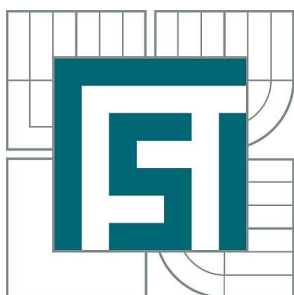


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

PROBLÉM VLASTNÍCH ČÍSEL A JEHO APLIKACE

EIGENVALUE PROBLEM AND APPLICATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ONDŘEJ MACHÁT

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. STANISLAV KNOTEK

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Ondřej Machát

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Problém vlastních čísel a jeho aplikace

v anglickém jazyce:

Eigenvalue Problem and Applications

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Matematická formulace mnoha fyzikálních a technických úloh vede k sestavení problému vlastních hodnot algebraických nebo diferenciálních rovnic. Jejich numerická řešení pak definují příslušný maticový problém vlastních čísel. Zpracování tématu klade požadavek na utříbení teoretických znalostí a osvojení souvislostí obecného matematického problému s aplikacemi.

Cíle bakalářské práce:

Proveďte teoretickou rešerši problému vlastních čísel včetně jeho zobecněné varianty. Pomocí vybraných aplikací, například z oblasti mechaniky těles a dynamiky proudění, demonstруйте význam maticových problémů vlastních čísel včetně formulací sestavených na základě numerického řešení příslušných diferenciálních rovnic.

Seznam odborné literatury:

[1] H. Sagan: Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics, John Wiley & Sons Inc., 1961, ISBN 0-486-66132-6

[2] S. Rao Singiresu: Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists, Prentice Hall, 2002, ISBN 01308948X

[3] W. Y. Yang, W. Cao, T. S. Chung, J. Morris: Applied Numerical Methods Using Matlab, John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Stanislav Knotek

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 15.11.2010

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce obsahuje definici a přehled vlastností problému vlastních čísel včetně jeho zobecněné varianty, a problému vlastních čísel v diferenciálních rovnicích. Jsou zde uvedeny i některé numerické metody výpočtu. Těžištěm práce jsou však ukázky aplikací této matematické oblasti v teoretické praxi. Postupně se čtenář seznámí s modelem činnosti kovacího bucharu, úlohou hledající kritické zatížení potřebné k nevratnému ohybu ukotveného prutu, a problematikou stability proudění tekutin.

Abstract

This thesis contains definition and overview of the properties of eigenvalues' problems including its generalised alternate and the problem of eigenvalues in differential equations. Several numerical methods of calculations are also listed here. Crux of the thesis are the practical applications of this mathematical domain in use. The reader is progressively going to meet the model of the forging hammer's procedure, tasks looking for critical load pressure needed to irreversible bending of the imbedded girder. In conclusion the thesis will also deal with the stability of the liquid flowing.

Klíčová slova

Vlastní čísla, vlastní hodnoty, aplikace vlastních čísel, diferenční metoda, Orr-Sommerfeldova rovnice, Poiseuilleovo proudění, kovací buchar.

Keywords

Eigenvalue, eigenvalue applications, differential method, Orr-Sommerfeld equation, Poiseuille flow, forging hammer.

MACHÁT, O. *Problém vlastních čísel a jeho aplikace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 33 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Stanislav Knotek.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Problém vlastních čísel a jeho aplikace* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Stanislava Knotka s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ondřej Machát

Rád bych na tomto místě poděkoval svému vedoucímu práce Ing. Stanislavu Knotkovi za jeho trpělivost, invenci, pomoc a podporu. Dále chci poděkovat Mgr. Janě Hoderové, Ph.D. a Bc. Martinu Chabičovskému.

Ondřej Machát

Obsah

1	Úvod	9
2	Problém vlastních čísel	10
2.1	Úvod	10
2.2	Existence a jednoznačnost	10
2.3	Vlastnosti vlastních čísel	11
2.3.1	Násobnost	11
2.3.2	Závislost na vstupních datech	11
2.3.3	Lokalizace vlastních čísel	13
2.4	Metody řešení	13
2.4.1	Mocinná metoda	13
2.4.2	Inverzní iterace	14
2.4.3	Simultánní iterace	14
2.4.4	QR metoda	14
2.4.5	Další metody	15
3	Zobecněný problém vlastních čísel	16
3.1	QZ metoda	16
4	Vlastní hodnoty v diferenciálních rovnicích	17
4.1	Diferenční metoda	17
4.2	Čebyševova spektrální kolokační metoda	18
5	Aplikace	19
5.1	Kovací buchar	19
5.1.1	Kovací buchar s proměnnou hmotností kladiva	22
5.1.2	Kovací buchar s proměnnou tuhostí zpracovávaného materiálu	23
5.2	Tlak na prut	25
5.2.1	Klasické řešení	25
5.2.2	Řešení pomocí diferenční metody	26
5.3	Stabilita proudění	28
5.3.1	Poiseuilleovo proudění	29
6	Závěr	32

1 Úvod

Na začátku této práce si vytyčíme nejjednodušší úkol - pokusit se provést čtenáře problematikou vlastních čísel, a přitom udržet míru srozumitelnosti obsahu na určité úrovni.

Ke zpracování textu nás motivoval především fakt, že v drtivé většině česky psaných publikací se neobjevuje propojení matematického modelu s praxí. Ty v drtivé většině končí větou typu: *”Vlastní čísla hrají důležitou roli nejen v lineární algebře, ale i v funkcionální analýze, kybernetice, teorii proudění nebo také v kvantové fyzice”*.

Následující text by tedy měl být jakýmsi náhledem na problematiku a význam vlastních čísel z hlediska praxe.

Nejprve je ovšem zapotřebí uvědomit si matematickou stránku věci. Proto se v první polovině práce budeme věnovat definici, vlastnostem a metodám řešení problému vlastních čísel, a teprve poté si ukážeme možné způsoby interpretace a následné řešení praktických úloh, konkrétně budeme pozorovat chování modelu kovacího bucharu, ohýbání prutu a stabilitu proudění.

2 Problém vlastních čísel

V této a příští kapitole se budeme zabývat teorií týkající se *problému vlastních čísel*, respektive *zobecněného problému vlastních čísel*. Text vychází především z dokumentu [1].

2.1 Úvod

Problémem vlastních čísel, nebo chcete-li problémem vlastních hodnot, nazýváme netriviální řešení úlohy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (1)$$

kde \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n , skalár λ je *vlastní číslo* a \mathbf{x} je *vlastní vektor*. Množinu všech vlastních čísel příslušných matici \mathbf{A} označujeme *spektrum matice* $\lambda(\mathbf{A})$, a její absolutně největší prvek nazýváme *spektrální poloměr* $\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \lambda(\mathbf{A})\}$.

V tomto okamžiku je třeba si plně uvědomit, že veškerou teorii týkající se problému vlastních čísel je nutné uvažovat v oboru komplexních čísel \mathbb{C} . Proto prvky matice \mathbf{A} , *vlastní čísla* a jednotlivé prvky *vlastních vektorů* chápeme jako prvky množiny \mathbb{C} .

Za triviální řešení je považována situace, kdy je vektor \mathbf{x} nulový, tudíž je každé řešení problému vlastních čísel také rovno nule pro libovolné λ .

2.2 Existence a jednoznačnost

Základní rovnici (1) upravíme na tvar

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{O} \quad (2)$$

Zřejmě se jedná o homogenní soustavu lineárních rovnic, jejíž řešení je nenulové právě tehdy, když je matice této soustavy singulární. Musí tedy platit

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (3)$$

Tuto podmínku nazýváme *charakteristická rovnice*.

Věta 2.1 (Základní věta algebry)

Je-li $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ polynom stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficienty c_n , pro $n \in \mathbb{N}$, pak jej lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = c_n (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots (x - \alpha_k)^{l_k}, \quad (4)$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou komplexní čísla a l_1, \dots, l_k jsou kladná celá čísla s vlastností $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n$. Pak α_i je kořen polynomu $f(x)$, l_i je pak násobnost kořene α_i .

Ačkoliv je základní věta algebry čistě algebraickým tvrzením, není dosud znám žádný čistě algebraický důkaz. Všechny známé důkazy této věty využívají více či méně metod matematické analýzy. Jako první jej sestavil C.F. Gauss v roce 1799.

Z věty 2.1 lze vycházet i v našem případě. Nahradíme levou stranu charakteristické rovnice *charakteristickým polynomem* $p(\lambda)$ matice \mathbf{A} , jehož kořeny jsou vlastními čísly matice \mathbf{A} . Lze tedy psát

$$p(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 = c_n (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (5)$$

Jedná se o polynom stupně n , konstanta $c_n = (-1)^n$. Z věty 2.1 plyne, že matice \mathbf{A} řádu n má n vlastních čísel, která jsou obecně komplexní, ovšem nelze tvrdit, že jsou všechna různá. Najdeme-li ale mezi kořeny charakteristického polynomu nějaké vlastní číslo $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, kde $i^2 = (-1)$ a $\beta \neq 0$, je také $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ vlastní číslo matice \mathbf{A} . Komplexní vlastní čísla se totiž vyskytují vždy ve sdružených párech.

2.3 Vlastnosti vlastních čísel

2.3.1 Násobnost

Rozlišujeme dva typy násobností vlastních čísel:

- *Algebraická* násobnost vlastního čísla přímo koresponduje s násobností kořene charakteristické rovnice. V případě, že je násobnost kořene rovna, respektive větší než 1, mluvíme o jednoduchém respektive násobném vlastním čísle.
- *Geometrická* násobnost vlastního čísla odpovídá počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů, které přísluší tomuto číslu.

Je-li geometrická násobnost vlastního čísla menší než algebraická, hovoříme o *defektním* vlastním čísle. Naopak vlastní číslo nazveme *ndefektní* právě tehdy, když jsou si algebraická i geometrická násobnost rovny. Tedy jinými slovy, každému vlastnímu číslu přísluší právě jeden vlastní vektor.

Matici nazveme *ndefektní* pokud neobsahuje žádné defektní vlastní číslo. V opačném případě se jedná o matici *defektní*.

2.3.2 Závislost na vstupních datech

V následující kapitole budeme sledovat změny vlastních hodnot v závislosti na vlastnostech matice \mathbf{A} , která v rovnici (1) jako jediná reprezentuje vstupní data problému vlastních čísel.

A) Diagonalizovatelná matice \mathbf{A}

Jestliže \mathbf{A} je *ndefektní* matice řádu n , pak je \mathbf{A} *diagonalizovatelná*. Tedy platí: $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}$, kde $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ je regulární matice, jejíž sloupce tvoří vlastní vektory x_1, \dots, x_n příslušné vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matice \mathbf{A} , a matice $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

B) Pozitivně definitní \mathbf{A}

Tímto typem matice rozumíme symetrickou matici \mathbf{A} řádu n s kladnými subdeterminanty matice \mathbf{A} . Matice tohoto typu mají pak vlastní čísla *reálná*. Pokud jsou koeficienty matice \mathbf{A} reálné, je pak \mathbf{A} symetrická. Z toho plyne, že vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou kladná, a matice \mathbf{A} je diagonalizovatelná pomocí *ortonormální* matice vlastních vektorů \mathbf{X} , nebo-li platí $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}$.

C) Transformace matice \mathbf{A}

Často se při výpočtech vychází z nejrůznějších transformací původní matice \mathbf{A} na jinou, jednodušší, se kterou se ve zvolených numerických metodách pracuje:

- *Posunem* chápeme odečtení zvolené konstanty c od diagonálních prvků matice. Vznikne nám tak transformovaná rovnice

$$(\mathbf{A} - c\mathbf{I}) = (\lambda - c)\mathbf{x} \quad (6)$$

Vlastní čísla se tedy od původní matice liší o konstantu c , vlastní vektory zůstávají zachovány.

-*Inverzi* matice \mathbf{A} lze samozřejmě provést pouze za předpokladu, že \mathbf{A} je regulární a $\lambda \neq 0$. Pokud toto platí, můžeme psát :

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} \quad (7)$$

Vlastní vektory se tedy ani v tomto případě nemění, vlastními čísly inverzní matice jsou převrácené hodnoty původních vlastních čísel.

-*Umocněním* vstupní matice se opět nemění vlastní vektor. Naopak vlastní číslo příslušné matici \mathbf{A}^k je rovno k -té mocnině λ :

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x} = \dots = \lambda^k \mathbf{x}, \quad (8)$$

kde $k \in \mathbb{N}$. Tato vlastnost je předpokladem mocninné metody.

-*Podobnostní* maticí \mathbf{T} nazýváme takovou regulární matici, která splňuje $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. Potom říkáme, že \mathbf{B} je *podobná* \mathbf{A} . Vlastní čísla podobné matice zůstávají zachována, naproti tomu vlastní vektory se mění v závislosti na podobnostní matici \mathbf{T} :

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{T}\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

D) Podmíněnost vlastních hodnot

Dobrou podmíněnost vlastních čísel a vlastních vektorů matice \mathbf{A} demonstruje jejich citlivost v závislosti na malých změnách koeficientů vstupní matice. V dalším textu se budeme zabývat podmíněností vlastních čísel vůči pozmeněné matici \mathbf{A} , která je diagonalizovatelná (viz 2.3.2 A). Změnu původní matice označme $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Píšeme tedy $\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{X}$. Označíme-li výraz $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{F}$, lze uvažovat rovnici $\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D} + \mathbf{F}$. Z C) plyne, že matice $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ a $\mathbf{D} + \mathbf{F}$ jsou si podobné a mají stejná vlastní čísla - například χ . Existuje tedy vlastní vektor \mathbf{t} takový, že $(\mathbf{D} + \mathbf{F})\mathbf{t} = \chi\mathbf{t}$. Podmíněnost tohoto problému řeší Bauer-Fikova věta, která říká, že citlivost vlastních čísel diagonalizovatelné matice \mathbf{A} lze odhadnout číslem podmíněnosti

$$\kappa_p(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_p \|\mathbf{X}^{-1}\|_p, \quad (9)$$

přičemž \mathbf{X} je matice vlastních vektorů a výrazem $\|\mathbf{X}\|_p$, respektive $\|\mathbf{X}^{-1}\|_p$ chápeme maticovou normu (viz. například [10]). Důsledkem této věty je vysoká citlivost vlastních čísel na $\Delta\mathbf{A}$ pro téměř lineárně závislé vlastní vektory. V případě symetrické matice \mathbf{A} je číslo podmíněnosti $\kappa_p(\mathbf{X}) = 1$, z čehož plyne, že vlastní čísla symetrických matic jsou vždy dobře podmíněna.

Software MATLAB disponuje funkcí *condeig*, na jejímž výstupu získáme čísla podmíněnosti pro všechna vlastní čísla. Tyto hodnoty lze navíc vylepšit tzv. vyvážením matice. Tuto operaci provedeme v MATLABU příkazem *balance*.

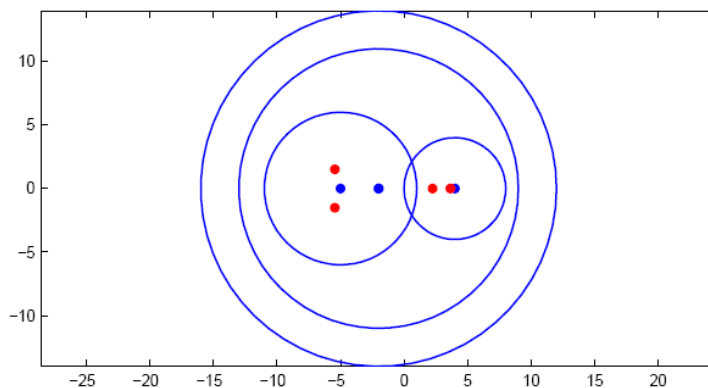
2.3.3 Lokalizace vlastních čísel

Při lokalizaci vlastních čísel vycházíme z následující věty:

Věta 2.2 (Geršgorinova věta)

Všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}$, kde $i, j = 1, \dots, n$ jsou všechna obsažena ve sjednocení kruhů se středy a_{kk} a poloměry $\sum |a_{kj}|$, kde $j = 1, \dots, n$ a zároveň $j \neq k$.

Důkaz této věty lze najít například v [1]. Pro konkrétní příklad si můžeme lokalizaci vlastních čísel vykreslit podobně jako na obrázku 1.



Obrázek 1: Lokalizace vlastních čísel.

2.4 Metody řešení

Na první pohled se nabízí poměrně jednoduchý postup řešení problému vlastních čísel. Pomocí vhodné numerické metody nalezneme kořeny charakteristického polynomu (5), a pak už zbývá pouze vyřešit příslušné soustavy lineárních rovnic, z nichž vyplynou odpovídající vlastní vektory. V numerické praxi se ale tento postup nepoužívá, jelikož výpočet koeficientů charakteristické rovnice je značně náročný, navíc jsou tyto velmi citlivé na změny koeficientů matice. Dále je třeba uvažovat nemalé zaokrouhlovací chyby způsobující značné rozdíly mezi kořenem vypočteným a reálným, nebo také náročnost výpočtu kořenů polynomů vysokého stupně. V praxi tedy využíváme jiných postupů. Některé z nich si uvedeme v následujícím textu.

2.4.1 Mocnná metoda

Tato metoda umožňuje výpočet vlastního čísla o největší absolutní hodnotě. Předpokládáme, že \mathbf{A} je diagonalizovatelná s jedním dominantním vlastním číslem λ_1 , tedy platí: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, a \mathbf{v}_1 je vlastní vektor příslušný λ_1 .

Na počátku algoritmu zvolíme počáteční nenulový vektor \mathbf{x}_0 a pro přirozené k počítáme $\mathbf{x}_k := \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$. Po dostatečném počtu kroků lze říci, že \mathbf{x}_k konverguje k vlastnímu vektoru \mathbf{v}_1 . Tento algoritmus má bohužel několik nevýhod:

- existuje-li několik vlastních čísel se stejnou absolutní hodnotou, metoda nemusí nutně konvergovat
- startovací vektor \mathbf{x}_0 nemusí obsahovat žádnou složku ve směru \mathbf{v}_1 , ovšem ta většinou vznikne díky zaokrouhlovacím chybám
- geometrický růst složek může při $|\lambda_1| > 1$ vést k přetečení, pro $|\lambda_1| < 1$ k podtečení.

Vhodnější je tedy využít normalizované mocninné metody, kdy v každém kroku normalizujeme $\|\mathbf{x}_k\| = 1$. S počátečním \mathbf{x}_0 pak počítáme $\mathbf{y}_k := \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$, dále do σ_k vložíme složku \mathbf{y}_k s největší absolutní hodnotou a normalizujeme $\mathbf{x}_k := \mathbf{y}_k/\sigma_k$.

Rychlost konvergence mocninné metody lze urychlit vhodným posunem (shiftem) $(\mathbf{A} - c\mathbf{I})$.

2.4.2 Inverzní iterace

Z kapitoly 2.3.2 víme, že vlastními čísly inverzní matice jsou převrácené hodnoty vlastních čísel původní matice. Aplikujeme-li normalizovanou mocninnou metodu na problém vlastních čísel s inverzní maticí, konverguje tento postup analogicky k nejmenšímu vlastnímu číslu (v absolutní hodnotě). Tato metoda se používá především k dopočítávání vlastních vektorů, jsou-li již užitím jiné metody vypočteny přibližné hodnoty vlastních čísel. Konvergenci lze opět urychlit vhodným posunem.

2.4.3 Simultánní iterace

Předcházející dvě metody produkovaly pouze jednotlivá vlastní čísla, respektive vlastní vektory. Postup simultánní iterace je určen pro výpočet několika párů vlastních čísel a vektorů zároveň. Zakládá se opět na principu mocninné metody, ovšem v tomto případě zadáváme hned několik startovacích vektorů současně. Startovací matice \mathbf{X}_0 je typu (n, p) , hodnosti p . Předpokládáme, že pro vlastní čísla platí

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

a že \mathbf{v}_i je vlastní vektor příslušný λ_i . Zavedme $\mathbb{S} = \text{span}(v_1, \dots, v_p)$ a $\mathbf{S}_k = \text{span}(\mathbf{X}_k) = \text{span}(\mathbf{A}_k \mathbf{X}_0)$. Jestliže žádný ze sloupců matice \mathbf{X}_0 není kolmý k \mathbb{S} , pak \mathbf{S}_k konverguje k \mathbb{S} , neboli vektorový prostor generovaný sloupci matice \mathbf{X}_k konverguje k vektorovému prostoru generovanému p vlastními vektory.

I zde hrozí přetečení nebo podtečení a navíc se postupně zhoršuje podmíněnost matice \mathbf{X}_k . Obojímu předcházíme tak, že v každém kroku iterace sloupce \mathbf{X}_k ortonormalizujeme pomocí QR rozkladu: $\mathbf{X}_{k-1} = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k$, kde \mathbf{Q}_k je ortonormální čtvercová matice a \mathbf{R}_k je horní trojúhelníková matice. Ortogonalizace v každém kroku je ale náročná, navíc konvergence může být pomalá.

2.4.4 QR metoda

Tento způsob výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů neřídkých matic patří v praxi mezi nejpoužívanější. Nejprve provedeme QR rozklad $\mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k = \mathbf{A}_{k-1}$, poté přiřadíme $\mathbf{A}_k := \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k$. V k -tém kroku této metody dostáváme QR rozklad matice

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k \mathbf{R}_{k-1} \dots \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k,$$

kde \mathbf{Q}_k je ortonormální a \mathbf{R}_k je horní trojúhelníková matice. Protože $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A} \mathbf{Q}_k$, můžeme tvrdit, že matice \mathbf{A}_k konvergují k matici $\mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ - viz [1]. \mathbf{T} je reálný Schurův tvar matice \mathbf{A} . Je to blokově trojúhelníková matice v níž diagonální submatice \mathbf{T}_{ii} jsou čtvercové řádu 1 nebo 2 a poddiagonální submatice jsou nulové

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1p} \\ O_{21} & T_{22} & \dots & T_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{p1} & O_{p2} & \dots & T_{pp} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Vlastní čísla \mathbf{T}_{ii} řádu 2 jsou komplexně sdružená vlastní čísla matice \mathbf{A} , vlastní čísla \mathbf{T}_{ii} řádu 1 jsou reálná vlastní čísla matice \mathbf{A} . Sloupce $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ matice \mathbf{Q} nazýváme reálné Schurovy vektory.

Vlastní vektory matice \mathbf{A} spočítáme například inverzní iterací s posunem. Pro symetrickou matici \mathbf{A} platí, že $\mathbf{T} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a $\mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Metodu lze opět urychlit posunem, nečastěji se využívá tzv. Rayleighův posun, kdy za c volíme a_{nn}^{k-1} z matice \mathbf{A}_{k-1} .

2.4.5 Další metody

Jistě bychom na tomto místě mohli vyjmenovat a popsat několik dalších metod numerického výpočtu vlastních čísel. Protože ale tento výčet s výkladem není hlavním cílem této práce, zmíníme pouze, že existují metody jako je například *Arnoldiho*, *Lanczova*, či v současnosti zřejmě nejvyužívanější metoda *Rozděl a panuj*. Algoritmy s výkladem těchto metod si lze prohlédnout v [1], případně v [8].

3 Zobecněný problém vlastních čísel

I v tomto případě se snažíme určit vlastní číslo λ a jemu příslušný nenulový vlastní vektor, ovšem s tím rozdílem, že vycházíme z předpokladu platnosti následující rovnice

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (11)$$

Stejně jako v mnoha dalších odvětvích matematiky se pokusíme neznámý problém převést na úlohu, kterou již řešit umíme.

Je-li alespoň některá z matic \mathbf{A} , \mathbf{B} regulární, můžeme psát $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, respektive $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{x} = (\frac{1}{\lambda})\mathbf{x}$. Takovéto rovnice lze vyřešit metodami popsány v kapitole 2.4 s pozměněnou startovací maticí. Ovšem tato úprava se všeobecně nedoporučuje. Dochází při ní totiž ke ztrátě přesnosti, kterou způsobují zaokrouhlovací chyby při výpočtu součinu matic, navíc jsou-li \mathbf{A} , nebo \mathbf{B} symetrické, často se výpočtem stávají asymetrickými.

Dále se nabízí využít situace, kdy jsou obě matice symetrické a jedna z nich zároveň pozitivně definitní (např. \mathbf{B}). Pak lze \mathbf{B} vyjádřit pomocí Choleského rozkladu (viz [10]) jako $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, a můžeme potom řešit problém ve tvaru $(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}^{-T})\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, který symetrii matic zachovává. Ze soustavy $\mathbf{L}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ pak zbývá dopočítat vlastní vektor \mathbf{x} . Bohužel ani tento model není kvalitní, jelikož neřeší zaokrouhlovací chyby, navíc nelze pracovat se singulárními maticemi \mathbf{A} , \mathbf{B} .

3.1 QZ metoda

Oproti předchozím odstavcům řeší tato metoda zobecněný problém vlastních čísel včetně varianty, kdy jsou \mathbf{A} , \mathbf{B} singulární. Jedná se o iterační metodu založenou na *zobecněném Schurově rozkladu* (vysvětleno v [10]) matic \mathbf{A} , \mathbf{B} a následném výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů. Zobecněný Schurův rozklad zavádí následující definice

Definice 3.1 *Nechť \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou reálné matice řádu n . Pak existují unitární matice \mathbf{Q} a \mathbf{Z} takové, že $\mathbf{Q}^H\mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathbf{T} = t_{ij}^n_{i,j=1}$ a $\mathbf{Q}^H\mathbf{B}\mathbf{Z} = \mathbf{S} = s_{ij}^n_{i,j=1}$ jsou horní trojúhelníkové matice.*

Vlastní čísla zobecněného problému získáme jako $\lambda_i = \frac{t_{ii}}{s_{ii}}$. Obvykle se pracuje i s pojmem *zobecněný reálný Schurův tvar*

Definice 3.2 *Nechť \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou reálné matice řádu n . Pak existují ortonormální matice \mathbf{Q} a \mathbf{Z} takové, že $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathbf{T}$ je horní trojúhelníková matice v reálném Schurově tvaru a $\mathbf{Q}^T\mathbf{B}\mathbf{Z} = \mathbf{S}$ je horní trojúhelníková matice s nezápornými diagonálními prvky.*

Je-li navíc matice \mathbf{A} nebo \mathbf{B} symetrická, je pak \mathbf{T} respektive \mathbf{S} matice diagonální. V MATLABU lze k výpočtu zobecněného Schurova rozkladu použít funkci *qz*.

Zobecněný problém vlastních čísel je možné řešit také modifikacemi dalších metod, například metodou iterací v podprostorech, Jacobiho, Arnoldiho či Lanczose. V MATLABU běžně využíváme proceduru *eig*, případně *eigs*.

4 Vlastní hodnoty v diferenciálních rovnicích

Problematika popsaná v nadpisu této kapitoly je poměrně rozsáhlá. Podrobný soupis teorie týkající se numerického řešení počáteční respektive okrajové úlohy obyčejných diferenciálních rovnic (včetně problematiky rovnic parciálních) lze najít ve [2].

Oproti předchozím kapitolám, kdy se výstupním řešením problému stal pár *vlastní číslo - vlastní vektor*, zde řešení dostáváme jako *vlastní funkci příslušející vlastnímu číslu*, jak si ukážeme v 5.3.

Obecně lze říci, že většina numerických metod, které řeší problém vlastních čísel v diferenciálních rovnicích, využívá stejný základní princip - převést tuto úlohu na maticový, respektive zobecněný maticový problém vlastních hodnot pomocí numerického řešení diferenciálních rovnic.

Z celé řady těchto metod však pro účely naší práce uvedeme pouze pasáže z [2] a [4] věnující se metodě Diferenční a Čebyševově, protože právě tyto využijeme při řešení aplikací, které se nachází v této práci.

4.1 Diferenční metoda

V literatuře lze tuto metodu najít i pod heslem *metoda sítě*. Její princip spočívá v nahrazení derivací příslušnými diferenčními podíly.

Uvažujme pro jednoduchou představu lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (12)$$

s Dirichletovými podmínkami

$$y(0) = y_0, y(l) = y_l \quad (13)$$

Podobně jako ve [3] předpokládejme, že tento okrajový problém má řešení ($a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ jsou spojité na $\langle 0, l \rangle$, $b(x) \leq 0$). Dále rozdělme interval $\langle 0, l \rangle$ na n stejně velkých dílků délky $h = l/n$, přičemž $x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_i = ih, \dots, x_n = nh = l$. Vznikly nám tak dělicí body x_i , které nazýváme *uzly*, množina všech uzlů x_0, \dots, x_n je pak nazývána *sítí*.

Nyní budeme hledat přibližné hodnoty, které funkce nabývá ve zvolených uzlech. Je nutné si uvědomit, že hodnoty v x_0 a x_l jsou nám již známy z okrajových podmínek, tedy $y(x_0) = y_0$ a $y(x_l) = y_l$. Pro vnitřní uzly platí:

$$y''(x_i) + a(x_i)y'(x_i) + b(x_i)y(x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, n - 1 \quad (14)$$

Pro zjednodušení dále označme $y''(x_i) = y_i''$, $a(x_i) = a_i$, $y'(x_i) = y_i'$, $b(x_i) = b_i$, $y(x_i) = y_i$, $f(x_i) = f_i$. V tuto chvíli využijeme vztahů odvozených v [2, strana 24] a nahradíme derivace y_i' a y_i'' diferenčními podíly:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (15)$$

Nyní hodnoty y_{i-1} , y_i a y_{i+1} nahradíme hodnotami přibližnými. Tyto budeme značit velkými písmeny. Dále nahradíme znaménko přibližné rovnosti znaménkem rovnosti a dosadíme do rovnice (14):

$$\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2} + a_i \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} + b_i Y_i = f_i, i = 1, \dots, n - 1 \quad (16)$$

Z okrajových podmínek navíc získáváme $Y_0 = y_0, Y_n = y_l$. Výše popsaným postupem tedy dostáváme soustavu $n-1$ lineárních rovnic pro $n-1$ neznámých, kterou lze vyřešit například Gaussovou eliminací.

4.2 Čebyševova spektrální kolokační metoda

Tato metoda je založena na aproximaci řešení řadou Čebyševových polynomů. S ohledem na 5.3 si řešení diferenciální rovnice označme jako $\phi(y_j)$ a aproximujme

$$\phi(y_j) \cong \tilde{\phi}(y_j) = \sum_{k=0}^N \tilde{\phi}_k T_k(y_j), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (17)$$

kde y_j jsou takzvané *kolokační body* určené Gauss-Lobatovou formulí

$$y_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (18)$$

a Čebyševovy polynomy $T_k(y)$ jsou definovány na intervalu $[-1, 1]$ takto

$$T_k(y) = \cos(k \arccos y). \quad (19)$$

Tato metoda je výhodná především proto, že aproximace i -tých derivací funkce $\tilde{\phi}$ je prováděna pomocí derivačních matic \mathbf{D}^i :

$$\frac{\partial^i \tilde{\phi}}{\partial y^i} = \sum_{k=0}^N \mathbf{D}_{jk}^i \tilde{\phi}_k. \quad (20)$$

Takto nahrazené derivace dosadíme do původní diferenciální rovnice, čímž vzniká klasický maticový zápis, který lze řešit metodami pro soustavy rovnic. Nesmíme ale ještě zapomenout na zahrnutí okrajových podmínek a na případnou transformaci úlohy do intervalu $[-1, 1]$. Pro lepší představu a návaznost textu si příklady těchto postupů ukážeme v odstavci 5.3.1.

Kromě těchto postupů samozřejmě existuje spousta dalších, třeba i kvalitnějších metod. V tomto textu ale uvedeme pouze jejich názvy. Jedná se především o *Metodu konečných objemů*, *Metodu konečných prvků* (podrobně rozebrány ve [2]), anebo například o *Metodu střelby* uvedenou v [6].

5 Aplikace

V této kapitole se pokusíme nahlédnout do možných variant definic problému vlastních čísel a vlastních hodnot samotných. Postupně si představíme zobecněný maticový problém řešený pomocí funkce *eig* softwaru MATLAB, později přistoupíme k vlastním hodnotám diferenciální rovnice vedoucí na klasický maticový problém vlastních čísel a na závěr nahlédneme do problému vlastních čísel v diferenciálních rovnicích vedoucí na zobecněný problém komplexních vlastních čísel.

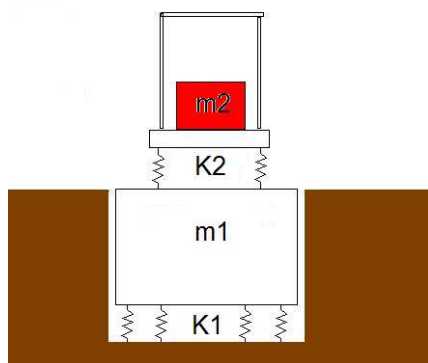
5.1 Kovací buchar

Kovací buchar je tvářecí stroj, který pracuje na principu "kladiva a kovadliny". Jedná se vlastně o závaží, někdy též nazývané beran, které je určitým způsobem "spouštěno" na materiál umístěný na základně (kovadlině) stroje viz Obrázek 2. Tento mechanismus, posaný v [9], prošel dlouhým vývojem od jednoduchého samospádu závaží až po řízený nucený pohyb kladiva i kovadliny současně.



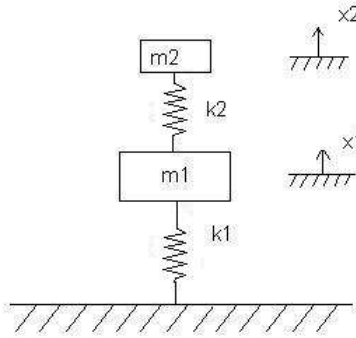
Obrázek 2: Kovací buchar.

Následující text interpretuje práci kovacího bucharu jako zobecněný maticový problém vlastních hodnot. Vycházíme z příkladu uvedeného v [5, strana 274]. Uvažujme kovadlinu o hmotnosti m_1 , kladivo o hmotnosti m_2 . Tuhost zpracovávaného materiálu označme k_2 a upevnění kovadliny v zemi interpretujme tuhostí k_1 viz Obrázek 3. Takovouto úlohu lze



Obrázek 3: Model kovacího bucharu.

chápat jako kmitání dvou těles, která jsou spojena pružinami jako na obrázku 4, přičemž x_i značí posun tělesa i vzhledem k jeho vlastní klidové poloze. Sestavením silových rovnic



Obrázek 4: Fyzikální interpretace.

dostáváme

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Označíme-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

získáváme *zobecněný problém vlastních čísel* viz. rovnice (11), kde ω^2 je vlastní číslo a \mathbf{x} je příslušný vlastní vektor. Ve fyzikálním významu chápeme vlastní číslo ω^2 jako kvadrát úhlové frekvence kmitů jednotlivých prvků soustavy a příslušné vlastní vektory jako výchylky součástí stroje oproti své klidové poloze. Výše uvedený problém lze jednoduše vyřešit v programu MATLAB procedurou *eig*.

Nejprve nastavíme pevné hodnoty k_1, k_2, m_1, m_2 totožné z příkladem v knize.

```
k1=1*10^7;
k2=5*10^6;
m1=20000;
m2=5000;
```

Poté nadefinujeme vstupní matice \mathbf{A} , respektive \mathbf{B} :

```
B=[m1 0;0 m2];
A=[k1+k2 -k2;-k2 k2];
```

Dosažením do rovnice (21) získáváme tedy následující problém

$$\begin{pmatrix} 15 \cdot 10^6 & -5 \cdot 10^6 \\ -5 \cdot 10^6 & 5 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 5 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

K řešení využijeme procedury *eig*, na jejímž výstupu nalezneme diagonální matici

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2)$$

a matici \mathbf{V} , jejíž sloupce tvoří vlastní vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

```
[V,D] = eig(A,B);
```

Necháme MATLABem vypsát úhlové frekvence (odmocniny našich vlastních čísel) a výchylky vzhledem ke klidové poloze kladiva a kovadliny.

```
e=sqrt(diag(D))
```

```
V
```

Dostáváme pak

```
e =
```

```
18.9634
```

```
37.2879
```

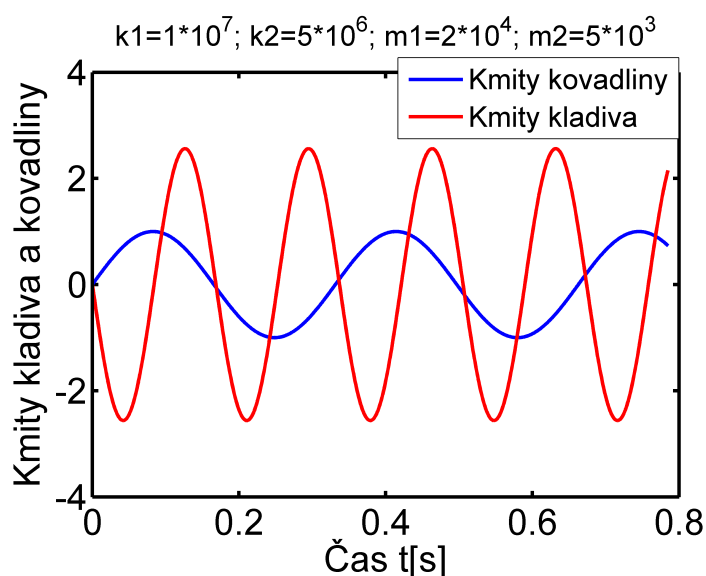
```
V =
```

```
-0.0056 -0.0044
```

```
-0.0087 0.0111
```

Abychom si zpětně zkontrolovali, zda jsme příklad správně implementovali v programu MATLAB, porovnáme naše vypočtené hodnoty s výsledky uvedenými v [5, strana 275]. Pokud tak učiníme, zjistíme, že úhlové frekvence kmitů pro kladivo ($\omega_2 = 37,2879$ rad/s) a kovadlinu ($\omega_1 = 18,9634$ rad/s) souhlasí, ovšem příslušné vlastní vektory $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1.5615)$ a $\mathbf{x}^{(2)} = (1, -2.5615)$ naprosto neodpovídají ani řádově. Všimněme si ale také, že veškerá vstupní data jsou zadána v jednotkách SI, podle výsledků uvedených v knize by se tedy kladivo bucharu po prvním úderu do materiálu odrazilo do výšky více jak $1,5m$, respektive stlačilo materiál o $2,5m$, kovadlina by se přitom vždy zvedla o $1m$. Vzhledem k tomu, že podstava bucharu bývá zpravidla 7 až 8krát hmotnější než kladivo, pozoruje se v praxi často především poměrný pohyb kladiva vůči kovadlině. Pokud tento výpočet provedeme s našimi vypočtenými výchylkami ($-0.0087/-0.0056$ resp. $0.0111/-0.0044$), získáme hodnoty velmi podobné hodnotám uvedeným v knize. O správnosti úvahy nás přesvědčují i stejná znaménka poměrných výchylek.

Kód v MATLABu pracuje tedy správně a libovolným dosazením vstupních dat si lze vypočítat úhlové frekvence a příslušné výchylky částí stroje. Na závěr si ještě pro představu prostřednictvím obrázku 5 prohlédneme průběh kmitů jednotlivých částí stroje s poměrnými amplitudami vzhledem k výchylce kovadliny.



Obrázek 5: Zobrazení průběhu kmitů s poměrnými výchylkami.

5.1.1 Kovací buchar s proměnnou hmotností kladiva

V tomto odstavci se pokusíme pomocí MATLABu vykreslit průběh úhlových frekvencí kmitání strojních součástí v závislosti na proměnné hmotnosti kladiva bucharu, přičemž tuhost zpracovávaného materiálu a uložení spolu s hmotností kovadliny jsou konstantní. Jelikož jsou kovací buchary používány například i v pokusných laboratořích, budeme uvažovat i velmi malé hmotnosti kladiva včetně nulové, která postrádá pro aplikaci reálný význam. Je třeba také uvážit mechanické vlastnosti stroje, a tak hmotnost kladiva omezíme shora, konkrétně dvojnásobkem hmotnosti podstavce.

Nejprve v prostředí MATLAB nastavíme vstupní parametry:

```
k1=1*10^7; k2=5*10^6; m1=20000;
```

Dále zavedeme proměnnou m_2 , která reprezentuje hmotnost kladiva bucharu a nabývá postupně sta hodnot v rozmezí $0 \div 40000$.

```
m2min=0;
m2max=2*m1;
m2=m2min:m1/100:m2max;
```

Dále modifikujeme algoritmus z předchozí kapitoly. Je totiž třeba vložit *for-cyklus*, který postupně dosadí jednotlivé hmotnosti m_2 .

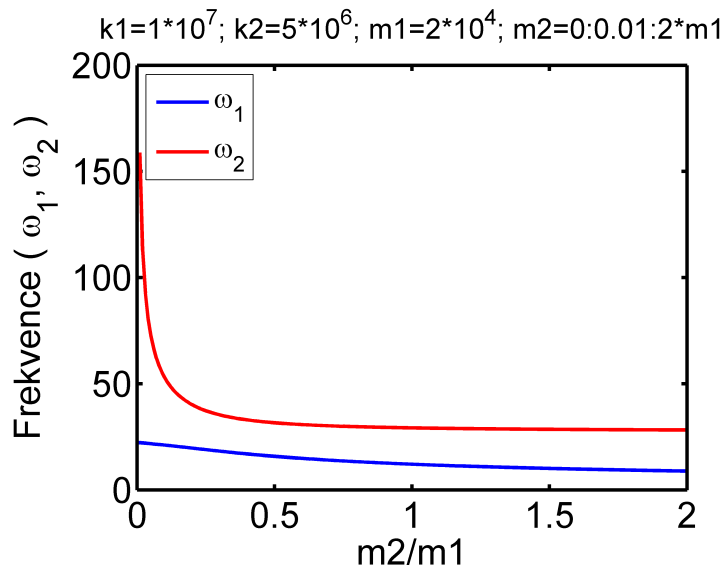
```
A=[k1+k2 -k2;-k2 k2];
for i=1:max(length(m2))
B=[m1 0;0 m2(i)];
[V,D] = eig(A,B);
omega(i,1)=sqrt(D(1,1));
omega(i,2)=sqrt(D(2,2));
end
plot(m2/m1,omega(:,1),'b',m2/m1,omega(:,2),'r')
```

Výstupem upraveného algoritmu jsou pak úhlové frekvence kladiva a kovadliny (odmocniny vlastních čísel), které vykreslíme v závislosti na poměru jejich hmotností. Graf si můžeme prohlédnout na obrázku 6. Všimněme si nyní několika vlastností grafu a zamysleme se zda můžeme říci, že charakteristiky odpovídají očekávaným vlastnostem systému.

- Pozorujme například úhlovou frekvenci kmitů kladiva při poměru 0,25, tedy za podmínky totožných se vstupním příkladem v [5]. Frekvence odečtená z grafu je rovna očekávané, tedy 37,2879.
- Dále si uvědomme, že frekvence kmitů kladiva s jeho rostoucí hmotností m_2 klesá a naopak při nulové hmotnosti konverguje k nekonečnu.
- V neposlední řadě si všimněme jaká situace nastane při $m_2 = 0$. V tu chvíli se jedná z fyzikálního hlediska o kmitání samotného tělesa o hmotnosti m_1 na pružině o tuhosti k_1 . Z [11] víme, že frekvence kmitání tělesa na pružině je rovna

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (23)$$

Dosadíme-li do vzorce (23) hodnoty příslušné upevnění kovadliny, dostáváme hodnotu odpovídající frekvenci odečtené z grafu: $\omega_1 = 22,36$ rad/s.



Obrázek 6: Graf frekvencí v závislosti na poměru hmotností jednotlivých částí bucharu

Program v MATLABU a jím generovaný graf tedy poměrně věrně popisuje fyzikální princip situace nastávající v praktickém výrobním provozu.

Pozn.: Na tomto místě je třeba dodat, že reálný model vychází z počáteční rovnovážné polohy kovádky, která je později rozkmitána úderem kladiva. Hodnoty grafu v počátku tedy odpovídají pouze fyzikálnímu modelu nikoliv praxi.

5.1.2 Kovací buchar s proměnnou tuhostí zpracovávaného materiálu

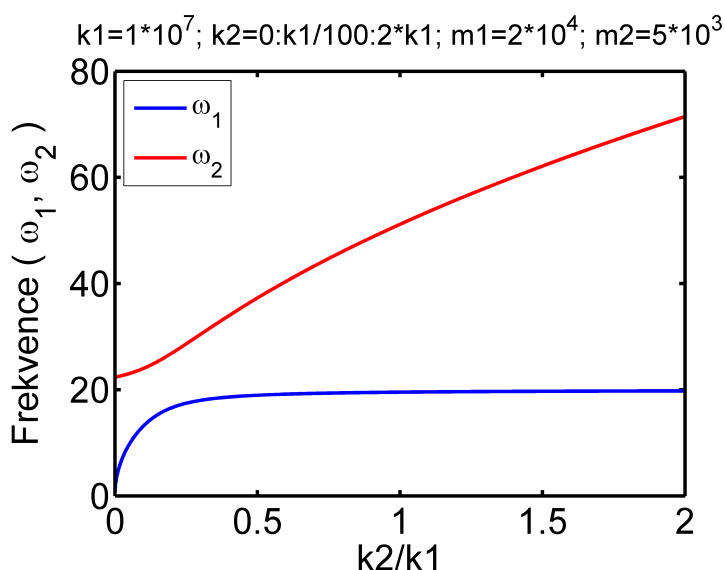
Uvažujme nyní buchar konstantních parametrů, tedy s permanentním ukotvením kovádky do země, které charakterizuje tuhost k_1 , a s neměnnou hmotností kladiva a podstavy. Máme tedy namodelovanou reálnou situaci ve strojírenském podniku, který na jednom bucharu opracovává materiály s různou tuhostí. V našem algoritmu budeme tuhost podobně jako v předchozí kapitole uvažovat v rozmezí od nuly, což modeluje případ, kdy buchar pracuje "naprázdno", až po hodnotu $2 \cdot 10^7$, čímž připouštíme i situaci, kdy buchar namísto deformace materiálu deformuje svoji vlastní podstavu. V MATLABU tedy píšeme

```

m1=20000;
m2=5*10^3;
k1=1*10^7;
k2min=0;
k2max=2*k1;
k2=k2min:k1/100:k2max;
B=[m1 0;0 m2];
for i=1:max(length(k2))
A=[k1+k2(i) -k2(i);-k2(i) k2(i)];
[V,D] = eig(A,B);
omega2(i,1)=sqrt(D(1,1));
omega2(i,2)=sqrt(D(2,2));
end
plot(k2/k1,omega2(:,1),'b',k2/k1,omega2(:,2),'r','LineWidth',2)

```

Vykreslením tohoto grafu dostáváme Obrázek 7.



Obrázek 7: Graf frekvencí v závislosti na poměru tuhosti zpracovávaného materiálu ku upevnění kovadliny

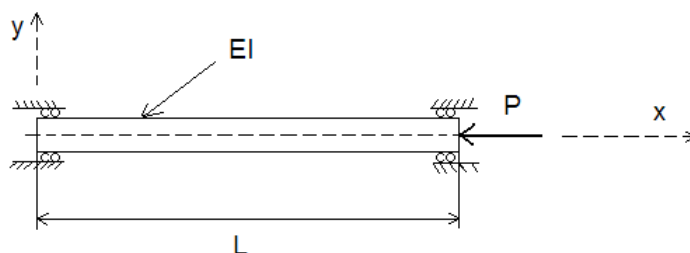
Všimněme si několika vlastností grafu příslušného kapitole 5.1.2.

- V první řadě se ujistíme o správnosti implementace programu tím, že odečteme hodnoty příslušné poměru 0,5. Tento bod totiž vyjadřuje naše základní zadání, tedy pro tuhost $k_2 = 5 \cdot 10^6$. Po odečtení příslušných hodnot potvrzujeme shodu s příkladem v [5].
- Dále je třeba si uvědomit, jakou situaci jsme si vlastně namodelovali. Jedná se o kmitání pružného systému "kladivo - kovadlina", jehož spouštěcím mechanismem je právě jeden úder kladiva do opracovávaného materiálu. Úhlové frekvence ω_1, ω_2 tedy demonstrují jakousi "odezvu" systému na daný úder kladiva, přičemž výchylky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ jsou jejich amplitudami.
- Vyhodnoňme nyní frekvence součástí bucharu pro tuhost $k_2 = 0$. Z fyzikálního hlediska se jedná o situaci, kdy je zpracovávaný materiál (pružina) tak měkký, že spolu tělesa vůbec neinteragují (nevidí se). Frekvence kmitů kovadliny tedy klesá k nule.
- Neméně zajímavou situaci popisuje tuhost $k_2 = \infty$. Tehdy dochází k pevnému nepružnému spojení obou částí stroje, které začnou společně kmitat s frekvencí $\omega_{12} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1+m_2}}$.

Pokud bychom chtěli nějakým způsobem problematiku spojenou s prací kovacího bucharu ještě rozšířit, bylo by jistě zajímavé hledat takzvané *vlastní frekvence*, tedy situace při kterých dochází k rezonanci částí stroje. Takovouto modifikaci bychom v ideálním případě řešili pomocí Fourierovy transformace. Protože ale v této práci hodláme demonstrovat ještě další aplikace problému vlastních čísel, ponecháme tento postup pouze jako námět k dalšímu studiu čtenáře.

5.2 Tlak na prut

Při popisu této aplikace vycházíme z [5, strana 277], [2] a [3], kdy uvažujeme situaci popsanou na obrázku 8.



Obrázek 8: Prut délky L vystavený tlaku P

Jedná se tedy o vetknutý prut délky L , jehož vlastnosti popisuje modul pružnosti v tahu E a moment setrvačnosti průřezu tyče I vzhledem k pohybové ose. Na prut působí tlak P . Postupným zvyšováním tlaku dochází k průhybu prutu, až při určité hodnotě $P = P_{krit}$ dojde k nevratné deformaci. Naším úkolem je takové P_{krit} najít. Problém budeme řešit nejprve klasickým výpočetním způsobem, a poté pomocí diferenční metody uvedené v kapitole 4.1.

5.2.1 Klasické řešení

Vyjdeme z následujícího okrajového problému

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad (24)$$

Řešení hledáme ve tvaru

$$y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad (25)$$

kde $\lambda = \frac{P}{EI}$. Dosadíme-li nyní okrajové podmínky $y(0) = y(L) = 0$, získáváme $y(x) = c_1 \sin(\lambda \cdot 0) + c_2 \cos(\lambda \cdot 0) = y(x) = c_1 \sin(\lambda \cdot L) + c_2 \cos(\lambda \cdot L) = 0$, z čehož vyplývá $c_2 = 0$, $c_1 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, tedy $\sqrt{\lambda}L = k\pi$; $k \in \mathbb{N}$.

Na tomto místě dosadíme za λ a vyjádříme tlakovou sílu P :

$$P_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 EI, \quad (26)$$

kde $k \in \mathbb{N}$. Kritické zatížení, též známé jako *Eulerovo kritické břemeno*, je rovno

$$P_{krit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (27)$$

Zpětným dosazením P_{krit} do řešení $y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ dostáváme řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$y(x) = c_1 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (28)$$

5.2.2 Řešení pomocí diferenční metody

Nyní začneme tuto úlohu řešit z pohledu problému vlastních čísel v obyčejné diferenční rovnici, přičemž využijeme metody uvedené v kapitole 4.1.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda y = 0, y(0) = y(L) = 0, \quad (29)$$

kde $\lambda = \frac{P}{EI}$ je hledané vlastní číslo. Nejprve si rozdělíme délku prutu L do intervalů pomocí n -uzlů, délka kroku je tedy $h = \frac{L}{n-1}$. Využitím vztahu (15) a jeho dosazením do (29) získáme rovnici

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \lambda y_i = 0, \quad (30)$$

kteřou lze upravit do tvaru

$$\frac{y_{i-1}}{h^2} - \left(\frac{2}{h^2} - \lambda\right)y_i + \frac{y_{i+1}}{h^2} = 0. \quad (31)$$

Toto vyjádření využijeme pro definici funkčních hodnot příslušných vnitřním uzlům x_i , dosadíme okrajové podmínky $y_1 = y_n = 0$, všechny rovnice vynásobíme (-1) krát a soustavu zapíšeme do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} - \lambda & \frac{-1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Pokud si rovnici (32) pozorně prohlédneme, zjistíme, že se jedná o klasický maticový problém vlastních čísel korespondující s rovnicí (2). V tomto případě je ale matice \mathbf{A} konkrétně rovna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & \frac{-1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{-1}{h^2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Implementujeme-li matici \mathbf{A} do softwaru MATLAB a pomocí funkce *eig* necháme vypočítat vlastní čísla této matice, získáme hodnoty λ . Uvědomme si ale, že hledanou veličinou této úlohy je kritické zatížení P , při kterém se prut nevratně (nepružně) zdeformuje. Lépe řečeno hledáme nejmenší zatížení, které způsobí nevratnou deformaci prutu o vlastnostech E , I a L . Toto zatížení tedy vyjádříme jako

$$P = \lambda EI \quad (34)$$

Zvolme v dalším postupu řešení metodou sítí při proměnném počtu n -zvolených uzlů. V MATLABU pak tvoříme funkci *prut(n,k)*

```
E=1; I=1; L=1;
N=[10 15 20 25 30 40 50 60 70 80 100];
```

kdy nejprve zavádíme proměnné parametry včetně počtu uzlů $n \in N$. Dále si pro srovnání necháme vypočítat zatížení Eulerova kritického břemena P dle postupu v 5.2.1, a také další zatížení P_k z rovnice (26)

$$P = (\pi^2 EI) / L^2$$

$$P_k = ((k\pi)^2 EI) / L^2$$

Nyní implementujeme výpočet vlastních čísel pro vstupní třídiagonální matici \mathbf{A} , která vznikla výše uvedenou diferenční metodou

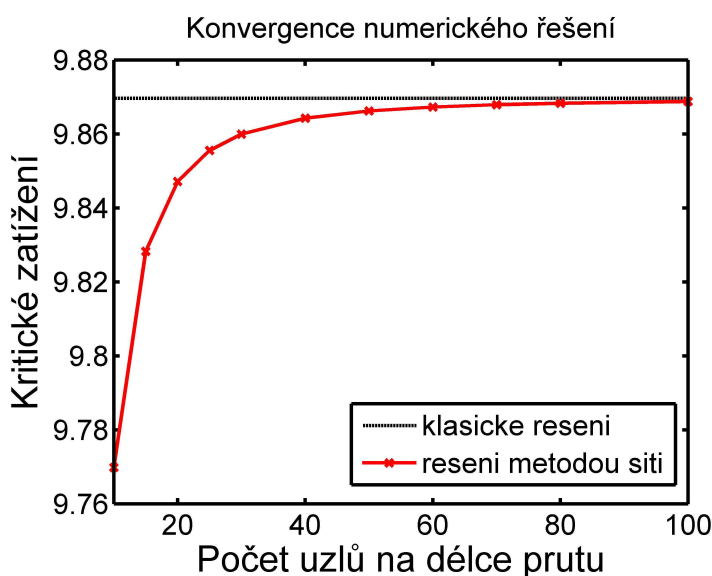
```
for i=1:length(N) ni=N(i); h=L/(ni-1);
A=diag(2/h^2*ones(1,ni-2))+diag(-1/h^2*ones(1,ni-3),1)+
+diag(-1/h^2*ones(1,ni-3),-1);
[V,D]=eig(A);
```

Dosazením do vztahu (34) pak získáme vlastní kritická zatížení p jako

```
PP=(D*E*I);
p=diag(PP);
```

Pozastavme v tuto chvíli nad konvergencí metody a vynesme do Obrázku 9 hodnoty kritických zatížení pro klasické a numerické řešení při různých délkách kroku (počtech uzlů)

```
minE(i)=min(p);
Ek(i)=p(k);
plot(N,Pk*ones(1,length(N)), 'k--', N, Ek, 'rx-');
```



Obrázek 9: Konvergence diferenční metody v závislosti na délce kroku.

Vidíme, že přesnost diferenční metody, která převádí problém vlastních čísel diferenciálních rovnic na klasický maticový problém vlastních čísel, roste s rostoucím počtem uzlů. Námí naprogramované numerické řešení se tedy na obrázku 9 postupně přibližuje k řešení klasickému $P = 9,8696$.

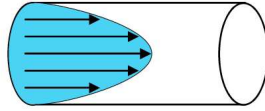
Na tomto místě je třeba také zmínit, že naše vstupní rovnice (24) je v praxi využívána pouze k výpočtu kritického zatížení. Dalším možným námětem by tedy mohla být diferenciální rovnice čtvrtého řádu popisující průhyb prutu při proměnném zatížení, což ponecháváme opět čtenáři k samostudiu.

5.3 Stabilita proudění

Poslední příklad aplikace problému vlastních čísel je situován do oblasti proudění tekutin a vychází z práce [4], která se zabývá problémem nestability laminárního proudění zkoumané pomocí Orrovy-Sommerfeldovy rovnice

$$(U - c)(\phi'' - \alpha^2\phi) - U''\phi = \frac{1}{i\alpha Re}(\phi'''' - 2\alpha\phi'' + \alpha^4\phi) \quad (35)$$

Než začneme úlohu vůbec řešit, přiblížíme si celý problém. Vycházíme ze situace na obrázku 10, který popisuje rychlostní profil laminárního proudění. V tomto případě se částice



Obrázek 10: Laminární proudění

pohybují vedle sebe jakoby ve vrstvách a proudnice se navzájem neprotínají. Dále uvažujeme malé poruchy proudění, které popisujeme proudovou funkcí poruch

$$\Psi = \phi e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (36)$$

kde ϕ je komplexní amplitudová funkce, α reprezentuje reálné vlnové číslo a komplexní číslo β vyjadřuje růst poruch v čase. Pomocí parciálních derivací této funkce získáme rychlostní fluktuace

$$u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \exp[i(\alpha x - \beta t)], \quad v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i\alpha \phi \exp[i(\alpha x - \beta t)] \quad (37)$$

Uvažujeme dvourozměrné paralelní proudění s rychlostním profilem U , přičemž rychlost takového proudění s ohledem na přípustěné fluktuace vypadá takto

$$(u, v) = (U + u', v') \quad (38)$$

Dosažením této rychlosti pro u' a v' definované v (37) do Navier-Stoeksových rovnic pro dvoudimenzionální nestlačitelné proudění a následnou linearizací a eliminací tlakového členu získáme náš počáteční problém (35). Toto odvození lze nalézt například ve [12].

Orr-Sommerfeldova rovnice tedy představuje problém vlastních hodnot diferenciální rovnice pro komplexní funkci ϕ a taktéž komplexní rychlost c

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_R + ic_I, \quad (39)$$

která je naším vlastním číslem.

Demonstrujme si nyní význam reálné a imaginární složky této rychlosti tím, že upravíme vyjádření rychlostní fluktuace. Píšeme

$$u' = \phi' \exp[i(\alpha x - \beta t)] = \phi' \exp[i\alpha(x - \frac{\beta}{\alpha}t)] \phi' \exp[i\alpha(x - ct)] = \phi' \exp[i\alpha x - i\alpha c_R t + \alpha c_I t] = \phi' \exp(\alpha c_I t) \cdot \exp[i\alpha(x - c_R t)] = \phi' \exp(\alpha c_I t) \cdot [\cos\alpha(x - c_R t) + i \sin\alpha(x - c_R t)].$$

V tuto chvíli dosadíme $\phi' = \phi_R' + \phi_I'$ a vyjádříme si reálnou složku fluktuace u' , která popisuje myšlené poruchy ve směru proudění

$$\operatorname{Re} u' = e^{(\alpha c_I t)} \cdot [\phi_R' \cos \alpha(x - c_R t) - \phi_I' \sin \alpha(x - c_R t)] \quad (40)$$

Pokud si pozorně prohlédneme konečný upravený tvar rychlostní fluktuace, zjistíme, že c_R představuje fázovou rychlost vln, kdežto c_I přímo ovlivňuje velikost amplitudy poruch. Je tedy parametrem ovlivňující hydrodynamickou stabilitu proudění, přičemž přímo závisí na Reynoldsově čísle, rychlostním profilu základního proudění $U(y)$ a vlnovém čísle $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$, kde λ je tentokrát vlnová délka. Reynoldsovým číslem rozumíme $Re = \frac{UL}{\nu}$, kde U je rychlostní profil, L charakteristický rozměr a ν kinematická viskozita.

Vlastní číslo této úlohy - komplexní rychlost c - budeme pozorovat v závislosti na výše uvedených proměnných parametrech (Re , U , α) v čase. Obecně je pro

- $c < 0$, proudění stabilní
- $c > 0$, proudění nestabilní
- $c = 0$, proudění neutrálně stabilní

V tuto chvíli máme tedy již definován komplexní problém vlastních čísel v diferenciální rovnici, který slouží k vyhodnocování stability různých druhů proudění. Pro účely naší práce si postačí ukázat postup řešení pro jeden druh proudění.

5.3.1 Poiseuilleovo proudění

Představme si proudění tekutiny v kanále obdélníkového průřezu, jehož rychlostní profil je v bezrozměrných souřadnicích dán vztahem

$$U(y) = 1 - y^2 \quad (41)$$

Pro řešení stability tohoto proudění využijeme rovnici (35), kterou navíc doplníme okrajovými podmínkami, které reprezentují útlum rozruchů na stěnách trubice a ulpívání tekutiny

$$\phi(y) = 0, \quad \phi'(y) = 0; \quad y = \pm 1 \quad (42)$$

K řešení tohoto problému využijeme Čebyševovu spektrální kolokační metodu zmíněnou ve 4.2 respektive ve [4] a [13].

V našem případě je úloha definována na intervalu $[0, 1]$, Čebyševovy polynomy ovšem na $[-1, 1]$. Zavádíme proto následující transformaci $y : [0, 1] \rightarrow z : [-1, 1]$, tedy

$$\phi(y) \rightarrow \phi\left(\frac{z+1}{2}\right) \quad (43)$$

Nyní je třeba aproximovat derivace transformované funkce $\phi\left(\frac{z+1}{2}\right)$. Ze vztahů pro derivace složené funkce získáme

$$\mathbf{D}^i = \frac{1}{2^i} \hat{\mathbf{D}}^i \quad (44)$$

Protože implementace Čebyševovy spektrální kolokační metody přesahuje úroveň této práce, využijeme již hotové kódy. Konkrétně derivační matice $\hat{\mathbf{D}}^i$ získáme pomocí kódu *chebdif.m*, který autoři poskytují ke stažení na stránce [14]. Využitím vztahů ze 4.2 a dosazením příslušných aproximací do Orrovy-Sommerfeldovy rovnice (35) obdržíme zobecněný problém vlastních čísel (s komplexním vlastním číslem c)

$$(\mathbf{A} - c\mathbf{B})\Phi = 0 \quad (45)$$

přičemž

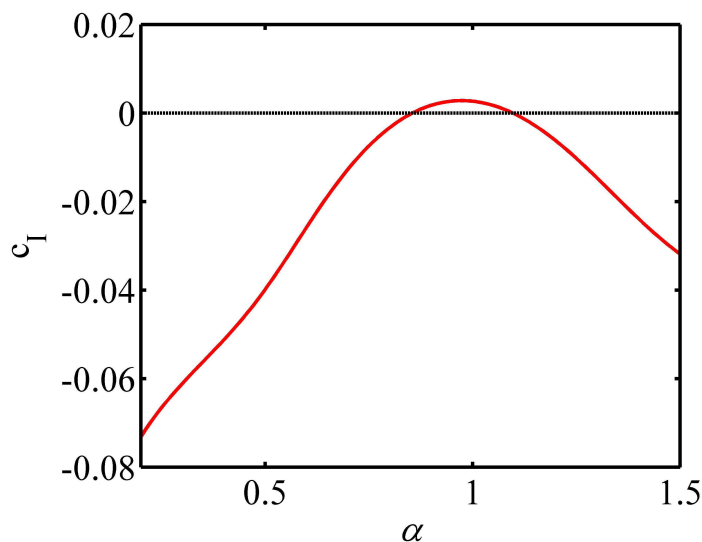
$$\mathbf{A} = \frac{i}{\alpha Re}(\mathbf{D}^4 - 2\alpha\mathbf{D}^2 + \alpha^4\mathbf{I}) + \mathbf{U}(\mathbf{D}^2 - \alpha^2\mathbf{I}) - \mathbf{U}'', \quad (46)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^2 - \alpha^2\mathbf{I} \quad (47)$$

Dodejme, že \mathbf{I} je jednotková matice, $\mathbf{U} = \text{diag } U(y_j)$, $\mathbf{U}'' = \text{diag } U''(y_j)$ jsou matice diagonální a $\Phi = [\tilde{\phi}_0, \dots, \tilde{\phi}_N]^T$ je vektor koeficientů Čebyševovy řady (17).

*Poznámka: V obecném případě použití Čebyševovy spektrální kolokační metody je zapotřebí uvažovat i modifikaci postupu vzhledem k okrajovým podmínkám dané úlohy. Nými uvažované podmínky (rovny 0) řeší již program **chebdif.m**.*

Pro výpočet vlastních čísel a vykreslení jejich závislosti na vlnovém čísle poruchových vln α jsme využili kód pro MATLAB poskytnutý vedoucím práce. Průběhy závislosti imaginární a reálné složky rychlosti c můžeme pozorovat na obrázku 11 respektive 12.



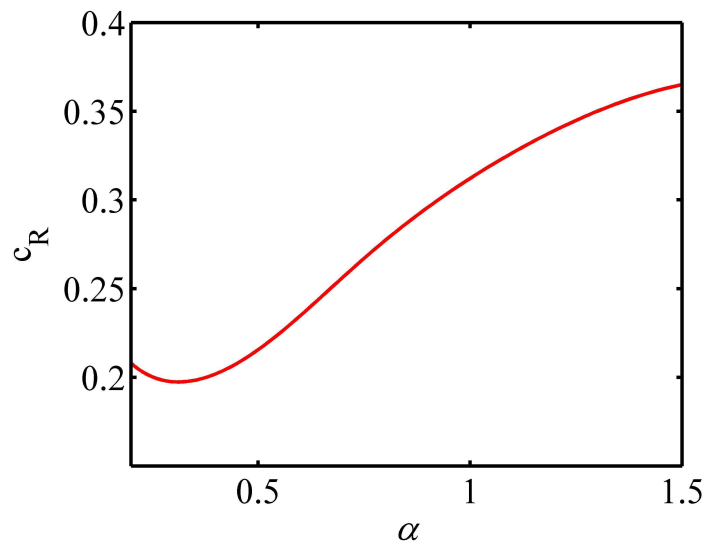
Obrázek 11: Rychlost c_I při $Re=8000$.

Na grafu 11 můžeme porovnávat stabilitu proudění pro různá vlnová čísla poruchových vln. Jak si lze všimnout, pro α v oblasti $0,85 \div 1,1$ je proudění nestabilní, přičemž maximální nestability nabývá pro $\alpha = 0,97$.

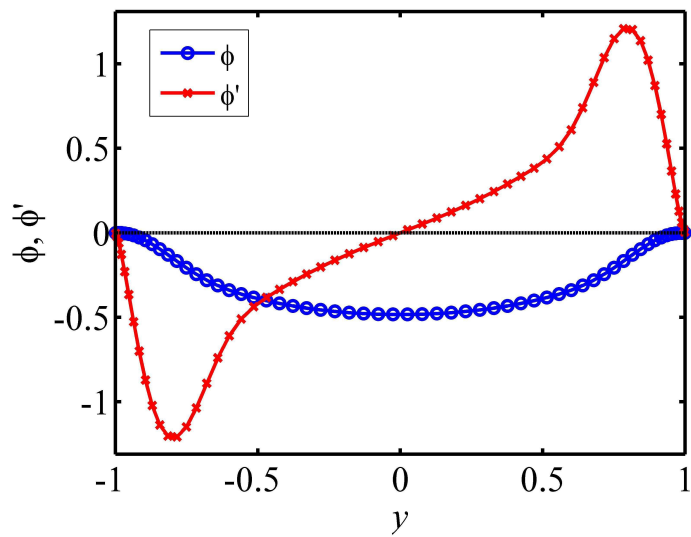
Obrázek 12 zase popisuje průběh fázové rychlosti c_R pro různá α . Zde můžeme konstatovat, že pozorované hodnoty se pohybují ve fyzikálně přijatelných mezích.

Na závěr si do obrázku 13 vykreslíme amplitudovou funkci Φ a její derivaci při maximální rychlosti c_I , přičemž y reprezentuje vzdálenost od středu potrubí. Vidíme, že maximálních hodnot nabývá amplitudová funkce ve středu kanálu, její derivace naopak na krajích. S ohledem na vztahy (37) nabývají pak extrémních hodnot i fluktuace u' a v' . Konkrétně pozorujeme maximální u' v blízkosti stěn, naopak největší v' uprostřed kanálu.

Nými popsáný příklad je pouze jakousi vstupní branou do oblasti stability mezních vrstev, kde se objevují složitější okrajové podmínky, rychlostní profily atd. Tuto problematiku lze studovat ve [4].



Obrázek 12: Rychlost c_R při $Re=2000$.



Obrázek 13: Amplitudová funkce při $Re=1000$.

6 Závěr

Na základě zadání a cíle této bakalářské práce jsme v kapitolách 2 a 3 provedli rešerši maticového problému vlastních čísel, v kapitole čtvrté byly pak uvedeny dvě konkrétní metody pro řešení úlohy vlastních čísel v diferenciálních rovnicích.

V praktické části jsme se věnovali postupně třem aplikacím. Nejprve jsme prozkoumali modelovou úlohu práce kovacího bucharu za proměnné hmotnosti kladiva respektive při proměnné tuhosti zpracovávaného materiálu. Problém jsme interpretovali s pomocí [5] jako soustavu dvou těles spojenou pružinami. K výpočtu a vynesení grafů jsme využili software MATLAB.

V druhém příkladě jsme hledali kritické zatížení, které nevratně zdeformuje prut daných vlastností. Nejprve jsme příslušnou diferenciální rovnici druhého řádu řešili klasickým výpočtem, a poté jsme se o totéž pokoušeli pomocí diferenční metody. Výsledkem pak byl graf demonstrující rychlost konvergence této numerické metody vzhledem k délce kroku. Třetí a z matematického hlediska nejobecnější příklad (komplexní vlastní čísla) byl situován do oblasti proudění tekutin. Zde jsme pozorovali jeho stabilitu s ohledem na daný rychlostní profil, Reynoldsovo číslo a vlnové číslo poruchové funkce. K řešení jsme využili Čebyševovu spektrální kolokační metodu, jejíž implementaci v MATLAB jsme získali ze [4], k vykreslení charakteristik jsme využili kód poskytnutý vedoucím práce.

Literatura

- [1] ČERMÁK, L. *Vybrané statě z numerických metod*. Vysoké učení technické, Brno, 1995.
Dostupné z WWW: <http://www.math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=2897>
- [2] ČERMÁK, L. *Numerické metody II*. Vysoké učení technické, Brno, 2004.
- [3] ČERMÁK, J., ŽENÍŠEK A. *Matematika III*. Vysoké učení technické, Brno, 2006.
- [4] KNOTEK, S., JÍCHA, M. *On solution of laminar flow instability using Orr-Sommerfeld equation*, Acta Technica ČSAV, Vol.2010, (2011), No.4, pp.383-394, ISSN 0001-7043, Institute of Thermomechanics, AS CR
- [5] RAO, S. S. *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Prentice Hall, 2002
- [6] MÍKA, S., PŘIKRYL P. *Numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. ZČU Plzeň, 1994.
- [7] REKTORYS, K. a spol. *Přehled užití matematiky II*. Prometheus, spol. s.r.o., Praha, 2003.
- [8] FADDĚJEV, D. K., FADDĚJEVOVÁ, V. N. *Numerické metody lineární algebry*. Státní nakladatelsví technické literatury, Praha, 1964.
- [9] NOVOTNÝ, K. *Výrobní stroje a zařízení*. Vysoké učení technické, Brno, 2002.
- [10] ČERMÁK, L., HLAVIČKA R. *Numerické metody*. Vysoké učení technické, Brno, 2006.
- [11] MRÁČEK, A. *Kmity*. Univerzita Tomáše Bati, Zlín, 2008.
Dostupné z WWW: <http://fyzika.ft.utb.cz/prednasky/F2_02%20kmity.pdf>
- [12] SCHLICHTING, H., GERSTEN, K. *Boundary-layer theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2000.
- [13] PICHÉ, R. *Solving BVPs using differentiation matrices*. Tampere University of Technology, Finland, 2007.
Dostupné z WWW: <<http://math.tut.fi/~piche/odyn/DMEexamples.pdf>>
- [14] HOEPFFENER, J. *PhD codes, blausius.m*. Institut D'Alembert, Paris, 2010.
Dostupné z WWW: <<http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/codes.php>>