Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

Periodická řešení pro systém dvou obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu

Bakalářská práce

Pavel Kouba

Školitel: Mgr. Jan Eisner, Dr.

České Budějovice 2013

Kouba P., 2013: Periodická řešení pro systém dvou obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu. [Periodic solutions of system with two ordinary differential 2nd order equations. Bc. Thesis, in Czech.] – 49 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Annotation:
Bachelor thesis is about system with two ordinary differential 2nd order equations based on physical motivation (body on springs). The work deals with model situation of two bodies and three springs and its special cases. In sigle cases a solution is introduced with initial condition. Special attention is devoted to periodic solutions.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, Kouba Pavel
25.4.2013

Poděkování

Velmi děkuji svému školiteli Mgr. Janu Eisnerovi, Dr. za vedení bakalářské práce, cenné rady a za trpělivost i čas strávený při konzultacích.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Bakalářská práce pojednává o řešení soustav dvou rovnic 2. řádu. Po úvodu následuje kapitola, ve které budou vysvětleny základní věty, definice a tvrzení potřebná k objasnění výpočtů v celé práci. Speciálně je zde odvozena existence a jednoznačnost řešení soustav dvou rovnic 2. řádu.

Kapitola třetí obsahuje fyzikální motivaci modelového situace a jejích speciálních případů. Jelikož fyzikální kontext rovnic pracuje s pružinami, bude zde vyvětlen i k tomu potřebný Hookův zákon a odvozeny námi počítané soustavy rovnic.

Kapitola čtvrtá se věnuje Modelové situaci. Objasňuje problematiku na obecném případu, zavádí pojmy a postupy, které budou používány i pro následné speciální případy v kapitole čtvrté a páté. Zvláštní pozornost je věnována existenci periodických řešení.

Poznámky, tvrzení a věty jsou číslovány podle pořadí a umístění v kapitole. Důkazy následují bezprostředně po tvrzení či větě a jsou ukončeny symbolem $\blacksquare$.

Práce je vysázena systémem LaTeX a obrázky kresleny v programu GeoGebra.

Kapitola 2

Řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic

Ještě, než přejdeme k samotnému počítání příkladů, proberme teorii obyčejných diferenciálních rovnic, ze které budeme v příkladech vycházet. V této kapitole se budeme zabývat existencí a jednoznačností řešení pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, zavedení Cauchyovy úlohy a tvarem obecného řešení.

2.1 Soustavy ODR 1. řádu

Definice 2.1.1 *Nechť je dána vektorová funkce $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že vektorová funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy ODR*

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$, jestliže pro každé $t \in J$ platí rovnost

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Mějme soustavu (2.1), kterou můžeme zapsat po složkách ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{aligned} \tag{2.2}$$

Nechť je dáno číslo $t_0 \in J$ a vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$. K soustavě rovnic (2.1) připojme požadavek, aby hledáná vektorová funkce v bodě t_0 nabývala hodnoty x_0:

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.3}$$

Požadavku (2.3) se říká počáteční podmínka. Úlohu (2.1), (2.3) nazýváme Cauchyovou, nebo též počáteční úlohou.

Poznámka 2.1.2 *Řekneme, že funkce je řešením Cauchyovy úlohy (2.1), (2.3) (na otevřeném intervalu J), jestliže φ je řešením (2.1) (na J) a navíc platí $\varphi(t_0) = x_0$.*

Věta 2.1.3 ***Existence a jednoznačnost.*** *[1] Předpokládejme, že $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkce definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$, přičemž $(t_0, x_0) \in \Omega$. Nechť na Ω jsou navíc spojité vektorové funkce $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$, to znamená, že jsou zde spojité parciální derivace všech složek funkce podle druhé až n-té proměnné. Potom Cauchyova úloha (2.1), (2.3) má právě jedno maximální řešení.*

Důkaz Věty 2.1.3 viz. důkaz uvedený v [1].

2.1.1 Homogenní soustavy ODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Definice 2.1.4 *Nechť pro všechna $i = 1, 2, ..., n$ a $j = 1, 2, ..., n$ jsou $a_{ij} \in \mathbb{R}$ konstantní Pak soustavu obyčejných diferenciálních rovnic tvaru*

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2.4}$$

nazýváme homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic.

Jejíž tvar lze zapsat stručněji jako

$$x' = Ax. \tag{2.5}$$

Pro homogenní soustavy lze formulovat zesílení obecného tvrzení o existenci a jednoznačnosti.

Věta 2.1.5 ***Existence a jednoznačnost pro homogenní soustavy.*** *[1] Nechť J je otevřený interval, $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Uvažujme Cauchyovu úlohu (2.4) s počáteční podmínkou (2.3).*
Předpokládejme, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno řešení φ Cauchyovy úlohy (2.4) s počáteční podmínkou (2.3), které je definováno na celém intervalu J.

Důkaz této Věty, viz. důkaz uvedený v [1].

Definice 2.1.6 *Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazýváme vlastním číslem matice A, právě když existuje nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že*

$$Av = \lambda v.$$

Věta 2.1.7 ***Tvar řešení homogenní soustavy.*** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, pak řešení soustavy (2.4) je tvaru*

$$x(t) = e^{\lambda t}v, \tag{2.6}$$

kde λ je vlastní číslo matice A a $v \in \mathbb{R}$ je vlastní vektor odpovídající číslu λ.

Důkaz: vycházejme z rovnice (2.5) a za x dosadíme funkci (2.6), pak

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av = Ax(t), \tag{2.7}$$

kde pro druhou rovnost jsme využili vztahu z Definice 2.1.6. Tedy $x(t)$ tvaru (2.6) je řešením systému (2.5).

■

Definice 2.1.8 *Mějme* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *pro všechna* $i = 1, 2, \ldots, n,$ *a všechna* $j = 1, 2, \ldots, n.$
Nechť $A = (a_{ij})$.
Označme:

$$\mathbb{H} \ = \{\varphi\text{: } \varphi \text{ je reálným řešením (2.4) na } J\},$$
$$\mathbb{H}_C \ = \{\psi\text{: } \psi \text{ je komplexním řešením (2.4) na } J\}.$$

Potom platí:

$$\mathbb{H} \text{ je vektorový prostor dimenze } n.$$
$$\mathbb{H}_C \text{ je vektorový prostor dimenze } n.$$

Definice 2.1.9 ***Fundamentální systém řešení homogenního systému (2.4).***[1] *Každou bázi prostoru* $\mathbb{H}$ *nebo* $\mathbb{H}_C$ *z právě uvedené Definice nazýváme fundamentálním systémem řešení homogenního systému (2.4) na* J.
Něchť $\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi^{[n]}$ *tvoří fundamentální systém řešení homogenního systému (2.4) na* J.
pak funkci

$$\varphi_{ob} : J \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{ob}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_j \varphi^{[j]}(t)$$

nazýváme obecným řešením (2.4) na J.

Jakékoliv řešení soustavy (2.4) lze vajídřit libovolnou kombinací prvků fundamentálního systému.

2.2 Řešení soustav ODR 2. řádu

V následující části práce se pokusíme odvodit, zda lze řešit soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu obdobně, jako soustavy rovnic 1. řádu.

2.2.1 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu

Ještě než budeme moci počítat řešení soustav 2. řádu, musíme zjistit, zda existuje jejich řešení. Převedením soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu ukážeme, že za pomoci Věty 2.1.3 o existenci a jednoznačnosti řešení lze odvodit větu o existenci a jednoznačnosti i pro soustavu 2. řádu. Mějme soustavu dvou rovnic 2. řádu

$$x'' = A^{2\times 2}x \tag{2.8}$$

s maticí A tvaru

$$A^{2\times 2} = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Soustavu (2.8) můžeme vektorově rozepsat jako

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Zavedeme další souřadnice

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1', \\ x_4 &= x_2' \end{aligned}$$

a matici $B^{4\times 4}$ tvaru

$$B^{4\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & b & 0 & 0 \\ c & -d & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je vidět že $(x_1,\ x_2)$ je řešením soustavy (2.8), respektive (2.10), právě když, $(x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')$ je řešením soustavy čtyř rovnic 1. řádu

$$x' = B^{4\times 4}x, \tag{2.11}$$

kterou lze zapsat vektorově jako

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & b & 0 & 0 \\ c & -d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Tím jsme dokázali následující větu.

Věta 2.2.1 *Funkce*

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

je řešením soustavy (2.10), právě když funkce

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$$

je řešením soustavy (2.12).

Tvrzení 2.2.2 *Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice B soustavy (2.12) právě když $\lambda = \alpha^2$ je vlastním číslem matice A soustavy (2.10).*

Důkaz:

1. Vlastní čísla pro soustavu rovnic 2. řádu (2.10) vypočítáme z následující charakteristické rovnice, kde polynom

$$P_2(\lambda) := |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -(a+\lambda) & b \\ c & -(d+\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + (a+d)\lambda + (ad - cb) \tag{2.13}$$

položíme rovno nule. Dostaneme rovnici

$$0 = \lambda^2 + (a+d)\lambda + (ad - cb).$$

2. Vlastní čísla α pro soustavu rovnic (2.12) spočítáme z charakteristického polynomu položeného rovno nule

$$P_4(\alpha) := |B - \alpha E| = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 1 \\ -a & b & -\alpha & 0 \\ c & -d & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha^4 + (a+d)\alpha^2 + (ad - cb). \qquad (2.14)$$

Vlastní čísla matic B soustavy rovnic (2.12) jsou kořeny charakteristického polynomu

$$0 = \alpha^4 + (a+d)\alpha^2 + (ad - cb).$$

Vidíme, že $P_2(\alpha^2) = P_4(\alpha)$. Kořeny, a tedy i vlastní čísla λ pro A a α pro B si odpovídají jako

$$\lambda = \alpha^2. \qquad (2.15)$$

■

Nyní odvodíme vzájemný vztah vlastních vektorů soustav (2.10) a (2.12).

Tvrzení 2.2.3 *Vektor u pro vlastní číslo α soustavy rovnic (2.10) je stejný jako třetí a čtvrtá složka vlastního vektoru v pro soustavu rovnic (2.12).*

Důkaz: Vlastní vektory w splňují rovnici

$$(B - \alpha E)w = 0,$$

kterou lze rozepsat jako

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 1 \\ -a & b & -\alpha & 0 \\ c & -d & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řádkovými úpravami výrazu z předchozí stránky dostáváme

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(\alpha^2 + d) & b \\ 0 & 0 & 0 & -(\alpha^2 + a)(\alpha^2 + d) + bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z tohoto tvaru dopočítáme složky vlastních vektorů vyřešením soustavy rovnic následným postupem

$$\begin{aligned}
-\alpha w_1 + w_3 &= 0,\\
-\alpha w_2 + w_4 &= 0,\\
-(\alpha + d)w_3 + bw_4 &= 0,\\
-[(\alpha^2 + a)(\alpha^2 + d) + bc]w_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Výraz v hranatých závorkách poslední rovnice je charakteristický polynom, tedy bude vždy nulový pro jakékoliv vlastní číslo α, které je jeho kořenem. Na základě toho si zvolme za w_4 parametr $s \in \mathbb{R}$. Zpětným dosazováním do dalších rovnic získaných Gaussovou eliminací, dostaneme zbylé složky vektoru v.

Hledaný vlastní vektor pro soustavu rovnic (2.12) tedy je

$$v = \begin{pmatrix} \dfrac{bs}{\alpha_i(a + \alpha_i^2)} \\ \\ \dfrac{s}{\alpha_i}^{2} \\ \\ \dfrac{bs}{(a + \alpha_i^2)} \\ \\ s \end{pmatrix},$$

kde $s \in \mathbb{R}$.

Nyní spočteme vlastní vektory pro soustavu dvou rovnic 2. řádu, odpovídající příslušným λ_i. Začněme soustavou rovnic

$$\begin{aligned}
(A - \lambda E)u &= 0,\\
\begin{pmatrix} -(a + \lambda) & b \\ c & -(d + \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Řádky matice jsou linerárné závislé a tedy stačí rovnice

$$-(a + \lambda)u_1 + bu_2 = 0.$$

Zvolme si proto $u_2 = s$, kde parametr $s \in \mathbb{R}$ je libovoný, a pokračujme ve výpočtu u_1

$$u_1 = \frac{bs}{(a+\lambda)} \quad a \quad u_2 = s,$$

vektorovým zápisem

$$u = \begin{pmatrix} \frac{bs}{(a+\lambda)} \\ t \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že složky u_1 a u_2 vektoru u pro soustavu dvou rovnic 2. řádu jsou stejné jako složky v_3 a v_4 vektoru v pro soustavu čtyř rovnic 1. řádu

$$u = \begin{pmatrix} \frac{bs}{(a+\lambda_i)} \\ s \end{pmatrix} \quad a \quad v = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \frac{bs}{(a+\alpha_i^2)} \\ s \end{pmatrix}.$$

Kde mezi λ_i a α_i platí (2.15). ■

Definice 2.2.4 *Nechť matice A je tvaru (2.9), pak číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazýváme vlastním číslem matice A, právě když existuje nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že*

$$Av = \lambda v.$$

Věta 2.2.5 ***Tvar řešení soustavy (2.8).*** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, pak řešení soustavy (2.8) je tvaru*

$$x(t) = e^{\alpha t} v, \tag{2.16}$$

kde α^2 je vlastní číslo a v je odpovídající vlastní vektor matice A .

Důkaz: Vycházejme z rovnice (2.5) a dosadíme funkci (2.6), pak

$$x''(t) = \alpha^2 e^{\alpha t} v = e^{\alpha t} A v = Ax(t), \tag{2.17}$$

kde jsme využili, že $\alpha^2 v$ je vlastní číslo a opovídající vlastní vektor matice A. ■

Věta 2.2.6 *Soustava rovnic (2.8) s počátečními podmínkami tvaru*

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \gamma_1, \\ x_2(0) &= \gamma_2, \\ x_1'(0) &= \delta_1, \\ x_2'(0) &= \delta_2 \end{aligned} \tag{2.18}$$

má právě jedno řešení.

Důkaz: Soustava (2.8) s počátečními podmínkami (2.18) je ekvivalentní se soustavou čtyř rovnic 1. řádu tvaru (2.12) s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \gamma_1, \\ x_2(0) &= \gamma_2, \\ x_3(0) &= \delta_1, \\ x_4(0) &= \delta_2, \end{aligned} \tag{2.19}$$

kde

$$x_3 = x_1' \;\; a \;\; x_4 = x_2'.$$

Pro Cauchyovu úlohu (2.12), (2.19) má soustava podle Věty 2.1.3 právě jedno řešení. Protože Cauchyova úloha (2.8), (2.18) je ekvivalentní Cauchyově úloze (2.12), (2.19), znamená to, že i (2.8) má právě jedno řešení. ■

Kapitola 3

Teorie k Modelové situaci

V následující kapitole bakalářské práce se budeme zpočátku zabývat modelem n těles a $n+1$ pružin (viz. obrázek níže). V řešených situacích se ale zaměříme především na případ $n = 2$ neboli dvou hmotných těles.

Konkrétně se potom zaměříme na výpočty Modelové situace a jejích podpřípadů. Výpočty budou spočívat v pozorování jejich podobnosti či odlišnosti, v rámci dílčích změn v zadání, popřípadě ve výsledné komplikovanosti řešení. Dále bude diskutována periodicita řešení Cauchyovy úlohy.

Podpřípady si rozdělíme na dvě skupiny. První skupina s obecně navzájem různými hodnotami pro k a m. To jest Modelová situace a Speciální případ 1, které rozebíráme velmi podrobně a ve vší obecnosti. Druhou skupinu tvoří dva podpřípady Modelové situace, kde všechna k a všechna m jsou stejná. Druhá skupina je již dopočítána konkrétněji.

Ještě než přistoupíme k samotnému řešení jednotlivých případů, podívejme se na jejich fyzikální motivaci a odvození původu námi počítaných soustav diferenciálních rovnic 2. řádu.

3.1 Hookův zákon

Jelikož se v bakalářské práci zabýváme případy, kde hlavní roli hrají hmotná tělesa a pružiny, nemůžeme opomenout Hookův zákon.

Hookův zákon je jeden z nejzákladnějších principů fyziky. Tvrdí, že síla F potřebná k roztažení nebo stlačení pružiny o určitou vzdálenost X je úměrná vzdálenosti způsobem

$$F = kX,$$

kde k je charakteristická konstanta pružiny neboli její tvrdost.

Hookova rovnice se také využívá v mnoha jiných situacích, kde je deformováno elastické těleso. Například vítr opírající se do stěn budovy, muzikant drnkající na strunu houslí, nebo proces nafukování míče.

Hookův zákon je pouhou lineární aproximací 1. řádu pro odezvu pružin a jiných pružných těles, na které je vyvíjen tlak. Což ovšem znamená, že zákon selhává, jakmile síla přesáhne určité limity (stlačení na minimum nebo roztažení na maximum). Ve skutečnosti se ovšem mnoho meteriálů pozorovatelně odchyluje od Hookova zákona ještě před dosažením těchto hranic. Na druhou stranu je Hookův zákon poměrně přesnou aproximací pro většinu pevných těles. Z tohoto důvodu je používání Hookova zákona široce rozšířeno ve vědě a inženýrství a je základem pro mnoho vědních disciplín jako jsou seismologie a akustika, či jako základní princip v pružinové škále, manometru (přístroj na měření tlaku) a balančním kolečku mechanických hodin.

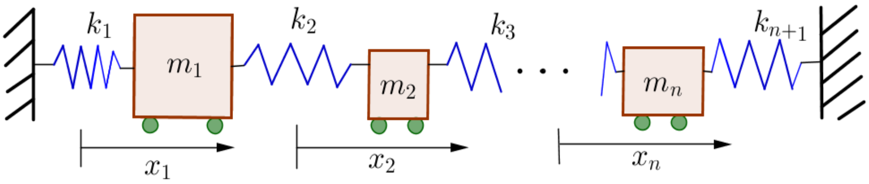
3.1.1 Hookův zákon pro lineární pružiny

Uvažujme obyčejnou spirální pružinu, která má jeden konec připevněný k stálému objektu. Mezitím druhý konec natahujeme silou F. Až do chvíle, kdy již nelze více měnit délku pružiny. Nyní bude vzdálenost, o kterou se vychýlila z klidového stavu, vzdáleností X. Hookův zákon tvrdí že právě $F = kX$.

3.2 Fyzikální motivace

Jako většina matematických výpočtů, mají i diferenciální rovnice 2. řádu své uplatnění. Například jako model kyvadla a kmitání nebo skákání kuličky. Pro soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu je to pak například soustava hmotných bodů na pružinách. A právě takovými soustavami se budeme v následující kapitole zabývat.

Pro lepší vysvětlení si popíšeme obrázek.



Obrázek 3.1: Grafické znázornění obecné soustavy rovnic pro n hmotných bodů

Předpokládáme, že máme

- Hmotná tělesa s hmotnostmi m_i, $i = 1, 2, ..., n$.

- Pružiny s tuhostmi k_j pro $j = 1, 2, ..., n, n+1$ v případě, že jsou uchycené z obou stran ke zdi, nebo $j = 1, 2, ..., n$, jestliže jsou přichycené ke zdi jen z jedné strany.

- Jejich natažení/stlačení jsou postupně vzdálenosti $x_1, (x_2 - x_1), ..., (x_n - x_{n-1}), x_n$.

- Hmotné body jsou ve vodorovné poloze a na kolečkách. Pro jednoduchost totiž u soustav zanedbáme jakýkoliv vliv tření nebo gravitace. Od toho se dá očekávat zjednodušení výpočtů a lepší vhled do probíraných situací.

3.3 Případ tří hmotných těles a čtyř pružin

Zaměřme se na to, jak vypadá soustava rovnic pro tři hmotná tělesa a čtyři pružiny, z nichž poslední je přichycena k pevné zdi, a všechny dodržují Hookův zákon. Získáme následující soustavu tří diferenciálních rovnic 2. řádu [2]:

$$
\begin{aligned}
m_1 x_1^{''} &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\
m_2 x_2^{''} &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2), \\
m_3 x_3^{''} &= -k_3(x_3 - x_2) - k_4 x_3.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Pro lepší představu o soustavě (3.1) jí přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} m_1 x_1^{''} &= -(k_1+k_2)x_1 + k_2 x_2, \\ m_2 x_2^{''} &= k_2 x_1 - (k_3+k_2)x_2 + k_3 x_3, \\ m_3 x_3^{''} &= k_3 x_2 - (k_3+k_4)x_3, \end{aligned}$$

což vede na maticový tvar

$$MX^{''} = KX.$$

Zde matice M, K a X jsou

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 \\ k_1 & -(k_2+k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3.4 Tvar soustavy pro n hmotných bodů a $n+1$ pružin

Tvar matic K, M a X výše nám, jak lze vytušit z jejich podoby, určuje následné tvary matic pro n hmotných bodů a obecně $n+1$ pružin, kdy matice M_n budou diagonálního tvaru

$$M_n = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & m_3 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 3.4.1 *Počet hmotných bodů určuje, kolik bude mít soustava rovnic.*

Matici K_n lze uvažovat tvaru

$$K_n = \begin{pmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & -(k_2+k_3) & k_3 & \dots & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -(k_{n-1}+k_n) & k_n \\ 0 & 0 & \dots & k_n & -(k_n+k_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Poznámka 3.4.2 *Pozorujeme, že když poslední pružina bude chybět, pak člen a_{nn} matice K_n bude pouze*

$$a_{nn} = -k_n.$$

3.5 Řešení soustav o n rovnicích

Řešením se budeme zabývat především u konkrétních příkladů dvou těles vedoucích na soustavu dvou rovnic. Proto řešení u soustav n rovnic pouze vysvětlíme, nikoliv však vyřešíme.

Poté, co soustavu s n rovnicemi vyjádříme maticově

$$MX'' = KX$$

a upravíme

$$\begin{aligned} M^{-1}Mx'' &= M^{-1}Kx, \\ x'' &= M^{-1}Kx, \end{aligned}$$

neboli

$$x'' = Ax,$$

kde $A^{n\times n}$ je matice soustavy s n prvky.

Vypočítáme její vlastní čísla λ způsobem, že položíme

$$|A - \lambda E| = 0,$$

a vyjádříme k ním příslušný vlastní vektor v. Samotné řešení pak bude tvaru

$$x(t) = ve^{\alpha t}, \tag{3.2}$$

kde $\alpha^2 = \lambda$ je vlastní číslo a v jemu odpovídající vlastní vektor.

Kapitola 4

Modelová situace

Od obecných případů n těles vedoucích na soustavu n-rovnic nyní přistupme k řešení případů o dvou tělesech vedoucí na soustavu dvou rovnic (dle Poznámky 3.4.1).

Tvary soustav rovnic pro jednotlivé situace budou vycházet z předchozích obecných soustav n-rovnic.

Následující modelová situace je probírána detailněji a ve vší obecnosti. Obecnost má ale za následek, že řešení soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu budou komplikované. Proto budeme používat substituce, které opticky zkrátí výsledné formule a řešení proto nebudeme vyjadřovat vzhledem k původním proměnným.

4.1 Modelová Situace

První situace bude pojata nejobecněji a bude rozebírána podrobně, aby bylo možné odhalit všechny její vlastnosti a charakteristiky.

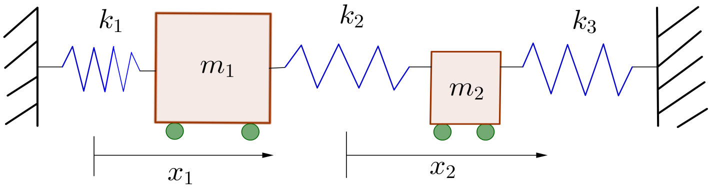
4.1.1 Zadání

Mějme dvě hmotná tělesa s hmotnostmi m_1, m_2 obecně různými. Mějme dále dané tři pružiny s tvrdostmi k_1, k_2, k_3 také obecně navzájem různými, u nichž budeme předpokládat že

$$0 < k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3. \tag{4.1}$$

Soustava rovnic pro takovéto zadání je následující

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$



Obrázek 4.1: Grafické znázornění Modelové situace

Poznámka 4.1.1 *Pokud uvažujeme pouze dvě tělesa na dvou pružinách, položíme v souladu s Poznámkou 3.4.2 hodnotu* $k_3 = 0$.

4.1.2 Maticový tvar soustavy (4.2)

Po roznásobení soustavy rovnic (4.2) dostaneme následující tvar

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2, \\ m_2 x_2'' &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3 x_2), \end{aligned}$$

jenž lze snadno převést na tvar maticový

$$Mx'' = Kx,$$

kde

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Maticovou rovnici upravíme a postupně dostaneme

$$\begin{aligned} M^{-1} M x'' &= M^{-1} K x, \\ x'' &= M^{-1} K x, \\ x'' &= Ax, \end{aligned} \tag{4.3}$$

kde matice soustavy A je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Matici soustavy A hledáme proto, že předpokládaný tvar řešení soustavy dle Věty 2.2.5 je

$$x(t) = ve^{\alpha t}, \tag{4.5}$$

kde α^2 jsou právě vlastní čísla λ matice A a v k nim příslušné vlastní vektory.

Pro následující výpočty zjednodušíme zápis matice A z (4.4) na tvar

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Poznámka 4.1.2 *Pro matice A tvaru (4.6) jsou a, b, c, d ve vyjádření (4.6) kladná čísla.*

Tvrzení 4.1.3 *Existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy (4.2), (2.18), které plyne z Věty 2.1.3.*

4.1.3 Vlastní čísla matice A:

Tvrzení 4.1.4 *Vlastní čísla matice A tvaru (4.6) jsou*

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a+d) \mp \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)}}{2}. \tag{4.7}$$

Důkaz: Vlastní čísla λ matice A najdeme pomocí determinantu

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} -(a+\lambda) & b \\ c & -(d+\lambda) \end{vmatrix}$$

z něhož zístáme charakteristický polynom

$$|A - E\lambda| = \lambda^2 + (a+d)\lambda + (ad-cb).$$

Ten položíme rovný nule a vyřešíme pro neznámé λ

$$0 = \lambda^2 + (a+d)\lambda + (ad-cb).$$

Vlastní čísla λ_1, λ_2 jakožto kořeny kvadratického charakteristického polynomu jsou tvaru (4.7). ∎

Věta 4.1.5 *Za předpokladu (4.1) pro matice A tvaru (4.4) platí, že obě vlastní čísla jsou záporná.*

Důkaz: Podle Tvrzení 4.1.4 jsou vlastní čísla tvaru (4.7). Ověříme proto nerovnost

$$0 > \frac{-(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)}}{2}. \tag{4.8}$$

Je vidět, že stačí dokázat nerovnost

$$0 > -(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)},$$

protože i druhá nerovnost

$$0 > -(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)}$$

bude okamžitě platit. Ukažeme že platí (4.8) pomocí následujících úvah. Všimněme si, že platí

$$(a+d) > 0 \text{ právě když } -(a+d) < 0,$$

a zároveň také

$$\sqrt{(a+d)^2} = |a+d|.$$

Pokud navíc bude platit i

$$-4(ad-cb) < 0. \tag{4.9}$$

Znamená to, že automaticky platí i nerovnost

$$\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)} < (a+d),$$

ze které lze považovat nerovnost (4.8) za splněnou. Všechny nerovnosti jsou zřejmé až na (4.9). Dokažeme, že (4.9) platí pro matice A tvaru (4.4). Poznamenejme jenom, že $(ad-cb)$ je determinat matice A. Po dosazení původních výrazů z matice A za a, b, c, d, dle (4.4), postupně ekvivalentními úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{k_2}{m_1}\frac{k_2}{m_2} &< \frac{(k_1+k_2)}{m_1} \cdot \frac{(k_2+k_3)}{m_2}, \\ k_2^2 &< (k_1+k_2)(k_2+k_3), \\ 0 &< k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nerovnost (4.10) platí díky předpokladu (4.1), tedy i nerovnost (4.9) je splněna. Zápornost vlastních čísel je tímto dokázána. ■

Poznámka 4.1.6 *Navíc jsme si ukázali podstatu podmínky (4.1), která říká, že determinant matice A musí být kladný a nenulový.*

Poznámka 4.1.7 *V celé bakalářské práci počítáme pouze s případy, ve kterých $k_1, k_2, k_3 > 0$, nebo $k_1, k_2 > 0$ a $k_3 = 0$. Nerovnost (4.1) je splněna v obou těchto případech.*

Věta 4.1.8 *Řešení soustavy (4.2) jsou tvaru (2.16) kde α jsou ryze imaginární.*

Důkaz: Podle Věty 2.2.5 dostáváme řešení tvaru (2.16) a vztah (2.15). Vlastní čísla λ matice A jsou dle Věty 4.1.5 záporná, a tedy jejich odmocniny jsou ryze imaginární. ∎

4.1.4 Vlastní vektory soustavy (4.2)

Věta 4.1.9 *Matice A tvaru (4.6) má vlastní vektory*

$$u = \begin{pmatrix} \dfrac{bs}{(a+\lambda_1)} \\ \\ s \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \dfrac{br}{(a+\lambda_2)} \\ \\ r \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

odpovídající vlastním číslům λ_1 respektive λ_2 kde koeficienty s, $r \in \mathbb{R}$ jsou libovolné reálné a a, b jsou prvky matice A tvaru (4.6).

Důkaz: Vyřešíme rovnici

$$(A - \lambda_1 E)u = 0$$

neboli

$$\begin{pmatrix} -(a+\lambda_1) & b \\ c & -(d+\lambda_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pro néznámé $u = (u_1,\ u_2)$. Po dosazení vlastních čísel λ_1 vyjde, že první řádek matice je násobkem druhého. To znamená, že pro výpočet vlastního vektoru stačí uvažovat pouze rovnici

$$-(a+\lambda_1)u_1 + bu_2 = 0.$$

Zvolíme souřadnici $u_2 = s$, kde číslo $s \in \mathbb{R}$ je libovoné. Pak souřadnice vlastního vektoru jsou

$$u_1 = \frac{bs}{a+\lambda_1}, \quad u_2 = s,$$

čímž jsme získali vlastní vektor $u = (u_1,\ u_2)$ tvaru (4.11). Obdobně pro v a λ_2. ∎

4.1.5 Obecné řešení soustavy (4.2)

Nyní, když známe vlastní čísla λ_i a vektory u_i, nic nám nebrání vypočítat obecné řešení v komplexním tvaru. Předpokládané obecné řešení je podle Věty 2.2.5 tvaru

$$x(t) = ve^{\alpha t},$$

kde $\alpha^2 = \lambda$ je vlastní číslo matice A. Do tohoto tvaru dosadíme námi spočítaná vlastní čísla λ_1, λ_2 a pro ně odpovídající vlastní vektory u a v.
Tím získáme komplexní fundamentální systém

$$FS_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{-i\sqrt{-\lambda_1}t}u;\ e^{i\sqrt{-\lambda_1}t}u;\ e^{-i\sqrt{-\lambda_2}t}v;\ e^{i\sqrt{-\lambda_2}t}v \right\}. \tag{4.12}$$

Ten lze převést pomocí goniometrických funkcí a separací reálných a imaginárních částí na reálný fundamentální systém

$$FS_{\mathbb{R}} = \left\{ \cos(\sqrt{-\lambda_1}t)u;\ \sin(\sqrt{-\lambda_1}t)u;\ \cos(\sqrt{-\lambda_2}t)v;\ \sin(\sqrt{-\lambda_2}t)v \right\}. \tag{4.13}$$

Podle Definice 2.1.9 je lineární kombinace prvků fundamentálního systému výsledný tvar obecného řešení. Obecné řešení tedy vypadá v komplexní podobě

$$x(t) = p_1 e^{-i\sqrt{-\lambda_1}t}u + p_2 e^{i\sqrt{-\lambda_1}t}u + p_3 e^{-i\sqrt{-\lambda_2}t}v + p_4 e^{i\sqrt{-\lambda_2}t}v,$$

a řešení v reálné podobě následně takto

$$x(t) = p_1 \cos(\sqrt{-\lambda_1}t)u + p_2 \sin(\sqrt{-\lambda_1}t)u + p_3 \cos(\sqrt{-\lambda_2}t)v + p_4 \sin(\sqrt{-\lambda_2}t)v, \tag{4.14}$$

kde p_1, p_2, p_3, p_4 jsou v obou případech reálné konstanty.

Prvky $FS_{\mathbb{R}}$ jsou periodické funkce, které pravděpodobně dají periodické řešení (4.14). Nebude tomu však vždy, podrobnosti viz. další kapitola.

Poznámka 4.1.10 *Řešení (4.14) lze převést do tvaru, ze kterého bude patrný fázový posun. Převeďme proto řešení za pomoci součtového vzorce*

$$\cos\beta_1\cos\omega_1 + \sin\beta_1\sin\omega_1 = \cos(\omega_1 - \beta_1).$$

Pro přehlednost rozdělme obecné řešení na dvě části a p_1 přeznačme na a_1, obdobně $p_2 = b_1$, $p_3 = a_2$ a $p_4 = b_2$. Řešení první části získáme následným postupem

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= (a_1\cos(\sqrt{-\lambda_1}t) + b_1\sin(\sqrt{-\lambda_1}t))u \\
\frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}x_1(t) &= \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\cos\sqrt{-\lambda_1}t + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\sin\sqrt{-\lambda_1}t\right)u, \\
\frac{1}{c_1}x_1(t) &= (\cos\beta_1\cos\sqrt{-\lambda_1}t + \sin\beta_1\sin\sqrt{-\lambda_1}t)u, \\
\frac{1}{c_1}x_1(t) &= \cos(\sqrt{-\lambda_1}t - \beta_1)u, \\
x_1(t) &= c_1\cos(\sqrt{-\lambda_1}t - \beta_1)u, \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

kde $c_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$, $\sin\beta_1 = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$ *a* $\cos\beta_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$.

Obdobně převedeme i druhou část řešení

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= (a_2\cos\sqrt{-\lambda_2}t + b_2\sin\sqrt{-\lambda_2}t)v, \\
&\vdots \\
x_2(t) &= c_2\cos(\sqrt{-\lambda_2}t - \beta_2)v, \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

kde $c_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, $\sin\beta_2 = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ *a* $\cos\beta_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

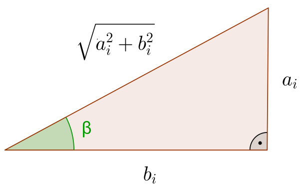
Celkové řešení s fázovým posunem je spojením výsledných řešení (4.15) a (4.16), tedy

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

$$x(t) = c_1\cos(\sqrt{-\lambda_1}t - \beta_1)u + c_2\cos(\sqrt{-\lambda_2}t - \beta_2)v.$$

Vysvětlení: *Proč jsme v předchozích převodech násobili řešení právě konstantou* $\frac{1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}$*? Potřebovali jsme získat stejný úhel β jak pro funkci* sin, *tak pro funkci* cos. *Úhly již byly částečně dány koeficienty a_i a b_i. Výsledná konstanta* $\frac{1}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}$ *pochází z Pythágorovy věty.*

Pro ilustraci viz. obrázek



Obrázek 4.2: Odvození konstanty c_i.

Jak je vidět, odvěsny jsou příhodně zvolené jako a_i *a* b_i *a výsledná přepona pravoúhlého trojúhelníku je* $\sqrt{a_i^2+b_i^2}$.
Pak tedy získávám stejný úhel β_i *pro* $\sin\beta_i = \frac{b_i}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}$ *a* $\cos\beta_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}$.

4.1.6 Řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu (4.2)

Soustavu (4.2) doplníme o počáteční podmínky, které jsou dle Věty 2.2.6 tvaru (2.18).
Dosazením prvních dvou podmínek do řešení (4.14), kde máme $u = (u_1,\ u_2)$ a $v = (v_1,\ v_2)$ vznikne soustava rovnic

$$\begin{aligned} p_1u_1 + p_3v_1 &= \gamma_1, \\ p_1u_2 + p_3v_2 &= \gamma_2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

pro neznámé koeficienty p_1, p_3.
Po zderivování řešení (4.14) dosadíme druhé dvě počáteční podmínky a vznikne soustava

$$\begin{aligned} p_2\sqrt{-\lambda_1}u_1 + p_4\sqrt{-\lambda_2}v_1 &= \delta_1, \\ p_2\sqrt{-\lambda_1}u_2 + p_4\sqrt{-\lambda_2}v_2 &= \delta_2, \end{aligned} \tag{4.18}$$

pro koeficienty p_2 a p_4.
Determinanty matic soustav (4.17) a (4.18) jsou nenulové, z čehož vyplývá, že soustavy rovnic budou jednoznačně řešitelné pro neznámé p_1, p_2, p_3, p_4.

Zvolíme-li počáteční podmínky

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \gamma_1, \\ x_2(0) &= \gamma_2, \\ x_1'(0) &= 0, \\ x_2'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

to jest $\delta_1 = \delta_2 = 0$ v (2.18), získáme z rovnice (4.18) hodnoty $p_2 = p_4 = 0$. Pokud zvolíme zároveň $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq 0$, dostaneme z rovnice (4.17) konkrétní nenulové hodnoty $p_1,\ p_3$.
Jejich dosazením do (4.14) získáme výsledné řešení Cauchyovy počáteční úlohy

$$x(t) = p_1 \cos(\sqrt{-\lambda_1}t)u + p_3 \cos(\sqrt{-\lambda_2}t)v. \tag{4.20}$$

4.1.7 Diskuze o periodicitě řešení

Díky tomu, že obecné řešení je lineární kombinace goniometrických, tedy speciálně periodických funkcí, pak řešení samotné může být periodické.

Definice 4.1.11 *Nechť $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Funkce f je periodická s periodou T, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí*

$$x \pm T \in D(f)$$

a zároveň

$$f(x) = f(x+T).$$

Definice 4.1.12 *Řešení Cauchyovy úlohy (4.2), (2.18) nazveme periodické, pokud*

$$x(t+T) = x(T)$$

pro všechna $t > 0$.

Věta 4.1.13 *Mějme funkce f a g periodické, s periodami T_f a T_g. Lineární kombinace $h = c_1 f + c_2 g$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ je periodická právě když poměr period T_f/T_g je racionální číslo.*

Poznámka 4.1.14 *Pokud je poměr period ve Větě 4.1.13 neracionální, dostaneme neperiodickou funkci.*

Tvrzení 4.1.15 *Mějme $a \in \mathbb{R}$ libovolné nenulové, potom funkce $\sin at$ a $\cos at$ mají obě periodu $2\pi/a$.*

Tvrzení 4.1.16 *Mějme $a \in \mathbb{R}$ libovolné nenulové, potom funkce $h(t) = c_1 \sin at + c_2 \cos at$ má periodu $2\pi/a$.*

Tvrzení 4.1.17 *Mějme $a, b \in \mathbb{R}$ libovolné nenulové, potom funkce $h(t) = c_1 \sin at + c_2 \cos bt$ je periodická když a/b je racionální.*

Důkaz plyne z Věty 4.1.13 a Tvrzení 4.1.15. ■

Tvrzení 4.1.18 *Řešení (4.14) je periodické pokud poměr $\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$ je racionální.*

Důkaz plyne z Tvrzení 4.1.17. ■

Vezmeme v úvahu řešení (4.20). V případě že poměr frekvencí $\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$ bude racionální, pak podle Tvrzení 4.1.18 je toto řešení periodické.

Jestliže není, a přesto chceme, aby $x(t)$ bylo periodické, musíme pomocí počátečních podmínek vynulovat buď p_1 nebo p_3 jakožto koeficienty závislé na γ_1, γ_2. V takovém případě v řešení (4.20) zbyde pouze jedna goniometrická funkce cosinu, která je bezpochyby periodická.

4.2 Speciální případ 1

Tento podpřípad, ostatně stejně jako všechny další, je speciálním případem Modelové situace, proto bude hojně využíváno tvrzení a formulí z předchozí situace a nebude třeba již opakovat některé výpočty.

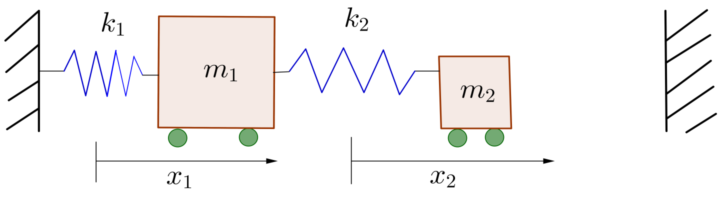
Speciální případ 1 modeluje soustavu o dvou tělesech a dvou pružinách. Narozdíl od obecné Modelové situace odstraníme třetí pružinu, která v Modelové situaci spojovala zeď a druhé hmotné těleso, tedy položíme $k_3 = 0$. Stále ale uvažujeme hodnoty Speciálního případu 1 k a m obecně navzájem různé.

4.2.1 Zadání

Tvrdosti pružin jsou tedy k_1, $k_2 > 0$ obecně navzájem různé. Pružina třetí chybí, položíme ji tedy $k_3 = 0$, což je v souladu s podmínkou (4.1) a m_1, $m_2 > 0$ zůstávají obecně navzájem různé. Poznamenejme, že předpoklad (4.1) tedy zůstane zachován i pro soustavu (4.21) viz. Poznámka 4.1.7.

Soustava (4.2) přejde na tvar

$$\begin{aligned} m_1 x_1^{''} &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2 x_2^{''} &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{4.21}$$



Obrázek 4.3: Grafické znázornění pro Speciální případ 1

4.2.2 Maticový tvar soustavy (4.21)

Dosazením $k = 0$ do (4.4) a jeho úpravou získáme tvar matice A, který je

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

(odvození viz. (4.3) v Modelové Situaci).

Pro zjednodušení uvažujme matici A opět ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}.$$

4.2.3 Vlastní čísla a vlastní vektory matice A

Podle Tvrzení 4.1.4 jsou vlastní čísla matice A tvaru (4.7) a dle Věty 4.1.5 z Modelové situace jsou záporná.

Dle Věty 4.1.9 jsou vlastní vektory tvaru (4.11).

4.2.4 Obecné řešení soustavy (4.21)

Řešení soustavy bude i v tomto případě obdobné s řešením Modelové situace. Nejprve si opět vytvoříme fundamentální systém postupným dosazováním vlastních čísel λ_1 a λ_2 a jim odpovídajících vlastních vektorů u a v do tvaru řešení (2.16) dle Věty 2.2.5. Komplexní fundamentální systém v tomto případě bude

$$FS_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{-i\sqrt{-\lambda_1}t}u;\ e^{i\sqrt{-\lambda_1}t}u;\ e^{-i\sqrt{-\lambda_2}t}v;\ e^{i\sqrt{-\lambda_2}t}v \right\}. \tag{4.22}$$

Podle Definice 2.1.9 je lineární kombinace prvků fundamentálního systému výsledný tvar obecného řešení. Obecné řešení tedy je

$$x(t) = p_1 e^{-i\sqrt{-\lambda_1}t}u + p_2 e^{i\sqrt{-\lambda_1}t}u + p_3 e^{-i\sqrt{-\lambda_2}t}v + p_4 e^{i\sqrt{-\lambda_2}t}v,$$

kde koeficienty p_1, p_2, p_3, p_4 jsou libovolné reálné.

Řešení lze převést pomocí goniometrických funkcí a rozdělení na komplexní a reálně argumenty na tvar

$$x(t) = p_1 \cos(\sqrt{-\lambda_1} t) u + p_2 \sin(\sqrt{-\lambda_1} t) u + p_3 \cos(\sqrt{-\lambda_2} t) v + p_4 \sin(\sqrt{-\lambda_2} t) v. \quad (4.23)$$

V případě potřeby lze řešení převést na tvar s patrným fázovým posunem (viz. Poznámka 4.1.10).

Poznámka 4.2.1 *Áčkoliv jsou řešení Modelové situace a Speciálního případu 1 na první pohled totožná, je třeba brát v potaz, že matice A je pro každou soustavu rovnic jiná. Tento rozdíl však po zjednodušení matice A na tvar (4.6) není patrný.*

4.2.5 Cauchyova úloha pro soustavu (4.21)

Řešení Cauchyovy úlohy (4.21), (4.19), bude opět tvaru (4.20) a bude periodické, právě když poměr $\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$ bude racionální.

Kapitola 5

Speciální případy o stejných m a k

Modelová situace a její Speciální případ 1 byly počítány s obecnými m a k. Nyní se zaměříme na speciální případy, kdy hmotnosti těles a tuhosti pružin jsou stejné. Nemají tak komplikované tvary řešení, lze je tedy snáze počítat a postupy zůstávají stále stejné.

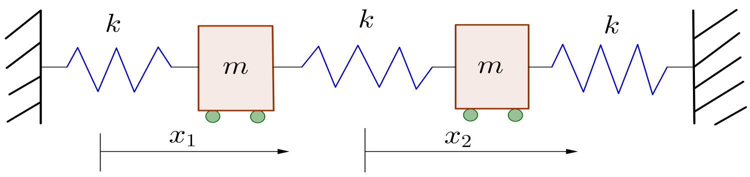
5.1 Speciální případ 2

Rozdíl od Modelové situace je, že budeme uvažovat dva hmotné body stejné hmotnosti m a stejně tak mají tři pružiny stejnou míru tuhosti k.

5.1.1 Zadání

Tentokrát tedy uvažujeme hmotná tělesa $m_i = m$ pro $i = 1, 2$ a pružiny tuhostí $k_j = k$ pro $j = 1, 2, 3$. Stále platí, že m, $k > 0$ a předpoklad (4.1). Soustava přejde (4.2) na tvar

$$\begin{aligned} mx_1'' &= -kx_1 + k(x_2 - x_1), \\ mx_2'' &= -k(x_2 - x_1) - kx_2. \end{aligned} \tag{5.1}$$



Obrázek 5.1: Grafické znázornění pro Speciální případ 2.

5.1.2 Maticový tvar soustavy (5.1)

Převedením soustavy (5.1) do maticového tvaru (4.3) a jeho následnou úpravou, obdobně jako v Modelové situaci, získáme matici A tvaru

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

dále uvažujme jen zkrácený tvar (4.6).

5.1.3 Vlastní čísla matice A

Všimněme si, že zjednodušená matice A je tvaru (4.6) z Modelové situace. Její vlastní čísla tedy budou podle Tvrzení 4.1.4 tvaru (4.7) a podle Věty 4.1.5 platí, že jsou záporná.
Nyní získáme konkrétní formu λ_1 a λ_2 jednoduchým dosazením za a, b, c, d z vyjádření (5.2) do výrazu (4.7).
Dosazením máme $\lambda_{1,2}$ jako

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{-\frac{4k}{m} \pm \sqrt{(\frac{4k}{m})^2 - 4(\frac{4k^2}{m^2} - \frac{k^2}{m^2})}}{2}, \\
\lambda_{1,2} &= \frac{-\frac{4k}{m} \pm \sqrt{\frac{4k^2}{m^2}}}{2}, \\
\lambda_{1,2} &= \frac{-\frac{4k}{m} \pm \frac{2k}{m}}{2}, \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{2k}{m} \pm \frac{k}{m}.
\end{aligned}$$

Vlastní čísla matice A tedy jsou

$$\lambda_1 = -\frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = -\frac{3k}{m}.$$

5.1.4 Vlastní vektory matice A

Vypočítáme vlastní vektory podle Věty 4.1.9, která nám říká, že tvary vlastních vektorů u, v pro odpovídající λ_1 a λ_2 jsou (4.11) (viz. Modelová situace).

Dosazením λ_1 do tvaru vlastního vektoru podle Věty 4.1.9 dostáváme

$$u = \begin{pmatrix} \frac{bs}{(a+\lambda_1)} \\ s \end{pmatrix},$$

po dosazení za λ_1 a koeficienty a, b a vypočítání má tvar

$$u = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{k}{m}s}{(\frac{2k}{m} - \frac{k}{m})} \\ \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix},$$

kde $s \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo.

Obdobně spočteme i vlastní vektor v odpovídající vlastnímu číslu λ_2, z rovnice

$$v = \begin{pmatrix} \frac{bs}{(a+\lambda_2)} \\ s \end{pmatrix},$$

který po dosazení a pokrácení zlomků má tvar

$$v = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{k}{m}s}{(\frac{2k}{m} - \frac{3k}{m})} \\ \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix},$$

kde $s \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo.

Položíme například $s = 1$, pak vlastní vektory u, v jsou

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.1.5 Obecné řešení soustavy (5.1)

Vlastní čísla $\lambda_{1.2}$ a vlastní vektory u, v matice A jsou již známy, a proto lze přistoupit k samotnému obecnému řešení soustavy (5.1).

Postupným dosazením vlastních čísel $\lambda_{1,2}$ a jim odpovídajících vlastních vektorů u a v si vytvoříme fundamentální systém, jehož lineární kombinace nám umožní sestavit obecné řešení dle Definice 2.1.9.

Komplexní fundamentální systém je

$$FS_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}u;\;\; e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}u;\;\; e^{-i\sqrt{\frac{3k}{m}}t}v;\;\; e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}t}v \right\}. \tag{5.3}$$

Převedením na reálný fundamentální systém získáme

$$FS_{\mathbb{R}} = \left\{ \cos\sqrt{\frac{k}{m}}tu;\;\; \sin\sqrt{\frac{k}{m}}tu;\;\; \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}tv;\;\; \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}tv \right\}. \tag{5.4}$$

Již zmiňovanou lineární kombinací fundamentálního systému dostaneme obecný tvar reálného řešení

$$x(t) = \left(p_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + p_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(p_3 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + p_4 \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

kde p_1, p_2, p_3 a p_4 jsou reálné koeficienty.

5.1.6 Cauchyova úloha pro soustavu (5.1)

Pro Speciální případ 2, vzhledem k jednoduššímu řešení, už nebude tak složité dosadit do obecného řešení počáteční podmínky. Podle Věty 2.2.6 existuje právě jedno řešení pro počáteční podmínky tvaru (2.18).

Pro náš konkrétní případ budeme volit podmínky $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Požadujeme tedy počáteční podmínky obdobně jako v Modelové situaci

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \gamma_1, \\ x_2(0) &= \gamma_2, \\ x_1'(0) &= 0, \\ x_2'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nyní dosadíme počáteční podmínky do reálného obecného řešení (5.5), které lze rozepsat po složkách jako

$$\begin{aligned} x_1(t) &= p_1 \cos\sqrt{\tfrac{k}{m}}t + p_2 \sin\sqrt{\tfrac{k}{m}}t + p_3 \cos\sqrt{\tfrac{3k}{m}}t + p_4 \sin\sqrt{\tfrac{3k}{m}}t, \\ x_2(t) &= p_1 \cos\sqrt{\tfrac{k}{m}}t + p_2 \sin\sqrt{\tfrac{k}{m}}t - p_3 \cos\sqrt{\tfrac{3k}{m}}t - p_4 \sin\sqrt{\tfrac{3k}{m}}t. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Dosadíme do rovnic (5.7) první dvě počáteční podmínky

$$x_1(0) = \gamma_1, \;\; x_2(0) = \gamma_2$$

a dostaneme soustavu

$$p_1 + p_3 = \gamma_1,$$

$$p_1 - p_3 = \gamma_2,$$

jejímž výsledkem jsou koeficienty

$$p_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}, \quad p_3 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}.$$

Po zderivování soustavy (5.7) a dosazení počátečních podmínek

$$x_1'(0) = 0, \;\; x_2'(0) = 0$$

dostáváme

$$\begin{aligned} p_2\frac{k}{m} + p_4\frac{3k}{m} &= 0, \\ p_2\frac{k}{m} - p_4\frac{3k}{m} &= 0. \end{aligned}$$

Determinant této soustavy je $\frac{-6k^2}{m^2} < 0$ pak

$$p_2 = 0, \quad p_4 = 0.$$

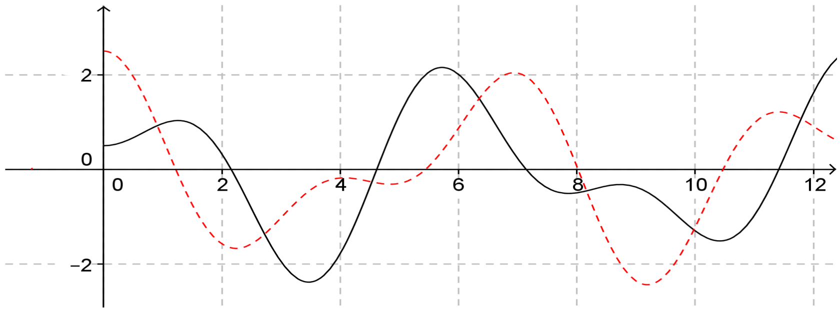
Zpětným dosazením vypočítaných koeficientů do rovnic (5.7) dostáváme jedno řešení Cauchyovy úlohy (5.1), (5.6)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t, \\ x_2(t) &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t. \end{aligned} \tag{5.8}$$

5.1.7 Diskuze o periodicitě řešení

Prvky $FS_{\mathbb{R}}$ jsou goniometrické funkce, které mohou vytvořit periodické řešení Cauchyovy úlohy. Není však ale stále jasné, zda výsledné řešení bude periodické. Poměr frekvencí period cosinů řešení (5.8) je

$$\sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{m}{3k}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Obrázek 5.2: Graf: $x_1(t)$ čárkovaně, $x_2(t)$ spojitě, pro hodnoty $\gamma_1 = 2,\ \gamma_2 = 1,\ k = 1,\ m = 1.$

Výsledný poměr není racionální, a proto podle Tvrzení 4.1.18 není řešení periodické. Pokud bychom chtěli periodické řešení, musíme vynulovat p_1 nebo p_3, které jsou závislé na počátečních podmínkách. Zvolíme-li v tomto případě hodnoty počátečních podmínek stejné

$$\gamma_1 = \gamma_2 =: \gamma,$$

to jest počáteční podmínky

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \gamma, \\ x_2(0) &= \gamma \end{aligned} \tag{5.9}$$

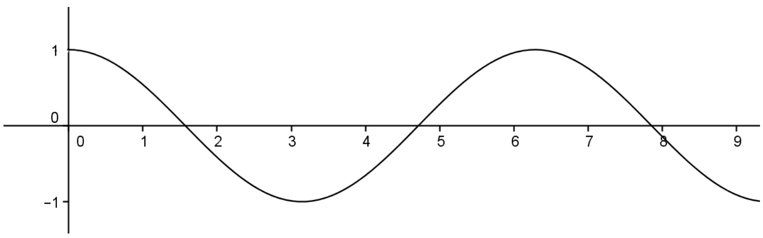
a dosadíme je do rovnic (5.8), vynulujeme p_3 a zredukuje se nám řešení Cauchyovy úlohy na tvar

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \gamma \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t, \\ x_2(t) &= \gamma \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t. \end{aligned}$$

Jak je vidět, řešení rovnic v tomto případě jsou již automaticky periodická a mají totožné složky. Například pro

$$\gamma = 1, \quad k = 1, \quad m = 1$$

je řešením klasická křivka cosinu.



Obrázek 5.3: Graf obou řešení

Poznámka 5.1.1 *Zvolíme-li počáteční podmínky (5.9), můžeme je fyzikálně interpretovat jako počáteční výchylku obou těles najednou ve stejném směru. Z řešení je vidět, že za danných podmínek kmitají souběžně.*

Stejně tak dostaneme periodické řešení vynulujeme-li p_1, což nastane když

$$\gamma_2 = -\gamma_1 =: \gamma.$$

To jest podmínky

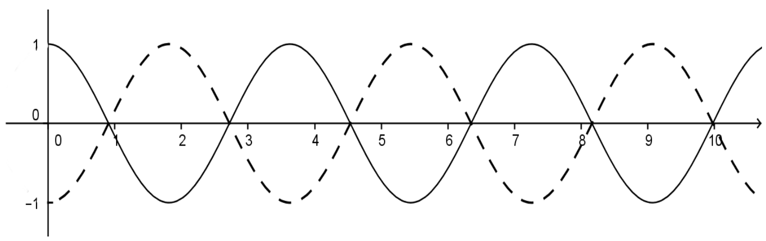
$$\begin{aligned} x_1(0) &= -\gamma, \\ x_2(0) &= \gamma, \end{aligned} \tag{5.10}$$

Pak dostaneme z (5.8) tvar řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \gamma \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t, \\ x_2(t) &= -\gamma \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t. \end{aligned}$$

Jak je vidět, i v tomto případě jsou složky řešení periodické ale opačné. Viz. vykreslený graf pro hodnoty

$$\gamma = 1, \quad k = 1, \quad m = 1.$$



Obrázek 5.4: Graf: $x_1(t)$ spojitě, $x_2(t)$ čárkovaně.

Poznámka 5.1.2 *Počáteční podmínky (5.10) lze fyzikálně interpretovat jako vychýlení obou těles na opačnou stranu o stejnou vzdálenost. Z řešení lze odvodit, že za danných podmínek kmitají proti sobě (opačně).*

5.2 Speciální případ 3

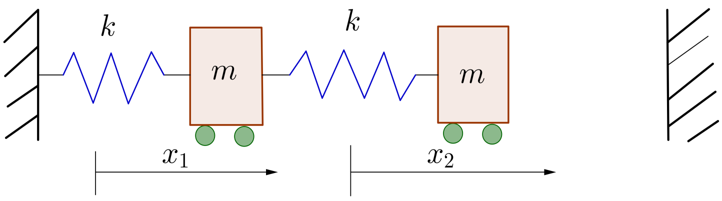
Třetí varianta Modelové situace je reprezentována dvěma hmotnými body o stejných hmotnostech a dvěmi pružinami stejné tuhosti neboť $k_3 = 0$.

5.2.1 Zadání

Mějme speciální případ Modelové situace, uvažejme hmotná tělesa $m_i = m$ a pružiny $k_i = k$ pro $i = 1, 2$ a $k_3 = 0$. Platí předpoklad (4.1).
Nyní přechází soustava (4.2) na tvar

$$\begin{aligned} mx_1'' &= -kx_1 + k(x_2 - x_1), \\ mx_2'' &= -k(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Grafická reprezentace soustavy



Obrázek 5.5: Grafické znázornění pro Speciální případ 3.

5.2.2 Maticový tvar soustavy (5.11)

Opětovným dosazením do tvaru (4.3) a jeho úpravou získáme matici A pro soustavu rovnic (5.11)

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{2k}{m} & \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{k}{m} & -\dfrac{k}{m} \end{pmatrix},$$

zjednodušený zápis matice A budiž opět

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}.$$

5.2.3 Vlastní čísla matice A

Podle Tvrzení 4.1.4 mají vlastní čísla tvar (4.7), dosadíme-li do tohoto tvaru, získáme vlastní čísla λ_1, λ_2, pro která taktéž platí, že jsou záporná dle věty Věta 4.1.5. Snadno se o tom přesvědčíme dosazením koeficientů z matice A za a, b, c, d.

Po vypočtení získáváme dvě záporná vlastní čísla

$$\lambda_1 = -\frac{3k + \sqrt{5}k}{2m}, \quad \lambda_2 = -\frac{3k - \sqrt{5}k}{2m}.$$

5.2.4 Vlastní vektory

Vlastní vektory vypočítáme podle Věty 4.1.9, která říká, že vlastní vektory u a v pro odpovídající vlastní číslo λ_1 a λ_2 jsou tvaru (4.11). Dosazením do (4.11) dostáváme vektor u pro λ_1 tvaru

$$u = \begin{pmatrix} \dfrac{\dfrac{k}{m}s}{\dfrac{2k}{m} - \dfrac{3k + \sqrt{5}k}{2m}} \\ \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}s \\ \\ s \end{pmatrix},$$

a odpovídající vektor v pro λ_2 jest

$$v = \begin{pmatrix} \dfrac{\dfrac{k}{m}s}{\dfrac{2k}{m} - \dfrac{3k - \sqrt{5}k}{2m}} \\ \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}s \\ \\ s \end{pmatrix},$$

kde koeficient $s \in \mathbb{R}$ je libovolný.

Vlastní vektory u a v tedy jsou

$$u = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}s \\ \\ s \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}s \\ \\ s \end{pmatrix}.$$

Dosazením za $s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ pro vektoru u a $s = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pro vektor v vyjdou vektory tvaru

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Čísla s tak byla zvolena proto, abychom měli usměrněny zlomky ve výsledných vektorech.

5.2.5 Obecné řešení soustavy rovnic (5.11)

Nyní lze přistoupit k samotnému obecnému řešení soustavy (5.11).

Podle Věty 2.2.5 známe tvar řešení. Postupným dosazením vlastních čísel λ_1, λ_2 a jim odpovídajících vlastních vektorů u, v do tvaru (2.16), vytvoříme fundamentální systém. Lineární kombinace prvků fundamentálního systému nám umožní sestavit obecné řešení dle Definice 2.1.9.

Komplexní fundamentální systém je

$$FS_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{-i\sqrt{\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}}t}u;\ e^{i\sqrt{\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}}t}u;\ e^{-i\sqrt{\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}}t}v;\ e^{i\sqrt{\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}}t}v \right\}. \tag{5.13}$$

Převedením na reálný fundamentální systém získáme

$$FS_{\mathbb{R}} = \left\{ \cos\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}tu;\ \sin\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}tu;\ \cos\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}tv;\ \sin\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}tv \right\}. \tag{5.14}$$

Lineární kombinací prvků fundamentálního systému $FS_{\mathbb{R}}$ (5.14) dostáváme obecný tvar reálného řešení

$$x(t) = \left(p_1\cos\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}t + p_2\sin\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}t \right)u + \left(p_3\cos\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}t + p_4\sin\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}t \right)v, \tag{5.15}$$

kde u a v je tvaru (5.12) a koeficienty p_1, p_2, p_3 a p_4 jsou reálné.

5.2.6 Řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu (5.11)

Obdobně jako v Speciálním případě 2, již nebude komplikované dosadit do obecného řešení počáteční podmínky. Podle Věty 2.2.6 existuje právě jedno řešení pro poč. podmínky (2.18).

Jako v předchozím případě si zvolíme $\delta_1 = \delta_2 = 0$ a požadujeme tedy počáteční podmínky

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \gamma_1, \\ x_2(0) &= \gamma_2, \\ x_1'(0) &= 0, \\ x_2'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

pak řešení Cauchyovy úlohy dostaneme po jejich dosazení do rovnice (5.11) a vyjde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\gamma_1 \frac{\sqrt{5}+5}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} \cos\sqrt{\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}}t + \frac{\gamma_1 \frac{5-\sqrt{5}}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} \cos\sqrt{\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}}t, \\ x_2(t) &= \frac{\gamma_1 \frac{\sqrt{5}+5}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cos\sqrt{\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}}t - \frac{\gamma_1 \frac{\sqrt{5}-5}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cos\sqrt{\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}}t. \end{aligned}$$

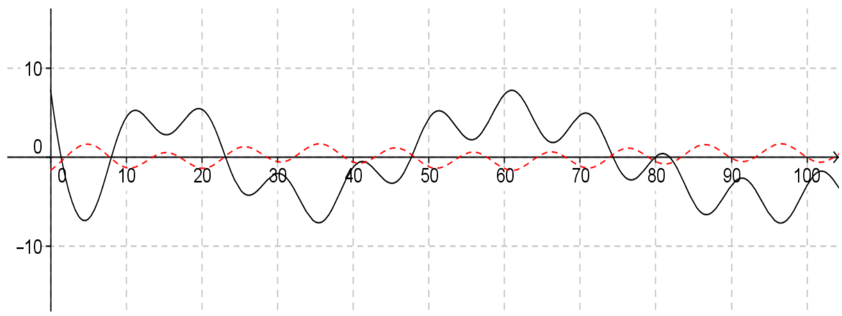
5.2.7 Diskuze o periodicitě řešení

Jak jsme se přesvědčili v Speciálním případě 2, ne vždy vzniká periodické řešení. Prozkoumejme za jakých podmínek vznikne periodické řešení Speciálního případu 3.

Pozorujeme, že ani v tomto případě nejsou frekvence period součtu funkcí cosinu v racionálním poměru

$$\frac{\sqrt{\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}}}{\sqrt{\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}}} = \frac{\sqrt{3k+\sqrt{5}k}}{\sqrt{3k-\sqrt{5}k}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}.$$

Podle Tvrzení 4.1.18 za takové situace řešení nemůže být periodické.



Obrázek 5.6: Demonstrace řešení $x_1(t)$, $x_2(t)$ pro vhodně zvolené hodnoty k, m, γ_1, γ_2.

Pokud požadujeme periodické řešení, musíme opět hledat situace, kdy se vynuluje jeden z koeficientů p_1 nebo p_3. položíme tedy $p_1 = 0$, pak musí platit rovnost

$$\frac{\gamma_1 \frac{\sqrt{5}+5}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} = 0, \tag{5.17}$$

která nám zjednoduší řešení Cauchyovy úlohy (5.11), (5.16) na

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\gamma_1 \frac{5-\sqrt{5}}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} \cos\sqrt{\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}}t, \\ x_2(t) &= -\frac{\gamma_1 \frac{\sqrt{5}-5}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cos\sqrt{\frac{3k-\sqrt{5}k}{2m}}t. \end{aligned}$$

Jak pro $x_1(t)$, tak i pro $x_2(t)$ vychází jedna goniometrická funkce, což znamená, že dostaneme periodické řešení.

Druhá možnost jak získat periodické řešení je zvolit $p_3 = 0$. Podmínka splňující rovnost je tedy

$$\frac{\gamma_1 \frac{\sqrt{5}-5}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} = 0 \tag{5.18}$$

a řešení vypadá následovně

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\gamma_1 \frac{\sqrt{5}+5}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} \cos\sqrt{\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}}t, \\ x_2(t) &= \frac{\gamma_1 \frac{\sqrt{5}+5}{2} - \gamma_2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cos\sqrt{\frac{3k+\sqrt{5}k}{2m}}t. \end{aligned}$$

Znovu se v něm vyskytuje pouze jedna periodická funkce cos. Řešení je periodické.

Závěr

V bakalářské práci jsme zavedli teorii nutnou k výpočtu soustav dvou rovnic 2.řádu a dokázali jsme, existenci a jednoznačnost řešení pro tyto soustavy. Vysvětlili jsme princip Hookova zákona, kterého je využíváno ve fyzikální motivaci námi počítaných příkladů a také samotný původ soustavy rovnic pro Modelovou situaci dvou těles a tří pružin. Popsali jsme podrobně řešení Cauchyovy úlohy Modelové situace včetně výpočtu vlastních čísel a vektorů příslušné matice soustavy. Ve všech případech jsme se zaměřili především na existenci periodického řešení. Ukázali jsme, navzdory tomu že řešení je lineární kombinaci periodických funkcí, nemusí být výsledné řešení periodické. Ukázali jsme, v jakých případech a za jakých podmínek periodické bude a tyto případy konkrétně vypočítali.

Literatura

[1] KRAJC a BEREMLIJSKI. *Obyčejné diferenciální rovnice.* Ostrava, 2012. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/modul/obycejne-diferencialni-rovnice. Řešení projektu u „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Vysoká škola báňská - Technická univerzita v Ostravě a Západočeská univerzita v Plzni.

[2] EDWARDS, C a David E PENNEY. *Elementary differential equations.* 6th ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, c2008. ISBN 01-323-9730-7.

[3] KEPKA, Josef. Úvod do obecné fyziky. 1. vyd. Plzeň: Pedagogická fakulta, 1988, 224 s.

[4] KURZWEIL, Jaroslav. Obyčejné diferenciální rovnice: Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru. 1. vyd. Praha: SNTL, 1978, 418 s