



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

STANOVENÍ ANIZOTROPIE TEPELNÉ VODIVOSTI POLYMERNÍCH CHLADIČŮ PRO CHLAZENÍ ELEKTRONIKY

DETERMINATION OF THERMAL CONDUCTIVITY ANISOTROPY OF POLYMERIC HEATSINKS FOR
ELECTRONICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. RÓBERT BRACHNA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. JAN KOMÍNEK, Ph.D.

BRNO 2021

Zadaní diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Bc. Róbert Brachna**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Jan Komínek, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Stanovení anizotropie tepelné vodivosti polymerních chladičů pro chlazení elektroniky

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce se bude zabývat stanovením rozložení tepelné vodivosti v kompozitních polymerních chladičích na základě naměřených teplot. Jako testovací vzorky budou použity nově vyvíjené pasivní chladiče LED čipů pro automobilovou osvětlovací techniku. Teploty vzorku jsou měřené jak podpovrchově zabudovanými termočládky, tak i na povrchu za pomoci termovizní kamery. Chladiče jsou vyrobeny z kompozitního materiálu, který vykazuje výraznou anizotropii tepelné vodivosti. Anizotropie tohoto materiálu je způsobena rozložením a uspořádáním aditiv v základním polymerním materiálu. Rozložení aditiv, a tím i výsledná tepelná vodivost, je výrazně ovlivněno výrobním procesem vstřikování taveniny do kavity formy.

Předpokládaný postup řešení spočívá ve vytvoření numerického modelu chladiče ve vhodném softwaru (Comsol). Tepelné vodivosti v modelu by měly být následně optimalizovány tak, aby se minimalizoval rozdíl mezi naměřenými a simulovanými teplotami.

Cíle diplomové práce:

Cílem práce je navrhnout a realizovat postup stanovení rozložení tepelné vodivosti na základě dostupných měření.

Seznam doporučené literatury:

INCROPERA, Frank P., DEWITT, David P., BERGMAN, Theodore L., LAVINE, Adrienne S., Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Wiley, 2007. ISBN 0471457280.

ZACHAR, Martin. Využitie tepelne vodivých nekovových materiálův pre chladiace systémy v automobilovej osvetľovacej technike. Brno, 2020. Dizertačná práca.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práca sa zaoberá tvorbou numerického modelu polymérneho chladiča s dôrazom na jeho výraznú anizotropiu tepelnej vodivosti. Táto anizotropia je spôsobená vysoko tepelne vodivou grafitovou prímiesou. Jej výsledná orientácia je daná tečením materiálu vo výrobnej forme počas injekčného vstrekovania. Numerický model je vytvorený na základe reálneho prototypu chladiča podrobeného experimentálnym meraniam, ktorých fyzikálne podmienky verne replikuje. Stanovenie anizotropie je rozdelené do dvoch častí. Kvalitatívna časť vychádza z lomovej analýzy prototypu chladiča a určuje vlastné smery tenzoru vodivosti v jednotlivých častiach geometrie. Výpočet hlavných vodivostí spadá do kvantitatívnej časti, v ktorej je tento problém sformulovaný ako inverzná úloha vedenia tepla. Vstupné dáta do navrhutej úlohy tvoria experimentálne získané teploty v rôznych miestach geometrie. Hodnoty hlavných vodivostí sú optimalizované tak, aby sa minimalizoval rozdiel medzi nameranými a simulovanými teplotami.

Abstract

The master's thesis focuses on creating a numerical model of a polymeric heat sink with emphasis on its significant thermal conductivity anisotropy. This anisotropy is caused by highly thermally conductive graphite filler. Its final orientation is given by the melt flow inside the mould cavity during injection molding. The numerical model is created on the basis of a heat sink prototype subjected to experimental measurements, whose physical conditions are reliably replicated by the model. The determination of anisotropy is divided into two parts. The qualitative part is based on the fracture analysis of the heat sink prototype and determines the principal directions of the conductivity tensor in individual sections of the geometry. The computation of principal conductivities falls into the quantitative part, in which this task is formulated as an inverse heat conduction problem. The input data for the proposed task are experimentally obtained temperatures at different places of the geometry. The values of principal conductivities are optimized to minimize the difference between the measured and simulated temperatures.

Klíčové slová

polymérne chladiče, tepelná vodivosť, anizotropia, stacionárne vedenie tepla, inverzná úloha vedenia tepla, optimalizácia

Keywords

polymeric heat sinks, thermal conductivity, anisotropy, stationary heat conduction, inverse heat conduction problem, optimization

BRACHNA, Róbert. *Stanovení anizotropie tepelné vodivosti polymerních chladičů pro chlazení elektroniky*. Brno, 2021. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132420>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Jan Komínek.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu *Stanovení anizotropie tepelné vodivosti polymerních chladičů pro chlazení elektroniky* vypracoval samostatne pod vedením Ing. Jana Komínka, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname použitých zdrojov.

V Brne dňa 19. 5. 2021

Róbert Brachna

Podakovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať vedúcemu svojej diplomovej práce Janovi Komínkovi za cenné postrehy pri vedení práce a časovú ochotu aj pri distančných konzultáciach. Moja vďaka rovnako patrí Laboratóriu prenosu tepla a prúdenia a jej príjemnému kolektívu, predovšetkým Martinovi Zacharovi a Michalovi Guzejovi, s ktorými sme nejednokrát rozoberali priebeh tejto práce. Ďalej chcem poďakovať spolužiakovi a dobrému kamarátovi Jiřímu Hvoždovi za... veď on už vie za čo. V neposlednom a dokonca prvom rade smeruje moje poďakovanie rodičom, bez ktorých by sa moje štúdium neuskutočnilo.

Róbert Brachna

Obsah

Úvod	11
1 Poznatky z tenzorovej analýzy	12
1.1 Tenzorová notácia	12
1.2 Základné operácie	13
1.3 Zmena súradnicového systému	14
1.4 Teorém o divergencii	15
1.5 Analýza vlastných smerov	15
2 Modelovanie prenosu tepla	16
2.1 Kondukcia	16
2.2 Konvekcia	19
2.3 Radiácia	20
3 Skúmaný prototyp polymérneho chladiča	26
3.1 Geometria	26
3.2 Výroba chladiča a štúdium anizotropie	27
4 Experimentálne meranie	32
4.1 Popis experimentu	32
4.2 Výmena tepla s okolím	34
5 Prístup k stanoveniu anizotropie tepelnej vodivosti	35
5.1 Riešenie priamej úlohy	35
5.2 Riešenie inverznej úlohy	37
5.3 Optimalizácia metódou pohyblivého simplexu	38
5.4 Realizácia riešenia	41
6 Numerický model	43
6.1 Trojrozmerný model	43
6.2 Dvojrzmerný model	55
7 Overenie a korekcia numerického modelu na hliníkovom chladiči	60
8 Výpočty tepelnej vodivosti	62
9 Diskusia	66
9.1 Odchýlky na koncoch rebier	66
9.2 Nedostatočnosť modelu a asymetria chýb	66
9.3 Zhrnutie	67
Záver	68
Zoznam použitých zdrojov	69
Zoznam symbolov, veličín a skratiek	73
Zoznam obrázkov a tabuliek	75

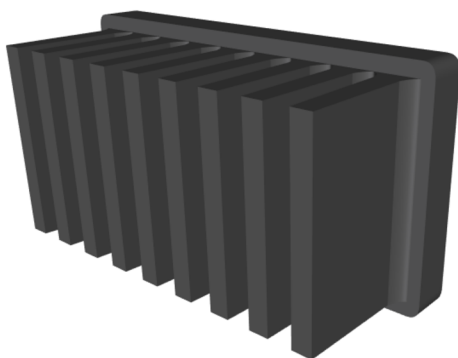
Zoznam príloh	78
A Nastavenie prirodzenej konvekcie trojrozmerného modelu	79
B Simulované hodnoty súčiniteľa prestupu tepla	81

Úvod

V technických aplikáciach týkajúcich sa chladenia elektroniky je najväčším požiadavkom udržanie stabilnej teploty pod maximálnou prevádzkovou teplotou špecifikovanou výrobcami. Nároky v tejto oblasti neustále rastú. Veľkosti elektronických súčiastok sa za posledné desaťročia výrazne zmenšili, pričom ich tepelný výkon sa s pokrokmi rapídne zvýšil. Typickými materiálmi používanými na výrobu chladičov v odvetví elektroniky sú hliník či meď. Za toto popredie vďaka predovšetkým svojej vysokej tepelnej vodivosti [1], [2].

Za posledné storočie sa vo svete priemyslu dostalo veľkého využitia polymérnym materiálom. Tie nielenže dokážu čeliť klasickým materiálom v príslušnom obore, ale správnym kombinovaním s rôznymi plnivami ich môžu úspešne nahradiť. Polyméry sú vo verejnosti známe ako tepelné izolanty, no s novými riešeniami sa stávajú použiteľnými v otázkach efektívneho odvodu tepla. Použitím tepelne vodivej prímеси je možné mnohonásobne zvýšiť tepelnú vodivosť výsledného kompozitu. V tomto smere je najväčšia pozornosť venovaná grafitu pre jeho dobré mechanické vlastnosti a vysokú tepelnú vodivosť [3], [4]. Chladiče vyrobené z tepelne vodiveho polymérneho kompozitu prinášajú konkurenciu konvenčným chladičom v podobe nižšej hmotnosti či energeticky menej náročnej výroby. Ich ďalšou potenciálnou výhodou je tvarová flexibilita. Bez veľkých komplikácií môžu byť vyrobené do rôznych geometrických tvarov. Ďalej disponujú vysokou povrchovou emisivitou, v malých uzavretých priestoroch bez ďalšieho aktívneho chladenia tak môžu vykazovať podobné tepelné výsledky ako napríklad hliníkové chladiče. Pri pasívnom chladení môže byť teplotný spád naprieč hliníkovým telesom rádovo menší než rozdiel voči okolitému vzduchu. V takých prípadoch má zmysel vziať do úvahy potenciálne výhody materiálu s nižšou tepelnou vodivosťou.

Orientácia grafitovej prímеси spôsobuje anizotropiu tepelnej vodivosti a teplo tak nie je vedené každým smerom rovnako dobre. Tá je stanovená výrobným procesom a má vplyv na celkovú efektívnosť chladiča. Dnes je zvykom pred akoukoľvek aplikáciou vykonať simulácie vo výpočtovom softvéri a získať tak predbežný odhad, ako sa bude systém správať. Táto práca si kladie za cieľ túto anizotropiu určiť a vytvoriť tak verný výpočtový model prototypu polymérneho chladiča (obrázok 1).



Obrázok 1: Model chladiča.

V problémoch vedenia tepla sa tradične vyskytujú inverzné úlohy, akou je práve stanovenie tepelnej vodivosti – materiálovej vlastnosti. Kombinuje sa pritom vhodne navrhnutý experiment a jemu odpovedajúca numerická simulácia. Pri komplexných modeloch je vhodné zamerať sa na stacionárnu úlohu vedenia tepla a účinne tomu prispôbiť experiment, aby jeho výstupné dáta mohli byť považované za ustálený stav. Hľadanie hodnôt tepelných vodivostí sa tak dá jednoducho formulovať ako optimalizačná úloha [5].

1 Poznatky z tenzorovej analýzy

V jednoduchosti je krása. Pri matematickom popise fyzikálnych problémov o to viac oceníme, ak sa dajú zapísať stručne a zároveň zrozumiteľne. Takým nástrojom je tenzorová analýza, ktorá je veľmi silnou v problémoch, ktoré sú príliš komplikované na použitie vizuálnej predstavivosti [6]. Fyzikálne tenzor zovšeobecňuje známe pojmy skalár, vektor, štvorcová matica a prináša abstrakciu v podobe tenzorov vyšších rádov.

Mnohé fyzikálne veličiny reprezentujeme vektormi: rýchlosť, sila, tepelný tok a ďalšie. Koncept maticovej veličiny sa klasicky vysvetľuje v mechanike pri silovej rovnováhe elementu kontinua [7]. Záverom je zavedenie matice napätia ako tenzoru druhého rádu. Rovnakú maticovú formu má aj tepelná vodivosť, ktorá je nosným objektom celej práce [8].

1.1 Tenzorová notácia

V priebehu práce uvažujeme klasický kartézsky (táto kapitola je zjednotená pre trojrozmerný) súradnicový systém s ortonormálnymi bázovými vektormi $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Pri manipulácii s tenzormi používame indexovú konvenciu, kde rozlišujeme dva typy indexov [6].

- 1) **Voľný index** sa môže v zápise vyskytnúť iba raz a nadobúda hodnoty 1, 2 a 3. Napríklad $\{\hat{e}_i\}$ predstavuje množinu bázových vektorov. Ďalej rovnosťou

$$a_i = b_i$$

zhrnieme tri rovnosti do jednej bez nutnosti rozpisovania

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3.$$

Rovnako sa môže objaviť viac voľných indexov. Konkrétne, $a_{ij} = b_{ij}$ obsahuje deväť rovností.

- 2) **Sumačný index** – použitie indexu dvakrát v jednom výraze znamená sumu

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

Suma cez opakované indexy sa označuje ako Einsteinova sumačná konvencia. V kombinácii s voľným indexom tak môžeme vyjadriť napríklad sústavu lineárnych rovníc

$$A_{ij} x_j = b_i.$$

Vektor \mathbf{a} vyjadříme ako lineárnu kombináciu bázových vektorov \hat{e}_i :

$$\mathbf{a} = a_i \hat{e}_i.$$

Koeficienty a_i sú zložkami vektoru \mathbf{a} vzhľadom k báze \hat{e}_i . Štandardne chápeme vektor v stĺpcovej forme $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$. Symbol T predstavuje operáciu transpozície. Euklidovská norma [9] (dĺžka) vektoru \mathbf{a} je

$$a \equiv |\mathbf{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Normalizovaný vektor značíme

$$\hat{\mathbf{e}}_a \equiv \hat{\mathbf{a}} := \frac{\mathbf{a}}{a}.$$

Tenzor druhého rádu \mathbf{A} je reprezentovaný pomocou bázy [10] ako

$$\mathbf{A} = A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j,$$

kde A_{ij} je deväť zložiek tenzoru \mathbf{A} , ktoré chápeme v maticovej forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Ďalej $\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$ sú báзовé tenzory druhého rádu¹. Zhrnutie zápisu tenzorov je uvedené v tabuľke. 1.1.

Tabuľka 1.1: Značenie a význam tenzorov základných rádoव.

Tenzor rádu	Zápis	Význam	Názov v texte
0	a	a	skalár
1	\mathbf{a}	$a_i \hat{\mathbf{e}}_i$	vektor
2	\mathbf{A}	$A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$	tenzor

1.2 Základné operácie

Medzi dvoma vektormi definujeme vonkajší súčin [10], ktorého výsledkom je tenzor:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i b_j \hat{\mathbf{e}}_j = a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j =: C_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{C}.$$

Skalárny súčin vyjadrujeme cez súčin medzi báзовými vektormi, pre ktoré vďaka ich ortonormalite platí

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij},$$

kde δ je jednotkový tenzor s vlastnosťou

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j, \\ 0 & \text{pre } i \neq j. \end{cases}$$

Toho využívame pri skalárnom súčine tenzorov ľubovoľných rádoव:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_i \hat{\mathbf{e}}_i) \cdot (b_j \hat{\mathbf{e}}_j) = a_i b_j (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} &= (A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot (b_k \hat{\mathbf{e}}_k) = A_{ij} b_k \hat{\mathbf{e}}_i (\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_k) = A_{ij} b_k \hat{\mathbf{e}}_i \delta_{jk} = A_{ij} b_j \hat{\mathbf{e}}_i, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot (B_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_l) = A_{ij} B_{kl} \hat{\mathbf{e}}_i (\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_k) \hat{\mathbf{e}}_l = A_{ij} B_{kl} \hat{\mathbf{e}}_i \delta_{jk} \hat{\mathbf{e}}_l = A_{ij} B_{jl} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_l. \end{aligned}$$

Skalárnym súčinom vektoru \mathbf{a} s báзовým vektorom $\hat{\mathbf{e}}_i$ môžeme získať príslušnú zložku vektoru a_i :

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{a} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot a_j \hat{\mathbf{e}}_j = a_j \delta_{ij} = a_i. \quad (1.1)$$

¹ vzhľadom k ortonormalite $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ je $\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ...

Analogicky obdržíme súradnice tenzoru \mathbf{A} :

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (A_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \hat{\mathbf{e}}_l) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = A_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = A_{ij}. \quad (1.2)$$

Podobne ako je zvykom v lineárnej algebre, môžeme výskyt vektoru v skalárnom a vonkajšom súčine nahradit jeho transpozíciou, aby zápis odpovedal maticovému násobeniu:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \mathbf{a}^T \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \mathbf{b}^T$$

Tenzor môžeme vnímať ako lineárnu transformáciu medzi vektormi [9] (napríklad $\mathbf{a} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$). Preto zavádzame inverzný tenzor \mathbf{A}^{-1} v zmysle inverznej transformácie ($\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a}$) tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \delta.$$

Ďalej definujeme transpozíciu tenzoru

$$\mathbf{A}^T := A_{ji} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Vektorový diferenciálny operátor $\nabla := \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ nazývame gradient [7]. Jeho aplikovanie zvyšuje rád tenzoru o jeden:

$$\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j, \quad \nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \hat{\mathbf{e}}_k.$$

Skalárny súčin s gradientom nazývame divergencia a tá naopak jeho rád znižuje:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} \equiv \nabla^T \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \nabla^T \mathbf{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_j.$$

1.3 Zmena súradnicového systému

Vektory a tenzory sú invariantné vzhľadom k zvolenému súradnicovému systému [6], [9]. Uvažujme dve rôzne ortonormálne bázy $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ a $\{\hat{\mathbf{e}}'_i\}$. Potom musí platiť

$$\mathbf{a} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i = a'_i \hat{\mathbf{e}}'_i, \quad \mathbf{A} = A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j = A'_{ij} \hat{\mathbf{e}}'_i \hat{\mathbf{e}}'_j.$$

Predpokladajme, že poznáme zložky a_i a A_{ij} v báze $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$. Pomocou nich chceme vyjadriť a'_i a A'_{ij} v druhej báze $\{\hat{\mathbf{e}}'_i\}$. Pre zložku a'_i potom podľa (1.1) máme

$$a'_i = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \mathbf{a} = (\hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j) a_j =: L_{ij} a_j,$$

kde \mathbf{L} označuje transformačný tenzor, ktorým prejdeme od súradníc a_i k súradniciam a'_i . Podobne, s použitím (1.2) dostaneme pre A'_{ij} :

$$A'_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{e}}'_j = (\hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_k) A_{kl} (\hat{\mathbf{e}}_l \cdot \hat{\mathbf{e}}'_j) =: L_{ik} A_{kl} M_{lj}.$$

Všimneme si, že tenzor \mathbf{M} je transpozíciou tenzoru \mathbf{L} . Preto môžeme rovnicu prepísať do tvaru

$$A'_{ij} = L_{ik} A_{kl} L_{lj}^T = L_{ik} A_{kl} L_{jl}.$$

1.4 Teorém o divergencii

Pri manipulácii s integrálnymi rovnicami sa často používa integrácia per partes. Vo vyšších dimenziách sa v literatúre zvykne nazývať Gaussov teorém o divergencii. Jeho odvodenie vychádza z klasickej jednodimenzionálnej integrácie per partes pre skalárne funkcie [11]. Základne sa uvádza pre divergenciu vektorovej funkcie:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{a} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a} \, d\Gamma \quad \text{alebo} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{n}_i a_i \, d\Gamma. \quad (1.3)$$

Teorém prevádza integrál z divergencie cez oblasť Ω na integrál zo skalárneho súčinu s jednotkovým vektorom normály $\hat{\mathbf{n}}$ cez hranicu tejto oblasti Γ . Využitím tejto varianty pre vektor sa dá odvodiť verzia teorému pre skalárnu a tenzorovú funkciu:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla a \, d\Omega &= \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} a \, d\Gamma & \text{alebo} & & \int_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial x_i} \, d\Omega &= \int_{\Gamma} \hat{n}_i a \, d\Gamma, \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\Omega &= \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A} \, d\Gamma & \text{alebo} & & \int_{\Omega} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} \, d\Omega &= \int_{\Gamma} \hat{n}_i A_{ij} \, d\Gamma. \end{aligned}$$

1.5 Analýza vlastných smerov

Dôležitou vlastnosťou tenzoru sú jeho vlastné čísla a vlastné smery (vektory) [9]. Vlastný smer $\hat{\mathbf{d}}$ tenzoru \mathbf{A} je taký vektor, ktorý príslušnou transformáciou nezmení svoj smer. Matematicky to vyjadříme

$$\lambda \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{d}} \quad \text{alebo} \quad \lambda \hat{d}_i = A_{ij} \hat{d}_j,$$

kde λ je vlastné číslo prináležiacie vlastnému smeru $\hat{\mathbf{d}}$. Aby sme tieto neznáme určili, prepíšeme túto rovnicu do tvaru

$$(\lambda \delta - \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad \text{alebo} \quad (\lambda \delta_{ij} - A_{ij}) \hat{d}_j = 0_i. \quad (1.4)$$

Z lineárnej algebry vieme, že ak chceme nájsť netriviálne vlastné smery, musí byť determinant tenzoru $\mathbf{A} - \lambda \delta$ rovný nule:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \delta) = 0.$$

Riešením tejto rovnice obdržíme všeobecne rôzne komplexné vlastné čísla λ_i a následným riešením rovnice (1.4) dopočítame smery $\hat{\mathbf{d}}_i$. Ak je však tenzor symetrický ($A_{ij} = A_{ji}$), sú všetky vlastné čísla reálne a vlastné smery navzájom ortonormálne². Navyše, vlastné čísla pozitívne definitného tenzoru sú kladné ($\lambda_i > 0$) [9]. Symetrický tenzor sa dá rozložiť:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}^{-1}. \quad (1.5)$$

Tenzor $\mathbf{\Lambda}$ pozostáva z vlastných čísel a \mathbf{S} sa skladá z vlastných vektorov:

$$\Lambda_{ij} := \begin{cases} \lambda_i & \text{pre } i = j, \\ 0 & \text{pre } i \neq j, \end{cases} \quad S_{ij} := (\hat{\mathbf{d}}_j)_i$$

a vďaka ortonormalite $\{\hat{\mathbf{d}}_i\}$ navyše platí

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^T = \delta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}.$$

² z hľadiska čistej matematiky sa tvrdenie ľahko ukáže pre dve rôzne vlastné čísla. Pri násobnom vlastnom čísle je nutné pre korektnosť poznamenať, že príslušné vlastné vektory vytvárajú podpriestor, v ktorých ortonormálna báza existuje.

2 Modelovanie prenosu tepla

Podstata mnohých fyzikálnych javov sa dá vysvetliť jednoduchým princípom – hľadanie rovnováhy, príroda sa snaží uviesť systém do ustáleného stavu. Rovnako je tomu pri prenášaní tepelnej energie. K jej výmene dochádza pri existencii tepelného spádu v uvažovanom objekte alebo médiu. Smer tohto prenosu je pritom daný od objektov s vyššou teplotou k tým s nižšou. Na základe charakteru média, v ktorom výmena prebieha, kategorizujeme prenos tepla do troch skupín [12].

2.1 Kondukcia

Kondukcia charakterizuje vedenie tepla v objeme pevného či tekutého objektu. Po fyzikálnej stránke je jej príčinou aktivita atómov na mikroskopickú úroveň. Najjednoduchšia je predstava molekúl plynu, ktoré si náhodnými zrážkami predávajú energiu. U pevných látok spočíva vysvetlenie vo vibrácii atómov vyvolávajúcej vlnenie naprieč mriežkou materiálu. Po makroskopickú stránku sa kondukcia modeluje *Fourierovým zákonom* [12]

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{D}\nabla u. \quad (2.1)$$

Ten dáva do vzťahu tepelný tok $\dot{\mathbf{q}}$ s gradientom skalárneho teplotného poľa u , ktoré sú navzájom prepojené cez tenzor tepelnej vodivosti \mathbf{D} .

2.1.1 Tenzor tepelnej vodivosti

Tenzor tepelnej vodivosti \mathbf{D} je materiálová vlastnosť, ktorá môže byť závislá na teplote a na smere, v ktorom tepelný tok uvažujeme. Materiály, ktorých vodivosť vykazuje posledný typ závislosti, nazývame anizotropné. Do tejto kategórie spadá tiež polymérny materiál, z ktorého sú v práci skúmané chladiče vyrábané.

Interpretácia tenzoru vodivosti izotropného¹ materiálu je jednoduchá. Bez ohľadu na zvolený ortonormálny súradnicový systém, je tenzor v tvare²

$$\mathbf{D} = D\delta.$$

Tenzor vodivosti anizotropného materiálu môže mať v danej báze všetky zložky D_{ij} nenulové. To znamená, že tepelný tok vo zvolenom smere je kombináciou celého gradientu teploty, čo je náročnejšie na interpretáciu. Avšak pre materiály riadiace sa lineárnym Fourierovým zákonom (2.1) platí, že ich tenzor tepelnej vodivosti je symetrický a pozitívne definitný³ [13]. Z toho podľa kapitoly 1.5 o vlastných smeroch vyplýva, že existuje ortonor-

¹ tepelný tok v ľubovoľnom smere je závislý iba na gradiente teploty v tom istom smere. Koeficient tejto lineárnej závislosti sa navyše pri zmene smeru zachová.

² pre jeho vlastné čísla platí $\lambda_i = D$. Následnému riešeniu rovnice (1.4) potom vyhovuje ľubovoľná ortonormálna báza.

³ nezrovnalosť so základnými zákonmi termodynamiky je ukázaná na modelových príkladoch v článku [14].

málny súradnicový systém $\{\hat{\mathbf{d}}_i\}$, v ktorom sa dajú zložky tenzoru vodivosti reprezentovať diagonálnou maticou⁴

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Inak povedané, vždy existujú súradnicové smery, v ktorých tepelný tok závisí iba na gradiente teploty v tomto smere, čo je v súlade s bežným chápaním pojmu tepelná vodivosť. Vlastné čísla λ_i potom nazývame hlavnými vodivosťami a je zvykom radiť ich podľa veľkosti

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3.$$

2.1.2 Rovnica vedenia tepla

V ustálenom stave sa odvodí rovnica vedenia tepla z energetickej bilancie pre malý kontrolný objem Ω [8], [12], ktorá má tvar

$$\left[\begin{array}{c} \text{množstvo prichádzajúcej energie} \\ \text{cez hranicu objemu } \Gamma \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{množstvo generovanej energie} \\ \text{vo vnútri objemu } \Omega \end{array} \right] = 0.$$

Generovanú energiu stotožníme s merným tepelným výkonom Q a túto bilanciu vyjadríme matematicky:

$$-\int_{\Gamma} \hat{\mathbf{n}}^T \dot{\mathbf{q}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} Q \, d\Omega = 0.$$

Na ľavý integrál aplikujeme teorém o divergencii (1.3) a rovnicu prepíšeme do tvaru

$$\int_{\Omega} \nabla^T \dot{\mathbf{q}} \, d\Omega = \int_{\Omega} Q \, d\Omega.$$

Táto rovnosť platí pre ľubovoľne zvolený objem Ω , preto môžeme odstrániť integrály a zapísať výslednú rovnicu vedenia tepla v ustálenom stave

$$\nabla^T \dot{\mathbf{q}} = Q. \quad (2.2)$$

2.1.3 Tepelný odpor

V jednoduchých prípadoch môžeme pri riešení kondukcie predpokladať, že teplota je premenná iba pozdĺž jedného smeru. Príkladom je vedenie tepla v rovinnej doske [12], [15], ktorej dva protilahlé povrchy sú udržiavané na teplote u_a , respektíve u_b ($u_a > u_b$) podľa obrázku 2.1. Zvolíme takú ortonormálnu bázu $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$, že uvažovaný smer premennej teploty sa zhoduje s bázovým vektorom $\hat{\mathbf{e}}_1$. Do (2.2) dosadíme z Fourierovho zákona (2.1) a rozpišeme v indexovej notácii:

$$-\nabla^T (\mathbf{D} \nabla u) = Q, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = Q.$$

⁴ jedná sa o tenzor vlastných čísel $\mathbf{\Lambda}$, ktorý spočítame z rovnice (1.5) ako

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S}$$

a príslušnou transformáciou do tohto súradnicového systému je \mathbf{S} – tenzor vlastných smerov tenzoru vodivosti.

O tejto modelovej úlohe môžeme bez problémov predpokladať, že v doske nie je žiadny tepelný zdroj a jej tenzor vodivosti je na súradniciach nezávislý. V spojení so závislosťou teploty iba na súradnici x_1 postupne dostaneme

$$D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = D_{i1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = D_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0.$$

Riešenie pre teplotu u je v lineárnom tvare $u = \varphi_1 x_1 + \varphi_2$. Využitím známych teplôt na povrchu dosky dostaneme konečný tvar riešenia

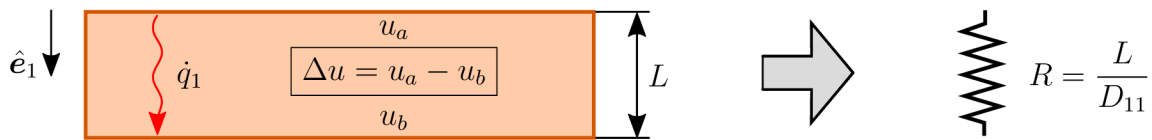
$$u = -\frac{\Delta u}{L} x_1 + u_a,$$

kde Δu je teplotný rozdiel po dĺžke L podľa obrázku 2.1. Tepelný tok \dot{q}_1 má potom podľa (2.1) tvar

$$\dot{q}_1 = D_{11} \frac{\Delta u}{L}.$$

Analogicky k elektrickým obvodom zavedieme tepelný odpor R a píšeme

$$\dot{q}_1 = \frac{\Delta u}{R}, \quad R \equiv \frac{L}{D_{11}}.$$



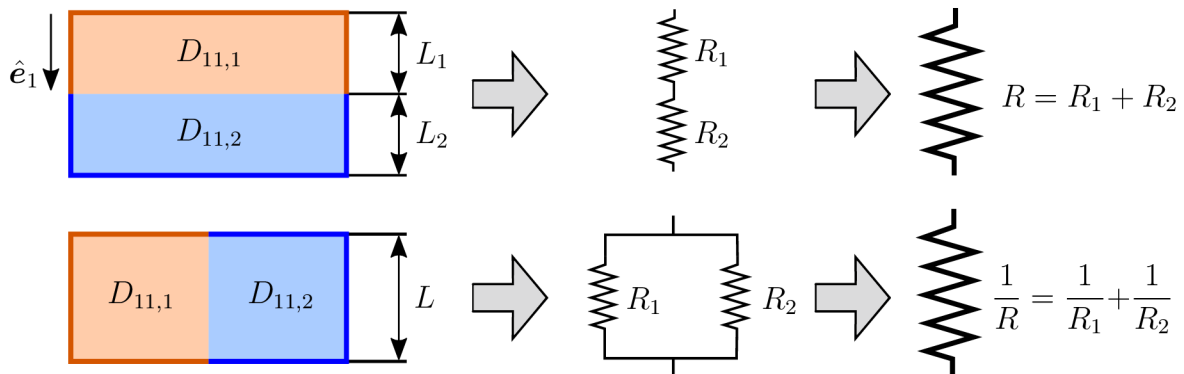
Obrázok 2.1: Kondukcia v rovinatej stene a jej abstrakcia cez tepelný odpor, $u_a > u_b$.

Náhrada vodivostí za odpory umožňuje riešiť vedenie tepla zloženými rovinnými stenami, kedy jednotlivé odpory nahradíme súhrnným tepelným odporom (obrázok 2.2). Vzťah pre jeho výpočet je analogický elektrickému odporu [12]. Pre sériovo radené steny platí

$$R = \sum_i R_i \quad (2.3)$$

a pre paralelnú konfiguráciu stien máme

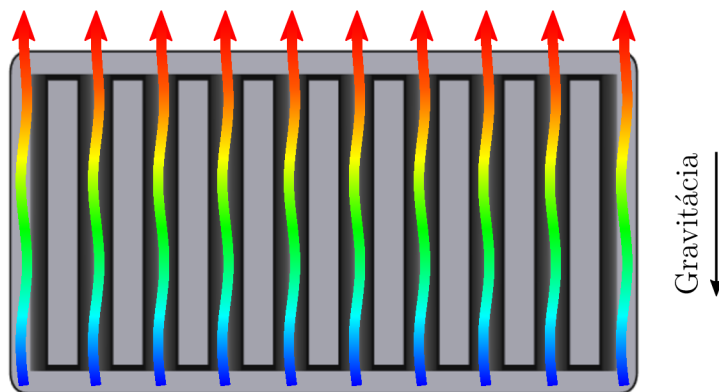
$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$



Obrázok 2.2: Skladanie tepelných odporov pre riešenie problému zložených stien – sériovo (hore), paralelne (dole).

2.2 Konvekcia

Konvekcia popisuje situáciu, v ktorej tekuté médium obteká povrch inej pevnej domény s odlišnou teplotou. Oproti kondukcii sa tepelná energia navyše prenáša makroskopickým pohybom tekutiny, ktorý sám o sebe prispieva k prenosu tepla. Pre naše potreby je dôležité prúdenie vzduchu v okolí chladiča. To môže byť vyvolané vonkajším zásahom (*nútená* konvekcia) v podobe ventilátorov, ktoré zohrávajú pri chladení elektroniky významnú úlohu [16], [17]. Ako je však známe, vzduch sa dokáže dať do pohybu aj za pomoci prirodzených fyzikálnych javov (*prirodzená* konvekcia). Tým je gravitácia, ktorá spôsobuje, že ľahší teplejší vzduch stúpa smerom nahor (obrázok 2.3). V literatúre sa tento jav nazýva vztlak (anglicky *buoyancy*).

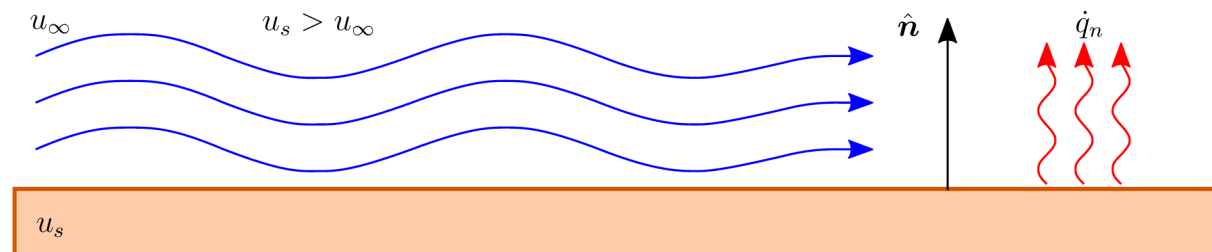


Obrázok 2.3: Prúdenie vzduchu v okolí rebier chladiča vyvolané gravitáciou. Studený vzduch sa od teplejšieho chladiča ohrieva, klesá jeho hustota a stúpa smerom hore.

Bez ohľadu na typ prúdiaceho média či zdroj jeho pohybu je odpovedajúci tepelný tok \dot{q}_n v smere normálového vektora povrchu \hat{n} určený rovnicou

$$\dot{q}_n := \hat{n}^T \dot{\mathbf{q}} = h (u_s - u_\infty),$$

známou ako *Newtonov ochladzovací zákon* [12]. Súčiniteľ prestupu tepla h závisí na geometrii povrchu, povahe prúdenia a vlastnostiach média. Kladný smer normály je von z telesa a tým pádom ochladzovanie povrchu ($u_s > u_\infty$)⁵ odpovedá kladnému tepelnému toku (obrázok 2.4).



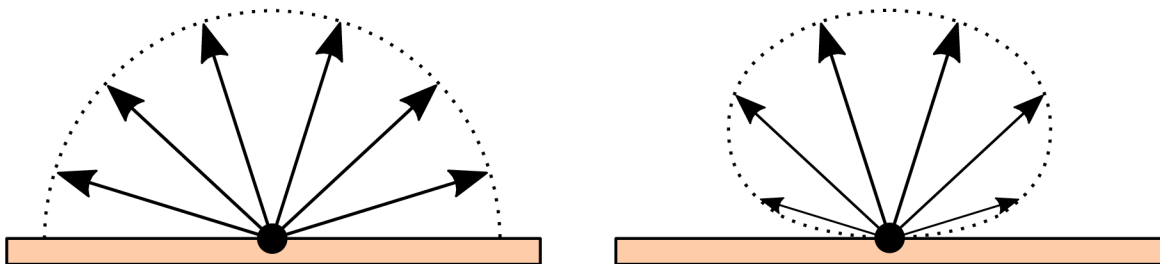
Obrázok 2.4: Znamienková konvencia tepelného toku pri konvekcii. Z fyzikálneho princípu smeruje tok od teplejšieho povrchu k chladnejšiemu médiu. Smer je súhlasný s orientáciou normály, preto je ochladzovanie povrchu spojené s kladným tokom.

⁵ teplota okolitého média u_∞ je uvažovaná v dostatočnej vzdialenosti od obmývaného telesa. V tesnej blízkosti povrchu sa vytvára medzná vrstva, v ktorej sa teplota plynule mení od povrchovej u_s po teplotu voľného prúdu u_∞ [12].

2.3 Radiácia

Radiácia narozdiel od predchádzajúcich dvoch spôsobov prenosu tepla nepotrebuje k svojej účinnosti sprostredkujúce médium. Tento mechanizmus sa vzťahuje k uvoľňovanej energii ako dôsledok oscilácií a pohybu elektrónov, z ktorých pozostáva hmota. Táto energia sa prenáša na báze elektromagnetických vln. Celková radiácia vychádzajúca z objemu hmoty je tak kombináciou lokálnych vyžarovaní naprieč jej objemom. Nás zaujíma prípad, kedy sa dá k radiácii pristúpiť ako k vlastnosti povrchu⁶. Intenzita vyžarovania je ovplyvnená dvomi zásadnými faktormi.

- 1) **Závislosť na vlnovej dĺžke žiarenia.** Každé teleso vyžaruje energiu v určitom rozsahu vlnových dĺžok. Analýza dokonalého čierneho povrchu⁷ vyústila v *Stefanov–Boltzmannov zákon* [12]. Pre ostatné objekty sa zavádza bezrozmerná veličina, ktorá vyjadruje pomer vyžarovanej energie v porovnaní s čiernym povrchom. O nej je v našom prípade postačujúce predpokladať nezávislosť na vlnovej dĺžke.
- 2) **Závislosť na smere.** Skutočný povrch nevyžaruje do každého smeru rovnaké množstvo energie (obrázok 2.5). Väčšinu je však možné aproximovať tzv. *difúznym žiaričom*, ktorého intenzita žiarenia je na smere nezávislá. Za tohto predpokladu je možné dospieť k výsledkom, ktoré numerickým modelom umožňujú s radiáciou vhodne počítať. V opačnom prípade je nutné túto závislosť experimentálne skúmať [18].



Obrázok 2.5: Smerové rozloženie intenzity radičného žiarenia. Difúzny žiarič – nezávislý na smere (vľavo), skutočný povrch – závislý na smere (vpravo) [12].

Radiačné tepelné toky sa rozdeľujú na viac častí podľa ich pôvodu. V literatúre dostávajú vlastný názov a značenie, no fyzikálne predstavujú tepelný tok \dot{q}_n . *Vyžarovaný výkon* E , ktorý je povrch telesa schopný sám vyžiariť, je daný vzťahom [12]

$$E = \varepsilon \sigma u_s^4,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ je *Stefanova–Boltzmannova* konštanta a *emisivita* ε je materiálová vlastnosť povrchu udávajúca efektivitu vyžarovania v porovnaní s ideálnym čiernym povrchom ($0 \leq \varepsilon \leq 1$). Emisivita sa dá navyše ovplyvniť povrchovou úpravou.

Celkovú radičnú energiu dopadajúcu na povrch z ostatných objektov zahrňujeme do *iradiácie* G . *Absorptancia* povrchu α ($0 \leq \alpha \leq 1$) určuje absorbované množstvo iradiácie G_{abs} , ktoré je dané predpisom

$$G_{abs} = \alpha G.$$

⁶ vo väčšine pevných a kvapalných látok je vyžarovanie vnútorných molekúl pohlcované okolitými molekulami [12]. Prístup k plynom je omnoho zložitejší [19].

⁷ o čiernom povrchu sa predpokladá [12], že

- pohlcuje všetku prichádzajúcu radiáciu z okolia nezávisle na vlnovej dĺžke a smere,
- žiadne teleso nemôže vyžarovať viac energie pri rovnakej teplote a vlnovej dĺžke,
- intenzita žiarenia je v každom smere rovnaká.

Iradiácia môže byť okrem pohltienia navyše odrazená a prepustená. V prípade chladičov sa s priepustným materiálom nestretáme, všetka iradiácia sa buď pohltí alebo odrazí. V tomto duchu zavádzame *reflektanciu* ρ a pre nepriepustné materiály platí

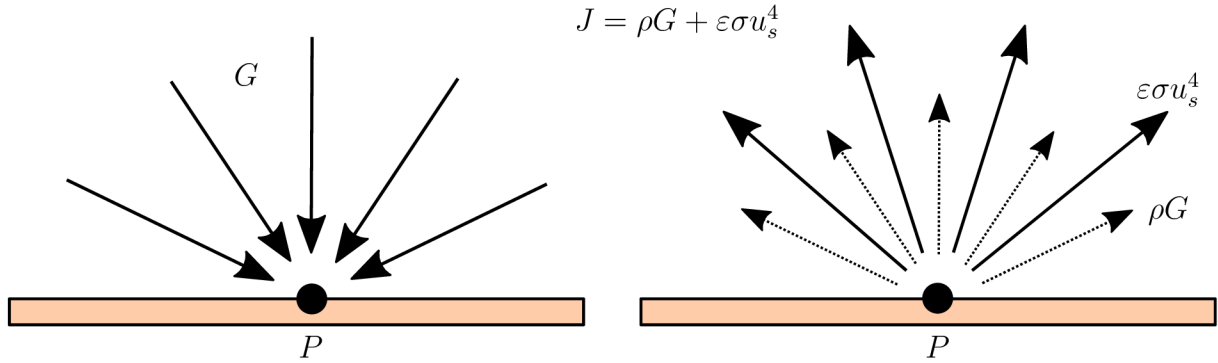
$$\rho = 1 - \alpha.$$

Celkové množstvo radiácie vychádzajúcej z telesa nazveme *radiančnosť* J a kombináciou predchádzajúcich odsekov dostaneme

$$J = E + \rho G.$$

Schematické znázornenie všetkých tepelných tokov vplyvom radiácie je zobrazené na obrázku 2.6. V tejto chvíli môžeme vyjadriť výsledný tepelný tok v smere normály povrchu vyvolaný radiáciou ako rozdiel odchádzajúcej a prichádzajúcej radiácie:

$$\dot{q}_n = J - G = E + \rho G - G = \varepsilon \sigma u_s^4 - \alpha G. \quad (2.4)$$



Obrázok 2.6: Prichádzajúca radiácia na povrch (vľavo), odchádzajúca radiácia z povrchu (vpravo) [20].

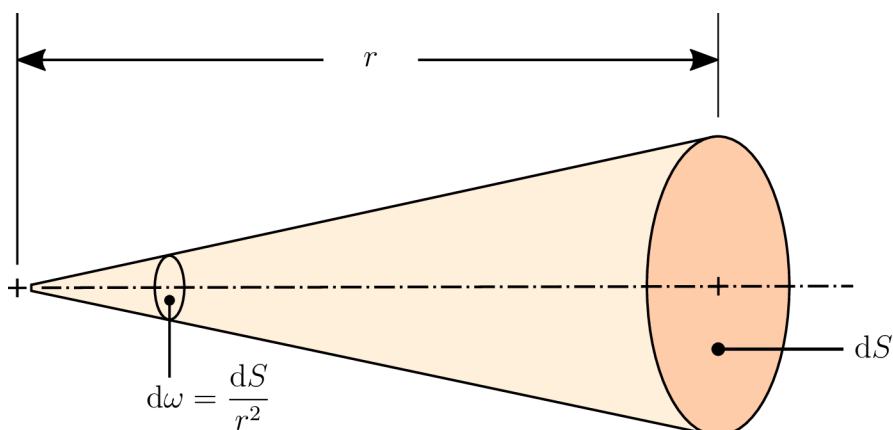
Pre verné modelovanie radiácie je potrebné uvažovať interakciu všetkých povrchových plôch modelovanej sústavy. Situácia sa zjednodušuje v prípade plôch, ktoré sú vystavené iba okolitému prostrediu nezahrnutému v modeli. Vtedy sa predpokladá interakcia so vzdialeným izotermálnym čiernym povrchom s teplotou u_{amb} , akým môžu byť napríklad steny miestnosti. Pre okoliu vystavenú plochu modelu navyše platí

$$\alpha = \varepsilon.$$

Jedná sa o jednu z foriem Kirchhoffovho zákona pre telesá v tepelnej rovnováhe s okolím [15]. Po dosadení do (2.4) a využití toho, že dopadajúca iradiácia pochádza z čierneho povrchu ($G = \sigma u_{amb}^4$), je radiálny tepelný tok touto plochou v tvare

$$\dot{q}_n = \varepsilon \sigma (u_s^4 - u_{amb}^4). \quad (2.5)$$

V konfiguráciách, kde sa vzájomné radičné pôsobenie povrchov modelu nezanedbáva, zohráva dôležitú úlohu ich vzájomná orientácia medzi sebou. Na nej závisí, aké množstvo radičnej energie obdrží daná plocha od druhej. Pre popis problému vzájomného tepelného žiarenia sa využíva analýza v sférických súradniciach. Zavádzame *priestorový uhol* ω ako *veľkosť sférickej plochy, ktorú vytvorí projekcia sledovaného objektu na jednotkovú sféru*



Obrázok 2.7: Diferenciál priestorového uhlu [12].

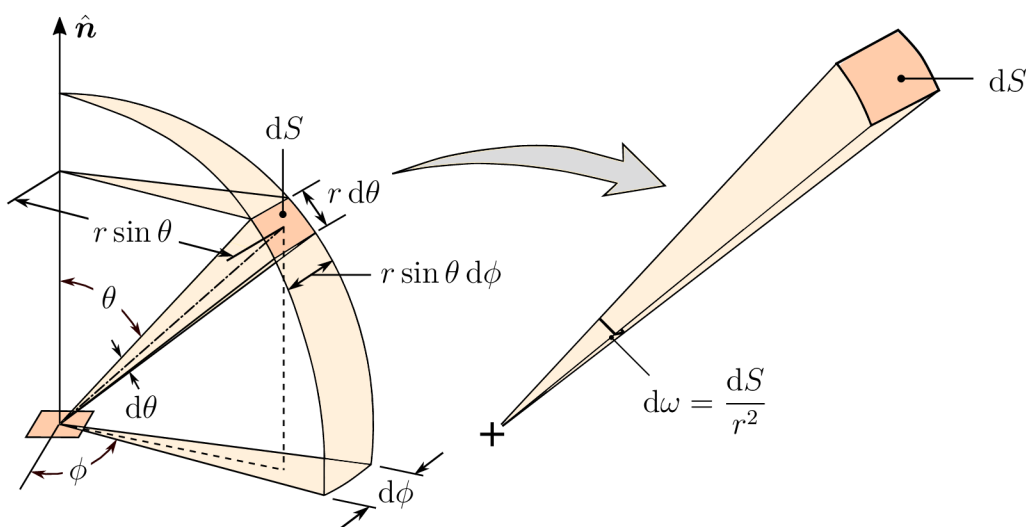
so stredom vo vzťažnom bode, ku ktorému tento uhol určujeme (obrázok 2.7). Pre diferenciál priestorového uhlu platí [12]

$$d\omega = \frac{dS}{r^2}, \quad (2.6)$$

kde dS je veľkosť infinitezimálnej plochy vo vzdialenosti r od vzťažného bodu. Vzťah tohto diferenciálu vzhľadom k sférickým súradniciam (r, θ, ϕ) je

$$d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \quad (2.7)$$

Jeho odvodenie je čisto geometrická záležitosť a dá sa vykonať⁸ pomocou obrázku 2.8.



Obrázok 2.8: Vzťah diferenciálu priestorového uhlu k sférickým súradniciam [12].

V tejto chvíli môžeme formálne zaviesť *radiačnú intenzitu* I . O nej dopredu predpokladáme nezávislosť na vlnovej dĺžke žiarenia a smere, v ktorom ju od skúmaného bodu povrchu uvažujeme. Definujeme ju ako *množstvo vyžiarenej radiačnej energie v smere*

⁸ infinitezimálnu plochu dS nahradíme obdĺžnikom s veľkosťami strán $r \, d\theta$ a $r \sin \theta \, d\phi$. Tieto veľkosti sa dajú stanoviť známym vzťahom z rovinatej geometrie "dĺžka oblúku = polomer \times uhol". Na záver stačí plochu nahradeného obdĺžniku dosadiť do rovnice (2.6):

$$d\omega = \frac{r \, d\theta \, r \sin \theta \, d\phi}{r^2} = \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

(θ, ϕ) na jednotku žiariacej plochy normálovej k tomuto smeru a na jednotku priestorového uhlu v tomto smere [12].

Matematicky radiačnú intenzitu zapíšeme⁹

$$I = \frac{dq_{(\theta,\phi)}}{dS \cos \theta d\omega}. \quad (2.8)$$

Túto rovnicu prepíšeme pre tepelný výkon

$$dq_{(\theta,\phi)} = I dS \cos \theta d\omega, \quad (2.9)$$

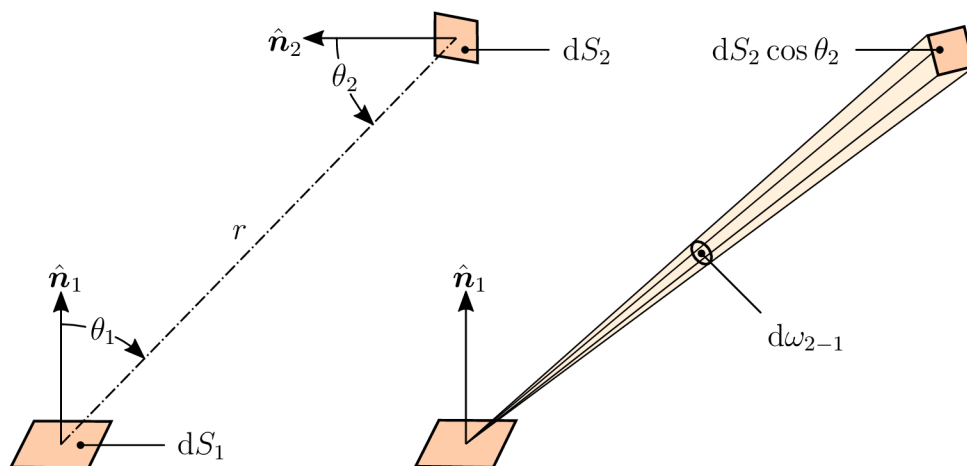
ktorý následne vyjadríme na jednotku plochy a po dosadení z rovnice (2.7) dostaneme

$$d\dot{q}_{(\theta,\phi)} = I \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi.$$

Tento výraz zintegrujeme cez hemisféru a získame vzťah medzi radiačným energetickým tokom E (G, J) a jeho príslušnou intenzitou I_E (I_G, I_J)

$$E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\dot{q}_{(\theta,\phi)} = I_E \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \pi I_E \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = \pi I_E. \quad (2.10)$$

K popisu vzájomnej radiačnej interakcie dvoch povrchov zavádzame *uhlový súčiniteľ* F ako časť radiácie odchádzajúcej z prvého povrchu, ktorá je zachytená druhým [12]. K odvodeniu vzťahu pre jeho výpočet vychádzame z obrázku 2.9. Podľa (2.9) vyjadríme



Obrázok 2.9: Uhlový súčiniteľ medzi dvoma infinitezimálnymi plochami [12].

množstvo vychádzajúcej radiácie $dq_{1 \rightarrow 2}$ z dS_1 zachytenou dS_2

$$dq_{1 \rightarrow 2} = I_{J,1} \cos \theta_1 dS_1 d\omega_{2-1},$$

kde $I_{J,1}$ je intenzita radiácie z plochy dS_1 vplyvom vlastnej emisivity a odrazu a $d\omega_{2-1}$ je vytknutý priestorový uhol plochou dS_2 pri pohľade z dS_1 . Dosadením za $d\omega_{2-1}$ z rovnice (2.6) a za $I_{J,1}$ z výsledku (2.10) dostávame

$$dq_{1 \rightarrow 2} = J_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2.$$

⁹ na prvý pohľad tu máme nezrovnalosť definície s predpokladom nezávislosti na smere. Obvykle sa najprv zavádza intenzita žiarenia a jej nezávislosť na smere sa prehlási až v priebehu odvodzovania výsledných rovníc. Prístup uvedený v tejto práci je taktiež správny, smerová závislosť uvedená v definícii má v našom prípade čisto geometrický význam. Ten súvisí s tým, ako sa vyžiarená radiácia v danom smere javí povrchu, na ktorý dopadne. Z tohto pohľadu je smerová závislosť v rovnici (2.8) formálne uvedená iba pri tepelnom výkone.

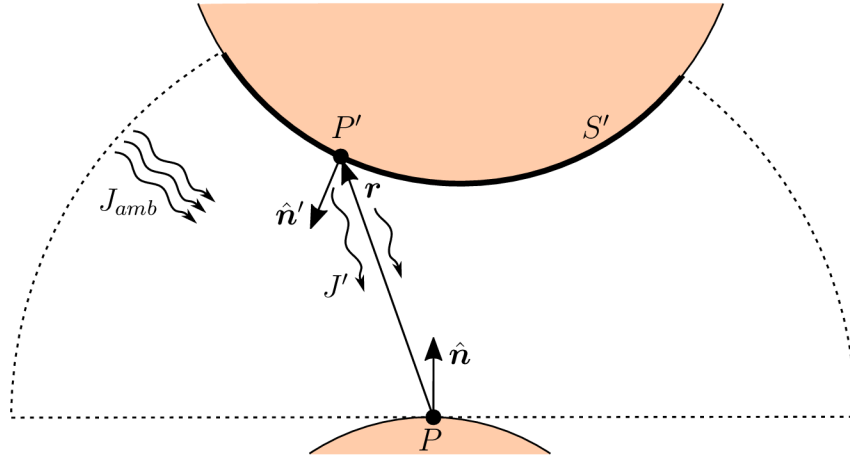
Pre celkový radiačný výkon máme

$$q_{1 \rightarrow 2} = \int_{S_1} \int_{S_2} J_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2. \quad (2.11)$$

Uhlový súčiniteľ F_{12} vyjadríme podľa jeho definície ako

$$F_{12} = \frac{q_{1 \rightarrow 2}}{S_1 J_1} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2. \quad (2.12)$$

V praktických numerických výpočtoch je povrchová geometria rozdelená na mnoho malých plôch, každú z nich pomyselne nahradíme jej stredovým bodom P (obrázok 2.10). Zaujímá nás jeho interakcia so zvyškom geometrie, ktorá je z bodu P viditeľná. Za týmto



Obrázok 2.10: Schéma pre výpočet celkovej iradiácie. S' je povrch modelovanej geometrie viditeľný z bodu P [20].

účelom upravíme vzťahy (2.11), (2.12).

- V rovnici (2.11) odpovedá skúmanej ploche reprezentovanej bodom P index 2. Rovnicu prevedieme na tepelný tok

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} J_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2 \quad (2.13)$$

a predpokladáme, že plocha S_2 je dostatočne malá, aby sme mohli $\cos \theta_2$ prehlásiť za konštantný. Potom dostaneme

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = \int_{S_1} J_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dS_1. \quad (2.14)$$

- Naopak, v rovnici (2.12) odpovedá bodu P index 1. Rovnakou úvahou o malej ploche S_1 pridáme k tvaru

$$F_{12} = \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dS_2. \quad (2.15)$$

S použitím týchto výsledkov prejdeme k rovnici (2.4) a vyjadríme v nej iradiáciu G . Tú rozložíme na časť iradiácie prichádzajúcej z povrchov geometrie modelu G_m a na iradiáciu zo vzdialeného okolia G_{amb} . Opäť využijeme rovnosť $\alpha = \varepsilon$ a dostaneme

$$\dot{q}_{n,rad} = \varepsilon (\sigma u_s^4 - G_m - G_{amb}). \quad (2.16)$$

Iradiáciu G_{amb} spočítame na základe uhlového súčiniteľa okolia

$$G_{amb} = F_{amb} \sigma u_{amb}^4. \quad (2.17)$$

Konečné vzťahy pre G_m a F_{amb} zjednotíme a zapíšeme ich v elegantnejšej vektorovej¹⁰ forme, v ktorej použijeme značenie podľa obrázku 2.10.:

$$G_m = \int_{S'} \frac{(-\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{r})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})}{\pi |\mathbf{r}|^4} J' dS', \quad (2.18)$$

$$F_{amb} = 1 - F' = 1 - \int_{S'} \frac{(-\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{r})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})}{\pi |\mathbf{r}|^4} dS'. \quad (2.19)$$

Radiačnosť J' je však závislá na radiačnosti J a výsledné rovnice popisujúce celkový tepelný tok radiáciou sú implicitné. V tomto vidíme, že problém vzájomnej radiácie povrchov je výpočtovo omnoho náročnejší. Vždy je vhodné si premyslieť, či je prípadná chyba náhradou za radiáciu do vzdialeného okolia prijateľná.

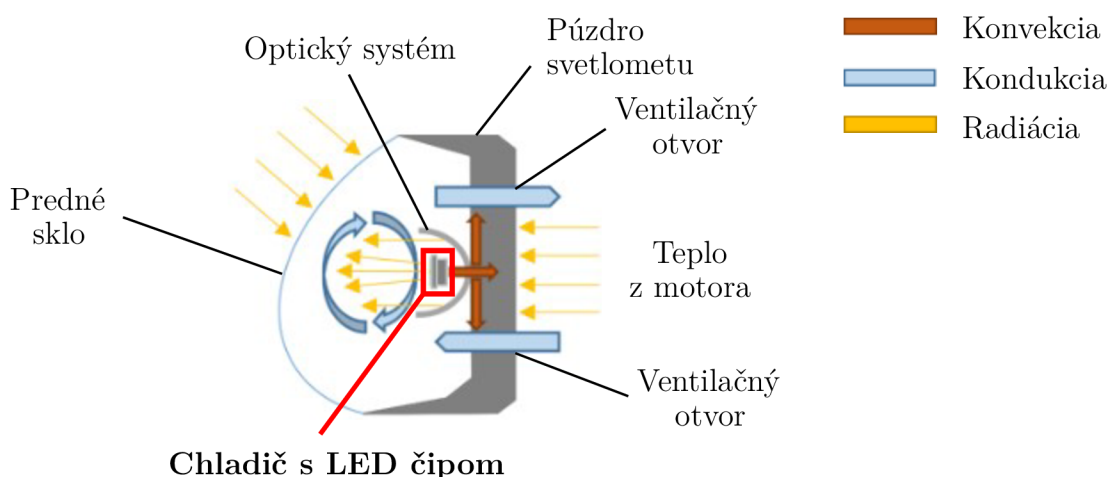
¹⁰ kosínusy uhlov θ_1 a θ_2 vystupujúce v rovniciach (2.14), (2.15) môžeme nahradiť skalárnym súčinom normálových vektorov s jednotkovým vektorom v smere posunutia \mathbf{r} :

$$\cos \theta_1 = \frac{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|}, \quad \cos \theta_2 = \frac{(-\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|}.$$

3 Skúmaný prototyp polymérneho chladiča

S chladením elektroniky sa dnes bežný jedinec stretáva každodenne. Moderné mobilné telefóny môžu svojou činnosťou a výkonom konkurovať stolným počítačom bez toho, aby nás pri manipulácii s nimi páčila dlaň. Za výkonnými výpočtovými stanicami stoja predovšetkým malé čipy, ktoré sú v priebehu sekundy schopné vykonať rádovo miliardy inštrukcií. Ich potenciál by bez vhodne navrhnutého chladiaceho systému ostal nevyužitý a bez zabudovaných bezpečnostných opatrení by rýchlo došlo k ich nenávratnému poškodeniu [21], [22].

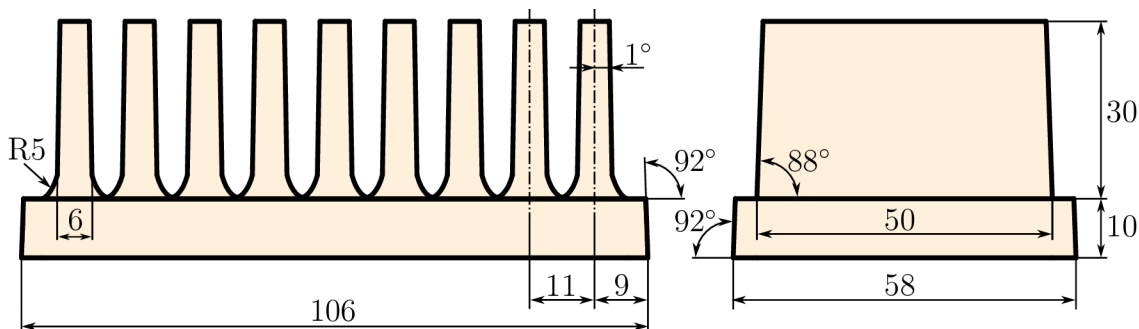
Chladiče, ktorými sa diplomová práca zaoberá, sú prototypmi chladičov určených k chladeniu LED čipov vo vnútri automobilového svetlometu. Životnosť týchto čipov od určitej teploty začne klesať [23], čomu je nutné predísť odvodom generovaného tepla do okolia. Schematické zobrazenie svetlometu spolu s konkrétnymi realizáciami výmeny tepla je ilustrované na obrázku 3.1. Na jednej strane máme teplo, ktoré prichádza vo forme žiarenia zo slnka alebo motoru automobilu. Na strane druhej dochádza k výmene v rámci svetlometu v podobe vedenia tepla v kostre konštrukcie alebo v samotnom vzduchu. Na záver sa vďaka vhodne navrhnutej geometrii chladiča využíva prúdenie okolitého vzduchu k zvýšeniu odvedeného množstva tepla v blízkosti chladeného čipu.



Obrázok 3.1: Schéma automobilového svetlometu [24].

3.1 Geometria

Zvolenou geometriou (obrázok 3.2) pre stanovenie anizotropie tepelnej vodivosti je chladič s deviatimi rebami s rozstupom 11 mm. Základňa je o veľkosti 106 mm do dĺžky, 58 mm do šírky a 10 mm do výšky. Každé rebro je 30 mm vysoké, 50 mm dlhé a 6 mm široké. Geometria navyše zahŕňa technologické rádiusy a skosenia umožňujúce výber chladiča z formy počas výroby. Tie spôsobujú premennú veľkosť medzery medzi jednotlivými rebami.



Obrázok 3.2: Geometria vybraného chladiča pre stanovenie anizotropie tepelnej vodivosti. Dĺžkové rozmery sú uvedené v milimetroch.

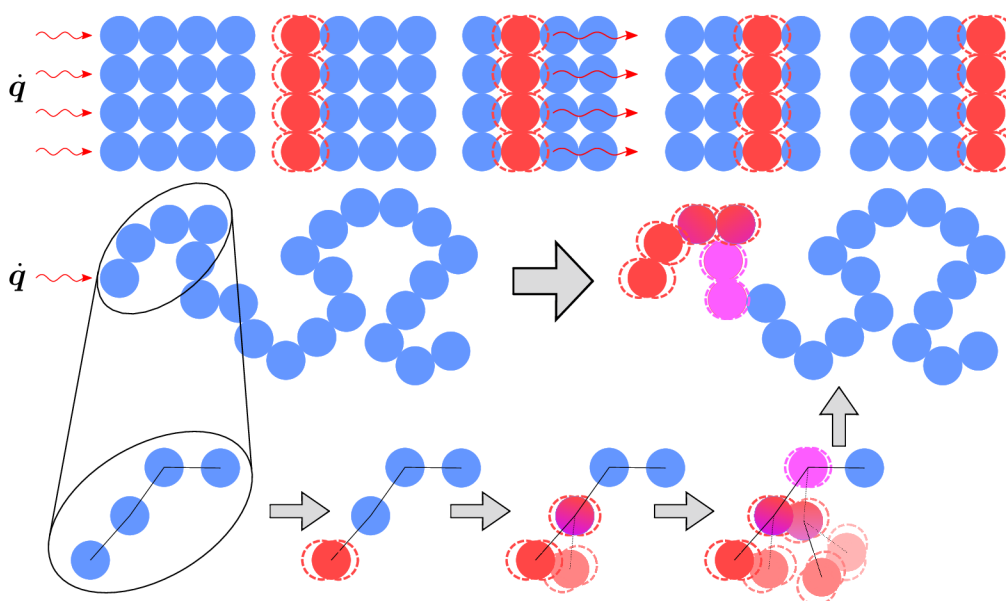
3.2 Výroba chladiča a štúdium anizotropie

Použitým materiálom pre výrobu je kompozit, technicky označený ako TT-6600-5001 EC, od spoločnosti Avient (pôvodne PolyOne). Základnú maticiu tvorí termoplast polyamid 66, ktorá je obohatená tepelne vodivou prísadou – grafitovými vločkami. Chladič je vyrábaný vstrekaním taveniny do pripravenej formy. Ohriaty materiál do tekutého stavu sa vstrekuje do formy a následne sa čaká na jeho ochladnutie do pevného stavu [25].

Zdrojom výraznej anizotropie sú práve grafitové vločky. Hlavné vodivosti grafitu sú vo vzťahu

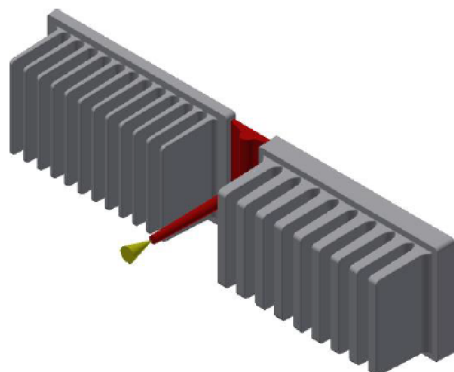
$$\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3,$$

ktorý vychádza z jeho kryštalickej štruktúry. Tá sa skladá z rovnobežných rovín, v rámci ktorých sú väzby silnejšie než medzi jednotlivými rovinami. Vlny reprezentujúce termálnu energiu sa šíria rýchlejšie práve v rovine so silnými väzbami. Hodnoty týchto vodivostí závisia na konkrétnej forme grafitu. Napríklad pre špeciálny pyrolytický grafit sa uvádza $\lambda_1 = \lambda_2 = 400 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $\lambda_3 = 2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ [26]. Pre porovnanie, tepelná vodivosť polyamidu 66 sa pohybuje v rozsahu 0,2 až 0,5 $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ [25]. Takto všeobecne nízka tepelná vodivosť polymérov je dôsledkom náhodného usporiadania polymérových reťazcov (obrázok 3.3).



Obrázok 3.3: Šírenie termálnej energie naprieč materiálom s pravidelnou kryštalickou mriežkou (hore) a amorfným polymérnym materiálom (dole) [27].

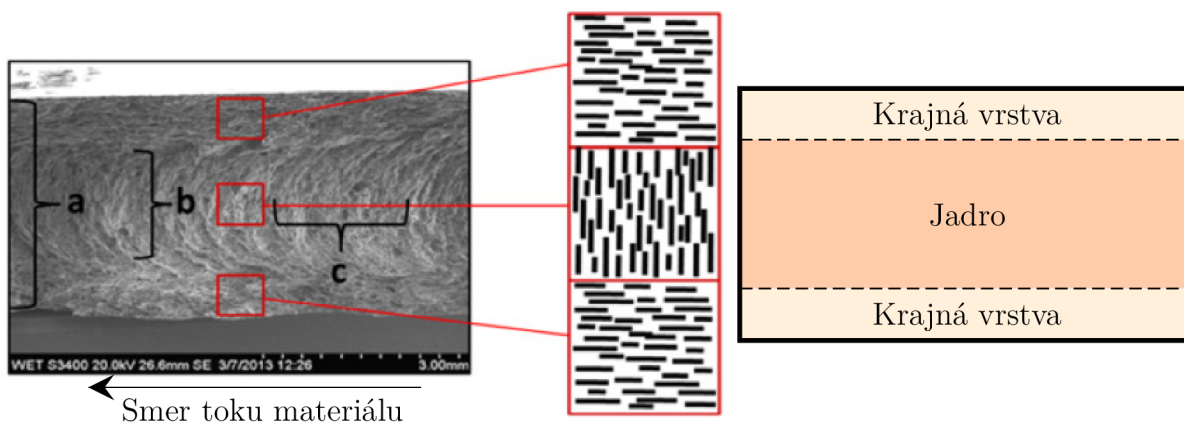
Dôležitým faktorom, ktorý ovplyvňuje výslednú orientáciu grafitových vločiek a tým aj hlavné smery tenzoru vodivosti, je zvolená vtoková sústava. Jej vplyv na celkovú chladiacu efektivitu chladiča je bližšie skúmaný v [28]. Pre tvorbu modelu v rámci tejto práce je zvolený vtok pozdĺž kratšej strany základne chladiča (obrázok 3.4) z dôvodu jednoduchšieho modelovania výslednej vnútornej štruktúry.



Obrázok 3.4: Vtok taveniny do kratšej strany základne chladiča [24].

V rámci štúdie polymérnych kompozitov s vysokou tepelnou vodivosťou skúmali Grundler a kolektív (štúdia bude ďalej označovaná skratkou GRaK) polyamid 6 s grafitovou prímiesou [29]. Nejedná sa síce o totožný materiál, z ktorého sú chladiče vyrobené, no charakterom ide o rovnaký typ materiálu, a preto môžeme ich výsledky čiastočne aplikovať. Vo výskume použili testovaciu vzorku o hrúbke 2 mm vyrobenú injekčným vstrekaním. Zábery z mikroskopu na zlomenej vzorke ukazujú orientáciu grafitových vločiek (obrázok 3.5). Štruktúra môže byť pomyselne rozdelená na jadro a krajnú vrstvu. V jadre sú vločky uložené do parabolického tvaru kolmo na smer toku materiálu počas výroby. Naopak, v krajnej vrstve tvoria husté rovnobežné čiary v smere toku. Jadro malo hrúbku 1 mm a krajné vrstvy 0,5 mm. V súvislosti s orientáciou vločiek zavedieme pojmy dobrá a zlá vodivosť:

- dobrá – v rovnobežnom smere s orientáciou vločiek,
- zlá – v kolmom smere na orientáciu vločiek.



Obrázok 3.5: Vnútorná štruktúra testovacej vzorky zo štúdie GRaK [29].

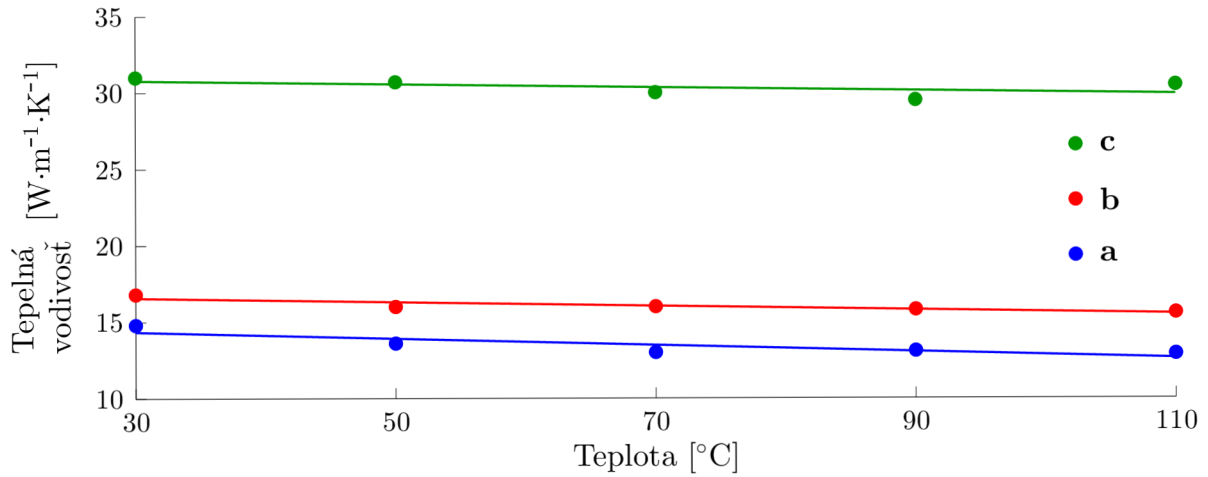
V ďalšej časti merali tepelnú vodivosť laserovou zábleskovou metódou. Meranie vykonali v troch rôznych konfiguráciach:

- celá vzorka, kolmo na tečenie (v obrázku 3.5 označené ako **a**),
- zbrúsená vzorka¹, kolmo na tečenie – dobrá vodivosť v jadre (**b**),
- zbrúsená vzorka, v smere tečenia – zlá vodivosť v jadre (**c**).

Hodnoty tepelných vodivostí v závislosti na teplote sú uvedené v obrázku 3.6 aj s príslušným preloženým lineárnym trendom. Vodivosti v krajnej vrstve neboli v danej štúdií skúmané. O tých je logické predpokladať, že sú rozdielne oproti tým v jadre, pretože

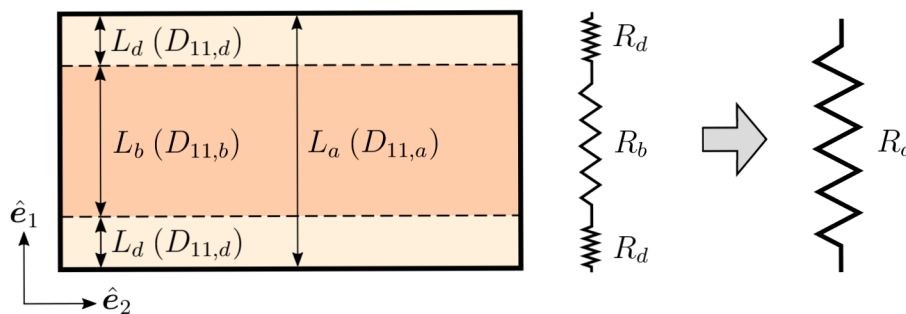
- vločky v jadre tvoria parabolickú štruktúru,
- vločky v krajnej vrstve sú sformované do hustých rovnobežných čiar.

Z dôvodu, že tieto rozdielne vrstvy rozoberáme z makroskopického pohľadu, ich odlišný vnútorný charakter uloženia vločiek by mal viesť k rozdielnym dobrým a zlým tepelným vodivostiam.



Obrázok 3.6: Namerané tepelné vodivosti zo štúdie GRaK [29]. Označenie údajov **a – c** odpovedá úsekom vnútornej štruktúry z predchádzajúceho obrázku.

Z dostupných údajov však môžeme dopočítať zlú vodivosť v krajnej vrstve – **d** pomocou sériových tepelných odporov. Schéma pre výpočet je znázornená na obrázku 3.7. Dĺžku meraného (počítaného) úseku predstavuje L_x a tepelnú vodivosť v odpovedajúcom úseku $D_{11,x}$.



Obrázok 3.7: Schéma pre výpočet zlej vodivosti v krajnej vrstve.

¹ po meraní na celej pôvodnej vzorke bola vzorka z oboch strán zbrúsená na 1 mm tak, aby boli odstránené krajné vrstvy. Tým sa umožnilo merať tepelnú vodivosť priamo v jadre materiálu.

Tepelné odpory jednotlivých úsekov sú vzájomne prepojené podľa rovnice (2.3), ktorá má tvar

$$R_a = R_b + 2R_d.$$

Jediným neznámym odporom je R_d , ktorý vypočítame z rovníc

$$R_d = \frac{R_a - R_b}{2}, \quad R_a = \frac{L_a}{D_{11,a}}, \quad R_b = \frac{L_b}{D_{11,b}}.$$

Na záver dopočítame zlú vodivosť v krajnej vrstve z rovnice

$$D_{11,d} = \frac{L_d}{R_d}.$$

Výpočet vykonáme pre teplotu 70 °C, hodnoty vodivostí $D_{11,a}$ a $D_{11,b}$ odčítame z obrázku 3.6. Všetky hodnoty veličín z priebehu výpočtu sú uvedené v tabuľke 3.1. Vypočítaná zlá vodivosť v krajnej vrstve činí 8,3 W·m⁻¹·K⁻¹, ktorá je takmer dvakrát menšia než zlá vodivosť v jadre ($D_{11,c} = 16$ W·m⁻¹·K⁻¹). To nás vedie k záveru, že pri makroskopickom modelovaní materiálu je nutné uvážiť rozdielne hlavné vodivosti podľa toho, či sa nachádzame v jadre alebo krajnej vrstve.

Tabuľka 3.1: Hodnoty veličín z výpočtu zlej vodivosti v krajnej vrstve ($D_{11,d}$) pre 70 °C.

x	L_x [mm]	R_x [W ⁻¹ ·m ² ·K]	$D_{11,x}$ [W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]
a	2	1,5·10 ⁻⁴	13
b	1	3,3·10 ⁻⁵	30
d	0,5	6·10 ⁻⁵	8,3

K výpočtu dobrej vodivosti v krajnej vrstve nie je dostatočné množstvo dát. No ako je spomenuté vyššie, je logické predpokladať, že je rozdielna oproti dobrej vodivosti v jadre. Ich vzťah môžeme nahrubo odhadnúť cez zavedenie referenčnej vodivosti λ [8]. Tá sa zavádza pri transformácii rovnice vedenia tepla anizotropného materiálu na rovnicu izotropnú. Vzťah pre referenčnú vodivosť má tvar

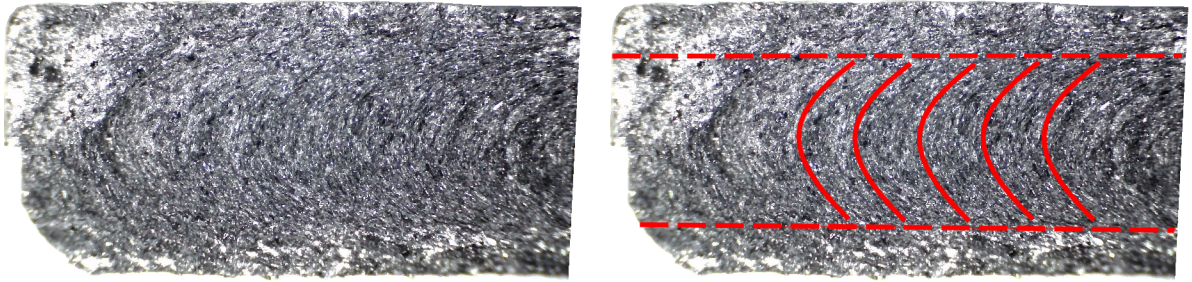
$$\lambda = \sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}. \quad (3.1)$$

Pri predpoklade, že sa referenčná vodivosť v jadre rovná tej v krajnej vrstve², je z tejto rovnice možné dopočítať hodnotu dobrej vodivosti v krajnej vrstve.

Tak podrobný výskum, aký vykonali v GRaK, k materiálu vyrobených chladičov nie je k dispozícii. Jeho výrobcovia udávajú, že dobrá vodivosť sa pohybuje okolo 20 W·m⁻¹·K⁻¹ a zlá 5 W·m⁻¹·K⁻¹. Bližšie informácie o tom, v akých konfiguráciách boli tieto vodivosti stanovené, nie sú dostupné.

Smerodajnou informáciou k modelovaniu vnútornej štruktúry chladiča je lomová analýza na samotnom chladiči. Tá bola vykonaná za účelom overenia podobnosti so štúdiou GRaK. Na obrázku 3.8 vidíme vnútornú štruktúru zlomeného rebra chladiča, ktoré môžeme považovať za skúmanú tenkú vzorku. Všimneme si totožný charakter usporiadania grafitovej prímеси ako v štúdiu GRaK. Na tomto základe aplikujeme závery zo štúdie pri modelovaní chladiča, pričom veľkosti jadra a krajných vrstiev určíme z lomovej analýzy.

² predpoklad vyslovujeme na základe úvahy, že transformácia na izotropnú rovnicu nezávisí na makroskopickej orientácii grafitových vločiek.



← Smer toku materiálu

Obrázok 3.8: Vnútorná štruktúra po výške odlomeného rebra skúmaného chladiča (vľavo) spolu s naznačenou orientáciou prímеси (vpravo) v zhode s výsledkami zo štúdie GRaK.

4 Experimentálne meranie

V Laboratóriu prenosu tepla a prúdenia FSI VUT boli vykonané merania za účelom porovnania chladiacej efektivity klasických hliníkových a nových polymérnych chladičov. Výskum bol súčasťou dizertačnej práce Martina Zachara [24]. Výstupné dáta tvoria podklad pre navrhnutý výpočtový postup stanovenia anizotropie tepelnej vodivosti uvedený v kapitole 5.

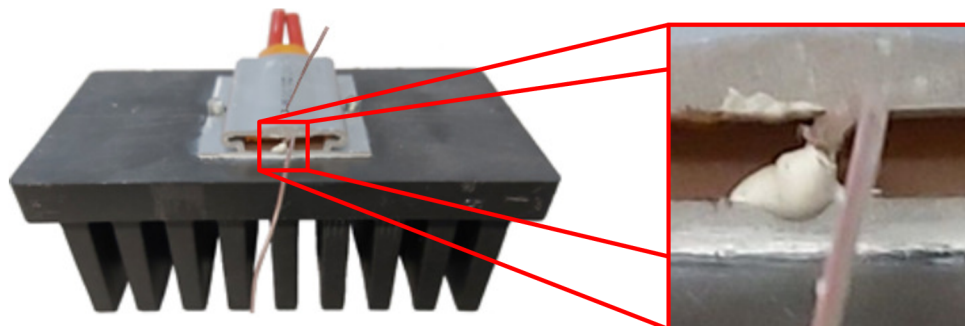
4.1 Popis experimentu

Chladič bol umiestnený do vnútra meracieho boxu v termostatickej komore. Tá udržovala okolitý vzduch na predom zvolenej teplote. Experimenty boli vykonané pri dvoch teplotách: 20 a 50 °C. So zámerom minimalizovania vedľajšieho odvodu tepla do okolia bol chladič upevnený iba dotykom štyroch skrutiek podľa obrázku 4.1. Vďaka tomu môžeme v kapitole 6 umiestniť model chladiča voľne do priestoru. Dvere boxu mali sklom zakrytý otvor, pred ktorým bola umiestnená termovízna kamera.



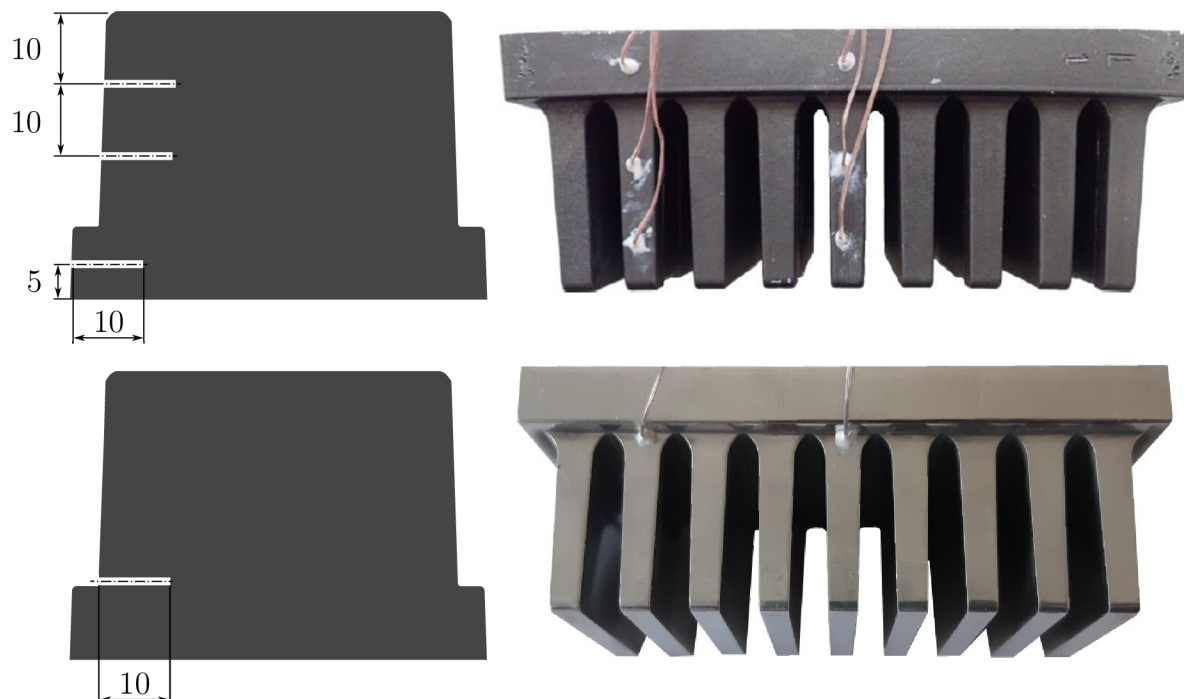
Obrázok 4.1: Umiestnenie chladiča v meracom boxe (vľavo) a boxu v termostatickej komore (vpravo).

Pre simulovanie chladenej elektroniky bolo použité ohrievacie teleso s hliníkovým telom napojené na elektrický zdroj. Umiestnené teleso na spodnú stranu základne chladiča zaberalo plochu s rozmermi 35x40 mm². Nanesenie termálnej pasty na plochu kontaktu telesa s chladičom zvýšilo množstvo tepelnej energie odvedenej zo zdroja do chladiča. Výkon zdroja bol regulačným programom udržovaný na hodnote 15 W. Zabudované termočlánky zaznamenávali teplotu v blízkosti tepelného zdroja. Jeden bol prilepený na kraj hliníkového tela, druhý bol navítaný do spodnej plôšky telesa. Ich zabudovanie spolu s celkovým umiestnením na chladiči je zachytené na obrázku 4.2.



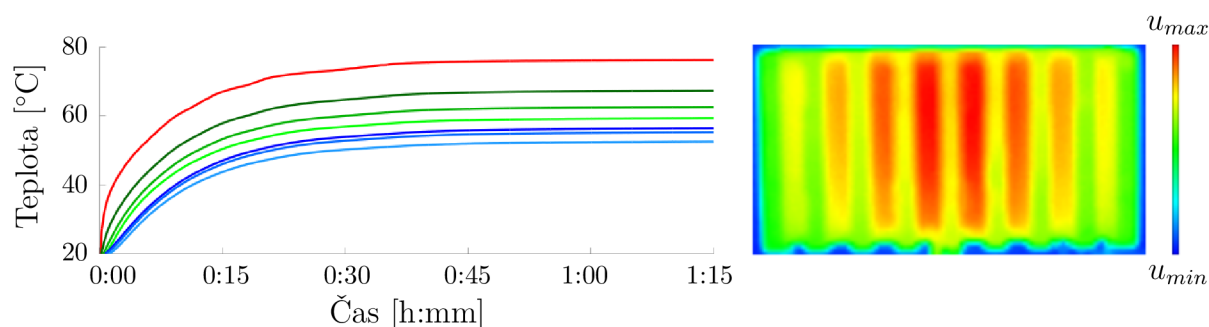
Obrázok 4.2: Umiestnenie ohrievacieho telesa spolu s termočlánkami na základni chladiča. Detail na prilepený termočlánok pri kraji telesa.

Ďalšie termočlánky boli umiestnené vo vnútri chladiča po výške prostredného rebra a druhého krajného rebra. Celkovo šesť pre polymérny a dva pre hliníkový chladič. Ich rozmiestnenie je znázornené na obrázku 4.3.



Obrázok 4.3: Rozmiestnenie termočlánkov vo vnútri chladiča, polymérny hore, hliníkový dole. Rozmery sú v milimetroch.

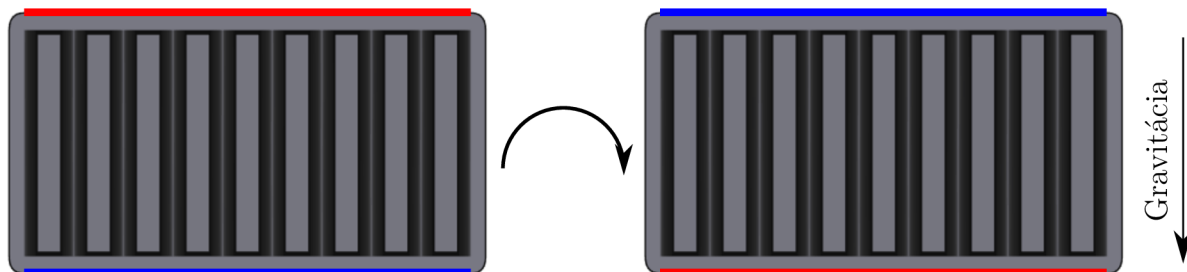
Meranie bolo ukončené po dosiahnutí ustáleného stavu. Za ten bol považovaný stav, kedy teplota na zdroji nenarástla o viac než $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ za päť minút. U polymérneho chladiča sa po ukončení spravila pomocou termovíznej kamery séria termálnych snímok. Z nich sa ďalším spracovaním získali priemerné teploty na plochách vrcholkov rebier a medzier medzi rebrami. Tie spolu s údajmi z termočlánkov tvoria vstupné dáta pre praktickú časť diplomovej práce. Typický výstup z experimentu môžeme vidieť na obrázku 4.4.



Obrázok 4.4: Záznam teploty z termočlánkov (vľavo) a termálna snímka chladiča (vpravo). Červená krivka v grafe odpovedá teplote pri zdroji, zelený odtieň teplotám z prostredného rebra a modrý odtieň teplotám z druhého krajného rebra.

Použitie termočlánky boli typu K s bežne udávanou presnosťou $\pm 2,2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pre zlepšenie presnosti boli kalibrované na $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, vo výsledku tak dosahovali chyby $\pm 0,2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Termovízna kamera (FLIR E5) meria s chybou $\pm 2\text{ }^{\circ}\text{C}$ podľa oficiálnej príručky. Na získaných snímkach bola vykonaná kontrola teplôt medzirebrových priestorov s hodnotami z termočlánkov. Na základe zhody pod $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ pri nastavenej emisivite $\varepsilon = 0,95$ (emisivita grafitu) boli snímky považované za dostatočne presné.

Každý chladič bol meraný v dvoch polohách: základnej a otočenej podľa obrázku 4.5. Každé meranie sa zopakovalo a výstupné teploty sa spriemerovali. Priemer bol aplikovaný aj na hodnoty z dvoch rôznych polôh, čím došlo k symetrizácii dát vzhľadom ku gravitácii (termočlánky sa otočením posunuli proti smeru, respektíve po smere gravitácie). Numerický model vytvorený v kapitole 6 nepočíta s prúdením vzduchu a tak nemôže túto reálnu asymetriu prirodzene vystihnúť. Údaje z termálnych snímkov boli navyše symetricky spriemerované vzhľadom k strednému rebro.



Obrázok 4.5: Polohy chladiča počas experimentu. V základnej polohe (vľavo) je referenčná červená strana základne navrchu vzhľadom k smeru gravitácie. Po otočení chladiča sa táto strana presunie naspodok.

4.2 Výmena tepla s okolím

Pre následné vytvorenie numerického modelu odpovedajúceho dátam z experimentu je nutné charakterizovať podstatné zložky odvodu tepla z chladiča do okolia. Tými sú:

- prirodzená konvekcia – vzduch sa v okolí teplejšieho chladiča ohrieva, klesá jeho hustota a stúpa nahor proti pôsobeniu gravitačnej sily,
- radiácia medzi chladičom a stenami boxu. Tú môžeme nahradiť radiáciou do okolia o teplote 20, respektíve 50 °C, pretože steny sú nastriekané grafitovým sprejom s vysokou emisivitou $\varepsilon = 0,95$,
- vzájomná radiácia stien rebier v medzirebrovom priestore.

5 Prístup k stanoveniu anizotropie tepelnej vodivosti

So známymi materiálovými vlastnosťami a okrajovými podmienkami popisujúcimi chladenie, respektíve ohrievanie povrchu, vieme riešením rovnice vedenia tepla získať teplotnú odozvu skúmanej sústavy. Táto kategória problému, kedy zo známych príčin hľadáme dôsledok, sa označuje priama úloha.

V úlohách vedenia tepla je častou potrebou hľadanie príčin, ktoré pozorovanú teplotnú odozvu vyvolali. V tomto kontexte hovoríme o inverznej úlohe [30]. Do tejto kategórie úloh spadá problém stanovenia tenzoru tepelnej vodivosti v objeme polymérneho chladíča. Možnosti určenia teplotne nezávislej anizotropnej vodivosti v jednoduchom prípade kvádra sú popísané v [31]. Typické inverzné problémy sa týkajú hľadania časového priebehu tepelného toku na povrchu chladeného materiálu tak, aby spätné riešenie priamej úlohy čo najlepšie odpovedalo teplotám nameraným vo vnútri telesa [32], [33]. V priebehu riešenia sa pritom priama úloha počíta rádovo tisíc až stotisíckrát. To prináša potrebu znižovať jej výpočtovú náročnosť a riešený model čo najviac zjednodušiť – optimalizáciou diskretizovanej výpočtovej siete alebo redukciiu dimenzie úlohy [30].

Náš prípad sa v porovnaní s bežne známymi inverznými problémami líši v stacionárnosti pridruženej priamej úlohy. Dostupné namerané dáta považujeme za ustálený stav, v ktorom nedochádza k teplotnej zmene v čase. To nám dáva priestor k vytvoreniu reálneho modelu bez prioritnej snahy zjednodušovania kvôli časovej náročnosti.

Prístupov k riešeniu priamej a inverznej úlohy je mnoho. V rámci tejto práce riešime priamu úlohu metódou konečných prvkov a inverznú úlohu optimalizáciou pomocou pohyblivého simplexu. Oba princípy sú bližšie popísané v nasledujúcich odsekoch.

5.1 Riešenie priamej úlohy

K diferenciálnej rovnici vedenia tepla v ustálenom stave (2.2) doplníme príslušné okrajové podmienky:

$$\begin{aligned} \nabla^T(\dot{\mathbf{q}}) &= Q & \text{v } \Omega, \\ \dot{q}_n = \hat{\mathbf{n}}^T \dot{\mathbf{q}} &= \eta & \text{na } \Gamma_\eta, \\ u &= \psi & \text{na } \Gamma_\psi. \end{aligned}$$

Za tepelný tok dosadíme pravú stranu z Fourierovho zákona (2.1) a obdržíme výslednú silnú formuláciu problému pre skalárne teplotné pole u :

$$\begin{aligned} -\nabla^T(\mathbf{D}\nabla u) &= Q & \text{v } \Omega, \\ -\hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{D}\nabla u &= \eta & \text{na } \Gamma_\eta, \\ u &= \psi & \text{na } \Gamma_\psi. \end{aligned}$$

Úlohu preformulujeme do slabej formy [11], [34]. Diferenciálnu rovnicu vynásobíme testovacou funkciou v a integrujeme cez celú oblasť Ω :

$$\int_{\Omega} v(-\nabla^T \mathbf{D}\nabla u) \, d\Omega = \int_{\Omega} vQ \, d\Omega. \quad (5.1)$$

Integrovaním per partes¹ upravíme rovnosť do tvaru

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{D} \nabla u \, d\Omega = \int_{\Omega} v Q \, d\Omega + \int_{\Gamma} v \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{D} \nabla u \, d\Gamma. \quad (5.2)$$

V tejto chvíli môžeme vzniesť požiadavku na hladkosť teplotného poľa a testovacej funkcie, aby bola takto upravená úloha korektná. Tejto požiadavke vyhovuje špeciálny typ Sobolevovho priestoru $H^1(\Omega)$ [35], ktorý je definovaný

$$H^1(\Omega) := \left\{ w : \int_{\Omega} w^2 \, d\Omega < \infty, \int_{\Omega} (\nabla w)^2 \, d\Omega < \infty \right\}.$$

Pomocou neho zadefinujeme nasledujúce priestory:

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &:= \{ w \in H^1(\Omega) : w = \psi \text{ na } \Gamma_{\psi} \}, \\ \mathbb{V}_0 &:= \{ w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ na } \Gamma_{\psi} \}. \end{aligned}$$

Slabá formulácia úlohy ustáleného vedenia tepla teda znie: Nájsť $u \in \mathbb{V}$ tak, že²

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{D} \nabla u \, d\Omega = \int_{\Omega} v Q \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\eta}} v \eta \, d\Gamma_{\eta}, \quad \forall v \in \mathbb{V}_0. \quad (5.3)$$

Úlohu riešime metódou konečných prvkov [11], [34]. Oblasť Ω rozdelíme na malé elementy s uzlovými bodmi (obrázok 5.1), čím vytvoríme výpočtovú sieť. V týchto bodoch chceme nájsť aproximované hodnoty \tilde{u} . Aproximáciu hľadáme v tvare

$$u \approx \tilde{u} := \sum_{i=1}^{N_{\text{dof}}} N_i a_i = \mathbf{N}^T \mathbf{a},$$

kde $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_{N_{\text{dof}}}]^T$ sú tvarové funkcie a $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N_{\text{dof}}}]^T$ sú teploty v uzlových bodoch³ diskretizovanej oblasti. Počet stupňov voľnosti N_{dof} všeobecne predstavuje celkový počet neznámych uzlových hodnôt, v našom prípade skalárneho teplotného poľa však splýva s počtom uzlových bodov. Rovnaký aproximačný tvar sa predpokladá

¹ v integráli na ľavej strane rovnice (5.1) vystupuje súčin medzi skalárnou funkciou v a divergenciou vektorovej funkcie $-\mathbf{D} \nabla u$, ktorú označíme \mathbf{g} . Použitím integrácie per partes v jednej dimenzii rozpíšeme tento integrál v tenzorovej notácii:

$$\int_{\Omega} v (\nabla^T \mathbf{g}) \, d\Omega \equiv \int_{\Omega} v \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (v g_i) \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} g_i \, d\Omega.$$

V ľavom integráli sa vyskytuje divergencia z vektoru $v \mathbf{g}$ a v pravom si všimneme skalárny súčin medzi gradientom ∇v a \mathbf{g} . Na ľavý integrál teda môžeme aplikovať teorém o divergencii pre vektorovú funkciu (1.3):

$$\int_{\Omega} v (\nabla^T \mathbf{g}) \, d\Omega = \int_{\Gamma} v \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{g} \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{g} \, d\Omega.$$

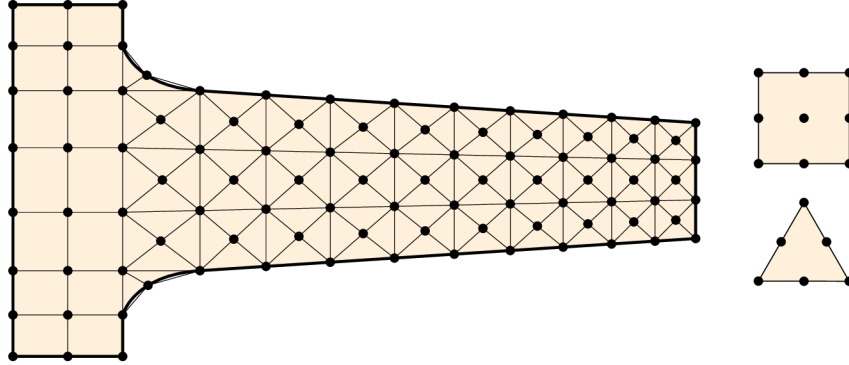
Táto rovnica sa dosadí do ľavej strany v (5.1) a integrál cez hranicu Γ sa prevedie na pravú stranu.

² integrál cez hranicu Γ v rovnici (5.2) rozdelíme na časť cez Γ_{ψ} s predpísanou teplotou a Γ_{η} s predpísaným tepelným tokom. Na hranici Γ_{ψ} využijeme požiadavku na testovaciu funkciu $v = 0$ a na Γ_{η} použijeme predpísanú okrajovú podmienku $-\hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{D} \nabla u = \eta$.

³ uzlovými bodmi elementu sú v prvom rade jeho vrcholy. O takom elemente hovoríme, že je prvého rádu. Pri riešení úloh vedenia tepla sa však prioritne používajú elementy druhého rádu. Ich uzlové body obsahujú navyše stredy hraničných plôch a hrán, prípadne aj stred celého elementu [11].

aj pre testovaciu funkciu $v \approx \mathbf{N}^T \mathbf{c}$ s vhodným vektorom \mathbf{c} . Aproximačné tvary pre u a v sa dosadia do slabej formy (5.3), ktorá sa po úprave zapíše do tvaru

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}). \quad (5.4)$$



Obrázok 5.1: Príklad výpočtovej siete na časti prierezu chladiča (vľavo). V základni sú použité obdĺžnikové elementy, v rebré je hustejšia trojuholníková diskretizácia. Rozloženie uzlových bodov elementov druhého rádu je znázornené vpravo.

Vektor \mathbf{f}_{int} predstavuje vnútornú záťaž vplyvom $\mathbf{D}\nabla u$ a \mathbf{f} reprezentuje vonkajšiu záťaž vyvolanú Q a okrajovou podmienkou. Ďalší postup závisí na nelinearite problému⁴. V prípade lineárnej úlohy sa problém transformuje na riešenie sústavy lineárnych rovníc s neznámym vektorom \mathbf{a} [34]. V opačnom prípade je rovnica (5.4) riešená iteračne, poprípade ju je možné najprv linearizovať [36].

Globálne vektory \mathbf{f}_{int} a \mathbf{f} sa zostavujú z elementárnych vektorov $\mathbf{f}_{\text{int}}^e$ a \mathbf{f}^e , ktoré sú vyhodnotené v každom elemente diskretizovanej oblasti Ω [36]. Pri vyhodnocovaní integrálov sa používa vhodná numerická formula [37].

5.2 Riešenie inverznej úlohy

Hlavným cieľom je síce stanovenie tenzoru vodivosti, no v priebehu ladenia numerického modelu môže byť vedľajším cieľom dopočítanie, respektíve overenie okrajových podmienok. Preto úlohu sformulujeme vo všeobecnom tvare. Hľadáme vektor parametrov \mathbf{p}^* z množiny prípustných hodnôt \mathcal{P} , ktorý minimalizuje účelovú funkciu $f(\mathbf{p})$:

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \{f(\mathbf{p})\}. \quad (5.5)$$

Vyhodnotenie účelovej funkcie vo vektorovom argumente \mathbf{p} pozostáva z dvoch krokov. Prvým je pre dané \mathbf{p} aktualizovať numerický model a vyriešiť ho metódou konečných prvkov. Tým získame simulované teploty v uzlových bodoch výpočtovej siete. Aktualizovanými objektmi v modeli sú pritom tenzor vodivosti \mathbf{D} a okrajové podmienky η .

⁴ zdrojom nelinearity v úlohe ustáleného vedenia tepla môže byť [38]:

- materiál – teplotná závislosť tenzoru tepelnej vodivosti,
- okrajová podmienka – radiácia, teplotne závislý súčiniteľ prestupu tepla,
- vnútorný tepelný zdroj – závislosť na teplote,
- neznáma poloha časti hranice v dôsledku fázových zmien.

V druhom kroku spočítame hodnotu účelovej funkcie ako súčet štvorcov rozdielu medzi simulovanými a nameranými teplotami v sledovaných miestach. Týmito miestami nie sú len samotné diskkrétne body modelu, ale aj teplotný priemer z povrchových oblastí. Zahrnieme ich však do dvoch teplotných vektorov:

$\tilde{\mathbf{u}}$ – vytvorený z numerického riešenia,

$\bar{\mathbf{u}}$ – získaný z experimentálne nameraných teplôt.

Počet sledovaných teplôt označíme N_s a obidva kroky zhrnieme do jedného zápisu⁵:

$$f(\mathbf{p}) := \sum_{i=1}^{N_s} (\tilde{u}_i - \bar{u}_i)^2, \quad \tilde{\mathbf{u}} \leftarrow [\mathbf{D} := \mathbf{D}(\mathbf{p}), \eta := \eta(\mathbf{p})]. \quad (5.6)$$

5.3 Optimalizácia metódou pohyblivého simplexu

Optimalizačnú úlohu sformulovanú rovnicami (5.5) a (5.6) riešime Nelderova–Meadovou metódou pohyblivého simplexu. V jej najvšeobecnejšej forme sa jedná o minimalizáciu bez obmedzení účelovej funkcie

$$f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R},$$

kde N je dimenzia problému. Patrí medzi porovnávacie metódy, ku konštrukcii ďalšej iterácie stačí poznať iba hodnoty funkcie f vo vybraných bodoch. Jej jednotlivé implementácie sa odlišujú v malých detailoch, v práci použitý algoritmus vznikol poskladaním z niekoľkých verzií [39], [40], [41]. Metóda je navyše doplnená o vlastný prístup k podmienenej optimalizácii, kde riešenie musí patriť do množiny prípustných hodnôt \mathcal{P} (formulácia (5.5)), o ktorej uvažujeme, že je konvexná.

Voľba tejto metódy je založená na snahe znížiť počet vyhodnotení účelovej funkcie. Každé vyhodnotenie rieši priamu úlohu vedenia tepla, ktorá je pri zložitom modeli časovo náročná. V jednej iterácii sa účelová hodnota bežne počíta iba jeden alebo dva razy, len v prípade redukcie simplexu (popis ďalej v texte) je vyhodnotení viac. Táto situácia ale nenastáva často.

Základným rysom metódy je simplex v N -rozmernom priestore, ktorý je konvexným obalom $N+1$ lineárne nezávislých bodov (trojuholník pre $N = 2$, štvorsten pre $N = 3$) [41]. Vrcholy simplexu sa v priebehu riešenia transformujú tak, aby simplex konvergoval k hľadanému minimu účelovej funkcie. Jednotlivé vrcholy reprezentujeme N -rozmernými vektormi $\{\mathbf{p}_i\}$ a príslušné hodnoty účelovej funkcie vektorom \mathbf{g} :

$$\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{N+1}, \quad \mathbf{g} : g_i := f(\mathbf{p}_i).$$

Inicializácia simplexu

Počiatočný simplex vytvoríme z bodov patriacich do \mathcal{P} , tým dosiahneme toho, že všetky jeho vnútorné body rovnako náležia do \mathcal{P} a tento fakt sa v priebehu žiadnej transformácie nezmení. Pri jeho tvorbe môžeme využiť predbežné predpoklady o riešenej úlohe, napríklad že hľadané parametre patria do určitého intervalu. Typicky sa vytvára tak, že sa vezme referenčný bod \mathbf{p}_{ref} a ostatné sa vytvoria tak, aby bol simplex pravouhlý alebo regulárny (všetky hrany majú rovnakú dĺžku).

⁵ zápis pritom čítame sprava doľava. Pre vektor \mathbf{p} aktualizujeme model a numericky ho vyriešime (vpravo) a následne spočítame súčet štvorcov rozdielu (vľavo).

Transformácia simplexu

V úvode sa vyhodnotí účelová funkcia v každom vrchole simplexu a určia sa vrcholy \mathbf{p}_B , \mathbf{p}_W , \mathbf{p}_P podľa odpovedajúcich zložiek vektoru \mathbf{g} tak, že

$$g_B := \min_i \{g_i\}, \quad g_W := \max_i \{g_i\}, \quad g_P := \max_{i, i \neq W} \{g_i\}.$$

Myšlienkou metódy je nájsť nový bod, ktorý nahradí aktuálny najhorší vrchol \mathbf{p}_W . Princíp jeho stanovenia je založený na predpoklade, že lepšie body sa nachádzajú v smere vedúcom z \mathbf{p}_W k stredu nadroviny vytvorenej z ostatných vrcholov $\{\mathbf{p}_i\}$, $i \neq W$. Tento stred označíme \mathbf{p}_C a spočítame ho ako

$$\mathbf{p}_C := \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq W}}^{N+1} \mathbf{p}_i.$$

Vytvoríme reflexiu \mathbf{p}_R bodu \mathbf{p}_W na opačnej strane spomenutej nadroviny:

$$\mathbf{p}_R := \mathbf{p}_C + (\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_W).$$

Zistíme, či \mathbf{p}_R patrí do prípustnej množiny \mathcal{P} a podľa toho postupujeme ďalej.

Reflexia je v prípustnej množine

Vyhodnotíme účelovú funkciu $g_R = f(\mathbf{p}_R)$, ktorú porovnáme s hodnotami g_B a g_P . Pokiaľ sme nezískali lepšiu hodnotu ako g_B a ani horšiu než g_P , za nový bod prehlásime \mathbf{p}_R .

V prípade, že reflexia je lepším riešením než aktuálne najlepšie \mathbf{p}_B , predpokladáme, že je možné hodnotu reflexie ešte vylepšiť a zostrojíme expandovaný bod

$$\mathbf{p}_E := \mathbf{p}_C + \gamma(\mathbf{p}_R - \mathbf{p}_C),$$

kde $\gamma > 1$ je parameter expanzie. Nemusí patriť do prípustnej množiny, vtedy okamžite vezmeme \mathbf{p}_R ako nový bod. Ak je expanzia prípustným bodom, spočítame $g_E := f(\mathbf{p}_E)$. Ak je táto hodnota menšia než g_R , prijmeme bod \mathbf{p}_E , inak \mathbf{p}_R .

V poslednej možnosti ($g_R > g_P$), môže byť bod reflexie stále lepší než najhorší bod \mathbf{p}_W . Pri tejto variante zostrojíme bod vonkajšej kontrakcie

$$\mathbf{p}_O := \mathbf{p}_C + \beta(\mathbf{p}_R - \mathbf{p}_C),$$

kde $\beta \in (0, 1)$ je parameter kontrakcie. Ak je hodnota účelovej funkcie $g_O := f(\mathbf{p}_O)$ menšia než g_R , bod vonkajšej kontrakcie prijmeme za nový. V opačnom prípade vykonáme redukciiu simplexu, keď všetky jeho body priblížime k najlepšiemu \mathbf{p}_B

$$\mathbf{p}_i := \mathbf{p}_B + \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_B), \quad i \neq B$$

s parametrom redukcie $\delta \in (0, 1)$.

Naopak, ak je bod reflexie horší než \mathbf{p}_W , vytvoríme vo vnútri simplexu bod vnútornej kontrakcie

$$\mathbf{p}_I := \mathbf{p}_C + \beta(\mathbf{p}_W - \mathbf{p}_C)$$

a postup je podobný ako pri vonkajšej kontrakcii. Ak je nová hodnota $g_I := f(\mathbf{p}_I)$ menšia než g_W , kontrakciu prijmeme, inak vykonáme redukciiu simplexu.

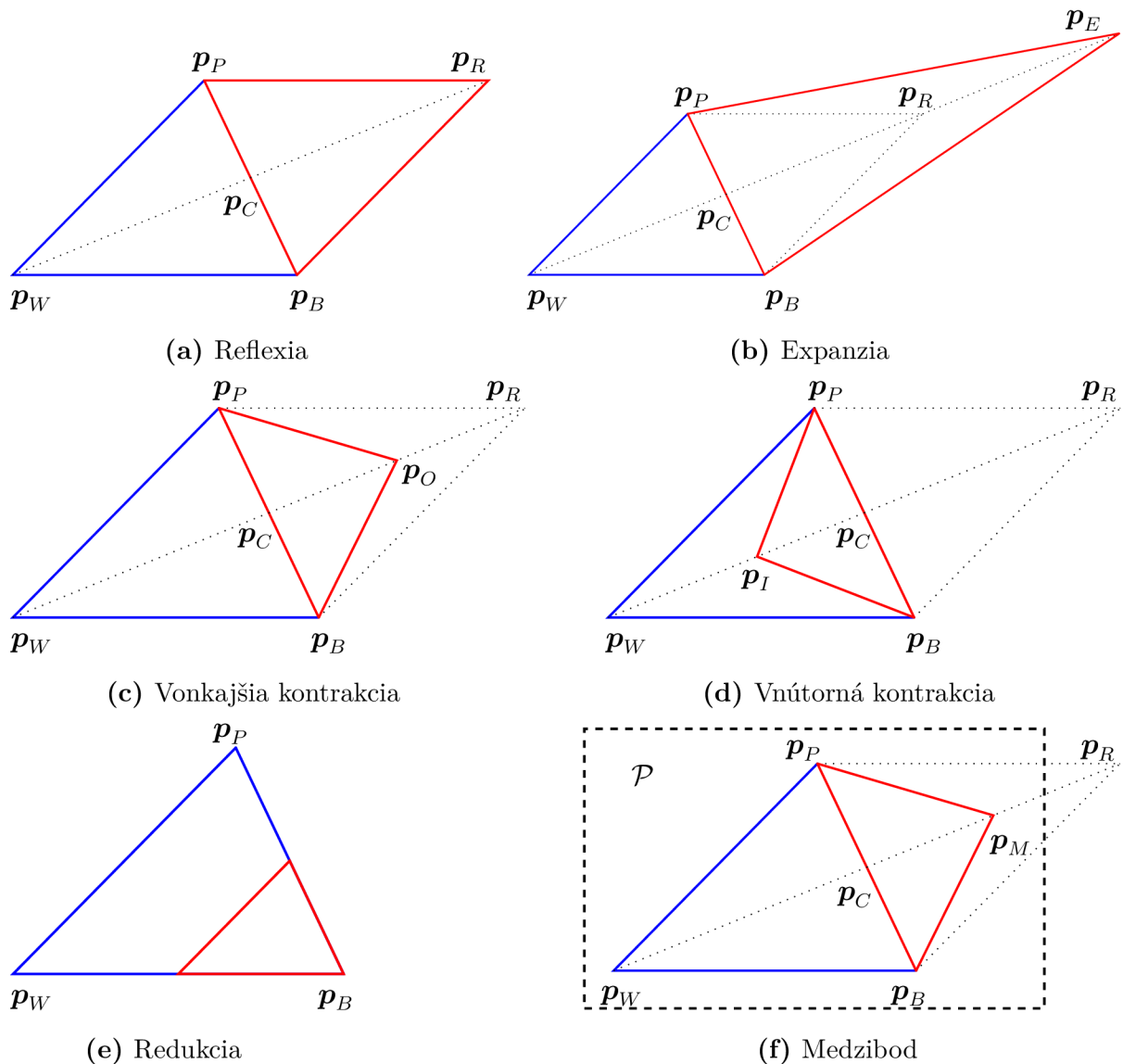
Reflexia NIE je v prípustnej množine

Fakt, že sme sa reflexiou dostali preč z prípustnej množiny, ešte neznamená, že v tomto smere neleží bod zlepšujúci simplex. Preto zostrojíme medzibod

$$\mathbf{p}_M := \mathbf{p}_R - (\mathbf{p}_R - \mathbf{p}_C)/2.$$

Ak ani ten neleží v prípustnej množine, vykonáme vnútornú kontrakciu s možnosťou redukcie simplexu. V opačnom prípade môžeme vyhodnotiť účelovú funkciu $g_M := f(\mathbf{p}_M)$. Ak je táto hodnota menšia než g_P , medzibod vezmeme za nový, inak znovu spravíme vnútornú kontrakciu s prípadnou redukciou.

Všetky prípady transformácie simplexu je najlepšie predstaviť si na trojuholníku v dvoj-rozmernej úlohe (obrázok 5.2).



Obrázok 5.2: Možné transformácie simplexu (modrý) v rovine. Vytvorenou nadrovinou proti vrcholu \mathbf{p}_W je úsečka spájajúca \mathbf{p}_P s vrcholom \mathbf{p}_B . Nový simplex (červený) vstupuje do ďalšej iterácie. Vytvorené podľa [41].

Voľba parametrov transformácie

Štandardne sa za parametre β , γ , δ volia hodnoty

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2, \quad \delta = \frac{1}{2}.$$

Autori článku [42] navrhli adaptívne parametre v závislosti na veľkosti dimenzie úlohy N . Pre vyššie dimenzie úloh preukázali rýchlejšiu konvergenciu oproti štandardne voleným parametrom. Tieto parametre sú zahrnuté do predstaveného algoritmu a ich predpis je

$$\beta = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N}, \quad \gamma = 1 + \frac{2}{N}, \quad \delta = 1 - \frac{1}{N}.$$

Ukončenie algoritmu

Po každej transformácii sa vyhodnotia dve ukončovacie podmienky, na ukončenie algoritmu stačí platnosť jednej z nich.

- 1) Hodnoty účelovej funkcie vo všetkých vrcholoch si sú dostatočne blízke

$$\varepsilon_{err} := \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} (g_i - g_\mu)^2} < \varepsilon_{tol}, \quad g_\mu := \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} g_i.$$

- 2) Dosiahnutie predom daného maximálneho počtu transformácií simplexu (iterácií)

$$N_T = N_{max}.$$

Za optimálne riešenie problému vezmeme po poslednej iterácii najlepší vrchol simplexu \mathbf{p}_B s funkčnou hodnotou g_B .

5.4 Realizácia riešenia

K riešeniu problému je využitý výpočtový software Comsol Multiphysics v 4.4 pracujúci na báze metódy konečných prvkov. Jedným z dostupných nástrojov je LiveLink for Matlab, ktorý umožňuje pracovať s comsolovým modelom v prostredí Matlab⁶. Vďaka tomu nie je nutné sa sústreďiť na numerické riešenie priamej úlohy, ale na vytvorenie verného modelu v konečnoprvkovom softwari. Na tomto modeli následne riešime inverznú úlohu implementovanú v Matlabe. Riešenie teda pozostáva z dvoch vzájomne prepojených častí:

- 1) vytvorenie modelu v Comsole, ktorý slúži ako riešiteľ priamych úloh,
- 2) implementácia metódy pohyblivého simplexu v Matlabe – riešiteľ inverznej úlohy. Pri vyhodnocovaní účelovej funkcie vo vrcholoch simplexu sa pomocou nástroja LiveLink aktualizuje a rieši model v Comsole. Pseudokód inverznej úlohy je uvedený v nasledujúcom odseku.

⁶ z dôvodu kompatibility s nástrojom LiveLink je použitá verzia Matlab R2012b.

Pseudokód implementovaného algoritmu

```

1. Inicializuj  $\{\mathbf{p}_i\}$ ,  $\varepsilon_{err}$ ,  $N_T$ , spočítaj  $g$ 
   while  $\varepsilon_{err} > \varepsilon_{tol}$  or  $N_T < N_{max}$  do
2.   Urči  $\mathbf{p}_B, \mathbf{p}_W, \mathbf{p}_P$ 
3.    $\mathbf{p}_C := \sum_{i=1, i \neq W}^{N+1} \mathbf{p}_i / N$ 
4.    $\mathbf{p}_R := \mathbf{p}_C + (\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_W)$ 
   if  $\mathbf{p}_R \in \mathcal{P}$ 
5.      $g_R := f(\mathbf{p}_R)$ 
     if  $g_R < g_P$  and  $g_R \geq g_B$ 
6.        $\mathbf{p}_W := \mathbf{p}_R$ 
     else if  $g_R < g_B$ 
7.       expanzia
     else
8.       kontrakcia-A
     end
   else
9.      $\mathbf{p}_M := \mathbf{p}_R - (\mathbf{p}_R - \mathbf{p}_C) / 2$ 
     if  $\mathbf{p}_M \in \mathcal{P}$ 
10.       $g_M := f(\mathbf{p}_M)$ 
       if  $g_M < g_P$ 
11.         $\mathbf{p}_W := \mathbf{p}_M$ 
       else
12.        kontrakcia-B
       end
     else
13.      kontrakcia-B
     end
   end
14.    $g_\mu := \sum_{i=1}^{N+1} g_i / (N + 1)$ 
15.    $\varepsilon_{err} := \sqrt{\sum_{i=1}^{N+1} (g_i - g_\mu)^2} / (N + 1)$ 
16.    $N_T := N_T + 1$ 
end

```

expanzia:

```

1.  $\mathbf{p}_E := \mathbf{p}_C + \gamma(\mathbf{p}_R - \mathbf{p}_C)$ 
   if  $\mathbf{p}_E \in \mathcal{P}$ 
2.    $g_E := f(\mathbf{p}_E)$ 
     if  $g_E < g_R$ 
3.        $\mathbf{p}_W := \mathbf{p}_E$ 
     else
4.        $\mathbf{p}_W := \mathbf{p}_R$ 
     end
   else
5.      $\mathbf{p}_W := \mathbf{p}_R$ 
   end

```

kontrakcia-A:

```

   if  $g_R < g_W$ 
1.      $\mathbf{p}_O := \mathbf{p}_C + \beta(\mathbf{p}_R - \mathbf{p}_C)$ 
2.      $g_O := f(\mathbf{p}_O)$ 
       if  $g_O \leq g_R$ 
3.          $\mathbf{p}_W := \mathbf{p}_O$ 
       else
4.         redukcia
       end
     else
5.      $\mathbf{p}_I := \mathbf{p}_C + \beta(\mathbf{p}_W - \mathbf{p}_C)$ 
6.      $g_I := f(\mathbf{p}_I)$ 
       if  $g_I < g_W$ 
7.          $\mathbf{p}_W := \mathbf{p}_I$ 
       else
8.         redukcia
       end
     end
   end

```

kontrakcia-B:

```

1.  $\mathbf{p}_I := \mathbf{p}_C + \beta(\mathbf{p}_W - \mathbf{p}_C)$ 
2.  $g_I := f(\mathbf{p}_I)$ 
   if  $g_I < g_W$ 
3.    $\mathbf{p}_W := \mathbf{p}_I$ 
   else
4.   redukcia
   end

```

redukcia:

```

   for  $i := 1, \dots, N + 1, i \neq B$  do
1.      $\mathbf{p}_i := \mathbf{p}_B + \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_B)$ 
   end

```

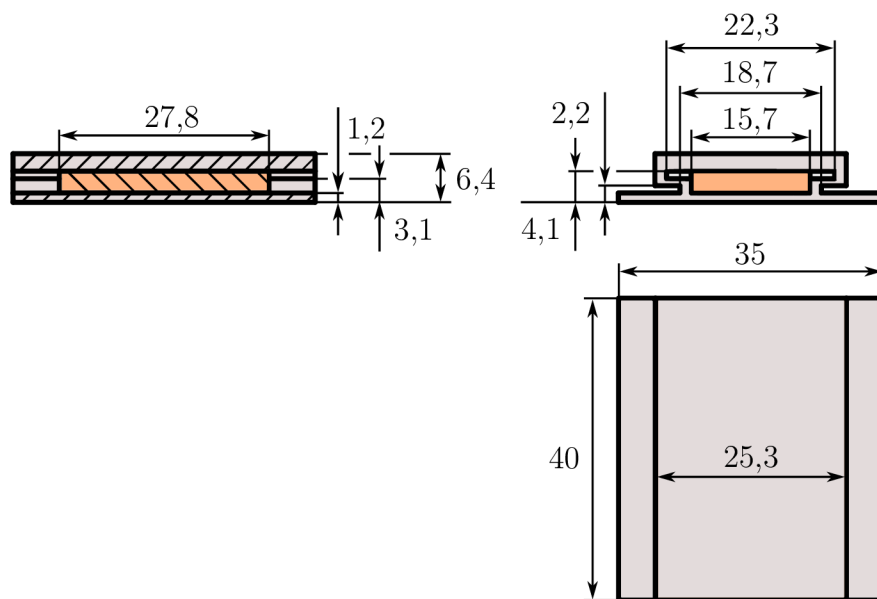
6 Numerický model

K sformulovanej úlohe v predchádzajúcej kapitole je potrebné doplniť konečnoprvkový numerický model, ktorý bude vhodne simulovať experiment z kapitoly 4. Model je vytvorený v softvare Comsol Multiphysics v 4.4 s využitím modulu *Heat Transfer Module*. V jeho rámci je zvolená stacionárna štúdia, ktorá rieši úlohu vedenia tepla v ustálenom stave. Hlavným verifikačným modelom je trojrozmerná varianta detailne popisujúca vnútornú štruktúru materiálu chladiča a fyzikálne podmienky odpovedajúce experimentu. Vedľajší model predstavuje zjednodušenie do dvojrozmerného prípadu pre praktické aplikovanie navrhutej inverznej úlohy. Modely sú vytvorené v dvoch verziách pre dve rôzne okolité teploty udržiavané počas experimentu.

6.1 Trojrozmerný model

6.1.1 Geometria

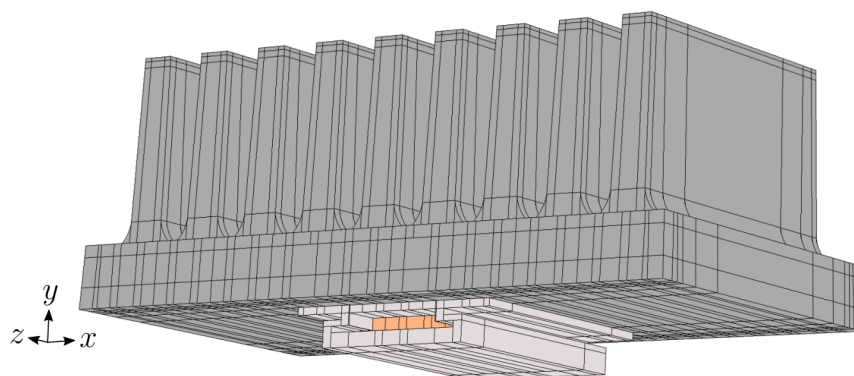
Celková geometria chladiča je vytvorená podľa obrázku 3.2, vnútorne je však rozdelená na mnoho častí. Dôvodom je jednak delenie na jadro a krajnú vrstvu pri modelovaní materiálu, ale hlavne sa jedná o praktické kúskovanie geometrie uľahčujúce manuálnu tvorbu výpočtovej siete. Na stred spodnej strany základne chladiča je pridané ohrievacie teleso s rozmermi podľa obrázku 6.1.



Obrázok 6.1: Geometria modelu ohrievacieho telesa. Hliníkové telo je znázornené sivou farbou, tepelný zdroj hnedou. Rozmery sú v milimetroch.

Vonkajšiu geometriu celého modelu môžeme vidieť na obrázku 6.2. Veľkosti krajných vrstiev materiálu v jednotlivých miestach chladiča sú stanovené z lomovej analýzy. V prvom kroku boli rebrá odlomené od základne a ich zvyšné stopy zbrúsené. Základňa bola rovnobežne s jej dlhou stranou zlomená na štyri časti a jeden krajný kus ešte dvakrát pozdĺž krátkej hrany. Na troch vybraných rebrách boli vykonané lomy po ich dĺžke a výške. Všetky rozlomené časti pozorujeme na obrázku 6.3.

Jednotlivé kusy boli vložené pod mikroskop a odfotografované. Tieto fotografie slúžia ako podklad pre určenie rozmerov vnútornej štruktúry. Tie sú odhadnuté pomocou pomeru veľkostí úsečiek dokreslených vo vektorovom grafickom softvare. Sledované krajné



Obrázok 6.2: Vonkajšia geometria modelu.



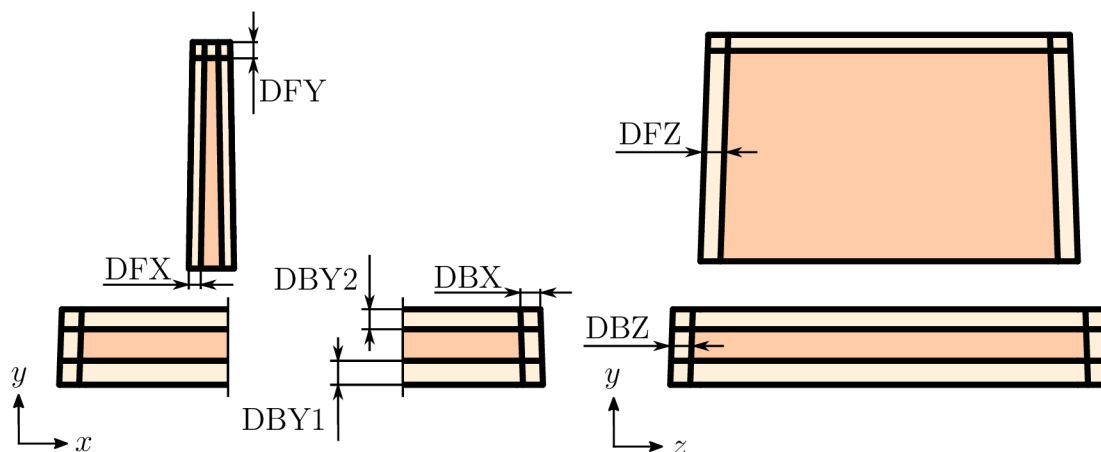
Obrázok 6.3: Rozlomená základňa a vybrané rebrá chladiča.

vrstvy sú znázornené na obrázku 6.4 a príslušné značenie spolu s výslednými rozmermi je vysvetlené v tabuľke 6.1.

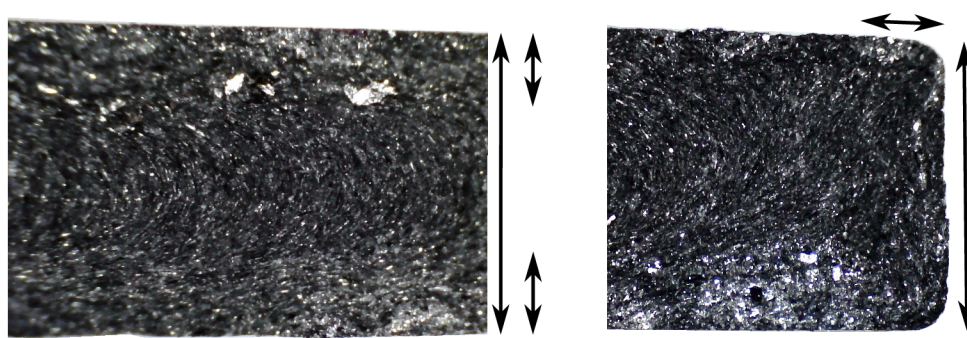
Tabuľka 6.1: Označenie, popis a veľkosti sledovaných krajných vrstiev materiálu.

Označenie	Krajná vrstva	Veľkosť [mm]
DFX	rebro, v smere osi x	1,17 až 1,4
DFY	rebro, v smere osi y	1,57
DFZ	rebro, v smere osi z	1,44
DBX	základňa, v smere osi x	2,57
DBY1	základňa, v smere osi y dole	3,36
DBY2	základňa, v smere osi y hore	1,93
DBZ	základňa, v smere osi z	2,55

Výsledné rozmery vznikli spriemerovaním hodnôt získaných z viacerých fotografií. Napríklad pre určenie veľkosti krajnej vrstvy v rebre po smere osi x , teda DFX, bolo použitých 8 snímok, z ktorých sa stanovil jej pomer na 23,3 %. Kvôli premenlivej šírke rebra je v modelovanej geometrii taktiež DFX premenlivá. Konkrétne, naspodku rebra činí 1,4 mm (23,3 % z 6 mm) a pri vrchole 1,17 mm (23,3 % z 5 mm). Na obrázku 6.5 sú ukázané snímky z lomu po výške prostredného rebra spolu s dokreslenými úsečkami použitými na stanovenie rozmerov krajnej vrstvy DFX a DFY.



Obrázok 6.4: Sledované rozmery krajných vrstiev materiálu v základni a rebre.



Obrázok 6.5: Pohľad mikroskopom na lom po výške stredného rebra. Pomer krátkej úsečky k dlhej odpovedá relatívnej veľkosti krajnej vrstvy DFX (vľavo) a DFY (vpravo).

6.1.2 Materiály

Z materiálových vlastností je pre riešenie stacionárneho vedenia tepla nutné zadať iba tenzor tepelnej vodivosti. V modeli sú použité typovo štyri odlišné materiály.

- Tepelný zdroj s izotropnou tepelnou vodivosťou $400 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
- Hliníkové telo ohrievacieho telesa s izotropnou tepelnou vodivosťou $130 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
- Objemové domény odpovedajúce jadrú polymérneho materiálu, ktorých hlavné vodivosti sú parametrizované

$$\lambda_1^{\text{jad}} = \lambda_2^{\text{jad}}, \quad \lambda_3^{\text{jad}}.$$

Rovnosť prvých dvoch je založená na vlastnosti grafitu uvedenej v kapitole 3.

- Krajné vrstvy polymérneho kompozitu so samostatnými parametrami hlavných vodivostí

$$\lambda_1^{\text{kraj}} = \lambda_2^{\text{kraj}}, \quad \lambda_3^{\text{kraj}}.$$

Z odvodených výsledkov zo štúdie GRaK sú zlé vodivosti v jadre a krajnej vrstve zviazané vzťahom

$$\lambda_3^{\text{jad}} = 2\lambda_3^{\text{kraj}}.$$

Pre vzťah medzi dobrými vodivosťami použijeme dva predpoklady a vytvoríme tým dva materiálové modely:

- * **konzervatívny** – z uvedených nameraných dát zo štúdie GRaK nebolo možné vykonať ďalší výpočet, preto predpokladáme ich rovnosť

$$\lambda_1^{\text{jad}} = \lambda_1^{\text{kraj}},$$

- * **logický** – použitím hrubého predpokladu o referenčnej vodivosti (3.1) získame predpokladaný vzťah

$$2\lambda_1^{\text{jad}} = \lambda_1^{\text{kraj}}.$$

Pre jadro a krajnú vrstvu je tenzor vodivosti vyjadrený v ortonormálnej báze xyz využitím rovnice (1.5) ako

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T.$$

Pre jeho výpočet je postačujúce poznať vlastný smer $\hat{\mathbf{d}}_3$ odpovedajúci zlej vodivosti λ_3 . Ostatné vlastné smery sú doplnené tak, aby bol zachovaný zmysel orientácie systému xyz . Napríklad pre doménu reprezentujúcu jadro základne chladiča je vlastný smer $\hat{\mathbf{d}}_3$ totožný so smerom tečenia materiálu – osou x a tenzor vodivosti má tvar

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Nenulové mimodiagonálne zložky sa vyskytujú v rohových častiach geometrie, ktoré slúžia ako určitý prechod medzi jednotlivými krajnými vrstvami. Odpovedajúci smer $\hat{\mathbf{d}}_3$ je stanovený ako súčet spájaných krajných vrstiev. Všetky použité materiály s príslušným vlastným smerom $\hat{\mathbf{d}}_3$ sú uvedené v tabuľke 6.2.

Tabuľka 6.2: Rozdelenie vytvorených materiálov polymérneho kompozitu na základe vlastného smeru $\hat{\mathbf{d}}_3$ tenzoru tepelnej vodivosti.

Popis	$\hat{\mathbf{d}}_3$
jadro základne	$[1 \ 0 \ 0]^T$
jadro rebra	$[0 \ 1 \ 0]^T$
krajná vrstva základne a rebra v smere osi x	$[1 \ 0 \ 0]^T$
krajná vrstva základne a rebra v smere osi y	$[0 \ 1 \ 0]^T$
krajná vrstva základne a rebra v smere osi z	$[0 \ 0 \ 1]^T$
prechod medzi dvomi krajnými vrstvami v rovine xy	$\frac{\sqrt{2}}{2}[\pm 1 \ 1 \ 0]^T$
prechod medzi dvomi krajnými vrstvami v rovine xz	$\frac{\sqrt{2}}{2}[\pm 1 \ 0 \ 1]^T$
prechod medzi dvomi krajnými vrstvami v rovine yz	$\frac{\sqrt{2}}{2}[0 \ \pm 1 \ 1]^T$
prechod medzi tromi krajnými vrstvami	$\frac{\sqrt{3}}{3}[\pm 1 \ \pm 1 \ 1]^T$
rádiusy rebier krajnej vrstvy v smere z	$\frac{1}{3}[\pm 2 \ 1 \ \pm 2]^T$

6.1.3 Nastavenie fyzikálnych podmienok

Simulované podmienky experimentu sú vytvorené vo fyzikálnom module *Heat Transfer in Solids*. V jeho nastavení je navyše zaškrtnutá možnosť *Surface-to-surface radiation* umožňujúca počítat so vzájomnou radiáciou povrchov tak, ako je vysvetlené v kapitole 2.

Výkon zdroja

Do objemovej domény reprezentujúcej tepelný zdroj (zvýraznený odtieňom hnedej v obrázkoch 6.1 a 6.2) je pridaná podmienka *Heat Source*. V nej je nastavený celkový výkon $P_{tot} = 15$ W. Ten sa vnútorne cez celkový objem domény V prevádza na merný tepelný výkon

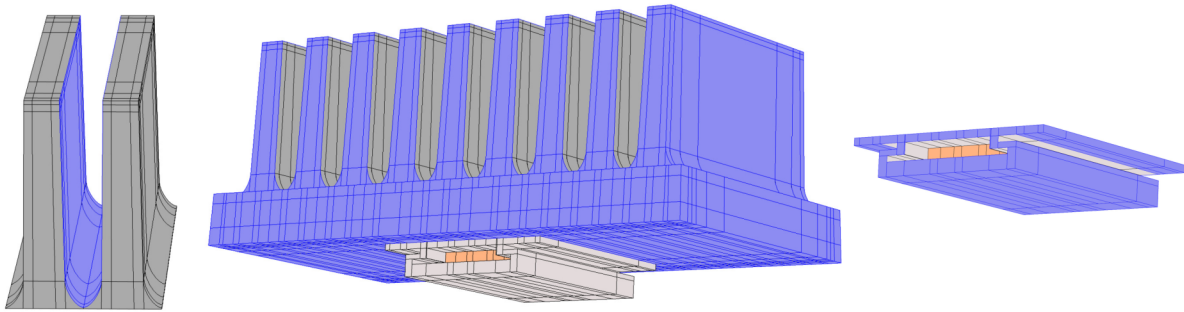
$$Q = \frac{P_{tot}}{V},$$

ktorý je pre doménu zdroja súčasťou riešenej rovnice (2.2).

Radiácia

Na plochy rebier v každom medzirebrovom priestore je nastavená okrajová podmienka *Surface-to-Surface Radiation* počítajúca normálový tepelný tok podľa rovníc (2.16) – (2.19). Na ostatných plochách chladiča je aplikovaná okrajová podmienka *Surface-to-Ambient Radiation*. Tá určuje tepelný tok normálou podľa rovnice (2.5). Z plôch hliníkového tela ohrievacieho telesa sú do radiácie zahrnuté iba tie, ktoré sú výrazne vystavené okolitému prostrediu.

V každej radiáčnej okrajovej podmienke je nastavená okolitá teplota $u_{amb} = 20$ °C, respektíve $u_{amb} = 50$ °C, odpovedajúca udržiavanej teplote v komore počas experimentu. Na plochách chladiča je použitá emisivita $\varepsilon = 0,95$ a na plochách hliníkového tela $\varepsilon = 0,1$. Nastavenie radiácie na plochách modelu je znázornené na obrázku 6.6.



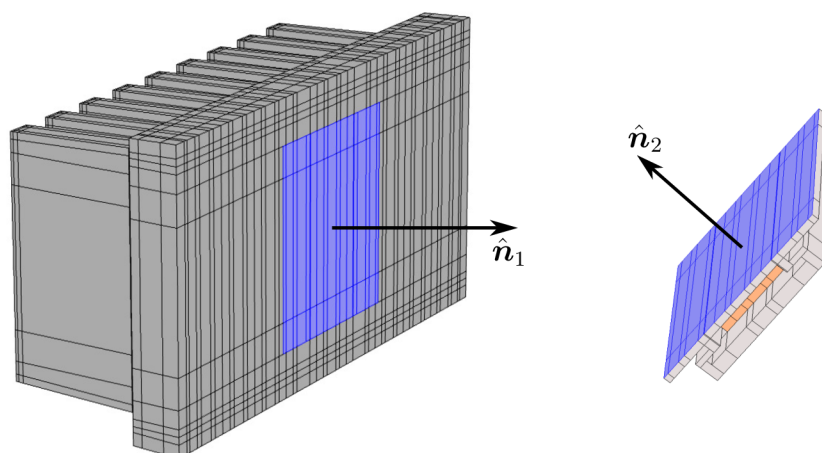
Obrázok 6.6: Plochy s radiáčnou okrajovou podmienkou – zvýraznené modrou farbou. Vzájomná radiácia v medzirebrovom priestore (vľavo), radiácia do okolia na zvyšku chladiča (stred) a na plochách hliníkového tela (vpravo).

Kontaktný odpor medzi telesom a chladičom

Simuláciu použitej tepelne vodivej pasty na vylepšenie kontaktu medzi chladičom a telesom značne zjednoduší aplikovanie okrajovej podmienky *Thermal Contact* na účinnú kontaktnú plochu. Tá popisuje výmenu tepla medzi styčnými plochami pomocou kontaktnej vodivosti h_c , ktorá má charakter súčiniteľa prestupu tepla. V rámci tejto podmienky je možné zadať vlastnosti kontaktu – drsnosť, tvrdosť, tlak. Z nich sa empirickými vzorcami automaticky dopočíta h_c . Všetky tieto vplyvy sa dajú jednoducho vynulovať tak, aby sa dala hodnota h_c zadať priamo. V takom prípade je potom kontakt medzi plochami S_1 a S_2 modelovaný rovnicami

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n,1} &= h_c(u_2 - u_1), \\ \dot{q}_{n,2} &= h_c(u_1 - u_2).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Hodnotu kontaktnej vodivosti modelujeme konštantou, ktorá je stanovená v kapitole 7. Nastavenie tejto okrajovej podmienky je znázornené na obrázku 6.7.



Obrázok 6.7: Plochy s nastaveným kontaktným odporom.

Prírodná konvekcia

Najkomplikovanejšou časťou pri vytvorení modelu je zachytenie prúdenia ohrievaného vzduchu. Najreálnejšie by bolo prúdenie v okolí chladiča simulovať v priebehu výpočtu. Tým by však mnohonásobne stúpala výpočtová náročnosť modelu a pre inverznú úlohu by sa stal nevhodným. Namiesto toho dovoľíme určitú nepresnosť a prúdenie popíšeme kombináciou empiricky stanovených súčiniteľov prestupu tepla a hodnôt predpočítaných zo simulácií prúdenia. Použité empirické rovnice sú vybrané z kníh [12], [43].

V modeli je so smerom stúpania vzduchu, a teda proti smeru pôsobenia gravitačných síl, stotožnená os z . Celkovo pozorujeme štyri typy kontaktu prúdiaceho vzduchu s obtekaným povrchom (tieto režimy znázorňuje obrázok 6.8):

- vzduch prúdi rovnobežne pozdĺž jednej vertikálnej steny,
- medzi dvomi rovnobežnými vertikálnymi stenami,
- vzduch naráža zospodu do horizontálnej steny,
- vzduch sa zhromažďuje nad horizontálnou stenou.

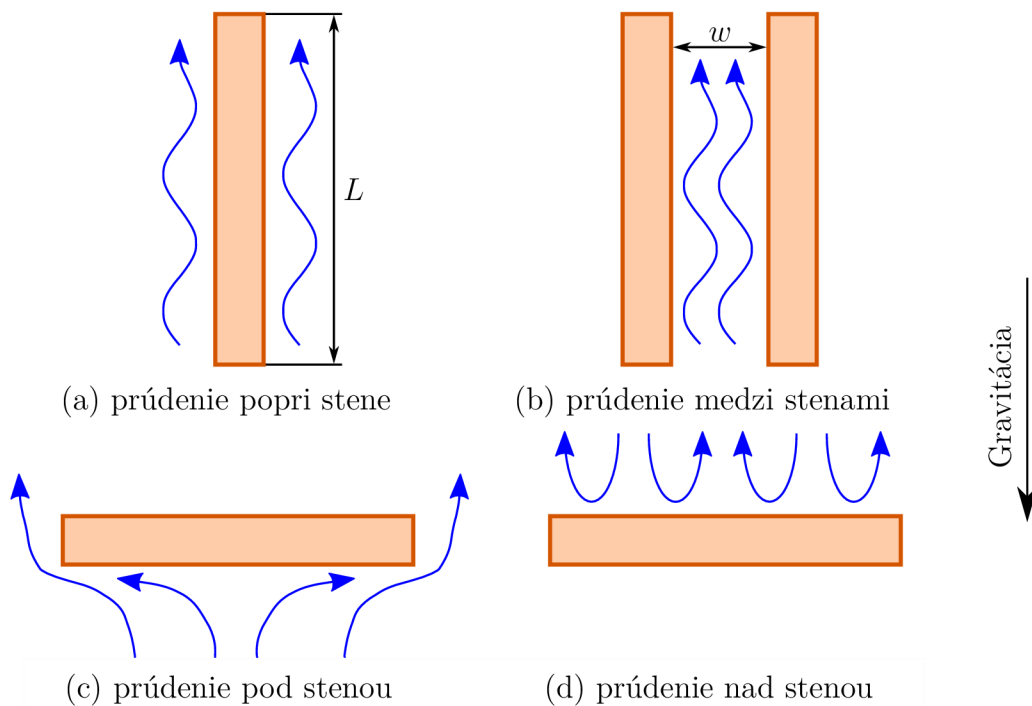
Pridružená simulácia prúdenia je vytvorená na totožnej geometrii chladiča a vykonaná v softvéri Ansys CFX. Jej výsledky aplikujeme v prípadoch, pri ktorých nemôžeme uvažovať, že sú splnené predpoklady na použitie empirických vzťahov. V nasledujúcich odsekoch zosumarizujeme a odôvodnime použitú variantu.

Typ a) prúdenie pozdĺž jednej vertikálnej steny

Rayleighovo číslo Ra sa počíta z rovnice

$$Ra = \frac{\beta g L^3 (u_s - u_\infty)}{\nu \alpha}, \quad (6.2)$$

kde β je objemová rozťažnosť vzduchu, g gravitačné zrýchlenie, L rozmer steny v rovnobežnom smere s prúdením vzduchu, ν viskozita vzduchu a α je tepelná difuzivita vzduchu. Pokiaľ platí $Ra \leq 10^9$, jedná sa o laminárne prúdenie. Vo všetkých výpočtoch pre pod-



Obrázok 6.8: Prúdenie vzduchu v okolí stien vyvolané vztlakom. Vzduch je chladnejší než stena, ohrieva sa a stúpa proti pôsobeniu gravitácie. Naznačené geometrické rozmery vstupujú do empirických výpočtov. Vytvorené podľa [12].

mienky chladiča sa stretne iba s týmto prípadom. Ďalej určíme Nusseltovo číslo Nu podľa vzťahu¹

$$Nu = 0,68 + \frac{0,67Ra^{\frac{1}{4}}}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right]^{\frac{4}{9}}},$$

kde Pr je Prandtlovo číslo pre vzduch. Súčiniteľ prestupu tepla potom spočítame ako

$$h = \frac{D_{air}}{L} Nu,$$

kde D_{air} je tepelná vodivosť (izotropná) vzduchu.

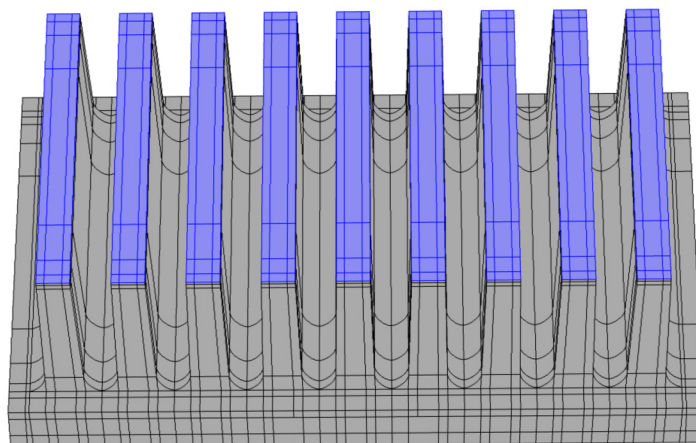
Kritickými plochami chladiča pre tento režim prúdenia sú konce rebier (obrázok 6.9). Tie sú veľmi úzke a po ich stranách je dominantné prúdenie v medzirebrových priestoroch. Vo výsledku sú tak ovplyvňované faktormi, ktoré nie sú postihnuteľné v zjednodušených empirických vzorcoch. Z tohto dôvodu využijeme na koncoch rebier súčiniteľ prestupu tepla zo simulácie.

Typ b) prúdenie medzi dvomi vertikálnymi stenami

Pri výpočte Rayleighovho čísla sa v rovnici (6.2) namiesto dĺžky L použije veľkosť medzery medzi stenami w :

$$Ra = \frac{\beta g w^3 (u_s - u_\infty)}{\nu \alpha}.$$

¹ empirických vzťahov pre Nusseltovo číslo je viac. Tento zvolený tvar dosahuje lepšiu presnosť pre laminárne prúdenie [12].



Obrázok 6.9: Plochy na koncoch rebier.

Vzťah pre Nusseltovo číslo má tvar

$$\text{Nu} = \left(\frac{576}{\text{El}^2} + \frac{2,873}{\text{El}^{\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{El} = \text{Ra} \frac{w}{L}.$$

Podobnostné číslo El sa nazýva Elenbaasovo. Súčiniteľ prestupu tepla potom určíme z rovnice

$$h = \frac{D_{air}}{w} \text{Nu}.$$

Typ c) a d) prúdenie pod a nad horizontálnou stenou

V tomto prípade nemôžeme posudzovať prirodzenú konvekciu ako hlavnú hnaciu silu vzduchu. Tou je naopak dominantné prúdenie v medzirebrovom priestore a preto sa svojím spôsobom jedná o nútenú konvekciu. Súčiniteľ prestupu tepla tak použijeme zo simulovaného prúdenia.

Aplikovanie simulácie a empirických vzťahov na numerický model

Uvedené empirické rovnice sú vypočítané v Matlabe pre teploty okolia 20 a 50 °C. Rozmedzie povrchových teplôt je zvolené tak, aby dostatočne pokrývalo teplotný rozsah, ktorý sa na chladiči môže na základe experimentu vyskytnúť. Pomocou nástroja LiveLink sú napočítané hodnoty importované do Comsolu ako lineárna interpolačná funkcia. Použitým krokom pre teplotnú závislosť je 0,5 °C.

Vlastnosti vzduchu sa vyhodnocujú pri tzv. teplote filmu

$$u_f = \frac{u_s + u_\infty}{2}.$$

Objemovú rozťažnosť vzduchu spočítame priamo z tejto teploty ako $\beta = \frac{1}{u_f}$. Hodnoty ostatných vlastností sú získané lineárnou interpoláciou medzi tabelovanými hodnotami pre teploty 300 a 350 K, uvedené v tabuľke 6.3.

Tabuľka 6.3: Tabelované hodnoty vlastností vzduchu pre 300 a 350 K [12].

u_f [K]	ν [m ² ·s ⁻¹]	α [m ² ·s ⁻¹]	Pr [-]	D_{air} [W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]
300	1,589·10 ⁻⁵	2,25·10 ⁻⁵	0,707	2,63·10 ⁻²
350	2,092·10 ⁻⁵	2,99·10 ⁻⁵	0,7	3·10 ⁻²

Simulácie prúdenia boli vykonané tak, aby sa z nich dala približne určiť teplotná závislosť súčiniteľa prestupu tepla. Za týmto účelom bol za materiál zvolený tepelne vodivý hliník. Výkon zdroja bol postupne nastavený na 4, 10, 15 a nakoniec 20 W. Na vybraných plochách sa následne spočítala priemerná povrchová teplota a priemerná hodnota súčiniteľa prestupu tepla.

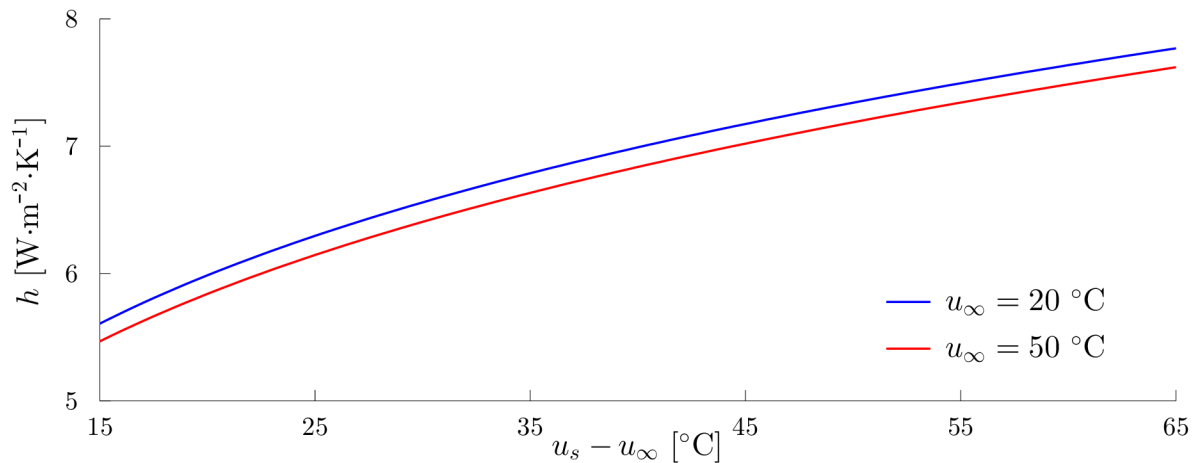
Do modelu je importovaných viacero interpolačných funkcií pre súčiniteľ prestupu tepla. Sú rozdelené podľa typu kontaktu povrchu so vzduchom a podľa miesta v modeli. Špeciálny prístup je aplikovaný na medzirebrový priestor, kde sa okrem teploty interpoluje aj podľa výšky na rebre. Dôvodom je premenná veľkosť medzery w , ktorá vstupuje do výpočtu. Typy importovaných funkcií sú uvedené v tabuľke 6.4 a ich nastavenie na plochách modelu je zobrazené v prílohe A.

Tabuľka 6.4: Importované interpolačné funkcie pre výpočet súčiniteľa prestupu tepla. Rozdelenie podľa typu kontaktu je v zmysle zavedeného delenia podľa obrázku 6.8.

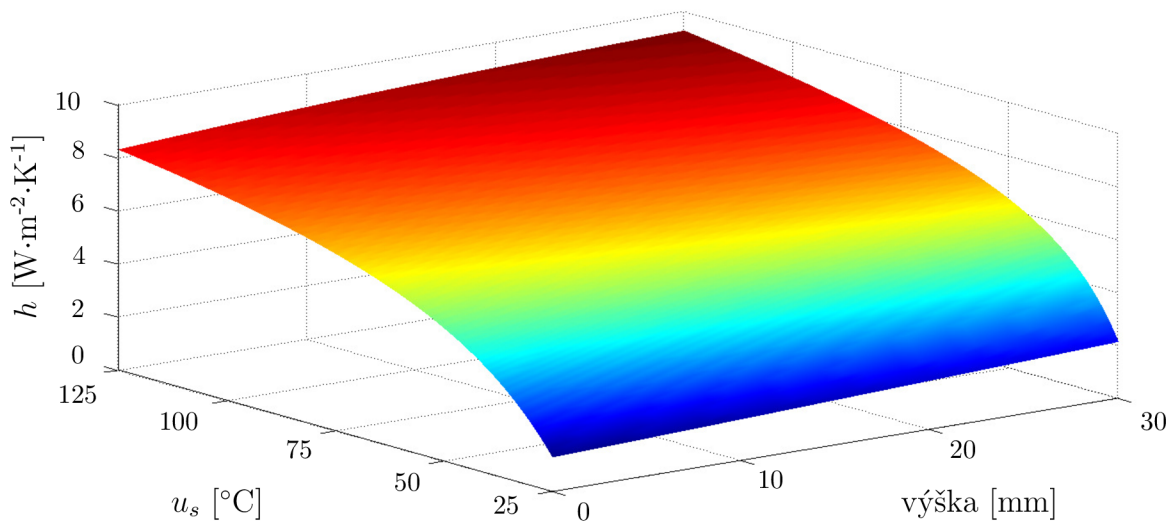
Označenie	Typ kontaktu	Rozmery geometrie	Umiestnenie
base_vert	a)	$L = 58$ mm	základňa
base_bottom	c)	simulácia	
base_top	d)		
fin_vert	a)	$L = 50$ mm	rebro
fin_end	a)	simulácia	
fin_inter	b)	$L = 50$ mm, $w = f(\text{výška})$	
fin_radius	b)	$L = 50$ mm, $w = 5$ mm	
fin_bottom	c)	simulácia	
fin_top	d)		
body_vert	a)	$L = 40$ mm	hliníkové telo
body_bottom	c)	simulácia	
body_top	d)		

Prakticky je okrajová podmienka konvekcie aplikovaná cez fyzikálny podmodul *Convective Heat Transfer*. V nej je do položky *heat transfer coefficient* zadaná príslušná interpolačná funkcia s argumentom teploty, prípadne aj výšky rebra. Každému výpočtovému uzlu na povrchu modelu je tak v priebehu výpočtu priradená vlastná hodnota súčiniteľa prestupu tepla. Pre nastavenie všetkých podmienok konvekcie je použitá teplota okolitého vzduchu $u_\infty = 20$ °C pre prvý a $u_\infty = 50$ °C pre druhý teplotný model. Na obrázku 6.10 môžeme vidieť graf interpolačnej funkcie pre prípad base_vert. Podobný (na pohľad parabolický) priebeh majú interpolačné funkcie aj v ostatných empirických prípadoch. Špeciálne, na obrázku 6.11 je zobrazená varianta pre prúdenie vzduchu v medzirebrovom priestore pre teplotu okolia 20 °C, kde sa interpoluje podľa povrchovej teploty a výšky daného bodu na rebre.

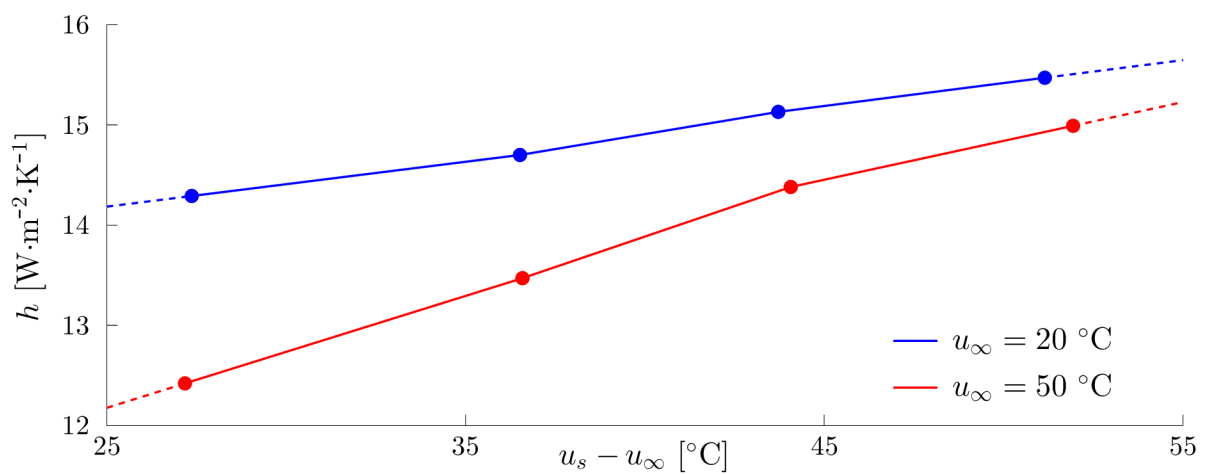
Vo variantách, kde sú aplikované hodnoty zo simulácie, interpolujeme medzi získanými údajmi lineárne. Rovnako tak aj extrapolujeme podľa trendu v predchádzajúcom intervale. Obrázok 6.12 zachycuje simulovanú interpolačnú funkciu na vrcholoch rebier (fin_end). Simulované hodnoty pre typ prúdenia pod stenou a nad stenou sú obsahom prílohy B.



Obrázok 6.10: Graf lineárnej interpolačnej funkcie súčiniteľa prestupu tepla pre prúdenie vzduchu rovnobežne s povrchom základne (base_vert).



Obrázok 6.11: Graf dvojrozmernej lineárnej interpolačnej funkcie súčiniteľa prestupu tepla pre prúdenie vzduchu v medzirebrovom priestore (fin_inter).

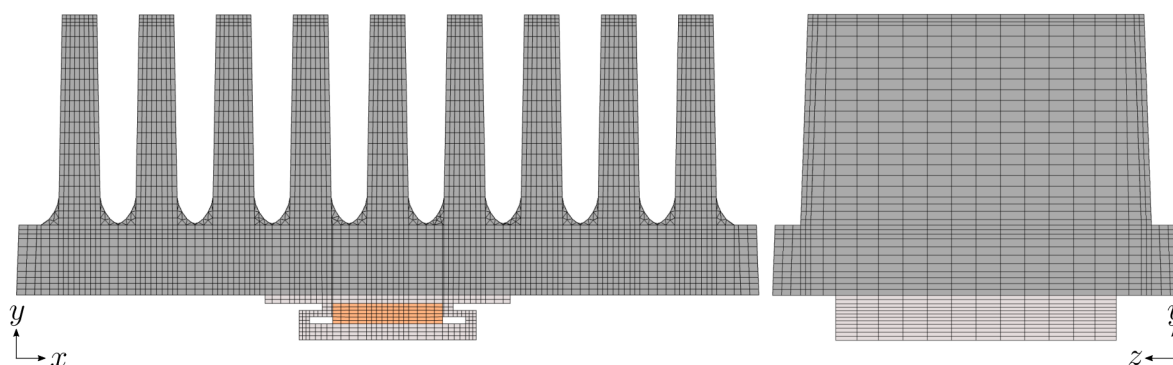


Obrázok 6.12: Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie fin_end. Prerušované čiary naznačujú extrapoláciu hodnôt.

6.1.4 Výpočtová sieť

Diskretizácia modelu je vytvorená manuálne so snahou o pravidelné kvádrové elementy. Za týmto účelom bolo nutné geometriu modelu rozdeliť na menšie kúsky. Tvorbu siete môžeme zhrnúť do dvoch častí.

- Vytvorenie dvojrozmernej siete v rovine rovnobežnej s rovinou xy . Vo všetkých doménach, s výnimkou rádiusov naspodku rebier, je použitá obdĺžniková sieť vytvorená operáciou *Mapped*. V rádiusoch je zvolená nepravidelná trojuholníková sieť cez operáciu *Free Triangular*. Dôraz bol kladený na to, aby každú novú materiálovú doménu zastupovali aspoň dva elementy zvlášť v smere x a v smere y . Vytvorenú rovinnú sieť pozorujeme v ľavej časti obrázku 6.13.
- Postupné vyťahovanie rovinatej siete do tretieho rozmeru pomocou operácie *Swept*. Aj tu bola snaha zastúpiť každú materiálovú doménu v smere z minimálne dvoma elementami. Túto časť tvorby siete vidíme na obrázku 6.13 vpravo.



Obrázok 6.13: Výpočtová sieť trojrozmerného modelu. Pohľad na rovinu xy (vľavo) a na rovinu yz (vpravo).

Najprv bola vytvorená sieť s podstatne menšími elementami než má finálna sieť na obrázku 6.13. Výsledná jemnosť diskretizácie bola dosiahnutá postupným zväčšovaním elementov podľa pamätovej náročnosti² testovacej simulácie³. Finálna výpočtová sieť obsahuje 75316 objemových, 86108 povrchových a 32024 hranových elementov, s celkovým počtom 1443446 stupňov voľnosti.

6.1.5 Výber sledovaných teplotných údajov

Z vyriešeného modelu sú získané hodnoty teplôt zo sledovaných miest. Tie odpovedajú výstupným dátam z experimentálneho merania uvedených v kapitole 4. Čo sa týka zabudovaných termočlánkov, im odpovedajúce teploty sú vyhodnotené z príslušných bodov modelu. Výsledná teplota sa pritom berie ako priemer z dvoch⁴ bodov symetrických

² pri takejto komplexnej geometrii s veľkým počtom elementov výrazne rastú pamäťové nároky výpočtu. Testovacia simulácia bola vykonaná na systéme s 8 GB fyzickej pamäte RAM a nastavenými 22 GB virtuálnej pamäte na hlavnom disku. Prvotný výpočet s jemnejšou sieťou sa ukončil predčasne z dôvodu nedostatočnej pamäte. Za finálnu sieť bola zvolená tá, pri ktorej bola simulácia úspešne dopočítaná.

³ pre účely testu boli za doteraz neurčené parametre umelo dosadené hodnoty. Konkrétne, kontaktná vodivosť $h_c = 10000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, tepelné vodivosti $\lambda_1^{\text{kraj}} = 20 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a $\lambda_3^{\text{kraj}} = 2,5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pri konzervatívnom predpoklade o vodivostiach a okolitej teplote $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

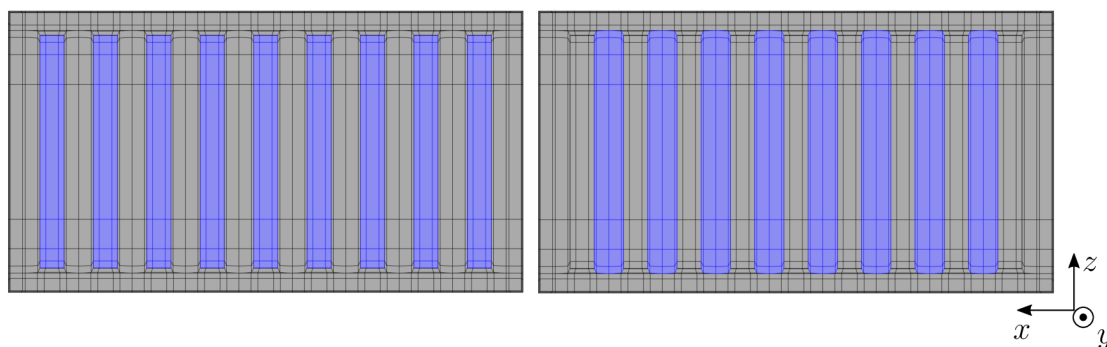
⁴ model z jeho podstaty nemôže bez prúdenia postihnúť skutočný vývoj teploty v smere gravitácie. Preto použijeme priemer z dvoch symetrických bodov, rovnako ako sú upravené experimentálne dáta.

vzhľadom k rovine xy . Súradnice miest z modelu k príslušným termočlánkom sú uvedené v tabuľke 6.5.

Tabuľka 6.5: Súradnice bodov modelu odpovedajúcich zabudovaným termočlánkom. Údaje sú v milimetroch. Značenie: HS – termočlánok pri zdroji (*heat source*), BS – termočlánok v telese (*body source*) MF – termočlánky v strednom rebre (*middle fin*), SF – termočlánky v druhom krajnom rebre (*side fin*).

	teleso		polymérny chladič						hliníkový chladič	
	HS	BS	MF1	MF2	MF3	SF1	SF2	SF3	MF	SF
x	0	0	0	0	0	33	33	33	0	33
y	-1,2	-0,6	5	20	30	5	20	30	10	10
z	±20	±15	±18,83	±14,65	±14,30	±18,83	±14,65	±14,30	±15	±15

Priemerné hodnoty na vrcholoch rebier a na viditeľných plochách medzier z pohľadu proti smeru osi y sú získané pomocou zabudovanej operácie *Average*. Pre každé rebro a medzeru je zadaná samostatne. Zvolené plochy pre vyhodnotenie priemernej teploty môžeme vidieť na obrázku 6.14. Tieto sledované miesta označíme F1 až F9 pre rebra a G1 až G8 pre medzery.



Obrázok 6.14: Vybrané plochy pre vyhodnotenie priemernej teploty na vrcholoch rebier (vľavo) a na viditeľných častiach medzier (vpravo).

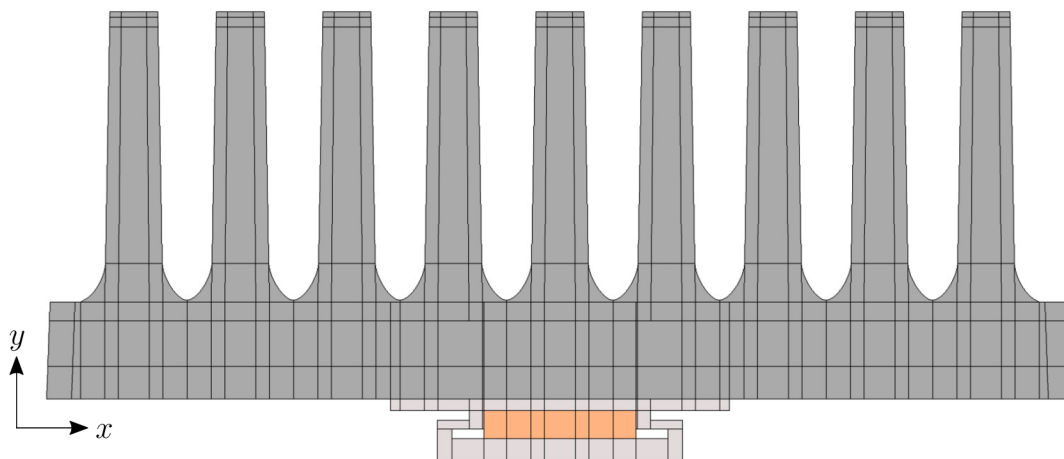
6.1.6 Vhodnosť modelu pre inverznú úlohu

V priebehu tejto kapitoly bola popísaná tvorba verného 3D modelu odpovedajúceho podmienkam experimentu. Doteraz sme neuvážili jeho vhodnosť pre sformulovanú inverznú úlohu. Čas výpočtu testovacej simulácie sa pohybuje od 2,5 až do 3 hodín. Pri riešení sformulovanej úlohy môžeme očakávať približne 100 vyhodnotení účelovej funkcie, čo by znamenalo minimálne 10 dní riešenia jednej inverznej úlohy. Ponúkalo by sa ďalej zväčšovať elementy siete alebo použiť hardware s väčšou fyzickou pamäťou, no riešením inverznej úlohy by sme sa stále pohybovali rádovo v dňoch. To nie je prijateľný čas pre praktické výpočty, obzvlášť vo fáze ladenia modelu. Namiesto toho vytvoríme zjednodušený 2D model predstavujúci rez rovinou xy , ktorého výpočtový čas je kratší než 1 minúta. Jeho nastavenie a použitie v inverznej úlohe je popísané v nasledujúcej podkapitole.

6.2 Dvojrozmerný model

6.2.1 Nastavenie modelu

Geometria odpovedá rezu 3D modelu rovinou xy so súradnicou $z = 0$. Rovnako aj v tomto prípade je uplatnené rozdelenie geometrie na menšie časti, ktoré pozorujeme na obrázku 6.15. Materiály sú nastavené identicky ako materiály 3D modelu tohto centrálného rezu.



Obrázok 6.15: Geometria dvojrozmerného modelu.

Nastavenie modulu vedenia tepla v 2D prípade je analogické až na pár zmien. Tie si uvedieme spolu s celkovým zhrnutím nastavených fyzikálnych podmienok.

- **Výkon zdroja** – nastavený totálny výkon $P_{tot} = 15$ W. Navyše však treba uviesť tretí rozmer d_z , aby bolo možné previesť P_{tot} na merný tepelný výkon. Ten sa prepočíta ako

$$Q = \frac{P_{tot}}{V}, \quad V = d_z \int_{\Omega} d\Omega.$$

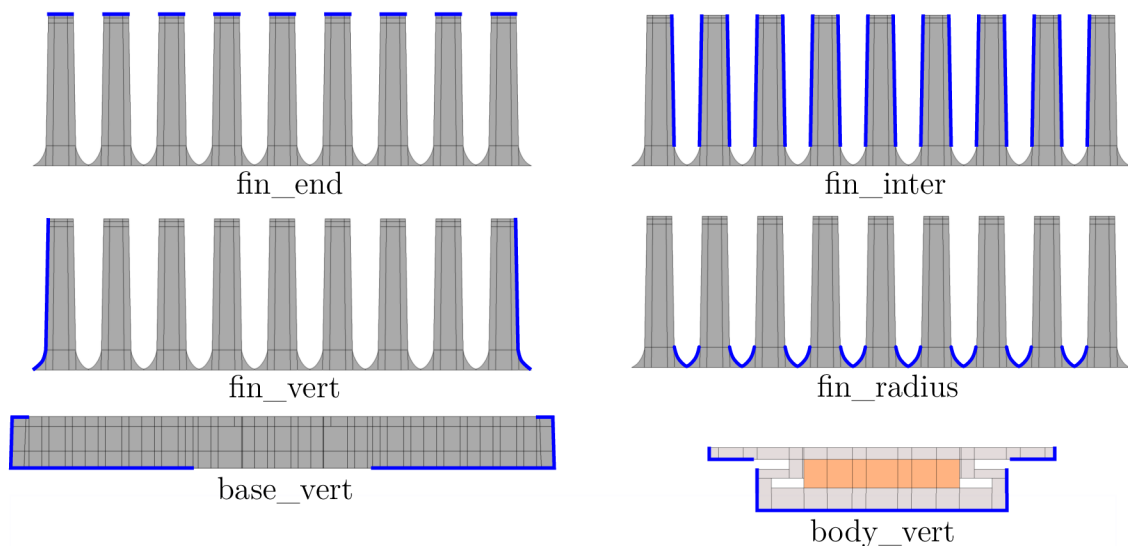
Za tento rozmer je dosadené $d_z = 58$ mm, ktorý odpovedá šírke spodnej strany základne chladiča. Na tejto dĺžke sa v 3D modeli musí generované teplo rozviesť.

- **Radiácia a Kontaktný odpor** – nastavené identicky ako v 3D prípade.
- **Prirodzená konvekcia** – v 2D modeli sa nedá zachytiť prúdenie vzduchu pod stenou a nad stenou. Ostatné typy zavedené v tabuľke 6.4 je možné modelovať. Ich rozmiestnenie na hranách 2D modelu pozorujeme na obrázku 6.16.

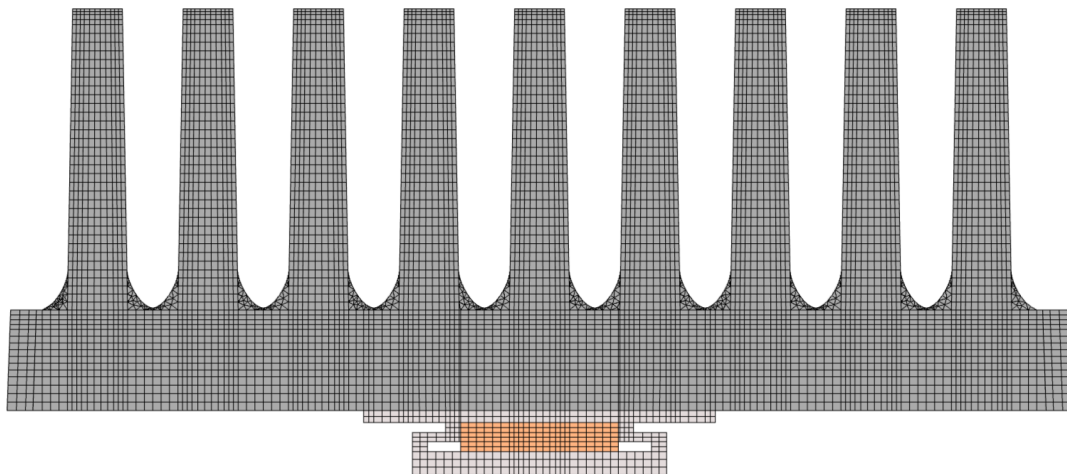
Výpočtová sieť bola vytvorená postupným zväčšovaním elementov z prvotnej jemnej siete. Proces bol ukončený vo chvíli, kedy sa začal rozdiel teplotného poľa z testovacej simulácie⁵ oproti prvotnej sieti pohybovať okolo $0,01$ °C. Finálna sieť je na obrázku 6.17. Obsahuje 7136 plošných a 3702 hraničných elementov, celkový počet riešených stupňov voľnosti je 43160. Na rovnakom systéme, kde bola riešená testovacia simulácia 3D modelu, trvá výpočet 20 sekúnd.

Výber sledovaných údajov z vyriešenej úlohy je analogický 3D modelu. Teploty z miest termočlánkov sa berú priamo podľa súradníc bodov. Tie sú zhodné s tabuľkou 6.5 až na chýbajúcu súradnicu z . Oblasti pre získanie priemerných teplôt na koncoch rebier a v medzerách sú zobrazené na obrázku 6.18.

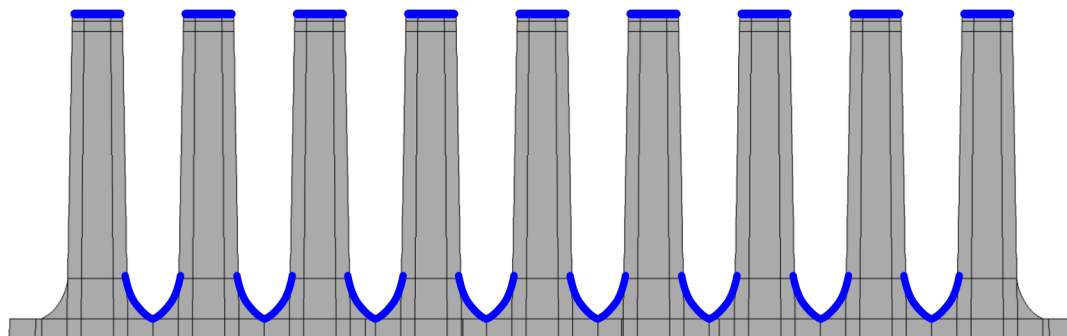
⁵ rovnaké nastavenie doteraz neurčených parametrov ako v testovacej simulácii 3D modelu.



Obrázok 6.16: Hrany (zvýraznené modrou) dvojrozmerného modelu s nastavenou prirodzenou konvekciou. Popis pod časťami obrázku odpovedá príslušnému označeniu interpolačnej funkcie zavedenej v tabuľke 6.4.



Obrázok 6.17: Výpočtová sieť dvojrozmerného modelu.



Obrázok 6.18: Vybrané hrany pre vyhodnotenie priemernej teploty na vrcholoch rebier a na viditeľných častiach medzier.

6.2.2 Použitie modelu v inverznej úlohe

Zjednodušený 2D model svojím krátkym výpočtovým časom umožňuje prakticky riešiť sformulovanú inverznú úlohu. Pred samotným riešením tejto úlohy je však nutné posúdiť chybu, ktorej sa zjednodušením problému dopustíme. V tabuľke 6.6 vidíme vybrané

teploty z 2D a 3D testovacej simulácie. Rozdiel medzi odpovedajúcimi si teplotami kvantifikuje relatívnou chybou Δ^{rel} . Tú definujeme ako pomer ohrevu jednotlivých modelov voči referenčnej teplote okolitého vzduchu u_∞ , konkrétne

$$\Delta^{rel} := \frac{u_{2D} - u_\infty}{u_{3D} - u_\infty}. \quad (6.3)$$

Tabuľka 6.6: Porovnanie sledovaných teplôt z testovacej simulácie 2D a 3D modelu.

miesto	u_{2D} [°C]	u_{3D} [°C]	Δ^{rel} [-]	miesto	u_{2D} [°C]	u_{3D} [°C]	Δ^{rel} [-]
F1	49,11	45,53	1,14	MF3	60,86	56,38	1,12
F2	52,29	48,24	1,14	SF1	58,26	53,85	1,13
F3	55,38	51,13	1,14	SF2	55,12	50,89	1,14
F4	58,19	53,86	1,13	SF3	53,52	49,34	1,14
F5	59,28	54,95	1,12	G1	55,47	51,36	1,13
F6	58,19	53,86	1,13	G2	58,72	54,36	1,13
F7	55,38	51,13	1,14	G3	62,41	57,94	1,12
F8	52,29	48,24	1,14	G4	64,88	60,38	1,11
F9	49,11	45,53	1,14	G5	64,88	60,38	1,11
HS	75,34	72,01	1,06	G6	62,41	57,94	1,12
MF1	68,36	63,28	1,12	G7	58,72	54,36	1,13
MF2	62,96	58,44	1,12	G8	55,47	51,36	1,13

Priemerná relatívna chyba dosahuje 13 %. Riešenie inverznej úlohy s takouto chybou základného modelu by viedlo k chybným výsledkom. Za účelom potlačenia nepresnosti 2D modelu zavedieme korekčný súčiniteľ ξ , ktorý aproximuje skutočný rozdiel medzi modelmi Δ^{rel} . Po jeho stanovení získame korigovanú teplotu 2D modelu u_{2D}^ξ , ktorá aproximuje teplotu u_{3D} . Jej predpis obdržíme usporiadaním rovnice (6.3) ako

$$u_{3D} \approx u_{2D}^\xi = \frac{u_{2D} - u_\infty}{\xi} + u_\infty.$$

K riešeniu inverznej úlohy je dostatočné určiť korekčné hodnoty len pre sledované teploty modelu. Vektor korekčných súčiniteľov ξ stanovíme lineárnou regresiou⁶. Jeho jednotlivé zložky hľadáme v tvare

$$\xi_i = \mathbf{p}_0^T \boldsymbol{\beta}_i, \quad (6.4)$$

kde $\mathbf{p}_0 = [p_1 \ \dots \ p_N \ 1]^T$ je rozšírený vektor optimalizovaných parametrov. Korekčný súčiniteľ tak hľadáme v tvare lineárnej kombinácie prvkov \mathbf{p} s absolútnym členom $\beta_{i, N+1}$. Vektor regresných koeficientov $\boldsymbol{\beta}_i$ získame z rovnice

$$\boldsymbol{\beta}_i = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}_i. \quad (6.5)$$

Maticu regresných prediktorov \mathbf{X} naplníme referenčnými hodnotami optimalizovaných parametrov $\{\mathbf{p}_j\}_{j=1}^{N_r}$, teda jej predpis je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_{N_r} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (6.6)$$

⁶ s náhodnými veličinami, ktoré sú predmetom regresnej analýzy, nepracujeme. Využijeme z nej iba odvodený vzťah pre určenie regresných koeficientov metódou najmenších štvorcov [44].

Aby bola regresná úloha riešiteľná, počet referenčných modelov musí spĺňať

$$N_r \geq N + 1.$$

Pri rovnosti sa jedná o priamu interpoláciu, spravidla však budeme používať

$$N_r = N + 2.$$

Vektor \mathbf{Y}_i zostavíme z relatívnych chýb medzi vyriešenými referenčnými 2D a 3D modelmi:

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} \Delta_{1,i}^{rel} \\ \vdots \\ \Delta_{N_r,i}^{rel} \end{bmatrix}.$$

Ukážka zlepšenia presnosti použitím korekčného súčiniteľa

Efekt použitia korekčného súčiniteľa demonštrujeme na vzorovom príklade. Uvažujme, že inverznou úlohou chceme stanoviť hodnotu λ_1^{kraj} a λ_3^{kraj} za konzervatívneho predpokladu. Kontaktnú vodivosť necháme nastavenú na hodnote $h_c = 10000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. Zvolíme parametre štyroch referenčných modelov a jedného demonstračného, na ktorom ukážeme aplikovanie korekčného súčiniteľa. Nastavené hodnoty sú uvedené v tabuľke 6.7.

Tabuľka 6.7: Nastavenie parametrov demonstračného a referenčných modelov vo vzorovej úlohe.

Číslo modelu	$\lambda_1^{\text{kraj}} [\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}]$	$\lambda_3^{\text{kraj}} [\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}]$
1	25	1
2	25	3
3	15	1
4	15	3
0	20	2

Z hodnôt nastavených parametrov zostavíme maticu regresných prediktorov podľa predpisu (6.6)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 15 & 15 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 25 & 1 & 1 \\ 25 & 3 & 1 \\ 15 & 1 & 1 \\ 15 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za sledované miesta zvolíme teplotu pri zdroji (HS) a priemerné teploty na krajnom (F1) a strednom rebre (F5). Referenčné modely vyriešime a zostavíme vektory relatívnych chýb:

$$\mathbf{Y}_{\text{HS}} = \begin{bmatrix} 1,060 \\ 1,073 \\ 1,042 \\ 1,060 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{\text{F1}} = \begin{bmatrix} 1,132 \\ 1,136 \\ 1,146 \\ 1,148 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{\text{F5}} = \begin{bmatrix} 1,124 \\ 1,122 \\ 1,132 \\ 1,123 \end{bmatrix}.$$

Tie spolu s maticou \mathbf{X} dosadíme do vzťahu (6.5) a získame vektory regresných koeficientov

$$\boldsymbol{\beta}_{\text{HS}} = \begin{bmatrix} 0,0016 \\ 0,0076 \\ 1,0116 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_{\text{F1}} = \begin{bmatrix} -0,0013 \\ 0,0015 \\ 1,1644 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_{\text{F5}} = \begin{bmatrix} -0,0005 \\ -0,0026 \\ 1,1396 \end{bmatrix}.$$

Pre výpočet vektoru korekčných súčiniteľov demonstračného modelu stačí dosadiť výsledné koeficienty do rovnice (6.4) a dostaneme

$$\boldsymbol{\xi} = [\xi_{\text{HS}} \quad \xi_{\text{F1}} \quad \xi_{\text{F5}}]^T = [1,0586 \quad 1,1405 \quad 1,1253]^T.$$

Demonstračný 2D a 3D model vyriešime a s použitím vypočítaných súčiniteľov ξ upravíme sledované teploty 2D modelu. Následne spočítame relatívnu chybu z korigovaných teplôt ako

$$\Delta_{\xi}^{rel} = \frac{u_{2\text{D}}^{\xi} - u_{\infty}}{u_{3\text{D}} - u_{\infty}}.$$

Všetky potrebné údaje zo sledovaných miest sú uvedené v tabuľke 6.8. Po skorigovaní sa nová relatívna chyba pohybuje pod 1 %. V absolútnych rozdieloch vidíme zhodu s 3D modelom do 0,1 °C. Dostali sme sa tak pod meráciu presnosť termočlánkov použitých v experimente.

Tabuľka 6.8: Zlepšenie relatívnej chyby demonstračného 2D modelu po aplikovaní korekčného súčiniteľa.

Miesto	$u_{2\text{D}}$ [°C]	$u_{2\text{D}}^{\xi}$ [°C]	$u_{3\text{D}}$ [°C]	Δ_{ξ}^{rel} [-]
HS	77,09	73,93	73,83	1,0018
F1	48,78	45,23	45,24	0,9995
F5	58,90	54,57	54,55	1,0004

Zhrnutie výpočtu účelovej funkcie pre dvojrozmerný model

Do pôvodne definovanej účelovej funkcie v rovnici (5.6) zahrnieme použitie korekčného súčiniteľa ξ . Pred samotným riešením inverznej úlohy vyriešime $N + 2$ referenčných 2D a 3D modelov, kde N je počet optimalizovaných parametrov. Parametre referenčných modelov určíme tak, aby zahrňovali rozsah očakávaných hodnôt⁷. Prípravnú fázu pred spustením optimalizačnej úlohy ukončíme stanovením relatívnych chýb v sledovaných miestach odpovedajúcich si modelov. Tým naplníme množinu vektorov $\{\mathbf{Y}_j\}_{j=1}^{N_s}$ potrebných k výpočtu korekčných súčiniteľov ξ_i . Výpočet účelovej funkcie potom pozostáva z krokov:

- aktualizácia 2D modelu vektorom parametrov \mathbf{p} , jeho vyriešenie a získanie sledovaných teplôt $\tilde{\mathbf{u}}_{2\text{D}}$,
- výpočet korekčných súčiniteľov a odhad teplôt 3D modelu $\tilde{\mathbf{u}}_{2\text{D}}^{\xi}$,
- vyčíslenie účelovej funkcie

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N_s} \left(\tilde{u}_{2\text{D},i}^{\xi} - \bar{u}_i \right)^2.$$

⁷ napríklad výrobcovia udávajú, že dobrá vodivosť materiálu sa pohybuje okolo 20 W·m⁻¹·K⁻¹. Preto v referenčných modeloch použijeme pre odpovedajúcu vodivosť raz 15 a raz 25 W·m⁻¹·K⁻¹.

7 Overenie a korekcia numerického modelu na hliníkovom chladiči

Numerický model vytvorený v kapitole 6 obsahuje niekoľko neznámych. Jednak sú nimi hodnoty tepelných vodivostí polymérneho materiálu, ktorých stanovenie patrí k cieľom diplomovej práce, ale tiež sa jedná o nastavenie okrajových podmienok. Medzi ne spadá hodnota kontaktnej vodivosti na rozmedzí chladiča a hliníkového tela a spôsob predpisu prirodzenej konvekcie. Tá je sčasti riešená interpoláciou medzi empiricky stanovenými súčiniteľmi prestupu tepla. Tie sú síce slušnou aproximáciou, no pri následných výpočtoch tepelných vodivostí sa ich nepresnosť môže podpísať na výsledku. Pred riešením polymérneho chladiča tak najprv overíme numerický model na hliníkovom chladiči (zliatina AlCuMgPb) so známou izotropnou tepelnou vodivosťou $130 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Tým odstránime neznámu vo forme materiálových vlastností a zostane iba posúdenie správnosti okrajových podmienok.

Nastavenie hliníka v modeli je jednoduché, všetkým objemovým doménam chladiča sa predpíše tenzor tepelnej vodivosti $\mathbf{D} = 130\delta$. Hodnota emisivity¹ plôch chladiča je zmenená na $\varepsilon = 0,135$. Experiment s hliníkovým chladičom bol vykonaný pri teplotách okolia 20 a 50 °C. Za smerodajné dáta k overeniu a nastaveniu okrajových podmienok považujeme údaje z termočlánkov. Spracované hodnoty z meraní sú v tabuľke 7.1.

Tabuľka 7.1: Experimentálne dáta z meraní s hliníkovým chladičom pri okolitých teplotách 20 a 50 °C. Označenie miest s termočlánkami odpovedá tabuľke 6.5.

u_{amb} [°C]	Miesto	HS	BS	MF	SF
20	\bar{u} [°C]	65,10	65,39	63,34	62,52
50		96,21	96,61	94,53	93,72

Pri prvej hliníkovej simulácii odhadneme hodnotu kontaktnej vodivosti za zjednodušených predpokladov:

- teploty na rozhraní chladiča s hliníkovým telom sú po celej ploche kontaktu konštantné a totožné s teplotami z termočlánkov BS a MF,
- všetok výkon zdroja $P_{tot} = 15 \text{ W}$ sa preniesie kontaktnou plochou do chladiča.

Odhad získame usporiadaním jednej z rovníc (6.1) nasledovne:

$$h_c = \frac{\dot{q}_{n,1}}{\bar{u}_{BS} - \bar{u}_{MF}} = \frac{P_{tot}}{S(\bar{u}_{BS} - \bar{u}_{MF})},$$

kde za plochu kontaktu dosadíme $S = 35 \cdot 40 \text{ mm}^2$. Zaokrúhlením výsledku na stovky dostaneme

$$h_c = 5200 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}.$$

Rozdiel simulovaných teplôt \tilde{u} prvého výpočtu hliníkových modelov oproti experimentálnym hodnotám je uvedený v tabuľke 7.2. V oboch modeloch sa vyskytujú chyby nad presnosťou merania použitých termočlánkov ($\pm 0,2 \text{ °C}$).

Pre vykonanie korekcie prirodzenej konvekcie zavedieme bezrozmerný parameter h_{mod} . Ním vynásobíme hodnotu súčiniteľa prestupu tepla v empiricky stanovených okrajových

¹ hodnota bola stanovená po experimentálnom meraní na základe porovnania termovízných snímok s teplotami získanými z termočlánkov.

Tabuľka 7.2: Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt po prvom výpočte na hliníkových modeloch.

u_{amb} [°C]	Miesto	HS	BS	MF	SF
20	$\tilde{u} - \bar{u}$ [°C]	-0,36	0,14	-0,56	-0,92
50		0,81	1,20	0,53	0,16

podmienkach konvekcie. Pre obidva modely dvoch okolitých teplôt vyriešime inverznú úlohu optimalizujúcu parametre h_{mod} a h_c . Sledovanými miestami pre minimalizáciu sú práve tie uvedené v tabuľkách vyššie. Výsledné hodnoty parametrov ukazuje tabuľka 7.3.

Tabuľka 7.3: Výsledky z inverzného výpočtu na hliníkových modeloch.

u_{amb} [°C]	h_{mod} [-]	h_c [W·m ⁻² ·K ⁻¹]	Miesto	HS	BS	MF	SF
20	0,968	7730	$\tilde{u} - \bar{u}$ [°C]	-0,23	0,22	0,20	-0,18
50	1,017	7700		-0,17	0,17	0,20	-0,18

V modeli polymérneho chladiča spôsobí zmena parametru h_{mod} medzi hodnotou 0,968 a 1,017 teplotný rozdiel v sledovaných miestach približne 1 °C. Tento rozdiel je väčší než meracia presnosť použitých termočlánkov, preto vo výslednom polymérnom modeli použijeme hodnotu h_{mod} príslušnú okolitej teplote. Citlivosť na kontaktnú vodivosť medzi výslednými hodnotami je rádovo menšia než 0,01 °C. Vo výsledných modeloch je tak použitá zaokrúhlená hodnota $h_c = 7700$ W·m⁻²·K⁻¹.

8 Výpočty tepelnej vodivosti

Po doplnení vypočítanej kontaktnej vodivosti a modifikácie prirodzenej konvekcie do príslušných polymérnych modelov môžeme vykonať inverzné výpočty optimalizujúce tepelné vodivosti. Dohromady máme štyri modely pre dve okolité teploty a dva prístupy k dobrej vodivosti v krajnej vrstve. Pre každý z nich spravíme viac výpočtov s odlišnými cieľovými teplotami v účelovej funkcii. Tieto optimalizačné výpočty sú označené v tabuľke 8.1.

Tabuľka 8.1: Označenie výpočtov podľa cieľových teplôt optimalizácie. Bodky v príslušnom stĺpci znamenajú, že tieto teploty boli použité v účelovej funkcii f . Podľa obrázku 4.3 sú v základni 2 termočlánky a v rebrách 4. Pre zdroj je použitý termočlánok HS.

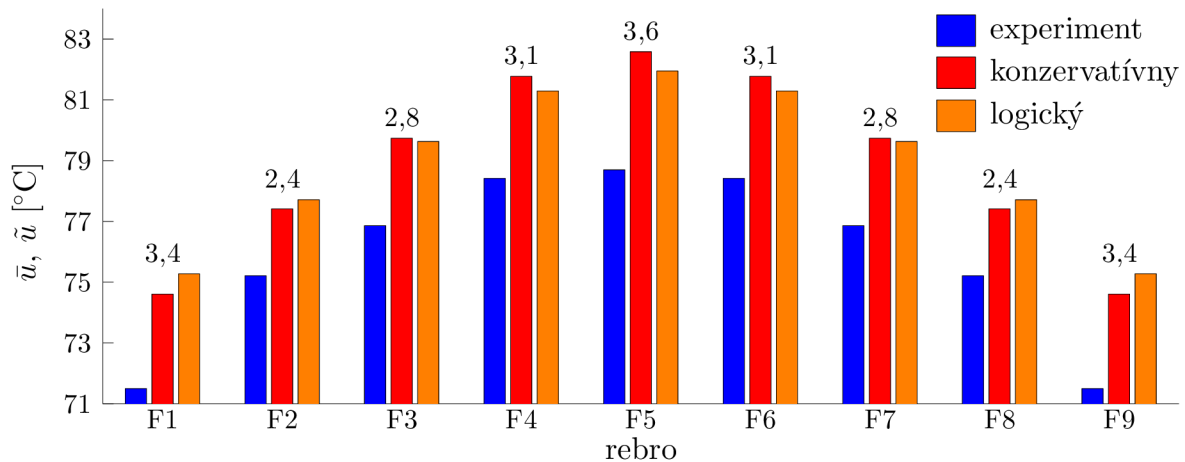
Označenie optimalizácie	Rebrá	Zdroj	Termočlánky v základni	Termočlánky v rebrách	Medzery	Počet teplôt
F	•	•				10
G		•			•	9
FG	•	•			•	18
FD	•	•	•			12
GD		•	•		•	11
ALL	•	•	•	•	•	24
GDT		•	•	•	•	15

Tabuľka 8.2: Výsledky inverzných výpočtov pre modely s teplotou okolia 50 °C. Konzervatívny model predpokladá $\lambda_1^{\text{jad}} = \lambda_1^{\text{kraj}}$, logický $2\lambda_1^{\text{jad}} = \lambda_1^{\text{kraj}}$.

Výpočet	Konzervatívny					Logický				
	λ_1^{kraj}	λ_1^{jad}	λ_3^{kraj}	λ_3^{jad}	f	λ_1^{kraj}	λ_1^{jad}	λ_3^{kraj}	λ_3^{jad}	f
	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]					[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]				
F	24,4	24,4	1,2	2,4	107	30,0	15,0	1,0	2,0	107
G	21,9	21,9	2,3	4,5	1,6	22,0	11,0	2,4	4,9	2,0
FG	21,3	21,3	1,4	2,7	111	22,5	11,3	1,4	2,7	116
FD	21,9	21,9	1,3	2,6	108	24,3	12,2	1,2	2,4	112
GD	20,7	20,7	2,3	4,7	3,6	20,8	10,4	2,6	5,1	3,4
ALL	20,3	20,3	1,5	3,0	125	21,1	10,6	1,5	3,0	130
GDT	20,5	20,5	2,5	5,0	11,5	20,4	10,2	2,7	5,5	11,3

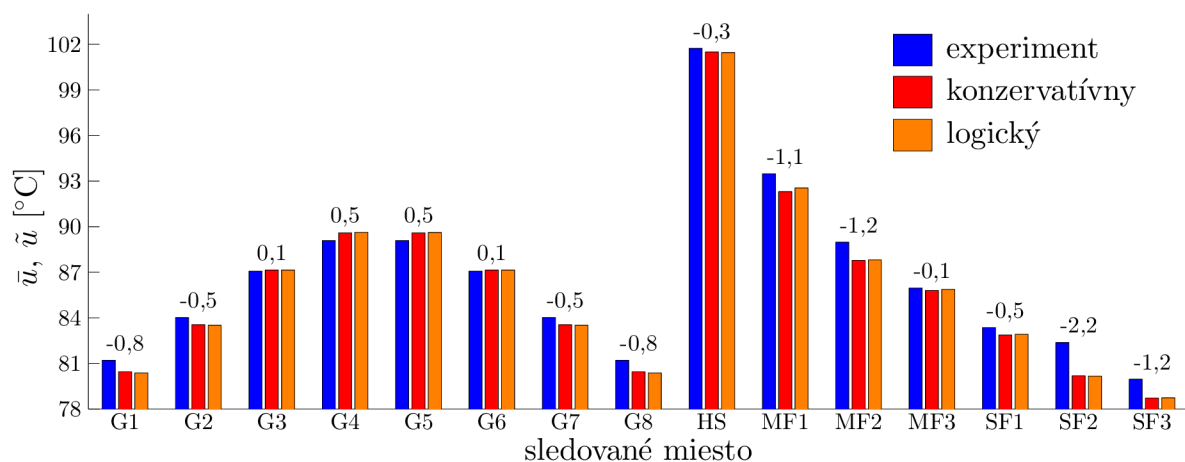
Výsledky inverzných úloh pre modely s okolitou teplotou 50 °C obsahuje tabuľka 8.2. Ako prvé porovnáme odlišné prístupy k modelovaniu materiálu. Všimneme si, že hodnoty optimálnej účelovej funkcie sú pre konzervatívny a logický prístup takmer rovnaké. Spolu s faktom, že λ_1^{kraj} sa narozdiel od λ_1^{jad} výrazne nelíšia, to vedie k záveru, že krajná vrstva má omnoho väčší vplyv na celkové rozvedenie tepla v objeme chladiča. Napriek tomu, že pomer jadra a krajných vrstiev je blízko k 50 %, vrstva naspodku základne (a teda priamo nad tepelným zdrojom) je natolko vysoká, že podstatný rozvod tepla z hľadiska minimalizovania účelovej funkcie sa deje práve v nej.

Čo sa týka samotnej účelovej funkcie, môžeme vidieť, že zahrnutie teplôt na koncoch rebier prináša veľkú chybu. Pri optimalizačnom výpočte F sa rozdiel od experimentálnych hodnôt pohybuje okolo 3 °C (obrázok 8.1). V oboch prípadoch je pritom teplota zdroja takmer o 5 °C vyššia než z experimentu.



Obrázok 8.1: Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt na vrcholoch rebier pre oba materiálové prístupy s okolitou teplotou 50 °C. Optimalizácia F. Hodnoty nad stĺpcami predstavujú priemerný rozdiel teploty oboch modelov od experimentu.

V kontexte tejto chyby vyvolanej zahrnutím rebier do účelovej funkcie považujeme za smerodajný výsledok z optimalizácie GDT (zvýraznené vodivosti v tabuľke 8.2), ktorej účelová funkcia obsahuje všetky teploty s výnimkou rebier. Porovnanie cieľových teplôt optimalizovaných modelov s experimentom je na obrázku 8.2. Zdrojom najväčšej chyby je teplota v mieste druhého termočlánku v krajnom rebre SF2. Jej pôvod môže byť vysvetlený ako chyba merania, pretože trend klesania teploty po výške krajného rebra neodpovedá trendu v strednom rebre. Mimo nej sa rozdiely pohybujú pod, respektíve tesne nad 1 °C. Pri len 2 optimalizovaných parametroch a až 15 cieľových teplotách môžeme túto chybu považovať za prípustnú. Pozorujeme však asymetriu chýb, veľké množstvo z nich je záporné, v priemere -0,5 °C. V celkovom rozsahu chýb rádovalo jedného stupňa sa tak jedná o výraznú asymetriu a tento problém musí byť ďalej adresovaný.

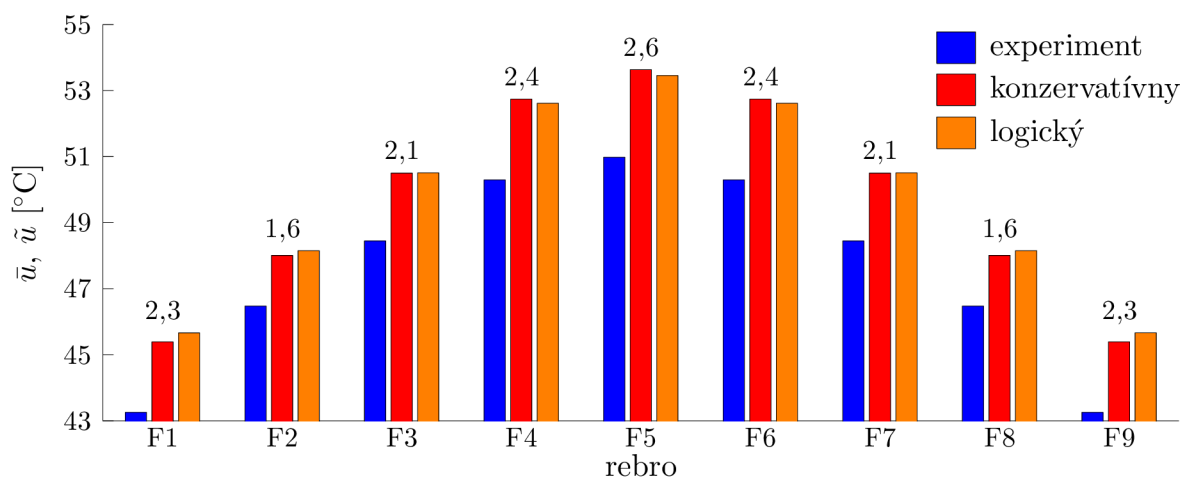


Obrázok 8.2: Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt v sledovaných miestach pre oba materiálové prístupy s okolitou teplotou 50 °C. Optimalizácia GDT. Hodnoty nad stĺpcami predstavujú priemerný rozdiel teploty oboch modelov od experimentu.

Tabuľka 8.3: Výsledky inverzných výpočtov pre modely s teplotou okolia 20 °C. Konzervatívny model predpokladá $\lambda_1^{\text{jad}} = \lambda_1^{\text{kraj}}$, logický $2\lambda_1^{\text{jad}} = \lambda_1^{\text{kraj}}$.

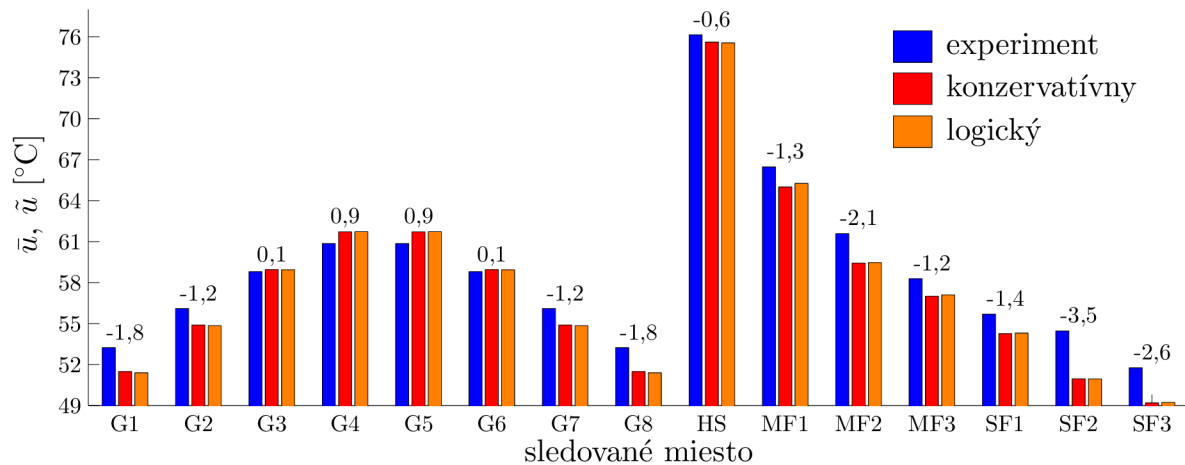
Výpočet	Konzervatívny					Logický				
	λ_1^{kraj}	λ_1^{jad}	λ_3^{kraj}	λ_3^{jad}	f	λ_1^{kraj}	λ_1^{jad}	λ_3^{kraj}	λ_3^{jad}	f
	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]					[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]				
F	21,7	21,7	1,2	2,3	52	23,6	11,8	1,1	2,2	54
G	19,0	19,0	1,8	3,7	9,1	19,1	9,5	2,0	3,9	10
FG	19,0	19,0	1,3	2,7	64	19,5	9,7	1,3	2,7	68
FD	18,8	18,8	1,3	2,6	57	19,8	9,9	1,3	2,5	59
GD	17,9	17,9	1,9	3,7	14	17,9	9,0	2,0	4,0	14
ALL	17,5	17,5	1,5	3,0	101	17,8	8,9	1,6	3,1	104
GDT	17,1	17,1	2,1	4,3	40	17,0	8,5	2,3	4,7	40

Pri modeloch s nižšou okolitou teplotou 20 °C (výstup z inverzných úloh je v tabuľke 8.3) pozorujeme rovnaké špecifiká. Zmena k logickému prístupu modelovania krajnej vrstvy neprináša rozdiel, dokonca v rámci účelovej funkcie nastáva zhoršenie. Teploty na koncoch rebier nedokáže model v jednoduchšej optimalizácii F postihnúť, chyby zobrazuje obrázok 8.3. Na zdroji je v tomto prípade teplota oproti experimentu vyššia o viac než 3 °C. Rovnako ako v prípade vyššej okolitej teploty považujeme za smerodajné hodnoty vodivosti tie z optimalizácie GDT. Výsledné teploty v porovnaní s experimentom sú pre tento výpočet na obrázku 8.4. Tentokrát však pozorujeme viac odľahlých chýb, predovšetkým krajné medzery a termočlánky MF2, SF2 a SF3.



Obrázok 8.3: Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt na vrcholoch rebier pre oba materiálové prístupy s okolitou teplotou 20 °C. Optimalizácia F. Hodnoty nad stĺpcami predstavujú priemerný rozdiel teploty oboch modelov od experimentu.

Medzi jednotlivými teplotnými modelmi (rozdielna okolitá teplota) dochádza k výrazne odlišným výsledným tepelným vodivostiam. Konkrétne, pri optimalizácii GDT máme 20,5 a 17,1 W·m⁻¹·K⁻¹ pre λ_1^{kraj} , respektíve 2,5 a 2,1 W·m⁻¹·K⁻¹ pre λ_3^{kraj} . Jedná sa o relatívny rozdiel 17 %. Ten spočíva v správaní sa chladiča pri prechode k vyššej okolitej teplote. Pri experimente stúpala teplota na zdroji zo 76,1 °C na 101,7 °C, teda o 25,6 °C. Numerický model však pri zmene na teplotu okolia 50 °C predpokladá za zvolených rovna-



Obrázok 8.4: Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt v sledovaných miestach pre oba materiálové prístupy s okolitou teplotou 20 °C. Optimalizácia GDT. Hodnoty nad stĺpcami predstavujú priemerný rozdiel teploty oboch modelov od experimentu.

kých vodivostí nárast teploty zdroja až o 28,5 °C. Tento fakt spôsobí, že pri optimalizácii modelu v teplejšom prostredí dôjde k zvýšeniu tepelných vodivostí, aby sa tento rozdiel vykompenzoval.

9 Diskusia

Prístup k stanoveniu anizotropie tepelnej vodivosti polymérneho chladiča bol zvolený čo najkonzervatívnejšie. Jeho vnútorná geometria bola dôkladne preskúmaná analýzou lomu použitého prototypu. Tým sa získala predstava o kvalitatívnom rozdelení anizotropie. Zdôraznime, že výsledky tejto časti boli vedené so znalosťami uvedenými v štúdiu tepelne vodivých polymérnych kompozitov [29]. Nastavenie okrajových podmienok numerického modelu bolo navyše podporené simuláciami prúdenia na totožnej geometrii. Tieto podmienky boli overené a potrebné parametre skorigované použitím dát z izotropného hliníkového chladiča. Všetky kroky tak boli vedené so zámerom vybudovania kvalitného modelu pred pustením sa do riešenia hlavných neznámych – tepelných vodivostí polymérneho kompozitu. V inverzných výpočtoch boli vodivosti v jadre a krajnej vrstve zviazané vzťahmi na základe štúdie a ďalšieho predpokladu, optimalizácia tak pracovala iba s dvomi parametrami. Osamostatnenie hodnôt v jadre a krajnej vrstve nebolo priamo odôvodniteľné predchádzajúcimi štúdiami. Výsledky výpočtov uvedených v kapitole 8 priniesli niekoľko problémov ukazujúcich na možnú nedostatočnosť vytvoreného modelu, ktoré je potrebné adresovať a zvážiť ich ďalšie riešenie.

9.1 Odchýlky na koncoch rebier

Vo všetkých výpočtoch bola pozorovaná veľká odchýlka simulovaných teplôt na vrcholoch rebier oproti tým experimentálnym. Model nedokázal tieto miesta dostatočne ochladiť tak, aby zároveň držal požadovanú teplotu zdroja. Logicky sa ponúka, že tento problém by vyriešila veľká krajná vrstva s nízkou vodivosťou, čím by došlo k požadovanému lokálnemu schladeniu koncov rebier. V publikácii [45] bolo na simulácii tečenia kompozitného materiálu pri vstrekaní ukázané, že na koncoch rebier dochádza k náhodnému usporiadaniu grafitovej prímеси. To však vo výsledku spôsobí kvázi izotropnú vodivosť, ktorej hodnoty sú vyššie než uvažovaná zlá vodivosť. Hoci sa jedná o simuláciu inej geometrie, no typovo ide o chladič a usporiadanie plniva na konci rebra. Umelé zväčšenie krajnej vrstvy s nízkou vodivosťou tak nie je opodstatnené.

Bez opodstatnenia výrazného poklesu teploty na koncoch rebier tak bola vykonaná detailná analýza termovíznej kamery. Skúmalo sa, či môže na koncoch rebier ukazovať výrazne menšiu teplotu oproti realite. Polymérny chladič bol bez tepelného zdroja vložený do meracieho boxu a komora sa nechala vyhriať na 70 °C a počkalo sa, dokým termočlánky v chladiči nevykážu homogénne rozloženie teploty. Chladič bol následne vybraný na stôl a po dobu pol hodiny sa spodná plocha jeho základne snímala kamerou. Následným porovnaním s teplotami z termočlánkov v základni vyplynulo, že kamera ukazuje o 3 až 4 °C menej oproti očakávanej teplote. Vyplýva z toho, že očakávaná emisivita chladiča na základe hodnoty grafitu, ktorá sa pri overovaní v medzirebrových priestoroch zdala správna, je v skutočnosti vyššia než realita. Reálna emisivita sa tak na základe tejto analýzy môže pohybovať okolo 0,85, namiesto 0,95. Chyba numerického modelu na strane rebier tak má vysvetlenie vo vyhodnocovacej metodike experimentu.

9.2 Nedostatočnosť modelu a asymetria chýb

Ďalším faktom indikujúcim nedostatočnosť vytvoreného modelu je (okrem problematických vrcholov rebier) nezhoda pri zvýšení okolitej teploty o 30 °C. Z experimentálnych dát je nárast na zdroji o 3 °C nižší než u numerického modelu. Samotný fenomén, prečo

pri zvýšení teploty okolia pasívneho chladiča o 30 °C viedlo k zvýšeniu teploty na zdroji len o 25,6 °C je vysvetliteľný radiáciou. Pri vyššej okolitej teplote klesá súčiniteľ prestupu tepla konvekciou. Na druhú stranu vďaka vysokej emisivite polymérneho chladiča dochádza k podstatnému zlepšeniu odvodu tepla radiáciou. Vyšší odvod tepla žiarením nielenže vykompenzuje znížený účinok konvekcie, ale povedie k zlepšeniu efektivity celkového chladenia a chladič sa tak vzhľadom k okolitej teplote menej zahreje. Tento fakt potvrdzuje aj numerický model, avšak od experimentálnych hodnôt má ďaleko. Optimalizačný výpočet vykompenzoval tento rozdiel zvýšením tepelných vodivostí. Model tak vďaka svojim predpokladom na vnútornú štruktúru, ktorá je len zjednodušením komplexnej reality, nedokázal tento fenomén dostatočne vysvetliť.

Na smerodajných výsledkoch optimalizácie dvoch parametrov bola pozorovaná asymetria chyby modelu oproti experimentu. Tá môže naznačovať, že doterajší výpočtový model je príliš obmedzený (zviazanie vodivostí krajnej vrstvy s jadrom) a nedokáže preskúmať fyzikálne správnejšie prípady. Pri dobre nastavených modeloch je očakávané, že stredná hodnota chyby sledovaných údajov je blízka nule.

Vo všetkých popísaných problémoch sa dá nájsť podobný teoretický zdroj chyby. Ním je prílišné obmedzenie optimalizácie. Pre preskúmanie tejto možnosti bola vykonaná komplexnejšia optimalizácia modelu s okolitou teplotou 50 °C. Ako optimalizované parametre sa použili všetky štyri tepelné vodivosti λ_1^{kraj} , λ_3^{kraj} , λ_1^{jad} , λ_3^{jad} . Výsledky však ukázali, že zrušenie zafixovaných vzťahov medzi vodivosťami v jadre a krajnej vrstve vedú k fyzikálne nesprávnym výsledkom. Každý optimalizačný výpočet mal tendenciu zvyšovať λ_3^{jad} nad hodnotu λ_1^{jad} . To je však v rozpore s fyzikálnymi poznatkami a doterajšími štúdiami.

9.3 Zhrnutie

Za výsledok práce považujeme výstupy dvojparametrickej optimalizácie s konzervatívnym prístupom k modelovaniu jadra materiálu, uvedené v tabuľke 9.1. Je dôvod predpokladať, že λ_1^{jad} je menšia, no numerický model preukázal nízku citlivosť na túto hodnotu (podobné výsledky konzervatívneho a logického prístupu) a ostáva bližšie neurčená.

Tabuľka 9.1: Výsledné hodnoty tepelných vodivostí.

u_{amb} [°C]	λ_1^{kraj}	λ_1^{jad}	λ_3^{kraj}	λ_3^{jad}
	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]			
20	17,1	17,1	2,1	4,3
50	20,5	20,5	2,5	5,0

V hodnotách pre model s okolitou teplotou 50 °C vidíme podobnosť s hodnotami udávanými výrobcami. Tí bez bližšej špecifikácie tvrdia, že vodivosti sú 20 a 5 W·m⁻¹·K⁻¹. Zo štúdie v rámci tejto práce však plynie, že je nutné rozlišovať hodnoty v jadre a v krajnej vrstve materiálu. Môžeme ale konštatovať, že optimalizované vodivosti nadobúdajú očakávané hodnoty.

Záver

Pri simulovaní fyzikálneho javu je potrebné začať od základu – vytvoriť geometriu zodpovedajúcu skúmanej realite. S tým súvisí znalosť materiálu a jeho príslušných fyzikálnych vlastností. Táto fáza sa výrazne komplikuje, ak sa materiál správa anizotropicky. V prípade výroby polymérnych chladičov s tepelne vodivou prímесou injekčným vstrekom existuje mnoho faktorov ovplyvňujúcich anizotropiu tepelnej vodivosti. Už samotné parametre výrobného procesu dokážu mať vplyv na výsledné správanie chladiča.

Cieľom diplomovej práce bolo stanovenie anizotropie tepelnej vodivosti prototypu kompozitného polymérneho chladiča. Ten obsahuje grafitové vločky ako tepelne vodivú prímес. Vďaka svojej kryštalickej štruktúre má grafit v jednom smere omnoho nižšiu vodivosť. Orientácia jeho dobre vodivých rovín spôsobuje anizotropiu celého chladiča. V práci boli na základe lomovej analýzy skúmaného prototypu určené časti geometrie, v ktorých sú tieto roviny rozdielne orientované. Tie sa charakterizovali ako jadro (stred materiálu) a krajná vrstva pod povrchom. Ich rozmery boli odhadnuté z fotografií pod mikroskopom. S týmito znalosťami bola vytvorená geometria numerického modelu. Výstupy z experimentálnych meraní tvorili podklad pre ďalší postup práce. Tie pozostávali z údajov zabudovaných termočlánkov a snímok zachytených termovíznou kamerou. Fyzikálne nastavenie modelu odpovedalo podmienkam experimentu. Jeho správnosť bola overená a potrebné parametre skorigované na izotropnom hliníkovom chladiči. Tým zostali už len materiálové neznáme – hodnoty vodivosti polymérneho kompozitu. Ich výpočet bol sformulovaný ako inverzná optimalizačná úloha.

Inverzné úlohy optimalizovali dve hodnoty tepelných vodivosti v krajnej vrstve. Hodnoty v jadre boli s nimi zviazané na základe štúdie literatúry a vysloveného predpokladu. V účelovej funkcii optimalizácie (súčet štvorcov rozdielu teplôt simulácie od experimentu) sa menili rôzne cieľové teploty, z čoho vyplývalo, že vytvorený model nedokázal zachytiť experimentálne hodnoty na koncoch rebier. Pri ich vynechaní dosiahol model vzhľadom ku komplexnosti jeho reálneho náprotivku prijateľné výsledky. Na výsledných teplotách však bola pozorovaná výrazná asymetria chýb, ktorú sa nepodarilo odstrániť ani osamostatnením vodivosti v jadre. Tieto ďalšie výpočty smerovali k hodnotám, ktoré nie sú v súlade s fyzikálnou podstatou skúmanej anizotropie. Numerický model vykázal nízku citlivosť na vodivosti v jadre materiálu, podstatný rozvod tepla z hľadiska minimalizovania účelovej funkcie sa odohrával v krajnej vrstve.

Nezhoda simulovaných teplôt na koncoch rebier podnietila bližšie preskúmanie výhodnoscovej metodiky experimentu. Rozsiahlym porovnaním snímok chladnúcej plochy základne chladiča s údajmi z podpovrchových termočlánkov sa ukázalo, že pri odčítaní teplôt na rebriach bola zrejme chybné predpokladaná hodnota emisivity. Tým sa objasnila do tej chvíle nevysvetliteľná chyba numerického modelu. Výsledné vodivosti po vypustení teplôt z rebier sa pohybujú v očakávaných hodnotách udávaných výrobcami. Konkrétne, model pri zvýšenej teplote okolia predpokladá hodnotu vyššej vodivosti $20,5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a nižšej $2,5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ v krajnej vrstve, respektíve $5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ v jadre materiálu. Výstupom diplomovej práce je vytvorený numerický model, z ktorého sa môže odvíjať ďalší výskum kompozitných polymérnych chladičov.

Zoznam použitých zdrojov

- [1] HASSAN, Hamdy a SHAFEY, N. Y. Abdel. 3D study of convection-radiation heat transfer of electronic chip inside enclosure cooled by heat sink. *International Journal of Thermal Sciences*. 2021, **159**. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2020.106585. ISSN 1290-0729.
- [2] ELGHOOOL, Ali et al. A review on heat sink for thermo-electric power generation: Classifications and parameters affecting performance. *Energy conversion and management*. 2017, **134**, s. 260-277. DOI: 10.1016/j.enconman.2016.12.046. ISSN 0196-8904.
- [3] ALI, Zulfiqar et al. Preparation, Properties and Mechanisms of Carbon Fiber/Polymer Composites for Thermal Management Applications. *Polymers*. 2021, **13**(1). DOI: 10.3390/polym13010169. ISSN 2073-4360.
- [4] KHAN, J., MOMIN, Syed A. a MARIATTI, M. A review on advanced carbon-based thermal interface materials for electronic devices. *Carbon*. 2020, **168**, s. 65-112. DOI: 10.1016/j.carbon.2020.06.012. ISSN 0008-6223.
- [5] CHANDA, S., BALAJI, C., VENKATESHAN, S. P. a YENNI, G. R. Estimation of principal thermal conductivities of layered honeycomb composites using ANN-GA based inverse technique. *International Journal of Thermal Sciences*. 2017, **111**, s. 423-436. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2016.09.011. ISSN 1290-0729.
- [6] FLÜGGE, Wilhelm. *Tensor analysis and continuum mechanics*. Berlin: Springer, 1972. ISBN 978-3-642-88384-2.
- [7] REDDY, Junuthula Narasimha. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2017. ISBN 978-1-119-08737-3.
- [8] ÖZISIK, M. Necati. *Heat Conduction*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1993. ISBN 978-0-471-53256-9.
- [9] ITSKOV, Mikhail. *Tensor algebra and tensor analysis for engineers: with application to continuum mechanics*. 5th ed. Cham: Springer, 2019. ISBN 978-3-319-98805-4.
- [10] MÜHLICH, Uwe. *Fundamentals of tensor calculus for engineers with a primer on smooth manifolds*. Cham: Springer, 2017. ISBN 978-3-319-56264-3.
- [11] ZIENKIEWICZ, O.C. a TAYLOR, R.L. *The Finite Element Method*. Volume 1. 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. ISBN 978-0-7506-5049-6.
- [12] INCROPERA, Frank P., DEWITT, David P., BERGMAN, Theodore L. a LAVINE, Adrienne S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 6th ed. New York: John Wiley & Sons, 2007. ISBN 978-0-471-45728-2.
- [13] HADJESFANDIARI, Ali R. On the symmetric character of the thermal conductivity tensor. *International Journal of Materials and Structural Integrity*. 2014, **8**(4), s. 209-220. DOI: 10.1504/IJMSI.2014.067111. ISSN 1745-0063.
- [14] POWERS, Joseph M. On the Necessity of Positive Semi-Definite Conductivity and Onsager Reciprocity in Modeling Heat Conduction in Anisotropic Media. *J. Heat Transfer*. 2004, **126**(5), s. 670-675. DOI: 10.1115/1.1798913. ISSN 0022-1481.

- [15] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4300-6.
- [16] MURSHED, S.M. Sohel a DE CASTRO, C.A. Nieto. A critical review of traditional and emerging techniques and fluids for electronics cooling. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2017, **78**, s. 821-833. DOI: 10.1016/j.rser.2017.04.112. ISSN 1364-0321.
- [17] Ebmpapst, 2014. *What to look out for in vehicle LED headlights*. [online]. [cit. 2020-11-09]. Dostupné z: https://mag.ebmpapst.com/en/products/fans/what-to-look-out-for-in-vehicle-led-headlights_8380/
- [18] MAKINO, T., NAKAMURA, A. a WAKABAYASHI, H. Directional characteristics of radiation reflection on rough metal surfaces with description of heat transfer parameters. *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*. 1999, **42**(4), s. 745-751. DOI: 10.1299/jsmeb.42.745. ISSN 1340-8054.
- [19] MODEST, Michael F. a ZHANG, H. The full-spectrum correlated-k distribution for thermal radiation from molecular gas-particulate mixtures. *J. Heat Transfer*. 2002, **124**(1), s. 30-38. DOI: 10.1115/1.1418697. ISSN 0022-1481.
- [20] COMSOL, 2017. *Heat Transfer Module User's Guide*. [online]. [cit. 2020-11-11]. Dostupné z: <https://doc.comsol.com/5.3/doc/com.comsol.help.heat/HeatTransferModuleUsersGuide.pdf>
- [21] TSAI, Ting-Hao a CHEN, Ya-Shu. Thermal-throttling server: A thermal-aware real-time task scheduling framework for three-dimensional multicore chips. *Journal of Systems and Software*, 2016, **112**, s. 11-25. DOI: 10.1016/j.jss.2015.10.038. ISSN 0164-1212.
- [22] International Business Machines Corporation, Armonk, NY. Implementation of thermal throttling logic. Vynálezci: Charles R. JONES a Michael F. WANG. USA. United States Patent. US 7,721,128 B2. 18.5.2010.
- [23] Recom, 2009. *Thermal derating of LEDs*. [online]. [cit. 2020-11-10]. Dostupné z: <https://docs.rs-online.com/4592/0900766b80e289cf.pdf>
- [24] ZACHAR, Martin. *Využitie tepelne vodivých nekovových materiálov pre chladiace systémy v automobilovej osvetľovacej technike*. Brno, 2020. Dizertačná práca.
- [25] HARPER, Charles A. *Modern Plastics Handbook*. New York: McGraw-Hill, 2000. ISBN 978-0-07-026714-5.
- [26] PIERSON, Hugh O. *Handbook of carbon, graphite, diamonds and fullerenes: processing, properties and applications*. Saddle River: Noyes Publications, 1993. ISBN 978-0-8155-1339-1.
- [27] BURGER, N. et al. Review of thermal conductivity in composites: mechanisms, parameters and theory. *Progress in Polymer Science*. 2016, **61**, s. 1-28. DOI: 10.1016/j.progpolymsci.2016.05.001. ISSN 0079-6700.

- [28] GUZEJ, M., ZACHAR, M., KOMINEK, J., KOTRBACEK, P. a BRACHNA, R. Importance of Melt Flow Direction during Injection Molding on Polymer Heat Sinks' Cooling Efficiency. *Polymers*. 2021, **13**(8). DOI: 10.3390/polym13081186. ISSN 2073-4360.
- [29] GRUNDLER, M., DERIETH, T. a HEINZEL, A. Polymer Compounds with High Thermal Conductivity. In: *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC. 2016, **1779**(1). DOI: 10.1063/1.4965485. ISSN 1551-7616.
- [30] POHANKA, Michal. *Technical experiment based inverse tasks in mechanics: Ph.D. thesis*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Laboratoř přenosu tepla a proudění, 2006. 202s. Vedoucí práce byl Doc. Ing. Miroslav Raudenský, CSc.
- [31] SAWAF, B. a ÖZISIK, M. Necati. Determining the constant thermal conductivities of orthotropic materials by inverse analysis. *International communications in heat and mass transfer*. 1995, **22**(2), s. 201-211. DOI: 10.1016/0735-1933(95)00005-4. ISSN 0735-1933.
- [32] BECK, James V., BLACKWELL, Ben a CLAIR, Charles R. St. JR. *Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems*. New York: John Wiley, 1985. ISBN 978-0-471-08319-1.
- [33] WOODBURY, Keith A. *Inverse Engineering Handbook*. Boca Raton: CRC Press, 2003. ISBN 978-1-4200-4161-3.
- [34] OTTOSEN, N.S. a PETERSSON, H. *Introduction to the finite element method*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1992. ISBN 978-0-13-473877-2.
- [35] LIU, G.R. *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2018. ISBN 978-1-138-37270-2.
- [36] LARSSON, F., 2010. *Non-linear finite element analysis*. [online]. [cit. 2020-11-25] Dostupné z: <https://www.coursehero.com/file/55032146/Nonlinear-Larsson2010pdf/>
- [37] CHAPRA, Steven C. a CANALE Raymond P. *Numerical Methods for Engineers*. 6th ed. Boston: McGraw-Hill, 2010. ISBN 978-0-07-340106-5.
- [38] BIALECKI, R. a NOWAK, Andrzej J. Boundary value problems in heat conduction with nonlinear material and nonlinear boundary conditions. *Applied mathematical modelling*. 1981, **5**(6), s. 417-421. DOI: 10.1016/S0307-904X(81)80024-8. ISSN 0307-904X.
- [39] MATHEWS, John H. a FINK, Kurtis D. *Numerical Methods Using MATLAB*. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999. ISBN 978-0-13-270042-9.
- [40] ČERMÁK, Libor a HLAVIČKA, Rudolf. *Numerické metody*. Vydání třetí. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.
- [41] SINGER, Saša a NELDER, John. Nelder-Mead algorithm. *Scholarpedia*. 2009, **4**(7), s. 2928. DOI: 10.4249/scholarpedia.2928. ISSN 1941-6016.

- [42] GAO, Fuchang a HAN, Lixing. Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters. *Computational Optimization and Applications*. 2012, **51**(1), s. 259-277. DOI: 10.1007/s10589-010-9329-3. ISSN 1573-2894.
- [43] LEE, Ho Sung. *Thermal design: heat sinks, thermoelectrics, heat pipes, compact heat exchangers, and solar cells*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010. ISBN 978-0-470-94997-9.
- [44] DRAPER, Norman R. a SMITH, Harry. *Applied regression analysis*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1998. ISBN 978-0-471-66379-9.
- [45] BAR-COHEN, A., LUCKOW, P., CEVALLOS, J. G. a GUPTA, S. K. Thermal Anisotropy in Injection Molded Polymer Composite Fins. In: *Proceedings of the International Heat Transfer Conference, Volume 3*. Washington, DC, USA. August 8-13, 2010, s. 405-416. DOI: 10.1115/IHTC14-23308. ISBN 978-0-7918-4938-5.

Zoznam symbolov, veličín a skratiek

Symbol	Rozmer	Význam
\mathbf{a}	[—]	vektor uzlových hodnôt v metóde konečných prvkov
$\hat{\mathbf{d}}$	[—]	vlastný smer tenzoru
D_{air}	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]	tepelná vodivosť vzduchu
\mathbf{D}	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]	tenzor tepelnej vodivosti
E	[W·m ⁻²]	vyžarovaný výkon
El	[-]	Elenbaasovo číslo
f	[—]	skalárna funkcia
$\mathbf{f}, \mathbf{f}_{int}$	[—]	záťažové vektory v metóde konečných prvkov
$\mathbf{f}^e, \mathbf{f}_{int}^e$	[—]	elementárne záťažové vektory v metóde konečných prvkov
F	[-]	uhlový súčiniteľ
g	[m·s ⁻²]	gravitačné zrýchlenie, 9,81 m·s ⁻²
\mathbf{g}	[—]	vektor hodnôt účelovej funkcie vo vrcholoch simplexu
G	[W·m ⁻²]	iradiácia
G_{abs}	[W·m ⁻²]	absorbovaná iradiácia
h	[W·m ⁻² ·K ⁻¹]	súčiniteľ prestupu tepla
h_c	[W·m ⁻² ·K ⁻¹]	kontaktná vodivosť
h_{mod}	[-]	parameter upravujúci súčiniteľ prestupu tepla
I	[W·m ⁻² ·sr ⁻¹]	radiačná intenzita
J	[W·m ⁻²]	radiačnosť
L	[m]	dĺžka
$\hat{\mathbf{n}}$	[-]	jednotková normála plochy
N	[-]	počet optimalizovaných parametrov, pri použití dolných indexov vyjadruje bližšie určený číselný počet
\mathbf{N}	[—]	tvarové funkcie v metóde konečných prvkov
Nu	[-]	Nusseltovo číslo
\mathbf{p}	[—]	vrchol simplexu, vektor optimalizovaných parametrov
\mathbf{p}^*	[—]	vektor optimálnych parametrov
\mathcal{P}	[—]	množina prípustných hodnôt parametrov
Pr	[-]	Prandtlovo číslo
P_{tot}	[W]	výkon zdroja
q_x	[W]	tepelný výkon asociovaný so smerom x
$\dot{\mathbf{q}}$	[W·m ⁻²]	tepelný tok
Q	[W·m ⁻³]	merný tepelný výkon
(r, θ, ϕ)	[m, rad, rad]	sférické súradnice
R	[W ⁻¹ ·m ² ·K]	tepelný odpor
\mathbb{R}	[—]	množina reálnych čísel
Ra	[-]	Rayleighovo číslo
S	[m ²]	plocha, obsah
\mathbf{S}	[—]	tenzor vlastných smerov
u	[K, °C]	skalárne teplotné pole – teplota, do výpočtov sa dosadzuje absolútna teplota v Kelvinoch

u_{amb}	[K, °C]	teplota vzdialeného čierneho povrchu
u_f	[K, °C]	teplota filmu vzduchu pri prúdení v okolí telesa
u_s	[K, °C]	povrchová teplota
u_∞	[K, °C]	teplota voľného prúdu vzduchu
u_{2D}^ξ	[K, °C]	korigovaná teplota 2D modelu
v	[—]	testovacia funkcia
V	[m ³]	objem
w	[m]	vzdialenosť medzi dvomi stenami
(x, y, z)	[m, m, m]	súradnice v numerickom modeli
\mathbf{X}	[—]	matica regresných prediktorov
\mathbf{Y}	[—]	vektor referenčných chýb 2D modelu
α	[—, m ² ·s ⁻¹]	absorptancia povrchu, tepelná difuzivita
β	[K ⁻¹]	objemová rozťažnosť
β, γ, δ	[—]	parametre algoritmu pohyblivého simplexu
$\boldsymbol{\beta}$	[—]	vektor regresných koeficientov
Γ	[—]	hranica oblasti
$\boldsymbol{\delta}$	[—]	jednotkový tenzor
Δ^{rel}	[—]	relatívna chyba teploty 2D modelu voči 3D modelu
ε	[—]	emisivita povrchu
ε_{err}	[—]	odhad chyby v metóde pohyblivého simplexu
ε_{tol}	[—]	tolerančná presnosť v metóde pohyblivého simplexu
η, ψ	[K, W·m ⁻²]	okrajové podmienky
$\lambda, \boldsymbol{\Lambda}$	[—]	vlastné číslo tenzoru, tenzor vlastných čísel
$\lambda^{jad}, \lambda^{kraj}$	[W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]	hlavná tepelná vodivosť v jadre, v krajnej vrstve
ν	[m ² ·s ⁻¹]	viskozita
$\xi, \boldsymbol{\xi}$	[—]	korekčný súčiniteľ upravujúci teplotu 2D modelu, vektor korekčných súčiniteľov pre sledované miesta modelu
π	[—]	Ludolfovo číslo
ρ	[—]	reflektancia povrchu
σ	[W·m ⁻² ·K ⁻⁴]	Stefanova–Boltzmannova konštanta, 5,68·10 ⁻⁸ W·m ⁻² ·K ⁻⁴
ω	[sr]	priestorový uhol
Ω	[—]	priestorová oblasť
∇	[—]	operátor gradient
∂	[—]	parciálna derivácia

Dolné indexy

$B, C, E, I, M, O, P, R, W$	indexy vrcholov v metóde pohyblivého simplexu
n	smer normály plochy
i, j, k, l	číselné indexy

Skratky pre ustálené názvoslovie

2D	úloha alebo model v dvojrozmernom súradnom systéme
3D	úloha alebo model v trojrozmernom súradnom systéme
GRaK	odkaz na štúdiu od Grundler a kolektív

Zoznam obrázkov

1	Model chladiča	11
2.1	Kondukcia v rovinnej stene a jej abstrakcia cez tepelný odpor	18
2.2	Skladanie tepelných odporov pre riešenie problému zložených stien	18
2.3	Prúdenie vzduchu v okolí rebier chladiča vyvolané gravitáciou	19
2.4	Znamienková konvencia tepelného toku pri konvekci	19
2.5	Smerové rozloženie intenzity radiačného žiarenia	20
2.6	Schematické znázornenie radiačných tokov	21
2.7	Diferenciál priestorového uhlu	22
2.8	Vzťah diferenciálu priestorového uhlu k sférickým súradniciam	22
2.9	Uhlový súčiniteľ medzi dvoma infinitezimálnymi plochami	23
2.10	Schéma pre výpočet celkovej iradiácie	24
3.1	Schéma automobilového svetlometu	26
3.2	Geometria vybraného chladiča pre stanovenie anizotropie tepelnej vodivosti	27
3.3	Šírenie termálnej energie naprieč materiálom s pravidelnou kryštalickou mriežkou a amorfným polymérnym materiálom	27
3.4	Vtok taveniny do kratšej strany základne chladiča	28
3.5	Vnútoraná štruktúra testovacej vzorky zo štúdie GRaK	28
3.6	Namerané tepelné vodivosti zo štúdie GRaK	29
3.7	Schéma pre výpočet zlej vodivosti v krajnej vrstve	29
3.8	Vnútoraná štruktúra po výške odlomeného rebra skúmaného chladiča spolu s naznačenou orientáciou prímеси v zhode s výsledkami zo štúdie GRaK	31
4.1	Umiestnenie chladiča v meracom boxe a boxu v termostatickej komore	32
4.2	Umiestnenie ohrievacieho telesa spolu s termočlánkami na základni chladiča	32
4.3	Rozmiestnenie termočlánkov vo vnútri chladiča	33
4.4	Záznam teploty z termočlánkov a termálna snímka chladiča	33
4.5	Polohy chladiča počas experimentu	34
5.1	Príklad výpočtovej siete na časti prierezu chladiča	37
5.2	Možné transformácie simplexu v rovine	40
6.1	Geometria modelu ohrievacieho telesa	43
6.2	Vonkajšia geometria modelu	44
6.3	Rozlomená základňa a vybrané rebra chladiča	44
6.4	Sledované rozmery krajných vrstiev materiálu v základni a rebre	45
6.5	Pohľad mikroskopom na lom po výške stredného rebra	45
6.6	Plochy s radiačnou okrajovou podmienkou	47
6.7	Plochy s nastaveným kontaktným odporom	48
6.8	Prúdenie vzduchu v okolí stien vyvolané vztlakom	49

6.9	Plochy na koncoch rebier	50
6.10	Graf lineárnej interpolačnej funkcie súčiniteľa prestupu tepla pre prúdenie vzduchu rovnobežne s povrchom základne (base_vert).	52
6.11	Graf dvojrozmernej lineárnej interpolačnej funkcie súčiniteľa prestupu tepla pre prúdenie vzduchu v medzirebrovom priestore (fin_inter).	52
6.12	Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie fin_end.	52
6.13	Výpočtová sieť trojrozmerného modelu.	53
6.14	Vybrané plochy pre vyhodnotenie priemernej teploty na vrcholoch rebier a na viditeľných častiach medzier	54
6.15	Geometria dvojrozmerného modelu.	55
6.16	Hrany dvojrozmerného modelu s nastavenou prirodzenou konvekciou	56
6.17	Výpočtová sieť dvojrozmerného modelu	56
6.18	Vybrané hrany pre vyhodnotenie priemernej teploty na vrcholoch rebier a na viditeľných častiach medzier	56
8.1	Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt na vrcholoch rebier pre oba materiálové prístupy s okolitou teplotou 50 °C. Optimalizácia F.	63
8.2	Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt v sledovaných miestach pre oba materiálové prístupy s okolitou teplotou 50 °C. Optimalizácia GDT	63
8.3	Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt na vrcholoch rebier pre oba materiálové prístupy s okolitou teplotou 20 °C. Optimalizácia F.	64
8.4	Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt v sledovaných miestach pre oba materiálové prístupy s okolitou teplotou 20 °C. Optimalizácia GDT	65
A.1	Plochy s nastavenou prirodzenou konvekciou typu a) prúdenie popri stene . . .	79
A.2	Plochy s nastavenou prirodzenou konvekciou typu b) prúdenie medzi stenami .	79
A.3	Plochy s nastavenou prirodzenou konvekciou typu c) prúdenie pod stenou . . .	80
A.4	Plochy s nastavenou prirodzenou konvekciou typu d) prúdenie nad stenou . . .	80
B.1	Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie base_bottom	81
B.2	Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie base_top	81
B.3	Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie fin_bottom	81
B.4	Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie fin_top	82
B.5	Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie body_bottom	82
B.6	Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie body_top	82

Zoznam tabuliek

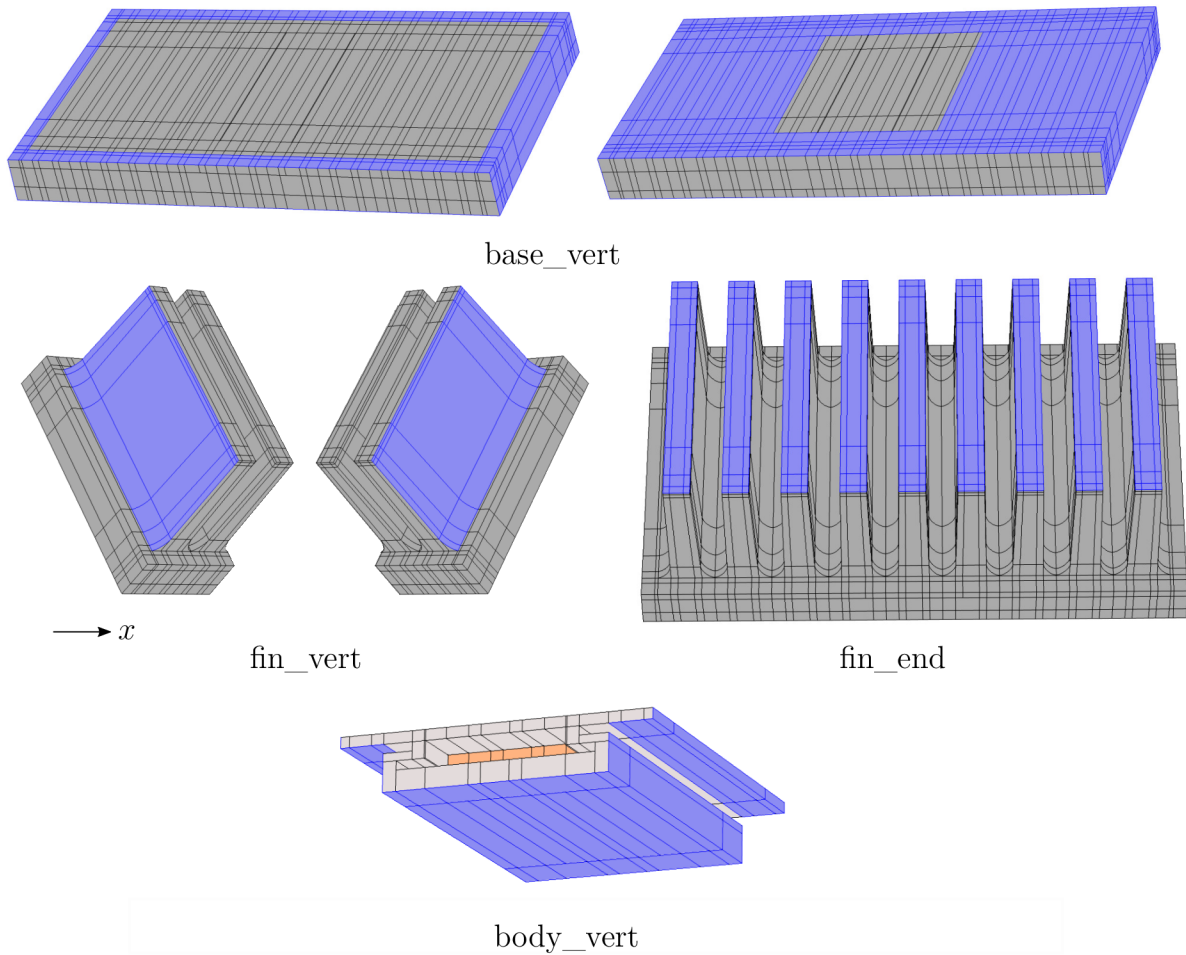
1.1	Značenie a význam tenzorov základných rádo	13
3.1	Hodnoty veličín z výpočtu zlej vodivosti v krajnej vrstve pre 70 °C	30
6.1	Označenie, popis a veľkosti sledovaných krajných vrstiev materiálu	44

6.2	Rozdelenie vytvorených materiálov polymérneho kompozitu na základe vlastného smeru $\hat{\mathbf{d}}_3$ tenzoru tepelnej vodivosti	46
6.3	Tabelované hodnoty vlastností vzduchu pre 300 a 350 K	50
6.4	Importované interpolačné funkcie pre výpočet súčiniteľa prestupu tepla	51
6.5	Súradnice bodov modelu odpovedajúcich zabudovaným termočlánkom	54
6.6	Porovnanie sledovaných teplôt z testovacej simulácie 2D a 3D modelu	57
6.7	Nastavenie parametrov demonstračného a referenčných modelov vo vzorovej úlohe	58
6.8	Zlepšenie relatívnej chyby demonstračného 2D modelu po aplikovaní korekčného súčiniteľa	59
7.1	Experimentálne dáta z meraní s hliníkovým chladičom pri okolitých teplotách 20 a 50 °C	60
7.2	Rozdiel simulovaných a experimentálnych teplôt po prvom výpočte na hliníkových modeloch	61
7.3	Výsledky z inverzného výpočtu na hliníkových modeloch	61
8.1	Označenie výpočtov podľa optimalizovaných teplôt	62
8.2	Výsledky inverzných výpočtov pre modely s teplotou okolia 50 °C	62
8.3	Výsledky inverzných výpočtov pre modely s teplotou okolia 20 °C	64
9.1	Výsledné hodnoty tepelných vodivostí	67

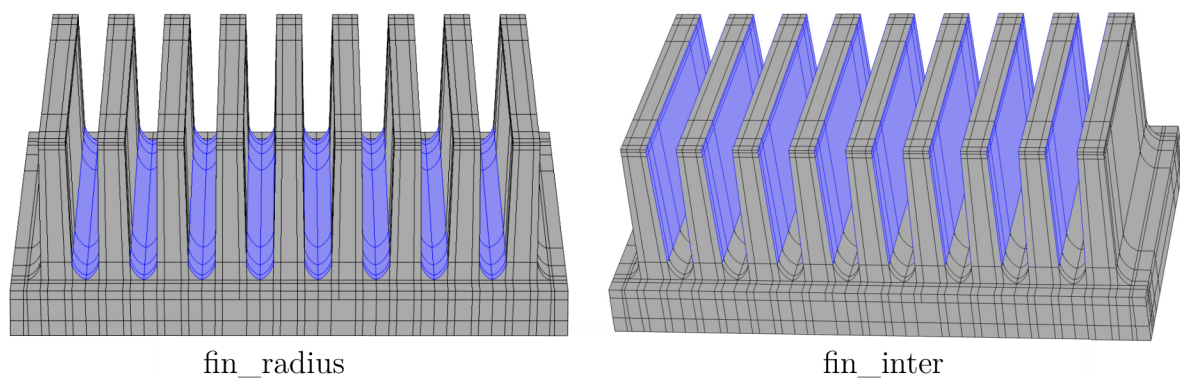
Zoznam príloh

A	Nastavenie prirodzenej konvekcie trojrozmerného modelu	79
B	Simulované hodnoty súčiniteľa prestupu tepla	81

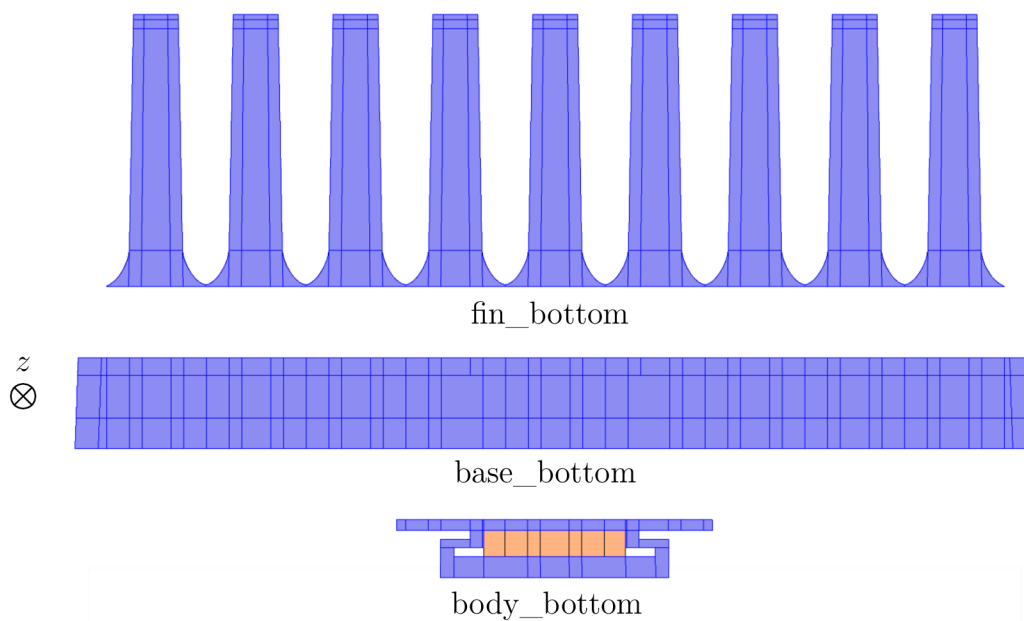
A Nastavenie prirodzenej konvekcie trojrozmerného modelu



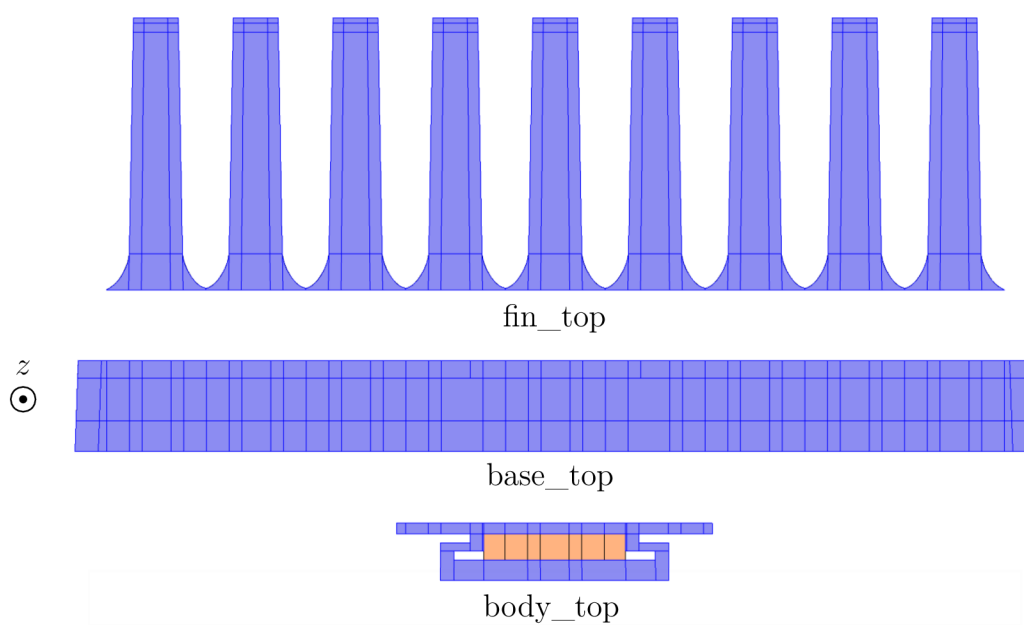
Obrázok A.1: Plochy s nastavenou prirodzenou konvekciou typu a) prúdenie popri stene.



Obrázok A.2: Plochy s nastavenou prirodzenou konvekciou typu b) prúdenie medzi stenami.

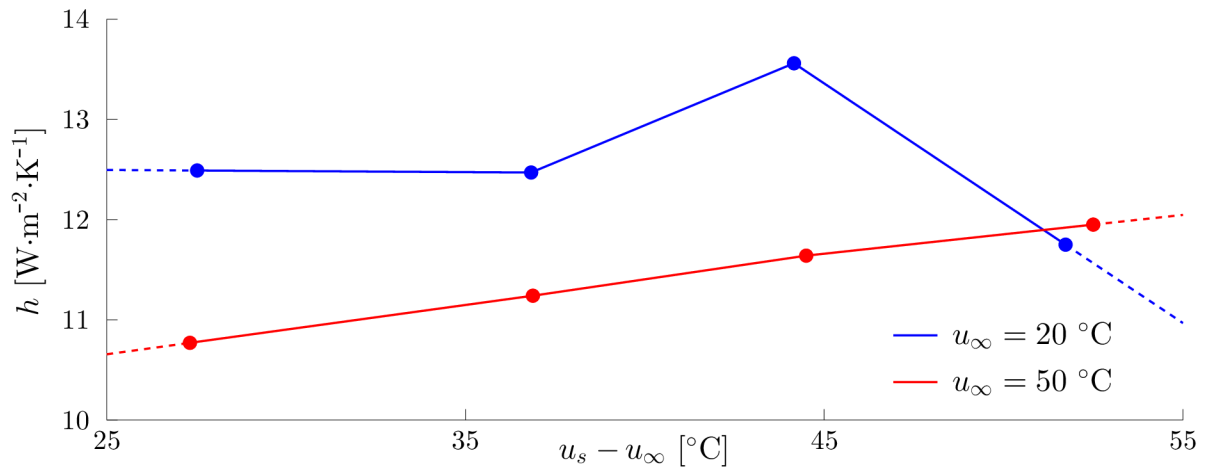


Obrázok A.3: Plochy s nastavenou prirodzenou konvekciou typu c) prúdenie pod stenou.

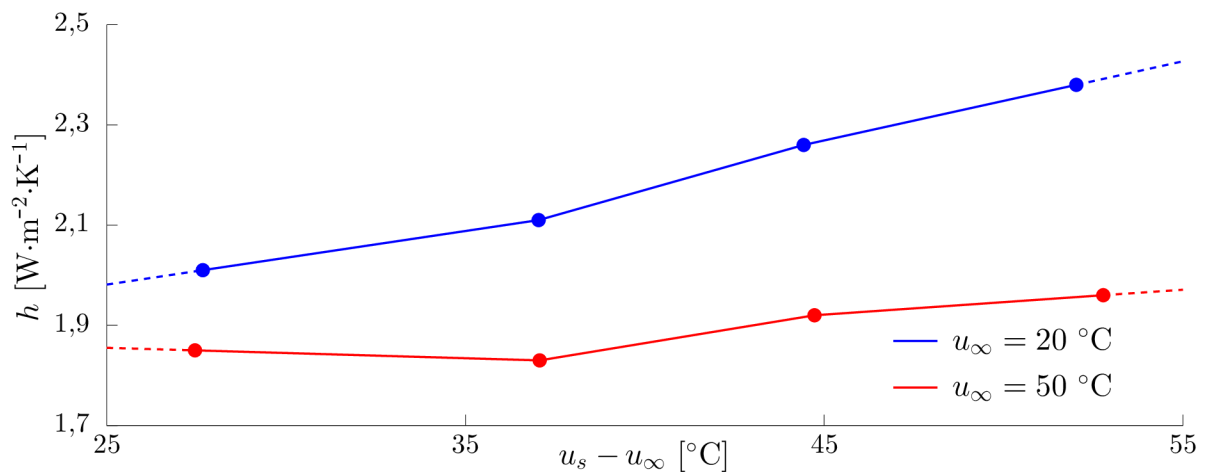


Obrázok A.4: Plochy s nastavenou prirodzenou konvekciou typu d) prúdenie nad stenou.

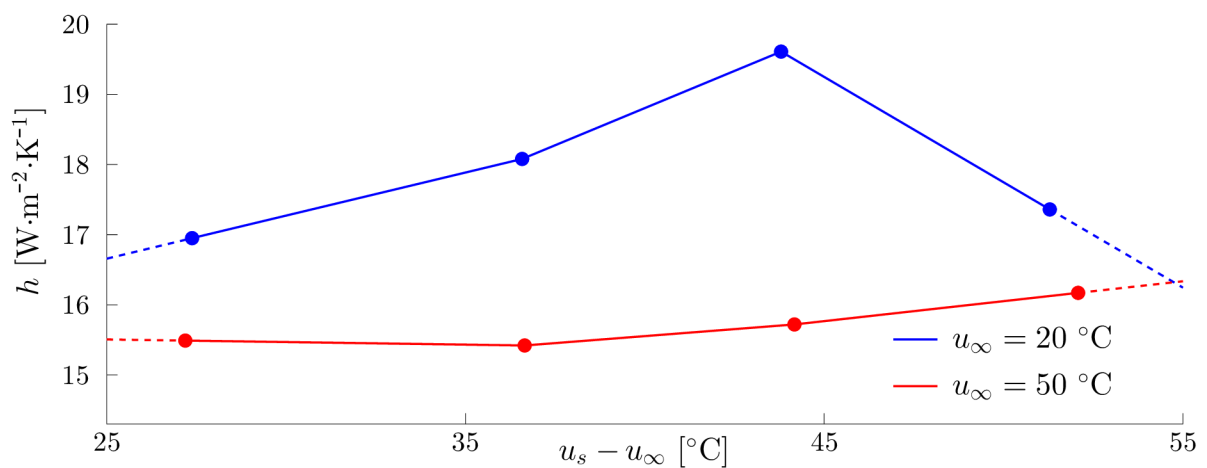
B Simulované hodnoty súčiniteľa prestupu tepla



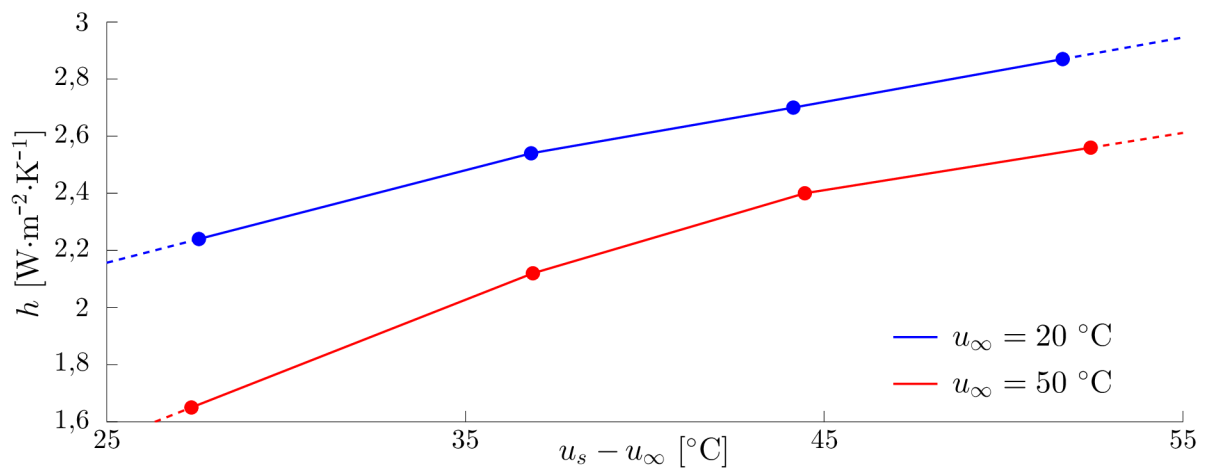
Obrázok B.1: Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie base_bottom.



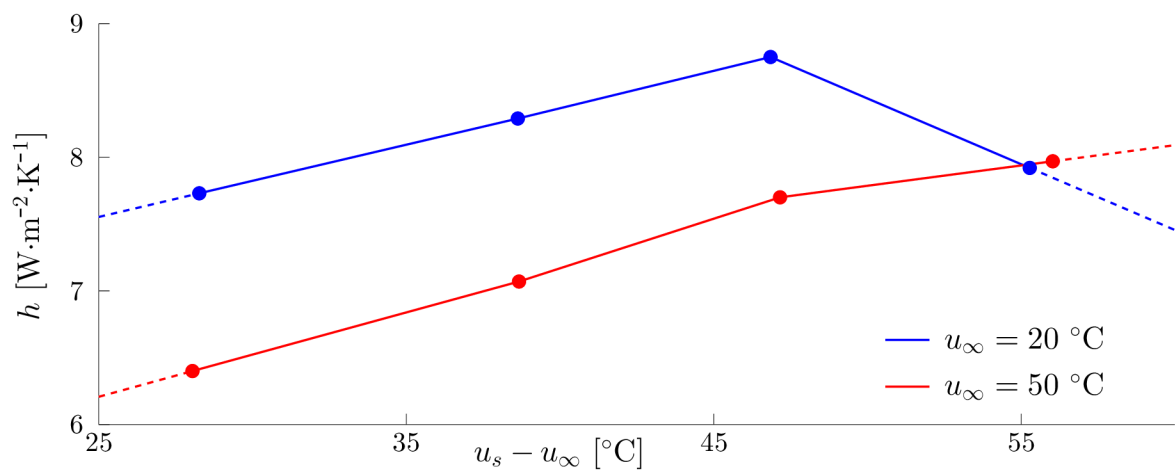
Obrázok B.2: Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie base_top.



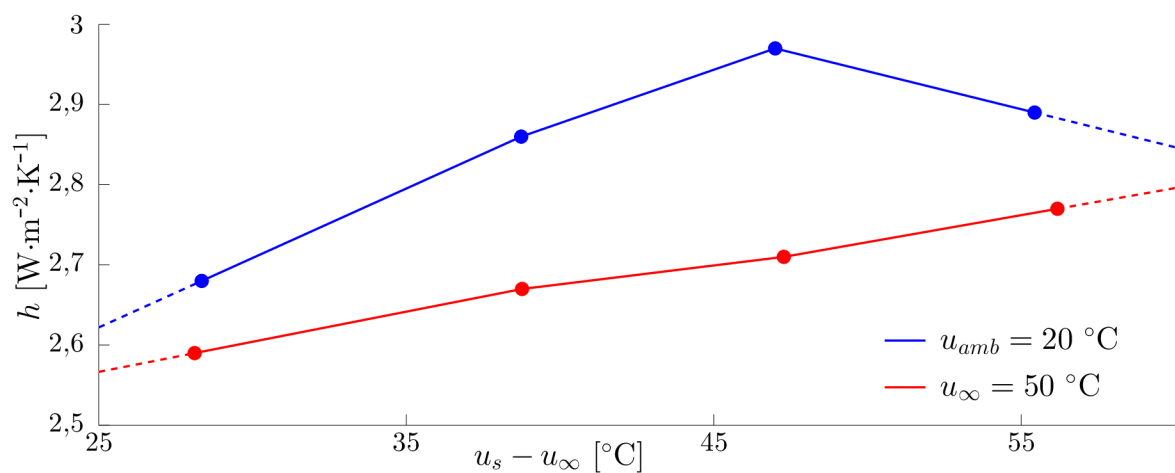
Obrázok B.3: Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie fin_bottom.



Obrázok B.4: Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie fin_top.



Obrázok B.5: Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie body_bottom.



Obrázok B.6: Súčiniteľ prestupu tepla pre podmienku konvekcie body_top.