního výstupu. Národní banky využívají tohoto přístupu k odhadu potenciálního produktu a výpočtu mezery výstupu, která je využívána jako podklad pro změnu úrokových sazeb. Mezerou produktu se rozumí procentní odchylka reálného a potenciálního výstupu. Ve fiskální politice je potenciální produkt využíván pro výpočet strukturální a cyklické složky rozpočtového deficitu.

Koncept potenciálního produktu je logickou analýzou cyklického vývoje, výhledu růstu ekonomiky, postoje fiskální a monetární politiky, neboť právě potenciální produkt představuje nejlepšího ukazatele složeného z nabídkové strany ekonomiky a jeho působnosti na udržitelný a neinflační růst. Z těchto důvodů je potenciální produkt předmětem trvalého zájmu výzkumů ekonomů. Náhled na tuto problematiku se liší také podle délky období:

- Krátké období – produkční kapacity ekonomiky jsou neměnné. Srovnání se skutečným vývojem produkce ukazuje, jak se může vyvinout celková poptávka v krátkém období bez inflačních tlaků.
- Střední období – rozšířením domácí poptávky, která je podporována investicemi, dochází k vytváření výstupních kapacit. Tento fakt je nejvíce podpořen v případě ziskovosti s podporou mzdového vývoje a ohledem na produktivitu práce.
- Dlouhé období – pojem plné zaměstnanosti na úrovni potenciálního produktu je spojen s vývojem technologického pokroku nebo celkové produktivity faktorů (D'Auria, 2010).

Spěváček (2010) ve své knize uvádí, že pro odhad potenciálního produktu je využíváno třech přístupů:

- využití údajů ekonomické reality;
- aplikace ekonometrických metod na časovou řadu údajů;
- využití produkční funkce (obvykle Cobbova-Douglasova produkční funkce).

Měření potenciálního růstu není jednoduchou záležitostí. Může být odvozen pomocí statistického přístupu nebo ekonometrické analýzy. Všechny dostupné metody mají své výhody i nevýhody, přesto je potřebné definovat přístup takový, kde by bylo možné mezinárodní srovnání. V rámci kontroly provádění politiky EU začalo být pro účely rozpočtového dohledu využíváno právě produkčního přístupu. Pro zajištění transparentnosti dané metodiky je nezbytné, aby byly jasně vymezeny klíčové vstupy a výstupy, rovné zacházení se všemi státy, zohlednění minulého i budoucího vývoje potenciálního růstu v EU. Cílem je vyhnout se falešnému optimismu, který by byl spojen s cykličností odhadů trendů HDP (D'Auria, 2010).



Potenciální produkt a trend skutečného produktu bývají ztotožňovány. Trend skutečného produktu je využíván k výpočtu mezery výstupu. Právě potenciální produkt je neznámou hodnotou, kterou lze odhadnout z proměnných produkční funkce. Výhodou tohoto přístupu je možnost analýzy vlivu jednotlivých proměnných na potenciální produkt. Stejně jako v ostatních případech je pro odhad využívána neoklasická Cobbova-Douglasova produkční funkce. V tomto případě je produkční funkce ve tvaru

$$Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^\alpha,$$

kde  $Y$  je reálné HDP,  $A$  je souhrnná produktivita,  $L$  je práce,  $K$  znázorňuje zásobu kapitálu a parametr  $\alpha$  podíl práce na HDP (Hloušek, 2007).

Převedením produkční funkce na tvar vyjadřující tempa růstu HDP a proměnných, získáváme funkci ve tvaru

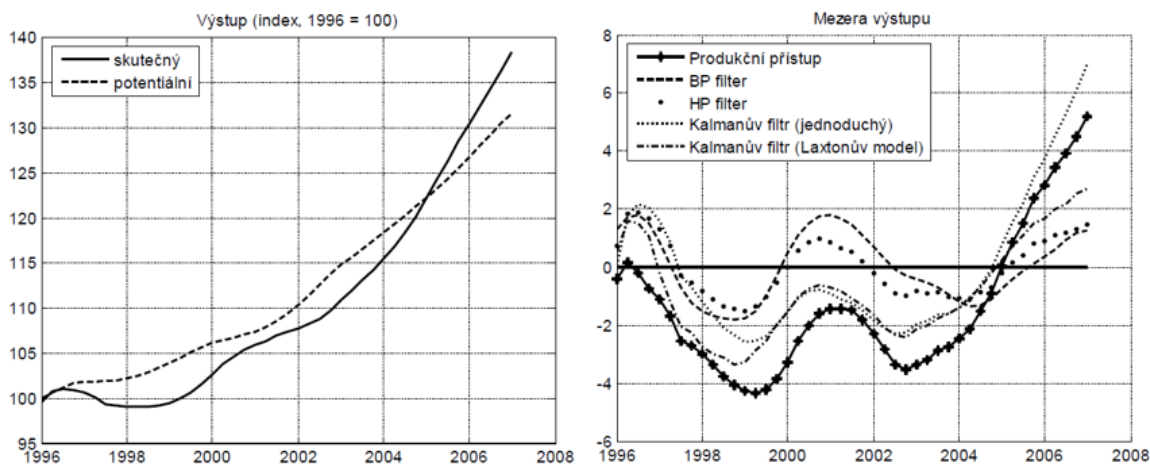
$$\frac{\Delta Y^*}{Y^*} = \alpha \left( \frac{\Delta L^*}{L^*} \right) + (1 - \alpha) \left( \frac{\Delta K}{K} \right) + \frac{\Delta A^*}{A^*},$$

kde  $Y^*$  vyjadřuje potenciální produkt,  $L^*$  potenciální zaměstnanost a  $A^*$  trend v souhrnné produktivitě. Potenciální zaměstnanost je stanovena pomocí NAIRU<sup>10</sup>. S trendem kapitálu není potřeba pracovat, jelikož se jedná o nepříliš proměnlivou složku. Časová řada souhrnné produktivity je filtrována za využití Hodrickova-Prescottova filtru. Cílem tohoto procesu je zjistit trend souhrnné produktivity kapitálu. Parametr  $\alpha$  je vypočítán jako podíl odměn práce na celkový důchod. Omezení využívání tohoto přístup je spatřováno ve využití Hodrickova-Prescottova filtru a využití produkční funkce s konstantními výnosy z rozsahu. Hodrickův-Prescottův filtr je využíván pro odhad trendu proměnné  $A$  (Hloušek, 2007).

Srovnání temp skutečného a potenciálního produktu získaného odhadem za pomoci produkčního přístupu můžeme sledovat na Obr. 8 vlevo. Hloušek (2007) zde uvádí výsledky při využití produkčního přístupu odhadu produkční mezery v časovém období od roku 1996 do roku 2008. Souhrnná produktivita faktorů je jedním z nejdůležitějších činitelů, které ovlivňují růst potenciálního produktu. V našem příkladu se projevuje od roku 2001. Vlivem byl například příliv zahraničních investic. Lepší výstup nám nabídne graf mezery výstupu. Mezeru výstupu získáme odečtením skutečného a potenciálního výstupu. Na Obr. 8 vpravo vidíme rozdílnost produkčních mezer za využití rozdílných filtrů. Při využití produkčního přístupu vidíme, že odhad potenciálního produktu byl až do roku 2005 větší, než skutečný produkt. Po roce 2005 se situace obrátila. Produkční mezera předpovídá výši inflace. Pokud je potenciální produkt nižší než reálný produkt, ekonomika se nachází v kladné pro-

<sup>10</sup> NAIRU – Nonaccelerating Rate of Unemployment. Míra nezaměstnanosti, při které nedochází ke změně tempa růstu míry inflace.

dukční mezeře, mělo by docházet k nárůstu inflace. Z porovnání produkčního přístupu s ostatními filtry vidíme, že v tomto příkladu je produkční přístup podobný Kalmanově filtru, který byl nahrazen Hodrickovým-Prescotovým filtrem.

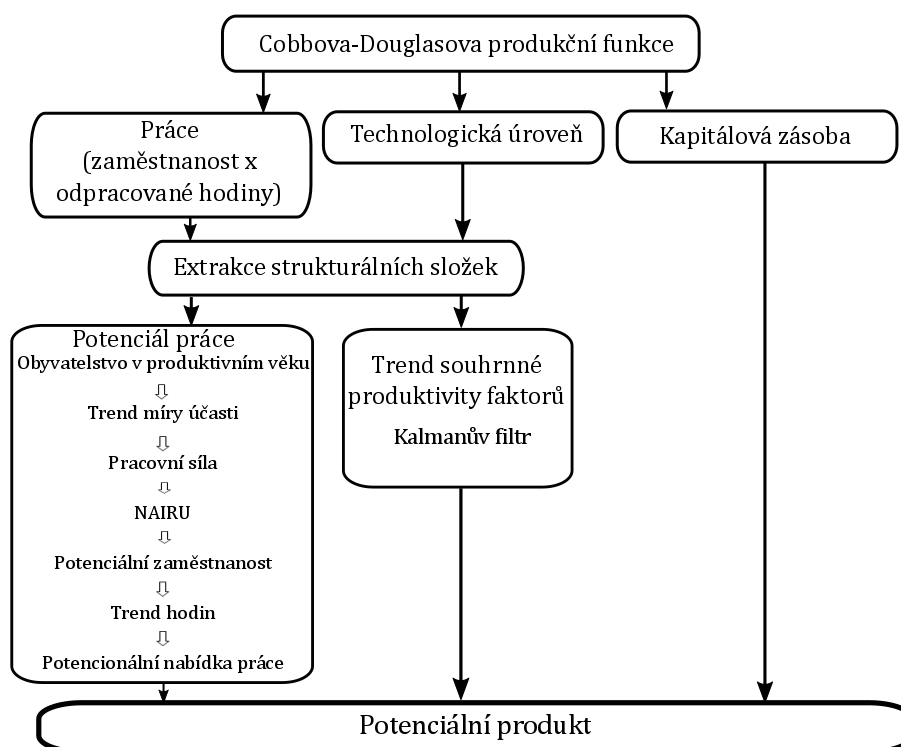


Obr. 8 Skutečný a potenciální produkt odhadnutý produkčním přístupem; Srovnání produkčních mezer za využití rozdílných filtrů

Zdroj: HLOUŠEK, Miroslav a Jiří POLANSKÝ. Produkční přístup k odhadu potenciálního produktu - aplikace pro ČR

Mezi další metody, jež slouží k odhadu potenciálního produktu, jsou podle Hlouška (2007) jednorozměrné nebo vícerozměrné filtrační metody. Mezi tyto filtry patří band pass filtr nebo Kalmanův filtr.

Původní metodika Hodrickova-Prescottova filtru byla nahrazena Kalmanovým filtrem. Tento přístup odstraňuje nedostatky původního filtru spojené s dostupností pouze krátkých časových řad pro některé členské státy. V této metodice pomocí Kalmanova filtru je využíváno také dalších informací, jako jsou například údaje o trhu práce. Hlavními změnami v produkčním přístupu využívaném v rámci EU je jednodušší metodika NAIRU na základě mzdových pružností, kde je souhrnná produktivita stanovena pomocí klouzavého průměru a základní kapitál je odhadován jako podíl kapitálu na výstupu (D'Auria, 2010).



Obr. 9 Diagram měření potenciálního produktu pomocí produkčního přístupu

Zdroj: D'AURIA Francesca a kol. *The production function methodology for calculating potential growth rates and output gaps*. Brussels: European Commission, Directorate-General for Economic and Financial Affairs, 2010. ISBN 9789279149061., vlastní úprava

Metoda se zaměřuje na stranu nabídky potenciálního produktu ekonomiky a její výhodou je přímá návaznost na ekonomickou teorii a možnost identifikovat vliv jednotlivých výrobních faktorů na růst potenciálního produktu. V praxi se tato přednost jeví i jako nevýhoda, a proto je pro kvalitní odhad potenciálního produktu nutné zavést určité předpoklady. Mezi ně patří předpoklad o funkční podobě technologie výroby, konstantní výnosy z rozsahu, reprezentativní využití výrobních faktorů, trend technologického pokroku je prezentován jako souhrnná produktivita faktorů (stupeň využití vstupů). Na výše uvedeném diagramu lze vidět, že potenciální HDP je prezentován kombinací vstupů násobenou technologickou úrovní nebo souhrnnou produktivitou faktorů. (D'Auria, 2010)

Potenciální produkt, stejně jako jiné rovnovážné makroekonomické veličiny, není pozorovatelná a měřitelná veličina. Při získávání potenciálního výstupu pomocí výsledků reálného produktu je nutné jasně definovat, co je míněno jako potenciální produkt a jaká je reálná úroveň účinnosti faktorů vstupů. Rozdíly mezi těmito faktory jsou vymezeny:

- Kapitálová zásoba – definice potenciální kapitálové zásoby je zřejmá, neboť maximální potenciální výkon kapitálu je dán plným využitím stáva-

jící základní kapitálové zásoby v ekonomice. Základní kapitál je ukazatelem celkové kapacity, a proto není potřeba vyhlazování této série dat. Kapitálová zásoba je měřena pomocí metody průběžné inventarizace.

- Práce – definovat potenciální výstup práce není tak jednoduché jako definice kapitálové zásoby, neboť je složité posoudit úroveň obvyklého stupně využití tohoto faktoru. Faktor práce je definován v hodinách. Určení trendu faktoru práce vyžaduje několik kroků. Vycházíme z maximální možné úrovně, tedy z počtu obyvatel v produktivním věku (15-64 let), jejíž trend určíme pomocí Hodrickova-Prescottova filtru. Dále spočteme trend míry nezaměstnanosti při neakcelerující inflaci (NAIRU). Nakonec získáváme potenciální nabídku pracovních sil jako násobek těchto složek. Rovnicí je tento ukazatel vyjádřen jako

$$L_t^* = pop_t^{15-64} part_t^* (1 - NAIRU_t),$$

kde  $pop_t^{15-64}$  je obyvatelstvo v produktivním věku,  $part_t^*$  potenciální míra participace a  $NAIRU_t$  je potenciální míra nezaměstnanosti při neakcelerující inflaci. Tento přístup je výhodný ze dvou hledisek: jednak díky relativně stabilně určené potenciální zaměstnanosti, dále vzhledem k jejímu úzkému propojení s dlouhodobými vývoji demografického a pracovního trhu (aktuální produktivní věk, trendové míry participace nebo strukturální nezaměstnanost) (Kloudová, 2013).

### 3.3 Indikátory produktivity

V první části této podkapitoly jsou uvedeny a komentovány tradiční ukazatelé produktivity země, které jsou běžně využívány jako makroekonomické indikátory. V další části budou využity poznatky z prací OECD a popsány alternativní ukazatelé, které se snaží vyřešit negativa obvyklých způsobů výpočtů.

Otázka ukazatelů produktivity se stala natolik významným tématem, že jako podpora pro jejich rozvoj a správnou interpretaci vznikla Mezinárodní komise pro měření ekonomického výkonu (CMEPSP). Komise nepovažuje produkčně orientovaný systém měření blahobytu za vhodný, a proto se orientuje na důchodové ukazatele. Cílem její práce je využití nových poznatků o vývoji ekonomik a rozšíření základních indikátorů životní úrovně a sociálních podmínek (Vintrová, 2010).

Obecně můžeme definovat 8 způsobů, jak měřit produktivitu země. Jedná se o hrubý a čistý domácí produkt, hrubý a čistý národní produkt, hrubý a čistý domácí příjem, hrubý a čistý národní příjem. Různými způsoby měření docházíme k rozdílným výsledkům a závěrům. Výpočty těchto ukazatelů jsou založeny na datech národních účtů. Mezi hrubou a čistou hodnotou je rozdíl v opotřebení fixního kapitálu, pro domácí a národní hodnoty se liší v sumě rezidentů a nerezidentů. Z praxe je zřejmé, že nominální hrubý domácí produkt a nominální hrubý domácí důchod jsou

stejně a rozdíly mezi jejich reálnou hodnotou jsou určeny deflátoři<sup>11</sup>. Produkt a příjmy nám poskytují rozdílné pohledy na hospodářství. Produkt poskytuje objem produkce, kdežto příjmy ukazují částku, která je k dispozici pro spotřebu (Ross, 2010).

### 3.3.1 Hrubý a čistý domácí produkt

Mezi nejčastěji využívané indikátory produktivity země patří hrubý národní produkt a je řazen mezi základní ekonomické agregáty. Kromě posouzení výkonnosti a hospodářského růstu je také ukazatelem životní úrovně. V jeho výpočtu je zahrnuta tržní produkce a také část produkce netržní. Jeho výpočet se provádí peněžní agregací zboží a služeb. Ocenění služeb penězi je problematické, náklady nezahrnují reálný objem a nebere v potaz změnu efektivnosti nebo růst produktivity práce. HDP jako indikátor produktivity nezohledňuje záporné ani kladné externality, které by ovlivnily jeho výši. Obtížně se do výpočtu HDP zahrnují také změny kvality.

Výhodami měření produktivity země hrubým domácím produktem je jeho dostupnost a srovnatelnost s ostatními zeměmi. Často bývá využíván také jako ukazatel ekonomického blahobytu. Hlavními způsoby výpočtu HDP je výrobní a výdajová metoda. Při ocenění výkonu země výrobní metodou využíváme přidaných hodnot, které jsou postupně přidávány danému produktu či službě na různých výrobních stupních. K takto získané přidané hodnotě je přičítáno zhodnocení kapitálu a nepřímé daně. Výdajová metoda sumarizuje výdaje na nákup finálních statků. Mezi tyto výdaje patří spotřební výdaje domácností, investice firem, vládní výdaje na nákup zboží a služeb a čistý export (Soukup, 2010).

Čistý domácí produkt má podobu hrubého domácího produktu se započítáním spotřeby fixního kapitálu. Míra amortizace má na velikost spotřeby přímý dopad a jejich zohledněním tedy počítáme s čistými investicemi. Znehodnocení kapitálu je nákladem na výrobu, odečtením odpisů získáváme čistou produktivitu země (Man-kiw, 2010).

### 3.3.2 Hrubý a čistý národní produkt

Tento ukazatel je lépe přizpůsoben podmínkám globalizace, jelikož zohledňuje bilanci výnosů. Bilanci výnosů najdeme v účtu platební bilance a zachycuje důchody od výrobních faktorů dané země zapojených v zahraničí a důchody z výrobních faktorů zahraničních subjektů působících v domácí ekonomice. Hrubý národní produkt zohledňuje tok zboží a služeb vytvořený výrobními faktory, které jsou ve vlastnictví subjektů dané ekonomiky. V dané zemi je tedy započítávána produkce vytvořená zemí i v zahraničí a naopak není zahrnována produktivita zahraničních zemí na území daného státu. Čistý národní produkt je očištěn od opotřebené kapitálu (Man-kiw, 2010).

---

<sup>11</sup> Deflátor je podíl mezi nominální a reálnou hodnotou.

### 3.3.3 Environmentální domácí produkt

Tento ukazatel se zaměřuje na fakt, že do ukazatele hrubého domácího produktu není zakomponován problém udržitelnosti přírodních zdrojů. Aby tento ukazatel respektoval tyto faktory, musel by být upraven. Tento environmentálně upravený čistý domácí produkt bere ve svém výpočtu v úvahu čerpání přírodních zdrojů a poškozování životního prostředí. Tento ukazatel by měl zajistit tzv. mezigenerační rovnost, což znamená, že budoucí generace by měly mít stejné množství zdrojů jako dnes (Hataš, 2014).

Využití tohoto nástroje k mezinárodnímu srovnání ekonomik není v této chvíli možné vzhledem k rozsáhlému množství různých přístupů k environmentálnímu účetnictví, rozdílných technik oceňování a dalších otázek, které se této problematiky týkají (Ritschelová, 2000).

### 3.3.4 ANS analýza

Adjusted Net Savings (ANS) je zaměřena na udržitelnost ekonomické spotřeby v dlouhém časovém horizontu. Tato analýza měří reálnou výši úspor v ekonomice. Tyto úspory jsou snižovány investicemi do lidského kapitálu, spotřebou přírodních zdrojů a nákladů vynaložených na záchranu životního prostředí. V případě dlouhodobého poklesu čistých úspor se snižuje bohatství země. Tento ukazatel je využíván orgány pro životní prostředí a pro tvorbu finančních rozpočtů na ochranu životního prostředí. V této analýze nejsou zachyceny všechny přírodní zdroje a oceňování těchto zdrojů na světové úrovni není příliš spolehlivé (Vintrová, 2010).

### 3.3.5 Koncept parity kupní síly

Během globalizace dochází k rozvoji technologií, kombinování mzdově a kvalifikačně vhodných pracovních sil, pohybu pracovního i finančního kapitálu. Novým rysem ekonomického růstu se potom stává dělba práce mezi vyspělé a nízkonákladové země. Otázkou zůstává, jak rozdělit tyto přínosy mezi zúčastněné země. S touto problematikou je spojen tzv. *Phantom GDP*, což je část domácí produkce nevyrobená výrobními faktory dané země, ale je důsledkem globalizace. Mezinárodní firmy těží ze zemí s nižšími náklady a následně dochází k růstu nezaměstnanosti v sídelní zemi firmy a zároveň k větší produktivitě pracovní síly.

Tato problematika rozdílných úrovní cenových hladin mezi zeměmi by mohla být podle názorů některých ekonomů řešena konceptem parity kupní síly (PPP). Ten umožňuje porovnání všech statků a služeb při zachycení reálného výkonu.

*„Paritní kurz by při navrhovaném postupu převáděl jednotlivé složky hrubého výkonu do mezinárodní cenové úrovně. Pokud bychom ocenili hrubý výkon i od něho odpočítávanou mezispotřebu (intermediate consumption) v PPP, pak by byl růst HDP ve vyspělých zemích při vzrůstajícím offshoringu<sup>12</sup> nižší a v rozvojových zemích naopak*

---

<sup>12</sup> Přesun výroby do zahraničí. Původně vyráběné zboží a služby jsou nakupovány od zahraničních firem. Jedna z forem outsourcingu.

vyšší než podle standardních statistických ukazatelů. Tento postup, měřící „fyzický objem“ zboží a služeb, produkovaných v dané zemi při propočtu HDP výrobní metodou, by pro zajištění konzistence bylo nutno rozšířit i na dovoz a vývoz při propočtu výdajovou metodou. V takovém případě by byl objem dovozu z rozvojových zemí v relaci k celkovému HDP vyspělých zemí vyšší a příspěvek čistého vývozu k HDP by byl při rychle se zvyšujícím offshoringu nižší, než jak je dosud vykazován.“<sup>13</sup>

Parita kupní síly je jednotkou měnové konverze, eliminuje rozdíly v úrovních cen mezi jednotlivými zeměmi, převádí cenu zboží na společnou měnu a cenovou hladinu (Spěváček, 2010).

### 3.3.6 Indexy

Produktivita je obvykle měřena pomocí indexů. Vzhledem k nehomogenosti zboží a služeb není možné využít jednoduchého součtu komodit. Problematikou je volba výpočtu indexu. V praxi je využíváno mnoha zjednodušení, jako například konstantní výnosy z rozsahu. Díky těmto opatřením se hledá řada alternativních indexů produktivity, které lépe vystihují realitu.

### 3.3.7 Alternativní způsoby měření SPF

Alternativní způsoby měření souhrnné produktivity faktorů se vyznačují alternativními vstupy do produkční funkce. Sixta (2011) považuje za alternativy tyto tři možnosti:

- Za vstup práce jsou považovány služby práce, vstupem kapitálu jsou čistá fixní aktiva.
- Vstupem práce jsou odpracované hodiny a vstupem je kapitál ve formě kapitálových služeb.
- Poslední možností je vstup práce jako služby práce a vstupem kapitálu jsou kapitálové služby.

Aplikací první varianty ukazuje Sixta (2011) na příkladu, že přesun části počtu odpracovaných hodin od méně vzdělaných pracovníků k pracovníkům vzdělanějším, vede k nárůstu služeb práce. Tento nárůst je větší než růst počtu odpracovaných hodin. Využitím druhé varianty a následného srovnání s klasickým přístupem (stavy kapitálu s kapitálovými službami), dochází k nižšímu odhadu souhrnné produktivity faktorů. Stejný výsledek se dostavuje také při využití třetí varianty. Volba těchto alternativ je založena na změně kvality metody transformace vstupů z okamžikových na intervalové ukazatele. Alternativní ukazatelé respektují i kvalitu daného vstupu, čímž získáváme přesnější výsledek souhrnné produktivity faktorů.

---

<sup>13</sup> VINTROVÁ, Růžena. Interpretační omezení HDP a alternativní ukazatele. *Centrum výzkumu konkurenční schopnosti české ekonomiky*. 2010, (17): 43.

## 4 Praktická část

Praktická část této práce bude věnována odhadu parametrů vybraných produkčních funkcí. Hlavní zdrojem dat této části byla databáze OECD. Při volbě vstupních proměnných vycházíme z teoretické části této práce, kdy jsme po úvaze zvolili jako vstupní data hrubý domácí produkt v milionech amerických dolarů v běžných cenách reprezentující výstup produkčních funkcí, zaměstnanou populaci ve věku od 15 let v tisících obyvatel reprezentující vstupní proměnnou produkčních funkcí práce a vstupní proměnná kapitál je prezentována hrubým fixním kapitálem v milionech amerických dolarů v běžných cenách. Všechna data jsou získána na čtvrtletní bázi.

OECD je Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj, která je mezinárodní organizací se sídlem v Paříži a spojuje 34 nejrozvinutějších států světa. Hlavním úmyslem této organizace je koordinace politik s cílem dlouhodobého ekonomického rozvoje zemí. Nejvyspělejší země světa synchronizují postupy v řadě oblastí od ekonomiky až po životní prostředí. Díky tomu mohou být aplikovány projekty napříč zeměmi. Členství zemí je podmíněno ekonomickými, politickými a legislativními podmínkami, bez jejichž splnění není možná participace. OECD nespolupracuje pouze s členskými zeměmi, ale také se zeměmi nečlenskými, kterým pomáhá v jejím rozvoji a dalšími mezinárodními organizacemi (Základní informace o OECD, 2015).

Pro účely této práce byly vybrány 4 státy, pro které budou parametry produkčních funkcí odhadovány. Jedná se o státy, které jsou součástí Evropské unie a byla vybrána Česká republika, Slovensko, Maďarsko a Řecko. První tři z uvedených států jsou součástí tzv. Visegrádské čtyřky. Visegrádská čtyřka je aliance čtyř zemí (Česká republika, Slovensko, Maďarsko a Polsko), které spolu vzájemně spolupracují na rozvoji kultury, vědy a výzkumu, vzdělávání a dalších oblastech. Cílem této spolupráce je podpora rozvoje a vzájemných vazeb mezi těmito zeměmi. Dalším zvoleným státem bylo Řecko.

V praktické části této diplomové práce se budeme věnovat odhadu Cobbovy-Douglasovy produkční funkce, CES produkční funkce a Sato produkční funkce.

### **Cobbova-Douglasova produkční funkce**

Volba Cobbovy-Douglasovy produkční funkce byla nasnadě, jelikož se jedná o nejjednodušší produkční funkci, která je vstupem mnoha ekonomických teorií. Je využívána například v teoriích ekonomického růstu nebo při odhadu produkční mezery.

Jak zmiňuje ve své práci také Kloudová (2013), je produkční funkce využívána jako vhodný nástroj pro odhad potenciálního produktu ekonomiky a následného vývoje inflace. Při výpočtech využívá Cobbovu-Douglasovu produkční funkci, kde jsou vstupními daty hrubý domácí produkt, souhrnná produktivita faktorů, zásoba kapitálu a zaměstnanost v počtu osob. V této práci je využíváno konstantní váhy podílu práce, neboť úroveň odhadu potenciálního produktu je málo citlivá na hodnotu parametru  $\alpha$ . Pro zjištění potenciální úrovně produktu se využívají vstupní data na potenciální úrovni, jak již bylo popsáno v podkapitole 3.2.5.



Sixta (2011) ve své práci využívá jako vstupní údaje hrubou přidanou hodnotu, odpracované hodiny, průměrnou mzdu, stavy fixních aktiv a hrubou tvorbu fixního kapitálu. Služby práce i kapitálu byly vypočteny. Díky dobré dostupnosti údajů je využíván fixní kapitál s dobou použitelnosti delší než jeden rok.

Cobbova-Douglasova produkční funkce patří k základním funkcím, které jsou využívány v praxi. Vzhledem k tomu, že se jedná o produkční funkci nelineární v parametrech, je potřeba k odhadu parametrů využít iterativní metody. V našem případě využijeme metodu nejmenších nelineárních čtverců. Cobbovu-Douglasovu produkční funkci lze také snadno linearizovat a získat tak její tvar v lineární podobě. Tohoto postupu se své práci drží také Černý (2011), který následně využívá metody nejmenších lineárních čtverců

V praktické části této práce bude využito obou možností odhadu parametrů produkčních funkcí a jejich výsledky budou porovnány.

Cobbova-Douglasova produkční funkce je známá ve tvaru:

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

kdě  $A$  indikuje technologický pokrok v dané zemi,  $\alpha$  parametr, který určuje elasticitu produkce k práci, parametr  $\beta$  určuje elasticitu produkce vzhledem ke kapitálu. Všechny odhadované parametry musí nabývat kladných hodnot. Součtem hodnot elasticit zjistíme, jaké výnosy z rozsahu v dané zemi jsou.

Černý (2011) provádí ve své práci odhady pro Českou republiku, Slovensko a Polsko. Vstupními proměnnými jsou hrubý domácí produkt prezentující výstup produkční funkce, kapitálová zásoba jako kapitál a pracovní síla reprezentuje vstupní proměnnou práce. Pro každou proměnnou bylo k dispozici 52 pozorování čtvrtletní časové řady mezi lety 1998 až 2010. V praktické části diplomové práce využijeme linearizované formy produkční funkce k porovnání výsledků získaným metodou nejmenších čtverců a metodou nelineárních nejmenších čtverců.

Cobbovu-Douglasovu funkci lze snadno linearizovat a provést odhad také pomocí metody nejmenších lineárních čtverců. V tomto případě bude funkce ve tvaru

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K.$$

Pro dosažení dobrých vlastností odhadů je nezbytné, aby lineární model splňoval několik podmínek. Tyto podmínky jsou definovány v kapitole 2 Metodika. Splnění těchto podmínek je možno ověřit pomocí testů, které nám potvrdí nebo vyvrátí správnost modelu.

### **CES produkční funkce**

Tato funkce patří mezi složitější, neboť je v jejím tvaru zahrnuto více typů produkčních funkcí. CES produkční funkce je známá jako produkční funkce s konstantní elasticitou, kdy může elasticita substituce za práci nabýt hodnot mezi 0 a  $\infty$ , ale musí zůstat konstantní. CES produkční funkce je zapisována ve tvaru

$$Q = \gamma[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}]^{-\frac{\nu}{\rho}},$$

kde  $Q$  je výstup,  $K$  je kapitálový vstup a  $L$  je vstup faktoru práce a kde pro parametry platí podmínky:  $\gamma > 0$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $\nu > 0$  a  $\rho \geq -1$ . Parametr  $\gamma$  je parametrem účinnosti,  $\delta$  je parametrem distribuce,  $\nu$  je parametr pro výnosy z rozsahu a  $\rho$  je parametrem substituce (Mishra, 2007).

### Sato produkční funkce

Na základě článku *New measures of factor productivity in Australia: a Sato approach*, kde nám autor představuje nové způsoby měření faktorů produktivity v Austrálii, bude odhad parametrů Sato produkční funkce také součástí praktické části této práce. Sato ve své verzi produkční funkce poukázal na možnou variabilitu elasticity substituce.

Díky kritice Cobbovy-Douglasovy produkční funkce, kdy se předpokládají konstantní koeficienty v čase i přes změny práce a kapitálu, bylo při odhadu v práci Makina (2013) využito Satoovy produkční funkce. Sato produkční funkce je ve tvaru:

$$Y = \frac{L^2 K^2}{(aL^3 + bK^3)},$$

kde  $a$  a  $b$  jsou konstantní parametry. Funkce naplňuje předpoklady konstantních výnosů z rozsahu a mezní produkt každého z faktorů může být i méně než nula. I přesto, že se jedná o předpoklady pro produkční funkci na úrovni firem, Sato zdůrazňuje, že je možné tyto předpoklady aplikovat také na agregátní úrovni. Jako výhoda této funkce bývá zdůrazňována její linearita, kdy po jednoduché transformaci získáváme produkční funkci v lineárním tvaru:

$$\frac{1}{Y} = \frac{(aL^3 + bK^3)}{L^2 K^2} = a \frac{L}{K^2} + b \frac{K}{L^2}.$$

Aby bylo možné získat konstanty  $a$  a  $b$  jako funkce času, je nutné zavést do rovnice proměnnou času ve tvaru:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + a_1 t, \\ b(t) &= b_0 + b_1 t. \end{aligned}$$

Po dosazení proměnné času do rovnice, získáváme produkční funkci ve tvaru:

$$\frac{1}{Y} = a_0 \frac{L}{K^2} + a_1 \frac{L}{K^2} t + b_0 \frac{K}{L^2} + b_1 \frac{K}{L^2} t.$$

Vstupními daty pro odhad parametrů v Austrálii jsou její HDP, index odpracovaných hodin a index reálné zásoby kapitálu. Přínos této produkční funkce je nalézán v jedinečných vlastnostech a možnosti odvodit odhady elasticity substituce mezi prací a kapitálem a měnícími se mezními produktivitami v čase. Na příkladu Austrálie se použitím tohoto přístupu ukazuje, jak je práce a kapitál kombinován pro agregátní výstup a změny jejich přínosu v průběhu času. Odhadované produkční izokvanty pro vybrané roky ukazují, jak se mění kombinace práce kapitálu v tvorbě reálného HDP (Makin, 2013).

Pro některé odhady parametrů budou vykresleny mapy izokvant, které jsou znázorněním vztahu mezi prací a kapitálem. Mapa izokvant je vhodným nástrojem vykreslení výsledků odhadů. Pro některé případy vykreslení izokvant poukáže na rozpor odhadů s ekonomickou teorií.

#### 4.1 Česká republika

Česká republika patří mezi nejstabilnější ekonomiky Evropy. Stejně jako zbytek světa ovlivnila vývoj ekonomiky České republiky Velká hospodářská krize. V roce 2012 se česká ekonomika potýkala s poklesem HDP a růstu míry nezaměstnanosti. Rok 2013 byl započat recesí, ale Česká republika se s ekonomickou krizí vyrovnala relativně rychle a již během tohoto roku začala ekonomika oživovat. Ekonomika byla podpořena převážně investicemi. Na trhu práce bylo využíváno různých forem pracovních úvazků, rostla celková zaměstnanost. V roce 2014 ožívování ekonomiky pokračovalo a růst HDP byl podpořen také domácí poptávkou. Míra nezaměstnanosti v tomto roce výrazně klesá. Na počátku roku 2015 dosahuje česká ekonomika růstu a nízké míry nezaměstnanosti (ČSÚ, 2015).

Vstupní data pro Českou republiku jsou k dispozici od 1. čtvrtletí roku 1999, takže máme pro odhad k dispozici celkem 66 pozorování. Vhodnost dat nám pomohou ověřit popisné charakteristiky, které nám umožní charakterizovat data. Hodnoty popisných charakteristik můžeme sledovat v Tab. 3.

Tab. 3 Popisné statistiky vstupních hodnot pro Českou republiku

	HDP	Práce	Kapitál
průměr	248570	4832	68682
medián	271360	4871,5	74041
minimum	155570	4677	46055
maximum	346300	5041	89283
směrodatná odchylka	55261	116,38	12273
variační koeficient	0,222	0,024	0,178
šikmost	-0,237	0,0237	-0,36
špičatost	-1,319	-1,436	-1,273

V tabulce vidíme průměrnou hodnotu hrubého domácího produktu, zaměstnaných obyvatel i hrubého fixního kapitálu. Průměr jako charakteristika polohy může mít zavádějící interpretaci, protože je snadno ovlivnitelná extrémními a chybnými hodnotami. Vhodnější je posouzení hodnoty mediánu neboli středové hodnoty. Při porovnání hodnot průměru a mediánu vidíme, že se hodnoty liší o 22 milionů USD. Minimum a maximum nám ukazuje maximální a minimální hodnotu v rámci našeho pozorování. Při porovnání průměru a mediánu je vliv těchto hodnot znatelný. Směrodatná odchylka udává, jak moc jsou data rozdílná od průměrné hodnoty všech pozorování. S rostoucí hodnotou směrodatné odchylky jsou data více odlišná. V případě našich hodnot není odchylka natolik velká, můžeme tedy konstatovat, že v našem pozorování nejsou hodnoty příliš rozdílné. To platí především pro ukazatel práce, kde vidíme, že se hodnota liší v řádu stovek. Hodnotu variačního koeficientu můžeme definovat jako směrodatnou odchylku v relativním vyjádření. U všech vstupních proměnných se variační koeficient pohybuje pod hodnotou 25 %, což svědčí o tom, že se data od průměru příliš neodklání. Koeficienty šikmosti a špičatosti nám pomáhají charakterizovat, jak moc se rozdělení dat odlišuje nebo shoduje s normálním rozdělením. Šikmost je charakteristikou, která určuje, zda se většina pozorování nachází pod průměrem nebo nad průměrem. V našem případě dosahují hodnoty šikmosti HDP a kapitálu záporných hodnot, to znamená, že se většina hodnot pozorování nachází nad průměrem. Špičatost poukazuje na rozdělení hodnot kolem střední hodnoty pozorování. Záporný koeficient špičatosti poukazuje na plošší špičatost, což znamená, že odlehlé hodnoty významně neovlivňují rozptyl. Shrnutím základních charakteristik pro datový soubor České republiky jsme se ujistili ve vhodnosti zvolených dat.

#### 4.1.1 Cobbova-Douglasova produkční funkce

Odhady parametrů jsou získány pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců v programu Gretl. Tato metoda je založena na iteracích, kdy musí uživatel nastavit hodnoty počátečního odhadu. Pro naše odhady jsme nastavili původní hodnoty jako  $A = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ . Bohužel nedošlo po nastavení parametrů na tyto hodnoty ke konvergenci, proto jsme nastavili počáteční hodnoty na  $A = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,5$ . Ani tento pokus nebyl úspěšný. Po dalších nepříznivých výsledcích tohoto odhadu jsme se pokusili získat počáteční odhady parametrů pomocí odhadu parametrů linearizované formy Cobbovy-Douglasovy produkční funkce.

V případě České republiky jsme při odhadu metody nejmenších čtverců postupovali tak, že nejdříve bylo nutné získat logaritmy daných hodnot. Tyto hodnoty jsme získali přidáním proměnných jako logaritmů. Z tohoto výstupu je patrné, že se jedná o silný model, který je vysvětlen z 94 %, jak ukazuje adjustovaný koeficient determinace. Dalším ukazatelem, který nás zajímá, jsou p-hodnoty významnosti parametru. P-hodnoty odhadovaných parametrů jsou menší než hladina významnosti  $\alpha$ , zamítáme tedy hypotézu o nevýznamnosti parametrů a tyto parametry považujeme

jeme za statisticky významné. Dalším ukazatelem, který nás při odhadu tohoto modelu zajímá, je p-hodnota RESET testu, kde je nulovou hypotézou správná specifikace modelu. V tomto případě nám test potvrzuje správnou specifikaci našeho modelu. Tvrzení o správné specifikaci je potvrzeno také LM testem. Výsledky tohoto odhadu můžeme sledovat na následující tabulce:

Tab. 4 Výstup programu Gretl pro Českou republiku pomocí metody OLS

Model 1				
Závisle proměnná	l_HDP			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
const	-11,5979	4,63832	-2,5	0,015
l_Employee	1,4528	0,64214	2,2	0,027
l_Capital	1,0495	0,08198	12,8	3,46E-19
Koeficient determinace				0,951
Adjustovaný koeficient determinace				0,949
P-hodnota F testu				5,45E-42
P-hodnota LM testu				0,020746
P-hodnota Whitova testu				0,002982
P-hodnota testu normality reziduí				0,00550602

Dalším předpokladem je homoskedasticita chybového členu. Pro zjištění, zda se v modelu vyskytuje heteroskedasticita chybového členu, jsme využili Whiteův test, jehož nulová hypotéza je homoskedasticita modelu. Na základě p-hodnoty testu zjišťujeme, že se v našem modelu heteroskedasticita nevyskytuje. Multikolinearitu v modelu otestujeme pomocí posouzení VIF hodnot. Pokud jsou tyto hodnoty větší než 10, je v modelu přítomna kolinearita. Pro naši datovou sadu nabývají koeficienty hodnoty menší než 10, můžeme tedy potvrdit, že se v našem modelu kolinearita nevyskytuje. Posledním předpokladem je normální rozdělení reziduí. Normalita byla otestována pomocí testu dobré shody. Na základě posouzení p-hodnoty zamítáme hypotézu o nenormálním rozdělení reziduí. Toto tvrzení můžeme potvrdit také vykreslením hodnot v histogramu.

Linearizováním Cobbovy-Douglasovy produkční funkce získáváme také parametr  $A$  v podobě logaritmu. Abychom zjistili jeho původní hodnotu, musíme provést jeho zpětnou transformaci. Získáváme Cobbovu-Douglasovu produkční funkci pro Českou republiku ve tvaru:

$$Y = 0,000009L^{1,45}K^{1,04}.$$

Po získání těchto odhadů pomocí metody nejmenších čtverců se můžeme vrátit k odhadu parametrů Cobbovy-Douglasovy produkční funkce v klasickém tvaru pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců. Pro naše odhady jsme nastavili počáteční

odhad parametrů jako  $A = 0,00009$ ,  $\alpha = 1,45$ ,  $\beta = 1,04$ . V získání odhadů jsme v tomto případě byli úspěšní a výsledku bylo dosaženo po 454 iteracích. Odhadnuté hodnoty parametrů jsme získali jako  $\hat{A} = 0,000003$ ,  $\hat{\alpha} = 1,648$  a  $\hat{\beta} = 0,998$ . Aby byl odhad parametrů přesnější, zvolili jsme nastavení počátečního odhadu blíže hodnotám provedeného odhadu. Podařilo se nám snížit počet iterací na 21, což ukazuje, že náš počáteční odhad parametrů byl lepší a získali jsme hodnoty odhadů jako  $\hat{A} = 0,000006$ ,  $\hat{\alpha} = 1,648$  a  $\hat{\beta} = 0,998$ . Adjustovaný koeficient determinace tohoto modelu je 93 %, což je slušný výsledek. Náš model tedy vysvětluje 93 % variability modelu. Výsledky odhadu metody nejmenších nelineárních čtverců jsou shrnuty v Tab. 5.

Tab. 5 Odhad Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců pro Českou republiku

Model 1				
Závisle proměnná	HDP			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
A	3,09E-06	1,64E-05	0,1882	0,8513
alfa	1,64885	0,746573	2,2086	0,0309
beta	0,998148	0,104368	9,5638	<0,0001
Koeficient determinace				0,931
Adjustovaný koeficient determinace				0,928

Po odhadu parametrů můžeme Cobbovy-Douglasovu produkční funkci napsat ve tvaru:

$$Y = 0,000006L^{1,648}K^{0,998}.$$

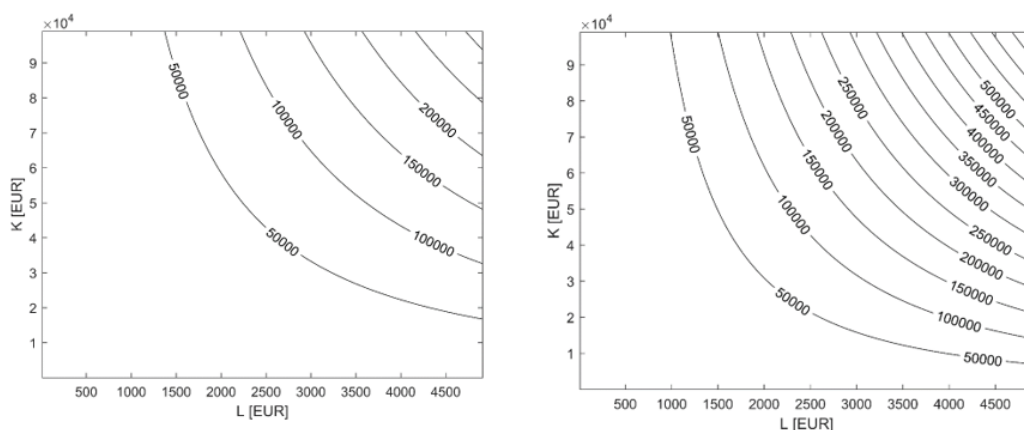
Parametr  $A$  vyjadřuje technologický pokrok v dané zemi, který je podle výsledků České republiky zanedbatelný. Podle výsledků parametrů  $\alpha$  a  $\beta$  můžeme usoudit, že je v České republice kladen větší důraz na práci než na investice do kapitálu. Součtem parametrů  $\alpha$  a  $\beta$  dostáváme hodnotu větší než 1, v případě České republiky tedy můžeme mluvit o rostoucích výnosech z rozsahu.

V Tab. 6 můžeme sledovat rozdílné hodnoty odhadnutých parametrů při využití odlišných způsobů metody nejmenších čtverců a nelineárních nejmenších čtverců. Porovnáním výsledných hodnot zjišťujeme, že odhady obou metod nejsou příliš rozdílné. V obou případech je technologický pokrok v zemi zanedbatelný a investice do práce jsou větší než do kapitálu.

Tab. 6 Porovnání výsledků rozdílných metod pro Českou republiku

	Metoda nelineárních nejmenších čtverců	Metoda nejmenších čtverců
$A$	0,000006	0,000009
$\alpha$	1,648	1,45
$\beta$	0,998	1,04

Pro oba odhady se podařilo také vykreslit izokvanty produkčních funkcí. Na Obr. 10 vidíme rozdílnost výsledků mezi odhady parametrů Cobby-Douglasovy produkční funkce pomocí obou metod. Již podle tvaru izokvant můžeme posoudit úspěšnost odhadů. Izokvanty produkčních funkcí pro obě metody splňují její předpoklady o konvexnosti. Přibližování izokvant poukazuje na rostoucí výnosy z rozsahu. O tom, že produkční funkce pro Českou republiku vykazuje rostoucí výnosy z rozsahu, se můžeme přesvědčit také sečtením parametrů  $\alpha$  a  $\beta$ , které po sečtení dávají hodnotu větší než jedna.



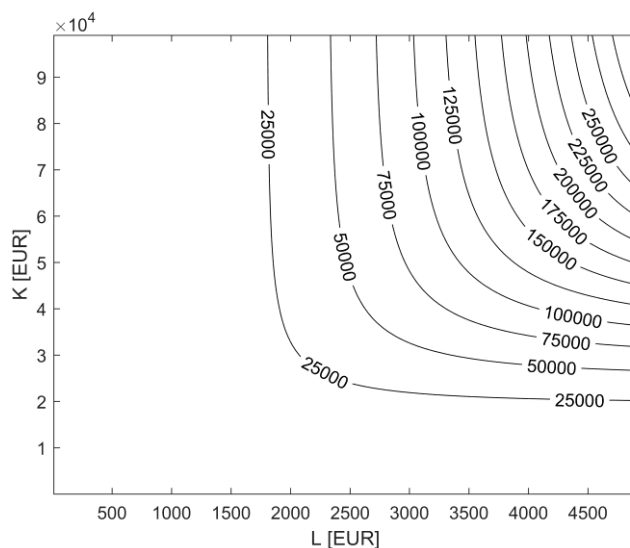
Obr. 10 Vykreslení izokvant Cobby-Douglasovy produkční funkce v lineárním a nelineárním tvaru pro Českou republiku

### CES produkční funkce

CES produkční funkce je složitou produkční funkcí, která vyžaduje pro odhad velké množství dat a zkušenosti. V případě České republiky jsme se během odhadu potýkali s problémy. Nakonec se nám pro CES produkční funkci České republiky podařilo získat slušné odhady v hodnotách  $\hat{\gamma} = 3,86975e-08$ ,  $\hat{\delta} = 0,998497$ ,  $\hat{\nu} = 2,75$  a  $\hat{\rho} = 2,71596$ . CES produkční funkci pro Českou republiku bychom mohli napsat ve tvaru:

$$Q = 0,00000000386(0,998K^{-2,716} + 0,002L^{-2,716})^{-1,015}.$$

Parametr  $\gamma$  je parametr účinnosti a vyjadřuje jakýsi ukazatel stavu techniky. V případě České republiky tento parametr nízký, což je v souladu s výsledky Cobby-Douglasovy produkční funkce, která měla parametr pro technologický pokrok nízký. Parametr distribuce  $\delta$  vyjadřuje podíl kapitálu a práce na výstupu. Parametr  $\nu$  určuje výnosy z rozsahu, které jsou rostoucí. Interpretace CES produkční funkce není tak jednoznačná jako v případě Cobby-Douglasovy produkční funkce. O nahraditelnosti práce a kapitálu a jejich vlivu na výsledný produkt nám více napoví vykreslení mapy izokvant. Na Obr. 11 můžeme vidět vykreslené izokvanty pro CES produkční funkci České republiky. Izokvanty této produkční funkce se k sobě přibližují a značí rostoucí výnosy z rozsahu. Podle tvaru izokvant můžeme soudit, že k výslednému produktu přispívá více kapitál než práce.



Obr. 11 Vykreslení izokvant CES produkční funkce pro Českou republiku

#### 4.1.2 Sato produkční funkce

Pro získání odhadu Sato produkční funkce, je nejdříve nutné definovat dané proměnné v programu Gretl a přidat do proměnných parametr času. Po zařazení těchto proměnných bude získán odhad pomocí metody nejmenších čtverců. Pro odhad parametrů této produkční funkce není využití metody nejmenších nelineárních čtverců nutné. Této metody by bylo využito v případě nepříznivých výsledků získaných touto metodou. V následujícím výstupu můžeme sledovat odhadnuté parametry pomocí programu Gretl.



Tab. 7 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Českou republiku pomocí metody OLS

Model 1				
Závisle proměnná	1/Y			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
$a_0$	2,163	0,048	45,0501	<0,0001
$b_0$	0,001	3,63E-05	24,2377	<0,0001
$a_1$	-0,001	0,003	-0,3919	0,6965
$b_1$	-0,703e-05	0,0747E-05	-9,4224	<0,0001
Koeficient determinace				0,99
Adjustovaný koeficient determinace				0,99
P-hodnota F testu				3,92E-96

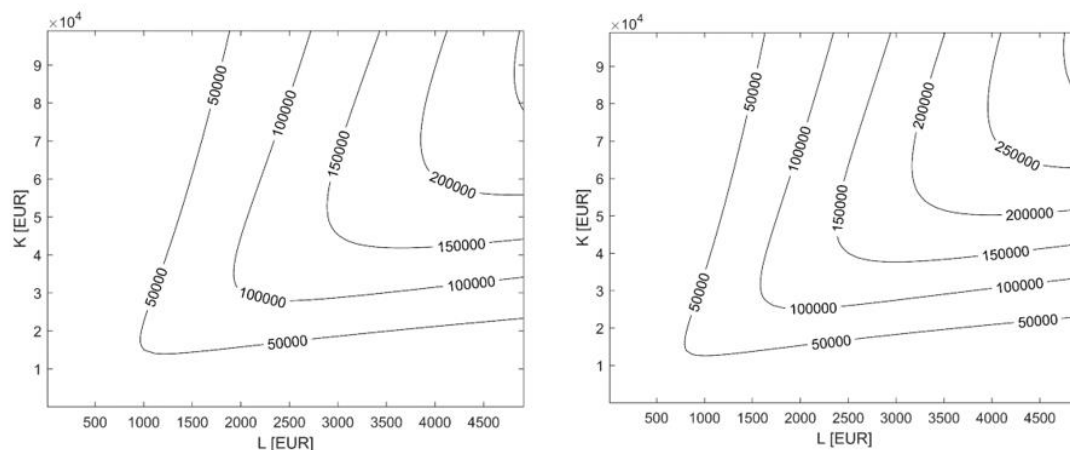
Koeficient determinace tohoto modelu je 99 %, což značí velmi silný model. Durbin-Watsonova statistika ukazuje, že se v našem modelu nevyskytuje problém kolinearit. I přesto, že je v modelu proměnná  $a_1$  statisticky nevýznamná, její vynechání, by mohlo znamenat následné zkreslení odhadů. Není snadné poznat proměnné, které je možno vynechat, protože práce a kapitál jsou jedinými souhrnnými výrobními faktory a technologický pokrok se podílí na změně parametrů  $a$  a  $b$  v průběhu času.

Po vykreslení izokvant jsme došli k závěru, že produkční funkce není takto správně odhadnuta a provedli jsme odhad jejích parametrů pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců. Hodnoty počátečních odhadů jsme stanovili na  $a = 1$  a  $b = 1$ . Výsledky tohoto odhadu můžeme sledovat v Tab. 8.

Tab. 8 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Českou republiku pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců

Model 1				
Závisle proměnná	Y			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
a	-305,805	523,209	-0,5845	0,56095
b	0,142	0,241	0,5898	0,55742
Koeficient determinace				-20,049
Adjustovaný koeficient determinace				-20,378

Po vykreslení izokvant pro výsledky tohoto odhadu jsme došli k závěru, že ani tento model není správný. Nesprávnost odhadu naznačuje už záporný koeficient determinace. V České republice došlo v čase ke změně parametrů a odhad nejspíše vyžaduje dát do modelu proměnnou čas. Vykreslení izokvant po přidání času dává větší smysl, i přesto že na nižších úrovních nesplňují podmínku konvexnosti. Zejména pro vyšší úrovně práce a kapitálu je znatelný posun k vyšší produktivitě.



Obr. 12 Vykreslení izokvant pro Sato produkční funkci České republiky pro rok 2005 (vlevo) a rok 2011 (vpravo)

## 4.2 Slovensko

Ekonomika Slovenska je v porovnání s ostatními vybranými zeměmi specifickou přijetím eura v roce 2009. Slovenská ekonomika prošla složitým vývojem, kdy po rozdělení Československa došlo k zaostávání země za ostatními ekonomikami v Evropě. Po několika letech došlo ke stabilizaci a následnému ekonomickému růstu v zemi, ale i přes různé ekonomické reformy a snahu o snižování nezaměstnanosti jsou v této zemi značné rozdíly v životní úrovni jednotlivých regionů.

V databázi OECD jsou k dispozici údaje pro všechny vstupní hodnoty od 2. čtvrtletí roku 1993, celkem máme k dispozici 89 pozorování. Rozsáhlý datový soubor nám pomůže zajistit kvalitní odhad parametrů. Pro seznámení a popis datového souboru využijeme opět popisné statistiky.

Tab. 9 Popisné charakteristiky vstupních hodnot pro Slovensko

	HDP	Práce	Kapitál
průměr	248570	4832	68682
medián	271360	4871,5	74041
minimum	155570	4677	46055
maximum	346300	5041	89283
směrodatná odchylka	55261	116,38	12273
variační koeficient	0,222	0,024	0,178
šikmost	-0,237	0,0237	-0,36
špičatost	-1,319	-1,436	-1,273

Porovnáním průměru a mediánu u hodnoty HDP vidíme, že jsou hodnoty značně odlišné, může se tedy stát, že náš odhad bude narušen nějakou extrémní hodnotou. To vidíme také při srovnání minimální a maximální hodnoty. Variační koeficient je přes 41 %, což značí poměrně variabilní soubor dat. Kladná šikmost ukazuje, že nejvíce hodnot leží vlevo od průměru. Záporná hodnota špičatosti indikuje stejně jako v případě České republiky na plošší rozdělení dat, takže by extrémní hodnoty neměly narušovat rozptyl. U vstupní proměnné práce vidíme, že hodnota průměru a mediánu je dosti podobná, což značí velkou podobnost datových pozorování napříč jednotlivými obdobími. Variační koeficient dosahuje opravdu nízké hodnoty, takže se data příliš neliší od jejich průměrné hodnoty. Šikmost poukazuje na hodnoty odlehle spíše vlevo od průměru a špičatost stejně jako u HDP na plošší rozdělení. U proměnné kapitálu se stejně jako u HDP setkáváme s velkým rozdílem mezi minimální a maximální hodnotou, což se také odráží v hodnotách průměru a mediánu. Hodnota variačního koeficientu poukazuje na podobnost dat. Záporný koeficient šikmosti naznačuje, že nejvíce hodnot leží napravo od průměru. Špičatost je stejná jako u ostatních proměnných.

#### 4.2.1 Cobbova-Douglasova produkční funkce

Stejně jako v případě České republiky, využijeme při odhadu parametrů metody nejmenších nelineárních čtverců a metody nejmenších čtverců. U metody nejmenších nelineárních čtverců nastavíme počáteční hodnoty opět na hodnotách  $A = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ . Výsledků bylo dosaženo po 338 iteracích. Odhady parametrů program Gretl vyhodnotil jako  $\hat{A} = 0,0004$ ,  $\hat{\alpha} = 0,87$  a  $\hat{\beta} = 1,22$ . Parametry  $\beta$  je podle posouzení p-hodnoty statisticky významný. Koeficient determinace tohoto modelu je 0,89 %. Pro ještě lepší zjištění odhadu jsme nastavili počáteční hodnoty parametrů blíže získanému odhadu jako  $A = 0,0004$ ,  $\alpha = 0,87$ ,  $\beta = 1,22$ . Pro získání odhadu muselo dojít k 21 iteracím, adjustovaný koeficient dosáhl obdobných hodnot jako při předchozím odhadu, nedošlo ani k výrazné změně informačních kritérií. Výsledné odhady programu Gretl můžeme sledovat v Tab. 10.

Tab. 10 Odhad Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců pro Slovensko

Model 1				
Závisle proměnná	HDP			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
A	0,00044	0,00196	0,2273	0,820
alfa	0,87582	0,71191	1,2302	0,222
beta	1,22822	0,12795	9,5992	<0,0001
Koeficient determinace				0,892
Adjustovaný koeficient determinace				0,891

Odhad parametrů je tedy stejný jako v předchozím kroku a Cobbovu-Douglasovu produkční funkci můžeme vyjádřit jako:

$$Y = 0,0004L^{0,87}K^{1,22}.$$

Pokud chceme využít metody nejmenších čtverců, musíme opět získat logaritmické hodnoty dat. Závislou proměnnou bude tedy logaritmus HDP a vysvětlujícími hodnotami logaritmy práce a kapitálu. Výsledky modelu můžeme sledovat v následující tabulce:

Tab. 11 Výstup programu Gretl pro Slovensko pomocí metody OLS

Model 1				
Závisle proměnná	l_HDP			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
const	-11,342	3,432	-3,31	0,0014
l_Employee	1,529	0,536	2,85	0,0054
l_Capital	1,086	0,821	13,24	1,85E-022
Koefficient determinace				0,898
Adjustovaný koeficient determinace				0,895
P-hodnota F testu				1,39E-49
P-hodnota LM testu				0,0067
P-hodnota Whitova testu				1,00E-05
P-hodnota testu normality reziduí				0,0023

Stejně jako v předchozím případě je potřeba, aby nám testy potvrdily, že model naplňuje předpoklady klasického regresního modelu. Pomocí porovnání p-hodnot a hladiny významnosti zjišťujeme, že model má statisticky významné parametry, neprojevuje se v modelu heteroskedasticita, model je správně specifikován, chybový člen má normální rozdělení a v modelu se nevyskytuje multikolinearita. Výslednou Cobbovu-Douglasovu produkční funkci můžeme v lineárním tvaru vyjádřit jako

$$Y = 0,00001L^{1,529}K^{1,086}.$$

Porovnáním výsledných odhadů v Tab. 12 vidíme, že odhadnuté hodnoty parametrů jsou odlišné. Tato podmínka je nepatrně porušena také v případě odhadů pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců. Vzhledem k tomu, že se oba parametry blíží číslu 1, dochází v dané zemi k zaměření na práci i kapitál přibližně stejně. Podle odhadů obou metod je opět vliv technologického pokroku zanedbatelný. Parametr  $\beta$  byl pomocí obou metod odhadnut přibližně stejně. Naopak parametr  $\alpha$  nabývá značně odlišných hodnot. Podle výsledků metody nelineárních čtverců je kladen

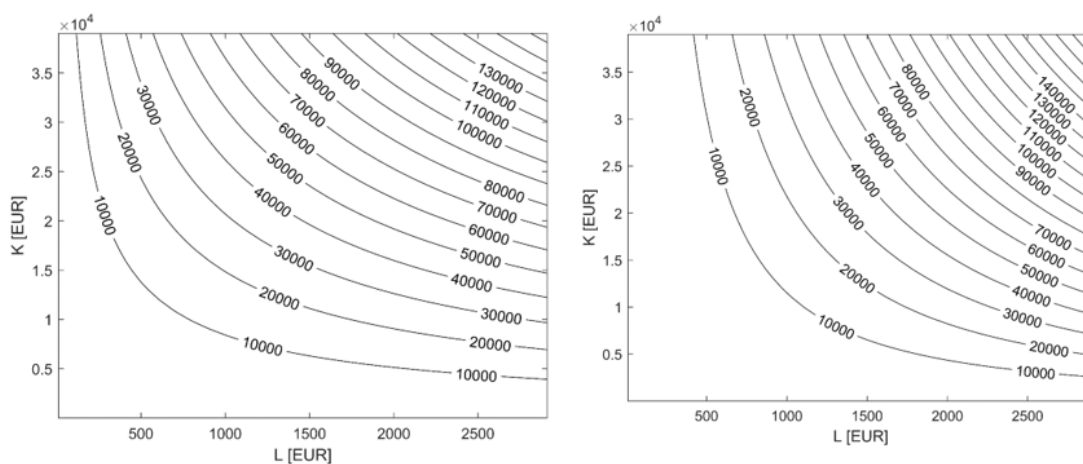
větší důraz na kapitál, kdežto pomocí metody nejmenších čtverců bylo zjištěn opak, kdy práce přispívá k tvorbě produkce více než kapitál.

Tab. 12 Porovnání výsledků rozdílných metod pro Slovensko

	Metoda nelineárních nejmenších čtverců	Metoda nejmenších čtverců
A	0,0004	0,00001
$\alpha$	0,87	1,53
$\beta$	1,22	1,09

Vzhledem k rozdílnosti získaných výsledků jsme zkusili stejný postup jako v případě České republiky. Získáním odhadu parametrů pomocí metody nejmenších čtverců a následným dosazením těchto hodnot jako počátečních hodnot metody nelineárních nejmenších čtverců jsme dospěli ke shodnému výsledku. K zlepšení odhadu tedy nedošlo.

Na Obr. 13 můžeme opět vidět vykreslení mapy izokvant pro Slovensko. Podle tvaru izokvant a jejich vlastností můžeme soudit o správnosti odhadu. U obou metod můžeme po součtu parametrů  $\alpha$  a  $\beta$  tvrdit, že Cobbova-Douglasova produkční funkce pro Slovensko vykazuje rostoucí výnosy z rozsahu. Tuto skutečnost nám potvrzují také přibližující se izokvanty v grafech.



Obr. 13 Vykreslení izokvant Cobbovy-Douglasovy produkční funkce v nelineárním a lineárním tvaru pro Slovensko

#### 4.2.2 CES produkční funkce

Odhad CES produkční funkce pro Slovensko je ve srovnání s odhadem pro Českou republiku úspěšnější. V Tab. 13 můžeme sledovat výsledky odhadu parametrů CES produkční funkce. Koeficient determinace značí, že je model významný.

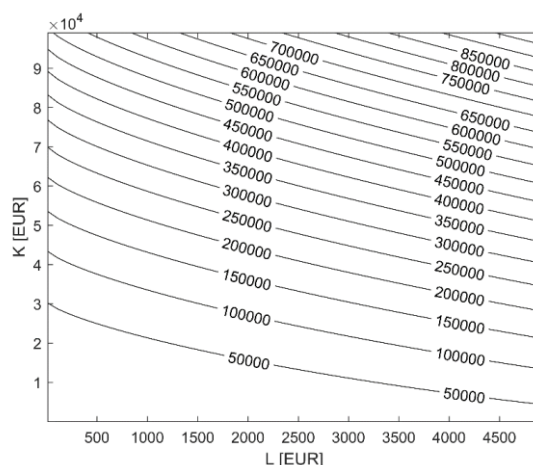
Tab. 13 Výstup programu Gretl CES produkční funkce pro Slovensko

Model 1				
Závisle proměnná	Y			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
gamma	0,00398	0,02243	0,1776	0,85949
delta	0,25152	0,54139	0,4646	0,64342
rho	-0,74407	1,50967	-0,4929	0,62338
v	1,92966	0,64816	2,9771	0,00379
Koeficient determinace				0,893
Adjustovaný koeficient determinace				0,889

Parametr  $\gamma$ , ukazatel stavu techniky značí nízkou úroveň technologického pokroku. Tento výsledek je v souladu s odhadem Cobbovy-Douglasovy produkční funkce. Podle parametru  $v$  jsou pro CES produkční funkci charakteristické rostoucí výnosy z rozsahu. Zapsáním do rovnice získáváme CES produkční funkci ve tvaru:

$$Q = 0,0039819(0,251K^{0,744} + 0,749L^{0,744})^{2,59}.$$

Vykreslením mapy izokvant zjišťujeme, že izokvanty splňují jejich charakteristické vlastnosti. Izokvanty vykazují rostoucí výnosy z rozsahu stejně, jako vyplývá z odhadnutých parametrů. Z mapy izokvant vyplývá také skutečnost, že pro výstup ekonomiky je rozhodující vliv kapitálu.



Obr. 14 Vykreslení izokvant CES produkční funkce pro Slovensko

### 4.2.3 Sato produkční funkce

Stejně jako v předchozím případě je potřeba data transformovat na časové řady a přidat dané parametry, které jsou potřebné k získání odhadů. Výstup programu Gretl pro Slovensko můžeme sledovat v následující tabulce.

Tab. 14 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Slovensko pomocí metody OLS

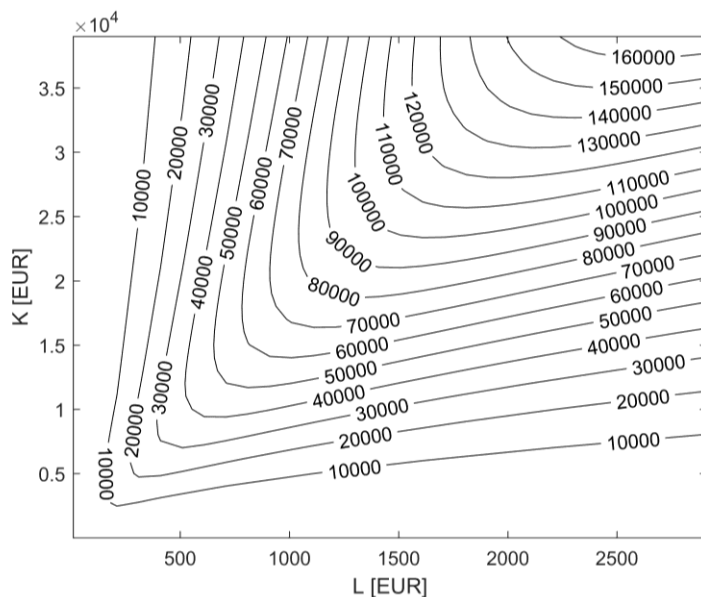
Model 1				
Závisle proměnná	1/Y			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
a <sub>0</sub>	1,09472	0,041237	26,5472	<0,0001
b <sub>0</sub>	-0,00665	0,002539	-2,6221	0,0104
a <sub>1</sub>	0,00347	0,000151	22,8847	<0,0001
b <sub>1</sub>	-3,276e-05	1,82E-06	-17,9654	<0,0001
Koeficient determinace				0,993
Adjustovaný koeficient determinace				0,992
P-hodnota F testu				9,99E-91

V odhadu pro Slovensko vyšly všechny odhadnuté parametry jako významné. Durbinova-Watsonova statistika nám potvrzuje, že se v modelu nesetkáváme s problémem korelace. Koeficient determinace je stejně, jako v předchozím případě vysoký. Odhad parametrů byl získán také pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců, kdy počáteční hodnoty obou parametrů byly nastaveny na hodnotu 1. Získané odhady můžeme sledovat v následující tabulce.

Tab. 15 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Slovensko pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců

Model 1				
Závisle proměnná	Y			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
a	2,2171	0,10157	21,8279	<0,00001
b	0,0004	5,38E-05	7,1245	<0,00001
Koeficient determinace		0,883		
Adjustovaný koeficient determinace		0,881		

Vykreslením izokvant Sato produkční funkce pro Slovensko vidíme, že došlo k porušení ekonomických předpokladů. Izokvanty nenabývají konvexního tvaru. Podle tohoto tvaru by docházelo ke stejné produkci pomocí dvou rozdílných kombinací vstupů. Stejná úroveň produkce by odpovídala nižšímu množství kombinace a zároveň i vyššímu množství kombinace vstupů. Pouze na nižších úrovních produkce izokvanty nenabývají konvexního tvaru, při vyšších výstupech už se izokvanty Sato produkční funkce jeví jako konvexní.



Obr. 15 Vykreslení izokvant Sato produkční funkce pro Slovensko



### 4.3 Maďarsko

Maďarsko se potýká s ekonomickými problémy již od svého vzniku v roce 1918, kdy došlo k odtržení od sousedních států. V době Velké hospodářské krize se potýkala s hyperinflací, která byla vyřešena měnovou reformou. Od 50. let se Maďarsko stalo socialistickou zemí s prvky tržního hospodářství, jež je známe pod termínem „*gulašový socialismus*“. V této době došlo ke značnému nárůstu životní úrovně země, která však byla vykoupena značnou zadlužeností státu. V 90. letech došlo opět k reformě a Maďarsko se stalo tržní ekonomikou. Později došlo ke snížení životní úrovně obyvatel, nárůstu nezaměstnanosti vysoké inflaci. V průběhu let docházelo k zlepšování ekonomické situace země, růstu HDP a snižování nezaměstnanosti. V roce 2004 se stalo Maďarsko součástí Evropské unie.

V roce 2008 bylo Maďarsko silně zasaženo hospodářskou krizí, která poukázala na slabou ekonomiku, vysokou zadluženost státu a politickou neschopnost realizovat reformy, které by pomohly Maďarsku ze složité situace. V tomto období se Maďarsko přiblížilo ke státnímu bankrotu. Došlo ke znehodnocování maďarského forintu a platební neschopnosti zadlužených obyvatel země. Po negativním vývoji v době krize došlo v roce 2014 k pozitivnímu vývoji a nárůstu výkonu maďarské ekonomiky.

Všechna vstupní data jsou v databázi OECD k dispozici od 1. čtvrtletí roku 1999, celkem máme tedy k dispozici 66 pozorování. Pro lepší představu, s jakými daty pracujeme, se opět podíváme na popisné charakteristiky daného datového souboru.

Tab. 16 Popisné charakteristiky vstupních dat pro Maďarsko

	HDP	Práce	Kapitál
průměr	187800	3873,5	41981
medián	192930	3867,5	43377
minimum	113600	3720	28634
maximum	256880	4197	55750
směrodatná odchylka	40237	103,61	6504
variační koeficient	0,214	0,026	0,154
šikmost	-0,281	1,102	-0,3406
špičatost	-1,056	1,5621	-0,503

Vzhledem k tomu, že je hodnota HDP v běžných cenách daného období, není na datovém souboru vývoj maďarské ekonomiky natolik patrný. Variační koeficient ukazuje sourodý soubor dat. Průměrná hodnota a hodnota mediánu je odlišná, což značí možné extrémní hodnoty. Záporná hodnota šikmosti poukazuje na levostranná data a záporná špičatost stejně jako u ostatních států na plošší rozdělení dat. Průměr a medián u práce je podobný, variační koeficient velmi nízký, data se tedy od průměru příliš neodklánějí. Jedná se o logické propojení dat, protože v průběhu čtvrtletí nedochází k extrémním výkyvům počtu zaměstnaných lidí. Mírná kladná šikmost

poukazuje na hodnoty ležící spíše vlevo od průměru a kladná špičatost říká, že nejvíce hodnot leží okolo její střední hodnoty. Kapitál je na tom s popisnými charakteristikami obdobně jako ostatní vstupní proměnné.

#### 4.3.1 Cobbova-Douglasova produkční funkce

Při metodě nejmenších nelineárních čtverců byly počáteční odhady opět nastaveny jako  $A = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ . Konvergence bylo dosaženo po 726 iteracích a odhadované parametry byly vyhodnoceny jako statisticky významné. Po přizpůsobení odhadnutým hodnotám a nastavení jejich počáteční hodnoty na  $A = 70$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\beta = 0,9$ . Odhadnuté parametry nabyly hodnot  $\hat{A} = 77$ ,  $\hat{\alpha} = -0,79$  a  $\hat{\beta} = 1,34$ . Konvergence bylo dosaženo po 33 iteracích, což je lepší výsledek než u původních hodnot. Výsledné odhady tohoto odhadu můžeme vidět v Tab. 17.

Tab. 17 Odhad Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců pro Maďarsko

Model 1				
Závisle proměnná	HDP			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
A	77,784	208,86	0,3724	0,7108
alfa	-0,790	0,35	-2,2491	0,028
beta	1,345	0,08	17,1279	<0,0001
Koeficient determinace		0,859581		
Adjustovaný koeficient determinace		0,855123		

Koeficient determinace je 85 %, což značí kvalitní odhad parametrů modelu. Cobbovu-Douglasovu produkční funkce lze zapsat jako

$$Y = 77L^{-0,79}K^{1,34}.$$

Z odhadu tedy vyplývá, že oproti předchozím zemím je úroveň technologického pokroku vyšší. Maďarsko je zaměřeno na kapitálové investice než na investice do práce. Vzhledem k záporné hodnotě odhadovaného parametru  $\alpha$  není volba Cobbovy-Douglasovy produkční funkce v nelineárním tvaru vhodná. Další výsledky získáme porovnáním s linearizovanou formou Cobbovy-Douglasovy produkční funkce, jejichž výstup vidíme v Tab. 18.

Tab. 18 Výstup programu Gretl pro Maďarsko

Model 1				
Závisle proměnná	l_HDP			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
const	5,79093	2,89579	2	0,0498
l_Employee	-1,01523	0,370556	-2,74	0,008
l_Capital	1,38398	0,0599535	23,08	1,93E-32
Koeficient determinace				0,900083
Adjustovaný koeficient determinace				0,896911
P-hodnota F testu				3,08E-32
P-hodnota LM testu				0,00915491
P-hodnota Whitova testu				0,00415459
P-hodnota testu normality reziduí				0,0235709

Pomocí testů a p-hodnot se ujišťujeme o správnosti modelu. Gretlem byly odhadnuté parametry vyhodnoceny jako statisticky významné i přesto, že popírají teorii Cobbovy-Douglasovy produkční funkce a parametr  $\alpha$  nabývá záporných hodnot. Z tohoto výsledku může vyplývat skutečnost, že Cobbova-Douglasova produkční funkce není pro tento odhad vhodná. Porovnání výsledků pomocí obou metod vidíme v následující tabulce.

Tab. 19 Porovnání výsledků rozdílných metod pro Maďarsko

	Metoda nelineárních nejmenších čtverců	Metoda nejmenších čtverců
$A$	77	327,013
$\alpha$	-0,79	-1,015
$\beta$	1,34	1,3839

Maďarskou je ukázkovým příkladem rozdílnosti výsledků. O špatném odhadu svědčí i velký rozdíl mezi úrovněmi technologie ve všech zemích, kdy doposud byly všechny hodnoty spíše okolo nuly. Výsledky obou metod se shodují v nevýznamnosti práce na podílu HDP, naopak kapitál je významnou hodnotou, která se podílí na tvorbě HDP. Cobbova-Douglasova produkční funkce je jednoduchá, ale ve většině případů nemají její výsledky vypovídající hodnotu. Nesprávné výsledky odhadů se také odrazily při vykreslení izokvant, kdy byly porušeny všechny jejich vlastnosti a nebyla možná jejich správná interpretace.

### 4.3.2 CES produkční funkce

Během odhadu CES produkční funkce jsme se potýkali s vážnými problémy a konečný věrohodný odhad se nám nepodařilo získat. CES produkční funkce pro Maďarsko nemůže být bohužel definována.

### 4.3.3 Sato produkční funkce

V případě Maďarska se postupovalo stejně jako v předchozích zemích. Výstup odhadu Sato produkční funkce pomocí metody nejmenších čtverců můžeme sledovat v následující Tab. 20. Při vykreslení izokvant pro Sato produkční funkci Maďarska jsme došli k závěru, že produkční funkce není správně odhadnuta, neboť izokvanty nenabývaly správného tvaru. Z těchto důvodů jsme pro Maďarsko vyzkoušeli také odhad parametrů pomocí nelineární metody nejmenších čtverců. Bohužel ani v tomto případě jsme nedošli k lépe interpretovatelnému závěru. Koeficient determinace tohoto modelu nabýval záporných hodnot, což značí nevhodnost modelu.

Tab. 20 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Maďarsko

Model 1				
Závisle proměnná	1/Y			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
a <sub>0</sub>	1,456	0,0322	0,03219	<0,0001
b <sub>0</sub>	-0,008	0,0019	0,00185	<0,0001
a <sub>1</sub>	0,001	5,01E-05	5,01E-05	<0,0001
b <sub>1</sub>	-7,11e-06	1,14E-06	1,14E-06	<0,0001
Koeficient determinace		0,99		
Adjustovaný koeficient determinace		0,99		
P-hodnota F testu		3,36E-94		

## 4.4 Řecko

Krise řecké ekonomiky nachází své kořeny již v době 80. let 20. století, kdy začalo Řecko využívat dotace Evropské unie a docházelo k nafukování peněz v ekonomice, aniž by docházelo k tlaku na zvyšování produktivity a efektivity práce v zemědělství, jež byly cílem dotací. Jak zmiňuje ve svém článku, *Jak Řecko přišlo k dluhům*, Pavel Kohout, došlo k tlaku na mzdy a náklady a Řecko přestalo být levnou ekonomikou.

Svou roli v ekonomické krizi Řecka hraje také politická situace, kdy došlo během 90. let k nárůstu státního dluhu na 112 % hrubého domácího produktu. Hospodářská politika Řecka nedokázala splnit maastrichtská kritéria, aby mohla vstoupit do eurozóny, proto byly statistiky země falšovány. Řecko se do eurozóny připojilo v roce 2001. Později došlo k odmítnutí statistických dat Eurostatem, který tato data

označil za nevěrohodná, což Řecko také v roce 2009 přiznalo. Světová finanční krize postihla v roce 2008 i Řecko. Dluhová krize této země se prohloubila a až do letošního roku bojuje Řecko s krizí za pomoci Mezinárodního měnového fondu a Evropské unie. Řecko musí přijmout určitá opatření, které jsou podmínkou financování této země. Během krize se zvažoval také odchod Řecka z eurozóny, tzv. grexit. Jedná se situaci, kdy by se tato země vrátila k původní měně, řecké drachmě a její následné devalvaci.

Databáze OECD disponuje s daty od prvního kvartálu roku 1990. Máme tedy k dispozici 102 pozorování. Při odhadech musíme ovšem brát ohled na situaci v Řecku a možnou nevěrohodnost dat. Až do roku 1994 jsou hodnoty HDP označeny OECD jako odhadované hodnoty, od roku 2011 jako hodnoty provizorní. V Tab. 21 můžeme sledovat popisné statistiky pro Řecko.

Tab. 21 Popisné charakteristiky vstupních dat pro Řecko

	HDP	Práce	Kapitál
průměr	238020	4043,6	49036
medián	249470	4019	46559
minimum	127270	3485	29340
maximum	348590	4615	93881
směrodatná odchylka	68142	353,51	16491
variační koeficient	0,286	0,0874	0,33631
šikmost	-0,037	0,1505	0,6946
špičatost	-1,417	-1,358	-0,574

V popisných charakteristikách pro HDP Řecka vidíme velký rozdíl mezi minimální a maximální hodnotou. Podle variačního koeficientu se jedná o data málo proměnlivá a ani šikmost a špičatost nevypovídá o žádných zvláštích. Větší odraz ekonomické situace v Řecku bychom viděli na grafu meziročního srovnání HDP nebo při vývoji HDP ve stálých cenách. Proměnná práce také nevykazuje v porovnání s hodnotami ostatních států žádné zvláštnosti a z charakteristik vyplývá, že se jedná o data sourodá bez význačných extrémů. Nejvíce proměnlivá je vstupní proměnná kapitálu, je zde také výrazný rozdíl mezi minimální a maximální hodnotou. V porovnání s jinými zeměmi opět nespátřujeme žádné extrémní výkyvy.

#### 4.4.1 Cobbova-Douglasova produkční funkce

Poslední zemí, na kterou bude Cobbova-Douglasova produkční funkce aplikována, je Řecko. Jak je již uvedeno výše, nejsou zveřejněné výsledky země příliš transparentní a obsahují také provizorní a dočasné hodnoty. Počáteční odhady parametrů byly stejně jako ve všech případech nastaveny u všech parametrů na čísle 1. Při nastavení tohoto počátečního odhadu bylo dosaženo konvergence po 680 iteracích. Hodnoty parametrů byly odhadnuty jako  $\hat{A} = 398$ ,  $\hat{\alpha} = 0,001$  a  $\hat{\beta} = 0,591$ . Koeficient

determinace tohoto modelu dosáhnul hodnoty 44 %. Pro dosažení lepších výsledků byly nastaveny počáteční hodnoty parametrů jako  $A = 398$ ,  $\alpha = 0,001$ ,  $\beta = 0,591$ . V tomto modelu již došlo k odhadu po 24 iteracích, hodnoty odhadnutých parametrů ani koeficientu determinace se nijak významně nezměnily, proto můžeme považovat tento odhad za konečný. Výstup programu Gretl je ke zhlédnutí v následující tabulce.

Tab. 22 Odhad Cobbovy-Douglasovy produkční funkce pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců pro Řecko

Model 1				
Závisle proměnná	HDP			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
A	399,214	1897,82	0,211	0,834
alfa	0,001	0,84	0,002	0,999
beta	0,592	0,22	2,701	0,008
Koeficient determinace				0,456
Adjustovaný koeficient determinace				0,445

Cobbova-Douglasova produkční funkce pro Řecko bude tedy v následujícím tvaru:

$$Y = 399L^{0,001}K^{0,59}$$

Za využití metody nejmenších čtverců získáváme z programu Gretl výstup, který se nachází v Tab. 23.

Tab. 23 Výstup programu Gretl pro Řecko pomocí metody OLS

Model 1				
Závisle proměnná	l_HDP			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
const	10,48	4,946	2,119	0,0366
l_Employee	-0,856	0,883	-0,969	0,3348
l_Capital	0,834	0,238	3,501	7,00E-04
Koeficient determinace				0,434
Adjustovaný koeficient determinace				0,423
P-hodnota F testu				5,72E-13
P-hodnota LM testu				5,09E-08
P-hodnota Whitova testu				3,58E-12
P-hodnota testu normality reziduí				4,53E-05

I přesto, že všechny testy dopadly uspokojivě a model splnil předpoklady klasického lineárního regresního modelu, nenabývají hodnoty parametrů očekávaných hodnot. Odhadnutá hodnota technologického pokroku je značně pochybná stejně jako v případě parametru  $\alpha$ . Koefficient determinace je nízký pro obě metody odhadu. Porovnání odhadnutých parametrů nalezneme v Tab. 24.

Tab. 24 Porovnání výsledků rozdílných metod pro Řecko

	Metoda nelineárních nejmenších čtverců	Metoda nejmenších čtverců
$A$	399	35596
$\alpha$	0,001	-0,85
$\beta$	0,59	0,83

I přes neuspokojivé výsledky odhadů Cobbovy-Douglasovy produkční funkce získaných pomocí obou metod, jsme se zaobírali možností vykreslit izokvanty pro získané produkční funkce. Jejich vykreslení nás však ujistilo v nevhodnosti a nesprávných výsledcích odhadů a izokvanty porušovaly své vlastnosti.

#### 4.4.2 CES produkční funkce

Stejně jako v případě Maďarska jsme se během odhadů parametrů CES produkční funkce potýkali s výraznými problémy, které nám znemožnili získat interpretovatelné odhady. Tyto nesprávné výsledky byly vzhledem k tomu, že data za daná čtvrtletí byla odhadována anebo označena jako provizorní hodnoty, vcelku očekávané.

#### 4.4.3 Sato produkční funkce

Odhad Sato produkční funkce pro Řecko nám přinesl obdobné výsledky jako u předchozích států. Všechny odhadnuté parametry jsou statisticky významné a Durbinův-Watsonův test nám potvrzuje, že se v modelu nevyskytuje korelace. Výsledky výstupu programu Gretl můžeme sledovat v Tab. 25. Vykreslením izokvant odhadnuté produkční funkce zjišťujeme, že odhadnuté parametry nejsou správné, neboť izokvanty nenabývají správného tvaru.

Tab. 25 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Řecko pomocí metody OLS

Model 1				
Závisle proměnná	1/Y			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
a <sub>0</sub>	1,0595	0,0517	20,481	<0,0001
b <sub>0</sub>	-0,0034	0,0008	-4,328	<0,0001
a <sub>1</sub>	0,0015	6,03E-05	25,595	<0,0001
b <sub>1</sub>	-1,18e-05	9,19E-07	-12,816	<0,0001
Koeficient determinace				0,998
Adjustovaný koeficient determinace				0,997
P-hodnota F testu				5,50E-127

Pro zajímavost, zda budou odhadnuté parametry lepší při využití metody nejmenších nelineárních čtverců, jsme získali odhady také tímto způsobem. Počáteční odhad jsme nastavili na hodnotu 1 pro oba parametry. Bohužel ani tato metoda nevedla k interpretovatelným výsledkům. Výstup odhadů pomocí metody nelineárních čtverců můžeme sledovat v Tab. 26.

Tab. 26 Výstup programu Gretl Sato produkční funkce pro Řecko pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců

Model 1				
Závisle proměnná	Y			
Vysvětlující proměnná	koeficient	směrodatná chyba	t-podíl	p-hodnota
a	1,19522	0,089756	13,3163	<0,00001
b	0,000644033	4,46E-05	14,4531	<0,00001
Koeficient determinace				0,381863
Adjustovaný koeficient determinace				0,375681



## 5 Diskuze a závěry

Teoretická část této diplomové práce byla zaměřena na poznatky o produkčních funkcích a jejich využití v oblasti makroekonomie. Její vývoj a funkce na agregátní úrovni byly v minulosti zpochybňovány díky problému agregace i teorie kapitálu. I přesto je základem mnoha teorií. Je základem ekonomického růstu, a na Cobbově-Douglasově produkční funkci a jejích vlastnostech je postaven Solowův model ekonomického růstu. Leontiefova produkční funkce je základem Harrodova-Domarova modelu ekonomického růstu. Produkční funkce jako znázornění celkového produktu je základem poptávky po práci v neoklasické teorii.

Problematika měření produktivity je zpracována také v rámci metodik výpočtů a získávání ukazatelů v rámci OECD. Na možnosti měření produktivity nahlíží z několika pohledů a jejich kombinacemi vzniká 7 možností, jak k měření produktivity přistupovat. Složitým vícefaktorovým modelem měření produktivity je metoda KLEMS. Zkratka KLEMS v sobě skrývá kombinaci vstupů práce, kapitálu, energie, materiálu a služeb. Tato možnost měření produktivity je komplexním přístupem s významným požadavkem na vstupní data, jejich propojení s jednotlivými odvětvími. Databáze s těmito daty jsou významným zdrojem výstupů, indikátorů růstu produktivity a zjišťování jejich trendů.

Dalším z významných způsobů měření produktivity je souhrnná produktivita faktorů s následnou možností měření extenzivního a intenzivního ekonomického růstu. K vyjádření souhrnné produktivity faktorů a následných indexů je využíváno Cobbovy-Douglasovy produkční funkce. V rámci tohoto způsobu měření produktivity se můžeme setkat také s alternativami, které zohledňují například kvalitu vstupů.

Vstup práce je považován za nejdůležitější vstup a její vyjádření se různí. Faktor práce může být vyjádřen jako celková zaměstnanost, počet odpracovaných hodin, nebo služby práce. Alternativou tohoto ukazatele je zohlednění kvality tohoto vstupu získáváme alternativní vyjádření. Organizace OECD přistupuje k těmto ukazatelům různě a zpracovává je ve dvou různých databázích, ve kterých využívá stejné zdroje. Základní problematikou měření kapitálu je jeho ocenění a konzistence s ostatními faktory. V odborných pracích se využívá ocenění kapitálu v běžných reprodukčních cenách s využitím metody inventarizace.

Potenciální produkt a produkční mezera hrají významnou roli při nastavení stabilizační politiky země. Jsou to právě produkční funkce, které jsou využívány k odhadu potenciálního produktu. Problematika měření potenciálního produktu a růstu je složitá a často využívá statistických nebo ekonometrických analýz. V rámci zajištění transparentnosti metodiky a lepší srovnatelnosti jsou dány podmínky, za kterých je potenciální produkt vypočítáván.

V rámci měření produktivity země se setkáváme také s tradičními ukazateli, jako jsou hrubý a čistý domácí produkt, hrubý a čistý národní produkt. V rámci vzniku mezinárodní komise pro měření ekonomického výkonu je pozornost zaměřena

řována především na důchodové ukazatele s cílem využít poznatků o vývoji ekonomik a rozšiřování těchto ukazatelů o indikátory životní úrovně a sociálních podmínek. V rámci zajištění mezigenerační rovnosti množství zdrojů je alternativním indikátorem tzv. environmentální domácí produkt. Srovnání jednotlivých ekonomik není vzhledem k rozdílným přístupům environmentálního účetnictví snadné.

Praktická část této práce byla věnována odhadům parametrů vybraných produkčních funkcí pro Českou republiku, Slovensko, Maďarsko a Řecko. Pro realizaci odhadů bylo využito jednoduché Cobbovy-Douglasovy produkční funkce, složitější CES produkční funkce a Sato produkční funkce. V Tab. 27 jsou shrnuty všechny odhady, které byly provedeny, zda byly úspěšné a v souladu s podmínkami.

Tab. 27 Shrnutí provedených odhadů v programu Gretl

	Česká republika		Slovensko		Maďarsko		Řecko	
	odhad	podm.	odhad	podm.	odhad	podm.	odhad	podm.
CD produkční funkce	ano	ano/ne	ano	ano/ne	ano	ne	ano	ne
CES produkční funkce	ano	ano	ano	ano	ne	ne	ne	ne
Sato produkční funkce	ano	ano	ano	ano	ano	ne	ano	ne

Nejúspěšnější v odhadech jsme byli pro Českou republiku a Slovensko, kde se nám podařilo odhadnout všechny vybrané produkční funkce. V případě Cobbovy-Douglasovy produkční funkce se nám nepodařilo v odhadech pro Českou republiku a Slovensko splnit podmínky pro  $0 < \alpha < 1$  a  $0 < \beta < 1$ . Názory autorů se na problematiku této podmínky liší a někteří ji uvádějí jen ve tvaru  $\alpha > 0$  a  $\beta > 0$ . Naopak pro složitější CES produkční funkci splnily odhady parametrů dané podmínky. Sato produkční funkci se podařilo odhadnout pro každá stát, ale jen pro Českou republiku a Slovensko se nám podařilo vykreslit mapy izokvant.

Obdobnému tématu se ve své práci věnuje i Černý (2011), který využívá lineárizované formy Cobbovy-Douglasovy produkční funkce a vzájemně srovnává Českou republiku, Slovensko a Polsko. V praktické části práce jsme se věnovali odhadu Cobbovy-Douglasovy produkční funkce jak v nelineární, tak v lineární podobě. Srovnání výsledků pro všechny státy můžeme sledovat v Tab. 28.

Tab. 28 Výsledné hodnoty odhadů Cobbovy-Douglasovy produkční funkce

	$A$	$\alpha$	$\beta$	Metoda
Česká republika	0,000006	1,65	0,99	Metoda nelineárních nejmenších čtverců
	0,000009	1,45	1,04	Metoda nejmenších čtverců
Slovensko	0,0004	0,87	1,22	Metoda nelineárních nejmenších čtverců
	0,00001	1,53	1,09	Metoda nejmenších čtverců
Maďarsko	77	-0,79	1,34	Metoda nelineárních nejmenších čtverců
	327,01	-1,02	1,38	Metoda nejmenších čtverců
Řecko	399	0,001	0,59	Metoda nelineárních nejmenších čtverců
	35596	-0,85	0,83	Metoda nejmenších čtverců

Porovnáním s výsledky ve vědeckém článku Černého (2011) je patrné, že výsledky odhadu parametrů pro Českou republiku nejsou příliš rozdílné. Odhady v práci Černého (2011) neplní striktní podmínky pro  $0 < \alpha < 1$  a  $0 < \beta < 1$ . Stejně jako u Černého není podle odhadů příliš rozvinutý technologický pokrok. Pro Českou republiku jsou patrné rostoucí výnosy z rozsahu, jelikož součet těchto parametrů je větší než 1 u obou zvolených metod. Na tvorbě HDP České republiky se více podílí pracovní síly než na odvětví využívající kapitál. Při vykreslení izokvant pro Českou republiku se nám podařilo ukázat izokvanty splňující jejich požadované vlastnosti.

Naopak je tomu na Slovensku, kde se výsledky s prací Černého rozcházejí. Černý ve své práci dochází ke stejným závěrům jako v případě České republiky. Výsledky našich odhadů jsou při porovnání obou metod odlišné. Metoda lineárních nejmenších čtverců nám poukázala na významný vliv kapitálu na produkci ekonomiky. Naopak tomu bylo u výsledků metody nejmenších čtverců, kdy k produkci ekonomiky více přispívá pracovní síla. U obou metod získání odhadů produkčních funkcí jsou charakteristické rostoucí výnosy z rozsahu, které se nám také potvrdily při vykreslení izokvant. Stejně jako v případě České republiky je vykreslení izokvant pro Slovensko učebnicovým příkladem.

Pro Maďarsko a Řecko nemají výsledky vypovídající hodnotu, jelikož odhadnuté parametry vycházejí záporně, jejich interpretace tedy pozbývá na významu. Již z dosažených odhadů parametrů pro úroveň technologie je patrné, že odhad těchto parametrů byl neúspěšný. Tyto nepříznivé výsledky odhadů Cobbovy-Douglasovy produkční funkce se odrazily také při snaze o vykreslení izokvant, kdy jejich vykreslení nedává smysl. Černý se těmito zeměmi ve své práci nezabývá, není proto možné tyto výsledky porovnat.

Další produkční funkcí, na kterou jsme se v praktické části této práce zaměřili, byla CES produkční funkce. Jedná se o složitější produkční funkci, kde pomocí vhodného nastavení parametrů můžeme získat méně složité produkční funkce. Odhad této produkční funkce bylo nutné provést pomocí metody nejmenších nelineárních čtverců, protože se jedná o produkční funkci nelineární v parametrech a nelze získat její linearizovanou formu. Byly odhadovány 4 parametry. Získání těchto odhadů

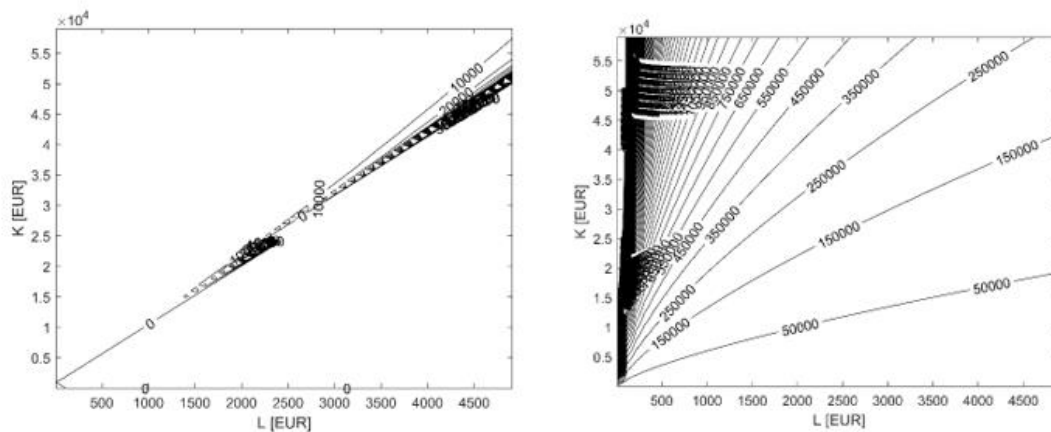
bylo složité, po nastavení počátečních odhadů většinou nedošlo ke konvergenci a získání výsledných hodnot parametrů. Odhady se podařilo získat pouze pro případ České republiky a Slovenska. CES produkční funkce nám stejně jako Cobbova-Douglasova produkční funkce potvrdila nízký parametr pro technologický pokrok. Výsledky obou produkčních funkcí se také shodují na rostoucích výnosech z rozsahu. Vykreslením izokvant CES produkční funkce pro Českou republiku jsme se tak přesvědčili o správnosti odhadu. Vykreslením izokvant pro Slovensko zjišťujeme, že kapitál je rozhodujícím faktorem, který se podílí na tvorbě produktu. Tento výsledek je v souladu také s Cobbovou-Douglasovou produkční funkcí. S velmi nepříznivými výsledky CES produkční funkce jsme se potýkali během odhadů pro Maďarsko a Řecko, kdy jsme se i přes snahu o správné nastavení parametrů pomocí fixace některých parametrů nedobrali příznivému výsledku, a proto nebylo možné CES produkční funkce pro tyto země získat. CES produkční funkce pro tyto dva státy získat nelze.

Poslední z odhadovaných produkčních funkcí pro dané státy byla Sato produkční funkce. Jak již bylo zmíněno výše, cílem článku *New measures of factor productivity in Australia: a Sato approach* bylo ukázat, jak se v průběhu posledních desetiletí měnila kombinace práce a kapitálu, která působí na produkci reálného domácího produktu. Této produkční funkce bylo využito také v praktické části této práce, kde byly odhadovány parametry  $a$  a  $b$ . Tyto parametry neslouží k interpretaci příspěvku práce a kapitálu na HDP, proto není nutné rozebírat výsledky těchto odhadů. Výsledky odhadů těchto parametrů jsou přínosné pro zobrazení izokvant. Pro státy Česká republika a Slovensko se podařilo izokvanty vykreslit po přidání proměnné času. V obou případech došlo k porušení charakteristických vlastností izokvant. Pro nižší úrovně produkce nenabývají izokvanty konvexního tvaru a dochází k porušení ekonomických předpokladů. Při zhlédnutí vykreslených izokvant by se dalo uvažovat o možném rozhodování a správné interpretaci při vyšších úrovních produkce, kde izokvanty začínají nabývat konvexního tvaru. Na Obr. 12 v podkapitole 4.1.3 je možné sledovat rozdíly ve vývoji kombinace práce a kapitálu v roce 2005 a v roce 2011. Z těchto grafů je viditelný klesající podíl kapitálu na tvorbě produktu.

Odhady a následné vykreslení izokvant Sato produkční funkce pro Maďarsko a Řecko nebyly v této práci úspěšné. Stejně jako v případě CES produkční funkce se nepodařilo parametry správně odhadnout. Data těchto států nebyla vhodná pro zjištění typických rysů produkčních funkcí a podílů vstupů na výstupu. Pro Řecko nebyly tyto výsledné natolik překvapivé, vzhledem k upozornění, že se v databázi OECD vyskytují pro mnoho čtvrtletí provizorní nebo odhadnutá data.

Během tvorby praktické části jsme se potýkali s problémy v případě CES produkční funkce a Sato produkční funkce pro Řecko a Maďarsko. CES produkční funkce pro tyto státy se nepodařilo odhadnout, nebylo tedy ani možné vykreslit mapy izokvant. V praktické části jsme se také setkali se situací, kdy produkční funkce odhadnout šly, avšak byly porušeny jejich podmínky, a proto nemají tyto

funkce vypovídající hodnotu. Příklad odhadu parametrů bez smysluplné ekonomické interpretace a následného vykreslení izokvant funkce s parametry mimo povolený rozsah můžeme sledovat na Obr. 16.



Obr. 16 Ukázka nesprávného vykreslení izokvant na základě odhadnutých parametrů Sato produkční funkce pro Maďarsko (vlevo) a Cobby-Douglasovy produkční funkce pro Maďarsko (vpravo)

## 6 Literatura

### Knihy a vědecké práce

- BRIERLY, Allen Bronson a Richard C. FEIOCK. Accounting for State Economic Growth: a production Function Approach. *Political Research Quarterly*. University of Utah, 1993, 46(3): 14.
- BUCHTA, Miroslav. *Mikroekonomie II*. 2. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2006, 246 s. ISBN 80-7194-888-8.
- ČERNÝ, Josef. Comparison of Cobb-Douglas Production Functions of the Chosen Countries by Using Econometric Model. *Comparison of Cobb-Douglas Production Functions of the Chosen Countries by Using Econometric Model*. 2011.
- D'AURIA Francesca [a kol.]. *The production function methodology for calculating potential growth rates and output gaps*. Brussels: European Commission, Directorate-General for Economic and Financial Affairs, 2010. ISBN 9789279149061.
- DUBSKÁ, Ivana. *Faktory ekonomického růstu*. Brno, 2007. Diplomová práce. Mendelova lesnická a zemědělská univerzita v Brně.
- FELIPE, J. a J.S.L. MCCOMBIE. The Aggregate Production Function: 'Not Even Wrong'. *Review of Political Economy* [online]. 2014, 26(1): 60-84 [cit. 2015-10-07]. DOI: 10.1080/09538259.2013.874192.
- FISHER, M. F. The Existence of Aggregate Production Functions, *Econometrica* Vol. 37, No. 4 (Oct., 1969) , pp. 553-577, Published by: The Econometric Society, Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/1910434>
- FREEMAN, Rebecca. *Labour Productivity Indicators: Comparison Of Two Oecd Databases Productivity Differentials & The Balassa-Samuelson Effect* [online]. July, 2008, 76 s. [cit. 2015-09-27].
- GREENE, W H. *Econometric analysis*. 7. vyd. Boston [u.a.]: Pearson, 2012. 1238 s. ISBN 978-0-273-75356-8.
- HA, Arnold C. (1998), "A Vision of the Growth Process", *American Economic Review*, March.
- HAHN, F. H. a R.C.O MATTHEWS. The Theory of Economic Growth: a Survey. *The Economic Journal*. Royal Economic Society, 1964, 296(74).
- HÁJEK, Mojmír a Jiří MIHOLA. Analýza vlivu souhrnné produktivity faktorů na ekonomický růst České republiky. *Analýza vlivu souhrnné produktivity faktorů na ekonomický růst České republiky*. Politická ekonomie. 2009, (6).
- HATAŠ, Tomáš. *Alternativní ukazatele měření ekonomické výkonnosti blahobytu*. Praha, 2014. Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze.
- HLOUŠEK, Miroslav a Jiří POLANSKÝ. Produkční přístup k odhadu potenciálního produktu - aplikace pro ČR. *Národohospodářský obzor: National economic horizons*. Brno: Ekonomicko-správní fakulta Masarykovy univerzity, 2007, (4). ISSN 1213-2446.

- HOLMAN, Robert. *Ekonomie*. 4. aktualiz. vyd. Praha: C. H. Beck, 2005, xxii, 709 s. ISBN 80-7179-891-6.
- HOLMAN, Robert. *Makroekonomie: středně pokročilý kurz*. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck, 2004, xiv, 424 s. Beckovy ekonomické učebnice. ISBN 80-7179-764-2.
- HOLMAN, Robert. *Mikroekonomie: středně pokročilý kurz*. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck, 2002, xviii, 591 s. Beckovy ekonomické učebnice. ISBN 80-7179-737-5.
- HOŘEJŠÍ, Bronislava. *Mikroekonomie*. 4., rozš. vyd. Praha: Management Press, 2006, 573 s. ISBN 80-7261-150-x.
- HUMPREY, T.M. (1997). "Algebraic Production Functions and their Uses before Cobb-Douglas", Federal Reserve Bank of Richmond *Economic Quarterly*, 83(1), pp. 51-83. Available at <http://ideas.repec.org/a/fip/fedreq/y1997iwinp51-83.html>
- CHEN, Edward K.Y. Teaching and Learning Development Economics: Retrospect and Prospect. *The Journal of Economic Education*. Taylor & Francis, Ltd., 2003, 36(3): 13.
- JUREČKA, Václav. *Makroekonomie*. 1. vyd. Praha: Grada, 2010, 332 s. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-3258-9.
- KAJSÍK, . *Modelování Cobb-Douglasových produkčních funkcí s využitím Maple*. Brno, 2011. Dostupné také z: [http://is.muni.cz/th/256129/fi\\_b/bp.pdf](http://is.muni.cz/th/256129/fi_b/bp.pdf). Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Prof. RNDr. Jiří Hřebíček, CSc.
- KLOUDOVÁ, Dana a Petr MALEČEK. Předpověď inflace pomocí produkční mezery: případ pro Českou republiku, Slovensko, Maďarsko a Polsko. VŠE, 2013, : 17.
- KMENTA, Jan. *Elements of econometrics*. 2ème éd. New York: Macmillan, 1990. ISBN 00-294-6252-5.
- MACÁKOVÁ, Libuše. *Mikroekonomie: základní kurs*. 11. vyd. Slaný: Melandrium, 2010, 275 s. ISBN 978-80-86175-70-6. Management Press.
- MAKIN, J. Anthony a Sam STRONG. New measures of factor productivity in Australia: a Sato approach. *Applied Economics*. Australia, 2013, 45: 11. ISSN 0003-6846.
- MANKIW, N. *Macroeconomics*. 7th ed. New York: Worth Publishers, c2010, xxxiv, 598 s. ISBN 9781429238120.
- MISHRA, Sudhanshu K., a Brief History of Production Functions (October 9, 2007). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1020577> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1020577>
- O'MAHONY, Mary a Marcel P. TIMMER. Output, Input And Productivity Measures At The Industry Level: The Eu Klems Database\*. *The Economic Journal*. Blackwell Publishing. 2009, (119).
- OECD (2013), *OECD Compendium of Productivity Indicators 2013*, OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/pdtvy-2013-en>
- R. K. MANDAL. *Microeconomic theory*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors Pvt Ltd (1 Feb 2008), 2007. ISBN 978-8126908127.

- RITSCHELOVÁ, I. a. (2000). *Environmentální a ekonomické účetnictví* (1. vydání. vyd.). Praha: Univerzita Karlova - Centrum pro otázky životního prostředí.
- ROSS, Chris. Aggregate Measures of Income and Output in Canada and the United States: Implications for Productivity and Living Standards. *International Productivity Monitor*. 2010, (19).
- SAMUELSON, Paul Anthony a William D NORDHAUS. *Ekonomie: 19. vydání*. Vyd. 1. Praha: NS Svoboda, 2013, xxiv, 715 s., [4] s. Obr. příl. ISBN 978-80-205-0629-0.
- SCHILLER, Bradley R. *Mikroekonomie dnes*. Vyd. 1. Brno: Computer Press, 2004, xviii, 404 s. Business books (Computer Press). ISBN 80-251-0109-6.
- SIXTA, J., K. VLTAVSKÁ a J. ZBRANEK. Souhrnná produktivita faktorů založená na službách práce a kapitálu. VŠE v Praze 2011
- SOLOW, R.M. (1957) "Technical Change and the Aggregate Production Function", *The Review of Economics and Statistics*, 39 (3), pp. 312-320.
- SOUKUP, J. a. (2010). *Makroekonomie* (2. aktualizované vydání. vyd.). Praha: SPĚVÁČEK, V. Makroekonomická analýza. Vyd. 2. Praha: Vysoká škola ekonomie a managementu, 2010.
- VARADZIN, F. *Ekonomický rozvoj a růst*. Praha: Professional Publishing, 2004. 329 s. ISBN 80-86419-61-4
- VINTROVÁ, Růžena. Interpretační omezení HDP a alternativní ukazatele. *Centrum výzkumu konkurenční schopnosti české ekonomiky*. 2010, (17): 43.
- VLTAVSKÁ, Kristýna a Jakub FISCHER. Možnosti měření vlivu lidského kapitálu na souhrnnou produktivitu faktorů: český a slovenský příklad. *Možnosti měření vlivu lidského kapitálu na souhrnnou produktivitu faktorů: český a slovenský příklad*. 2009.
- WHITAKER, J.K. (1975) *The Early Economic Writings of Alfred Marshall, 1867–1890*, Vol. 2. (ed). The Free Press, New York.
- Measuring Productivity: Measurement Of Aggregate And Industry-Level Productivity Growth. Francie: OECD manuals, 2001.

### Internetové zdroje

- Maďarská ekonomika roste rychleji než zbytek Evropy. Investujeme.cz [online]. Praha: Fincentrum a. s., 2008, 2015 [cit. 2015-12-19]. Dostupné z: <http://www.investujeme.cz/aktualne-cz/maarska-ekonomika-roste-rychleji-nez-zbytek-evropy/>
- Maďarsko: Obchodní a ekonomická spolupráce s ČR. BusinessInfo [online]. Praha: Czech Trade, 1997, 2015 [cit. 2015-12-19]. Dostupné z: <http://www.businessinfo.cz/cs/clanky/maarsko-obchodni-a-ekonomicka-spoluprace-s-cr-18568.html>



- Řecko a dluhová krize. Idnes.cz [online]. Praha: MAFRA, a.s., 1999, 2015 [cit. 2015-12-19]. Dostupné z: <http://ekonomika.idnes.cz/recko-a-dluhova-krize-056-ekonomika.aspx?klic=38042>
- Vývoj ekonomiky České republiky za roky 2013, 2014, 1. čtvrtletí 2015. Český statistický úřad [online]. Praha: Český statistický úřad, 2015 [cit. 2015-12-19]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/katalog-produktu>
- Základní informace o OECD. Stálá mise České republiky při OECD v Paříži [online]. Praha, 2015. Dostupné z: [http://www.mzv.cz/oecd.paris/cz/zakladni\\_informace\\_o\\_oecd/index.html](http://www.mzv.cz/oecd.paris/cz/zakladni_informace_o_oecd/index.html)
- KOHOUT, Pavel. Jak Řecko k dluhům přišlo. Lidové noviny [online]. 2015, 2015-11-17, 2015: 1. Dostupné z: <http://www.penize.cz/svetova-ekonomika/299265-jak-recko-prislo-k-dluhum>
- OECD Statistics [online]. Organisation for Economic Co-operation and Development, 2015. Dostupné z: <http://stats.oecd.org/>

# **Přílohy**

## A Vstupy

Tab. 29 Vstupní data pro Českou republiku

<i>rok</i>	<i>HDP</i>	<i>Práce</i>	<i>Kapitál</i>
Q1-1999	155566,9361	4743	46714,5558
Q2-1999	156984,2414	4719	46067,06281
Q3-1999	158740,3149	4698	46055,39602
Q4-1999	160076,1675	4698	46544,90035
Q1-2000	162212,8362	4680	49303,95329
Q2-2000	165552,9256	4678	50106,23567
Q3-2000	169020,181	4685	51694,34628
Q4-2000	171947,546	4684	54328,04818
Q1-2001	176120,3288	4695	56125,99637
Q2-2001	179948,1959	4681	54973,34488
Q3-2001	181981,8568	4681	55144,99833
Q4-2001	183621,1559	4685	54571,3743
Q1-2002	183955,0081	4705	56262,92806
Q2-2002	184957,9334	4732	54059,52272
Q3-2002	187535,8571	4741	53640,34551
Q4-2002	190728,8082	4740	55143,31763
Q1-2003	195024,8722	4728	55814,7348
Q2-2003	197901,4537	4707	56782,51231
Q3-2003	201909,7751	4689	58195,69068
Q4-2003	204720,6972	4680	59817,37025
Q1-2004	208746,5324	4677	58283,42577
Q2-2004	211476,0015	4685	62119,2068
Q3-2004	215408,0556	4694	61192,13398
Q4-2004	219099,5054	4710	58631,56518
Q1-2005	222317,1585	4729	61211,09481
Q2-2005	225017,809	4748	65630,50879
Q3-2005	228951,5868	4785	65748,82825
Q4-2005	233335,2392	4792	64520,85809
Q1-2006	240591,5812	4809	67222,61877
Q2-2006	247441,4309	4824	69876,41255
Q3-2006	253407,6598	4832	69940,98384
Q4-2006	259630,2109	4850	73845,0612
Q1-2007	268950,4672	4886	82154,07282
Q2-2007	273770,3914	4913	81599,25056
Q3-2007	277558,4826	4934	80248,95408

Q4-2007	279856,1625	4950	81367,98936
Q1-2008	277826,7104	4984	87858,87647
Q2-2008	280222,1022	5006	82099,2888
Q3-2008	283563,0622	5006	78726,87016
Q4-2008	283696,3936	5006	77589,04936
Q1-2009	280526,2841	4978	78346,04307
Q2-2009	281937,9258	4943	76545,59004
Q3-2009	283872,2185	4912	76402,85763
Q4-2009	283207,1522	4904	75270,58929
Q1-2010	279945,4656	4874	73735,67692
Q2-2010	281486,1646	4879	74237,75928
Q3-2010	283363,972	4890	78767,12923
Q4-2010	287784,8862	4893	78301,77773
Q1-2011	294535,5018	4878	77750,19356
Q2-2011	299938,6405	4875	79524,72315
Q3-2011	302280,4733	4876	80693,23742
Q4-2011	303425,3102	4869	80724,36435
Q1-2012	301976,9442	4874	78987,345
Q2-2012	301163,4834	4882	79786,23912
Q3-2012	300229,977	4902	78558,5119
Q4-2012	300480,0549	4904	76079,11439
Q1-2013	299274,4224	4920	75647,30234
Q2-2013	302104,3737	4945	75576,88515
Q3-2013	304999,8327	4938	76761,07003
Q4-2013	311366,4948	4947	78054,94736
Q1-2014	312731,8235	4957	77822,70551
Q2-2014	317501,1733	4956	79154,35926
Q3-2014	322197,046	4979	80612,14596
Q4-2014	326175,7787	5004	82156,40147
Q1-2015	337633,4853	5022	83046,42411
Q2-2015	346301,4165	5041	89282,64243

Tab. 30 Vstupní data pro Maďarsko

<i>rok</i>	<i>HDP</i>	<i>Práce</i>	<i>Kapitál</i>
Q1-1999	113058,8934	3773	28634,02249
Q2-1999	114130,2047	3790	29006,31948
Q3-1999	115990,0403	3794	29356,38151
Q4-1999	117796,6363	3809	28965,71859
Q1-2000	119253,2322	3807	30355,95509
Q2-2000	121812,6196	3812	31057,92346

Q3-2000	124707,8414	3836	31193,3777
Q4-2000	128955,7429	3863	32955,26091
Q1-2001	133695,6598	3889	33326,2961
Q2-2001	138210,708	3864	33724,99667
Q3-2001	141813,6992	3871	34544,23903
Q4-2001	144820,786	3850	36174,68582
Q1-2002	149147,5635	3869	36777,95417
Q2-2002	151082,914	3871	37464,275
Q3-2002	153410,1476	3866	37433,92722
Q4-2002	155323,9869	3876	37805,70558
Q1-2003	156619,6798	3890	36116,73239
Q2-2003	157868,1185	3927	37395,4994
Q3-2003	159514,9995	3931	37684,78211
Q4-2003	161120,4165	3939	38426,70344
Q1-2004	163250,5758	3924	39371,19224
Q2-2004	165335,5772	3896	38993,34732
Q3-2004	166850,8818	3885	40522,00805
Q4-2004	167783,4513	3897	40652,61089
Q1-2005	169507,516	3904	40179,18895
Q2-2005	172373,623	3893	41854,20973
Q3-2005	175088,8675	3905	42019,14426
Q4-2005	178805,8024	3904	41883,46975
Q1-2006	183376,5694	3929	43848,43203
Q2-2006	187460,7436	3937	44322,59477
Q3-2006	190353,1926	3916	44757,22563
Q4-2006	192238,7877	3930	43737,05617
Q1-2007	192511,555	3930	45969,92742
Q2-2007	193354,6811	3915	45668,87534
Q3-2007	195828,644	3896	45415,4845
Q4-2007	198769,9286	3866	46535,86643
Q1-2008	203399,5513	3856	46553,76444
Q2-2008	208608,5559	3841	47698,33663
Q3-2008	213089,8346	3862	50011,133
Q4-2008	209937,1527	3833	49852,34269
Q1-2009	206550,681	3777	48009,48548
Q2-2009	208670,8988	3763	48648,9748
Q3-2009	210662,9688	3720	47391,98412
Q4-2009	212237,9034	3732	46506,30828
Q1-2010	212249,6603	3723	43862,24873
Q2-2010	214533,7382	3727	44225,93715

Q3-2010	216834,3937	3741	43988,33221
Q4-2010	219096,9499	3738	43016,88809
Q1-2011	222708,6711	3732	45230,61613
Q2-2011	224897,5732	3757	44187,63511
Q3-2011	226824,007	3767	43936,11042
Q4-2011	227890,2992	3781	44551,19716
Q1-2012	222978,8149	3783	44509,03143
Q2-2012	222984,6134	3819	42255,24595
Q3-2012	224495,6802	3854	42062,64162
Q4-2012	225363,8963	3854	41863,31156
Q1-2013	228184,8156	3819	42373,9497
Q2-2013	230834,0846	3886	44722,09226
Q3-2013	234125,5569	3907	47171,4411
Q4-2013	236686,6091	3960	49824,54278
Q1-2014	237794,4008	4085	51455,92674
Q2-2014	241396,2171	4072	51361,09038
Q3-2014	244256,8301	4114	51924,27078
Q4-2014	247567,6271	4134	51464,08268
Q1-2015	251749,1513	4164	52194,22804
Q2-2015	256880,1896	4197	55750,37517

Tab. 31 Vstupní data pro Slovensko

<b>Rok</b>	<b>HDP</b>	<b>Práce</b>	<b>Kapitál</b>
Q2-1993	38409,498	2086	12476,348
Q3-1993	39198,958	2085	12665,847
Q4-1993	40016,429	2089	12924,139
Q1-1994	40853,134	2122	12928,467
Q2-1994	41506,502	2108	11765,811
Q3-1994	42501,742	2108	12025,689
Q4-1994	43348,592	2108	11102,236
Q1-1995	44047,997	2121	11246,438
Q2-1995	44973,569	2142	11677,383
Q3-1995	45934,218	2156	13130,542
Q4-1995	46925,067	2172	12513,284
Q1-1996	47962,12	2204	14982,25
Q2-1996	48976,472	2222	14629,767
Q3-1996	49960,104	2235	17330,715
Q4-1996	51069,285	2232	19209,245
Q1-1997	52520,061	2224	19647,249
Q2-1997	53180,231	2212	18766,297

Q3-1997	54183,303	2195	18465,76
Q4-1997	54608,362	2192	19165,001
Q1-1998	55630,342	2206	20311,066
Q2-1998	55805,794	2208	20795,148
Q3-1998	55562,968	2191	20384,053
Q4-1998	59677,204	2188	22616,126
Q1-1999	57787,454	2169	19218,282
Q2-1999	56848,466	2136	18839,682
Q3-1999	56658,132	2117	16117,61
Q4-1999	56807,152	2106	16322,585
Q1-2000	58190,138	2102	15504,953
Q2-2000	59496,824	2091	15281,442
Q3-2000	60753,114	2100	17052,911
Q4-2000	62051,605	2113	17723,941
Q1-2001	63520,253	2112	19024,117
Q2-2001	65258,296	2123	20439,483
Q3-2001	66247,045	2127	19968,843
Q4-2001	68193,751	2122	19960,325
Q1-2002	68946,435	2118	20497,273
Q2-2002	69986,808	2117	20586,374
Q3-2002	71732,045	2122	20399,034
Q4-2002	72320,909	2135	20157,448
Q1-2003	73534,303	2148	19555,163
Q2-2003	74439,82	2173	19481,782
Q3-2003	74922,008	2169	19186,828
Q4-2003	76406,893	2156	18938,339
Q1-2004	78096,508	2141	18981,364
Q2-2004	79389,683	2155	19271,424
Q3-2004	81679,389	2183	20980,022
Q4-2004	83504,569	2187	21236,1
Q1-2005	85278,114	2197	22579,96
Q2-2005	87789,728	2203	24282,719
Q3-2005	90360,363	2220	24775,245
Q4-2005	92838,997	2247	25825,144
Q1-2006	96454,236	2274	26486,515
Q2-2006	99895,263	2302	27130,977
Q3-2006	102695,13	2311	27881,853
Q4-2006	105839,49	2326	29097,767
Q1-2007	108886,54	2343	29324,377
Q2-2007	112219,94	2346	30202,688

Q3-2007	115694,55	2356	31619,822
Q4-2007	124324,17	2386	32789,052
Q1-2008	123112,05	2405	31585,76
Q2-2008	126435,09	2413	33735,883
Q3-2008	130022,21	2457	33256,991
Q4-2008	132547,35	2453	32853,127
Q1-2009	121750,75	2411	31180,033
Q2-2009	123719,03	2385	25099,864
Q3-2009	125757,69	2352	26645,367
Q4-2009	128082,85	2320	25994,642
Q1-2010	129876,21	2302	31130,205
Q2-2010	131269,72	2316	27998,813
Q3-2010	132507,46	2322	28205,506
Q4-2010	133223,43	2332	29571,392
Q1-2011	133649,06	2313	33151,739
Q2-2011	134835,02	2322	31906,882
Q3-2011	135871,76	2318	32726,749
Q4-2011	136894,77	2315	32950,784
Q1-2012	137802,31	2333	29477,787
Q2-2012	138654,82	2336	30474,453
Q3-2012	139624,93	2335	29898,603
Q4-2012	140221,89	2311	28771,458
Q1-2013	141374,38	2341	28401,476
Q2-2013	142460,89	2329	28668,431
Q3-2013	144093,58	2324	29369,609
Q4-2013	145864,11	2325	30883,151
Q1-2014	147564,15	2344	30498,949
Q2-2014	149279,75	2354	31092,795
Q3-2014	150411,26	2365	31862,071
Q4-2014	150621,76	2388	32877,351
Q1-2015	150584,47	2406	32377,159
Q2-2015	151246,17	2418	33572,855

Tab. 32 Vstupní data pro Řecko

<i>rok</i>	<i>HDP</i>	<i>Práce</i>	<i>Kapitál</i>
Q1-1990	137840,7266	3703	33991,58182
Q2-1990	135410,4595	3716	34264,59823
Q3-1990	127267,1794	3725	34246,01206
Q4-1990	141584,0645	3737	34741,35083
Q1-1991	143569,0251	3617	35871,14039



Q2-1991	142046,9553	3625	36074,69927
Q3-1991	145732,9318	3640	35749,94409
Q4-1991	145983,6934	3654	35167,8043
Q1-1992	149896,9009	3662	35230,76928
Q2-1992	146249,6152	3678	35261,75952
Q3-1992	149223,0644	3691	34600,66994
Q4-1992	149425,5858	3706	33854,38949
Q1-1993	146258,9495	3695	33773,08208
Q2-1993	149641,3662	3710	33497,3541
Q3-1993	151035,8199	3722	33206,50195
Q4-1993	152109,467	3736	32642,47678
Q1-1994	151626,312	3771	32376,57247
Q2-1994	154236,6755	3778	31963,3029
Q3-1994	159242,4638	3790	31467,72779
Q4-1994	158826,4954	3803	31795,38205
Q1-1995	160108,9207	3806	32737,72095
Q2-1995	162067,801	3815	32849,01754
Q3-1995	163373,9864	3823	32773,11773
Q4-1995	165009,4197	3835	34288,18044
Q1-1996	167191,5615	3860	34479,22347
Q2-1996	168630,4688	3864	36119,24833
Q3-1996	171686,6007	3867	39392,43753
Q4-1996	174701,2646	3878	35750,18192
Q1-1997	176547,3382	3856	36420,12416
Q2-1997	180442,2493	3844	36632,16563
Q3-1997	183693,0788	3849	37517,70872
Q4-1997	185720,1614	3869	40592,17681
Q1-1998	187916,9205	3970	44305,68206
Q2-1998	188492,9442	4009	45245,70218
Q3-1998	189769,9535	4044	45320,71013
Q4-1998	191243,4459	4049	46234,31014
Q1-1999	193515,8138	4058	47051,38977
Q2-1999	196337,7947	4017	47412,2166
Q3-1999	197426,4297	4021	50271,60287
Q4-1999	201470,19	4026	51658,49948
Q1-2000	203810,8017	4050	51638,46617
Q2-2000	206536,2127	4077	53126,62704
Q3-2000	211617,3891	4103	51491,42025
Q4-2000	216713,7345	4124	53747,2542
Q1-2001	220769,2888	4234	53994,07321

Q2-2001	223466,8742	4199	54049,00473
Q3-2001	230148,6194	4203	55699,4395
Q4-2001	233192,7833	4174	55181,4698
Q1-2002	238800,6307	4206	55504,95864
Q2-2002	246045,6917	4253	57004,73776
Q3-2002	248601,5347	4284	55809,40981
Q4-2002	250337,697	4312	59042,56899
Q1-2003	254777,6932	4338	62705,3462
Q2-2003	257362,819	4345	62567,4936
Q3-2003	259415,6795	4363	64754,62636
Q4-2003	266410,3881	4369	66872,20265
Q1-2004	274538,0743	4364	69166,24294
Q2-2004	277158,44	4390	68124,83386
Q3-2004	280911,9085	4393	69606,12498
Q4-2004	278799,8503	4412	63422,50961
Q1-2005	274099,4105	4428	58407,20743
Q2-2005	275762,197	4435	59188,94729
Q3-2005	280206,5292	4444	54549,94507
Q4-2005	286277,7482	4473	60069,34416
Q1-2006	303076,2564	4508	68282,25737
Q2-2006	308764,1615	4513	69658,60686
Q3-2006	314221,7557	4547	75475,74527
Q4-2006	320947,865	4540	76598,21293
Q1-2007	316449,9172	4544	69223,76532
Q2-2007	324924,912	4555	86743,95648
Q3-2007	326283,1551	4571	93880,51791
Q4-2007	328584,3684	4588	82722,54282
Q1-2008	339599,326	4607	84645,91451
Q2-2008	344066,2005	4615	80267,20227
Q3-2008	348589,4393	4611	78201,94347
Q4-2008	348115,3391	4609	82241,3384
Q1-2009	334314,0922	4582	74592,07036
Q2-2009	343372,5753	4569	73815,55535
Q3-2009	342016,1733	4553	67086,8586
Q4-2009	342037,0282	4522	69365,14785
Q1-2010	336217,1999	4485	60368,80226
Q2-2010	327292,192	4421	57686,82768
Q3-2010	316561,9558	4363	52462,4825
Q4-2010	312535,2794	4291	52393,07843
Q1-2011	304413,5626	4200	50115,20742

---

Q2-2011	301120,4952	4113	47615,59471
Q3-2011	295844,8776	4011	46882,7592
Q4-2011	286815,6055	3896	39295,71437
Q1-2012	284947,4788	3817	33985,2307
Q2-2012	281552,0445	3719	34320,60907
Q3-2012	281618,3744	3642	30204,65906
Q4-2012	282179,033	3602	34107,59702
Q1-2013	281538,5555	3545	31671,30121
Q2-2013	282678,1687	3519	31902,44828
Q3-2013	283359,2553	3499	31119,97548
Q4-2013	283515,4206	3485	32674,75686
Q1-2014	285168,0173	3531	31554,37124
Q2-2014	284624,4393	3527	30865,5133
Q3-2014	286648,783	3542	31658,11008
Q4-2014	284783,6272	3543	39988,06588
Q1-2015	283849,1785	3562	36085,68732
Q2-2015	286766,6268	3609	29340,11244