Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Rovnice, soustavy rovnic a mnohočleny na 2. stupni ZŠ

Vypracovala: Veronika Kohoutová
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Rovnice, soustavy rovnic a mnohočleny na 2. stupni ZŠ jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Poděkování

V prvé řadě bych chtěla poděkovat vedoucí mé bakalářské práce paní Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D. za její rady, připomínky a nápady, ale i za vstřícný přístup, trpělivost a čas, který mi věnovala. Dále pak panu Mgr. Josefovi Jirovskému za vypůjčení učebnic a ochotnou spolupráci. A své rodině a přátelům nejen za podporu, čas a pomoc, ale také za kritiku, díky níž jsem se mohla vyvarovat některých chyb.

Anotace

Cílem mé práce je vytvořit sbírku příkladů, která bude tvořit užitečnou pomůcku pro učitele i žáky základních škol. Sbírka také může sloužit k doučování (slabších) žáků.

Je rozdělena na 4 hlavní části – lineární rovnice, soustavy lineárních rovnic, mnohočleny a slovní úlohy. Tyto části obsahují stručný popis, řešené i neřešené příklady, bonusové úlohy a na konci každé kapitoly jsou zařazeny výsledky.

Annotation

The aim of this thesis is to write a collection of mathematics exercises which should make an important aid for grammar school teachers and pupils. This collection can serve as remedial education to (weaker) pupils.

The collection is dividend into four chapters – the linear equations, system of linear equations, polynomials and word problems. These chapters contain a brief description, examples with solutions and unsolved examples, bonus tasks and results are at the end of these chapter.

Obsah

ÚVOD

Ve své bakalářské práci se převážně zabývám lineárními rovnicemi a soustavami lineárních rovnic o dvou neznámých, protože se na základní škole nejvíce vyučují lineární rovnice. S kvadratickými rovnicemi se děti setkávají většinou až na středních školách či gymnáziích.

Téma bakalářské práce jsem si zvolila hlavně z toho důvodu, že ji budu moci využít ve své budoucí pedagogické praxi. Sbírku jsem obohatila o bonusové úlohy, o rámečky s hesly Zapamatuj si! a Nezapomeň!, které obsahují přínosné poučky k danému tématu.

S touto sbírkou mohou pracovat de facto i žáci, kteří dané téma na základní škole ještě neprobírali, poněvadž na začátku každé kapitoly je zařazeno několik řešených úloh s doslovným postupem.

Obsah této sbírky je členěn do 4 kapitol – lineární rovnice, soustavy lineárních rovnic, mnohočleny a slovní úlohy. Slovní úlohy jsou zařazeny z důvodu ukázky aplikací lineárních rovnic i jejich soustav. Na konci každé kapitoly jsou vloženy výsledky, aby si žáci mohli zkontrolovat jejich výpočty. V některých kapitolách jsou tzv. hvězdičkové příklady (označené černou hvězdičkou ★), které jsou těžší než ostatní příklady.

Hlavním cílem této bakalářské práce je vytvoření sbírky příkladů, která obsahuje řešené i neřešené úlohy. Tato práce by mohla sloužit jako pomůcka pro učitele základních škol při vyučování, ale také pro žáky, kteří mají v dané látce buď nejasnosti či si chtějí procvičit více příkladů.

1 ROVNICE S JEDNOU NEZNÁMOU

Máme rovnici $5x + 2 = 6$, říkáme, že jde o lineární rovnici s jednou neznámou x. Každá rovnice má levou i pravou stranu. Levou stranu budeme označovat písmenem $L(x)$, pravou stranu písmenem $P(x)$.

$$\underbrace{5x + 2}_{L(x)} = \underbrace{6}_{P(x)}$$

Při řešení lineárních rovnic musíme najít kořen (neboli řešení rovnice), pro který platí, že se hodnota levé strany rovnice rovná hodnotě pravé strany. Abychom mohli o takovém číslu říci, že je kořenem dané rovnice, musíme si správnost našeho výpočtu ověřit zkouškou.

Řešený příklad 1.1

Urči všechna reálná čísla z, pro která platí:

a) $4z = 12,$

b) $z - 5 = 7,$

c) $2z + 1 = 7,$

d) $z^2 = 16,$

e) $z^2 + 6 = 10,$

f) $6z = 6^2.$

Řešení:

a) $4z = 12$

Vidíme, že levá i pravá strana rovnice o jedné neznámé z je násobkem čísla 4. Což nám umožňuje tuto rovnici číslem 4 vydělit

$4z = 12 \qquad /:4$

$z = 3$

Zjistili jsme, že rovnici vyhovuje číslo 3, jestli jsme neudělali chybu, si ověříme zkouškou

$$\left.\begin{array}{l} L_{(3)} = 4 \cdot 3 = 12 \\ P_{(3)} = 12 \end{array}\right\} \text{ Je zřejmé, že } L_{(3)} = P_{(3)}.$$

Tudíž můžeme říci, že číslo 3 je kořenem (řešením) rovnice $4z = 12$.

Zapisujeme $\underline{\underline{K = \{3\}}}$.

b) $z - 5 = 7$

V tomto případě se nám nabízí možnost k oběma stranám rovnice přičíst číslo 5. Pak platí

$z - 5 + 5 = 7 + 5$

Upravíme obě strany rovnice a dostáváme

$z = 12$

Provedeme zkoušku

$$\left.\begin{array}{l} L_{(12)} = 12 - 5 = 7 \\ P_{(12)} = 7 \end{array}\right\} \quad L_{(12)} = P_{(12)} \rightarrow z = 12$$

$\underline{\underline{K = \{12\}}}$

c) $2z + 1 = 7$

Abychom na levé straně rovnice obdrželi jen výraz $2z$, musíme od obou stran rovnice odečíst číslo 1. Dostaneme tedy

$2z + 1 - 1 = 7 - 1$

Upravíme obě strany rovnice a vyjde

$2z = 6$

Vidíme, že obě strany rovnice jsou dělitelné číslem 2

$2z = 6 \qquad /:2$

$z = 3$

Opět nás čeká zkouška

$$\left.\begin{array}{l} L_{(3)} = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ P_{(3)} = 7 \end{array}\right\} \quad L_{(3)} = P_{(3)} \rightarrow z = 3$$

$\underline{\underline{K = \{3\}}}$

d) $z^2 = 16$

Hledáme takové číslo z, jehož druhá mocnina je 16. Takové číslo je $+4$ i -4. Když tedy odmocníme pravou i levou stranu zadané rovnice, dostaneme

$z^2 = 16 \qquad /\sqrt{}$

$|z| = 4$

$z = \pm 4 \rightarrow z_1 = +4$

$z_2 = -4$

Opět nezapomeneme na zkoušku

$L_{(+4)} = 4^2 = 16$

$P_{(+4)} = 16$

$L_{(+4)} = P_{(+4)} \rightarrow z_1 = +4$

$L_{(-4)} = (-4)^2 = 16$

$P_{(-4)} = 16$

$L_{(-4)} = P_{(-4)} \rightarrow z_2 = -4$

$\underline{\underline{K = \{\pm 4\}}}$

<u>Poznámka</u>: V textu budeme používat výraz „převádíme“ číslo z jedné strany rovnice na druhou stranu. Budeme tím rozumět, že k oběma stranám rovnice přičteme/odečteme dané číslo.

ZAPAMATUJ SI!

Pokud převádíme číslo z jedné strany rovnice na druhou stranu, musíme vědět, že měníme znaménko u převáděného čísla (například převádíme číslo –5 z levé strany rovnice, ale na pravé straně rovnice dostaneme číslo +5)

e) $z^2 + 6 = 10$

Číslo $+6$ převedeme z levé strany rovnice na pravou stranu

$z^2 = 10 - 6$

$z^2 = 4 \qquad /\sqrt{}$

$|z| = 2$

$z = \pm 2 \rightarrow z_1 = +2$

$z_2 = -2$

Provedeme zkoušku

$L_{(+2)} = 2^2 + 6 = 4 + 6 = 10$

$P_{(+2)} = 10$

$L_{(+2)} = P_{(+2)} \rightarrow z_1 = +2$

$L_{(-2)} = (-2)^2 + 6 = 4 + 6 = 10$

$P_{(-2)} = 10$

$L_{(-2)} = P_{(-2)} \rightarrow z_2 = -2$

$\underline{\underline{K = \{\pm 2\}}}$

f) $6z = 6^2$

Na první pohled by se mohlo zdát nejjednodušší celou rovnici vydělit číslem 6, jen si musíme dát pozor na správný výpočet na pravé straně, proto nejdříve umocníme

$6z = 36$

Teď celou rovnici vydělíme číslem 6

$6z = 36 \qquad /: 6$

$z = 6$

Ověříme výsledek zkouškou

$L_{(6)} = 6 \cdot 6 = 36$

$P_{(6)} = 6^2 = 36$

$L_{(6)} = P_{(6)}$

$\underline{\underline{K = \{6\}}}$

Řešený příklad 1.2

Zjisti dosazením, která z čísel $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ jsou kořeny rovnice $x^3 + x = 4x^2 - 6$. ([6], s. 78)

Řešení:

Budeme postupně dosazovat za x čísla –2, −1, 0, 1, 2, 3, pokud nám vyjde, že levá strana se rovná pravé straně rovnice, můžeme říci, že jsme nalezli hledaný kořen.

$x^3 + x = 4x^2 - 6$

$\underline{x = -2:}$

$$(-2)^3 + (-2) = 4(-2)^2 - 6$$
$$-8 - 2 = 4 \cdot 4 - 6$$
$$-10 = 16 - 6$$
$$-10 \neq 10$$ → číslo -2 není kořenem dané rovnice

$\underline{x = -1:}$

$$(-1)^3 + (-1) = 4(-1)^2 - 6$$
$$-1 - 1 = 4 \cdot 1 - 6$$
$$-2 = 4 - 6$$
$$\underline{\underline{-2 = -2}}$$ → <u>číslo -1 je kořenem dané rovnice</u>

$\underline{x = 0:}$

$$0^3 + 0 = 4 \cdot 0^2 - 6$$
$$0 + 0 = 0 - 6$$
$$0 \neq -6$$ → číslo 0 není kořenem dané rovnice

$\underline{x = 1:}$

$$1^3 + 1 = 4 \cdot 1^2 - 6$$
$$1 + 1 = 4 \cdot 1 - 6$$
$$2 = 4 - 6$$
$$2 \neq -2$$ → číslo 1 není kořenem dané rovnice

$\underline{x = 2:}$

$$2^3 + 2 = 4 \cdot 2^2 - 6$$
$$8 + 2 = 4 \cdot 4 - 6$$
$$10 = 16 - 6$$

$\underline{10 \ = \ 10 \rightarrow \text{číslo 2 je kořenem dané rovnice}}$

$\underline{x \ = \ 3:}$

$$3^3 \ + \ 3 \ = \ 4 \cdot 3^2 - 6$$

$$27 \ + \ 3 \ = \ 4 \cdot 9 - 6$$

$$30 \ = \ 36 - 6$$

$\underline{30 \ = \ 30 \rightarrow \text{číslo 3 je kořenem dané rovnice}}$

Čísla −1, 2, 3 jsou kořeny rovnice $x^3 \ + \ x \ = \ 4x^2 - 6$, píšeme $\underline{K \ = \ \{-1, 2, 3\}}$.

Příklad k procvičení 1.1

Zjisti dosazením, která z čísel $-2, \ -1, 0, 1, 2, 3$ jsou kořeny rovnice $x^3 \ + \ x^2 \ = \ 4x + 4$. ([6], s. 78)

1.1 EKVIVALETNÍ ÚPRAVY ROVNIC

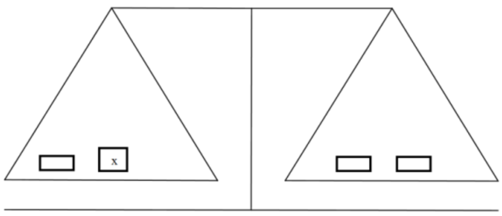
Ekvivalentní úprava je taková úprava, při které rovnice před úpravou i rovnice po úpravě mají stejné kořeny. Žádný kořen takovou úpravou ani nepřibude, ani neubude. (Odvárko-Kadleček, 5)

Mezi ekvivalentní úpravy rovnic patří přičítání (resp. odečítání) stejného čísla či výrazu k oběma stranám rovnice, stejně tak násobení i dělení nenulovým číslem (tedy číslem, které je různé od nuly).

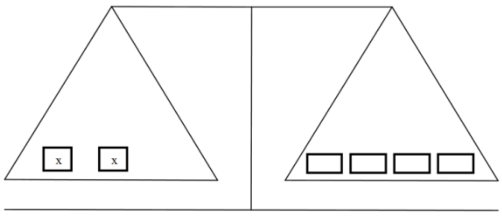
Příklad k procvičení 1.2

Na obrázku Pepových „vah“ znázorňuje značka ▭ 1 gram a $\boxed{x}$ x gramů.

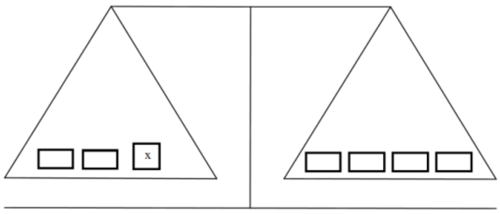
1.



2.



3.



Rozhodni, na kterém z obrázků je znázorněna rovnice

a) $x + 2 = 4$,

b) $x + 1 = 2$,

c) $2x = 4$ ([6], s. 79)

Řešený příklad 1.3

V zadané rovnici zjednodušte obě její strany.

a) $8y + 3y - 2y + 7 = 4 + y + 11$,

b) $3(m - 2) + 8 = 10 + 2(m - 3)$.

<u>Řešení:</u>

a) $8y + 3y - 2y + 7 = 4 + y + 11$

Musíme pozorně číst zadání příkladu, máme za úkol pouze zjednodušit obě strany rovnice, nikoliv ji vyřešit!

V našem případě zjednodušit znamená sečíst nebo odečíst stejné členy na obou stranách rovnice.

$\underline{9y + 7 = y + 15}$

b) $3(m - 2) + 8 = 10 + 2(m - 3)$

$3m - 6 + 8 = 10 + 2m - 6$

$\underline{3m + 2 = 4 + 2m}$

NEZAPOMEŇ!

Násobení má vždy přednost před sčítáním a odečítáním.

Řešený příklad 1.4

Najděte řešení rovnice s neznámou t a proveďte zkoušku.

a) $t + 4 = 10$,

b) $t - 13 = -5$,

c) $t + 6 = -9$.

Řešení:

a) $t + 4 = 10$

$t = 10 - 4$

$t = 6$

Zkouška

$L_{(6)} = 6 + 4 = 10$

$P_{(6)} = 10$

$L_{(6)} = P_{(6)} \rightarrow t = 6$

$\underline{\underline{K = \{6\}}}$

b) $t - 13 = -5$

$t = -5 + 13$

$t = 8$

Zkouška

$L_{(8)} = 8 - 13 = -5$

$P_{(8)} = -5$

$L_{(8)} = P_{(8)} \rightarrow t = 8$

$\underline{\underline{K = \{8\}}}$

c) $t + 6 = -9$

$t = -9 - 6$

$t = -15$

Zkouška

$L_{(-15)} = -15 + 6 = -9$

$P_{(-15)} = -9$

$L_{(-15)} = P_{(-15)} \rightarrow t = -15$

$\underline{\underline{K = \{-15\}}}$

Příklady k procvičení 1.3

Najděte řešení rovnice s neznámou l a proveďte zkoušku.

a) $l - 5 = 12$,

b) $l + 12 = 2$,

c) $l + 7 = -7$,

d) $-3 + 2l = 13$,

e) $7l - 6 = -27$.

Příklady k procvičení 1.4

Jaké číslo má být při řešení rovnice na místě otazníku?

a) $x + 7 = 14 \qquad /-7$

$x = ?$

b) $7y = y + 6 \qquad /-?\,y$

$6y = 6$

c) $5z - 12 = 4z \qquad /-4z$

$z - 12 = 0 \qquad /+?$

$\underline{\underline{z = 12}}$

d) $5m - 8 = 3m - 4 \qquad /-?\,m$

$2m - 8 = -4 \qquad /+?$

$\underline{\underline{m = 2}}$

1.1.1 Souhrnné příklady k procvičení 1

Řešte rovnice s neznámou *x* nebo y a proveďte zkoušku.

a) $5x + 2 = 2x + 11$,

b) $12x - 2 = 11x - 6$,

c) $13x - 3 = 14x - 10$,

d) $6x + 4 = 4x + 12$,

e) $-8 + 5x = 6 - 2x$,

f) $10x - 10 = 8 + 19x$,

g) $12x - 13 = 2 + 11x$,

h) $5 - 4x = -17 - 6x$,

i) $10y - 5 + 2y - 19 = 0$,

j) $7y - 16 - 5y = 6y + 5$,

k) $7 \cdot (2y - 2) = 4 \cdot (3y + 2)$,

l) $4 \cdot (2y - 5) = -(7 - 3y)$,

m) $4y - 12 - 5y = 2y + 4$,

n) $5y - 7 + 4y - 19 = 2$,

o) $7 \cdot (-1 + 11y) = -(-3y + 4)$,

p) $6 \cdot (2y - 3) = 4 \cdot (y + 0)$.

Bonusová úloha 1

Zapiš rovnici, která vznikne z rovnice $m = 6$ tak, že obě strany rovnice

a) vynásobíš číslem 7,

b) vydělíš číslem 6,

c) vynásobíš číslem −15,

d) vydělíš číslem $\frac{1}{9}$,

e) vydělíš číslem $-\frac{1}{7}$. (Odvárko-Kadleček, 5)

<u>Řešení:</u>

a) $m = 6 \qquad /\cdot\ 7$

$\underline{\underline{7m = 42}}$

b) $m = 6 \qquad /: 6$

$\frac{m}{6} = \frac{6}{6}$

$\underline{\underline{\frac{m}{6} = 1}}$

c) $m = 6 \qquad /\cdot\ (-15)$

$\underline{\underline{-15m = -90}}$

d) $m = 6 \qquad /: \frac{1}{9}$

$\frac{m}{\frac{1}{9}} = \frac{6}{\frac{1}{9}}$

$m \cdot \frac{9}{1} = 6 \cdot \frac{9}{1}$

$\underline{\underline{9m = 54}}$

e) $m = 6 \qquad /: (-\frac{1}{7})$

$\frac{m}{(-\frac{1}{7})} = \frac{6}{(-\frac{1}{7})}$

$m \cdot (-\frac{7}{1}) = 6 \cdot (-\frac{7}{1})$

$\underline{\underline{-7m = -42}}$

Příklady k procvičení 1.5

Najdi řešení rovnice s neznámou z.

a) $\frac{1}{3}z + \frac{1}{9}z - 2 = 0$,

b) $\frac{z}{2} = \frac{3}{2}z + 2$,

c) $z + 5 = \frac{z}{8}$,

d) $\frac{4z}{5} - 2 - \frac{3z}{5} = 0$,

e) $\frac{1}{6}z = \frac{2}{3}z + 4$,

f) $-\frac{5z}{8} = 5 + \frac{3z}{12}$.

<u>Řešení:</u>

a) $\frac{1}{3}z + \frac{1}{9}z - 2 = 0$

Nechceme-li počítat se zlomky, odstraníme si je. Provedeme to tak, že celou rovnici vynásobíme nejmenším společným násobkem jmenovatelů (v našem případě 3 a 9), tedy číslem 9

$\frac{1}{3}z + \frac{1}{9}z - 2 = 0 \qquad /\cdot 9$

$9 \cdot \frac{1}{3}z + 9 \cdot \frac{1}{9}z - 9 \cdot 2 = 9 \cdot 0$

Po úpravě dostaneme

$3z + z - 18 = 0.$

Na levé straně rovnice sečteme výrazy s neznámou z a k oběma stranám rovnice přičteme číslo 18

$z = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \rightarrow \underline{\underline{K = \{\frac{9}{2}\}}}$

NEZAPOMEŇ!

$\frac{a}{b}z = \frac{az}{b} \rightarrow$ například: $\frac{1}{3}z = \frac{z}{3}$

1.1.2 Souhrnné příklady k procvičení 2

Řešte rovnice a pro kontrolu si vypočítejte zkoušku.

a) $\frac{z+1}{2} + \frac{2z+2}{6} = 5$,

b) $\frac{x-4}{10} - \frac{x+5}{8} = -1,$

c) $\frac{y-3}{4} - \frac{y-7}{5} = \frac{y+5}{20},$

d) $1 - \frac{1}{4} \cdot (2z - 5) = \frac{1}{6} \cdot (3 - z),$

e) $8t - \frac{3}{4}(6t - 1) = 6t + \frac{5}{8},$

f) $-5m - \frac{2}{5}(3 - 8m) = 1 - \frac{1}{2}(3m - 1),$

g) $2,9v + 16 = 0,9v - 4,$

h) $0,5 + (0,8 - x) = 0,$

i) $2,4 - (y + 0,5) = 3,$

★ j) $(6x - 5)(7 + 4x) = (8x + 5)(2 + 3x),$

★ k) $(8y + 2)(2y - 8) = (4y - 2)^2.$

1.2 LINEÁRNÍ ROVNICE S NEZNÁMOU VE JMENOVATELI

U tohoto typu (lineární) rovnice musíme nejprve určit podmínku, pro kterou má daný výraz smysl, tzn. vyloučit ze jmenovatele nulu. Protože kdyby nám vyšla ve jmenovateli výrazu nula, neměl by daný výraz smysl.

Řešený příklad 1.5

Řešte rovnice a proveďte zkoušku.

a) $\frac{x+3}{x-5} = 1,$

b) $\frac{2}{y} + 1 = \frac{3}{y} + 5,$

c) $\frac{3k+2}{2(k-1)} = 2,$

d) $\frac{v+2}{-v+1} = \frac{2}{3},$

e) $\frac{2z-3}{3-2z} + 1 = 0.$

Řešení:

a) $\frac{x+3}{x-5} = 1$

Vidíme, že máme proměnnou x ve jmenovateli. Proto musíme udělat podmínku, pro kterou daný výraz nemá smysl.

Podmínka: $x - 5 \neq 0$

$x \neq 5$

Podmínku máme hotovou. Tudíž budeme pokračovat v řešení zadané rovnice a rovnou ji můžeme vynásobit výrazem $(x - 5)$. Výrazem $(x - 5)$ lze násobit, protože jsme si v předchozím kroku udělali podmínku, která nám zajistila, že násobíme nenulovým číslem.

$\frac{x+3}{x-5} = 1 \qquad /\cdot (x - 5)$

$x + 3 = x - 5$

$x - x = -3 - 5$

<u>$0 \neq -8$ → Zadaná rovnice nemá řešení</u>

b) $\frac{2}{y} + 1 = \frac{3}{y} + 5$

Zde máme dva zlomky s proměnnou y ve jmenovateli. Aby tyto dva zlomky měly smysl, musí platit podmínka $y \neq 0$. Pak

$\frac{2}{y} + 1 = \frac{3}{y} + 5 \qquad /\cdot y$

$2 + y = 3 + 5y$

$-4y = 1 \qquad /: (-4)$

$y = -\frac{1}{4}$

Zdali jsme počítali správně, si ověříme zkouškou

$L_{(-\frac{1}{4})} = \frac{2}{(-\frac{1}{4})} + 1 = 2 \cdot (-4) + 1 = -8 + 1 = -7$

$P_{(-\frac{1}{4})} = \frac{3}{(-\frac{1}{4})} + 5 = 3 \cdot (-4) + 5 = -7$

$L_{(-\frac{1}{4})} = P_{(-\frac{1}{4})}$

$\underline{\underline{K = \{-\frac{1}{4}\}}}$

c) $\frac{3k+2}{2(k-1)} = 2$

Podmínka: $2(k - 1) \neq 0$

$2k - 2 \neq 0$

$2k \neq 2$

$k \neq 1$

$\frac{3k+2}{2(k-1)} = 2 \qquad /\cdot (2k-2)$

$3k + 2 = 2(2k-2)$

$3k + 2 = 4k - 4$

$-k = -6$

$k = 6$

Opět provedeme zkoušku

$L_{(6)} = \frac{3\cdot 6+2}{2(6-1)} = \frac{18+2}{2\cdot 5} = \frac{20}{10} = 2$

$P_{(6)} = 2$

$L_{(6)} = P_{(6)}$

$\underline{\underline{K = \{6\}}}$

d) $\frac{v+2}{-v+1} = \frac{2}{3}$

Podmínka: $-v + 1 \neq 0$

$-v \neq -1$

$v \neq 1$

$\frac{v+2}{-v+1} = \frac{2}{3} \qquad /\cdot (-v+1) \wedge \cdot 3$

$3(v+2) = 2(-v+1)$

$3v + 6 = -2v + 2$

$5v = -4$

$v = -\frac{4}{5}$

Zkouška

$L_{(-\frac{4}{5})} = \frac{-\frac{4}{5}+2}{-(-\frac{4}{5})+1} = \frac{\frac{-4+10}{5}}{\frac{4+5}{5}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{2}{3}$

$P_{(-\frac{4}{5})} = \frac{2}{3}$

$L_{(-\frac{4}{5})} = P_{(-\frac{4}{5})}$

$\underline{\underline{K = \{-\frac{4}{5}\}}}$

e) $\frac{2z-3}{3-2z} + 1 = 0$

Podmínka: $3 - 2z \neq 0$

$$-2z \neq -3$$

$$z \neq \frac{3}{2}$$

$\frac{2z-3}{3-2z} + 1 = 0 \qquad /-1$

$\frac{2z-3}{3-2z} = -1 \qquad /\cdot (3 - 2z)$

$2z - 3 = -1(3 - 2z)$

$2z - 3 = -3 + 2z$

$2z - 2z = 3 - 3$

$0z = 0$

Řešením této rovnice je každé reálné číslo. Ale vzhledem k podmínce, kterou jsme udělali na začátku, je řešením každé reálné číslo kromě $\frac{3}{2} \to \underline{\underline{z \in R - \{\frac{3}{2}\}}}$.

Správnost našeho výsledku si můžeme ověřit zkouškou, kdy za z zvolíme libovolné reálné číslo různé od $\frac{3}{2}$.

ZAPAMATUJ SI!

Pokud by nám vyšlo řešení rovnice, které by bylo rovno podmínce, nemůžeme toto řešení přijmout za řešení rovnice!

1.2.1 Souhrnné příklady k procvičení 3

Řešte rovnice a proveďte zkoušku.

a) $\frac{3x-2}{x-4} = \frac{4}{3}$,

b) $\frac{5(s-3)}{2s-3} = \frac{5}{6}$,

c) $\frac{4}{k+3} = \frac{6}{k-2}$,

d) $\frac{5}{n-6} = \frac{3}{n-9}$,

e) $\frac{3a+66}{a+12} = \frac{6a+27}{2a+3}$,

f) $\frac{6(v-4)}{10v-2(3v+5)} = 3$.

1.3 Výsledky

Příklad k procvičení 1.1

$-2, -1, 2$

Příklad k procvičení 1.2

1b, 2c, 3a

Příklady k procvičení 1.3

a) 17

b) -10

c) -14

d) 8

e) -3

Příklady k procvičení 1.4

a) 7

b) 1

c) 12

d) $3;\ 8$

Souhrnné příklady k procvičení 1

a) 3

b) -4

c) 7

d) 4

e) 2

f) -2

g) 15

h) -11

i) 2

j) $-\frac{21}{4}$

k) 11

l) $\frac{13}{5}$

m) $-\frac{16}{3}$

n) $\frac{28}{9}$

o) $\frac{3}{74}$

p) $\frac{9}{4}$

Příklady k procvičení 1.5

b) -2

c) $-\frac{40}{7}$

d) 10

e) -8

f) $\frac{40}{7}$

Souhrnné příklady k procvičení 2

a) 5

b) -1

c) $\{\}$

d) $\frac{21}{4}$

e) $\frac{1}{20}$

f) -9

g) -10

h) $1{,}3$

i) $-1{,}1$

★ j) -5

★ k) $-\frac{5}{11}$

Souhrnné příklady k procvičení 3

a) -2, podmínka $x \neq 4$

b) $\frac{15}{4}$, podmínka $s \neq \frac{3}{2}$

c) – 13, podmínka $k \neq -3, k \neq 2$

d) $\frac{27}{2}$, podmínka $n \neq 6, n \neq 9$

e) 3, podmínka $a \neq -12, a \neq -\frac{3}{2}$

f) $v = 1$, podmínka $v \neq \frac{5}{2}$

2 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Při řešení soustav lineárních rovnic využíváme dvou základních metod (metody dosazovací a sčítací), nebo tyto dvě metody kombinujeme. V metodě dosazovací jde o to, že si z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou (například neznámou x), kterou dosadíme do druhé rovnice - tím získáme rovnici o jedné neznámé a tu vyřešíme. Při sčítací metodě si upravíme soustavu rovnic tak, abychom mohli uplatnit sčítání, při kterém se nám jedna z proměnných odečte.

Při řešení soustavy lineárních rovnic mohou nastat 3 možnosti:

1. soustava rovnic nemá žádné řešení
2. soustava rovnic má jedno řešení
3. soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

Příklad 2.1

Řešte soustavu rovnic pomocí dosazovací i sčítací metody a proveďte zkoušku.

a) $5m - 2n = 3$
$6m - n = -2,$

b) $3u + 4v = 7$
$4u - 3v = 6,$

c) $a - 5b = 6$
$3a - 15b = 18,$

d) $25x + 5y = 16$
$5x + y = 3.$

Řešení:

a) $5m - 2n = 3$
$\underline{\ 6m - n = -2}$

Dosazovací metoda:

Vyjádříme si některou neznámou z jedné rovnice.

Využijeme toho, že ve druhé rovnici $6m - n = -2$ máme pouze $-n$, které si vyjádříme tak, že vše ostatní převedeme na pravou stranu rovnice

$$6m - n = -2 \qquad /-6m$$
$$-n = -2 - 6m \qquad /\cdot(-1)$$
$$n = 2 + 6m$$

Výraz $n = 2 + 6m$ dosadíme za proměnnou n do první rovnice a vyřešíme

$$5m - 2(2 + 6m) = 3$$
$$5m - 4 - 12m = 3$$
$$-7m = 7 \qquad /:(-7)$$
$$\underline{m = -1}$$

Zbývá nám dopočítat n, dosadíme $m = -1$ do výrazu $n = 2 + 6m$, tedy

$$n = 2 + 6 \cdot (-1)$$
$$n = 2 - 6$$
$$\underline{n = -4}$$

Nyní jsme dostali řešení zadané soustavy rovnic. Zdali jsme počítali správně, si ověříme zkouškou

$$5m - 2n = 3$$
$$5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4) = 3$$
$$-5 + 8 = 3$$
$$3 = 3$$

Pro první rovnici oba nalezené kořeny vyhovují, ještě zjistíme jak je to u druhé rovnice

$$6m - n = -2$$
$$6 \cdot (-1) - (-4) = -2$$
$$-6 + 4 = -2$$
$$-2 = -2$$

Vidíme, že i druhé rovnici kořeny vyhovují, výsledek zapíšeme $\underline{\underline{K = [-1, -4]}}$.

Sčítací metoda:

$5m - 2n = 3$

$\underline{6m - n = -2}$ $\quad\quad\quad\quad\quad$ $/\cdot (-2)$

Druhou rovnici $6m - n = -2$ si vynásobíme číslem -2, protože když využijeme sčítací metodu, odečte se nám proměnná n

$5m - 2n = 3$

$\underline{-12m + 2n = 4}$

Sečteme-li obě rovnice (tedy jejich pravé a levé strany), obdržíme

$5m - 2n - 12m + 2n = 3 + 4$

$-7m = 7 \quad\quad\quad /: (-7)$

$m = -1$

Hodnotu $m = -1$ dosadíme do jedné ze zadaných rovnic a dopočítáme n. Vybereme si například druhou rovnici a dostaneme

$-6 - n = -2$

$n = -4$

Výsledek opět ověříme zkouškou (viz dosazovací metoda), $\underline{\underline{K = [-1, -4].}}$

b) $3u + 4v = 7$

$\underline{4u - 3v = 6}$

Dosazovací metoda:

Dosazovací metoda u tohoto typu příkladu je o trochu těžší, protože budeme počítat se zlomky. Z první rovnice vyjádříme neznámou u. Tedy

$3u = 7 - 4v$

$u = \frac{7-4v}{3}$ → tento výraz dosadíme do druhé rovnice a vypočítáme v.

$4 \cdot \left(\frac{7-4v}{3}\right) - 3v = 6$

$\frac{28-16v}{3} - 3v = 6 \quad\quad\quad /\cdot 3$

$28 - 16v - 9v = 18$

$-25v = -10 \quad\quad /: (-25)$

$v = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ → dosadíme do výrazu $u = \frac{7-4v}{3}$, dostaneme

$u = \frac{7-4\cdot\frac{2}{5}}{3} = \frac{7-\frac{8}{5}}{3} = \frac{\frac{27}{5}}{3} = \frac{9}{5}$

$u = \frac{9}{5}$

Zkouška

$3u + 4v = 7$

$3 \cdot \frac{9}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = 7$

$\frac{27}{5} + \frac{8}{5} = 7 \rightarrow 7 = 7$

$4u - 3v = 6$

$4 \cdot \frac{9}{5} - 3 \cdot \frac{2}{5} = 6 \rightarrow 6 = 6$

$\underline{\underline{K = \left[\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right].}}$

Sčítací metoda:

$3u + 4v = 7 \qquad /\cdot 3$

$\underline{4u - 3v = 6} \qquad /\cdot 4$

$9u + 12v = 21$

$\underline{16u - 12v = 24}$

$9u + 12v + 16u - 12v = 21 + 24$

$25u = 45 \qquad /: 25$

$u = \frac{9}{5}$

Hodnotu $u = \frac{9}{5}$ dosadíme například do první rovnice a vyjde

$3 \cdot \frac{9}{5} + 4v = 7$

$4v = \frac{8}{5}$

$v = \frac{2}{5}$

Zkouška viz dosazovací metoda, $\underline{\underline{K = \left[\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right].}}$

c) $a - 5b = 6$

$\underline{3a - 15b = 18}$

Dosazovací metoda:

Z první rovnice si vyjádříme neznámou a, kterou dosadíme do druhé rovnice

$$a = 6 + 5b$$

$3(6 + 5b) - 15b = 18$

$18 + 15b - 15b = 18$

$18 = 18$ → Zadaná soustava rovnic má <u>nekonečně mnoho řešení</u>

Sčítací metoda:

$a - 5b = 6 \qquad /\cdot (-3)$

$\underline{3a - 15b = 18}$

$-3a + 15b = -18$

$\underline{3a - 15b = 18}$

$0 = 0$ → Opět nám vyšlo <u>nekonečně mnoho řešení</u>

d) $25x + 5y = 16$

$\underline{5x + y = 3}$

Dosazovací metoda:

Z druhé rovnice si vyjádříme neznámou y a tu dosadíme do první rovnice

$$y = 3 - 5x$$

$25x + 5(3 - 5x) = 16$

$25x + 15 - 25x = 16$

$0 \neq 1$ → Zadaná soustava lineárních rovnic <u>nemá řešení</u>

Sčítací metoda:

$25x + 5y = 16$

$\underline{5x + y = 3} \qquad /\cdot (-5)$

$25x + 5y = 16$

$\underline{-25x - 5y = -15}$

$0 \neq 1$ → i sčítací metodou nám vyšlo, že daná soustava lineárních rovnic <u>nemá řešení</u>

2.1 Souhrnné příklady k procvičení

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku.

a) $a + 5b = -3$

$a - 2b = 4,$

b) $-4x + y = 3$

$12x - 3y = -9,$

c) $\frac{x}{5} + \frac{5y}{2} = -4$

$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = \frac{1}{6},$

d) $u + 4v = 3$

$-2u + v = 1,$

e) $3r + 2s = 6$

$\frac{r}{3} + \frac{s}{4} = 1,$

f) $0{,}1m + 0{,}3n = 0{,}1$

$0{,}3m - 0{,}2n = -0{,}8,$

g) $x - 2y = 0$

$\frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{4},$

h) $\frac{u-v}{3} = 3u + 6v - 1$

$2(4u + 5v) = 3(1 - 3v),$

i) $2u - 3v = 5$

$\frac{3v+2}{2u} = 4,$

j) $\frac{x-3}{y+1} = \frac{2}{3}$

$2(x - y - 2) = 4 - x,$

k) $\frac{2}{x+5} = \frac{5}{y+2}$

$\frac{5}{x-2} = \frac{2}{y-5},$

l) $6a + 2b = -24$

$3a - b = 6,$

m) $x - 2y = 0$

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$

2.2 Výsledky

Souhrnné příklady k procvičení

a) $K = [2,-1]$

b) $K = x \in R$

c) $K = [5,-2]$

d) $K = \left[-\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right])$

e) $K = [-6,12]$

f) $K = [-2,1]$

g) $K = [-2,-1]$

h) $K = x \in R$

i) $K = \left[-\frac{1}{2}, -2\right]$; podmínka $u \neq 0$

j) Daná rovnice nemá řešení

k) $K = [-3, 3]$; podmínka $x \neq -5 \wedge x \neq 2, y \neq 5 \wedge y \neq -2$

l) $K = [-1,-9]$

m) $K = \left[\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right]$

3 MNOHOČLENY

Abychom mnohočleny správně pochopili, zadefinujeme si pro začátek několik důležitých pojmů.

Výraz je matematický zápis, který se skládá z čísel, písmen abecedy a znaků pro početní operace.

Číselný, neboli také **aritmetický**, **výraz** je matematický zápis obsahující pouze čísla. Výsledkem početní operace s tímto číselným výrazem je číslo.

Algebraický výraz (výraz s proměnnou)

Algebraický výraz je matematický zápis, který tvoří jak písmena, tak i čísla (písmena označují proměnné, čísla konstanty), jenž jsou spojena znaky početních operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování). V algebraickém výrazu se také mohou vyskytovat závorky.

Lomený algebraický výraz je výraz obsahující ve svém jmenovateli nějakou proměnou. Příklady algebraických výrazů: $\frac{8 \cdot c}{x^5}$; $\frac{2}{a}$; $\frac{3y+7b}{2s}$.

Koeficient je číslo, které se vyskytuje u proměnných (zpravidla násobí nějakou proměnnou). Například mějme mnohočlen $5x^3 + 2x^2$. Koeficienty zde jsou – u třetí mocniny x jde o číslo 5 a u druhé mocniny x se jedná o číslo 2.

Jednočlenem rozumíme číslo, proměnnou, nebo jejich jakoukoliv mocninu, podíl i součin.

Příklady jednočlenů: $18;\ x; k^5$.

Dvojčlen je součet nebo rozdíl dvou jednočlenů.

Příklady dvojčlenů: $k + x;\ 3,5y^5 +\ 10n$.

Pokud se jedná o součet nebo rozdíl více než 2 jednočlenů (tzn. 3 a více), mluvíme o mnohočlenu.

Poznámka: Dvojčlen se řadí mezi mnohočleny.

Příklady k procvičení 3.1

Napište, zda se jedná o jednočlen, dvojčlen či mnohočlen.

a) $0,5y + 12$

b) $a + b + cd$

c) 56

d) $0{,}1x \cdot c^5 \cdot 3a^2 \cdot 2c^3 \cdot 2x$

e) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$

f) $7{,}8k^2 + (-10k^3) + 1 + (-5xyz^7)$

ZAPAMATUJ SI!

Pravidla pro počítání s mocninami:

1. $a^r \cdot a^s = x^{r+s}$
2. $\frac{a^r}{a^s} = x^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$
5. $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$
6. $(\frac{a}{b})^{-r} = (\frac{b}{a})^r$
7. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
8. $\frac{1}{a^{-r}} = a^r$
9. $a^0 = 1$

Příklady k procvičení 3.2

Pokud to jde, zapište co nejstručněji jednočlen.

a) $2{,}2 \cdot b \cdot x \cdot x \cdot x$

b) $5 \cdot 2 \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot p \cdot p$

c) $7 \cdot c^3 \cdot c \cdot c \cdot l \cdot l \cdot z$

d) $4d^5 + (-d)x + 1$

Bonusová úloha 1

Najdi takový mnohočlen, který splňuje dané podmínky:

- je to šestičlen

- 5 jeho koeficientů jsou kladná čísla, jeden koeficient je záporný
- mezi kladnými koeficienty se vyskytují čísla 1 a 6
- najdeme v něm 3 proměnné (Odvárko-Kadleček, 7)

3.1 OPERACE S MNOHOČLENY

Mnohočleny můžeme sčítat, odčítat, násobit a dělit. Tyto operace provádíme podle pravidel o operacích s mnohočleny.

3.1.1 Sčítání mnohočlenů

Pokud se v zadání vyskytují závorky, nejprve je odstraníme. Poté sečteme všechny členy, které mají stejné proměnné, je nutné, aby tyto proměnné byly ve stejných mocninách.

Příklad 1 – Sečtěte dané mnohočleny $7x^2 + 3y$ a $2x^2 + y + y^2$.

$$7x^2 + 3y + 2x^2 + y + y^2 = 9x^2 + y^2 + 4y$$

Příklad 2 – Sečtěte mnohočlen $5b^2 - 2a + 4$ s mnohočlenem $2a + 1 + 3b^2$.

$$5b^2 - 2a + 4 + 2a + 1 + 3b^2 = 8b^2 + 5$$

3.1.2 Odčítání mnohočlenů

Při odčítání mnohočlenů nejdříve odstraníme závorky. Pokud se před závorkou vyskytuje znaménko mínus, musíme změnit znaménka, která se nachází v dané závorce. Nakonec odečteme, popřípadě sečteme všechny členy se stejnými proměnnými ve stejných mocninách.

Příklad 1 – Odečtěte mnohočlen $2b^3 + b$ od mnohočlenu $2a^2 - (8b^3 - 3a^2)$.

$$2a^2 - (8b^3 - 3a^2) - (2b^3 + b) =$$

$$2a^2 - 8b^3 + 3a^2 - 2b^3 - b = -10b^3 + 5a^2 - b$$

Příklad 2 – Odečtěte dané mnohočleny $5x^2 + 5 - 3y^3$ a $2x^2 - 3y^3 + 6$.

$$5x^2 + 5 - 3y^3 - (2x^2 - 3y^3 + 6) =$$

$$5x^2 + 5 - 3y^3 - 2x^2 + 3y^3 - 6 = 3x^2 - 1$$

3.1.3 Násobení mnohočlenů

Může jít o násobení jednočlenů (tedy jednočlenu jednočlenem), mnohočlenu jednočlenem a násobení mnohočlenu mnohočlenem.

<u>Násobení jednočlenů</u> – koeficienty i proměnné libovolně násobíme a můžeme měnit i jejich pořadí, neboť operace násobení je komutativní.

<u>Násobení mnohočlenu jednočlenem</u> – jednočlenem vynásobíme všechny členy mnohočlenu, dostaneme jednočleny, které sečteme.

$$(x + y) \cdot z = xz + yz$$

<u>Násobení mnohočlenu mnohočlenem</u> – všemi členy prvního mnohočlenu vynásobíme každý člen druhého mnohočlenu, opět nám vyjdou jednočleny a ty sečteme.

$$(m + n) \cdot (o + p) = mo + mp + no + np$$

3.1.4 Dělení mnohočlenů

Co se týče dělení mnohočlenů, mohou nastat dvě situace – dělení mnohočlenu jednočlenem a dělení mnohočlenu mnohočlenem.

<u>Dělení mnohočlenu jednočlenem</u> – každý člen mnohočlenu podělíme jednočlenem, výsledkem může být mnohočlen nebo také nemusí.

<u>Příklad</u> – Vypočítejte dělení mnohočlenu $x^2 + 1$ jednočlenem x.

$$\begin{array}{l}
(x^2 + 1) : x = x + \frac{1}{x} \\
\underline{-(x^2)} \\
\quad 0
\end{array}$$

<u>Dělení mnohočlenu mnohočlenem</u> si ukážeme na příkladu.

<u>Příklad</u> – Vypočítejte dělení mnohočlenu mnohočlenem.

$$\begin{array}{l}
\quad (x^3 + 2x^2 - 2x - 1) : (x + 1) = x^2 + x - 3 \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\qquad\qquad x^2 - 2x \\
\qquad \underline{-(x^2 + x)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} -3x-1 \\ \underline{-(-3x-3)} \\ \qquad\quad 2 \text{ zbytek} \end{array}$$

Zapisujeme tedy $\underline{\underline{x^2 + x - 3 + \frac{2}{x+1}}}$. (Kubešová-Cibulková, 4)

NEZAPOMEŇ!

Pokud je zadán příklad $(z^4 + 1) : (z + 1)$,

je dobré si doplnit „chybějící" členy, tedy

$(z^4 + 0z^3 + 0z^2 + z + 1) : (z + 1)$

Příklady k procvičení 3.3

Upravte následující mnohočleny.

a) $5x^6 + 7y + x + 10 + y^2 + 2x^6 + 4y + 3x$

b) $12a^2 + 3b + 12a - 5c + (-3a^2) - 3b$

c) $x^5 + y^2 + 10x^3 - (y^4 + 2x^5 + 2x^3 - 2y^2 + 1)$

d) $-5k + 10m - (8k^2 - 4m + 7 - 2k^2 + 3l) + 12k^3 - k + 6l$

e) $(8a^3b - 6a^2b - 5ab + ab) + (-3a^2b - 2ab - 5a^3b)$

f) $(8a^3b - 6a^2b - 5ab + ab) - (-3a^2b - 2ab - 5a^3b)$

Příklady k procvičení 3.4

Zjednodušte.

a) $8ac \cdot 2ab$

b) $5s \cdot o$

c) $10t \cdot 2t$

d) $259ut \cdot 0u$

e) $-7s \cdot 2s$

f) $-5a \cdot 3ab$

g) $8b \cdot (-4m)$

h) $(a + 6) \cdot 2$

i) $-5(m - 2)$

j) $-4l(5k-2l)$

k) $(3c+2)\cdot 6$

l) $(5c+a)\cdot 4$

m) $\frac{8}{3}(3b+8d)$

n) $5m(2s+4mn)$

o) $6k(-2a-3k)$

p) $(2r-4p+7o)\cdot 10$

q) $8c\cdot c\cdot c\cdot b\cdot c\cdot c\cdot 2c\cdot b(1-a)$

r) $7c^2\left(3c+2d-\frac{25}{7}e+2\right)$

Příklady k procvičení 3.5

Zjednodušte zadané lomené výrazy.

a) $\frac{3a}{5a}$

b) $\frac{10a^2}{2a}$

c) $\frac{x^2-4}{x+2}$

d) $\frac{y+5}{y}\cdot\frac{3y}{y+5}$

e) $\frac{10f^5 2e^7}{12ef}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{6e}{6f^2e^4}$

f) $\frac{x^2-1}{x^2+x}\cdot\frac{5x}{2x-3x-3\cdot 2+7}$

g) $\frac{24y^2}{y^2-6y+9}:\frac{6y^2}{2y-6}$

h) $\frac{\frac{56a^5b^3}{2a}}{\frac{8a^2b^3}{4b}}$

3.1.5 Souhrnné příklady k procvičení 1

Vypočtěte a upravte.

a) $7a-2a(12b-3c)-8a^2+5c+6a^2+2ab-6$

b) $5(6m-n)-3m+18n-4mn+4m(5+9n-2a)$

c) $(2x-2y)(4x+8y+3)$

d) $(5x^2+2x-6y)(-3y+y^2+4)$

e) $-9(s-r)(2s+2r)+7(3r-12s)$

f) $\frac{1}{4}t\left(16t+\frac{1}{3}u-\frac{1}{2}t^2\right)-8\left(\frac{7}{12}u-3t^2+\frac{1}{8}u+3tu\right)$

g) $(x-2)(x+3)-[(x+2)(x-3)]$

h) $3(y+3)-4[(2-3y)(5y+1)]$

i) $(s+t+u)(2s-4t+8u)$

3.1.6 Souhrnné příklady k procvičení 2

Vydělte.

a) $(4x^4+3x^3-x^2-2x):x$

b) $(-8x^2y^3c^5):(-4xy^5c^2)$

c) $(25a^3b^2c^4):(-5ab^2c^3)$

d) $(21u^2v^5+15u^3v^6-9u^5v^4):(3u^3v^2)$

e) $(y^3+1):(y+1)$

f) $(x^3-2x^2+3x):(x+1)$

Bonusová úloha 2

Vypočítejte:

$$\sqrt{9}a+6b-4\left(a^2-\sqrt{16}b+2\right)-$$
$$\left(5c+\frac{1}{3}a^2-\sqrt{\frac{1}{64}c}\right)-\left[\left(\sqrt{25}a-3b\right)\left(7a+\sqrt{81}b\right)\right]+\left(\sqrt{38-2}\right)\cdot 2c$$

3.2 DRUHÁ MOCNINA MNOHOČLENU - důležité matematické vzorce

$(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$

Příklad:

$$(2x+5)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 5+5^2=4x^2+20x+25$$

$(A-B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$

<u>Příklad:</u>

$$(3y-1)^2 = (3y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 1 + 1^2 = 9y^2 - 6y + 1$$

$(A^2 - B^2) = (A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2$

<u>Poznámka</u>: $AB = BA$

<u>Příklad:</u>

$$(25z^2 - 9) = (5z-3)(5z+3) = 25z^2 + 15z - 15z - 9 = 25z^2 - 9$$

Příklady k procvičení 3.6

Vypočítejte podle předchozích vzorců.

a) $(8a+3)^2$

b) $(4k+4l)^2$

c) $(b-2)^2$

d) $(11b+5)^2$

e) $(6c-1)^2$

f) $(13k+6i)^2$

g) $(1-2m)^2$

h) $(36a^2-9)$

i) $(81l^2-4)$

j) $(225n^2-121)$

ZAPAMATUJ SI!

$0^2 = 0$	$8^2 = 64$
$1^2 = 1$	$9^2 = 81$
$2^2 = 4$	$10^2 = 100$
$3^2 = 9$	$11^2 = 121$
$4^2 = 16$	$12^2 = 144$
$5^2 = 25$	$13^2 = 169$
$6^2 = 36$	$14^2 = 196$
$7^2 = 49$	$15^2 = 225$

Bonusová úloha 3

Zjednodušte.

$$(4x+2)^2 - 2(3x+1)^2 + \sqrt{225}y - 2^2 + 3x - (-8a)^2 + 5(x-1)^2 - \left[\left(2y+\sqrt{9}\right)\left(y-\sqrt{25}\right)\right] + 1^2 + 15^2 - 3a^2 + (-6x - y + 6^2)$$

Příklady k procvičení 3.7

Vyjádřete zadaný trojčlen jako druhou mocninu dvojčlenu.

a) $(x^2 + 2xy + y^2)$

b) $(4a^2 - 12a + 9)$

c) $(\frac{1}{16}b^2 + 2b + 16)$

d) $(25c^2 - 80ce + 64e^2)$

e) $(4z^2 + 4zd + d^2)$

3.3 ROZKLAD MNOHOČLENŮ NA SOUČIN

Rozklad mnohočlenů se provádí 2 způsoby:

1. vytýkáním před závorku,
2. rozkladem podle nám již známých vzorců (viz kapitola 3.2 – Druhá mocnina mnohočlenu).

Příklady k procvičení 3.8

Rozložte na součin zadané výrazy.

a) $2a - 6b - 4c$

b) $5x + 5y^2 - 25y + 30$

c) $3y^2 + 9y^3 - 6y^4 - 12y^5$

d) $-16u^3b^5 + 32b^3u^5 - 12u^4b^3$

e) $3(k + 1)^2 - 5l(k + 1)^2$

f) $a^3 - a^2b + 5a - 5b$

g) $3k(l - 2)^3 - (l - 2)^3$

★ h) $16m^2 - 25n^4$

3.4 Výsledky

Příklady k procvičení 3.1

a) Dvojčlen

b) Mnohočlen – trojčlen

c) Jednočlen

d) Jednočlen

e) Jednočlen

f) Mnohočlen – čtyřčlen

Příklady k procvičení 3.2

a) $2{,}2x^3b$

b) $10s^7p^2$

c) $7c^5l^2z$

d) Nelze, nejedná se o jednočlen

Bonusová úloha 1

Možný výsledek: $x + 6y + 5z + 2x^2 + (-7z^3) + 1$

Příklady k procvičení 3.3

a) $7x^6 + y^2 + 4x + 11y + 10$

b) $9a^2 + 12a - 5c$

c) $-x^5 - y^4 + 8x^3 + 3y^2 - 1$

d) $12k^3 - 6k^2 - 6k + 3l + 14m - 7$

e) $3a^3b - 9a^2b - 6ab$

f) $13a^3b - 3a^2b - 2ab$

Příklady k procvičení 3.4

a) $16a^2bc$

b) $5so$

c) $20t^2$

d) 0

e) $-14s^2$

f) $-15a^2b$

g) $-32bm$

h) $2a + 12$

i) $-5m + 10$

j) $8l^2 - 20kl$

k) $18c + 12$

l) $20c + 4a$

m) $8b + \frac{64}{3}d$

n) $20m^2n + 10ms$

o) $-18k^2 - 12ka$

p) $20r - 40p + 70o$

q) $16c^6b^2 - 16c^6b^2a$

r) $21c^3 + 14c^2d - 25c^2e + 14c^2$

Příklady k procvičení 3.5

a) $\frac{3}{5}$

b) $5a$

c) $x - 2$

d) 3

e) $3e^3f^2$

f) -5

g) $\frac{8}{(y-3)}$

h) $14a^2b$

Souhrnné příklady k procvičení 1

a) $-2a^2 + 7a - 22ab + 6ac + 5c - 6$

b) $47m + 13n + 32mn - 8am$

c) $8x^2 - 16y^2 + 8xy + 6x - 6y$

d) $-15x^2y + 5x^2y^2 + 20x^2 - 6xy + 2xy^2 + 8x + 18y^2 - 6y^3 - 24y$

e) $-18s^2 + 18r^2 + 21r - 84s$

f) $-\frac{1}{8}t^3 + 28t^2 - \frac{287}{12}tu - \frac{17}{3}u$

g) $2x$

h) $60y^2 - 25y + 1$

i) $2s^2 - 4t^2 + 8u^2 - 2st + 10su + 4ut$

Souhrnné příklady k procvičení 2

a) $4x^3 + 3x^2 - x - 2$

b) $2xy^{-2}c^3$

c) $-5a^2c$

d) $7u^{-1}v^3 + 5v^4 - 3u^2v^2$

e) $y^2 - y + 1$

f) $x^2 - 3x + 6 - \frac{6}{x+1}$

Bonusová úloha 2

$$-\frac{118}{3}a^2 + 27b^2 - 24ab + 3a + 22b + \frac{57}{8}c - 8$$

Příklady k procvičení 3.6

a) $64a^2 + 48a + 9$

b) $16k^2 + 32kl + 16l^2$

c) $b^2 - 4b + 4$

d) $121b^2 + 110b + 25$

e) $36c^2 - 12c + 1$

f) $169k^2 + 156ki + 36i^2$

g) $1 - 4m + 4m^2$

h) $(6a - 3)(6a + 3)$

i) $(9l - 2)(9l + 2)$

j) $(15n - 11)(15n + 11)$

Bonusová úloha 3

$$3x^2 - 2y^2 - 67a^2 - 9x + 21y + 280$$

Příklady k procvičení 3.7

a) $(x + y)^2$

b) $(2a - 3)^2$

c) $(\frac{1}{4}b + 4)^2$

d) $(5c - 8e)^2$

e) $(2z + d)^2$

Příklady k procvičení 3.8

a) $2(a - 3b - 2c)$

b) $5(x + y^2 - 5y + 6)$

c) $3y^2(1 + 3y - 2y^2 - 4y^3)$

d) $-4u^3b^3(4b^2 - 8u^2 + 3u)$

e) $(k + 1)^2(3 - 5l)$

f) $(a - b)(a^2 + 5)$

g) $(l - 2)^3(3k - 1)$

★ h) $16m^2 - 25n^4$

4 SLOVNÍ ÚLOHY

Budeme se zabývat takovými typy slovních úloh, které lze řešit

1. jednou lineární rovnicí s jednou neznámou

   nebo

2. soustavou dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými.

U slovních úloh je důležitý zápis, výpočet a také odpověď, kterou nesmíme opomíjet.

Příklad 4.1

Veletrh karavanových vozů se konal v Praze v Letňanech ve dnech 27. – 29. března 2015. Za celé tři dny tento veletrh navštívilo 3 000 lidí. Druhý den (tedy v sobotu 28. 3.) přišlo na veletrh o 150 lidí více než předchozí den (pátek 27. 3.). Poslední den (neděle 29. 3.) bylo na veletrhu návštěvníků 2,5krát více než druhý den. Zjistěte, jaká byla návštěvnost veletrhu v Praze v jednotlivé dny.

<u>Řešení:</u>

Naším úkolem je zjistit, jaký byl počet návštěvníků v pátek, v sobotu a v neděli. Jako neznámou x si zvolíme počet návštěvníků v první den veletrhu, tedy v pátek.

1. den (Pá) ………………………………………………………………………… x lidí

2. den (So) ……………………………………………………………… $(x + 150)$ lidí

3. den (Ne) …………………………………………………………… $2{,}5(x + 150)$ lidí

celkem ……………………………………………… $[x + (x + 150) + 2{,}5(x + 150)]$ lidí

celkem ……………………………………………………………………… 3 000 lidí

Nyní můžeme sestavit lineární rovnici o jedné neznámé x

$$x + (x + 150) + 2{,}5(x + 150) = 3\,000$$
$$x + x + 150 + 2{,}5x + 375 = 3\,000$$
$$4{,}5x + 525 = 3\,000$$
$$4{,}5x = 2\,475$$
$$x = 550$$

První den (pátek) veletrhu přišlo 550 lidí.

Kolik bylo návštěvníků v sobotu (druhý den) si musíme dopočítat z naší tabulky:

$$x + 150 = \text{počet návštěvníků druhý den veletrhu}$$

x víme, že je počet lidí první den veletrhu (tedy 550), tudíž lehkým výpočtem zjistíme, že druhý den bylo 700 návštěvníků ($550 + 150$).

Kolik lidí navštívilo veletrh třetí den:

$$2{,}5(x + 150) = \text{počet návštěvníků třetí den veletrhu}$$

x známe, tj. 550 lidí

$$2{,}5(550 + 150) = 1\,750$$

Pro jistotu si provedeme zkoušku, abychom věděli, zda jsme zadanou úlohu vypočítali správně – sečteme počet návštěvníků v jednotlivých dnech veletrhu a musí nám vyjít celkový počet návštěvníků (tj. 3 000):

$$550 + 700 + 1\,750 = 3\,000$$

Zkouška nám vyšla, tudíž vidíme, že jsme počítali správně.

Odpověď: V pátek přišlo na veletrh 550 lidí, v sobotu 700 lidí a v neděli $1\,750$ návštěvníků.

Příklad 4.2

Během žní bylo obilí z menšího pole odváženo třemi různě velkými nákladními auty. Na druhém nákladním autě byla hmotnost obilí o 15 % větší než na prvním autě, na třetím autě byla hmotnost o 40 % menší než na prvním a druhém nákladním autě dohromady. Celková hmotnost na všech třech autech byla 4 128 kg. Vypočítejte, kolik kilogramů obilí bylo naloženo na každém nákladním autě.

Řešení:

Za neznámou x zvolíme počet tun na prvním nákladním autě.

1. nákladní automobil …………………………………………………………… x kg

2. nákladní automobil ……………………………………….. $(x + \frac{15}{100}x)$ kg = $1{,}15x$ kg

3. nákladní automobil ……………………………….……………$0{,}60(x + 1{,}15x)$ kg

celkem ………………..……………………………………………..… 4 128 kg

<u>Poznámka</u>: o 40% méně než v prvním a druhém autě = 60% součtu prvního a druhého auta

$$x + 1{,}15x + 0{,}60(x + 1{,}15x) = 4\,128$$
$$2{,}15x + 0{,}60 \cdot 2{,}15x = 4\,128$$
$$2{,}15x(1 + 0{,}60) = 4\,128$$
$$2{,}15x \cdot 1{,}60 = 4\,128$$
$$2{,}15x = 2\,580$$
$$x = 1\,200$$

Na prvním nákladním autě bylo naloženo 1 200 kg obilí.

Kolik bylo na druhém nákladním autě, dopočítáme lehkým výpočtem

$$1{,}15 \cdot 1200 = 1\,380 \text{ kg}$$

Hmotnost obilí na třetím autě si také dopočítáme

$$0{,}60(1200 + 1380) = 0{,}60 \cdot 2580 = 1\,548 \text{ kg}$$

Správnost našeho výpočtu si ověříme zkouškou

$$1\,200 + 1\,380 + 1\,548 = 4\,128 \text{ kg}$$

Odpověď: Na prvním nákladním autě bylo 1 200 kg obilí, na druhém nákladním autě se vezlo 1 380 kg a na třetím autě 1 548 kg.

Příklad 4.3

Hanička jede na prázdniny k babičce. Maminka ji posadila na vlak z Prahy do Bystřice. V Bystřici musí Hanička vystoupit a poté jít 9 km do babiččiny vesnice pěšky. Když Hanička vystoupí z vlaku, volá babičce, že vyráží pěšky a zároveň babička sedá do auta, aby pro vnučku dojela. Hanička jde rychlostí 4 km/h a babička jede rychlostí 32 km/h. Vypočítejte, kolik kilometrů půjde Hanička s věcmi sama, než potká babičku.

Řešení:

Za neznámou x zvolíme čas, kdy se obě setkají, což znamená, že si nejdříve vypočítáme čas, za který se Hanička setká s babičkou.

čas, kdy se setká Hanička s babičkou ………………………………………..… x h
rychlost Haničky ……………………………………………………………… 4 km/h
kolik km ujde Hanička za x hodin ………………………………………….. $4x$ km/h
rychlost babičky …………………………………………………………..…. 32 km/h
kolik km ujede babička za x hodin ………………………………………… $32x$ km/h
celkový počet km ……………………………………………………..... $4x + 32x$ km
celkový počet km ………………………………………………………..……... 9 km

$$4x + 32x = 9$$
$$36x = 9$$
$$x = \frac{1}{4} \text{ hodiny}$$

Hanička se s babičkou setká za $\frac{1}{4}$ hodiny, což je 15 minut.

Ještě nám zbývá dopočítat, kolik kilometrů za $\frac{1}{4}$ hodiny Hanička ujde.

$$\text{Hanička: } 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \text{ km}$$

Pro zkoušku si dopočítáme, jakou vzdálenost za $\frac{1}{4}$ hodiny ujede babička - $32 \cdot \frac{1}{4} = 8$ km. Dohromady je to 9 km a to je vzdálenost z Bystřice do vesnice, ve které bydlí babička.

Odpověď: Hanička půjde s věcmi sama 1 km.

Příklad 4.4

Maminka s Honzíkem vyjeli na kole z domova k řece. Jejich průměrná rychlost je 10 km/h. Za 30 minut za nimi vyjel i tatínek, jehož průměrná rychlost je 20 km/h. Zjistěte, za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od domova je tatínek dožene.

Řešení:

Jako x si označíme čas jízdy tatínka, který budeme počítat v hodinách.

čas jízdy tatínka ………………………………………………………..……….............. x h

průměrná rychlost ……………………………………………………...…. 20 km/h

vzdálenost, kterou ujede tatínek ……………………...…………….……... $20x$ km

čas jízdy maminky a Honzíka ………………....…………………….…... $(x + 0{,}5)$ h

průměrná rychlost maminky a Honzíka …………………………….…….. 10 km/h

vzdálenost, kterou ujede maminka s Honzíkem ……………..…....…… $10(x + 0{,}5)$ km

K sestavení rovnice si musíme uvědomit, že jakmile tatínek dojede maminku s Honzíkem, tak v tu chvíli se jejich vzdálenosti rovnají, tudíž

$$10(x + 0{,}5) = 20x$$

$$10x + 5 = 20x$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ hodiny} = 30 \text{ minut}$$

Tatínek dojede maminku s Honzíkem za 30 minut.

Dopočítáme si, jakou vzdálenost za 30 minut ujede tatínek při jeho průměrné rychlosti 20 km/h

$$20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ km}$$

Pro zkoušku můžeme dopočítat, jakou vzdálenost ujela maminka s Honzíkem při jejich průměrné rychlosti 10 km/h. Maminka s Honzíkem jeli o půl hodiny déle, tedy přesně 1 hodinu. Ujeli

$$10 \cdot 1 = 10 \text{ km}$$

Vidíme, že se vzdálenosti skutečně rovnají.

Odpověď: Tatínek je dožene za 30 minut ve vzdálenosti 10 km od domova.

Příklad 4.5

Menší rybník Splávek se jedním přítokem napouští 8 hodin, druhým přítokem se napustí za 4 hodiny. Vypočítejte, za jak dlouho se Splávek napustí, když budou puštěny oba dva přítoky najednou.

<u>Řešení:</u>

Uděláme si 2 tabulky, každá bude vyjadřovat jeden přítok. Neznámou x si označíme počet hodin, za které se naplní rybník oběma přítoky.

1. přítok:

8 hodin ..…………………………………………………….….…….. 1 celý rybník

1 hodina ………………………………………………………….……… $\frac{1}{8}$ rybníku

x hodin ……………………………………………………………………… $\frac{x}{8}$ rybníku

2. přítok:

4 hodiny …………………………………...……………………….. 1 celý rybník

1 hodina ……………………………………………………………….. $\frac{1}{4}$ rybníku

x hodin ……………………………………………………………………… $\frac{x}{4}$ rybníku

Když sečteme oba dva přítoky, naplní se celý rybník Splávek, zapíšeme si to tedy rovnicí

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{4}=1$$

$$4x+8x=32$$

$$12x=32$$

$$x=\frac{8}{3}\text{ hodiny}$$

Nyní si prověříme, zda opravdu za $\frac{8}{3}$ hodiny se naplní celý rybník Splávek

1. přítok

za 8 hodin ……………………………………………………………. 1 celý rybník

za $\frac{8}{3}$ hodiny ……………………………...……………………… $\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$ rybníku

2. přítok

za 4 hodiny …………………………………………………….………………. 1 celý rybník

za $\frac{8}{3}$ hodiny ………………………………………………...……… $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$ rybníku

oba přítoky

za $\frac{8}{3}$ hodiny………………………………………………….….. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ celý rybník

Odpověď: Rybník Splávek se oběma přítoky naplní za $\frac{8}{3}$ hodiny, tedy za 2 hodiny a 40 minut.

Příklad 4.6

Dva uklízecí stroje mají vyčistit náměstí Jana Přeskodčila. Prvním strojem se náměstí uklidí za 12 hodin, druhým výkonnějším strojem to trvá 8 hodin. Zjistěte, za jak dlouhou dobu se náměstí uklidí těmito 2 stroji, přičemž víme, že druhý stroj začal pracovat o 2 hodiny déle než první stroj.

<u>Řešení:</u>

Za neznámou x si zvolíme počet hodin, za který stroje uklidí náměstí Jana Přeskodčila.

1. stroj

za 1 hodinu uklidí …….…………………………………...……….. $\frac{1}{12}$ náměstí

pracuje ……………………………...………………………………… x hodin

za x hodin uklidí ……..……………………………………………..…. $\frac{x}{12}$ náměstí

2. stroj

za 1 hodinu uklidí ……………………………………………...…… $\frac{1}{8}$ náměstí

pracuje ……………………………………………………….………… $(x-2)$ hodin

za $(x-2)$ hodin uklidí ……………………………….…………….. $\frac{x-2}{8}$ náměstí

$$\frac{x}{12} + \frac{x-2}{8} = 1$$

$$8x + 12(x - 2) = 96$$
$$8x + 12x - 24 = 96$$
$$20x = 120$$
$$x = 6 \text{ hodin}$$

Odpověď: Náměstí bude uklizeno za 6 hodin (2 hodiny pracuje jeden stroj a 4 hodiny pracují oba stroje dohromady).

Příklad 4.7

Pan Březina přišel do kavárny a chce namíchat směs kávy tak, aby 1 kilogram stál 260 Kč. Vybral si dva druhy kávy, jedna stojí 320 Kč/kg a druhá 240 Kč/kg. Vypočítejte, kolik kilogramů od každého druhu kávy musí paní prodavačka smíchat, aby připravila 5 kg požadované směsi.

Řešení:

Zadanou úlohu budeme řešit soustavou dvou lineárních rovnic o 2 neznámých. Počet kilogramů dražší kávy si označíme neznámou x a počet kilogramů levnější kávy y.

hmotnost dražší kávy ………………………………………………………….. x kg
hmotnost levnější kávy ……………………………………………..…………. y kg
hmotnost dražší a levnější kávy ……………………………………..……… $(x + y)$ kg
požadovaná hmotnost směsi …………………………………………………... 5 kg

Sestavíme si první lineární rovnici o dvou neznámých – hmotnost obou druhů kávy se rovná požadované hmotnosti směsi

$$x + y = 5$$

cena za x kg dražší kávy (320 Kč/kg) ……………………………………….. $320 \cdot x$ Kč
cena za y kg levnější kávy (240 Kč/kg) ………..…………………………… $240 \cdot y$ Kč
cena za oba dva druhy kávy ……………………………….………..… $(320x + 240y)$ Kč
cena za požadovanou hmotnost směsi (260 Kč/kg) ………...…… $(260 \cdot 5) = 1\,300$ Kč

Nyní si sestavíme druhou lineární rovnici o dvou neznámých – cena za oba dva druhy kávy se rovná ceně za požadovanou hmotnost směsi

$$320x + 240y = 1\,300$$

Vznikla nám soustava lineárních rovnic

$$x + y = 5$$
$$\underline{320x + 240y = 1\,300}$$

Vzniklou soustavu rovnic budeme řešit metodou dosazovací – z první rovnice si vyjádříme neznámou x a druhou rovnici vydělíme číslem 20.

$$x = 5 - y$$
$$\underline{16x + 12y = 65\quad}$$

Výraz $x = 5 - y$ dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme y

$$16(5 - y) + 12y = 65$$
$$80 - 16y + 12y = 65$$
$$4y = 15$$
$$y = 3{,}75 \text{ kg}$$

Dosadíme si $y = 3{,}75$ do rovnice $x = 5 - y$

$$x = 5 - 3{,}75$$
$$x = 1{,}25 \text{ kg}$$

Náš výpočet si ověříme zkouškou

Cena dražší kávy: $320 \cdot 1{,}25 = 400$ Kč

Cena levnější kávy: $240 \cdot 3{,}75 = 900$ Kč

Cena za 5 kg požadované směsi: $400 + 900 = 1\,300$ Kč.

Jeden kilogram směsi stojí $1300: 5 = 260$ Kč → odpovídá to požadavku pana Březiny

Odpověď: Paní prodavačka musí k přípravě 5 kg směsi za 260 Kč/kg smíchat 1,25 kg dražší kávy (v ceně 320 Kč/kg) a 3,75 kg levnější kávy (v ceně 240 Kč/kg).

4.1 Souhrnné příklady

a) Paní Zelenková koupila svým třem dětem ovoce. Koupila 3 kg banánů, 2 kg švestek a 5 kg hrušek. Víme, že 1 kg banánů stálo 30 Kč, 1 kg švestek stojí o polovinu více než kilo banánů a 1 kg hrušek stojí o $\frac{1}{3}$ více než kilo švestek. Vypočítejte, kolik stojí 1 kg banánů, 1 kg švestek a 1 kg hrušek. A navíc zjistěte, kolik paní Zelenková zaplatila za celý nákup.

b) Plavecký bazén navštívilo během 3 dnů (pondělí – středa) 550 plavců. V úterý do bazénu přišlo o 50 lidí víc než předchozí den a ve středu přišlo 2krát více lidí než v úterý. Zjistěte, kolik bylo návštěvníků v jednotlivých dnech (tedy v pondělí, úterý a ve středu).

c) Obvod trojúhelníku je 120 cm. Strana a je o 6 cm delší než strana b a strana c je o 18 cm kratší než strana a. Vypočítejte délky všech stran daného trojúhelníku.

d) Lukáš, Jana a Kryštof se zúčastnili soutěže v psaní všemi deseti na PC. Soutěž vyhrál Kryštof, druhá skončila Jana a na třetím místě se umístil Lukáš. Všichni tři soutěžící dostali hodnotné ceny, mimo jiné má být mezi ně rozděleno 5 000 Kč. První Kryštof má dostat nejvíce peněz, druhá Jana má dostat o 700 Kč méně než Kryštof a třetí Lukáš má dostat o 200 Kč nižší částku než Jana. Kolik peněž má dostat každý z nich?

e) Karel a Milan jsou nejlepší kamarádi, bydlí ve stejném městě, avšak každý na opačném konci, vzdálenost jejich domů je 15 km. Po škole se dohodli, že se pojedou projet na kolech. Oba vyjeli ve stejnou dobu, Karel jede rychlostí 12 km/h a Milan 18 km/h. Zjistěte, za jak dlouho se kamarádi setkají a jakou část cesty do té doby každý z nich ujede.

f) Jirka pracuje ve firmě ALFA jako kontrolor výrobků. Za tři dny zkontroloval celkem 3 068 výrobků. Druhý den zkontroloval o 35% výrobků více než první den. Třetí den zkontroloval o 10% výrobků více než předchozí den. Vypočítejte, kolik Jirka zkontroloval výrobků v jednotlivých dnech.

g) Lesní školka borovic byla vysázena během tří let. Druhý rok bylo vysázeno o 50% borovic více než první rok. Třetí rok se vysadilo o 20% méně než předešlé dva roky. Celkový počet vysázených stromků byl 1 350 ks. Vypočtěte, kolik kusů borovic se vysadilo v každém roce.

h) Malé osobní letadlo CT-5 letí průměrnou rychlostí 150 km/h. Z toho samého místa za ním o 1 hodinu a 30 minut déle vzlétnul vrtulník AZ-8 průměrnou rychlostí 250 km/h. Zjistěte, za jak dlouho doletí vrtulník osobní letadlo a v jaké vzdálenosti dožene vrtulník malé osobní letadlo od letiště vzletu.

i) Na koupališti v Nesvačilech mají jeden velký plavecký bazén. Běžně ho napouští jedním přívodem za 6 hodin. Jenže údržbář zapomněl pustit přívod a za 2 hodiny a 30 minut začnou chodit plavci. Vypočítejte, zda stihnout napustit bazén oběma přívody než přijdou první zákazníci, pokud víme, že druhým přívodem se bazén naplní za 4 hodiny.

j) Paní Kabeláčová je schopná připravit slavnostní menu pro 12 osob za 8 hodin. Její dceři to trvá 10 hodin. Vypočítejte, za kolik hodin by připravily slavnostní menu, když by na tom pracovaly obě dvě, přičemž víme, že paní Kabeláčová začala pracovat o 2 hodiny dříve než její dcera.

k) Anička chce smíchat dva druhy čaje v ceně 100 Kč/kg, požaduje 6 kg směsi. Malinový čaj stojí 70 Kč/kg a jahodový čaj 120 Kč/kg. Zjistěte, kolik kilogramů malinového a kolik kilogramů jahodového čaje bude potřeba smíchat.

l) V hotelu je 58 pokojů, ve kterých je ubytováno 141 turistů. Některé pokoje jsou dvojlůžkové a některé jsou třílůžkové. Vypočítejte, kolik je v hotelu dvojlůžkových a kolik třílůžkových pokojů, pokud předpokládáme plnou obsazenost všech pokojů.

m) Pan Kozák zašel do banky, aby mu rozměnili 1 700 Kč pouze na desetikoruny a padesátikoruny. Zjistěte, kolik bankovek v hodnotě 10 Kč a 50 Kč dostal od pokladníka, když víme, že celkově dostal 70 bankovek.

★ n) Odvěsna a pravoúhlého trojúhelníku má délku 20 dm, druhá odvěsna b je o 4 dm menší než přepona daného trojúhelníku. Vypočítejte délky všech stran pravoúhlého trojúhelníku.

4.2 Výsledky

Souhrnné příklady 4.1

a) 1 kg banánů stálo 30 Kč, 1 kg švestek 45 Kč a 1 kg hrušek 60 Kč. Paní Zelenková za celý nákup zaplatila 480 Kč.

b) V pondělí přišlo 100 lidí, v úterý 150 plavců a ve středu plavecký bazén navštívilo 300 návštěvníků.

c) Strana a je dlouhá 48 cm, strana b má 42 cm a strana c měří 30 cm.

d) Kryštof dostane 2 200 Kč, druhá Jana 1 500 Kč a Lukáš vyhrál 1 300 Kč.

e) Setkají se za 30 minut. Karel ujede 6 km a Milan 9 km.

f) Jirka první den zkontroloval 800 výrobků, druhý den 1 080 výrobků a třetí den zkontroloval 1 188 výrobků.

g) V prvním roce bylo vysázeno 300 borovic, v druhém roce 450 a ve třetím roce 600 ks.

h) Vrtulník dožene malé osobní letadlo za 2 hodiny a 25 minut ve vzdálenosti 562,5 km od letiště vzletu.

i) Ano, stihnout to, protože oběma přívody napustí bazén za 2 hodiny a 24 minut. Tudíž mají ještě 6 minut rezervu.

j) Slavnostní menu pro 12 osob by ve spolupráci zvládly za 5 hodin a 20 minut.

k) Bude potřeba smíchat 2,4 kg malinového čaje a 3,6 jahodového čaje.

l) V hotelu je 33 dvojlůžkových pokojů a třílůžkových pokojů je 25.

m) Pan Kozák dostal 45 bankovek v hodnotě 10 Kč a 25 bankovek v hodnotě 50 Kč.

★ n) Odvěsna b měří 48 dm a přepona c je dlouhá 52 dm.

ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo vytvořit srozumitelnou sbírku úloh na téma Rovnice, soustavy rovnic a mnohočleny na 2. stupni ZŠ. Nejvíce jsem se ve své práci zabývala lineárními rovnicemi a soustavami lineárních rovnic, které jsou součástí učiva na základních školách. Sbírka obsahuje i několik úloh na kvadratické rovnice, které jsou na základní škole zastoupeny v malé míře.

Práci jsem obohatila poučnými rámečky Zapamatuj si! a Nezapomeň!, které poskytují rady ohledně probíraných témat. Některé kapitoly obsahují bonusové úlohy nebo tzv. hvězdičkové úlohy, které jsou těžší než ostatní příklady.

Bakalářskou práci jsem pojala jako přípravu pro svou budoucí pedagogickou praxi. Do budoucna bych ji chtěla poskytnout i žákům, kteří by ji mohli používat jako cvičebnici nebo pomocný materiál při nepochopení daných témat, nebo absenci v hodinách matematiky.

Při tvorbě bakalářské práce jsem vycházela nejvíce z učebnic Odvárko-Kadleček pro 8. ročník ZŠ a také ze sbírky úloh z matematiky od Františka Bělouna.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

Literatura

[1] BĚLOUN, František a kolektiv. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu.* 8. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 254 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-7196-104-3.

[2] EISLER, Jaroslav a Eva CIBULKOVÁ. *Matematika: příprava k přijímacím zkouškám na střední školy*. 1. vyd. Praha: Fragment, 2003, 141 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-720-0734-3

[3] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani: soubor úloh pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Olomouc: Rubico, 2002, 113 s. Na dlani. ISBN 80-858-3973-3.

[4] KUBEŠOVÁ, Naděžda a Eva CIBULKOVÁ. *Matematika: přehled středoškolského učiva*. 1. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2006, 239 s. Maturita (Petra Velanová). ISBN 80-868-7303-X.

[5] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 95 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6167-1.

[6] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 187 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6201-5.

[7] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. Praha, 1999, 95 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6148-5.

[8] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

[9] *Testy 2008: matematika*. Vyd. 1. Redaktor Martina Palková. Brno: Didaktis, 2007, 144 s. Testy (Didaktis). ISBN 9788073580933.

Internetové zdroje

[10] Rovnice a nerovnice: Co je to rovnice. *Matematika.cz* [online]. Nová média, s. r. o., © 2006-2014 [cit. 2014-02-12]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/rovnice

[11] Rovnice a nerovnice: Lineární rovnice. *Matematika.cz* [online]. Nová média, s. r. o., © 2006-2014 [cit. 2014-02-12]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/rovnice

[12] Rovnice a nerovnice: Systémy lineárních rovnic. *Matematika.cz* [online]. Nová média, s. r. o., © 2006-2014 [cit. 2014-07-15]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/rovnice

[13] Mnohočleny. *Matematika.cz* [online]. Nová média, s. r. o., © 2006-2014 [cit. 2015-04-05]. Dostupné z: http://www.matematika.cz/mnohocleny