UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Metody porovnávání fuzzy čísel

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Lucie Novosádová
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně pod vedením RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 13. dubna 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále si zaslouží poděkování můj počítač, že vydržel moje pracovní tempo, a typografický systém LaTeX, kterým je práce vysázena. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za podporu během studia.

Obsah

1 Úvod

Fuzzy čísla se používají v mnoha matematických modelech k vyjádření neurčité hodnoty dané veličiny. Jako příklad můžeme uvést model vícekriteriálního hodnocení a rozhodování, viz [6]. V jeho rámci se předpokládá, že vstupní hodnoty kritérií mohou být u jednotlivých variant z důvodu své neurčitosti vyjádřeny pomocí fuzzy čísel. Dále pak i závislost celkového hodnocení na hodnotách jednotlivých kritérií může být pro svou komplikovanost popsána pomocí tzv. báze pravidel. Z těchto důvodů je výsledné hodnocení varianty dáno v podobě fuzzy čísla. Máme-li si pak vybrat nejlepší variantu, musíme být schopni fuzzy čísla mezi sebou porovnávat.

Cílem této bakalářské práce je seznámit čtenáře s metodami porovnávání fuzzy čísel. Celá práce je rozdělena na dvě části. První část je zaměřena na základy teorie fuzzy množin. Budou zde vysvětleny nejdůležitější pojmy z teorie fuzzy množin, jež je nutné znát k další práci s fuzzy čísly. Dále si zavedeme fuzzy čísla, která jsou speciální třídou fuzzy množin definovaných na množině všech reálných čísel, a také je nutné nadefinovat relace uspořádání a fuzzy relace uspořádání, jež budeme potřebovat k tomu, abychom uměli určit, jaké vlastnosti splňují metody uspořádání na množině fuzzy čísel. Ve druhé části se seznámíme s jednotlivými metodami uspořádání na množině všech fuzzy čísel, to je uspořádání podle α-řezů, uspořádání podle číselné charakteristiky a fuzzy relace uspořádání na množině všech fuzzy čísel. Na názorných příkladech budou vysvětleny výhody a nevýhody každé z nich. Na závěr se pak pokusíme zjistit, zda mezi jednotlivými přístupy platí nějaký vztah.

2 Užité pojmy teorie fuzzy množin

2.1 Fuzzy množiny

V této kapitole se seznámíme se základními pojmy teorie fuzzy množin, se kterými budeme pracovat v následujících kapitolách. Tato kapitola je zpracována podle [6].

Klasická množina může být definována výčtem všech prvků, které do množiny patří, definicí vlastností, jež určuje příslušnost prvku do množiny, nebo definicí množiny A pomocí charakteristické funkce.

Definice 2.1. *Charakteristická funkce* χ_A množiny A je definována vztahem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

Fuzzy množina je analogicky určena pomocí tzv. funkce příslušnosti, která představuje zobecnění charakteristické funkce. Tato funkce nemusí nabývat jen hodnot 0 a 1, ale také spojitě hodnot mezi 0 a 1. To znamená, že se dá uvažovat případ, kdy prvek může do množiny patřit jen částečně. Tím se liší od klasické teorie množin, kde se předpokládá, že každý prvek daného univerza do množiny buď patří nebo nepatří.

Definice 2.2. Nechť je dána množina U, tzv. univerzum. Pak *fuzzy množina* A na univerzu U je definována zobrazením

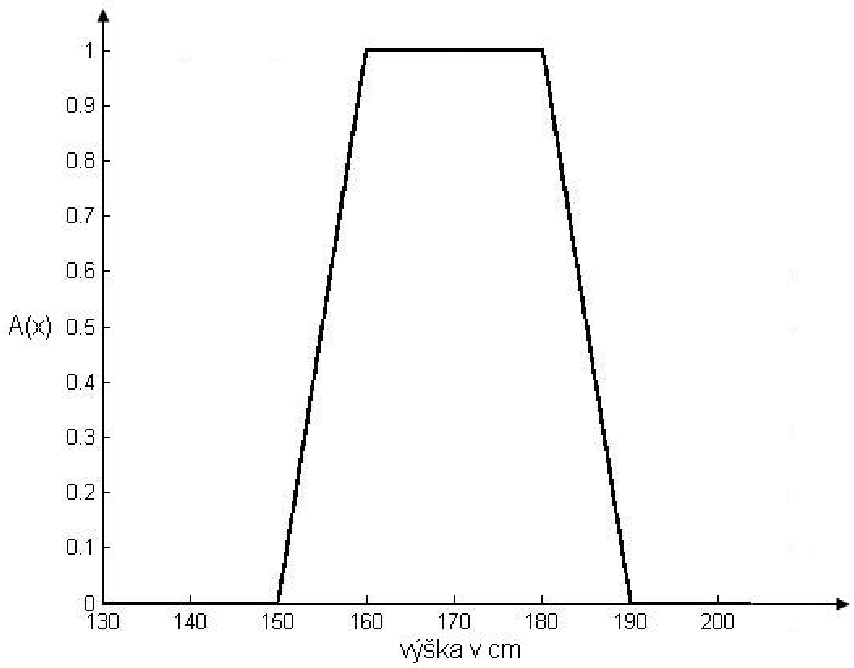
$$\mu_A : U \to [0, 1]. \tag{2}$$

Funkci μ_A nazýváme *funkcí příslušnosti* fuzzy množiny A. Pro každé $x \in U$ nazveme hodnotu $\mu_A(x)$ *stupněm příslušnosti* prvku x k fuzzy množině A.

Poznámka 2.1. *Z důvodu jednoduššího zápisu budeme funkci příslušnosti značenou jako* μ_A *zapisovat jako* $A(.)$*. Stupeň příslušnosti* $\mu_A(x)$ *budeme potom značit jako* $A(x)$*, kde* $x \in U$*.*

Příklad 2.1. *Jako příklad si můžeme představit stomililitrovou sklenici, ve které je 20 ml vody. Zde můžeme uvažovat například fuzzy množiny „plná sklenice“ a „prázdná sklenice“. Naše částečně naplněná sklenice vody patří do fuzzy množiny „plná sklenice“ se stupněm příslušnosti 0.2. Stupně příslušnosti představují procentní naplnění sklenice, to znamená, že sklenice je plná z 20%. Do množiny „prázdná sklenice“ patří se stupněm příslušnosti 0.8, takže je z 80% prázdná. Dále můžeme uvažovat, že je ve sklenici 50 ml vody. Někdo by řekl, že je spíše plná, a někdo jiný spíše prázdná. Tímto jsem chtěla zdůraznit subjektivní pohled každého člověka na problém.*

Příklad 2.2. *Jako další příklad si uveďme fuzzy množinu „výška průměrně vysokého člověka“. Já si například představuji, že se výška průměrně vysokého člověka pohybuje od 160 cm do 180 cm, potom si všimněme na Obr. 1, že u intervalu [160,180] je stupeň příslušnosti roven 1. Dále ještě můžu připustit, že by výška mohla ležet i trochu mimo tento interval, ale už tomu moc nevěřím.*



Obrázek 1: Výška člověka

Poznámka 2.2. *Systém všech fuzzy množin definovaných na univerzu U budeme označovat $F(U)$. Zápis $A \in F(U)$ vyjadřuje, že A je fuzzy množina na U.*

Nyní definujeme následující pojmy popisující fuzzy množinu, které je nutné znát pro další práci s fuzzy množinami.

Definice 2.3. Nechť je dána fuzzy množina A definovaná na univerzu U a reálné číslo $\alpha \in [0, 1]$. Pak *α-řezem fuzzy množiny* A nazýváme ostrou množinu

$$A_\alpha = \{x \in U \mid A(x) \geq \alpha\}. \tag{3}$$

Definice 2.4. *Jádrem fuzzy množiny* A na univerzu U rozumíme (ostrou) množinu

$$KerA = \{x \in U \mid A(x) = 1\}. \tag{4}$$

Definice 2.5. *Nosičem fuzzy množiny* A na univerzu U nazýváme (ostrou) množinu

$$SuppA = \{x \in U \ \mid A(x) > 0\}. \tag{5}$$

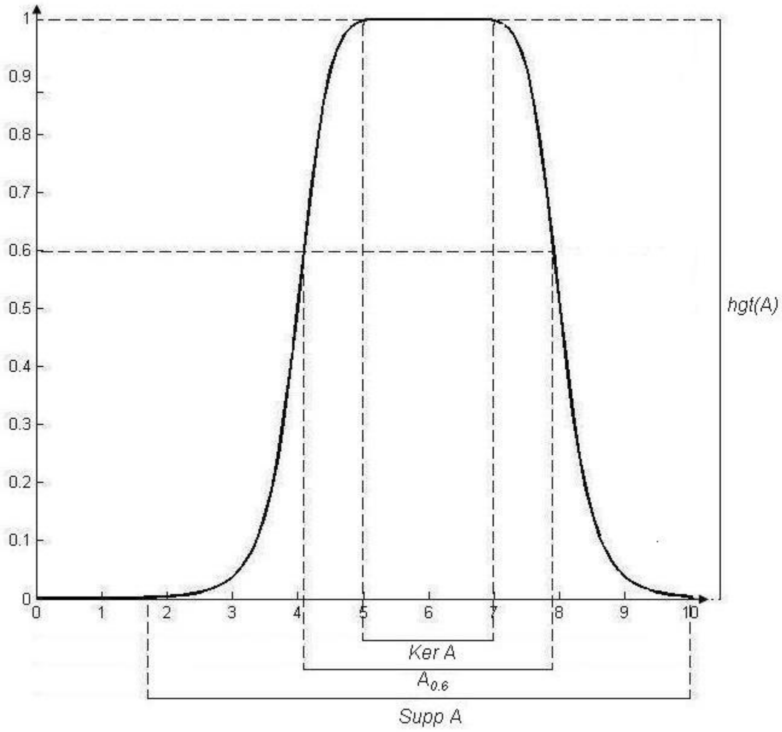
Definice 2.6. *Výška* $hgt(A)$ fuzzy množiny A na univerzu U je definovaná formulí

$$hgt(A) = \sup_{x \in U} A(x). \tag{6}$$

Definice 2.7. Fuzzy množina A na univerzu U se nazývá *normální*, jestliže

$$KerA \neq \emptyset. \tag{7}$$

Jednotlivé pojmy jsou znázorněny na fuzzy množině A na Obr. 2.



Obrázek 2: Fuzzy množina, její nosič, jádro, 0,6-řez a výška

2.2 Fuzzy čísla

Fuzzy čísla jsou speciální třídou fuzzy množin definovaných na množině reálných čísel $\mathbb{R}$. Fuzzy čísla vyjadřují neurčité množství, nepřesné výsledky měření, atd. Tato kapitola byla zpracována podle [3, 5, 6].

Definice 2.8. Fuzzy množina C definovaná na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, která má následující vlastnosti:

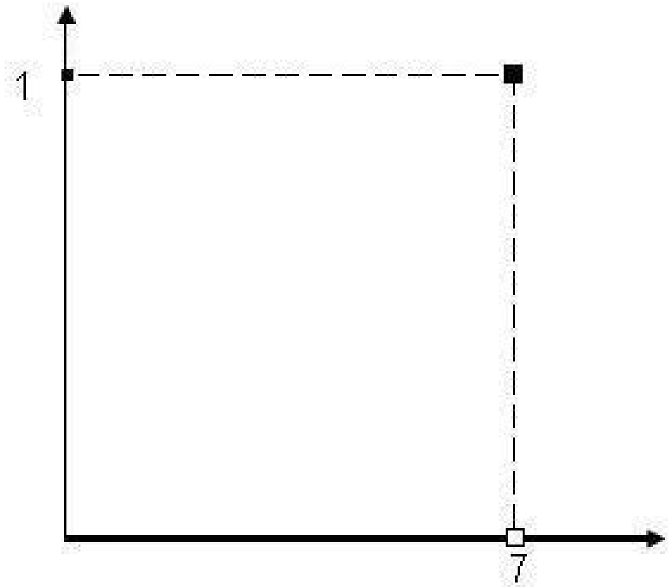
1. C je normální fuzzy množina,

2. α-řezy C_α jsou pro všechna $\alpha \in (0, 1]$ uzavřené intervaly,

3. nosič $Supp\, C$ je ohraničený,

se nazývá *fuzzy číslem*. Množinu všech fuzzy čísel budeme dále označovat $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$.

Příklad 2.3. *Speciálním případem fuzzy čísla je číslo reálné. Podle předchozí definice se dá ověřit, zda libovolné reálné číslo, například číslo 7, splňuje její vlastnosti. Číslo 7 zcela náleží do fuzzy množiny, proto je tato množina normální, α-řezy jsou uzavřené intervaly [7,7] a nosič je ohraničený. Funkce příslušnosti je znázorněna na Obr. 3.*



Obrázek 3: Funkce příslušnosti reálného čísla

Lepší představu o charakteru funkcí příslušnosti fuzzy čísel poskytuje následující věta.

Věta 2.1. *Nechť C je fuzzy množina na $\mathbb{R}$. Pak C je fuzzy číslem tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ tak, že pro funkci příslušnosti $C(.)$ platí*

$$C(x) = \begin{cases} L(x) & \textit{pro } x \in (-\infty, x_2) \\ 1 & \textit{pro } x \in [x_2, x_3] \\ P(x) & \textit{pro } x \in (x_3, \infty), \end{cases} \tag{8}$$

kde funkce $L : (-\infty, x_2) \to [0,1]$ je neklesající, spojitá zprava a platí pro ni $L(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, x_1)$, funkce $P : (x_3, \infty) \to [0,1]$ je nerostoucí, spojitá zleva a platí pro ni $P(x) = 0$ pro $x \in (x_4, \infty)$.

Důkaz: Viz [3]. ■

Nyní si ukážeme, že každé fuzzy číslo lze jednoznačně charakterizovat pomocí dvojice funkcí $\underline{c}(\alpha)$ a $\overline{c}(\alpha)$ definovaných na $[0, 1]$, jež popisují nejmenší a největší hodnoty jednotlivých α-řezů.

Věta 2.2. *Nechť C je fuzzy číslo. Nechť jsou funkce $\underline{c} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a $\overline{c} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definované tak, že platí $C_\alpha = [\underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)]$ pro všechna $\alpha \in (0, 1]$ a $\overline{Supp\,C} = [\underline{c}(0), \overline{c}(0)]$, kde $\overline{Supp\,C}$ značí uzávěr nosiče fuzzy čísla C. Pak jsou funkce $\underline{c}$ a $\overline{c}$ zleva spojité na $(0, 1]$, zprava spojité v 0 a splňují*

$$\underline{c}(\alpha) \leq \underline{c}(\beta) \leq \overline{c}(\beta) \leq \overline{c}(\alpha) \tag{9}$$

pro všechna $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

Důkaz: Viz [5]. ■

Věta 2.3. *Nechť funkce $\underline{c} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a $\overline{c} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ jsou zleva spojité na (0,1], zprava spojité v 0 a splňují vztah (9). Potom fuzzy množina, jejíž funkce příslušnosti je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem*

$$C(x) = \begin{cases} \max\{\alpha \mid \textit{pro } x \in [\underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)]\} & x \in [\underline{c}(0), \overline{c}(0)] \\ 0 & \textit{jinak}, \end{cases} \tag{10}$$

je fuzzy číslo. Navíc platí, že $C_\alpha = [\underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)]$ a uzávěr $\overline{Supp\,C} = [\underline{c}(0), \overline{c}(0)]$.

Důkaz: Viz [5]. ■

Poznámka 2.3. *Pro fuzzy číslo, jehož funkce příslušnosti je definována předpisem (10), budeme používat značení $C = \{[\underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$.*

V úlohách se pro modelování neurčitých vstupních hodnot používá nejjednodušší třída fuzzy čísel, protože většinou se dá určit pouze čtveřice bodů $(c_1, 0), (c_2, 1), (c_3, 1), (c_4, 0)$. Z důvodu snadnosti výpočtů jsou též využívány tvary funkcí příslušnosti, které se skládají z lomených čar.

Definice 2.9. *Lineárním fuzzy číslem* určeným čtveřicí bodů

$$(c_1, 0), (c_2, 1), (c_3, 1), (c_4, 0), \tag{11}$$

kde c_1, c_2, c_3, c_4 jsou reálná čísla splňující $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$, rozumíme fuzzy číslo C, jehož funkce příslušnosti závisí na parametrech c_1, c_2, c_3, c_4 následujícím způsobem:

$$\forall x \in \mathbb{R} : C(x, c_1, c_2, c_3, c_4) = \begin{cases} 0 & pro\ x < c_1 \\ \frac{x-c_1}{c_2-c_1} & pro\ c_1 \leq x < c_2 \\ 1 & pro\ c_2 \leq x < c_3 \\ \frac{c_4-x}{c_4-c_3} & pro\ c_3 \leq x < c_4 \\ 0 & pro\ c_4 \leq x. \end{cases} \tag{12}$$

Poznámka 2.4. *V následujícím textu budeme lineární fuzzy číslo určené čtveřicí bodů* (11) *označovat jako* $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$. *Název lineárního fuzzy čísla* $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ *je odvozen z faktu, že použijeme-li reprezentaci* $C = \{[\underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0, 1]\}$, *pak obě funkce* $\underline{c}$ *a* $\overline{c}$ *jsou lineární. Funkce* $\underline{c}$ *a* $\overline{c}$ *jsou v takovém případě dány pro všechna* $\alpha \in [0, 1]$ *následovně:*

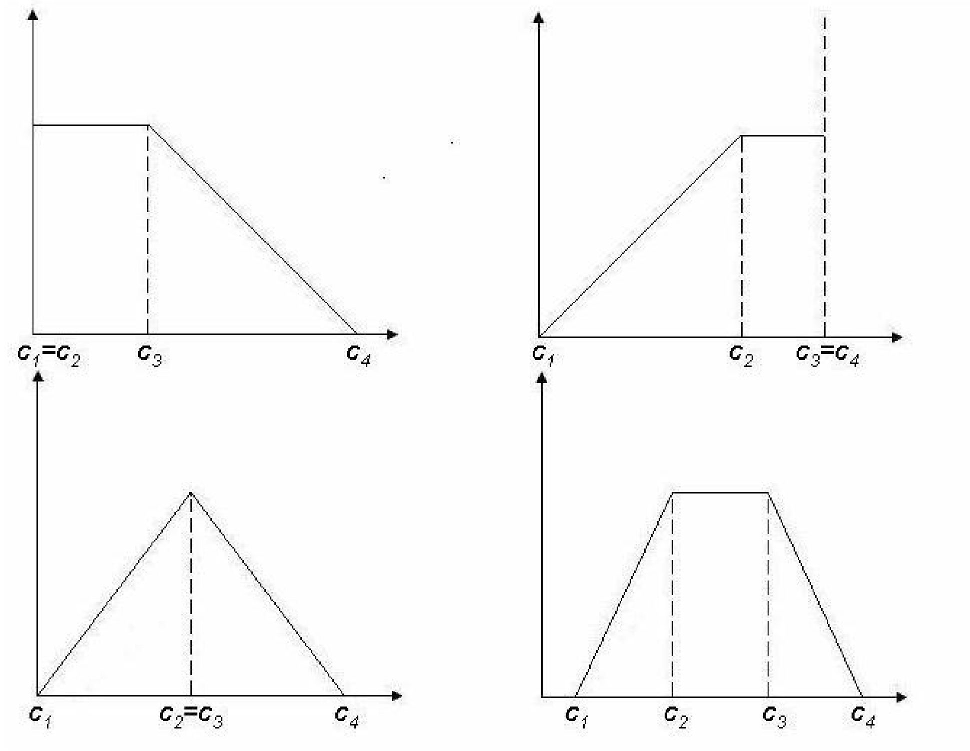
$$\underline{c}(\alpha) = c_1 + \alpha(c_2 - c_1) \quad a \quad \overline{c}(\alpha) = c_4 - \alpha(c_4 - c_3). \tag{13}$$

Příklad 2.4. *Lineární fuzzy číslo může mít různé typy. Podle tvaru je to buď fuzzy číslo typu Z, pro které platí* $c_1 = c_2$, *fuzzy číslo typu S, kde* $c_3 = c_4$, *lichoběžníkové, kde* $c_2 \neq c_3$, *nebo trojúhelníkové, kde* $c_2 = c_3$. *Jednotlivé typy fuzzy čísel jsou znázorněny na Obr. 4.*

Poznámka 2.5. *V* [6] je uvažována i další třída fuzzy čísel. Jsou to kvadratická fuzzy čísla, které se vyznačují hladkým tvarem funkce příslušnosti fuzzy množiny.

2.3 Relace uspořádání a fuzzy relace uspořádání

Náplní této kapitoly budou jak relace uspořádání, tak i fuzzy relace uspořádaní, kde preference nejsou dané jednoznačně. Tato kapitola byla zpracována podle [2, 4, 6].



Obrázek 4: Typy lineárních fuzzy čísel

Definice 2.10. *Binární relací mezi množinami A a B* nazýváme libovolnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Speciálně, jestliže $R \subseteq A^2$, pak se R nazývá *binární relace na množině A.*

Poznámka 2.6. *Nechť $R \subseteq A \times B$. Pak místo $(a, b) \in R$ budeme psát aRb.*

Příklad 2.5. *Je-li $A = \{$Karel, Martin, Petr$\}$ univerzum chlapců a $B = \{$Eva, Klára, Zuzana$\}$ univerzum dívek, potom relace „taneční pár“ může být například množina uspořádaných dvojic*

$$R = \{\text{(Karel, Zuzana)},\text{(Petr, Eva)},\text{(Matin, Klára)}\}.$$

V následující definici budou zavedeny důležité vlastnosti binárních relací.

Definice 2.11. Relace R na množině A se nazývá

- *reflexivní*, jestliže
$$\forall a \in A : (a, a) \in R, \tag{14}$$
- *symetrická*, jestliže
$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R, \tag{15}$$
- *tranzitivní*, jestliže
$$((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R, \tag{16}$$
- *antisymetrická*, jestliže
$$((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \Rightarrow a = b, \tag{17}$$
- *úplná*, jestliže
$$\forall (a, b) \in A : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R. \tag{18}$$

Příklad 2.6. *Názorným příkladem jsou přímky v rovině a relace $\perp$ neboli „kolmost“. Tato relace není reflexivní, protože přímka není kolmá sama na sebe, je symetrická, protože $a \perp b \wedge b \perp a$, není antisymetrická, tzn. z $a \perp b \wedge b \perp a$ neplyne $a = b$, a není ani tranzitivní, protože z $a \perp b \wedge b \perp c$ neplyne, že $a \perp c$, ale $a \parallel c$.*

Důležitým typem binárních relací jsou relace uspořádání, které vyjadřují určitou preferenci mezi prvky dané množiny.

Definice 2.12. Binární relace $\leq$ na množině $A \neq \emptyset$, která je reflexivní a tranzitivní, se nazývá *kvaziuspořádání na A*. Množina A, na níž je definováno kvaziuspořádání $\leq$, se nazývá kvaziuspořádáná a značí se $(A, \leq)$.

Definice 2.13. Kvaziuspořádaná množina $(A, \leq)$ taková, že relace $\leq$ je antisymetrická, se nazývá uspořádaná a relace $\leq$ se v tomto případě nazývá *částečné uspořádání na A*. Je-li relace $\leq$ navíc úplná, nazývá se *lineárním uspořádáním.*

Věta 2.4. Nechť $(A, \leq)$ je kvaziuspořádaná množina. Definujeme binární relaci R na A takto: $aRb \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$. Pak R je *relace ekvivalence* na A, tj. R je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Důkaz: Viz [4]. ■

Příklad 2.7. *Typickým příkladem relace lineárního uspořádání je relace „větší nebo rovno než", značíme „≥" definována na množině reálných čísel následovně*

$$R_{\geq} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\}. \tag{19}$$

Neurčitý vztah mezi prvky jednoho nebo více univerz umíme popsat pomocí tzv. fuzzy relace.

Definice 2.14. Nechť $U = U \times U$. Pak *binární fuzzy relací* rozumíme libovolnou fuzzy množinu R definovanou na tomto univerzu U.

Poznámka 2.7. *Stupeň příslušnosti $R(x, y)$ vyjadřuje míru vztahu R mezi prvky dvojice (x, y).*

Vlastnosti ostrých relací můžeme zobecnit i na fuzzy relace.

Významné místo mezi fuzzy relacemi mají fuzzy relace na $U \times U$, zejména pak fuzzifikace klasických relací ekvivalence a uspořádání.

Definice 2.15. Nechť R je binární fuzzy relace definovaná na $U \times U$. Pak řekneme, že R je

- *reflexivní*, jestliže
$$\forall x \in U : R(x, x) = 1, \tag{20}$$
- *symetrická*, jestliže
$$\forall x, y \in U : R(x, y) = R(y, x), \tag{21}$$
- *antisymetrická*, jestliže
$$\forall x, y \in U : (R(x, y) > 0) \wedge (R(y, x) > 0) \Rightarrow x = y, \tag{22}$$
- *tranzitivní*, jestliže
$$\forall x, z \in U : R(x, z) \geq \sup_{y \in U}\{min\{R(x, y), R(y, z)\}\}, \tag{23}$$

- *úplná*, jestliže

$$\forall x, y \in U : (R(x, y) > 0) \vee (R(y, x) > 0). \tag{24}$$

Definice 2.16. Binární fuzzy relace R na $U \times U$ se nazývá *fuzzy kvaziuspořádání*, je-li reflexivní a tranzitivní. Je-li R navíc antisymetricná, nazývá se *částečné fuzzy uspořádání* a je-li R navíc úplná, nazývá se *lineární fuzzy uspořádání*.

Definice 2.17. Binární fuzzy relace R na $U \times U$ se nazývá *fuzzy ekvivalence*, je-li reflexivní, symetrická a tranzitivní.

3 Metody uspořádání na množině fuzzy čísel

V této kapitole se zaměříme na porovnávání fuzzy čísel. Pro uspořádání fuzzy čísel existuje mnoho metod. My si uvedeme tři způsoby, jak lze fuzzy čísla porovnávat, a ukážeme si výhody a nevýhody každé metody. Metody uspořádání na množině fuzzy čísel jsou následující:

- uspořádání pomocí α-řezů
- uspořádání podle číselné charakteristiky
- fuzzy relace uspořádání na množině fuzzy čísel.

3.1 Uspořádání pomocí α-řezů

Uspořádání fuzzy čísel podle α-řezů vychází z relace uspořádání definované na množině uzavřených intervalů. Tato kapitola byla zpracována s využitím [6].

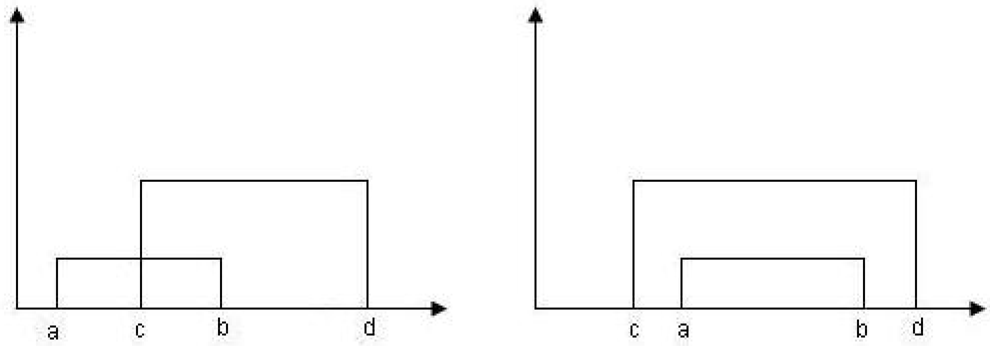
Definice 3.1. Řekneme, že *uzavřený interval* $[a, b]$ *je menší nebo roven uzavřenému intervalu* $[c, d]$, značíme $[a, b] \leq [c, d]$, jestliže platí

$$a \leq c \wedge b \leq d. \tag{25}$$

Platí-li navíc $[a, b] \leq [c, d]$ a $[a, b] \neq [c, d]$, pak řekneme, že *interval* $[a, b]$ *je menší než interval* $[c, d]$, značíme $[a, b] < [c, d]$.

Poznámka 3.1. *Relace $\leq$ definovaná na množině všech uzavřených intervalů M předpisem* (25) *je částečným uspořádáním, to znamená, že je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, ale není úplná. Ne všechny uzavřené intervaly jsou totiž pomocí relace $\leq$ srovnatelné. Jestliže pro $[a, b] \in M$, $[c, d] \in M$ platí $c \leq a$ a zároveň $b \leq d$, pak neplatí ani $[a, b] \leq [c, d]$ ani $[c, d] \leq [a, b]$. Příklad srovnatelných a nesrovnatelných intervalů je znázorněn na Obr. 5.*

Protože α-řezy fuzzy čísel jsou uzavřené intervaly, můžeme využít relaci $\leq$ definovanou na množině všech uzavřených intervalů M k definování relace uspořádání na množině fuzzy čísel $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$.



Obrázek 5: Srovnatelné a nesrovnatelné intervaly na množině M

Definice 3.2. Řekneme, že *fuzzy číslo C je menší nebo rovno podle α-řezů fuzzy číslu D*, značíme $C \leq_\alpha D$, jestliže platí

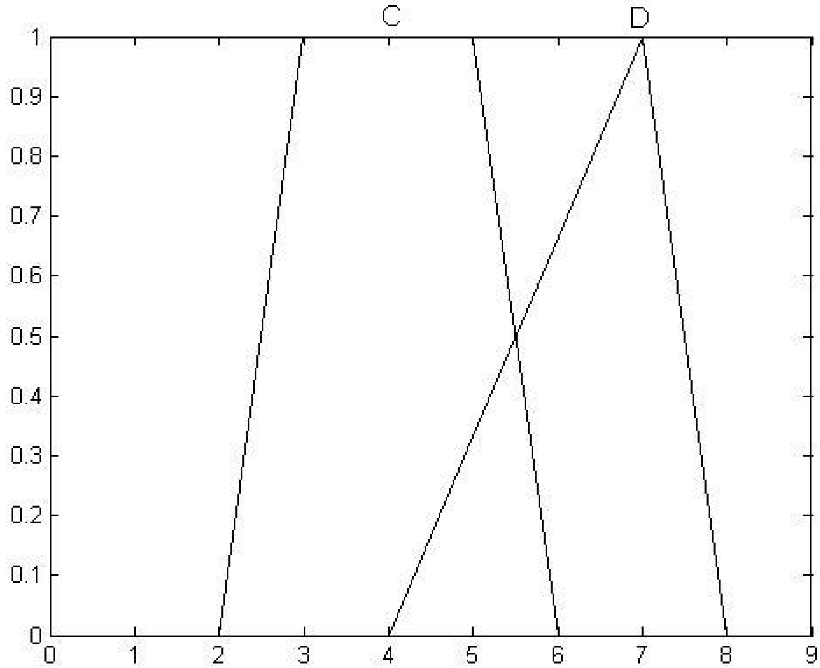
$$\forall \alpha \in (0,1] : C_\alpha \leq D_\alpha. \tag{26}$$

Platí-li navíc $C \leq_\alpha D$ a $C \neq D$, potom *fuzzy číslo C je menší než fuzzy číslo D podle α-řezů*, značíme $C <_\alpha D$.

Poznámka 3.2. *Použijeme-li reprezentaci fuzzy čísel pomocí dvojice funkcí, tj. $C = \{[\underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0,1]\}$ a $D = \{[\underline{d}(\alpha), \overline{d}(\alpha)] \mid \alpha \in [0,1]\}$, pak $C \leq_\alpha D$ právě tehdy, když pro každé $\alpha \in [0,1]$ platí*

$$\underline{c}(\alpha) \leq \underline{d}(\alpha) \wedge \overline{c}(\alpha) \leq \overline{d}(\alpha). \tag{27}$$

Poznámka 3.3. *Relace uspořádání fuzzy čísel podle α-řezů definovaná na množině $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ je pouze částečná, protože není úplná. To znamená, že nemůžeme všechna fuzzy čísla podle α-řezů porovnávat. Mějme fuzzy čísla $C = \{[\underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0,1]\}$ a $D = \{[\underline{d}(\alpha), \overline{d}(\alpha)] \mid \alpha \in [0,1]\}$. Jestliže alespoň pro jedno $\alpha \in [0,1]$ platí $\underline{d}(\alpha) \leq \underline{c}(\alpha)$ a zároveň $\overline{c}(\alpha) \leq \overline{d}(\alpha)$, potom neplatí $C_\alpha \leq D_\alpha$ ani $D_\alpha \leq C_\alpha$. Příklad srovnatelných fuzzy čísel je uveden na Obr. 6 a nesrovnatelných fuzzy čísel na Obr. 7.*



Obrázek 6: Srovnatelná fuzzy čísla C a D, $C \leq_\alpha D$

3.2 Uspořádání podle číselné charakteristiky

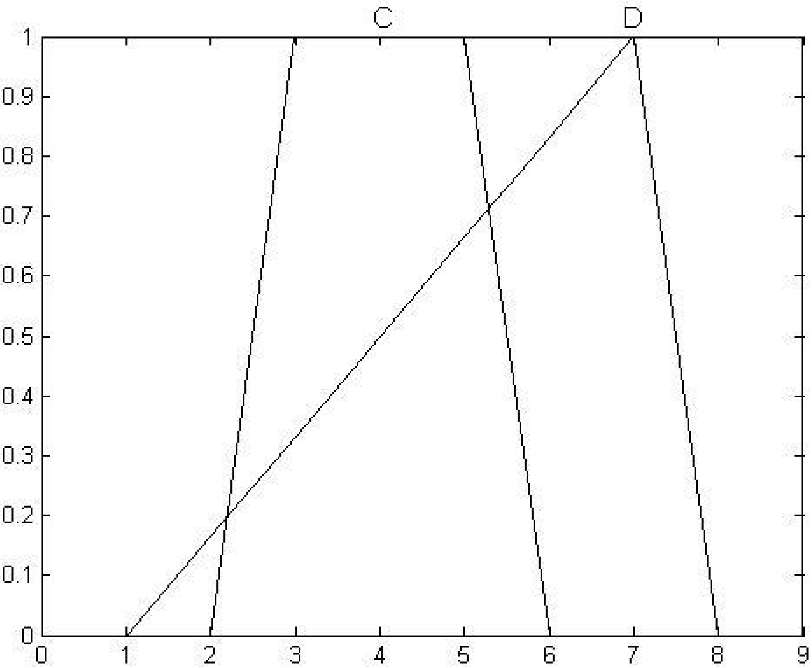
Další přístup spočívá v tom, že fuzzy čísla nahradíme reálnými čísly, které je dle určitého hlediska nejlépe vystihují. K aproximaci fuzzy čísel se nejčastěji využívá medián, těžiště a zobecněné těžiště. Ukážeme si také vztah mezi mediánem, těžištěm a zobecněným těžištěm. Tato kapitola byla zpracována podle [1, 6].

Definice 3.3. Nechť je dáno fuzzy číslo $C = \{[\underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)] \mid \alpha \in [0,1]\}$. *Mediánem* fuzzy čísla C nazveme reálné číslo m_C definované formulí

$$m_C = \int_0^1 \frac{\underline{c}(\alpha) + \overline{c}(\alpha)}{2} d\alpha. \tag{28}$$

Poznámka 3.4. *Medián rozděluje plochu pod funkcí příslušnosti na dvě stejné části.*

V následující větě je ukázané, že v případě lineárních fuzzy čísel lze výpočet mediánu výrazně zjednodušit.



Obrázek 7: Nesrovnatelná fuzzy čísla C a D

Věta 3.1. *Nechť C je lineární fuzzy číslo určené čtveřicí bodů $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$. Pak pro medián m_C fuzzy čísla C platí vztah*

$$m_C = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4}. \tag{29}$$

Důkaz:

$$m_C = \int_0^1 \frac{\underline{c}(\alpha) + \overline{c}(\alpha)}{2} d\alpha = \int_0^1 \frac{c_1 + \alpha(c_2 - c_1) + c_4 - \alpha(c_4 - c_3)}{2} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (c_1 + \alpha(c_2 - c_1)) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^1 (c_4 - \alpha(c_4 - c_3)) d\alpha = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4}. \quad \blacksquare$$

Definice 3.4. Nechť je dáno fuzzy číslo C, které není číslem reálným. Jeho *těžištěm* nazveme reálné číslo t_C definované vztahem

$$t_C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C(x) x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C(x) dx}. \tag{30}$$

Pokud C je reálné číslo, pak klademe $t_C = C$.

Zobecněným těžištěm řádu k nazveme reálné číslo t_{k_C} dané vzorcem

$$t_{k_C} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C^{k+1}(x)xdx}{\int_{-\infty}^{\infty} C^{k+1}(x)dx}, k \in \{1, 2, ...\}. \tag{31}$$

Pokud C je reálné číslo, pak klademe $t = t_{k_C} = C$.

Poznámka 3.5. *Těžiště fuzzy čísla je analogické jako střední hodnota spojité náhodné veličiny, jejíž rozdělení pravděpodobností je popsáno funkcí hustoty. Zobecněné těžiště pak dává větší váhu hodnotám s většími stupni příslušnosti a potlačuje vliv hodnot s malými stupni příslušnosti. Čím větší je parametr k, tím více se t_{k_C} blíží středu jádra fuzzy čísla.*

Následující věty ukazují, že v případě lineárních fuzzy čísel lze výpočet těžiště a zobecněného těžiště řádu k zjednodušit.

Věta 3.2. *Nechť C je lineární fuzzy číslo určené čtveřicí bodů $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$. Potom pro těžiště t_C fuzzy čísla C platí vztah*

$$t_C = \frac{1}{3} \cdot \frac{c_4^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_4c_3 - c_2c_1}{c_4 + c_3 - c_2 - c_1}. \tag{32}$$

Důkaz:

$$t_C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C(x)xdx}{\int_{-\infty}^{\infty} C(x)dx} = \frac{\int_{c_1}^{c_2} \frac{x-c_1}{c_2-c_1}xdx + \int_{c_2}^{c_3} xdx + \int_{c_3}^{c_4} \frac{c_4-x}{c_4-c_3}xdx}{\int_{c_1}^{c_2} \frac{x-c_1}{c_2-c_1}dx + \int_{c_2}^{c_3} 1dx + \int_{c_3}^{c_4} \frac{c_4-x}{c_4-c_3}dx} =$$

$$= \frac{\frac{c_2^2}{3} - \frac{c_1c_2}{6} - \frac{c_1^2}{6} + \frac{c_3^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + \frac{c_4^2}{6} + \frac{c_4c_3}{6} - \frac{c_3^2}{3}}{\frac{c_2}{2} - \frac{c_1}{2} + c_3 - c_2 + \frac{c_4}{2} - \frac{c_3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{c_4^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_4c_3 - c_2c_1}{c_4 + c_3 - c_2 - c_1}. \quad \blacksquare$$

Věta 3.3. *Nechť C je lineární fuzzy číslo určené čtveřicí bodů $C = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$. Pak pro zobecněné těžiště t_{k_C} řádu k fuzzy čísla C platí vztah*

$$t_{k_C} = \frac{2 \cdot (c_4^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_3c_4 - c_1c_2 + kc_3c_4 - kc_1c_2) + (c_3^2 - c_2^2) \cdot (k^2 + 3k)}{2 \cdot (k+3) \cdot (c_4 + c_3 - c_2 - c_1 + kc_3 - kc_2)}. \tag{33}$$

Důkaz:

$$t_{k_C} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} C^{k+1}(x)x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C^{k+1}(x) dx} =$$

$$= \frac{\int_{c_1}^{c_2} (\frac{x-c_1}{c_2-c_1})^{k+1} x dx + \int_{c_2}^{c_3} x dx + \int_{c_3}^{c_4} (\frac{c_4-x}{c_4-c_3})^{k+1} x dx}{\int_{c_1}^{c_2} (\frac{x-c_1}{c_2-c_1})^{k+1} dx + \int_{c_2}^{c_3} 1 dx + \int_{c_3}^{c_4} (\frac{c_4-x}{c_4-c_3})^{k+1} dx} =$$

$$= \frac{\frac{c_2-c_1}{k+2} \cdot \frac{kc_2+2c_2+c_1}{k+3} + \frac{c_3^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + \frac{c_4-c_3}{k+2} \cdot \frac{kc_3+2c_3+c_4}{k+3}}{\frac{c_2-c_1}{k+2} + c_3 - c_2 + \frac{c_4-c_3}{k+2}} =$$

$$\frac{2 \cdot (c_4^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_1^2 + c_3c_4 - c_1c_2 + kc_3c_4 - kc_1c_2) + (c_3^2 - c_2^2) \cdot (k^2 + 3k)}{2 \cdot (k+3) \cdot (c_4 + c_3 - c_2 - c_1 + kc_3 - kc_2)}. \quad \blacksquare$$

Příklad 3.1. *Fuzzy číslo $C = \langle 1, 5, 7, 9 \rangle$ má medián $m_C = 5.5$, těžiště $t_C = 5.4$ a zobecněná těžiště řádu $t_{1_C} = 5.6$ a $t_{4_C} = 5.8$. Medián, těžiště a zobecněné těžiště řádu $k = 1$ a $k = 4$ fuzzy čísla C je znázorněn na Obr. 8.*

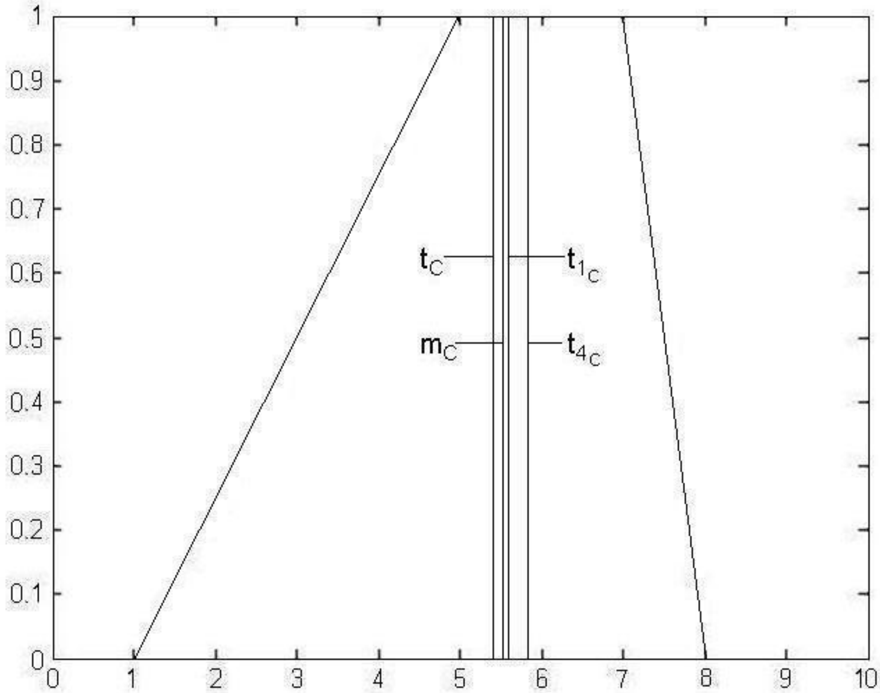
Příklad 3.2. *Na Obr. 9 je znázorněn medián a těžiště symetrických fuzzy čísel A, B, C. V tomto případě není mezi hodnotami těžišť t_A, t_B, t_C a mediánů m_A, m_B, m_C rozdíl. Je zřejmé, že tato rovnost platí i pro zobecněné těžiště libovolného řádu.*

Definice 3.5. Řekneme, že *fuzzy číslo C je menší nebo rovno fuzzy číslu D vzhledem k jejich mediánům*, značíme $C \leq_m D$, jestliže platí $m_C \leq m_D$.

Definice 3.6. Nechť C a D jsou fuzzy čísla. *Fuzzy číslo C je menší nebo rovno fuzzy číslu D vzhledem k jejich těžištím*, značíme $C \leq_t D$, jestliže platí $t_C \leq t_D$.

Definice 3.7. Nechť C a D jsou fuzzy čísla. *Fuzzy číslo C je menší nebo rovno fuzzy číslu D vzhledem k jejich zobecněným těžištím řádu k*, značíme $C \leq_{t_k} D$, jestliže platí $t_{k_C} \leq t_{k_D}$.

Poznámka 3.6. *Uspořádání fuzzy čísel podle těžiště, zobecněného těžiště řádu k a mediánu je kvaziuspořádání. Různé typy fuzzy čísel můžou mít stejné těžiště*

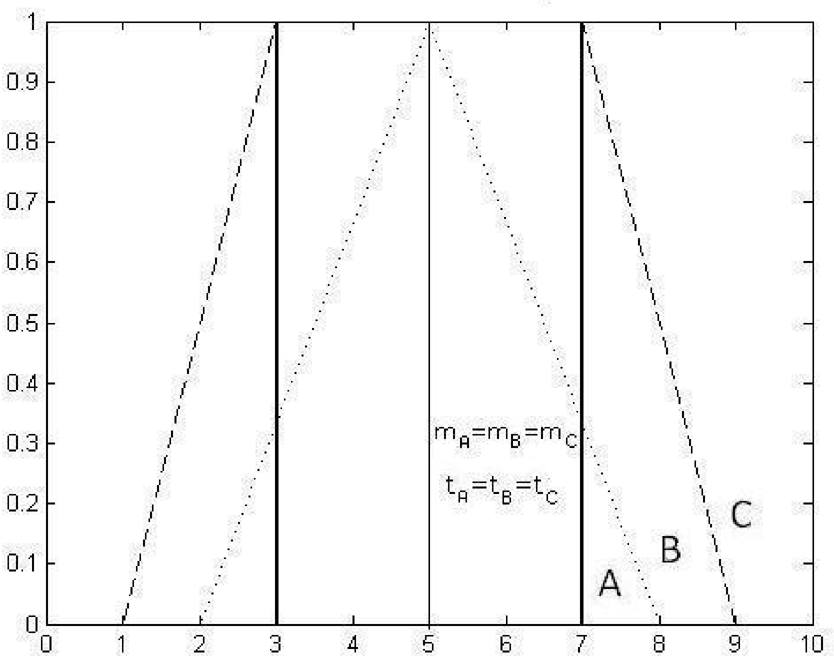


Obrázek 8: Těžiště, zobecněné těžiště a medián fuzzy čísla C

nebo medián, to znamená, že může platit $A =_m B$ i když $A \neq B$, kde $A =_m B$ znamená, že $A \leq_m B \wedge B \leq_m A$. Relace $\leq_m$, $\leq_t$ a $\leq_{t_k}$ jsou úplné, z toho plyne, že všechna fuzzy čísla jsou pomocí těchto relací porovnatelná.

Příklad 3.3. *Symetrická fuzzy čísla A, B a C znázorněná na Obr. 9 jsou příklady nestejných fuzzy čísel se stejnými charakteristikami. U těchto fuzzy čísel nemůžeme podle ani jedné z těchto relací říci, které je větší.*

Příklad 3.4. *Porovnávání dvou fuzzy čísel C a D pomocí těžiště, zobecněného těžiště řádu k a mediánu nemusí dát vždy stejný výsledek. Na Obr. 10 jsou znázorněna fuzzy čísla $C = \langle 3, 4, 5, 11 \rangle$ a $D = \langle 1, 7, 8, 9 \rangle$. Mediány C a D jsou $m_C = 5,75$ a $m_D = 6,25$, takže $C <_m D$. Těžiště fuzzy čísel C a D jsou $t_C = 6,1$ a $t_D = 5,9$, podle těžiště platí $C >_t D$. U zobecněného těžiště řádu $k = 1$ dostaneme $t_{1_C} = 5,6$ a $t_{1_D} = 6,4$, tedy $D >_{t_1} C$ a u zobecněného těžiště řádu $k = 4$ je $t_{4_C} = 5,1$ a $t_{4_D} = 6,9$, to znamená $D >_{t_4} C$. Na Obr. 10 lze vidět, že při*



Obrázek 9: Těžiště a medián fuzzy čísel A, B, C

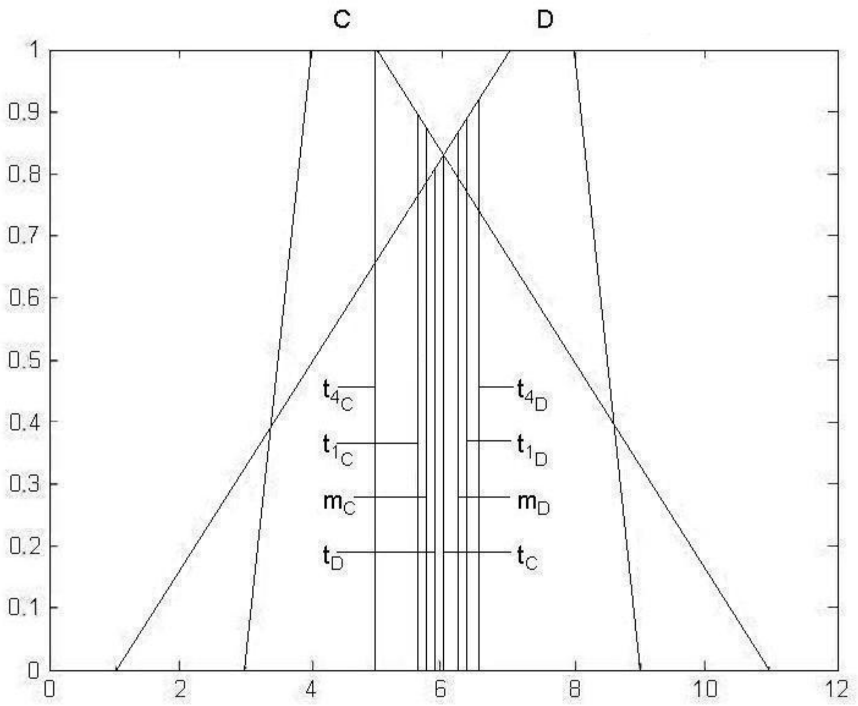
rostoucím k se těžiště blíží ke středu jádra, protože zobecněné těžiště dává těmto hodnotám větší váhu.

3.3 Fuzzy relace uspořádání na množině všech fuzzy čísel

Další možností, jak lze fuzzy čísla porovnávat, představuje zavedení fuzzy relací $\succeq$, $\succ$ a $\sim$ na množině fuzzy čísel $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$. Tyto fuzzy relace vyjadřují pro dvojice fuzzy čísel stupeň neostré či ostré preference. Tato kapitola byla zpracována s využitím [6].

Definice 3.8. Fuzzy relace $\succeq$ (větší nebo srovnatelné), $\succ$ (větší) a $\sim$ (srovnatelné) na množině fuzzy čísel jsou definovány takto: Nechť C a D jsou fuzzy čísla. Pak C *je větší nebo srovnatelné s* D *ve stupni*

$$C \succeq D = \sup\{\min\{C(x), D(y)\} \mid x \geq y, x, y \in \mathbb{R}\}, \tag{34}$$



Obrázek 10: Těžiště, zobecněné těžiště řádu $k = 1$ a $k = 4$ a medián fuzzy čísla C a D

C je větší než D ve stupni

$$C \succ D = \sup\{\min\{C(x), D(y)\} \mid x > y, x, y \in \mathbb{R}\}, \tag{35}$$

C je srovnatelné s D ve stupni

$$C \sim D = \sup\{\min\{C(x), D(x)\} \mid x \in \mathbb{R}\}. \tag{36}$$

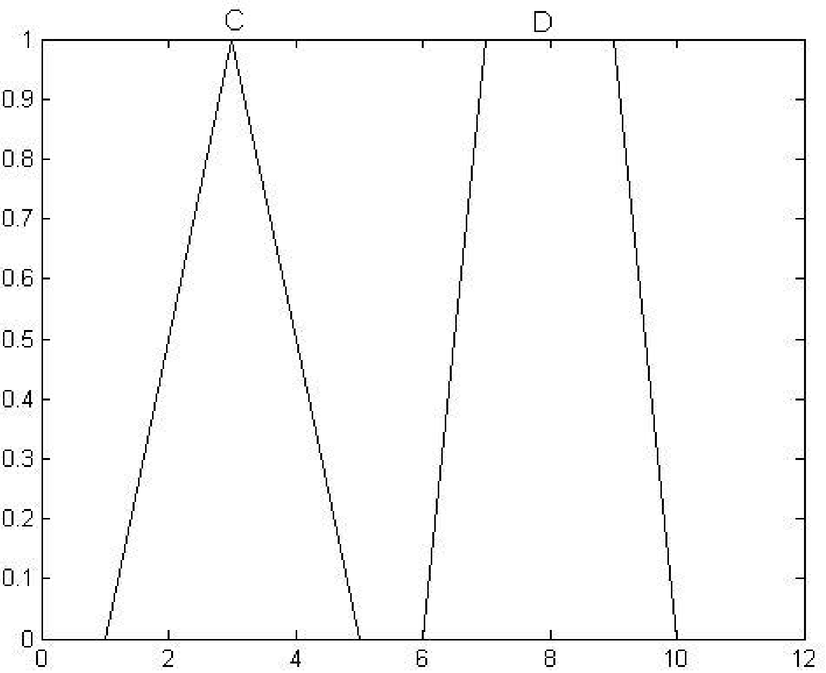
Poznámka 3.7. *Stupeň příslušnosti $C \succeq D$ značí míru možnosti, že C je větší nebo srovnatelné s D. $C \sim D$ značí stupeň možnosti, že C je srovnatelné s D. Platí, že fuzzy relace $\succeq$ je sjednocení fuzzy relací $\succ$ a $\sim$. To znamená, že stačí popsat vztah mezi fuzzy čísly C a D pomocí relací $\succ$ a $\sim$. Pro fuzzy čísla vždy platí*

$$(C \succ D = 1) \vee (D \succ C = 1), \tag{37}$$

oba případy přitom mohou nastat současně.

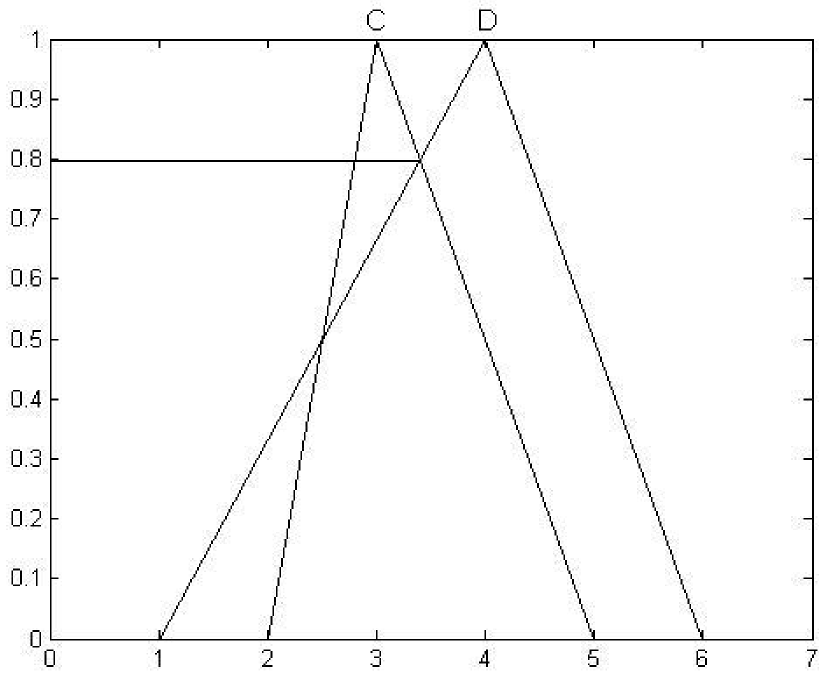
Následující příklady objasňují porovnávání různých fuzzy čísel C a D s využitím fuzzy relací $\succeq$, $\succ$ a $\sim$.

Příklad 3.5. *Na Obr. 11 jsou znázorněna lineární fuzzy čísla* $C = \langle 1, 3, 5 \rangle$ *a* $D = \langle 6, 7, 9, 10 \rangle$. *S využitím Definice 3.8 dostaneme stupně preference a indiference mezi fuzzy čísly* C *a* D, *a to* $C \succ D = 0$, $D \succ C = 1$ *a* $C \sim D = 0$. *To lze interpretovat tak, že je zcela možné, že hodnota popsaná fuzzy číslem* D *je větší než hodnota popsaná fuzzy číslem* C. *Naopak je zcela vyloučené, že hodnota popsaná fuzzy číslem* C *je větší než hodnota popsaná fuzzy číslem* D *nebo že by si dané hodnoty byly rovny. Z toho vyplývá, že fuzzy číslo* D *je větší než fuzzy číslo* C.



Obrázek 11: Fuzzy preference a indiference fuzzy čísel C a D

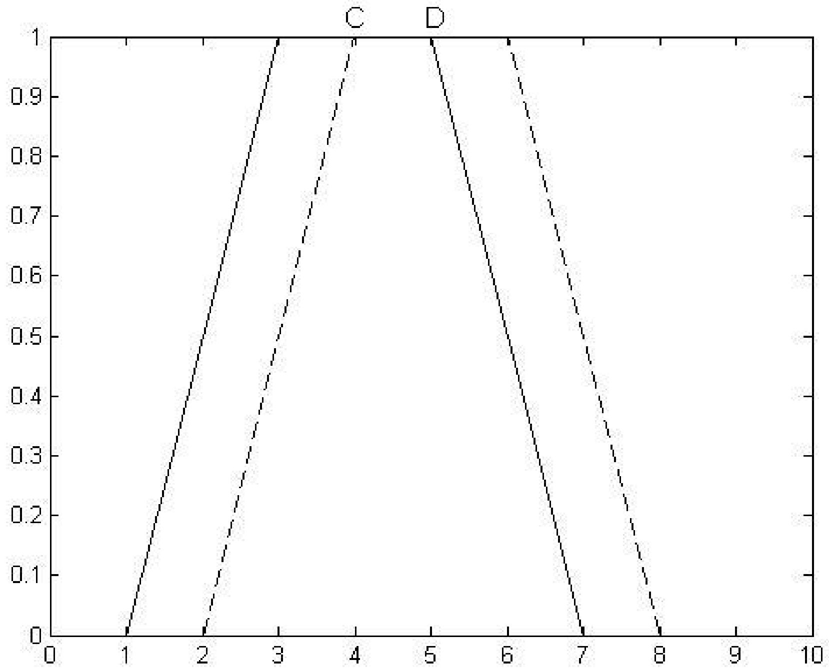
Příklad 3.6. *Jako další příklad si uveďme fuzzy čísla* $C = \langle 2, 3, 5 \rangle$ *a* $D = \langle 1, 4, 6 \rangle$, *která jsou zakreslena na Obr. 12. Fuzzy preference a indiference fuzzy čísel* C *a* D *jsou* $C \succ D = 0{,}8$, $D \succ C = 1$ *a* $C \sim D = 0{,}8$. *V tomto případě, pokud* *bychom se chtěli rozhodnout, které fuzzy číslo je větší, musíme se zamyslet nad stupni preference a indiference fuzzy čísel C a D. D je větší nebo srovnatelné s C se stupněm příslušnosti 1, tak by se dalo uvažovat, že D je větší než C. Ale lze brát v úvahu, že by C mohlo být větší než D, protože C je větší nebo srovnatelné s D se stupněm příslušnosti 0,8, což nesmíme zanedbat.*



Obrázek 12: Fuzzy preference a indiference fuzzy čísel C a D

Příklad 3.7. *Na Obr. 13 jsou znázorněna fuzzy čísla $C = \langle 1, 3, 5, 7 \rangle$ a $D = \langle 2, 4, 6, 8 \rangle$. S využitím fuzzy relací dostaneme $C \succ D = 1$, $D \succ C = 1$ a $C \sim D = 1$. U takových fuzzy čísel C a D se nemůžeme na základě těchto fuzzy relací rozhodnout, které fuzzy číslo je větší, protože všechny případy ($C \succ D$, $D \succ C$ a $C \sim D$) jsou zcela možné. Podle obrázku přitom můžeme předpokládat, že D bude větší než C. Lze využít jinou metodu, např. uspořádání fuzzy čísel podle α-řezů.*

Příklad 3.8. *Jako další příklad jsou na Obr. 14 znázorněna fuzzy čísla C a D s*



Obrázek 13: Fuzzy preference a indiference fuzzy čísel C a D

nespojitou funkcí příslušnosti, která je daná následovně

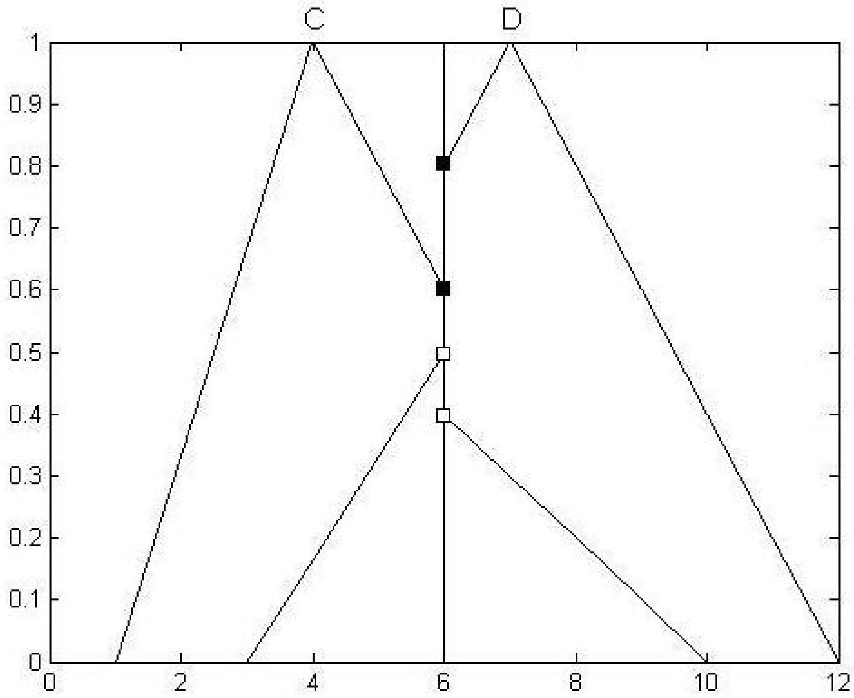
$$C(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & pro\ 1 \leq x < 4 \\ 1 & pro\ x = 4 \\ \frac{9-x}{5} & pro\ 4 < x \leq 6 \\ \frac{10-x}{10} & pro\ 6 < x < 10 \\ 0 & jinde \end{cases} \tag{38}$$

a

$$D(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{6} & pro\ 3 \leq x < 6 \\ \frac{x-2}{5} & pro\ 6 \leq x < 7 \\ 1 & pro\ x = 7 \\ \frac{12-x}{5} & pro\ 7 < x < 12 \\ 0 & jinde. \end{cases} \tag{39}$$

Fuzzy preference a indiference nespojitých fuzzy čísel C a D jsou $C \succ D = 0,5$, $C \succeq D = 0,6$, $D \succ C = 1$, $D \succeq C = 1$ a $C \sim D = 0,6$. Můžeme tedy říci, že spíše je větší fuzzy číslo D než fuzzy číslo C.

Následující věty ukazují vlastnosti fuzzy relací $\sim$, $\succeq$ a $\succ$.



Obrázek 14: Fuzzy preference a indiference nespojitých fuzzy čísel C a D

Věta 3.4. *Fuzzy relace $\sim$ na množině $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ je reflexivní a symetrická.*

Důkaz: Ze (36) plyne, že pro všechna fuzzy čísla $C, D \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ platí

- $C \sim C = \sup\{\min\{C(x), C(x)\} \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$,
- $C \sim D = \sup\{\min\{C(x), D(x)\} \mid x \in \mathbb{R}\} = \sup\{\min\{D(x), C(x)\} \mid x \in \mathbb{R}\} = D \sim C$. ■

Poznámka 3.8. *Fuzzy relace $\sim$ není antisymetrická, protože z $C \sim D = D \sim C$ neplyne, že fuzzy čísla C a D jsou totožná. Není ani tranzitivní, protože neplatí $(C \sim E) \geq min\{C \sim D, D \sim E\}$ a není ani úplná, protože nemusí platit $\forall C, D : (C \sim D > 0) \vee (D \sim C > 0)$, protože může nastat, že obě hodnoty jsou nulové, viz např. fuzzy čísla C a D z příkladu 3.5.*

Věta 3.5. *Fuzzy relace $\succ$ na množině $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ je úplná.*

Důkaz: Dle Poznámky 3.7 vždy platí (37), tj. fuzzy relace $\succ$ je úplná. ■

Poznámka 3.9. *Fuzzy relace $\succ$ není reflexivní, protože existuje fuzzy číslo C takové, že $C \succ C \neq 1$. Příkladem takového fuzzy čísla je např. reálné číslo c, pro které platí $c \succ c = 0$. Není symetrická, protože $C \succ D$ a $D \succ C$ můžou být různé, viz. fuzzy čísla C a D v příkladu 3.6. Není antisymetrická, z $C \succ D = D \succ C$ neplyne, že fuzzy čísla C a D jsou totožná, např. fuzzy čísla C a D z příkladu 3.7. Není ani tranzitivní, protože obecně neplatí $(C \succ E) \geq min\{C \succ D, D \succ E\}$.*

Poznámka 3.10. *Protože je fuzzy relace $\succeq$ sjednocením fuzzy relací $\sim$ a $\succ$, je reflexivní a úplná.*

Z vlastností relací $\succ$, $\succeq$ a $\sim$ plyne, že se nejedná o relace fuzzy uspořádání ani fuzzy ekvivalence, protože tyto fuzzy relace nesplňují podmínku tranzitivity a dále relace $\succ$ a $\succeq$ nejsou ani symetrické. Nyní se pokusíme definovat takovou relaci, která by byla založena na fuzzy relacích a přitom by splňovala potřebné vlastnosti relace uspořádání.

Následující definice zavádí relaci, s jejíž pomocí se můžeme na základě fuzzy relace rozhodnout, které fuzzy číslo je větší.

Definice 3.9. Řekněme, že *fuzzy číslo C je větší nebo rovno fuzzy číslu D na základě fuzzy relace $\succeq$*, značíme $C \geq_{\succeq} D$, jestliže platí

$$(C \succeq D - D \succeq C) \geq 0. \tag{40}$$

Platí-li $C \succeq D - D \succeq C > 0$, potom řekneme, že fuzzy číslo C je větší než fuzzy číslo D na základě fuzzy relací a platí-li $C \succeq D - D \succeq C = 0$, potom řekneme, že fuzzy číslo C je rovno fuzzy číslo D na základě fuzzy relací.

Věta 3.6. *Relace $\geq_{\succeq}$ je kvaziuspořádání.*

Důkaz: Musíme dokázat, že relace $\geq_{\succeq}$ je reflexivní, tranzitivní a úplná.

- Z reflexivity relace $\succeq$ plyne reflexivita relace $\geq_{\succeq}$, protože $C \succeq C - C \succeq C \geq 0$, tj. $1 - 1 \geq 0$.

- Nechť $C \geq_{\succeq} D$ a $D \geq_{\succeq} E$. Pak ze (37) a (40) plyne, že $C \succeq D = D \succeq E = 1$. Ze vztahu (34) pak plyne, že $C \succeq E = 1$, a protože $E \succeq C \leq 1$, tak $C \geq_{\succeq} E$.
- Úplnost této relace plyne z toho, že platí vztah (37), to znamená, že nemůže nastat případ $C \succeq D = 0$ a zároveň $D \succeq C = 0$. $\blacksquare$

Příklad 3.9. *Na Obr. 11 jsou vykreslena fuzzy čísla C a D. Stupně preference a indiference jsou $C \succeq D = 0$ a $D \succeq C = 1$, tzn. $C \succeq D - D \succeq C = 0 - 1 = -1$. Lze tedy říci, že fuzzy číslo D je větší než fuzzy číslo C na základě fuzzy relace $\succeq$.*

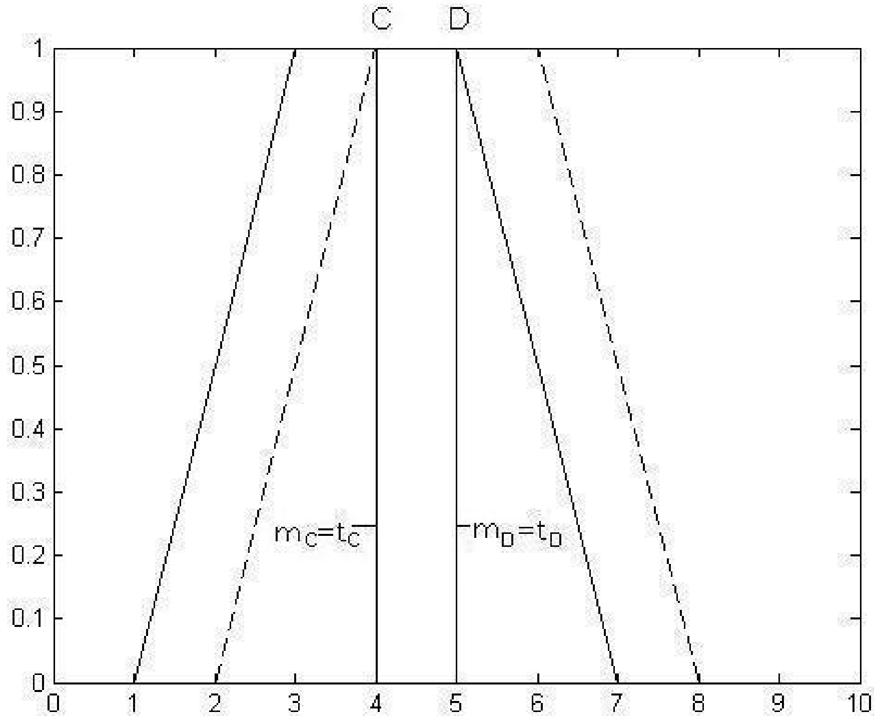
Příklad 3.10. *Na Obr. 12 jsou znázorněna taková fuzzy čísla C a D, která mají $C \succeq D = 0{,}8$ a $D \succeq C = 1$ a $C \succeq D - D \succeq C = 0.8 - 1 = -0.2$. Číslo je záporné, takže se rozhodneme, že D je větší než C na základě fuzzy relace $\succeq$, i když musíme brát v úvahu, že je blízké nule, z toho můžeme usoudit, že preference nebude tak silná.*

Příklad 3.11. *Na Obr. 13 jsou fuzzy čísla C a D, pro která platí $C \succeq D = 1$ a $D \succeq C = 1$ a $C \succeq D - D \succeq C = 1 - 1 = 0$. V tomto případě jsou fuzzy čísla C a D na základě fuzzy relace $\succeq$ stejná. V takovém případě se pomocí této metody nemůžeme rozhodnout, které fuzzy číslo je větší.*

3.4 Srovnání jednotlivých přístupů

V této podkapitole si porovnáme jednotlivé metody uspořádání při porovnávání fuzzy čísel. Na názorných obrázcích budou vysvětleny výhody a nevýhody každé z těchto metod. Pokusíme se najít, jestli mezi nimi existuje nějaký vztah.

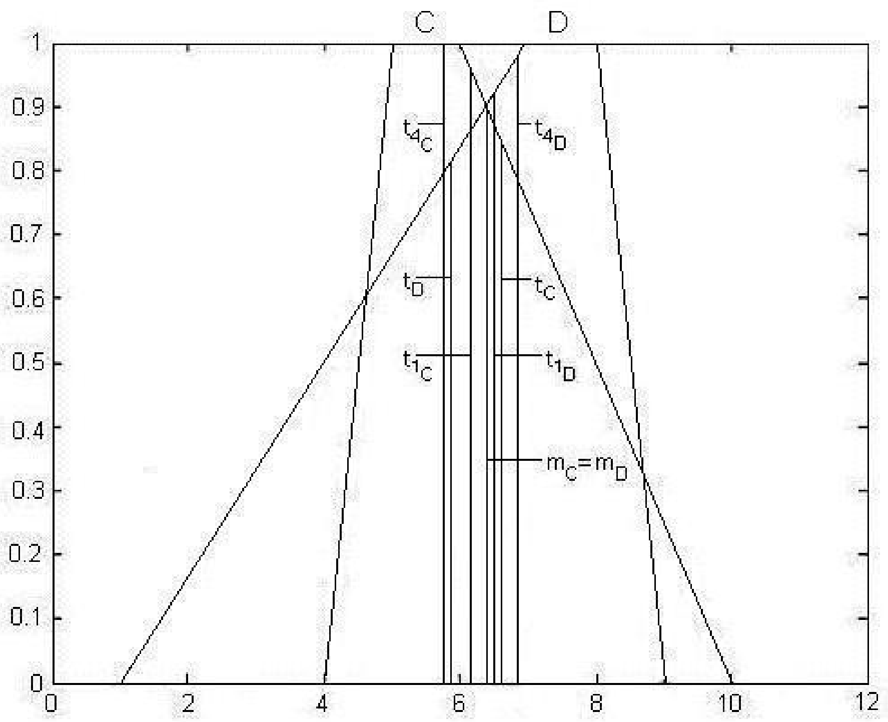
Příklad 3.12. *Na Obr. 15 jsou znázorněna fuzzy čísla $C = \langle 1, 3, 5, 7 \rangle$ a $D = \langle 2, 4, 6, 8 \rangle$. Vztah (27) platí pro všechny α-řezy, protože $\underline{d}(\alpha) - \underline{c}(\alpha) = 1 > 0$ a $\overline{d}(\alpha) - \overline{c}(\alpha) = 1 > 0$. Potom lze říci, že fuzzy číslo D je větší než fuzzy číslo C podle α-řezů. Pokud nám vyjde $D >_{\alpha} C$, pak je fuzzy číslo D větší než fuzzy číslo C podle všech uvedených číselných charakteristik, jak lze vidět na Obr. 15,* *kde jsou znázorněny mediány a těžiště fuzzy čísel C a D. Stejný výsledek bychom zjistili také u zobecněného těžiště řádu k. Uspořádání s využitím α-řezů je ze všech uvedených metod nejsilnější. Pokud tato fuzzy čísla uspořádáme podle fuzzy relace $\succeq$, zjistíme, že $C \succeq D - D \succeq C = 1 - 1 = 0$. Fuzzy čísla C a D jsou si podle fuzzy relace $\succeq$ rovny. To je způsobeno skutečností, že průnik jader obou fuzzy čísel je neprázdný. Je však zřejmé, že nemůže nastat případ, kdy $C <_\alpha D$ a přitom $C >_\succeq D$.*



Obrázek 15: Medián a těžiště fuzzy čísel C a D

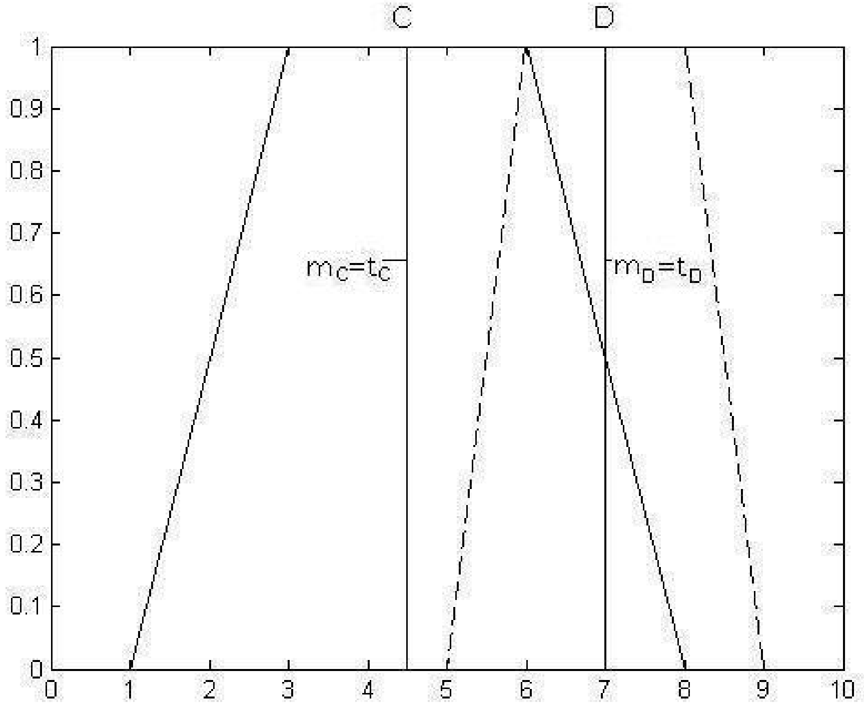
Příklad 3.13. *Relace uspořádání fuzzy čísel podle α-řezů má ovšem nevýhodu, a to že není úplná, to znamená, že všechna fuzzy čísla nejsou s využitím α-řezů srovnatelná. Na Obr. 16 jsou fuzzy čísla $C = \langle 4, 5, 6, 10 \rangle$ a $D = \langle 1, 7, 8, 9 \rangle$, která nelze pomocí α-řezů porovnat, protože vztah* (27) *neplatí pro všechny α-řezy.*

Pokud tato fuzzy čísla $C = \langle 4, 5, 6, 10 \rangle$ a $D = \langle 1, 7, 8, 9 \rangle$ uspořádáme podle číselné charakteristiky, zjistíme, že porovnání fuzzy čísel C a D se liší podle *jednotlivých číselných charakteristik. Pro mediány platí* $m_C = 6.25$ *a* $m_D = 6.25$*, pro těžiště* $t_C = 6.43$ *a* $t_D = 5.93$*, pro zobecněná těžiště řádu* $k = 1$ $t_{1_C} = 6.16$ *a* $t_{1_D} = 6.38$ *a pro zobecněná těžiště řádu* $k = 4$ $t_{4_C} = 5.83$ *a* $t_{4_D} = 6.9$*. To znamená, že* $C =_m D$*, dále* $C >_t D$*,* $D >_{t_1} C$ *a* $D >_{t_4} C$*. Podle každé číselné charakteristiky vyšel jiný výsledek. Nyní je na nás, jak se rozhodneme. Zda spíše potlačíme neurčitost fuzzy čísel a budeme brát v úvahu jádra fuzzy čísla, v tom případě bychom se rozhodli podle zobecněného těžiště řádu k, protože potlačuje hodnoty s malými stupni příslušnosti. Nebo podle mediánu, jež rozděluje plochu pod funkcí příslušnosti na dvě stejné části. Mediány, těžiště a zobecněná těžiště řádu* $k = 1$ *a* $k = 4$ *fuzzy čísel C a D jsou na Obr. 16. Pro úplnost můžeme dodat, že* $C <_{\succeq} D$*, tedy tato preference odpovídá preferenci podle zobecněných těžišť řádu k.*



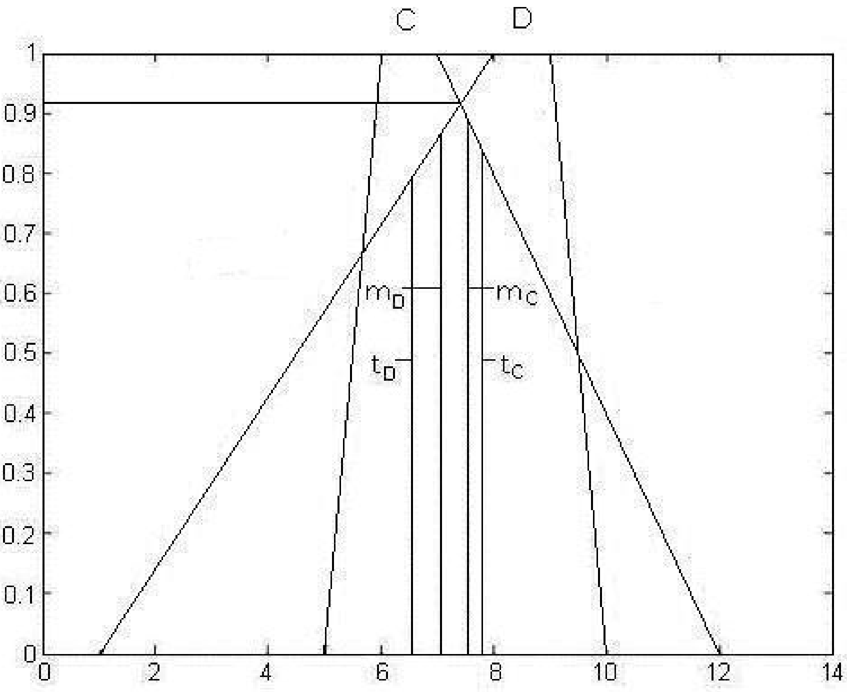
Obrázek 16: Mediány, těžiště a zobecněná těžiště fuzzy čísel C a D

Příklad 3.14. *Relace* $\geq_{\succeq}$ *a uspořádání podle číselných charakteristik jsou kvaziuspořádání. Přesto se nedá říci, že by mezi nimi platil nějaký vztah. Mějme dána* *fuzzy čísla $C = \langle 1, 3, 6, 8\rangle$ a $D = \langle 5, 7, 8, 9\rangle$ zakreslená na Obr. 17. $C \succeq D = 1$ a $D \succeq C = 1$, potom $C \succeq D - D \succeq C = 1 - 1 = 0$. Fuzzy čísla jsou s využitím fuzzy relací stejná, tj. $C =_{\succeq} D$. Naopak podle medinánů $C <_m D$, protože $m_C = 4,5$ a $m_D = 7$. Můžeme říci, že podle ostatních číselných charakteristik by nám také vyšlo, že fuzzy číslo C je větší než fuzzy číslo D. Můžeme však konstatovat, že pokud je C menší než D podle všech číselných charakteristik, pak nemůže nastat, že $C >_{\succeq} D$.*



Obrázek 17: Mediány a těžiště fuzzy čísel C a D

Příklad 3.15. *Uspořádání podle číselných charakteristik a podle fuzzy relací si mohou dokonce odporovat. Pokud si vezmeme fuzzy čísla $C = \langle 5, 6, 7, 12\rangle$ a $D = \langle 1, 8, 9, 10\rangle$ zakreslená na Obr. 18 zjistíme, že $C \succeq D = 0.92$ a $D \succeq C = 1$, to znamená, že $C \succeq D - D \succeq C = 0.92 - 1 = -0.08$, fuzzy číslo D je větší než fuzzy číslo C na základě fuzzy relace $\succeq$. Pokud fuzzy čísla C a D uspořádáme podle mediánu, pak dostaneme $C >_m D$ a podle těžiště $C >_t D$. U zobecněného* *těžiště s rostoucím k porovnáváme spíše jádra, tzn. od určité hodnoty k dostaneme* $C <_{t_k} D$. *Mediány a těžiště fuzzy čísel* C *a* D *jsou na Obr. 18.*



Obrázek 18: Mediány a těžiště fuzzy čísel C a D

4 Závěr

Hlavním cílem práce bylo prozkoumat, jak lze fuzzy čísla porovnávat. Byly nadefinovány tři typy relací uspořádání fuzzy čísel a jejich podstata pak byla ilustrována na názorných příkladech. Zároveň byly studovány jejich matematické vlastnosti.

Zjistili jsme, že metoda podle α-řezů je ze všech metod nejsilnější, ale bohužel ji nelze použít pro všechny případy, protože relace není úplná. Dále jsme se dozvěděli, že porovnávání fuzzy čísel na základě číselné charakteristiky je kvaziuspořádání, tedy různá fuzzy čísla mohou s využitím této metody vyjít jako stejně hodnocená. Posledním typem je fuzzy relace uspořádání na množině všech fuzzy čísel, kde jsme určili stupně preference a indiference dvou fuzzy čísel a podle toho se rozhodovali pro větší fuzzy číslo. Fuzzy relace fuzzy čísel nesplňovaly potřebné vlastnosti, proto jsme si zavedli další relaci na základě fuzzy relace $\succeq$, jež splňovala vlastnosti kvaziuspořádání. V poslední podkapitole jsme došli k závěru, že nám nemusí s využitím různých metod vyjít stejný výsledek. Proto je nutné zvážit, podle které metody se budeme rozhodovat. Takové rozhodnutí ovšem může být individuální.

S pojmem „fuzzy“ jsem se poprvé setkala až při zpracovávání mé bakalářské práce. Předtím jsem netušila, kde všude se fuzzy čísla používají. Fuzzy čísla využíváme při řešení rozhodovacích úloh, kde máme zadané neurčité hodnoty, protože s jejich pomocí lze vyjádřit i částečnou příslušnost k množině. Běžně se fuzzy logika využívá např. u klimatizace, myčky na nádobí, výtahů atd.

Fuzzy čísla jsem zakreslovala s využitím programu Matlab, což je matematický program, s jehož pomocí se dají provádět složité matematické výpočty a zakreslovat grafy. Celou práci jsem psala v typografickém programu LaTeX, a tím si také zdokonalila své znalosti s prací s tímto systémem.

Díky mé bakalářské práci jsem se naučila pracovat s fuzzy čísly a tím také prohloubila své matematické vědomosti. Věřím, že znalosti v oblasti fuzzy čísel pro mne budou přínosem i v dalším studiu.

Literatura

[1] Dubois D. a kol., *Fuzzy interval analysis*, in: D. Dubois, H. Prade (Eds.), *Fundamentals of fuzzy sets*, Kluwer Academic Publishers, Boston-London-Dordrecht, 2000, str. 483-582.

[2] Hort, D., Rachůnek, J.: *Algebra I.*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2005, Dotisk 1. vydání.

[3] Klir, G.J., Yuan, B.: *Fuzzy sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, New Jersey 1996.

[4] Krutský, F.: *Algebra l.*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 1995.

[5] Pavlačka, O.: *Fuzzy metody rozhodování*, Disertační práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2007.

[6] Talašová, J.: *Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování*, Univerzita Palackého v Olomouci 2003, 1.vydání.