

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Ing. Pavla Polejová

Přibližný výpočet určitého integrálu

Olomouc 2014

vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a uvedla veškerou použitou literaturu a zdroje.

.....

V Olomouci dne 11. 4. 2014

Poděkování

Děkuji doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za odborné vedení, trpělivost, cenné rady a postřehy, které mi velmi pomohly při zpracování bakalářské práce.

Obsah

| | |
|---|----|
| Úvod | 5 |
| Teoretická část | |
| 1 Metody numerické integrace | 6 |
| 1.1 Newton – Cotesovy vzorce | 7 |
| 1.1.1 Obdélníkové pravidlo | 8 |
| 1.1.2 Lichoběžníkové pravidlo | 10 |
| 1.1.3 Simpsonovo pravidlo | 12 |
| 1.2 Složené vzorce | 15 |
| 1.2.1 Složené obdélníkové pravidlo | 16 |
| 1.2.2 Složené lichoběžníkové pravidlo | 18 |
| 1.2.3 Složené Simpsonovo pravidlo | 19 |
| 1.3 Geometrická aplikace určitého integrálu | 21 |
| Praktická část | |
| 2 Řešené příklady | 23 |
| 2.1 Příklad 1 | 23 |
| 2.2 Příklad 2 | 26 |
| 2.3 Příklad 3 | 28 |
| 2.4 Příklad 4 | 32 |
| 2.5 Příklad 5 | 37 |
| 2.6 Příklad 6 | 42 |
| Závěr | 47 |
| Seznam použité literatury | 48 |
| Seznam obrázků | 49 |
| Seznam tabulek | 50 |
| Anotace | |

Úvod

S rozvojem výpočetní techniky se rozvíjí i metody numerického výpočtu určitého integrálu. Numerická integrace se používá u určitých integrálů, u nichž nelze nalézt primitivní funkci, případně je příliš obtížné najít primitivní funkci, nebo v případě, že funkce je zadána tabulkou. Ve své bakalářské práci se zaměřím na numerickou integraci pomocí obdélníkového, lichoběžníkového a Simpsonova pravidla. Metod pro numerickou integraci existuje sice více, nicméně tyto metody patří k nejčastěji používaným.

Cílem bakalářské práce je podat vysvětlení, jak jednotlivé numerické metody fungují a především jak se používají při přibližném výpočtu určitého integrálu.

Celá práce je rozdělena na teoretickou část a praktickou část.

V teoretické části je zpracována literární rešerše na dané téma. V první kapitole postupně odvodím Newton-Cotesovy vzorce pro obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo a jejich chyby. Ve druhé kapitole navážu na základní vzorce a odvodím složené vzorce pro tato pravidla, která se používají pro přesnější výpočet integrálů. Ve třetí kapitole stručně shrnu geometrickou aplikaci určitého integrálu, neboť v praktické části uvedu také příklady zaměřené na tuto problematiku.

Praktická část obsahuje sadu řešených příkladů, v nichž vysvětlím a zpracuji konkrétní použití jednotlivých metod při výpočtu určitého integrálu. U příkladů, které lze řešit i přímo, tedy podle definice, výsledek porovnam s výsledky numerických metod.

Teoretická část

1 Metody numerické integrace

Každá funkce, která je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, je integrace schopná (Křenek a Ostravský, 2009). Pro výpočet některých integrálů můžeme využít tabulek a klasických integračních metod jako je per partes nebo substituce (Kučera, 2006). Existují však také integrály, které nelze analyticky spočítat, protože nelze stanovit jejich primitivní funkce, nebo sice existuje řešení, nicméně je velmi zdlouhavé. V případě, že funkce bude zadaná tabulkou, určitý integrál nelze s využitím klasických integračních metod spočítat vůbec.

Numerická integrace se také často používá v případě, kdy nepotřebujeme znát zcela přesný výsledek, ale stačí nám pouze výsledek s požadovanou přesností (Tkadlec, 2011).

Metody numerické integrace tedy využíváme v případech, kdy:

- Integrál nelze spočítat klasickými analytickými metodami.
- Řešení sice existuje, nicméně je náročné a zdlouhavé.
- Funkce je zadaná tabulkou.

Výsledek numerické integrace ovlivňují dva faktory, a sice výběr samotné metody a nepřesný výpočet, který je dán zaokrouhlením při různých operacích či výpočtem funkční hodnoty. Nepřesný výpočet eliminujeme volbou přesnosti výpočtu.

Mezi nejpoužívanější přibližné metody výpočtu určitého integrálu $I = \int_a^b f(x) dx$ patří metoda obdélníková, lichoběžníková a Simpsonova (Laitochová, 2009). Tyto metody vycházejí z definice určitého integrálu spojitě funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$ jako limity integrálních součtů. Tedy za přibližnou hodnotu integrálu můžeme považovat hodnotu integrálního součtu v případě, že je délka všech částečných intervalů dostatečně malá.

Z geometrického hlediska si lze číslo I přestavit jako velikost plochy obrazce, která vznikne vymezením grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$ (Kučera, 2006). Numerickými metodami lze vypočítat velikost plochy přibližného obrazce pomocí několika funkčních hodnot. Postupuje se tak, že se dělicími body, jejichž vzdálenost je konstantní,

vedou rovnoběžky s osou y (Laitochová, 2009). Vzniká tak n křivočarých lichoběžníků, které se nahrazují v případě obdélníkové metody obdélníky, v případě lichoběžníkové metody lichoběžníky a v případě Simpsonovy metody se nahrazují lichoběžníky, které jsou ohraničeny obloukem paraboly o rovnici $y = ax^2 + bx + c$.

1.1 Newton – Cotesovy vzorce

Víme, že poměrně jednoduše lze integrovat polynomy (Kučera, 2006). Postupujeme tak, že k funkci $f(x)$ najdeme interpolační polynom $p_n(x)$ a ten integrujeme místo funkce $f(x)$.

Tedy

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx \quad (1.1)$$

Na intervalu $\langle a, b \rangle$ uvažujeme ekvidistantní uzly

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \text{kde } h = \frac{b-a}{n}.$$

Interpolační polynom k funkci $f(x)$ pak zapíšeme v Lagrangeově tvaru

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x), \quad \text{kde } \varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (1.2)$$

Dosazením výrazu $p_n(x)$ do pravé strany přibližné nerovnosti (1.1) dostaneme Newton–Cotesovy vzorce:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad (1.3)$$

$$\text{kde } w_i = \int_a^b \varphi_i(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.4)$$

jsou integrační váhy.

Chybu integrace R_n na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyjádříme pomocí chyby interpolace (Hasík, 2008, s. 94): Předpokládáme, že funkce $f(x)$ je $(n+1)$ -krát diferencovatelná. Pak chyba integrace je

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) dx, \end{aligned} \quad (1.5)$$

kde $\xi \in \langle a, b \rangle$, x je libovolný bod z intervalu $\langle a, b \rangle$ a tento interval $\langle a, b \rangle$ obsahuje všechny uzly x_i interpolace. Dále je nutné provést netriviální úvahy zvlášť pro n liché, resp. sudé:

Existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ takové, že pro chybu jednoduchého Newtonova-Cotesova vzorce n -tého stupně pro n liché platí

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) dx \quad (1.6)$$

a pro n sudé platí

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b (x-x_0)^2(x-x_1)\dots(x-x_n) dx. \quad (1.7)$$

1.1.1 Obdélníkové pravidlo

Toto pravidlo získáme, jestliže do vztahu (1.2) dosadíme $n=0$ a $x_0 = \frac{a+b}{2}$ (Kučera, 2006). Interpoláčním polynomem je pak konstantní funkce $p_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Dostáváme tedy

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = I_{Obd} \quad (1.8)$$

$$\text{Důkaz: } \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) [x]_a^b = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = I_{Obd}$$

Pro interpolační chybu obdélníkového pravidla za předpokladu, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou druhou derivaci, platí:

$$I - I_{Obd} = \frac{f''(\xi)}{24} (b-a)^3 \quad (1.9)$$

Důkaz: Způsob odvození chyby provedeme podle Dalíka (2008).

Podle Taylorovy věty existuje takový bod $\xi \in (a, b)$, že

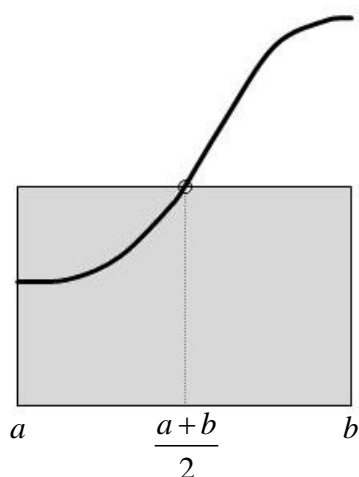
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$$

Odvození chyby tedy pro $x_0 = \frac{a+b}{2}$ je

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2 \right] dx = \\ &= f(x_0)(b-a) + f'(x_0) \left[\frac{(x-x_0)^2}{2} \right]_a^b + \frac{1}{2} f''(\xi) \left[\frac{(x-x_0)^3}{3} \right]_a^b = \\ &= f(x_0)(b-a) + \frac{1}{2} f''(\xi) \left[\frac{(b-x_0)^3}{3} - \frac{(a-x_0)^3}{3} \right] = \\ &= f(x_0)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{24} (b-a)^3 \end{aligned}$$

$$I - I_{Obd} = \frac{f''(\xi)}{24} (b-a)^3$$

Grafické znázornění obdélníkového pravidla je uvedeno na obr. 1.



Obr. 1: Obdélníkové pravidlo

1.1.2 Lichoběžníkové pravidlo

Dosazením $n=1$, $x_0=a$, $x_1=b$ do vztahu (1.2) získáme lichoběžníkové pravidlo

(Kučera, 2006). Interpolační polynom je přímka $p_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$.

Pak

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] = I_{Lich}. \quad (1.10)$$

Důkaz: Podle Hasíka (2008) použijeme substituci: $x = a + (b-a)t$, kde $t \in \langle 0;1 \rangle$,

$$dx = (b-a) dt$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \right] dx = \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a) dx =$$

$$= \frac{f(a)}{a-b} \int_0^1 [a + (b-a)t - b](b-a) dt + \frac{f(b)}{b-a} \int_0^1 [a + (b-a)t - a](b-a) dt =$$

$$= \frac{f(a)}{a-b} \int_0^1 (b-a)^2 (t-1) dt + \frac{f(b)}{b-a} \int_0^1 (b-a)^2 t dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -(b-a)f(a)\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_0^1 + (b-a)f(b)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \\
&= \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)] = I_{Lich}
\end{aligned}$$

Pro interpolační chybu lichoběžníkového pravidla za předpokladu, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou druhou derivaci, platí (Čermák a Hlavička, 2008) ::

$$I - I_{Lich} = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad (1.11)$$

Důkaz: Způsob odvození chyby provedeme podle Hasíka (2008).

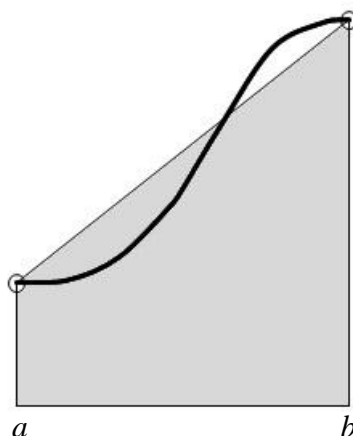
Interpolační chyba má podle vztahu (1.6) pro interpolační polynom $p_1(x)$ s uzly

$$x_0 = a, \quad x_1 = b \quad \text{tvar:} \quad R(f) = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
I - I_{Lich} &= \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \frac{f''(\xi)}{2} \left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx \right]_a^b = \\
&= -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3
\end{aligned}$$

Grafické znázornění lichoběžníkového pravidla je uvedeno na obr. 2.



Obr. 2: Lichoběžníkové pravidlo

1.1.3 Simpsonovo pravidlo

Dosazením $n=2$, $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$ do vztahu (1.2) získáme Simpsonovo pravidlo. Interpoláční polynom je kvadratick funkce

$$p_2(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} f(b)$$

Vypočteme integrační váhy, přičemž použijeme substituci (Kučera, 2006):

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \text{ kde } t \in \langle -1; 1 \rangle,$$

$$dx = \frac{b-a}{2} dt$$

$$w_0 = \int_a^b \varphi_0(x) dx = \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t - \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t - b\right)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} \cdot \frac{b-a}{2} dt = \\
&= \int_{-1}^1 \frac{(b-a)t(t-1)}{4} dt = \frac{b-a}{4} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6}(b-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= \int_a^b \varphi_1(x) dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} dx = \\
&= \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t - a\right)\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t - b\right)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} \cdot \frac{b-a}{2} dt = \\
&= \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} (1+t)(1-t) dt = \frac{b-a}{2} \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{6}(b-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= \int_a^b \varphi_2(x) dx = \int_a^b \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} dx = \\
&= \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t - a\right)\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} \cdot \frac{b-a}{2} dt = \\
&= \int_{-1}^1 \frac{(b-a)t(1+t)}{4} dt = \frac{b-a}{4} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6}(b-a)
\end{aligned}$$

Tedy

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = I_{Simps} \quad (1.12)$$

Pro interpolační chybu Simpsonova pravidla za předpokladu, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou čtvrtou derivaci, platí (Čermák a Hlavička, 2008) :

$$I - I_{Simps} = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \quad (1.13)$$

Důkaz: Způsob odvození chyby provedeme podle Hasíka (2008).

Interpolační chyba má podle vztahu (1.7) pro interpolační polynom $p_2(x)$ s uzly

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b \quad \text{tvar: } R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_a^b (x-a)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx.$$

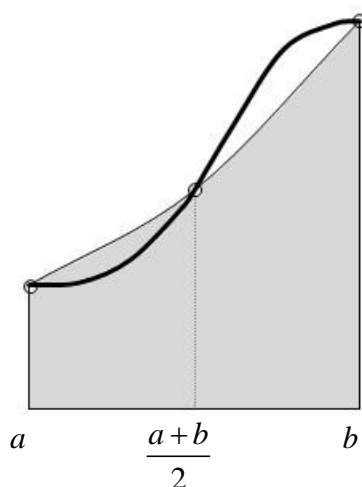
Použijeme substituci $x = a + \frac{b-a}{2}t$, kde $t \in \langle 0; 2 \rangle$,

$$dx = \frac{b-a}{2} dt$$

Tedy

$$\begin{aligned} I - I_{Simps} &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_a^b (x-a)^2 \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx = \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_a^b \left(a + \frac{b-a}{2}t - a\right)^2 \left(a + \frac{b-a}{2}t - \frac{a+b}{2}\right) \left(a + \frac{b-a}{2}t - b\right) \frac{b-a}{2} dt = \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_0^2 \left(\frac{b-a}{2}t\right)^2 \left(\frac{a-b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \left(a-b + \frac{b-a}{2}t\right) \frac{b-a}{2} dt = \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_0^2 \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 t^2 (t-1)(t-2) dt = \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left[\frac{t^5}{5} - \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) = \\ &= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \end{aligned}$$

Grafické znázornění Simpsonova pravidla je uvedeno na obr. 3.



Obr. 3: Simpsonovo pravidlo

1.2 Složené vzorce

Složené vzorce se používají pro přesnější výpočet integrálů.

U složeného obdélníkového a složeného lichoběžníkového pravidla rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ ekvidistantně na n menších podintervalů s krokem dělení h

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \text{kde } h = \frac{b-a}{n}$$

a na každém podintervalu pak použijeme jedno z pravidel (obdélníkové nebo lichoběžníkové) (Čermák a Hlavička, 2008)

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (2.1)$$

V případě složeného Simpsonova pravidla rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ ekvidistantně na $2n$ menších podintervalů s krokem dělení h

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n, \quad \text{kde } h = \frac{b-a}{2n}$$

a na každém podintervalu pak použijeme Simpsonovo pravidlo (Kučera, 2006)

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{2h}{6} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]. \quad (2.2)$$

1.2.1 Složené obdélníkové pravidlo

Složené obdélníkové pravidlo získáme, jestliže nahradíme každý z integrálů (2.1) jednoduchým obdélníkovým pravidlem

$$\begin{aligned} I_{SO} &= h \left[f\left(x_0 + \frac{1}{2}h\right) + f\left(x_1 + \frac{1}{2}h\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{1}{2}h\right) \right] = \\ &= h \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Chybu dostaneme tak, že sečteme n -krát dílčí chybu jednoduchého pravidla $\frac{1}{24} f''(\xi_i) h^3$ za předpokladu, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou druhou derivaci:

$$\begin{aligned} R_O^n(f) &= \frac{1}{24} f''(\xi_1) h^3 + \frac{1}{24} f''(\xi_2) h^3 + \dots + \frac{1}{24} f''(\xi_n) h^3 = \\ &= \frac{1}{24} h^2 (b-a) \left[\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_n)}{n} \right] = \\ &= \frac{b-a}{24} f''(\xi) h^2, \quad \text{kde } \xi \in \langle a, b \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pozn. Ze spojitosti $f''(x)$ plyne, že aritmetický průměr $\frac{[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_n)]}{n}$ druhých derivací je roven druhé derivaci $f''(\xi)$ v libovolném bodě $\xi \in \langle a, b \rangle$ (Čermák a Hlavička, 2008, s.70).

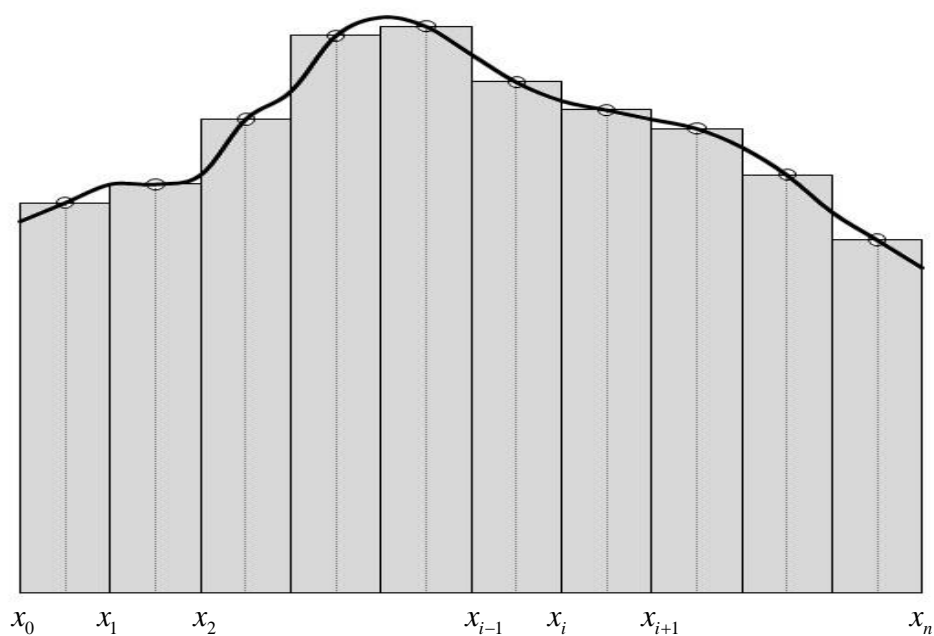
Protože se ve vztahu (2.4) vyskytuje blíže neurčené číslo ξ , které leží kdekoli v intervalu $\langle a, b \rangle$, označíme

$$M_2 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$$

a chybu pak odhadneme podle vztahu (Čermák a Hlavička, 2008)

$$|R_o^n(f)| \leq \frac{b-a}{24} M_2 h^2. \quad (2.5)$$

Grafické znázornění složeného obdélníkového pravidla je uvedeno na obr. 4.



Obr. 4: Složené obdélníkové pravidlo

1.2.2 Složené lichoběžníkové pravidlo

Složené lichoběžníkové pravidlo získáme, jestliže nahradíme každý z integrálů (2.1) jednoduchým lichoběžníkovým pravidlem (Kučera, 2006)

$$\begin{aligned} I_{SL} &= h \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] = \\ &= \frac{1}{2} h \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Chybu dostaneme tak, že sečteme n -krát dílčí chybu jednoduchého pravidla $-\frac{1}{12} f''(\xi_i) h^3$ za předpokladu, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou druhou derivaci:

$$\begin{aligned} R_L^n(f) &= -\frac{1}{12} f''(\xi_1) h^3 - \frac{1}{12} f''(\xi_2) h^3 - \dots - \frac{1}{12} f''(\xi_n) h^3 = \\ &= -\frac{1}{12} h^2 (b-a) \left[\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_n)}{n} \right] = \\ &= -\frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \text{kde } \xi \in \langle a, b \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

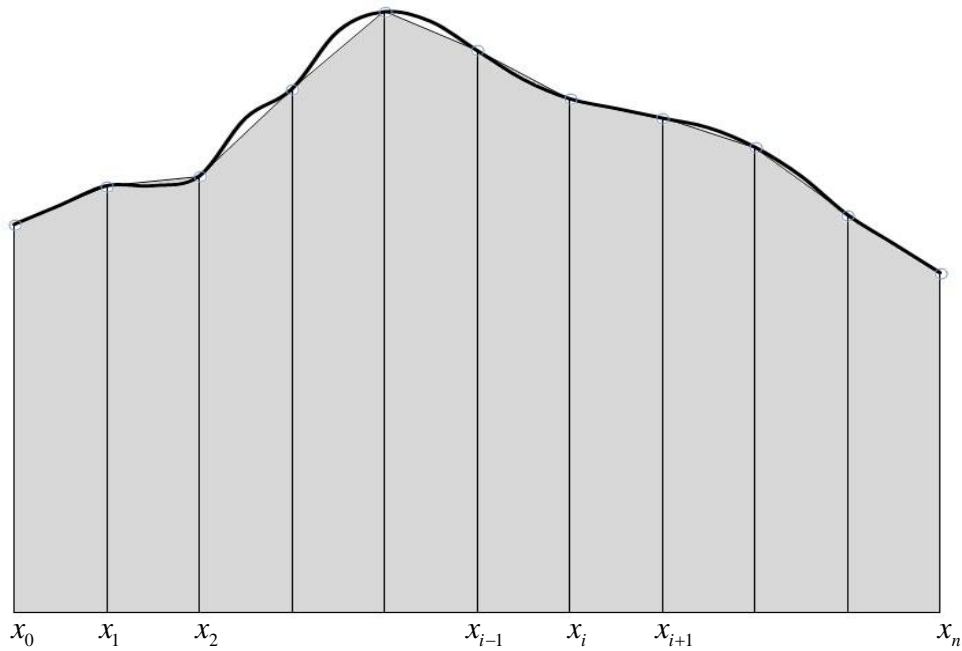
Protože se ve vzorci (2.7) vyskytuje blíže neurčené číslo ξ , které leží kdekoli v intervalu $\langle a, b \rangle$, označíme

$$M_2 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$$

a chybu pak odhadneme podle vztahu (Čermák a Hlavička, 2008)

$$|R_L^n(f)| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2. \quad (2.8)$$

Grafické znázornění složeného lichoběžníkového pravidla je uvedeno na obr. 5.



Obr. 5: Složené lichoběžníkové pravidlo

1.2.3 Složené Simpsonovo pravidlo

V případě použití složeného Simpsonova pravidla rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na $2n$ stejně dlouhých dílků. Získáme tak lichý počet uzlů a na každém podintervalu použijeme Simpsonovo pravidlo (Kučera, 2006)

$$\begin{aligned}
 I_{SS} &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_{2n})] = \\
 &= \frac{1}{3} h \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right] \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Chybu dostaneme tak, že sečteme chyby na podintervalech $-\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi_i) h^5$ za předpokladu, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou čtvrtou derivaci:

$$R_S^n(f) = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi_1) h^5 - \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi_2) h^5 - \dots - \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi_{2n}) h^5 =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{90} h^4 \frac{b-a}{2n} \left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) + \dots + f^{(4)}(\xi_n) \right] = \\
&= -\frac{1}{90} h^4 \frac{b-a}{2} \left[\frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) + \dots + f^{(4)}(\xi_n)}{n} \right]
\end{aligned}$$

Průměr čtvrtých derivací $\frac{[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) + \dots + f^{(4)}(\xi_n)]}{n}$ nahradíme členem $f^{(4)}(\xi)$

v libovolném bodě $\xi \in \langle a, b \rangle$ a dostáváme tak (Čermák a Hlavička, 2008)

$$R_s^n(f) = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi) h^4, \quad \text{kde } \xi \in \langle a, b \rangle. \quad (2.10)$$

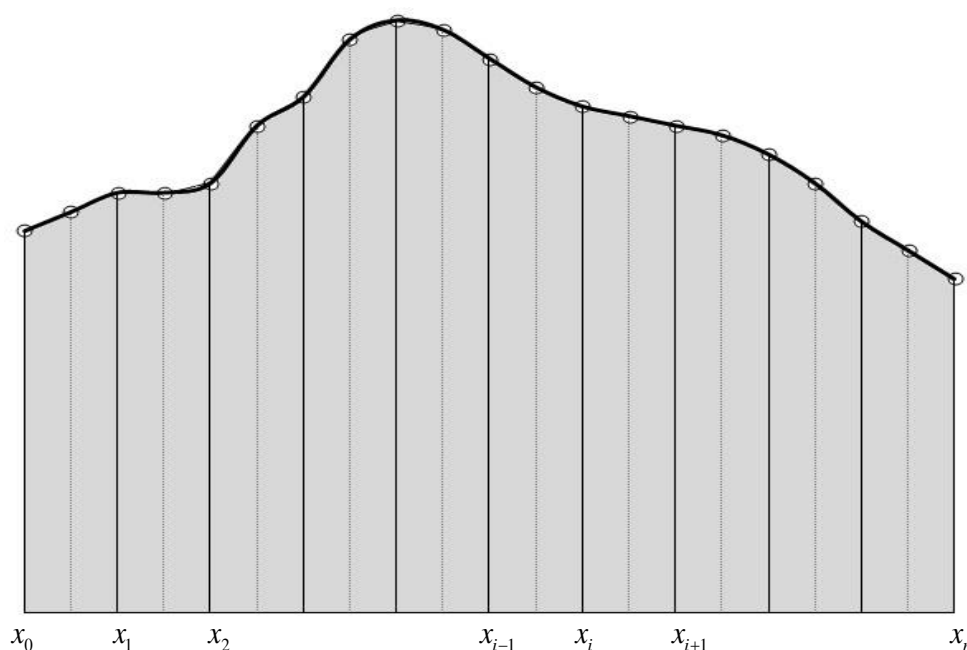
Protože se ve vzorci (2.10) vyskytuje blíže neurčené číslo ξ , které leží kdekoliv v intervalu $\langle a, b \rangle$, označíme

$$M_4 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

a chybu pak odhadneme podle vztahu

$$|R_s^n(f)| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4. \quad (2.11)$$

Grafické znázornění složeného Simpsonova pravidla je uvedeno na obr. 6.



Obr. 6: Složené Simpsonovo pravidlo

1.3 Geometrická aplikace určitého integrálu

Určitý integrál se používá nejen v geometrii, kde slouží k určení obsahu rovinné plochy, délky křivky, obsahu pláště rotačního tělesa, objemu rotačních těles, ale také ve fyzice k určení velikosti vykonané práce, statických momentů, či souřadnic těžiště (Laitochová, 2009).

V praktické části bakalářské práce jsou uvedeny příklady, které jsou zaměřeny na aplikaci určitého integrálu v geometrii. Z toho důvodu pouze stručně shrnu vzorce, které potřebujeme pro jejich řešení. Vztahy uvádím bez důkazů, ty jsou ponechány k samostatnému studiu.

Obsah rovinné plochy

Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná a integrovatelná, pak obsah obrazce křivočarého lichoběžníka ohraničená shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x je dán vztahem

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.12)$$

Délka křivky

Je-li funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, pak délka rovinné křivky je dána vztahem

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2.13)$$

Objem rotačního tělesa

Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá a nezáporná, pak objem rotačního tělesa, které vznikne rotací hladkého oblouku AB křivky $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $x \in \langle a, b \rangle$ kolem osy x , je dán vztahem

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (2.14)$$

Praktická část

2 Řešené příklady

2.1 Příklad 1

Vypočítejte integrál $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx$ obdélníkovým, lichoběžníkovým a Simpsonovým pravidlem. Výsledky porovnejte s přesnou hodnotou (Hasík, 2008, s. 103).

Řešení

Výpočet podle definice

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,292893$$

Výpočet numerickými metodami

Vypočítáme funkční hodnoty, které potřebujeme pro dosazení do vzorců jednotlivých metod:

$$f(a) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8} \doteq 0,382683$$

$$f(b) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Výpočet integrálu obdélníkovou metodou:

$$I_{Obd} = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \doteq 0,300559$$

Použitím vzorce (1.8) jsme se dopustili absolutní chyby

$$|I - I_{Obd}| = |0,292893 - 0,300559| = 0,007666.$$

Dosazením do vzorce (1.9) pro odhad chyby, kde

$$M_2 = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)| = \max_{x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)} |-\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

dostáváme

$$|I - I_{Obd}| \leq \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3 \sqrt{2}}{3072} \doteq 0,014274.$$

Výpočet integrálu lichoběžníkovou metodou:

$$I_{Lich} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,277680.$$

Použitím vzorce (1.10) jsme se dopustili absolutní chyby

$$|I - I_{Lich}| = |0,292893 - 0,277680| = 0,015213.$$

Dosazením do vzorce (1.11) pro odhad chyby, kde

$$M_2 = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)| = \max_{x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)} |-\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

dostáváme

$$|I - I_{Lich}| \leq \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3 \sqrt{2}}{1536} \doteq 0,028548.$$

Výpočet integrálu Simpsonovou metodou:

$$I_{Simps} = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = \frac{\pi}{24} \cdot \left(4 \sin \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \doteq 0,292933.$$

Použitím vzorce (1.12) jsme se dopustili absolutní chyby

$$|I - I_{Simps}| = |0,292893 - 0,292933| = 0,000040.$$

Dosažením do vzorce (1.13) pro odhad chyby, kde

$$M_4 = \max_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)} |\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

dostáváme

$$|I - I_{Simps}| \leq \frac{\sqrt{2}}{90} \cdot \left(\frac{\pi}{8}\right)^5 = \frac{\pi^5 \sqrt{2}}{180 \cdot 8^5} \doteq 0,000074.$$

Porovnáme výsledky dosažené jednotlivými metodami s výsledkem získaným podle definice:

| | |
|-----------------------------------|----------|
| Obdélníková metoda: | 0,300559 |
| Lichoběžníková metoda: | 0,277680 |
| Simpsonova metoda: | 0,292933 |
| Hodnota integrálu podle definice: | 0,292893 |

Porovnáním výsledků je zřejmé, že nejpřesnější výsledky v tomto příkladě dostáváme použitím Simpsonovy metody, pak obdélníkovou metodou a nejméně přesná je lichoběžníková metoda.

2.2 Příklad 2

S využitím složeného Simpsonova pravidla vypočítejte integrál $I = \int_0^3 x\sqrt{1+x^2} dx$.

Pro výpočet zvolte $n = 6$. Výsledky porovnejte s přesnými hodnotami (Hasík, 2008, s. 104).

Řešení

Výpočet podle definice

$$I = \int_0^3 x\sqrt{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \quad x=0 \rightarrow t=1 \\ 2x dx = dt \quad x=3 \rightarrow t=10 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} =$$

$$= \frac{1}{3} (10\sqrt{10}) - 1 \doteq 10,207592$$

Výpočet s využitím složeného Simpsonova pravidla

Interval $I = \langle 0,3 \rangle$ rozdělíme na 12 menších podintervalů s krokem dělení

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{3}{2 \cdot 6} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Sestavíme tabulku funkčních hodnot funkce $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$:

| i | x_i | $f(x_i)$ | i | x_i | $f\left(x_i + \frac{1}{2}h\right)$ |
|-----|-------|--------------|-----|-------|------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0,25 | 0,2576941016 |
| 2 | 0,5 | 0,5590169944 | 3 | 0,75 | 0,9375 |
| 4 | 1 | 1,4142135624 | 5 | 1,25 | 2,0009763242 |
| 6 | 1,5 | 2,7041634566 | 7 | 1,75 | 3,5272377649 |
| 8 | 2 | 4,4721359550 | 9 | 2,25 | 5,5399825135 |
| 10 | 2,5 | 6,7314560089 | 11 | 2,75 | 8,0469811886 |
| 12 | 3 | 9,4868329805 | | | |

Tabulka 1: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

Vypočítáme součty, které potřebujeme pro dosazení do vzorců:

$$\sum_{i=1}^5 f(x_{2i}) = 15,880985977$$

$$\sum_{i=1}^6 f(x_{2i-1}) = 20,310371893$$

Podle vzorce (2.9) dostáváme

$$\begin{aligned} I_{SS} &= \frac{1}{3}h \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot 20,310371893 + 2 \cdot 15,880985977 + 9,4868329805) \doteq 10,207524. \end{aligned}$$

Použitím vzorce (2.9) jsme se dopustili absolutní chyby

$$|I - I_{SS}| = |10,207592 - 10,207524| = 0,000068.$$

Dosazením do vzorce (2.11) pro odhad chyby, kde

$$\begin{aligned} M_4 &= \max_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in (0,3)} \left| \frac{-15x}{(1+x^2)^3 \sqrt{1+x^2}} \right| = \\ &= \frac{15 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{1}{6}} \right)^2 \right]^3 \sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{1}{6}} \right)^2}} = \frac{15}{\sqrt{6} \cdot \left(\frac{7}{6} \right)^3 \cdot \sqrt{\frac{7}{6}}} = \frac{3240}{343\sqrt{7}}, \end{aligned}$$

dostáváme

$$|R_s^{12}(f)| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4 = \frac{3}{180} \cdot \frac{3240}{343\sqrt{7}} \cdot 0,25^4 = \frac{27}{43904\sqrt{7}} \doteq 0,000232.$$

Skutečná hodnota integrálu je 10,207592. Použitím Simpsonova pravidla jsme vypočítali, že analytický výsledek leží v intervalu $(10,207524 - 0,000232; 10,207524 + 0,000232)$, tedy v intervalu $(10,207292; 10,207756)$. Získali jsme tak výsledek s chybou menší než 10^{-3} .

2.3 Příklad 3

Vypočítejte hodnotu integrálu $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx$ pomocí složeného lichoběžníkového pravidla pro $n = 4$ a $n = 8$. Určete chybu obou výpočtů, porovnejte vypočtené hodnoty s přesnými hodnotami (Hasík, 2008, s. 104).

Jak velké n je nutné zvolit, abychom dosáhli výsledku s přesností 10^{-8} ?

Řešení

Výpočet podle definice

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,3465735903$$

Výpočet pomocí složeného lichoběžníkového pravidla

$n = 4$

Interval $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ rozdělíme na 4 menší podintervaly s krokem dělení

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

Sestavíme tabulku funkčních hodnot funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$:

| i | x_i | $f(x_i)$ |
|-----|-------------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | $\frac{\pi}{16}$ | 0,198912367 |
| 2 | $\frac{\pi}{8}$ | 0,414213562 |
| 3 | $\frac{3\pi}{16}$ | 0,668178638 |
| 4 | $\frac{\pi}{4}$ | 1 |

Tabulka 2: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$ pro $n = 4$

Vypočítáme součet, který potřebujeme pro dosazení do vzorce:

$$\sum_{i=1}^3 f(x_i) = 1,281304568$$

Dosazením do vzorce (2.6) dostáváme

$$I_{SL} = \frac{1}{2} h \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot (2 \cdot 1,281304568 + 1) \doteq 0,3497583340.$$

Použitím vzorce (2.6) jsme se dopustili absolutní chyby

$$|I - I_{SL}| = |0,3465735903 - 0,3497583340| = 0,0031847437.$$

Dosazením do vzorce (2.8) pro odhad chyby, kde

$$M_2 = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)| = \max_{x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)} \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = 4,$$

dostáváme

$$|R_L^4(f)| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2 = \frac{\pi}{12} \cdot 4 \cdot \left(\frac{\pi}{16}\right)^2 = \frac{\pi^3}{3072} \doteq 0,010093189.$$

$n = 8$

Interval $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ rozdělíme na 8 menších podintervalů s krokem dělení

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{4}}{8} = \frac{\pi}{32}.$$

Sestavíme tabulku funkčních hodnot funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$:

| i | x_i | $f(x_i)$ | i | x_i | $f(x_i)$ |
|-----|-------------------|-------------|-----|-------------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | $\frac{\pi}{32}$ | 0,098491403 | 5 | $\frac{5\pi}{32}$ | 0,534511136 |
| 2 | $\frac{\pi}{16}$ | 0,198912367 | 6 | $\frac{3\pi}{16}$ | 0,668178638 |
| 3 | $\frac{3\pi}{32}$ | 0,303346684 | 7 | $\frac{7\pi}{32}$ | 0,820678791 |
| 4 | $\frac{\pi}{8}$ | 0,414213562 | 8 | $\frac{\pi}{4}$ | 1 |

Tabulka 3: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$ pro $n = 8$

Vypočítáme součet, který potřebujeme pro dosazení do vzorce:

$$\sum_{i=1}^7 f(x_i) = 3,038332581$$

Dosazením do vzorce (2.6) dostáváme

$$I_{SL} = \frac{1}{2}h \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (2 \cdot 3,038332581 + 1) \doteq 0,3473749889.$$

Použitím vzorce (2.6) jsme se dopustili absolutní chyby

$$|I - I_{SL}| = |0,3465735903 - 0,3473749889| = 0,0008013986.$$

Dosazením do vzorce (2.8) pro odhad chyby, kde

$$M_2 = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)| = \max_{x \in (0, \frac{\pi}{4})} \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = 4,$$

dostáváme

$$|R_L^8(f)| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2 = \frac{\pi}{12} \cdot 4 \cdot \left(\frac{\pi}{32} \right)^2 = \frac{\pi^3}{12288} \doteq 0,0025232973.$$

Porovnáme jednotlivé výsledky:

Složené lichoběžníkové pravidlo

pro $n = 4$: 0,349758

pro $n = 8$: 0,347375

Hodnota integrálu podle definice: 0,346574

Z výsledků je patrné, že rozdělení intervalu na více menších podintervalů vede k přesnějším výpočtům integrálu.

Stanovení n pro výpočet integrálu s přesností 10^{-8}

Ze vzorce (2.8) vyjádříme \underline{n} :

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12R_L^n(f)} M_2}.$$

Dosazením dopočítáme \underline{n} :

$$n \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{12 \cdot 10^{-8}} \cdot 4} = \sqrt{\frac{4\pi^3}{768 \cdot 10^{-8}}} \doteq 4018,59.$$

Abychom dosáhli přesnosti 10^{-8} , musíme zvolit $n \geq 4019$.

2.4 Příklad 4

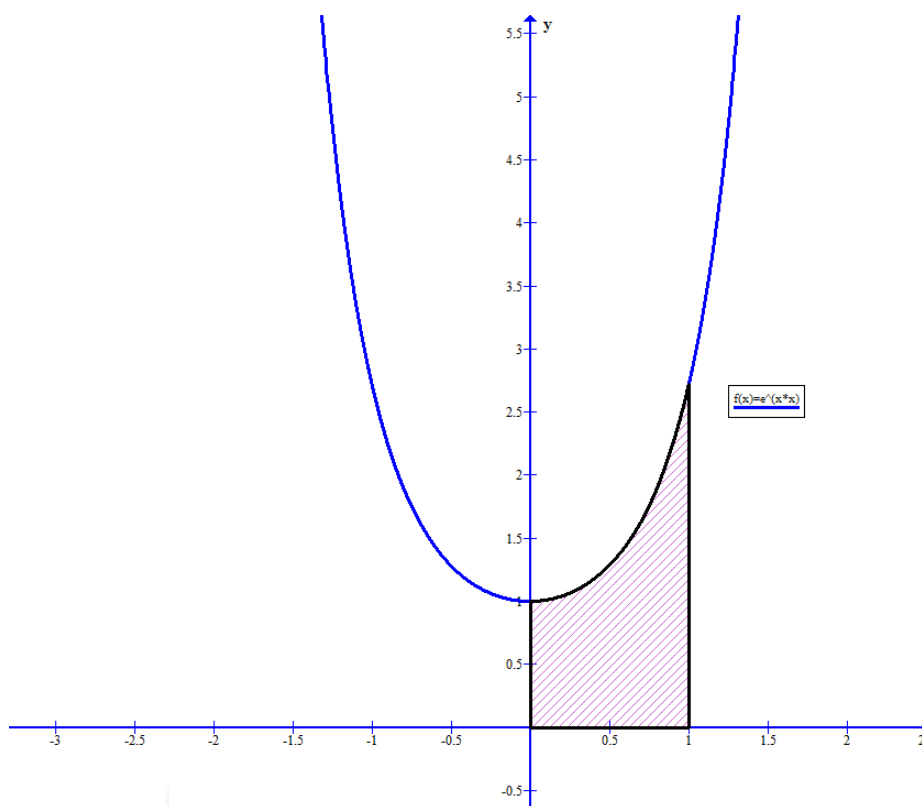
Vypočítejte obsah plochy vymezené křivkou $y = e^{x^2}$, osou x , osou y a přímkou $x = 1$. Pro výpočet použijte složené obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo s krokem dělení $h = 0,1$.

Řešení

Jak již bylo uvedeno v teoretické části: je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná a integrovatelná, pak obsah obrazce křivočarého lichoběžníka ohraničená shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x je dán vztahem (Laitochová, 2009)

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Pro lepší představu si načrtneme graf funkce $y = e^{x^2}$ do soustavy souřadnic a vytyčíme si obrazec, jehož plochu máme spočítat.



Obr. 7: Graf funkce $y = e^{x^2}$

Z náčrtu je zřejmé, že máme počítat integrál

$$S = \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Sestavíme tabulku funkčních hodnot funkce $y = e^{x^2}$:

| i | x_i | $f(x_i)$ | $x_i + \frac{1}{2}h$ | $f\left(x_i + \frac{1}{2}h\right)$ |
|-----|-------|----------|----------------------|------------------------------------|
| 0 | 0 | 1 | | |
| 1 | 0,1 | 1,010050 | 0,05 | 1,002503 |
| 2 | 0,2 | 1,040811 | 0,15 | 1,022755 |
| 3 | 0,3 | 1,094174 | 0,25 | 1,064494 |
| 4 | 0,4 | 1,173511 | 0,35 | 1,130319 |
| 5 | 0,5 | 1,284025 | 0,45 | 1,224460 |
| 6 | 0,6 | 1,433329 | 0,55 | 1,353238 |
| 7 | 0,7 | 1,632316 | 0,65 | 1,525771 |
| 8 | 0,8 | 1,896481 | 0,75 | 1,755055 |
| 9 | 0,9 | 2,247908 | 0,85 | 2,059576 |
| 10 | 1 | 2,718282 | 0,95 | 2,465760 |

Tabulka 4: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $y = e^{x^2}$

Vypočítáme součty, které potřebujeme pro dosazení do vzorců:

$$\sum_{i=1}^9 f(x_i) = 12,812606$$

$$\sum_{i=0}^9 f\left(x_i + \frac{1}{2}h\right) = 14,603931$$

$$\sum_{i=1}^5 f(x_{2i-1}) = 7,268474$$

$$\sum_{i=1}^4 f(x_{2i}) = 5,544132$$

Složené obdélníkové pravidlo

Dosazením do vzorce (2.3) dostáváme

$$I_{SO} = h \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{10} \cdot 14,603931 \doteq 1,460393.$$

Dosazením do vzorce (2.5) pro odhad chyby, kde

$$M_2 = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)| = \max_{x \in (0,1)} \left(2e^{x^2} (2x^2 + 1) \right) = 6e,$$

dostáváme

$$|R_O^{10}(f)| \leq \frac{b-a}{24} M_2 h^2 = \frac{1}{24} \cdot 6e \cdot 0,1^2 = \frac{e}{400} \doteq 0,006796.$$

Složené lichoběžníkové pravidlo

Podle vzorce (2.6) dostáváme

$$\begin{aligned} I_{SL} &= \frac{1}{2} h \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot (1 + 2 \cdot 12,812606 + 2,718282) \doteq 1,467175. \end{aligned}$$

Dosazením do vzorce (2.8) pro odhad chyby, kde

$$M_2 = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)| = \max_{x \in (0,1)} (2e^{x^2} (2x^2 + 1)) = 6e,$$

dostáváme

$$|R_L^{10}(f)| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2 = \frac{1}{12} \cdot 6e \cdot 0,1^2 = \frac{e}{200} \doteq 0,013591.$$

Složené Simpsonovo pravidlo

Podle vzorce (2.9) dostáváme

$$\begin{aligned} I_{SS} &= \frac{1}{3} h \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot (1 + 4 \cdot 7,268474 + 2 \cdot 5,544132 + 2,718282) \doteq 1,462681 \end{aligned}$$

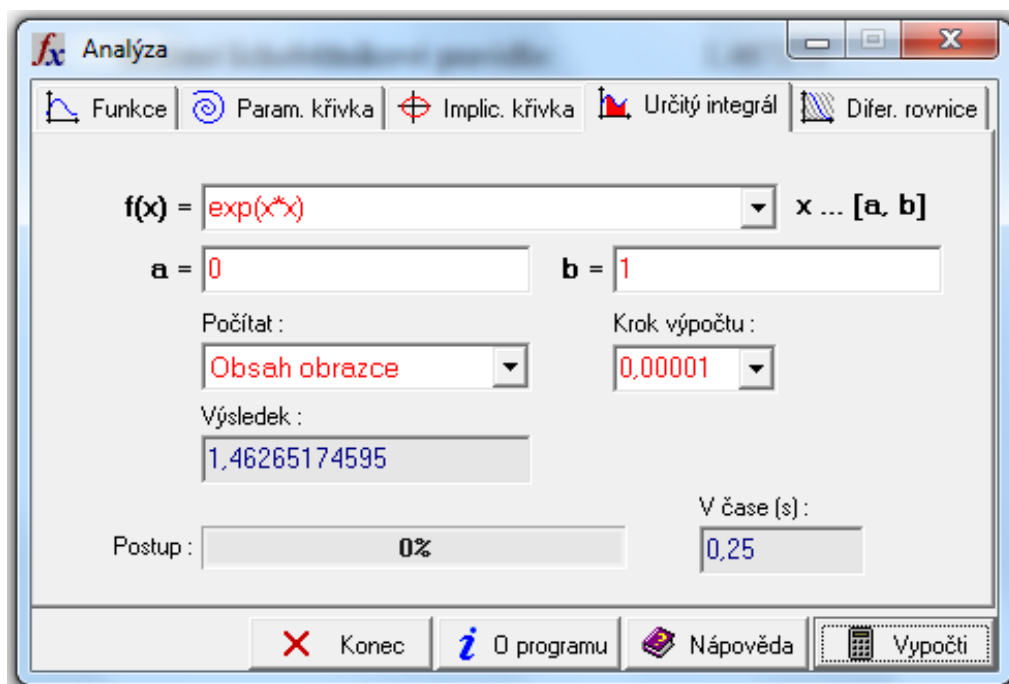
Dosazením do vzorce (2.11) pro odhad chyby, kde

$$M_4 = \max_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in (0,1)} \left(4e^{x^2} (4x^4 + 12x^2 + 3) \right) = 76e,$$

dostáváme

$$|R_S^{10}(f)| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4 = \frac{1}{180} \cdot 76e \cdot 0,1^4 = \frac{19e}{450000} \doteq 0,000115.$$

Protože v tomto příkladě nemůžeme správnost výsledku ověřit pomocí výpočtu podle definice, použijeme program Analýza. Pro vyšší přesnost zvolíme v programu Analýza krok výpočtu 0,00001.



Obr. 8: Výpočet obsahu zadaného obrazce v programu Analýza

Porovnáme výsledky dosažené jednotlivými metodami s výsledkem získaným z programu Analýza:

Složené obdélníkové pravidlo: 1,460393

Složené lichoběžníkové pravidlo: 1,467175

Složené Simpsonovo pravidlo: 1,462681

Hodnota integrálu (program Analýza): 1,462652

Ze získaných výsledků je zřejmé, že v tomto příkladě dává nejpřesnější výsledky složené Simpsonovo pravidlo. Touto metodou získáme výsledek s přesností 10^{-4} .

2.5 Příklad 5

Vypočítejte délku rovinné křivky $y = \frac{1}{1+x}$ na intervalu $I = \langle 0,1 \rangle$ s přesností 10^{-4} .

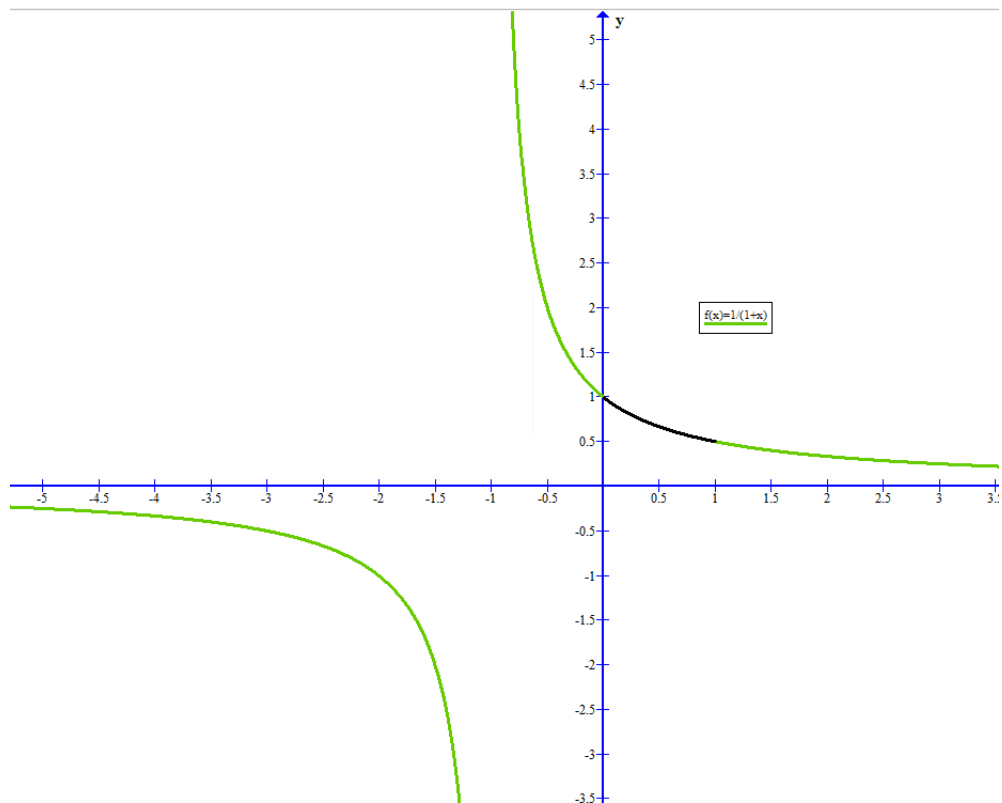
Pro výpočet integrálu zvolte složené lichoběžníkové pravidlo.

Řešení

Jak již bylo uvedeno v teoretické části: je-li funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, pak délka rovinné křivky je dána vztahem (Laitochová, 2009)

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Pro lepší představu si načrtneme graf funkce $y = \frac{1}{1+x}$ do soustavy souřadnic.



Obr. 9: Graf funkce $y = \frac{1}{1+x}$

Nejprve si vypočítáme první derivaci zadané funkce:

$$y' = \left(\frac{1}{1+x} \right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Dosazením do vzorce pro výpočet délky křivky dostáváme

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{(1+x)^2} \right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{(1+x)^4}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 1}}{(1+x)^2} dx.$$

Pro výpočet integrálu máme použít složené lichoběžníkové pravidlo.

Nejprve stanovíme n pro výpočet integrálu s přesností 10^{-4} .

Ze vzorce (2.8) vyjádříme n :

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12R_L^n(f)}} M_2,$$

$$\text{kde } M_2 = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)| = \max_{x \in (0,1)} \frac{10(1+x)^4 + 6}{\left[(1+x)^4 + 1\right](1+x)^4 \sqrt{(1+x)^4 + 1}} = 4\sqrt{2}.$$

Dosazením dopočítáme n :

$$n \geq \sqrt{\frac{1}{12 \cdot 10^{-4}}} \cdot 4\sqrt{2} \doteq 68,66.$$

Abychom dosáhli přesnosti 10^{-4} , musíme zvolit $n \geq 69$.

Interval $I = \langle 0,1 \rangle$ rozdělíme na 69 menších podintervalů s krokem dělení $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{69}$.

Sestavíme tabulku funkčních hodnot funkce $y = \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 1}}{(1+x)^2}$:

| | | | | | |
|-----|----------|----------|-----|----------|----------|
| i | x_i | $f(x_i)$ | i | x_i | $f(x_i)$ |
| 0 | 0 | 1,414214 | 35 | 0,507246 | 1,092593 |
| 1 | 0,014493 | 1,394299 | 36 | 0,521739 | 1,089258 |
| 2 | 0,028986 | 1,375499 | 37 | 0,536232 | 1,086069 |
| 3 | 0,043478 | 1,357742 | 38 | 0,550725 | 1,083017 |
| 4 | 0,057971 | 1,340965 | 39 | 0,565217 | 1,080097 |
| 5 | 0,072464 | 1,325107 | 40 | 0,579710 | 1,077302 |
| 6 | 0,086957 | 1,310112 | 41 | 0,594203 | 1,074625 |
| 7 | 0,101449 | 1,295927 | 42 | 0,608696 | 1,072061 |
| 8 | 0,115942 | 1,282502 | 43 | 0,623188 | 1,069604 |
| 9 | 0,130435 | 1,269794 | 44 | 0,637681 | 1,067250 |
| 10 | 0,144928 | 1,257757 | 45 | 0,652174 | 1,064992 |
| 11 | 0,159420 | 1,246353 | 46 | 0,666667 | 1,062826 |
| 12 | 0,173913 | 1,235545 | 47 | 0,681159 | 1,060749 |
| 13 | 0,188406 | 1,225296 | 48 | 0,695652 | 1,058755 |
| 14 | 0,202899 | 1,215575 | 49 | 0,710145 | 1,056842 |

| | | |
|----|----------|----------|
| 15 | 0,217391 | 1,206350 |
| 16 | 0,231884 | 1,197594 |
| 17 | 0,246377 | 1,189279 |
| 18 | 0,260870 | 1,181379 |
| 19 | 0,275362 | 1,173873 |
| 20 | 0,289855 | 1,166736 |
| 21 | 0,304348 | 1,159949 |
| 22 | 0,318841 | 1,153493 |
| 23 | 0,333333 | 1,147347 |
| 24 | 0,347826 | 1,141497 |
| 25 | 0,362319 | 1,135925 |
| 26 | 0,376812 | 1,130616 |
| 27 | 0,391304 | 1,125556 |
| 28 | 0,405797 | 1,120732 |
| 29 | 0,420290 | 1,116131 |
| 30 | 0,434783 | 1,111742 |
| 31 | 0,449275 | 1,107552 |
| 32 | 0,463768 | 1,103552 |
| 33 | 0,478261 | 1,099731 |
| 34 | 0,492754 | 1,096081 |
| 50 | 0,724638 | 1,055004 |
| 51 | 0,739130 | 1,053239 |
| 52 | 0,753623 | 1,051544 |
| 53 | 0,768116 | 1,049914 |
| 54 | 0,782609 | 1,048347 |
| 55 | 0,797101 | 1,046841 |
| 56 | 0,811594 | 1,045392 |
| 57 | 0,826087 | 1,043998 |
| 58 | 0,840580 | 1,042657 |
| 59 | 0,855072 | 1,041365 |
| 60 | 0,869565 | 1,040122 |
| 61 | 0,884058 | 1,038924 |
| 62 | 0,898551 | 1,037771 |
| 63 | 0,913043 | 1,036659 |
| 64 | 0,927536 | 1,035588 |
| 65 | 0,942029 | 1,034555 |
| 66 | 0,956522 | 1,033559 |
| 67 | 0,971014 | 1,032598 |
| 68 | 0,985507 | 1,031671 |
| 69 | 1 | 1,030776 |

Tabulka 5: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $y = \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 1}}{(1+x)^2}$

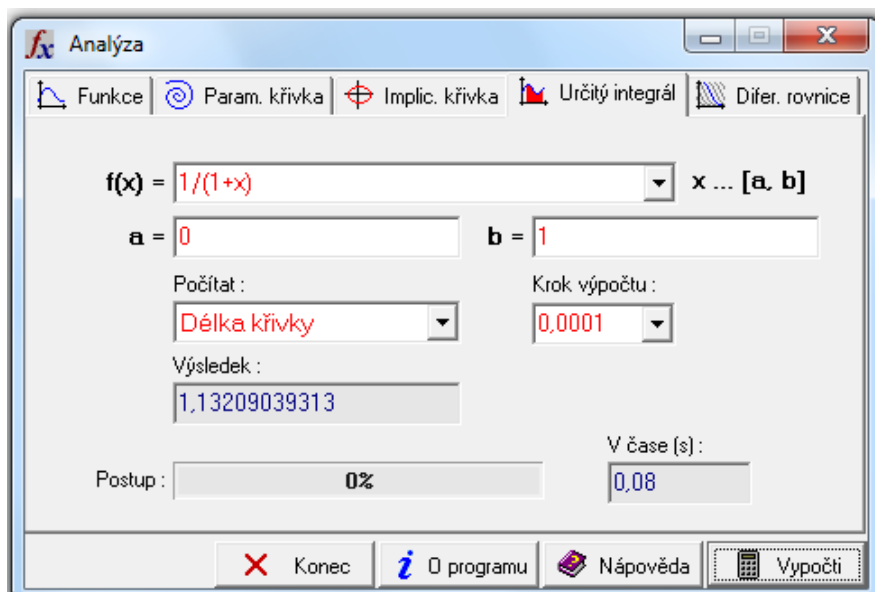
Vypočítáme součet, který potřebujeme pro dosazení do vzorce:

$$\sum_{i=1}^{68} f(x_i) = 76,893377$$

Dosazením do vzorce (2.6) dostáváme

$$\begin{aligned}
 I_{SL} &= \frac{1}{2} h \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{69} \cdot (1,414214 + 2 \cdot 76,893377 + 1,030776) \doteq 1,132114
 \end{aligned}$$

Protože v tomto příkladě nemůžeme správnost výsledku ověřit pomocí výpočtu podle definice, použijeme program Analýza, přičemž volíme krok výpočtu 0,0001.



Obr. 10: Výpočet délky zadané křivky v programu Analýza

Hodnota získaná programem Analýza je přibližně rovna 1,132090. Pro výpočet délky křivky $y = \frac{1}{1+x}$ na intervalu $I = \langle 0,1 \rangle$ jsme zvolili složené lichoběžníkové pravidlo s krokem dělení $h = \frac{1}{69}$, přičemž jsme získali výsledek $l \doteq 1,132114$; dosáhli jsme tak požadované přesnosti 10^{-4} .

2.6 Příklad 6

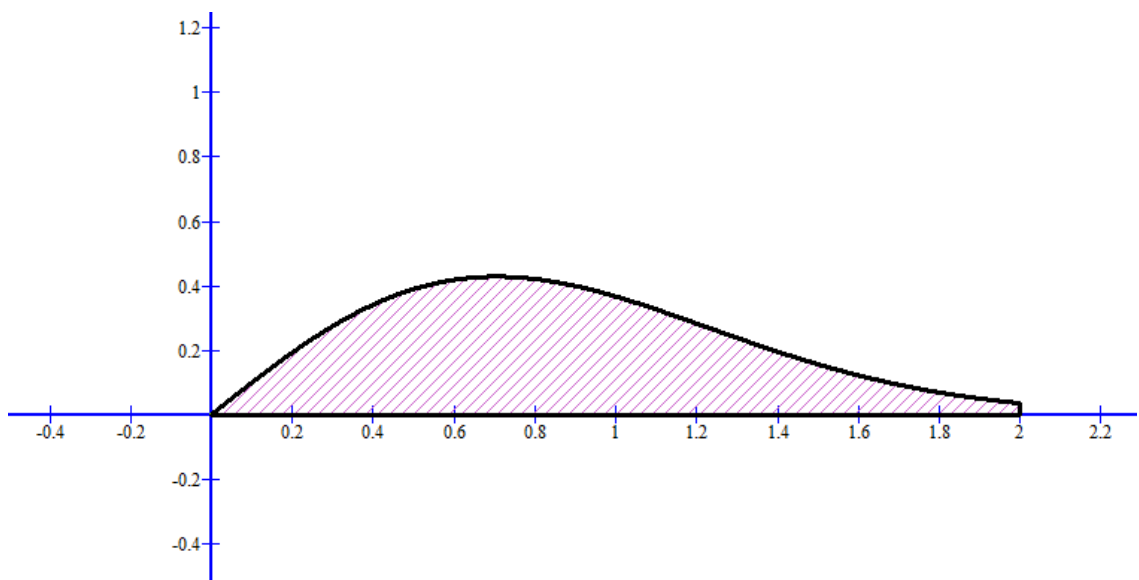
Vypočítejte objem tělesa s přesností 10^{-6} , které vznikne rotací plochy ohraničené křivkou $y = xe^{-x^2}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, kolem osy x . Pro výpočet integrálu použijte složené Simpsonovo pravidlo.

Řešení

Jak již bylo uvedeno v teoretické části: je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá a nezáporná, pak objem rotačního tělesa, které vznikne rotací hladkého oblouku AB křivky $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $x \in \langle a, b \rangle$ kolem osy x , je dán vztahem (Laitochová, 2009)

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Pro lepší představu si do soustavy souřadnic načrtneme graf křivky $y = xe^{-x^2}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, kterou necháme rotovat kolem osy x .



Obr. 11: Graf funkce $y = xe^{-x^2}$

Nejprve si vypočítáme druhou mocninu zadané funkce:

$$y^2 = \left(xe^{-x^2}\right)^2 = x^2 e^{-2x^2}$$

Dosazením do vzorce pro výpočet objemu rotačního tělesa dostáváme

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 x^2 e^{-2x^2} dx.$$

Výpočet integrálu

Pro výpočet integrálu použijeme složené Simpsonovo pravidlo.

Nejprve stanovíme $2n$ pro výpočet integrálu s přesností 10^{-6} .

Ze vzorce (2.11) vyjádříme $2n$:

$$2n \geq 4 \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180R_s^n(f)} M_4},$$

$$\text{kde } M_4 = \max_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in (0,1)} \left| e^{-2x^2} (256x^6 - 896x^4 + 624x^2 - 48) \right| = 48.$$

Dosazením dopočítáme $2n$:

$$2n \geq 4 \sqrt[4]{\frac{2^5}{180 \cdot 10^{-6}} \cdot 48} = 54,05.$$

Abychom dosáhli přesnosti 10^{-6} , musíme interval rozdělit minimálně na 56 podintervalů.

Interval $I = \langle 0, 2 \rangle$ rozdělíme na 56 menších podintervalů s krokem dělení

$$h = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}.$$

Sestavíme tabulku funkčních hodnot funkce $y = x^2 e^{-2x^2}$:

| i | x_i | $f(x_i)$ | i | x_i | $f(x_i)$ |
|-----|----------|------------|-----|-------------|------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0,035714286 | 0,00127226 |
| 2 | 0,071429 | 0,00505024 | 3 | 0,107142857 | 0,01121903 |
| 4 | 0,142857 | 0,01959195 | 5 | 0,178571429 | 0,02991759 |
| 6 | 0,214286 | 0,04188922 | 7 | 0,25 | 0,05515606 |
| 8 | 0,285714 | 0,06933599 | 9 | 0,321428571 | 0,08402907 |
| 10 | 0,357143 | 0,09883130 | 11 | 0,392857143 | 0,11334807 |
| 12 | 0,428571 | 0,12720661 | 13 | 0,464285714 | 0,14006723 |
| 14 | 0,5 | 0,15163266 | 15 | 0,535714286 | 0,16165543 |
| 16 | 0,571429 | 0,16994290 | 17 | 0,607142857 | 0,17636012 |
| 18 | 0,642857 | 0,18083033 | 19 | 0,678571429 | 0,18333331 |
| 20 | 0,714286 | 0,18390193 | 21 | 0,75 | 0,18261701 |
| 22 | 0,785714 | 0,17960092 | 23 | 0,821428571 | 0,17501031 |
| 24 | 0,857143 | 0,16902830 | 25 | 0,892857143 | 0,16185650 |
| 26 | 0,928571 | 0,15370721 | 27 | 0,964285714 | 0,14479604 |
| 28 | 1 | 0,13533528 | 29 | 1,035714286 | 0,12552811 |
| 30 | 1,071429 | 0,11556379 | 31 | 1,107142857 | 0,10561391 |
| 32 | 1,142857 | 0,09582975 | 33 | 1,178571429 | 0,08634062 |
| 34 | 1,214286 | 0,07725315 | 35 | 1,25 | 0,06865146 |
| 36 | 1,285714 | 0,06059799 | 37 | 1,321428571 | 0,05313496 |
| 38 | 1,357143 | 0,04628626 | 39 | 1,392857143 | 0,04005957 |
| 40 | 1,428571 | 0,03444874 | 41 | 1,464285714 | 0,02943620 |
| 42 | 1,5 | 0,02499524 | 43 | 1,535714286 | 0,02109234 |
| 44 | 1,571429 | 0,01768912 | 45 | 1,607142857 | 0,01474428 |
| 46 | 1,642857 | 0,01221506 | 47 | 1,678571429 | 0,01005869 |
| 48 | 1,714286 | 0,00823339 | 49 | 1,75 | 0,00669919 |
| 50 | 1,785714 | 0,00541862 | 51 | 1,821428571 | 0,00435704 |
| 52 | 1,857143 | 0,00348293 | 53 | 1,892857143 | 0,00276797 |
| 54 | 1,928571 | 0,00218702 | 55 | 1,964285714 | 0,00171803 |
| 56 | 2 | 0,00134185 | | | |

Tabulka 6: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $y = x^2 e^{-2x^2}$

Vypočítáme součty, které potřebujeme pro dosazení do vzorců:

$$\sum_{i=1}^{27} f(x_{2i}) = 2,19008591$$

$$\sum_{i=1}^{28} f(x_{2i-1}) = 2,19084038$$

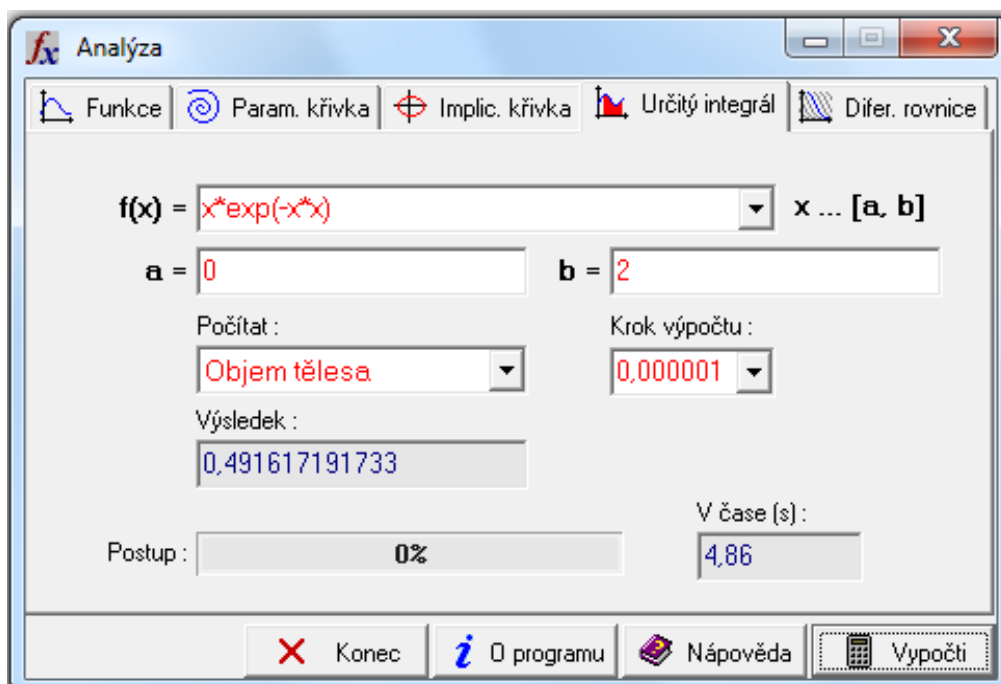
Pro výpočet integrálu použijeme vzorec (2.9)

$$\begin{aligned} I_{SS} &= \frac{1}{3} h \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{28} (4 \cdot 2,19084038 + 2 \cdot 2,19008591 + 0,00134185) \doteq 0,15648661 \end{aligned}$$

Výpočet objemu tělesa

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 [xe^{-x^2}]^2 dx = \pi \int_0^2 x^2 e^{-2x^2} dx = \pi \cdot 0,15648661 \doteq 0,49161718.$$

Protože v tomto příkladě nemůžeme správnost výsledku ověřit pomocí výpočtu podle definice, použijeme program Analýza. Pro vyšší přesnost zvolíme v programu Analýza krok výpočtu 0,000001.



Obr. 12: Výpočet objemu zadaného tělesa v programu Analýza

Hodnota získaná programem Analýza je přibližně rovna 0,49161719. Pro výpočet objemu tělesa, které vzniklo rotací plochy ohraničené křivkou $y = xe^{-x^2}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, kolem osy x , jsme zvolili složené Simpsonovo pravidlo s krokem dělení $h = \frac{1}{28}$, přičemž jsme získali výsledek $V \doteq 0,49161718$; dosáhli jsme tak požadované přesnosti 10^{-6} .

Závěr

V bakalářské práci jsem se zaměřila na numerickou integraci, konkrétně na popis a aplikaci obdélníkového, lichoběžníkového a Simpsonova pravidla.

Cílem bakalářské práce bylo popsat a odvodit vzorce pro jednotlivé numerické metody integrace a především zpracovat jejich následné použití u konkrétních příkladů.

Celá práce byla rozdělena na dvě části. V teoretické části jsem odvodila Newton-Cotesovy vzorce pro obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo a jejich chyby, navázala jsem odvozením složených vzorců pro tato pravidla a celou část jsem zakončila stručným shrnutím geometrické aplikace určitého integrálu. V praktické části jsem řešila šest různých příkladů, v nichž jsem vysvětlila a zpracovala konkrétní použití jednotlivých metod při výpočtu určitého integrálu. U každého příkladu jsem na závěr provedla krátké shrnutí, aby bylo zcela zřejmé, k jakým výsledkům jsem dospěla. První příklad byl zaměřen na použití všech tří základních pravidel, ve druhém a třetím příkladu byla v zadání stanovena konkrétní metoda, která má být k řešení použita. V dalších třech příkladech bylo demonstrováno využití geometrické aplikace určitého integrálu.

Na základě této práce by se mohlo zdát, že při numerické integraci je nejvýhodnější používat složené Simpsonovo pravidlo, protože dává nejpřesnější výsledky. Nicméně je nutné si uvědomit, že práce obsahuje pouze nepatrnou část všech možných příkladů, což je pro vyslovení takového závěru nedostatečné. Vždy je důležité si danou funkci načrtnout a podle toho stanovit, kterou metodu je při numerickém výpočtu určitého integrálu vhodné použít.

U příkladů zaměřených na geometrickou aplikaci určitého integrálu jsem pro představu vykreslila, jak vypadá graf zadané funkce. K tomu jsem použila volně dostupný software *Graph*. Protože u těchto příkladů nebylo možné ověřit správnost výsledku pomocí výpočtu podle definice, k ověření a porovnání s výsledky jednotlivých metod jsem použila volně dostupný program *Analýza*.

Bakalářská práce by mohla sloužit jako studijní materiál nejen pro studenty Pedagogické fakulty Univerzity Palackého, kteří se seznamují se základy numerické integrace v rámci Integrálního počtu či v rámci předmětu Seminář z matematické analýzy, v němž si své znalosti z této oblasti prohlubují a rozšiřují, ale i pro další zájemce o tuto problematiku.

Seznam použité literatury

- [1] ČERMÁK, L., HLAVIČKA, R. *Numerické metody*. 2. vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně – Fakulta strojního inženýrství, 2008. 110 s. ISBN 978-80-214-3752-4.
- [2] DALÍK, J. *Numerická analýza*. 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM[®], s.r.o., 2010. 131 s. ISBN 978-80-7204-702-4.
- [3] HASÍK, K. *Numerické metody*. [online] Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě, listopad 2008. [cit. 10. ledna 2014]. Dostupné na World Wide Web: <<http://www.slu.cz/math/cz/knihovna/ucebni-texty/Numericke-metody/Numericke-metody.pdf>>
- [4] KŘENEK, J., OSTRAVSKÝ J. *Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii*. 9. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008. 231 s. ISBN 978-80-7318-761-3
- [5] KUČERA, R. *Numerické metody*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita, 2006. 132 s. ISBN 80-248-1198-7
- [6] LAITCHOVÁ, J. *Matematická analýza 2: integrální počet*. 3.vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2009. 101 s. ISBN 978-80-244-2276-3.
- [7] TKADLEC, J. *Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné*. 2. přepracované vyd. Praha: České vysoké učení technické, 2011. 181 s. ISBN 978-80-01-04792-7.

Seznam obrázků

| | |
|--|----|
| Obr. 1: Obdélníkové pravidlo..... | 10 |
| Obr. 2: Lichoběžníkové pravidlo..... | 12 |
| Obr. 3: Simpsonovo pravidlo | 15 |
| Obr. 4: Složené obdélníkové pravidlo | 17 |
| Obr. 5: Složené lichoběžníkové pravidlo | 19 |
| Obr. 6: Složené Simpsonovo pravidlo..... | 21 |
| Obr. 7: Graf funkce $y = e^{x^2}$ | 33 |
| Obr. 8: Výpočet obsahu zadaného obrazce v programu Analýza..... | 36 |
| Obr. 9: Graf funkce $y = \frac{1}{1+x}$ | 38 |
| Obr. 10: Výpočet délky zadané křivky v programu Analýza..... | 41 |
| Obr. 11: Graf funkce $y = xe^{-x^2}$ | 42 |
| Obr. 12: Výpočet objemu zadaného tělesa v programu Analýza | 46 |

Seznam tabulek

| | |
|---|----|
| Tabulka 1: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ | 26 |
| Tabulka 2: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$ pro $n = 4$ | 29 |
| Tabulka 3: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$ pro $n = 8$ | 30 |
| Tabulka 4: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $y = e^{x^2}$ | 34 |
| Tabulka 5: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $y = \frac{\sqrt{(1+x)^4 + 1}}{(1+x)^2}$ | 39 |
| Tabulka 6: Tabulka funkčních hodnot pro funkci $y = x^2 e^{-2x^2}$ | 44 |

ANOTACE

| | |
|--------------------------|-----------------------------------|
| Jméno a příjmení: | Ing. Pavla Polejová |
| Katedra: | Katedra matematiky |
| Vedoucí práce: | doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc. |
| Rok obhajoby: | 2014 |

| | |
|------------------------------------|--|
| Název práce: | Přibližný výpočet určitého integrálu |
| Název v angličtině: | Approximate calculation of definite integrals |
| Anotace práce: | Bakalářská práce je zaměřena na numerickou integraci, konkrétně na popis a aplikaci obdélníkového, lichoběžníkového a Simpsonova pravidla. Cílem bakalářské práce je popsat a odvodit vzorce pro jednotlivé numerické metody integrace a především jejich následné použití u konkrétních příkladů. V teoretické části práce jsou odvozeny vzorce pro jednotlivá pravidla a pro jejich chyby. V praktické části je uvedena sada řešených příkladů, v nichž je vysvětleno a zpracováno konkrétní použití jednotlivých metod při výpočtu určitého integrálu. |
| Klíčová slova: | Numerická integrace, obdélníkové, lichoběžníkové, Simpsonovo pravidlo |
| Anotace v angličtině: | The thesis is focused on the numerical integration, namely the description and application of rectangular, trapezoidal and Simpson's rule. The aim of this thesis is to describe and derive formulas for individual numerical integration methods, and especially their subsequent use in specific examples. In the theory there are derived formulas for individual rules and their mistakes. In the practical part there is given a set of exercises, which explain and elaborate specific use of different methods in calculating of the definite integral. |
| Klíčová slova v angličtině: | Numerical integration, rectangular, trapezoidal, Simpson's rule |

| | |
|--------------------------------|---------|
| Přílohy vázané v práci: | Anotace |
| Rozsah práce: | 50 s. |
| Jazyk práce: | Český |