

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Šarkovského věta a matematické kyvadlo



Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Tomáš Fůrst, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracoval:
Jan Burián
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně pod vedením Tomáše Fürsta a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 21.4.2011

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především svému vedoucímu této bakalářské práce panu Tomáši Fürstovi za trpělivost, kterou se mnou měl, aby mi pomohl tuto práci dovést ke zdárnému konci. Také bych rád poděkoval své rodině a přítelkyni za podporu během celého studia.

Obsah

Použité značení	4
Úvod	5
1 A. N. Šarkovský	6
2 Historie	7
3 Šarkovského věta	8
4 Matematické kyvadlo	26
4.1 Odvození rovnice matematického kyvadla [12]	26
4.2 Matematické kyvadlo s tlumením a periodickým buzením	28
4.3 Řešení rovnice matematického kyvadla	28
4.3.1 Linearizovaný případ	28
4.3.2 Nelineární případ	31
5 Aplikace Šarkovského věty	34
5.1 Poincarého zobrazení	34
5.2 Periodické body zobrazení (9)	36
Závěr	40
Příloha 1	41
Příloha 2	43
Příloha 3	44
Příloha 4	45
Příloha 5	46
Literatura	47

Použité značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\triangleright$	Šarkovského uspořádání
f^n	n -tá iterace funkce f
$\text{int}(A)$	vnitřek množiny A
$\partial(A)$	hranice množiny A
$[a, b]$	uzavřený interval od a do b
(a, b)	otevřený interval od a do b
$I \rightarrow J$	interval I f -pokrývá interval J
$\mathcal{O}(x)$	periodická orbita bodu x
$\phi(t)$	funkce popisující polohu kyvadla
ϕ'	derivace funkce ϕ
F	součet sil působících na hmotný bod
m	hmotnost
a	zrychlení hmotného bodu
g	tíhové zrychlení
A	amplituda budící síly
ω_D	úhlová rychlost
P_T	Poincarého zobrazení

Úvod

Dnes je Šarkovského věta jedním z klasických výsledků teorie dynamických systémů. Má jednoduchou formulaci, ale technicky poměrně náročný důkaz. V době, kdy byla zveřejněna (roku 1964), nevzbudila u matematiků žádný mimořádný ohlas. Za svoji dnešní popularitu paradoxně vděčí článku [6] J. A. Yorka a T. Y. Liho, kteří dokázali speciální část Šarkovského věty.

Cílem této bakalářské práce je pochopení Šarkovského věty a jejího důkazu. Odvodíme rovnice matematického kyvadla a následně ukážeme jejich řešení, a to jak analyticky pro malý úhel, tak numericky pro jakýkoliv úhel. Šarkovského věta bude použita na analýzu pohybu matematického kyvadla. Naprogramujeme “upravené” Poincarého zobrazení, které budeme následně analyzovat pomocí Šarkovského věty.

V první a druhé kapitole se podíváme do historie a stručně popíšeme kdy a kde Šarkovského věta vznikla. Také přidáme pár slov o jejím autorovi A. N. Šarkovském.

Ve třetí kapitole nejdříve vyslovíme definice a lemmata potřebná k důkazu Šarkovského věty a vysvětlíme nové uspořádání přirozených čísel, tzv. Šarkovského uspořádání. Následně uvedeme důkaz této věty.

Čtvrtá kapitola je věnována matematickému kyvadlu. Zde odvodíme jeho rovnice a následně ukážeme jejich řešení. Nejdříve analyticky, to za předpokladu, že úhel ϕ je malý a následně numericky, to za předpokladu, že úhel ϕ je jakýkoliv. Na konci této kapitoly vykreslíme fázové portréty matematického kyvadla.

V páté kapitole propojíme Šarkovského větu a matematické kyvadlo. To provedeme tak, že zavedeme pojem Poincarého zobrazení, které následně upravíme. Poté budeme toto zobrazení pomocí Šarkovského věty analyzovat.

1 A. N. Šarkovský

Alexandr Nikolajevič Šarkovský se narodil 7. prosince 1936. Je jedním z předních ukrajinských matematiků a zároveň jeden ze zakladatelů současné teorie dynamických systémů. V roce 2006 se stal členem Ukrajinské akademie věd, což je nejvyšší státní výzkumný ústav na Ukrajině.

Poprvé se jeho jméno objevilo v roce 1952 v matematickém článku v Ukrajinském matematickém žurnálu, když vyhrál první cenu v Kyjevské matematické soutěži mezi žáky středních škol. Během prvního ročníku studia na Kyjevské univerzitě napsal Šarkovský první vědeckou práci na téma asymptotika algebraických křivek. Nyní je A. N. Šarkovský autorem více než dvouset vědeckých prací.

Šarkovský vstoupil do podvědomí veřejnosti na počátku vývoje chaotické dynamiky. Jeho výsledky byly vysoce oceňovány širokou vědeckou společností. Mnoho současných učebnic zaměřených na teorii dynamických systémů si lze jen těžko představit bez Šarkovského věty. Tato věta položila základ novému odvětví v teorii dynamických systémů, a to kombinatorické dynamiky. Šarkovského věta vedla k výskytu mnoha prací týkajících se kombinatorické dynamiky, ve kterých se můžeme často setkat s pojmy jako Šarkovského věta, Šarkovského uspořádání, Šarkovského prostor, Šarkovského množina a maximální perioda v Šarkovského smyslu. Na mezinárodní konferenci “Thirty Years after Sharkovsky’s Theorem. New Perspectives”, která se konala ve Španělsku v roce 1994, byl demonstrován významný vliv Šarkovského prací na rozvoj teorie dynamických systémů od posledních let až do současnosti.

A. Šarkovský vyvinul základy topologie jednodimenzionálních dynamických systémů, které jsou nyní jednou z nejúčinnějších metod pro studium různých evolučních problémů. Zejména vyšetřoval vztah mezi podmínkami existence periodických bodů s různými periodami.[10]

2 Historie

V roce 1964 se v Ukrajinském matematickém žurnálu objevil článek napsaný A. N. Šarkovským, jehož název byl “Coexistence of cycles of a continuous mapping of a line into itself” [11]. Účelem bylo dokázat následující tvrzení:

Jestliže $k \triangleright l$, kde “ $\triangleright$ ” je nové uspořádání přirozených čísel, tzv. Šarkovského uspořádání (viz Definice 3.7) a jestliže spojitá funkce z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel má bod s periodou k , potom má také bod s periodou l . Toto tvrzení se nyní nazývá Šarkovského věta.

V roce 1975 byl v American Mathematical Monthly publikován slavný článek nazvaný “Period three implies chaos” [6], jehož autoři jsou Tien-Yien Li a James A. Yorke. Tito matematici dokázali speciální část Šarkovského věty. Po publikaci [6] se Li s Yorkem zúčastnili konference ve východním Berlíně, kde se setkali se Šarkovským. O celém úsměvném setkání Liho, Yorka a Šarkovského se můžeme dočíst například v [9].

Další Šarkovského článek, který vzbudil pozornost mnoha matematiků, zveřejnil slovenský matematik Peter Štefan v [1].

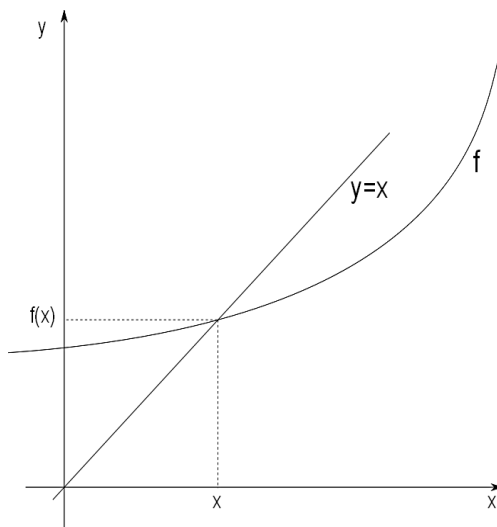
Po roce 1970 se začalo objevovat stále více článků zabývajících se výsledkem Šarkovského. Většinou v nich byla snaha zjednodušit jeho důkaz. Proto se objevilo mnoho nových a kratších důkazů. Kolem roku 1980 byly publikovány nejméně tři důkazy, všechny hodně podobné. Tyto stanovily tzv. ‘moderní standardní důkaz’, zasloužili se o to především L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz a L. S. Young [2], U. Burkart [3], P. D. Straffin Jr. [4].

Dnes je Šarkovského věta standardní matematický pojem.

3 Šarkovského věta

V celé této kapitole předpokládáme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá.

Definice 3.1. *Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prvek $x \in \mathbb{R}$ nazveme **pevným bodem** funkce f , jestliže $f(x) = x$.*



Obrázek 1: Grafické znázornění pevného bodu x

Zvolme počáteční bod x_0 a generujme posloupnost

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Zavedeme označení

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots$$

Definice 3.2. *První iterací bodu x_0 vzhledem k f nazveme $f(x_0)$, druhou iterací vzhledem k f nazveme $f^2(x_0)$, obecně n -tou iterací bodu x_0 vzhledem k f nazveme $f^n(x_0)$.*

Definice 3.3. *Nechť bod x leží v definičním oboru zobrazení f . Bod x nazveme k -periodickým bodem zobrazení f , jestliže pro nějaké přirozené k je $f^k(x) = x$*

a $f^i(x) \neq x$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$, tj. bod x je k -periodický, jestliže je pevným bodem f^k , ale není pevným bodem f^i , kde $i < k$. Periodickou orbitu bodu x , $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)\}$, budeme nazývat k -cyklus.

Příklad 3.1. Nechť $f(x) = x^2 - 3x - 1$. Nalezněme pevné body a 2-cyklus.

Nejdříve určíme pevné body, tedy položíme

$$f(x) = x,$$

dosadíme za $f(x)$

$$x^2 - 3x - 1 = x$$

a vypočteme x . Dostaneme 2 pevné body

$$x_1 = 2 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{5}$$

Nyní budeme hledat 2-cyklus a to tak, že položíme

$$f^2(x) = x,$$

čili

$$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 14x + 3 = 0 \tag{1}$$

Rovnice (1) má čtyři kořeny, z nichž dva jsou pevnými body zobrazení $f(x)$.

Abychom tyto pevné body z rovnice (1) vyloučili, vydělíme levou stranu (1) funkcí $f(x) - x$. Dostaneme rovnici

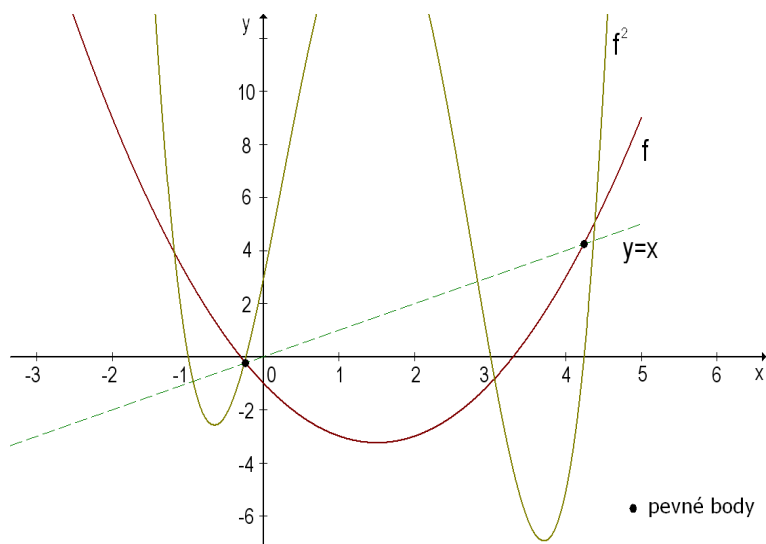
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \tag{2}$$

2-periodické body, a tedy i 2-cyklus, získáme řešením rovnice (2). Konkrétně

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = -1$$

Získali jsme tedy 2-cyklus ve tvaru $\{3, -1\}$.



Obrázek 2: Grafické znázornění Příkladu 3.1

Dále se budeme zabývat následující otázkou:

Jestliže spojitá funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má bod s periodou n , znamená to, že f musí mít bod s periodou k ? Řečeno jinak, jaké periody k jsou vynuceny některými dalšími periodami n ?

Nejdříve uvedeme větu T. Li a J. Yorke, protože to je speciální případ Šarkovského věty. Znění této věty je velmi jednoduché a také má poměrně jednoduchý důkaz.

Věta 3.1 (T. Li a J. Yorke [6]). *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť existuje bod x takový, že je splněna jedna z následujících podmínek:*

- (i) $f^3(x) \leq x < f(x) < f^2(x)$,
- (ii) $f^3(x) \geq x > f(x) > f^2(x)$.

Potom funkce f má periodické body všech period.

Poznamenejme, že jestliže funkce f má bod s periodou 3, potom má body všech period [7].

Dříve než dokážeme Větu 3.1, uvedeme následující definice a lemmata, která následně použijeme v důkazu této věty.

Definice 3.4. *Nechť je dána množina $A \subset \mathbb{R}^n$. Bod $x \in A$ nazveme vnitřním bodem množiny A , jestliže existuje okolí O bodu x , tedy otevřená množina $O \subset \mathbb{R}^n$ obsahující bod x , pro kterou platí $O \subset A$. Všechny vnitřní body A nazýváme vnitřek množiny a značíme $\text{int}(A)$.*

Definice 3.5. *Nechť je dána množina $A \subset \mathbb{R}^n$. Bod $x \in A$ nazveme hraničním bodem množiny A , jestliže pro každé jeho okolí O platí $O \cap A \neq \emptyset$ a $O \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.*

Možinu všech hraničních bodů nazýváme hranice množiny a značíme ∂A .

Lemma 3.1 ([5]). *Jestliže I a J jsou uzavřené intervaly, $f(I) \supset J$ a funkce f je spojitá, potom existuje podinterval $K \subset I$ takový, že $f(K) = J$, $f(\text{int}(K)) = \text{int}(J)$ a $f(\partial K) = \partial J$.*

Důkaz [5]. Nechť $J = [b_1, b_2]$. Existují $a_1, a_2 \in I$ takové, že $f(a_j) = b_j$. Předpokládejme, že $a_1 < a_2$.

(Opačný případ je obdobný, změníme supremum na infimum resp. infimum na supremum). Nechť

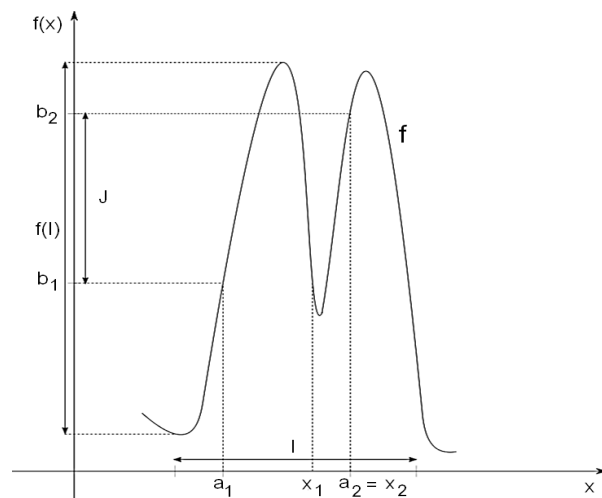
$$x_1 := \sup\{x; a_1 \leq x \leq a_2, f(x) = b_1\}.$$

Ze spojitosti plyne $f(x_1) = b_1$. Poznamenejme, že $x_1 < a_2$. Nechť

$$x_2 := \inf\{x; x_1 \leq x \leq a_2, f(x) = b_2\}.$$

Potom $f(x_2) = b_2$. Tedy $f(x_1, x_2) = [b_1, b_2]$. Z definic x_1 a x_2 plyne: $f((x_1, x_2)) \cap \partial J = \emptyset$. Tedy $f(\text{int}([x_1, x_2])) = \text{int}(J) = (b_1, b_2)$. Toto dokazuje lemma.

□



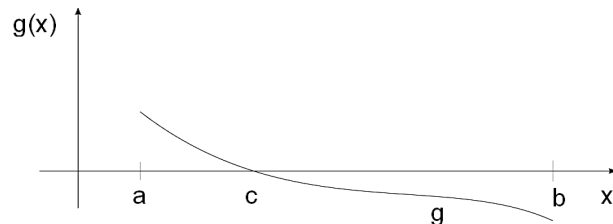
Obrázek 3: Znázornění důkazu Lemmatu 3.1

Definice 3.6 ([5]). Řekneme, že interval I f -pokrývá interval J , jestliže $f(I) \supset J$. Píšeme $I \rightarrow J$.

Lemma 3.2 ([5]). (a) Předpokládejme, že jsou dány dva body $a \neq b$ takové, že $f(a) > a$, $f(b) < b$ a $[a, b]$ je obsažen v definičním oboru f , kde f je spojitá. Potom existuje pevný bod mezi a a b .

(b) Jestliže uzavřený interval I f -pokrývá sám sebe a funkce f je spojitá, potom f má pevný bod v intervalu I .

Důkaz [5]. (a) Nechť $g(x) = f(x) - x$. Potom $g(a) > 0$ a $g(b) < 0$. Z Věty o střední hodnotě vyplývá, že existuje bod c mezi body a a b , kde $g(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$.



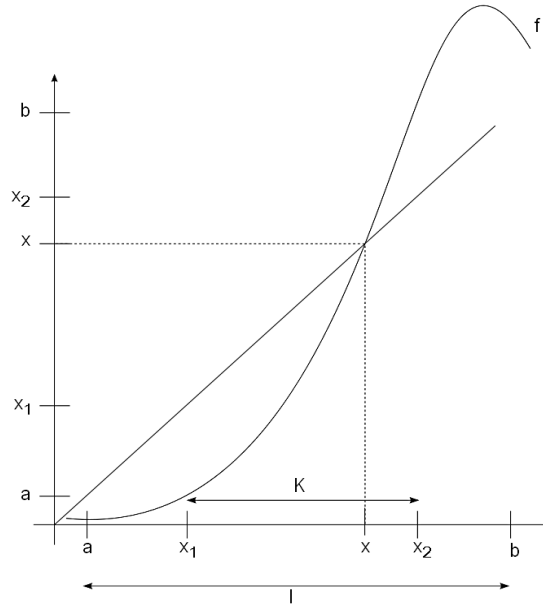
Obrázek 4: Funkce $g(x)$

(b) S použitím Lemmatu 1 existuje interval $K = [x_1, x_2] \subset I$ takový, že $f(K) = I = [a, b]$. Potom buď

(i) $f(x_1) = a \leq x_1$ a $f(x_2) = b \geq x_2$ nebo

(ii) $f(x_1) = b > x_1$ a $f(x_2) = a < x_2$. Jestliže výše uvedené rovnosti platí, důkaz je hotov. Jinak aplikací části (a) dokážeme existenci pevného bodu.

□



Obrázek 5: Grafické znázornění důkazu Lemmatu 3.2b

Lemma 3.3 ([5]). *Nechť $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_n = J_0$ je cyklus, kde $f(J_k) \supset J_{k+1}$ pro $k = 0, \dots, n-1$.*

(a) *Potom existuje pevný bod x_0 funkce f^n , kde $f^k(x_0) \in J_k$ pro $k=0, \dots, n$.*

(b) *Dále nechť tento cyklus není vytvořen opakováním p krát kratšího cyklu délky m , kde $mp = n$ a nechť platí buď $\text{int}(J_i) \cap \text{int}(J_k) = \emptyset$, pro $i \neq k$, $i = 0, \dots, n$, $k = 0, \dots, n$ nebo $J_i = J_k$. Jestliže periodický bod x_0 z části (a) leží ve vnitřku intervalu (J_0) , pak má aspoň periodu n .*

Poznamenejme, že v uvedeném cyklu se mohou opakovat některé intervaly, jako například $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots J_{n-2} \rightarrow J_0 \rightarrow J_0$ nebo $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow J_0$. Avšak nepovolujeme cyklus typu $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow J_0 \rightarrow J_1$.

Důkaz Lemmatu 3.3 [5].

(a) Důkaz provedeme idukcí dle j . Indukční předpoklad je následující:

Existuje podinterval $K_j \subset J_0$ takový, že pro $i = 1, \dots, j$ platí $f^i(K_j) \subset J_i$, $f^i(int(K_j)) \subset int(J_i)$ a $f^j(K_j) = J_j$.

Indukční předpoklad platí pro $j = 1$, to plyne z Lemmatu 3.1.

Předpokládejme platnost pro $j = k - 1$, tedy existuje interval K_{k-1} a dokažme platnost pro $j = k$. Potom

$$f^k(K_{k-1}) = f(f^{k-1}(K_{k-1})) = f(J_{k-1}) \supset J_k$$

Užitím Lemmatu 3.1 plyne, že existuje podinterval $K_k \subset K_{k-1}$ takový, že $f^k(K_k) = J_k$, kde $f^k(int(K_k)) = int(J_k)$. Užitím indukčního předpokladu dostaneme platnost pro $j = k$.

Nyní položíme $j = n$, dostaneme $f^n(K_n) = J_0$. Z Lemmatu 3.2 plyne, že f^n má pevný bod $x_0 \in K_n \subset J_0$. Protože $x_0 \in K_n$, platí $f^i(x_0) \in J_i$ pro $i = 0, \dots, n$. Toto dokazuje část (a).

(b) Platí $f^n(int(K_n)) = int(J_0)$, jestliže $x_0 \in int(J_0)$, potom $x_0 \in int(K_n)$ a $f^i(x_0) \in int(J_i)$ pro $i = 1, \dots, n$. Z předpokladů dokazovaného Lemmatu musí platit, že x_0 má periodu n .

□

Nyní můžeme provést důkaz Věty 3.1, ve kterém užijeme výsledků, které jsme již dokázali.

Důkaz [5]. Budeme uvažovat první případ, kde $f(a) = b > a$, $f^2(a) = f(b) = c > f(a) = b$ a $f^3(a) = f(c) \leq a$.

Nechť $I_1 = [a, b]$ a $I_2 = [b, c]$. Potom I_1 f -pokrývá I_2 a I_2 f -pokrývá I_1 a I_2 .

Protože $f(I_2) \supset I_2$, existuje podle Lemmatu 3.2 pevný bod.

Dále ukážeme, že f má bod s periodou n pro každé $n \geq 2$. Uvažujme cyklus délky n tvořený jedním intervalem I_1 a $n - 1$ intervaly I_2 vypadající takto:

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1$$

Užitím Lemmatu 3.3 existuje bod $x_0 \in I_1$ takový, že $f^n(x_0) = x_0$ a $f^j(x_0) \in I_2$ pro $j = 1, \dots, n - 1$. Jestliže by existovalo k , kde $1 \leq k < n$ takové, že $f^k(x_0) = x_0$,

potom by platilo, že $x_0 = f^k(x_0) \in I_2$. Tedy bychom dostali, že $x_0 \in I_1 \cap I_2 = \{b\}$. Nyní ukážeme, že $x_0 = b$ není možné. Musíme rozlišit, jestli $n = 2$ nebo $n \geq 3$. V případě, že $n = 2$ by platilo $f^2(b) = f^2(x_0) = x_0 = b$, což popírá skutečnost, že $f^2(b) = f^3(a) \leq a$. V případě, že $n \geq 3$ dostaneme, že $f^2(b) = f^2(x_0) \in I_2$, což popírá skutečnost, že $f^2(b) = f^3(a) \leq a$.

Toto ukazuje, že $f^j(x_0) \neq x_0$ pro $1 \leq j < n$ a tedy x_0 má periodu n .

□

Abychom mohli vyslovit Šarkovského větu, potřebujeme představit nové uspořádání přirozených čísel užitím symbolu " $\triangleright$ " nazývaném Šarkovského uspořádání.

Zprvče uspořádáme lichá přirozená čísla větší než jedna takto:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots$$

Dále všechna lichá přirozená čísla vynásobíme dvojkou a přidáme do uspořádání. Následně lichá přirozená čísla násobíme vzestupnými mocninami dvojky:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots$$

$$\triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^{n+1} \cdot 3 \triangleright 2^{n+1} \cdot 5 \triangleright \dots$$

Nakonec do uspořádání přidáme samotné mocniny dvojky v sestupném pořadí [5].

Definice 3.7 ([5]). *Šarkovského uspořádání přirozených čísel vypadá takto*

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \dots$$

$$\triangleright 2^{n+1} \cdot 3 \triangleright 2^{n+1} \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^{n+1} \triangleright 2^n \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Nyní máme zdefinováno uspořádání mezi všemi přirozenými čísly. Toto uspořádání se zdá být neobvyklé, ale ukazuje se být uspořádáním, které vyjadřuje, jaké periody vynucují jiné periody, dané v Šarkovského větě.

Věta 3.2 (Šarkovského věta [5]). *Nechť $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Jestliže f má bod o periodě n a $n \triangleright k$, potom má také bod o periodě k .*

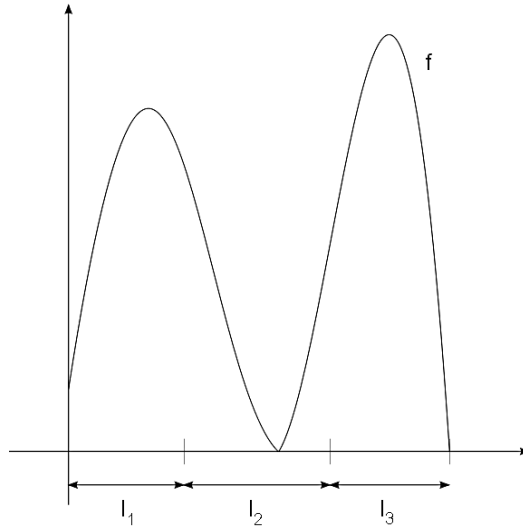
Dříve, než dokážeme Větu 3.2, vyslovíme následující Definice 3.8, 3.9 a dokážeme Lemma 3.4, které následně využijeme v důkazu věty.

Důkaz věty vyžaduje hledání intervalů, které se jistým způsobem vzájemně f –pokrývají.

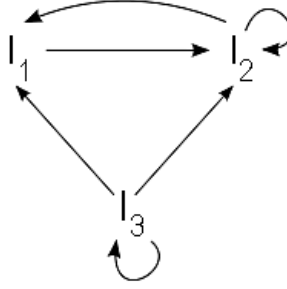
Definice 3.8. *Nechť je dán interval I a intervaly I_k , kde $k = 1, \dots, s$. Řekneme, že intervaly I_k tvoří rozdělení intervalu I , jestliže platí $\bigcup_{k=1}^s I_k = I$.*

Definice 3.9 ([5]). *Nechť $\mathcal{A} = \{I_1, \dots, I_s\}$ je rozdělení intervalu I na uzavřené intervaly, jejichž vnějšky jsou neprázdné a disjunktní. $\mathcal{A}$ –graf funkce f je orientovaný graf s vrcholy danými intervaly I_j a orientovanou hranou z I_j do I_k , jestliže I_j f –pokrývá I_k .*

Příklad 3.2 ([5]). *Nechť funkce f má graf, který je uveden na Obrázku 6 s intervaly I_1 , I_2 a I_3 . Potom interval I_1 f –pokrývá I_2 , I_2 f –pokrývá I_1 a I_2 , I_3 f –pokrývá I_1 , I_2 a I_3 . $\mathcal{A}$ –graf funkce f je uveden na obrázku 7.*



Obrázek 6: Graf funkce f z Příkladu 3.2



Obrázek 7: $\mathcal{A}$ – graf funkce f

Uvažujme nejprve případ, kde n je liché přirozené číslo takové, že $n > 1$, spojitá funkce f má bod x s periodou n a nemá žádné body s lichou periodou k , kde $1 < k < n$ ($k \triangleright n$).

Aby v tomto případě byla ukázána platnost Šarkovského věty, v [1] Peter Štefan dokázal existenci orbity se speciální strukturou. Nechť x_1 je bod s periodou n takový, že

$$x_n < x_{n-2} < \cdots < x_3 < x_1 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{n-1}$$

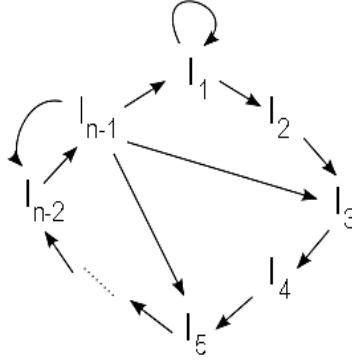
kde $x_j = f^{j-1}(x_1)$. Periodický bod s takto uspořádanou orbitou se nazývá Štefanův cyklus. V Lemmatu 3.4 dokážeme, že taková orbita opravdu existuje.

Uvažujme tedy tuto orbitu, nechť $I_1 = [x_1, x_2]$, $I_2 = [x_3, x_1]$, $I_3 = [x_2, x_4]$, $I_{2j} = [x_{2j+1}, x_{2j-1}]$ a $I_{2j-1} = [x_{2j-2}, x_{2j}]$, pro $j = 2, \dots, \frac{n-1}{2}$.

Z povahy orbity plyne, že:

- (i) I_1 f –pokrývá I_1 a I_2 ,
- (ii) I_j f –pokrývá I_{j+1} pro $2 \leq j \leq n-2$,
- (iii) I_{n-1} f –pokrývá všechny I_j pro j lichá.

Tedy existence takové speciální orbity dokazuje, že $\mathcal{A}$ – graf funkce f obsahuje podgraf (viz Obrázek 8). Tento podgraf se nazývá Štefanův graf. Aplikováním předchozích lemmat na Štefanův graf lze dokázat existenci všech period plynoucích z n v Šarkovského uspořádání.



Obrázek 8: Štefanův graf funkce f

Nyní vyslovíme Lemma 3.4 a jeho důkaz.

Lemma 3.4 ([5]). *Předpokládejme, že n je liché přirozené číslo takové, že $n > 1$. Předpokládejme dále, že funkce f má bod x s periodou n a f nemá žádné body s lichou periodou k , kde $1 < k < n$ ($k \nmid n$). Nechť $J = [\min \mathcal{O}(x), \max \mathcal{O}(x)]$. Nechť $\mathcal{A}$ je rozdělení intervalu J elementy $\mathcal{O}(x)$. Potom $\mathcal{A}$ – graf funkce f obsahuje podgraf následujícího tvaru:*

$I_1, \dots, I_{n-1}$ jsou intervaly mající disjunktní vnitřky takové, že:

- (i) I_1 f -pokrývá I_1 a I_2 ,
- (ii) I_j f -pokrývá I_{j+1} pro $2 \leq j \leq n-2$,
- (iii) I_{n-1} f -pokrývá všechna I_j pro j lichá.

Viz Obrázek 8.

Důkaz [5]. Nechť $\mathcal{O}(x) = \{z_1, \dots, z_n\}$, kde z_j jsou uspořádány takto:

$$z_1 < z_2 < \dots < z_n.$$

Potom $f(z_n) < z_n$, protože $f(z_n)$ je jeden z bodů z_j . Podobně $f(z_1) > z_1$.

Nechť $a = \max\{y \in \mathcal{O}(x) : f(y) > y\}$. Potom $a \neq z_n$. Nechť b je následující větší číslo než a v orbitě $\mathcal{O}(x)$. Dále nechť $I_1 = [a, b] \in \mathcal{A}$.

Nyní bude následovat posloupnost kroků, které nazveme tvrzení. Nejdříve potřebujeme ukázat, že I_1 f -pokrývá sám sebe (Tvrzení 3.1) a eventuálně, tj. po nějaké iteraci funkce f , f -pokrývá celý interval J (Tvrzení 3.2). Tvrzení 3.4

ukazuje, že existuje nejkratší cyklus s disjunktními intervaly tak, že $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1$. Tvzení 3.5 a 3.6 ukazují, že tyto intervaly jsou umístěny na reálné ose a chovají se tak, jak je uvedeno v tvrzení Lemmatu 3.4.

Tvrzení 3.1. $f(I_1) \supset I_1$, tedy interval I_1 f -pokrývá sám sebe.

Důkaz. Víme, že $f(a) > a$, takže $f(a) \geq b$. Rovněž, poněvadž $b > a$, $f(b) < b$ je $f(b) \leq a$. Proto platí, že $f(I_1) \supset I_1$.

□

Tvrzení 3.2. $f^{n-2}(I_1) \supset J$, tedy $(n-2)$ obraz intervalu I_1 pokrývá celý interval J .

Důkaz. Jelikož $f(I_1) \supset I_1$, $f^{k+1}(I_1) \supset f^k(I_1)$, tedy iterace jsou vnořeny. Počet bodů v $\mathcal{O}(x) \setminus \{a, b\}$ je $n-2$, takže $z_n \in f^k(I_1)$ pro nějaké $0 \leq k \leq n-2$. Z vlastnosti vnoření plyne, že $z_n \in f^{n-2}(I_1)$. Podobně $z_1 \in f^{n-2}(I_1)$. Jelikož I_1 je uzavřený, platí $f^{n-2}(I_1) \supset [z_1, z_n] = J$.

□

Tvrzení 3.3. Existuje $K_0 \in \mathcal{A}$, kde $K_0 \neq I_1$ takový, že $f(K_0) \supset I_1$.

Důkaz. V této části důkazu užíváme fakt, že n je liché. Z toho plyne, že je více elementů z $\mathcal{O}(x)$ na jedné straně $\text{int}(I_1)$ než na straně druhé. Označme $\mathcal{P}$ elementy $\mathcal{O}(x)$ na té straně $\text{int}(I_1)$, kde jich je více. Potom existuje $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$ takové, že $f(y_1) \in \mathcal{P}$ a $f(y_2) \in \mathcal{O}(x) \setminus \mathcal{P}$. Uvažujme sousedící body y_1 a y_2 z výše uvedeného. Nechť K_0 je interval $[y_1, y_2]$. Potom $f(K_0) \supset I_1$ a $K_0 \neq I_1$.

□

Tvrzení 3.4. Existuje cyklus $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$, kde $I_2 \neq I_1$. Nejkratší takový cyklus, kde $k \geq 2$, je pro $k = n-1$.

Důkaz. Nechť K_0 je stejné jako v Tvrzení 3.3, takže $f(K_0) \supset I_1$. Z Tvrzení 3.2 plyne, že $f^{n-2}(I_1) \supset K_0$. Existuje pouze $n-1$ různých intervalů v $\mathcal{A}$, takže existuje takový cyklus, kde $2 \leq k \leq n-1$.

Nyní uvažujme nejmenší takové k , kde $2 \leq k \leq n - 1$ a dospějeme ke sporu. Jelikož toto je nejkratší cyklus, žádný z intervalů nemůže být opakován nebo zkrácen. Buď k nebo $k + 1$ je liché. Nechť $m = k$ nebo $k + 1$ je toto liché přirozené číslo, takže $1 < m < n$. Použijme cyklus z m intervaly daný vztahem

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$$

nebo

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$$

záleží na tom, jestli $m = k$ nebo $m = k + 1$. Z Lemmatu 3.3a existuje bod z takový, že $f^m(z) = z$. Bod z nemůže být na hranici intervalu, protože tyto body mají periodu n , která je větší než m . Tedy z Lemmatu 3.3b má bod z nejméně periodu m . Jelikož m je liché, dostaneme spor s předpokladem na n v Lemmatu 3.4. Tento spor dokazuje, že $k = n - 1$.

□

Ve zbytku důkazu Lemmatu 3.4 budeme fixovat intervaly $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ stejně jako v Tvzení 3.4.

Tvrzení 3.5. (a) Jestliže $f(I_j) \supset I_1$, potom $j = 1$ nebo $j = n - 1$.
(b) V $\mathcal{A}$ -grafu neexistuje orientovaná hrana z I_i do I_j pro $j > i + 1$.
(c) Interval I_1 f -pokrývá pouze intervaly I_1 a I_2 .

Důkaz.

- (a) plyne z Tvzení 3.1, resp. z Tvzení 3.4,
- (b) a (c) platí, protože cyklus je nejkratší možný.

□

Tvrzení 3.6. Buď:

- (i) uspořádání intervalů I_j v cyklu z Tvzení 3.4 je $I_{n-1} \leq I_{n-3} \leq \cdots \leq I_2 \leq I_1 \leq I_3 \leq \cdots \leq I_{n-2}$ a pro orbitu platí $f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \cdots < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) < \cdots < f^{n-2}(a)$ nebo
- (ii) tato uspořádání jsou přesně naopak.

Důkaz. Nechť $I_1 = [a, b]$. Interval I_1 f –pokrývá pouze I_1 a I_2 , takže tyto intervaly musí být vedle sebe. Předpokládejme, že $I_2 \leq I_1$ (jestliže $I_1 \leq I_2$, dostaneme možnost (ii) Tvrzení 3.6). Potom musí platit, že $f(a) = b$ a $f(b)$ je levý krajní bod intervalu I_2 .

Dále, $f(\partial I_2) = \partial I_3$. Jelikož jeden z těchto krajních bodů je $f(a) = b$, který je vně $\text{int}(I_1)$, oba krajní body intervalu I_3 musí být vně $\text{int}(I_1)$. Rovněž z Tvrzení 3.5a (I_2 f –nepokrývá I_1) a Tvrzení 3.5b (I_2 f –nepokrývá I_j pro $j > 3$) interval I_3 musí být sousedící s intervalem I_1 .

Pokračujme dále. Pro $k < n - 1$, jelikož I_k f –nepokrývá I_1 a I_k f –nepokrývá I_j pro $j > k + 1$, I_k musí být sousedící s intervalem I_{k-1} . Toto platí pro všechny intervaly z Tvrzení 3.6.

Poznamenejme, že jsme také ukázali uspořádání orbit konstatované v Tvrzení 3.6.

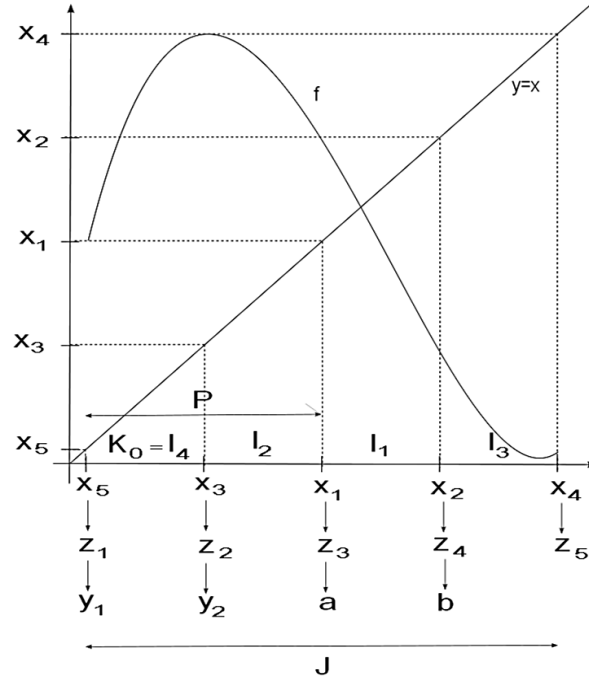
□

Tvrzení 3.7. *Interval I_{n-1} f –pokrývá všechny intervaly I_j pro j liché.*

Důkaz. Poznamenejme, že $I_{n-1} = [f^{n-1}(a), f^{n-3}(a)]$. Potom $f(f^{n-1}(a)) = f^n(a) = a$. Takže $f^{n-3}(a) \in I_{n-3}$, takže $f(f^{n-3}(a)) = f^{n-2}(a) \in I_{n-2}$ je pravý krajní bod intervalu J (největší element orbity $\mathcal{O}(x)$). Tedy $f(I_{n-1}) \supset [a, f^{n-2}(a)] = I_1 \cup I_3 \cup \dots \cup I_{n-2}$. Tímto jsme dokázali Tvrzení 3.7.

□

Tvrzení 3.1 až 3.7 dohromady dokazují Lemma 3.4.



Obrázek 9: Grafické znázornění důkazu Lemmatu 3.4 pro $n = 5$

Protože důkaz Šarkovského věty ještě není kompletní, vyslovíme pouze speciální část této věty.

Tvrzení 3.8 ([5]). *Nechť $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, dále nechť n je liché přirozené číslo. Jestliže funkce f má bod o periodě n a $n \triangleright k$, potom má také bod o periodě k .*

Důkaz [5]. Uvažujme k takové, že $n \triangleright k$. Mohou nastat 2 případy:

- (a) k je sudé a $k < n$ nebo
- (b) $k > n$, kde k je buď sudé nebo liché.

Důkaz případu (a). Uvažujme cyklus délky k vypadající takto

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-k} \rightarrow I_{n-k+1} \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1}$$

z Lemmatu 3.3a existuje bod $x_0 \in I_{n-1}$, kde $f^k(x_0) = x_0$. Bod x_0 nemůže být krajním bodem, protože krajní body mají periodu n . Proto má bod x_0 periodu k .

Důkaz případu (b). Uvažujme cyklus délky k vypadající takto

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \cdots \rightarrow I_1$$

znovu z Lemmatu 3.3a existuje bod $x_0 \in I_1$, kde $f^k(x_0) = x_0$. Jestliže $x_0 \in \partial I_1$, potom x_0 má periodu n . Tedy n dělí k , takže $k \geq 2n \geq n + 3$. Takže jelikož $f^n(x_0) \in I_1$ iterace $f^{n+1}(x_0) \notin I_1$, což je ve sporu s tvrzením Lemmatu 3.3a. Proto bod $x_0 \notin \partial I_1$ a užitím Lemmatu 3.3b dostáváme, že bod x_0 má periodu k . Toto uzavírá důkaz případu (b) a Tvrzení 3.8.

□

Lemma 3.5 ([5]). *Jestliže funkce f má bod se sudou periodou, potom má bod s periodou 2.*

Důkaz [5]. Nechť n je nejmenší přirozené číslo větší než jedna v obvyklém uspořádání přirozených čísel (ne Šarkovského uspořádání) takové, že funkce f má bod s periodou n . Jestliže n je liché, potom jsme hotovi. To plyne z Tvrzení 3.8.

Proto předpokládejme, že n je sudé. Zvolme a , $I_1 = [a, b]$ a $J = [\min \mathcal{O}(a), \max \mathcal{O}(a)] = [A, B]$ jako v předchozím. V důkazu Lemmatu 3.4 jsme užili pouze faktu, že n je liché, abychom ukázali, že existuje interval $K_0 \in \mathcal{A}$, kde $K_0 \neq I_1$ a $f(K_0) \supset I_1$.

Nejdříve předpokládejme, že existuje takový K_0 . Existuje minimální cyklus jako v Tvrzení 3.4 v důkazu Lemmatu 3.4, kde $2 \leq k \leq n - 1$. Jako dříve, I_k pokrývá všechny I_j . Tedy

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$$

je cyklus délky 2 a existuje bod s periodou 2.

Dále předpokládejme, že neexistuje takový $K_0 \in \mathcal{A}$, kde $K_0 \neq I_1$ a $f(K_0) \supset I_1$. Z toho vyplývá, že pro všechny body $x_j \in \mathcal{O}(a)$, kde $x_j \leq a$ platí, že $f(x_j) \geq b$ a pro všechny body $x_j \in \mathcal{O}(a)$, kde $x_j \geq b$ platí, že $f(x_j) \leq b$. Jelikož nějaké body v $\mathcal{O}(a)$ jsou zobrazeny na b a B , oba $b, B \in f([A, a])$ a $f([A, a]) \supset [b, B]$. Podobně $f([b, B]) \subset [A, a]$. Potom

$$[A, a] \rightarrow [b, B] \rightarrow [A, a]$$

je cyklus délky 2. Tyto intervaly jsou disjunktní, takže musí existovat bod s periodou 2.

□

Nyní provedeme důkaz Věty 3.2, ve kterém využijeme výsledků, které jsme již dokázali dříve. Důkaz rozdělíme do několika kroků.

Důkaz Věty 3.2 [5].

Krok 1

n je liché v Šarkovského uspořádání a $n \triangleright k$.

Důkaz. Krok 1 je dokázán v Tvzení 3.8.

□

Krok 2

$n = 2^m$ a $n \triangleright k$, takže $k = 2^s$, kde $0 \leq s < m$.

Důkaz Kroku 2 rozdělíme na následující 3 případy, které postupně dokážeme:

(i) $s = 0$, tedy f má pevný bod,

(ii) $s = 1$,

(iii) $s > 1$.

Důkaz (i). Můžeme definovat a a b jako dříve, kde $f(a) \geq b$ a $f(b) \leq a$. Proto $f([a, b]) \supset [a, b]$ a funkce f má pevný bod.

Důkaz (ii). Plyne z Lemmatu 3.5.

Důkaz (iii). Necht' $g = f^{\frac{k}{2}} = f^{2^{s-1}}$. Zobrazení g má bod s periodou 2^{m-s+1} , kde $m - s + 1 \geq 2$. Lemma 3.5 dokazuje, že g má bod x_0 s periodou 2. Takže $x_0 = g^2(x_0) = f^k(x_0)$ a $x_0 \neq g(x_0) = f^{\frac{k}{2}}(x_0)$. Tedy perioda bodu x_0 pro funkci f je 2^t pro nějaké t , kde $t \leq s$. Jestliže $t < s$, potom x_0 je pevný bod pro funkci g , což je nemožné. Proto $t = s$ a bod x_0 je bod s periodou $2^s = k$.

□

Krok 3

$n = 2^m p$, kde $p > 1$ liché, $m \geq 1$, funkce f má bod s periodou n a $n \triangleright k$.

Důkaz Kroku 3 opět rozdělíme na následující 3 případy, které postupně dokážeme:

(i) $k = 2^s q$, kde $s \geq m + 1$ a $1 \leq q$ a q je liché,

(ii) $k = 2^s$, kde $s \leq m$,

(iii) $k = 2^m q$, kde q je liché a $q > p$.

Důkaz (i). Nechť $g = f^{2^m}$. Zobrazení g má bod s periodou p , kde p je liché. Krok 1 dokazuje, že g má bod se všemi sudými periodami, tedy má i bod s periodou $\frac{k}{2^m}$. Takže $x_0 = g^{\frac{k}{2^m}}(x_0) = f^k(x_0)$. Tedy funkce f má bod s periodou $k = 2^s q$.

Důkaz (ii). Nechť $g = f^{\frac{k}{2}} = f^{2^{s-1}}$. Zobrazení g má bod s periodou $2^{m-s+1}p$. Podle Lemmatu 3.5 má g bod s periodou 2. Tedy $x_0 = g^2(x_0) = f^k(x_0)$. Tedy funkce f má bod s periodou $k = 2^s$.

Důkaz (iii). Nechť $g = f^{2^m}$. Zobrazení g má bod s periodou p , kde p je liché. Z Kroku 1 plyne, že g má bod se všemi sudými periodami, tedy má i bod s periodou $\frac{k}{2^m}$. Potom $x_0 = g^{\frac{k}{2^m}}(x_0) = f^k(x_0)$. Tedy funkce f má bod s periodou $k = 2^m q$.

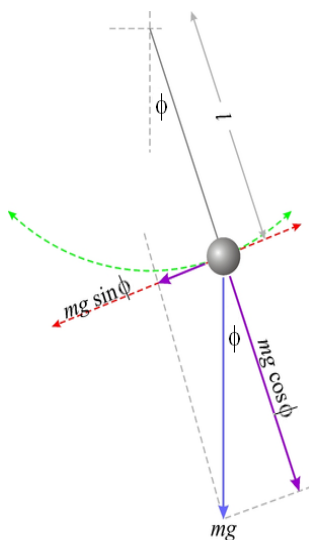
□

Tímto je Šarkovského věta dokázána.

V následující kapitole odvodíme rovnice matematického kyvadla, tyto rovnice poté vyřešíme analyticky pro malý úhel i numericky pro jakýkoliv úhel. Dále budeme analyzovat pohyb matematického kyvadla.

4 Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je speciální případ kyvadla. U matematického kyvadla předpokládáme, že závaží je hmotný bod zavěšený na tenkém vlákně zanedbatelné hmotnosti, zanedbává se odpor vzduchu při pohybu kyvadla i tření v závěsu a gravitační pole se považuje za homogenní. Hmotný bod je udržován stále ve stejné vzdálenosti od závěsu. Polohu kyvadla popisuje funkce $\phi(t)$, viz Obrázek 10, proměnné t , kde t čas.



Obrázek 10: Síly působící na matematické kyvadlo

4.1 Odvození rovnice matematického kyvadla [12]

Uvažujme Obrázek 10, který ukazuje síly působící na matematické kyvadlo. Poznamenejme, že trajektorie kyvadla opisuje oblouk. Úhel ϕ je vyjádřen v radiánech. Modrá šipka je gravitační síla působící na hmotný bod. Fialové šipky označují tíhovou sílu, kterou rozložíme na 2 složky, jedna je rovnoběžná a druhá je kolmá k okamžitému směru pohybu hmotného bodu. Směr okamžité rychlosti hmotného bodu je tečna k oblouku, který pevný bod opisuje.

Podle druhého Newtonova zákona platí

$$F = ma,$$

kde F je součet sil působících na hmotný bod, m je hmotnost a a je zrychlení hmotného bodu. Protože se zajímáme pouze o změny rychlosti ve směru okamžitého pohybu kyvadla, aplikujeme Newtonovu rovnici pouze na tečný směr k oblouku opsaného kyvadlem. Kratší fialová šipka představuje část gravitační síly v tečném směru, jejíž velikost určíme pomocí trigonometrie. Tedy

$$F = -mg \sin(\phi) = ma,$$

$$a = -g \sin(\phi),$$

kde g je tíhové zrychlení. Záporné znaménko na pravé straně naznačuje, že úhel ϕ a zrychlení a vždy míří opačnými směry. To je způsobeno tím, že když se kyvadlo pohybuje doleva, zrychlení působí zpět směrem doprava. Zrychlení a podél červené osy souvisí se změnou úhlu ϕ . Nechť s je délka oblouku opsaného kyvadlem (měřená od rovnovážné polohy), potom

$$s = l\phi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\phi}{dt}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\phi}{dt^2},$$

tedy

$$l \frac{d^2\phi}{dt^2} = -g \sin(\phi).$$

Odtud dostáváme rovnici matematického kyvadla ve tvaru

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\phi) = 0, \quad (3)$$

kde jsme užili substituce $\sqrt{g/l} = \omega_0$. Rovnice (3) je nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. K rovnici (3) musíme přidat počáteční podmínky

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \frac{d\phi}{dt}(0) = 0,$$

které vyjadřují, že poloha kyvadla v čase 0 je ϕ_0 a úhlová rychlost v čase 0 je nulová.

Tato rovnice popisuje pohyb kyvadla ovlivněného pouze tíhovou silou.

4.2 Matematické kyvadlo s tlumením a periodickým buzením

V případě, že uvažujeme tlumení, přepíšeme rovnici (3) do tvaru

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + b\frac{d\phi}{dt} + \omega_0^2 \sin(\phi) = 0, \quad (4)$$

kde b je tlumící konstanta, nový člen rovnice (4) je ve výše uvedeném tvaru, neboť tlumící síla je úměrná rychlosti.

K rovnici (4) můžeme ještě uvažovat periodické buzení. Následně by rovnice (4) byla ve tvaru

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + b\frac{d\phi}{dt} + \omega_0^2 \sin(\phi) = A \cos(\omega_D t), \quad (5)$$

kde A je amplituda budící síly, ω_D je její úhlová rychlost.

Více o matematickém kyvadle s tlumením a periodickým buzením lze nalézt v [8].

4.3 Řešení rovnice matematického kyvadla

4.3.1 Linearizovaný případ

Uvažujme rovnici (5). V této části uijeme linearizaci, tj. omezíme se na malý úhel ϕ . Potom můžeme označit

$$\sin(\phi) \approx \phi.$$

Následně můžeme rovnici (5) psát ve tvaru

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + b\frac{d\phi}{dt} + \omega_0^2\phi = A\cos(\omega_D t), \quad (6)$$

což je lineární diferenciální rovnice 2. řádu. Nejdříve spočítáme obecné řešení příslušné homogenní rovnice

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + b\frac{d\phi}{dt} + \omega_0^2\phi = 0 \quad (7)$$

Charakteristická rovnice příslušná rovnici (7) je tvaru

$$\lambda^2 + b\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (8)$$

Nyní spočítáme kořeny rovnice (8). Tedy vypočteme diskriminant

$$D = b^2 - 4\omega_0^2$$

Kořeny rovnice (8) jsou tedy tvaru

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Nyní musíme rozlišit 3 případy a to tyto:

(i) $D > 0$, tj. $\lambda_{1,2}$ jsou dva různé reálné kořeny, potom řešení rovnice (7) je tvaru

$$\phi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Po dosazení počátečních podmínek $\phi(0) = \phi_0$ a $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ dostaneme řešení rovnice (7) ve tvaru

$$\phi(t) = \phi_0 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) e^{\lambda_1 t} + \frac{\phi_0 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}$$

(ii) $D = 0$, tj. rovnice (8) má jeden dojnásobný kořen $-\frac{b}{2}$, potom řešení rovnice (7) je tvaru

$$\phi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{b}{2}t}.$$

Po dosazení počátečních podmínek $\phi(0) = \phi_0$ a $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ dostaneme řešení rovnice (7) ve tvaru

$$\phi(t) = \left(\phi_0 + \frac{b}{2}\phi_0 t\right) e^{-\frac{b}{2}t}$$

(iii) $D < 0$, tj. $\lambda_{1,2}$ jsou dva komplexně sdružené kořeny, potom řešení rovnice (7) je tvaru

$$\phi(t) = e^{-\frac{b}{2}t} (c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t)),$$

kde $\mu = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - b^2}}{2}$.

Po dosazení počátečních podmínek $\phi(0) = \phi_0$ a $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ dostaneme řešení rovnice (7) ve tvaru

$$\phi(t) = e^{-\frac{b}{2}t} \left(\phi_0 \frac{b}{2\mu} \sin(\mu t) + \phi_0 \cos(\mu t) \right).$$

Nyní najdeme partikulární řešení rovnice (6). Toto řešení budeme hledat ve tvaru

$$k_1 \sin(\omega_D t) + k_2 \cos(\omega_D t)$$

Musíme rozlišit, jestli $\omega_0 = \omega_D$ nebo $\omega_0 \neq \omega_D$. Nejdříve nechť $\omega_0 \neq \omega_D$.

Metodou neurčitých koeficientů zjistíme, že

$$k_1 = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega_D^2)^2}, \quad k_2 = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega_D^2)b\omega_D},$$

tedy partikulární řešení rovnice (6) je tvaru

$$\phi_p(t) = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega_D^2)^2} \sin(\omega_D t) + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega_D^2)b\omega_D} \cos(\omega_D t)$$

Nyní nechť $\omega_0 = \omega_D$. Opět metodou neurčitých koeficientů zjistíme, že

$$k_1 = \frac{A}{b\omega_0}, \quad k_2 = 0,$$

tedy partikulární řešení rovnice (6) je tvaru

$$\phi_p(t) = \frac{A}{b\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice (6) je součtem řešení příslušné homogenní rovnice (7) a partikulárního řešení rovnice nehomogenní. Celkem dostáváme 6 možností řešení rovnice (6), které můžeme zjednodušeně zapsat takto

$$\phi(t) = \varphi(t) + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega_D^2)^2} \sin(\omega_D t) + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega_D^2)b\omega_D} \cos(\omega_D t),$$

nebo

$$\phi(t) = \varphi(t) + \frac{A}{b\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

kde $\varphi(t)$ je řešení příslušné homogenní rovnice (7) a ostatní členy jsou partikulární řešení nehomogenní rovnice (6).

4.3.2 Nelineární případ

Uvažujme rovnici (5). Předpokládejme, že výchylky jsou takové, že nelze předpokládat $\sin(\phi) \approx \phi$. Narozdíl od lineárního případu, kdy se dá řešení spočítat analyticky, je situace u nelineární rovnice matematické kyvadla daleko komplikovanější. Řešení nelineární rovnice (5) určíme numericky. K numerickému řešení uijeme software Matlab 7. Rovnici (5) převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu následujícím způsobem. Pomocí substituce

$$\phi_1 = \phi, \quad \phi_2 = \phi'$$

dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}\phi_1' &= \phi_2 \\ \phi_2' &= A \cos(\omega_D t) - b\phi_2 - \omega_0^2 \sin(\phi_1)\end{aligned}$$

Stejným způsobem převedeme počáteční podmínky

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \frac{d\phi}{dt}(0) = 0$$

na podmínky

$$\phi_1(0) = \phi_0, \quad \phi_2(0) = 0$$

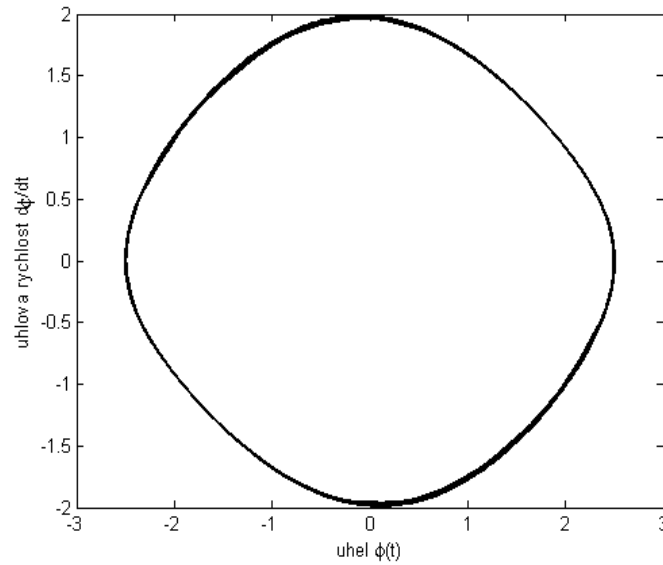
K řešení této soustavy použijeme řešič *ode45*, což je jednokroková metoda typu Runge-Kutta¹. Algoritmus výpočtu je uveden v Příloze 2. Řešení rovnice (5) se znázorňuje tzv. fázovým portrétem, kde situaci v čase t znázorňuje dvojice úhel ϕ a úhlová rychlost $\frac{d\phi}{dt}$. Tvar fázového portréту závisí na čtyřech parametrech

¹Metody Runge-Kutta jsou stručně popsány v Příloze 1

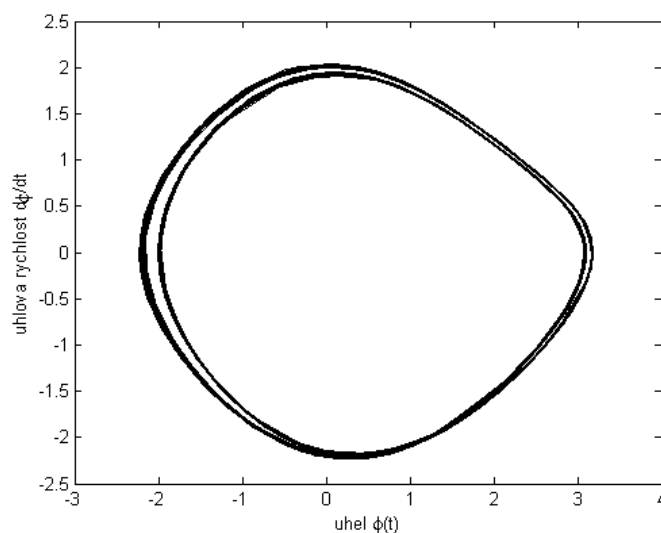
b , ω_0^2 , A , ω_D . V následujících fázových portrétech budeme fixovat parametry b , ω_0^2 a ω_D , a to takto

$$b = \frac{1}{2}, \quad \omega_0^2 = 1, \quad \omega_D = \frac{2}{3}.$$

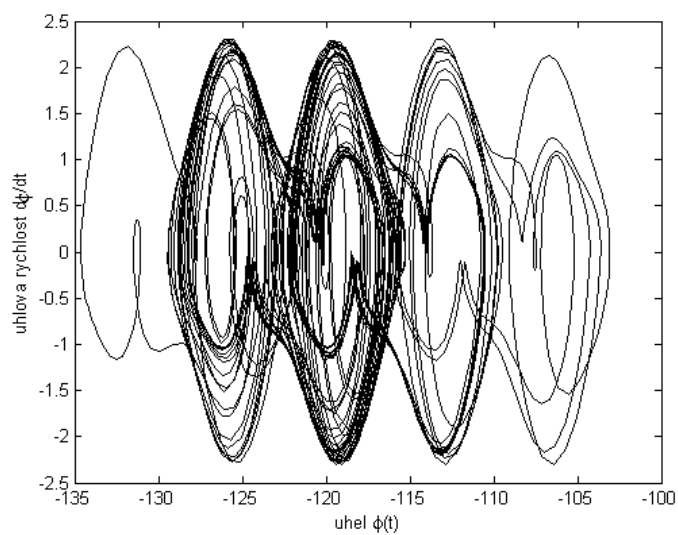
Budeme měnit pouze amplitudu A . Také nebudeme vykreslovat přechodovou fázi, ale vykreslíme až konečný výsledek, abychom lépe viděli chování kyvadla. Zdrojový kód pro uvedené fázové portréty je uveden v Příloze 2.



Obrázek 11: Fázový portrét řešení rovnice (5) pro $A = 0.9$. Pro takto zvolenou amplitudu vykazuje matematické kyvadlo periodické chování.



Obrázek 12: Fázový portrét řešení rovnice (5) pro $A = 1.07$. Pro takto zvolenou amplitudu vidíme zdvojení periody.



Obrázek 13: Fázový portrét řešení rovnice (5) pro $A = 1.15$. Pro takto zvolenou amplitudu vykazuje matematické kyvadlo chaotický pohyb.

V následující kapitole propojíme Šarkovského větu a matematické kyvadlo. Nadefinujeme Poincarého zobrazení, které následně upravíme tak, abychom na toto zobrazení mohli aplikovat Šarkovského větu.

5 Aplikace Šarkovského věty

5.1 Poincarého zobrazení

Nejdříve vysvětlíme pojem Poincarého zobrazení. Poincarého zobrazení je zobrazení, které vypadá takto

$$P_T : (\phi(0), \omega(0)) \rightarrow (\phi(T), \omega(T)),$$

kde T je perioda pravé strany, $\phi(T)$ je výchylka matematického kyvadla v čase T a $\omega(T)$ je úhlová rychlost v čase T . Tedy

$$P_T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Studium tohoto zobrazení pro nás není zajímavé, neboť toto zobrazení je z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, ale my chceme použít Šarkovského větu, která platí pro spojité funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Proto fixujeme $\omega(0) = 0$ a sledujeme zobrazení, které počáteční výchylce matematického kyvadla přiřadí výchylku v čase $T = \frac{2\pi}{\omega_D}$. O $\omega(T)$ se nezajímáme. Tedy

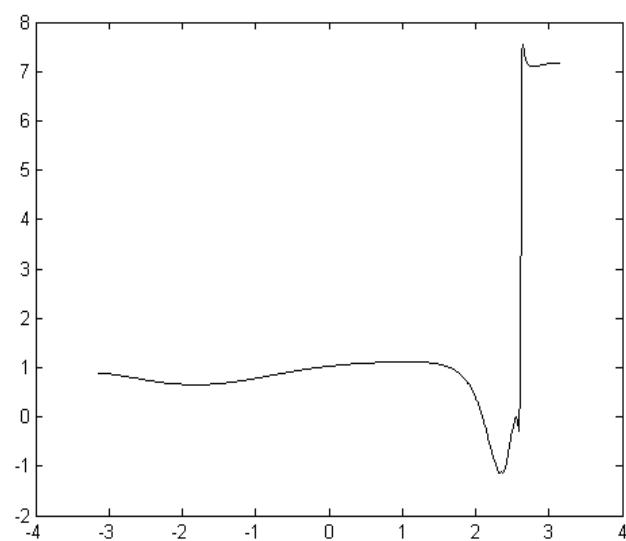
$$\tilde{P} : \phi(0) \rightarrow \phi(T) \tag{9}$$

Na tomto zobrazení budeme ilustrovat Šarkovského větu pro různé hodnoty amplitudy budící síly A . Zobrazení (9) nemá analytický předpis, proto budeme v následujícím hledat periodické body graficky pomocí softwaru Matlab 7.

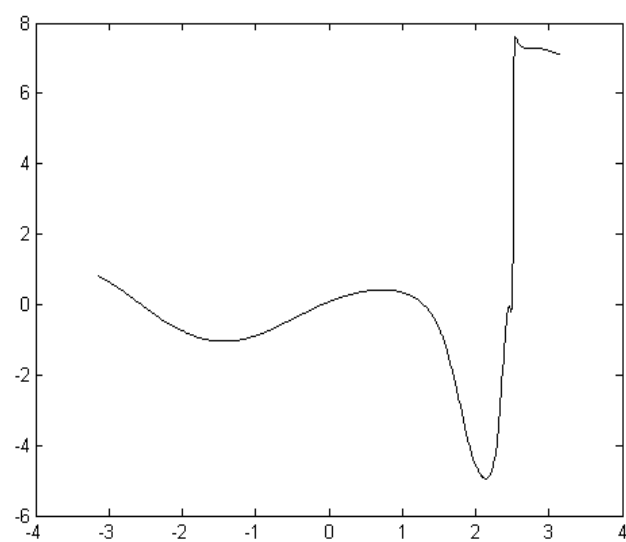
Nyní vykreslíme grafy zobrazení (9) pro různé amplitudy A . Parametry b , ω_0^2 a ω_D fixujeme jako v předchozím, tedy takto

$$b = \frac{1}{2}, \quad \omega_0^2 = 1, \quad \omega_D = \frac{2}{3}.$$

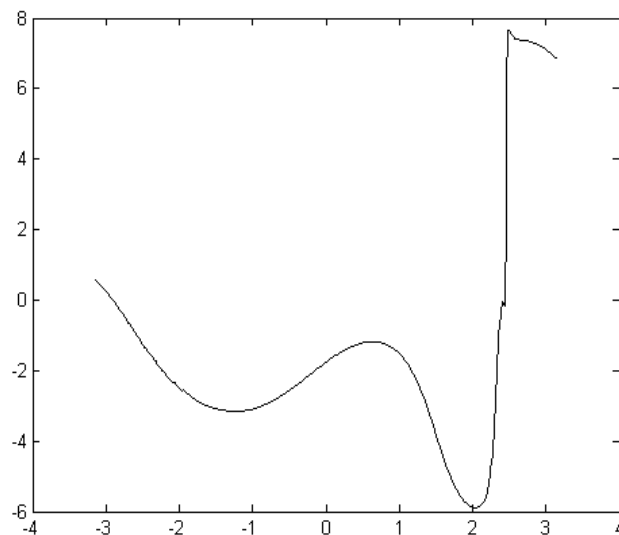
Algoritmus níže vykreslených grafů je uveden v Příloze 3.



Obrázek 14: Graf zobrazení (9) pro $A = 0.9$.



Obrázek 15: Graf zobrazení (9) pro $A = 1.07$.

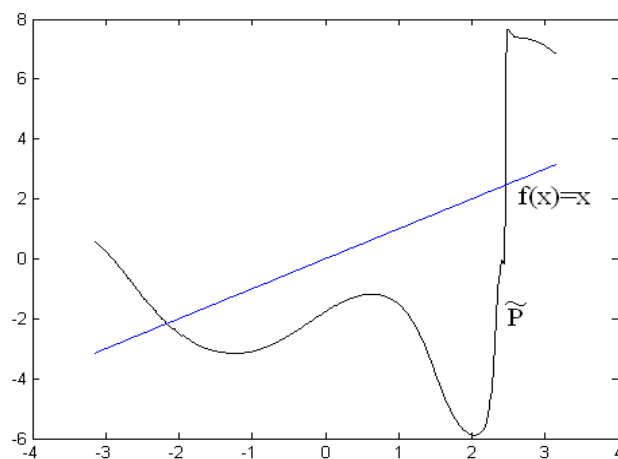


Obrázek 16: Graf zobrazení (9) pro $A = 1.15$.

5.2 Periodické body zobrazení (9)

Dále budeme hledat periodické body zobrazení (9). Toto není zajímavé pro amplitudy $A = 0.9$ a $A = 1.07$, neboť zobrazení (9) má pro tyto amplitudy pouze pevné body (algoritmus je uveden v Příloze 4). Dále budeme uvažovat pouze amplitudu $A = 1.15$.

Nejdříve nalezneme pevné body zobrazení (9). To provedeme tak, že do grafu zobrazení (9) přikreslíme přímku $f(x) = x$. Průsečíky přímky $f(x) = x$ a grafu zobrazení (9) označují pevné body (9) (viz Obrázek 17). Algoritmus nalezení pevných bodů je uveden v Příloze 4.

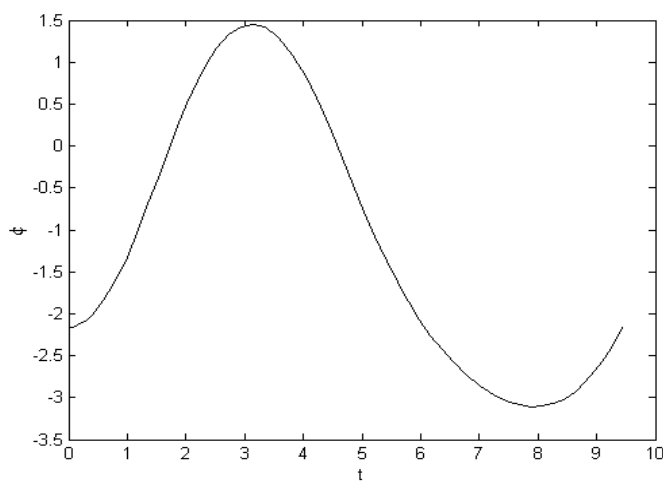


Obrázek 17: Pevné body zobrazení (9) pro $A = 1.15$.

Vidíme, že zobrazení (9) má dva pevné body. Uvažujme například pevný bod

$$x = -2.163$$

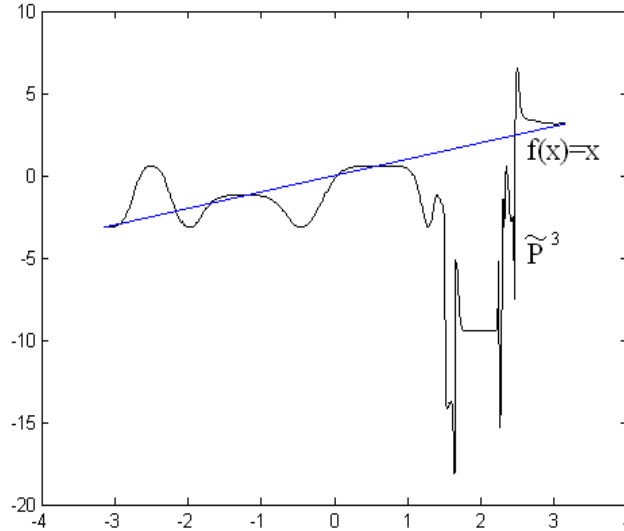
a vykresleme chování matematické kyvadla (algoritmus je uveden v Příloze 5), jehož počáteční výchylka odpovídá pevnému bodu x (viz Obrázek 18).



Obrázek 18: Chování matematického kyvadla na intervalu $[0, T]$ pro počáteční výchylku $x = -2.163$.

Na Obrázku 18 vidíme, že pro zvolenou počáteční výchylku x se matematické kyvadlo po uplynutí času T vrací zpět do původní výchylky x .

Nyní se pokusíme najít periodický bod zobrazení (9), který má periodou 3. Jestli se nám toto podaří, potom ze Šarkovského věty plyne, že zobrazení (9) má body všech přirozených period. Bod s periodou 3 budeme hledat tak, že najdeme pevné body třetí iterace zobrazení (9), které současně nejsou pevnými body zobrazení (9) ani jeho druhé iterace. Vykresleme tedy graf třetí iterace zobrazení (9) a znázorníme pevné body (viz Obrázek 19).



Obrázek 19: Pevné body třetí iterace zobrazení (9) pro $A = 1.15$.

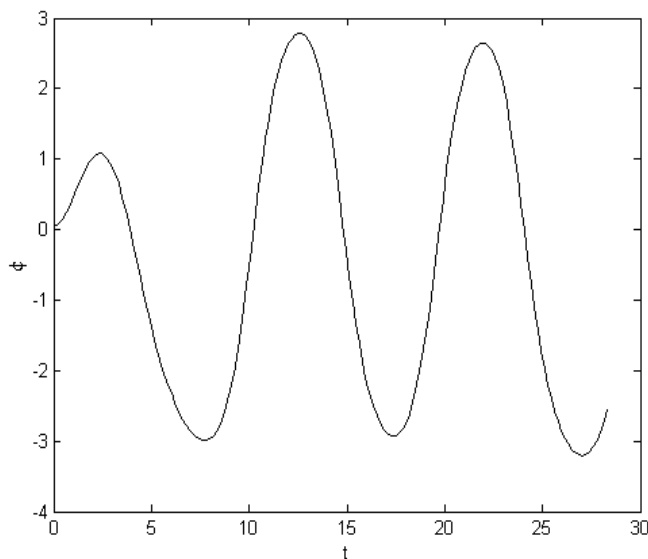
Vidíme, že třetí iterace zobrazení (9) má 8 pevných bodů. Uvažujme například bod

$$x = 0.048$$

Spočítejme hodnoty $\tilde{P}(x)$, $\tilde{P}^2(x)$ a $\tilde{P}^3(x)$. Výpočet těchto bodů je uveden v Příloze 3. Pro spočítání $\tilde{P}(x)$ pustíme kyvadlo s počátečními podmínkami $\phi(0) = \phi(T)$ a $\omega(0) = 0$. $\tilde{P}(x) = -1.6902$. Nyní spočítáme $\tilde{P}^2(x)$. To provedeme tak, že znovu pustíme kyvadlo s počátečními podmínkami $\phi(0) = \phi(T)$ a $\omega(0) = 0$. $\tilde{P}^2(x) = -2.9270$. Analogicky, tedy opět pustíme kyvadlo s počáteč-

ními podmínkami $\phi(0) = \phi(T)$ a $\omega(0) = 0$, spočteme hodnotu v bodě $\tilde{P}^3(x)$. $\tilde{P}^3(x) = 0.048$. Vidíme, že $\tilde{P}^3(x) = x$, tedy zobrazení (9) má bod s periodou 3.

Nyní ale ukážeme (viz Obrázek 20), že 3–periodický bod zobrazení (9) neodpovídá 3–periodickému řešení rovnice matematické kyvadla (5).



Obrázek 20: Chování matematického kyvadla na intervalu $[0, 3T]$ pro počáteční výchylku $x = 0.048$.

Na Obrázku 20 vidíme, že pro počáteční výchylku $x = 0.048$ se matematické kyvadlo po třetí iteraci nevrátí zpět do původní výchylky x .

Celkem tedy dostáváme, že zobrazení (9) má pro $A = 0.9$ a $A = 1.07$ pouze pevné body, ale pro $A = 1.15$ má body všech přirozených period, to plyne ze Šarkovského věty, neboť jsme našli bod s periodou 3. Matematické kyvadlo pro amplitudu $A = 1.15$ má pouze body s periodou 1, tedy pevné body.

Závěr

V této bakalářské práci jsme vyslovili Šarkovského větu i její kompletní důkaz. Následně jsme odvodili rovnici matematického kyvadla a matematického kyvadla s tlumením a periodickým buzením. Matematické kyvadlo popisuje nelineární diferenciální rovnice druhého řádu, ke které jsme přidali dvě počáteční podmínky. Poté jsme vykreslili fázové portréty kyvadla. Tyto portréty závisí na čtyřech parametrech, a to b , ω_0^2 , ω_D a A .

Stěžejní část této práce nastala v páté kapitole, ve které jsme propojili Šarkovského větu a matematické kyvadlo. To jsme učinili tak, že jsme zavedli pojem Poincarého zobrazení, které jsme následně upravili tak, aby bylo možné aplikovat Šarkovského větu. Vykreslili jsme grafy “upraveného” Poincarého zobrazení. Tyto grafy opět závisí na parametrech b , ω_0^2 , ω_D a A . Následně jsme na toto zobrazení aplikovali Šarkovského větu. To znamená, že jsme hledali periodické body tohoto zobrazení. Zjistili jsme, pro jaké A má toto zobrazení pouze pevné body. Také jsme našli A , pro něž má toto zobrazení periodické body všech přirozených period. Ukázali jsme, že periodický bod tohoto zobrazení neodpovídá periodickému řešení rovnice matematického kyvadla s tlumením a periodickým buzením.

Při psaní této bakalářské práce jsem získal mnoho zkušeností. Například jsem si prohloubil znalosti v softwaru matlab 7, připomněl jsem si psaní matematických textů v typografickém systému TeX a zopakoval jsem si řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

Věřím, že úsilí věnované této bakalářské práci mi bude přínosem v dalším studiu.

Příloha 1

Metody Runge-Kutta

Provedeme numerický výpočet funkce $\phi = \phi(t)$, která na intervalu $[a, b]$ vyhovuje rovnici

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad (10)$$

kde $f = f(t, \phi(t))$ je daná pravá strana. Aby bylo řešení (10) určeno jednoznačně, požadujeme splnění počáteční podmínky

$$\phi(t_0) = \phi_0.$$

Základním principem numerického řešení je obvykle diskretizace proměnných. Přibližné řešení se nekonstruuje jako spojitá funkce. Zvolíme konečnou množinu bodů t_i , $i = 0, \dots, n$ takových, že

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Tato množina se nazývá síť a její prvky se nazývají uzly. Vzdálenost mezi dvěma sousedními uzly

$$h_i = t_{i+1} - t_i$$

se nazývá krok metody. Pro uzly $t_0 = a$, t_1 , $t_2, \dots$ se stanoví čísla ϕ_0 , ϕ_1 , $\phi_2, \dots$, která aproximují hodnoty přesného řešení $\phi(t_0)$, $\phi(t_1), \dots$. Potom tedy platí

$$t_i = a + ih_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Nový stav v čase t_i vždy vypočteme na základě předcházejících stavů v časech $t_{i-1}, t_{i-2}, \dots, t_{i-k}$. Pokud $k = 1$ hovoříme o jednokrokové metodě.

Nejdříve uvažujme nejjednodušší jednokrokovou metodu řešení obyčejných diferenciálních rovnic, kterou je Eulerova metoda. V diferenciální rovnici (10) nahradíme přesnou hodnotu $\phi(t_i)$ její aproximací ϕ_i a derivaci na levé straně vyjádříme numericky, tj.

$$\phi'(t_i) = f(t_i, \phi(t_i)) \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h_i} = f(t_i, \phi_i)$$

Vyjádřením ϕ_{i+1} dostaneme vzorec Eulerovy metody

$$\phi_{i+1} = \phi_i + h_i f(t_i, \phi_i).$$

Nyní modifikací Eulerovy metody získáme Rungeovy-Kuttovy metody. Při této metodě obdržíme několik odhadů derivace k_i v p různých bodech. Metod Runge-Kutta je více. Nejčastěji užívaná je metoda Runge-Kutta 4. řádu. Pro její jeden krok platí následující vztahy

$$k_1 = f(t_i, \phi_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, \phi_i + k_1 \frac{h_i}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, \phi_i + k_2 \frac{h_i}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h_i, \phi_i + k_3 h_i)$$

Rungeova-Kuttova metoda 4. řádu tedy vypadá takto

$$\phi_{i+1} = \phi_i + h_i \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Tato metoda je poměrně přesná, ale nevýhodou je, že v každém kroku musíme čtyřikrát počítat hodnotu funkce ϕ .

Příloha 2

Algoritmus výpočtu nelineárního případu matematického kyvadla

```
function dy = kyvadlo(t,y, A, b, c, w)

dy = [y(2); A*cos(w*t) - b*y(2) - c*sin(y(1))];

%uvazuji rovnici y'' + b*y' + c*sin(y) = A*cos(wt)
%A je amplituda budici sily
%b je tlumici konstanta
%w uhlova rychlost
%c=g/l
%g je tihove zrychleni, l je delka vlakna



---



%vykreslime fazovy portret kyvadla
A = 1.15;
b = 0.5;
c = 1;
w = 2/3;
cas = 10000;
finula = pi/2; %pocatecni vychylka
omeganula = 0; %pocatecni rychlost

[T,Y] = ode45(@kyvadlo, [0 cas], [finula omeganula], [], A, b, c, w);
n = length(Y);
m = n - floor(n/10);
plot(Y(m:n,1),Y(m:n,2),'k')
```

Příloha 3

Algoritmy pro zobrazení (9)

```
function y = poincare(finula,Anula)
```

```
A = Anula;
```

```
b = 0.5;
```

```
c = 1;
```

```
w = 2/3;
```

```
omeganula = 0; %pocatecni rychlost
```

```
[T,Y]=ode45(@kyvadlo, [0 2*pi/w], [finula omeganula], [], A, b, c, w);
```

```
y = Y(length(Y),1);
```

```
% vykreslime graf zobrazeni (9)
```

```
A = 1.15;
```

```
fli = -pi:.01:pi;
```

```
p = 0*fli;
```

```
n = length(fli);
```

```
for i=1:1:n
```

```
    finula = fli(i);
```

```
    p(i) = poincare(finula,A);
```

```
end
```

```
plot(fli,p,'k')
```

Příloha 4

Algoritmy pro pevné a periodické body zobrazení (9)

```
A = 1.15;
fli = -pi:.01:pi;
p = 0*fli;
n = length(fli);
for i=1:1:n
    finula = fli(i);
    p(i) = poincare(finula,A);
end
plot(fli,p,'k')
hold on
plot(fli,fli,'b')
```

```
% najdeme 3-periodicky bod
A = 1.15;
fli = -pi:.01:pi;
p = 0*fli;
n = length(fli);
for i=1:1:n
    finula = fli(i);
    pom = poincare(finula,A);
    pom1 = poincare(pom,A); % druha iterace
    p(i) = poincare(pom1,A); % treti iterace
end
plot(fli,p,'k')
hold on
plot(fli,fli,'b')
```

Příloha 5

Algoritmus pro chování matematického kyvadla

```
A = 1.15;  
b = 0.5;  
c = 1;  
w = 2/3;  
cas = 2*pi/w;  
finula = -2.163; %pocatecni vychylka  
omeganula = 0; %pocatecni rychlost  
  
[T,Y] = ode45(@kyvadlo, [0 cas], [finula omeganula], [], A, b, c, w);  
  
plot(T,Y(:,1),'k')  
xlabel('t')  
ylabel('\phi')
```

Literatura

- [1] Štefan Peter: A theorem of Sharkovski on the existence of periodic orbits of continuous endomorphism of the real line, Communications in Mathematical Physic, 1977
- [2] Block L., Guckenheimer J., Misiurewicz M., Young L. S.: Periodic points of one dimensional maps, Notes in Mathematics, 1980
- [3] Burkart U.: Interval mapping graphs and periodic points of continuous functions, Journal of Combinatorial Theory, 1982
- [4] Straffin P. D.: Periodic points of continuous functions, Fundamenta Mathematicae, 1978
- [5] Robinson Clark: Dynamical systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos, CRC Press, London, 1995
- [6] Tien-Yien Li, James A. Yorke: Period Three Implies Chaos, The American Mathematical Monthly, 1975
- [7] Dvořáková Jana, Lampart Marek, Mlíčková Michaela, Obadalová Lenka: Dynamické systémy I, 2008 [online]. dostupné z:
<http://www.math.slu.cz/studmat/DynamickeSystemy/DynSysI.pdf>
- [8] Baker G. L., Blackburn J.A.: The Pendulum: A case study in physics, Oxford University Press, 2005
- [9] Gleick James: Chaos, Ando Publishing, Praha, 1996
- [10] A. N. Sharkovsky (on his 60th birthday), Ukrajinský Matematický Žurnál, 1996
- [11] A. N. Sharkovsky: Coexistence of cycles of a continuous mapping of a line into itself, Ukrajinský Matematický Žurnál, 1964
- [12] www.wikipedia.org