TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Geometrie a státní přijímací zkoušky z matematiky na střední školy

Diplomová práce

Studijní program: N1701 Fyzika
Studijní obory: Učitelství fyziky pro 2. stupeň základní školy
Učitelství matematiky pro 2.stupeň základní školy

Autor práce: **Bc. Adéla Horáková**
Vedoucí práce: Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Liberec 2021

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Zadání diplomové práce

Geometrie a státní přijímací zkoušky z matematiky na střední školy

Jméno a příjmení:	**Bc. Adéla Horáková**
Osobní číslo:	P19000326
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obory:	Učitelství fyziky pro 2. stupeň základní školy Učitelství matematiky pro 2.stupeň základní školy
Zadávající katedra:	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Akademický rok:	**2019/2020**

Zásady pro vypracování:

Geometrii není obecně ve výuce matematiky na základní škole věnováno tolik pozornosti a času jako aritmetice a algebře. Tato skutečnost se odráží např. i v počtu geometrických příkladů zařazovaných do didaktických testů státních přijímacích zkoušek z matematiky na střední školy. A když jsou příklady z geometrie do těchto testů zařazeny, není z celkových výsledků řešitelů, resp. ze zveřejněných statistik zřejmé, jakých konkrétních výsledků dosáhli řešitelé pouze při řešení příkladů z geometrie. Přitom geometrické myšlení a prostorová představivost jsou důležité nejen v běžném životě, ale také při výkonu různých povolání. Z uvedených důvodů není proto možné přípravu z geometrie opomíjet a podceňovat. Cílem teoretické části práce je shrnout základní teoretické poznatky na úrovni výuky základních škol těch kapitol z geometrie, z nichž byly v posledních několika letech zařazeny příklady do didaktických testů státních přijímacích zkoušek z matematiky na střední školy. Praktická část práce je věnována sestavení souboru vhodných příkladů k procvičování témat uvedených v teoretické části práce. Cílem výzkumné části diplomové práce je sestavit test z příkladů z geometrie, který by svým obsahem a náročností odpovídal geometrické části didaktických testů státních přijímacích zkoušek z matematiky na střední školy. Soubor sestavených příkladů a vyhotovený test aplikovat ve spolupráci s učiteli na několika vybraných základních školách v rámci tzv. přípravných kurzů, které jsou žákům 9. tříd na většině základních škol z matematiky před termíny státních přijímacích zkoušek nabízeny. Cílem výzkumné části je také zhodnotit úroveň znalostí žáků z geometrie a porovnat úroveň jejich znalostí na různých základních školách.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování práce: tištěná/elektronická
Jazyk práce: Čeština

Seznam odborné literatury:

BĚLOUN, F. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. Prometheus, Praha 1995. 206 str. ISBN 80-85849-63-1
FRÝZEK, M. – MÜLLEROVÁ, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy*. Fortuna, Praha 1992. 151 str. ISBN 80-85298-51-1
HEDVÁBNÁ, H. a kol.: *Testy z matematiky pro žáky 9. tříd – 2020*. Didaktis, Brno 2019. 123 str. ISBN 978-80-7358-319-4
HOHENWARTER, M. – HOHENWARTER, J.: *Introduction to GeoGebra Version 4.4*. Florida Atlantic University, Boca Raton, USA. International GeoGebra Institute 2013.
PALKOVÁ, M. a kol.: *Průvodce matematikou 2 aneb co byste měli znát z geometrie ze základní školy.* Didaktis, Brno 2007. 135 str. ISBN 978-80-7358-275-3
VORDERMAN, C.*: Help Your Kids with Maths*. Dorling Kindersley Limited, London 2014. 264 p. ISBN 978-1-4093-5571-7
https://www.statniprijimacky.cz/matematika
sady učebnic Matematiky pro 2. stupeň ZŠ

Vedoucí práce: Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání práce: 1. prosince 2019
Předpokládaný termín odevzdání: 1. května 2021

L.S.

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 22. března 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má diplomová práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

28. dubna 2021 Bc. Adéla Horáková

Poděkování

Touto cestou bych chtěla poděkovat paní Mgr. Daniele Bímové, Ph.D. za poskytnutí konzultací, cenných rad a připomínek při vedení mé diplomové práce.

Anotace

Diplomová práce se zaměřuje na ty kapitoly z geometrie probírané na 2. stupni ZŠ, z nichž byly v posledních několika letech zařazovány příklady do ostrých testů státních přijímacích zkoušek z matematiky na SŠ. V práci jsou shrnuty základní teoretické poznatky z pěti geometrických tematických celků. Teoretické poznatky jsou v praktické části doplněny obsáhlou sbírkou vzorově řešených příkladů, které jsou pro jednotlivá témata doplněny i úlohami k samostatnému procvičování. Za účelem zjištění připravenosti žáků 9. tříd z geometrie na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ byl sestaven test obsahující 6 úloh z geometrie. Vytvořený test vyplňovali žáci 9. tříd z pěti různých základních škol z Liberce a okolí.

Klíčová slova

Geometrie, úhly, trojúhelníky, čtyřúhelníky, mnohoúhelníky, tělesa, míry v geometrii, státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ

Annotation

The diploma thesis focuses on those chapters from geometry discussed at the 2nd level of primary schools, of which problems have been included in the sharp tests of the state entrance exams of Mathematics to secondary schools in the last few years. The thesis summarizes the basic theoretical knowledge of five geometric thematic units. Theoretical knowledge is supplemented in the practical part of the thesis by an extensive collection of sample problems, they are supplemented for particular topics by tasks for independent practice. In order to find out the readiness of 9th grade pupils in geometry for the state entrance exams of Mathematics to secondary schools, a test containing 6 problems in geometry was composed. The created test was filled in by 9th grade pupils from five different primary schools in Liberec and its surroundings.

Key words

Geometry, angles, triangles, quadrilaterals, polygons, solids, measurements in geometry, state entrance exams in Mathematics on secondary schools

Obsah

ÚVOD **9**

1 TEORETICKÁ ČÁST **11**

1.1 Úhly a jejich velikosti 11

1.1.1 Rozdělení úhlů podle velikosti: *11*

1.1.2 Úhly vedlejší a vrcholové *12*

1.1.3 Úhly souhlasné a střídavé *13*

1.2 Mnohoúhelníky 13

1.2.1 Trojúhelníky a jejich vlastnosti *13*

1.2.2 Čtyřúhelníky a jejich vlastnosti *16*

1.3 Konstrukční úlohy 19

1.3.1 Stručný přehled symboliky v geometrii *19*

1.3.2 Postup řešení konstrukční úlohy *20*

1.3.3 Osová a středová souměrnost *21*

1.4 Hranatá a krychlová tělesa 22

1.4.1 Krychle a kvádr *23*

1.4.2 Hranoly *24*

1.4.3 Sítě těles *24*

1.4.4 Krychlová tělesa *25*

1.5 Míry v geometrii 25

1.5.1 Převody jednotek *25*

1.5.2 Obvody a obsahy rovinných útvarů *27*

1.5.3 Povrchy a objemy těles *31*

2 PRAKTICKÁ ČÁST **38**

2.1 Úhly a jejich velikosti 39

2.1.1 Vzorově řešené příklady *40*

2.1.2 Úlohy k procvičení *47*

2.2 Mnohoúhelníky 49

2.2.1 Vzorově řešené příklady *49*

2.2.2 Úlohy k procvičení *57*

2.3 Konstrukční úlohy 58

2.3.1 Vzorově řešené příklady *59*

2.3.2 Úlohy k procvičení *68*

2.4 Hranatá a krychlová tělesa 72

2.4.1 Vzorově řešené příklady *72*

2.4.2 Úlohy k procvičení *76*

2.5 Míry v geometrii 77

2.5.1 Vzorově řešené příklady *78*

2.5.2 Úlohy k procvičení *103*

3 VÝZKUMNÁ ČÁST **107**

3.1 Test vytvořený k ověření znalostí žáků 9. tříd z geometrie 108

3.2 Žákovská řešení zadaného testu 115

3.2.1 Úloha 1 .... *116*

3.2.2 Úloha 2 .... *118*

3.2.3 Úloha 3 .... *121*

3.2.4 Úloha 5 .... *122*

3.3 Zpracování výzkumu 124

3.3.1 Grafy úspěšnosti 126

ZÁVĚR 135

LITERATURA 137

INTERNETOVÉ ZDROJE: 138

Úvod

Geometrie patří mezi jednu z hlavních oblastí matematiky, které jsou vyučovány v rámci předmětu matematika na základní škole. Mimo jiné i z tohoto důvodu se geometrické úlohy obdobně jako úlohy z aritmetiky a algebry objevují v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy.

V dnešní tzv. covidové době je pro většinu žáků distanční výuka mnohem náročnější, než jaká byla pro ně náročnost výuky, která probíhala před nastalou pandemickou dobou v klasické prezenční formě. Ale i v tento náročný čas se musí žáci 9. tříd základních škol připravovat na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ. Nemají takové zázemí ve svých učitelích matematiky, jako měli jejich starší spolužáci, nemají totiž např. možnost si za svými učiteli ve škole o přestávce či během konzultačních hodin dojít, aby se jich zeptali na to, čemu nerozumí, na to, s čím si nejsou jistí, zda správně pochopili apod. Stává se a tato skutečnost je i některými učiteli potvrzena, že učitelé při distanční formě výuky nechtějí vyučovat geometrii, neboť neví, jak názorně žákům ukazovat postupy geometrických konstrukcí nebo výpočtů měr apod. Žáci některých základních škol jsou tedy při distanční formě výuky z velké části odkázáni na samostudium právě v oblasti geometrie.

Tato diplomová práce je rozdělena na tři části: Teoretickou část, Praktickou část a Výzkumnou část. Každá část je rozdělena do několika dalších kapitol, podkapitol a odstavců pro lepší přehlednost a rychlejší orientaci čtenáře v této práci.

Teoretická část obsahuje stručné shrnutí učiva geometrie probíraného na základní škole. Tato část práce se zaměřuje především na ta témata z geometrie, z nichž se příklady ve větší míře vyskytovaly v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy v posledních několika letech.

V praktické části práce se čtenář setkává s pěti kapitolami. Každá kapitola je věnována jednomu tematickému celku z geometrie, přitom se jedná o kapitoly s těmito názvy a uvedením v následujícím pořadí: úhly a jejich velikosti, mnohoúhelníky, konstrukční úlohy, tělesa a míry v geometrii. Přičemž v každé kapitole je představeno několik příkladů se vzorovým komentovaným řešením. Příklady, které jsou představeny, se buď objevily v minulých letech v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na SŠ, nebo jsou speciálně vymyšlené tak, aby byly podobné již se objevivším příkladům v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na SŠ v minulých letech a aby procvičovaly ty tematické celky z geometrie, pro něž jsou v teoretické části práce shrnuty základní poznatky. Na konci každé podkapitoly je připojeno zadání několika úloh, které mohou sloužit k samostatnému procvičování pro žáky. Zadání těchto úloh jsou vždy doplněna o přehled jejich správných řešení, aby si žáci při svém samostudiu mohli zkontrolovat svá řešení.

V poslední části této práce je popsán uskutečněný výzkum, kterého se zúčastnilo 102 žáků 9. tříd ze čtyř libereckých základních škol a z jedné jablonecké základní školy. V rámci tohoto výzkumu byl do škol rozeslán test, který žáci 9. tříd ze zapojených škol vyplnili, většinou v rámci jejich přípravy na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ. Tento test je sestaven tak, aby obsahoval pouze geometrické úlohy obdobné těm, které se v posledních několika letech vyskytovaly ve státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na SŠ vytvořených příspěvkovou organizací Cermat. Je předpokládáno, že výsledky těchto testů by měly poukázat čistě na geometrické znalosti testovaných žáků 9. tříd z Liberce a okolí a také na připravenost testovaných žáků 9. tříd z geometrie na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ.

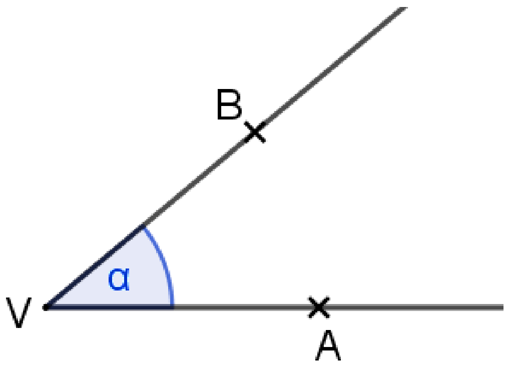
1 Teoretická část

V této části diplomové práce se zaměříme na stručné zopakování základních teoretických poznatků z učiva geometrie probíraného na základní škole. Poznatky z těch oblastí geometrie, které zde připomeneme, se ve velké míře vyskytují ve státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy. Z uvedených důvodů by následující text mohl žákům sloužit jako shrnutí kapitol z geometrie a mohl by být „pomocníkem" při jejich přípravě na státní přijímací zkoušky z matematiky na střední školy.

1.1 Úhly a jejich velikosti

V 6. třídě je žákům dále rozvíjen pojem úhel. S tímto pojmem se žáci poprvé setkávají již na 1. stupni základní školy. Vzhledem ke skutečnosti, že se příklady zaměřené na výpočty velikostí úhlů objevovaly v posledních letech téměř v každém ostrém státním přijímacím zkouškovém testu z matematiky na střední školy, je třeba neopomenout zopakování základních poznatků o úhlech, o jejich rozdělení podle velikostí a o dvojicích úhlů.

Definice úhlu: Dutým konvexním úhlem rozumíme část roviny ohraničenou dvěma různoběžnými polopřímkami se společným počátkem.



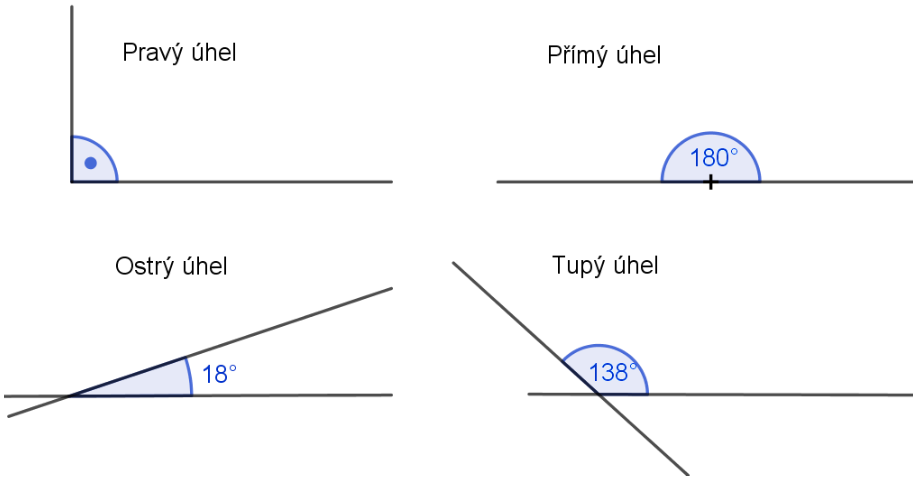
Obrázek 1.1-1

Úhly můžeme popsat buď pomocí písmen řecké abecedy, anebo pomocí trojice bodů, kterými je úhel určen. V prvním případě použijeme pro označení úhlu znázorněného na obrázku označení $\boldsymbol{\alpha}$ a ve druhém případě, tj. v případě, kdy je úhel popsán pomocí trojice bodů, jej označíme ∢ ***AVB***, kde ***V*** je vrchol úhlu a ***A***, ***B*** jsou body na ramenech ∢ ***AVB***. Poznamenejme, že vrchol úhlu se objevuje vždy uprostřed zápisu úhlu pomocí trojice bodů. Polopřímky ***VA*** a ***VB*** tvoří ramena ∢ ***AVB***.

1.1.1 Rozdělení úhlů podle velikosti:

Úhly můžeme podle jejich velikosti rozdělit do sedmi kategorií:

1. **Nulový úhel** je úhel o velikosti 0°.
2. **Ostrý úhel** $\boldsymbol{\alpha}$ je takový úhel, jehož velikost je v rozmezí $\mathbf{0}° < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{90}°$.
3. **Pravý úhel** je úhel o velikosti rovné 90°.
4. **Tupý úhel** $\boldsymbol{\beta}$ je úhel, jehož velikost je v rozmezí $\mathbf{90}° < \boldsymbol{\beta} < \mathbf{180}°$.
5. **Přímý úhel** je úhel o velikosti rovné 180°.
6. **Nekonvexní úhel** $\boldsymbol{\gamma}$ je úhel, jehož velikost může nabývat hodnot v rozmezí $\mathbf{180}° < \boldsymbol{\gamma} < \mathbf{360}°$.
7. **Plný úhel** je úhel o velikosti rovné 360°.

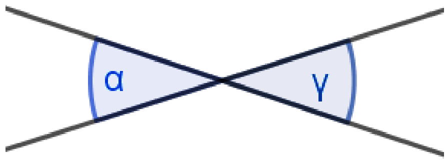


Obrázek 1.1-2

1.1.2 Úhly vedlejší a vrcholové

Znalost vedlejších a vrcholových úhlů se velmi často zkouší ve státních přijímacích testech z matematiky na střední školy, proto tyto dvojice úhlů i zde krátce představíme.

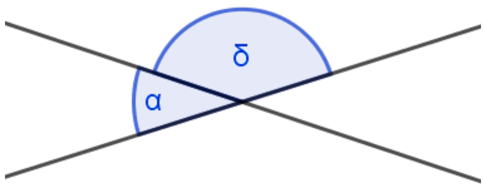
Vrcholové úhly mají společný vrchol a rameno jednoho úhlu je polopřímkou opačnou k rameni druhého úhlu. Totéž analogicky platí pro druhá ramena vrcholových úhlů. Tj. ramena vrcholových úhlů jsou navzájem opačnými polopřímkami se společným počátečním bodem ve vrcholu obou úhlů. Důležitou poznámkou je, že vrcholové úhly mají stejnou velikost, tedy pro vrcholové úhly z obrázku 1.1-3 platí, že



Obrázek 1.1-3

$$\boldsymbol{\alpha = \gamma.}$$

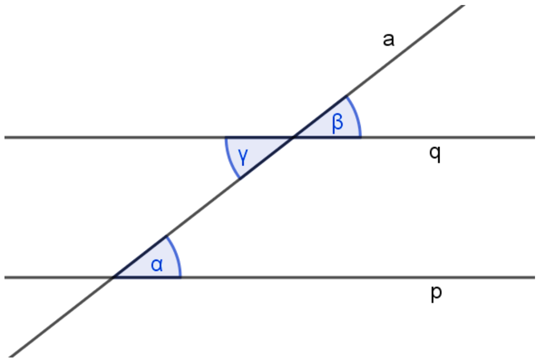
Vedlejší úhly jsou speciálním případem tzv. styčných úhlů. Tj. vedlejší úhly mají společný vrchol a jedno splývající, neboli tzv. styčné rameno. Druhá ramena vedlejších úhlů jsou navzájem opačné polopřímky se společným počátečním bodem ve vrcholu obou úhlů. Součet velikostí vedlejších úhlů dá dohromady přímý úhel o velikosti 180°, tedy pro vedlejší úhly $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\delta}$ z obrázku 1.1–4 platí



Obrázek 1.1 -4

$$\boldsymbol{\alpha + \delta = 180°.}$$

1.1.3 Úhly souhlasné a střídavé



Obrázek 1.1-5

Dvojice souhlasných a střídavých úhlů, o kterých nyní uvedeme nejdůležitější informace, se velice často, stejně jako vedlejší a vrcholové úhly vyskytují ve státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy.

Na obrázku 1.1-5 jsou znázorněny dvě navzájem rovnoběžné různé přímky ***p*** a ***q***, přímka ***a***, která je s přímkami ***p***,***q*** různoběžná. Těmito třemi přímkami je určeno několik úhlů. Tři z nich jsou znázorněny na obrázku, a to úhly $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\gamma}$.

Souhlasnými úhly rozumíme takové úhly, jejichž jedno rameno leží na jedné a téže přímce a jejichž druhá ramena leží na navzájem rovnoběžných různých přímkách, a přitom také v jedné polorovině roviny, kterou rozděluje přímka ***a***. Na obrázku 1.1-5 jsou tedy úhly souhlasnými úhly $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$. Pro velikosti souhlasných úhlů platí, že jsou si rovny, tj.

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}.$$

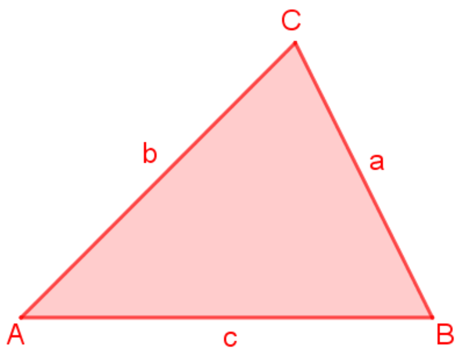
Střídavými úhly rozumíme takovou dvojici úhlů, jejíž jedno rameno leží na jedné a téže přímce a jejichž druhá ramena leží na navzájem rovnoběžných různých přímkách, ale v opačných polorovinách roviny s hraniční přímkou v přímce ***a***. Na obrázku 1.1-5 jsou úhly střídavými úhly $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\gamma}$. Velikosti odpovídajících si střídavých úhlů jsou si rovny, tedy v našem případě

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}.$$

1.2 Mnohoúhelníky

1.2.1 Trojúhelníky a jejich vlastnosti

<u>Definice trojúhelníku</u>: Trojúhelník je část roviny ohraničená třemi různoběžnými úsečkami, z nichž každé dvě mají společný krajní bod a třetí úsečka tímto bodem neprochází.



Obrázek 1.2.1

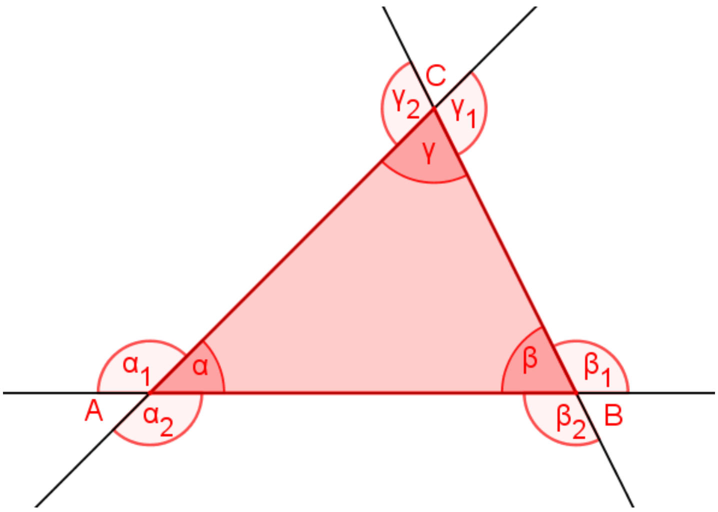
V trojúhelníku ***ABC*** znázorňují body ***A***, ***B***, ***C*** vrcholy daného trojúhelníku ***ABC*** a malá písmena ***a***, ***b***, ***c*** označují strany daného trojúhelníku ***ABC***. Lze si všimnout, že se strany pojmenovávají podle vrcholu, který na nich neleží (tj. označují se podle názvu vrcholu, který je naproti příslušné straně).

1.2.1.1 Vnější a vnitřní úhly trojúhelníku

Z obrázku 1.2-2 je patrné, že vnitřními úhly trojúhelníku ***ABC*** jsou úhly $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Vnějšími úhly trojúhelníku ***ABC*** jsou úhly $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$, $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\gamma_1}$, $\boldsymbol{\gamma_2}$.

Je třeba ještě zmínit, že součet velikostí všech tří vnitřních úhlů v trojúhelníku se rovná 180°. Což můžeme v našem případě zapsat symbolicky ve tvaru

$$\mathbf{180°} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}.$$



Obrázek 1.2.2

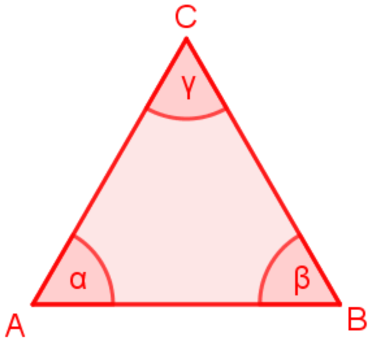
1.2.1.2 Druhy trojúhelníků

Trojúhelníky lze rozdělit podle délek stran, ale i podle velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku.

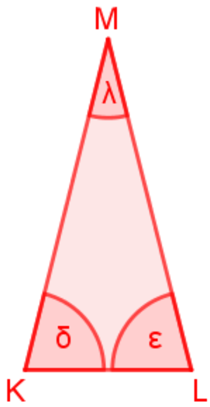
Nejdříve představíme druhy trojúhelníků velikostí délek stran. Zde rozlišujeme tři případy:

1. Mají-li všechny tři strany trojúhelníku stejnou délku, pak takové trojúhelníky nazýváme **rovnostranné**.
   Na obrázku 1.2-3 je zobrazený rovnostranný trojúhelník ***ABC***. Všechny tři vnitřní úhly $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ rovnostranného trojúhelníku mají stejnou velikost, tedy
   $$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}.$$
   Tato velikost je rovna 60°.

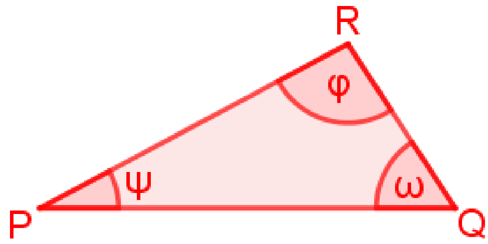
2. Mají-li dvě strany trojúhelníku stejnou délku, pak takové trojúhelníky nazýváme **rovnoramenné**. Na obrázku 1.2-4 je znázorněný rovnoramenný trojúhelník ***KLM***. Ramena ***KM*** a ***LM*** jsou shodné úsečky. Strana ***KL*** je základnou znázorněného trojúhelníku ***KLM*** a bod ***M*** je hlavním vrcholem trojúhelníku ***KLM***. Vnitřní úhly $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ při základně ***KL*** jsou shodné, tedy jejich velikosti jsou si rovné, tj.
   $$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\varepsilon}.$$
3. Nemají-li žádné dvě strany trojúhelníku stejnou délku, pak takové trojúhelníky nazýváme **různostranné**, případně **obecné**. Na obrázku 1.2-5 je zobrazený různostranný trojúhelník ***PQR***. Tento trojúhelník má nejen různé délky všech jeho stran, ale také všechny jeho vnitřní úhly mají různé velikosti. Platí tedy
   $$\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{\varphi}.$$



Obrázek 1.2-3



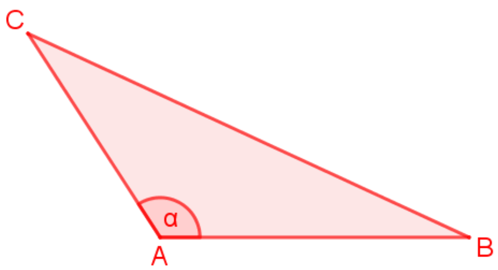
Obrázek 1.2-4



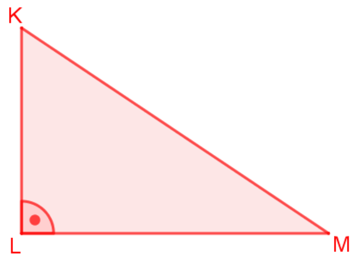
Obrázek 1.2-5

Ukázali jsme rozdělení trojúhelníků podle délek stran. Dalším kritériem dělení trojúhelníků je jejich rozdělení podle velikostí vnitřních úhlů. Opět mohou nastat tři různé případy:

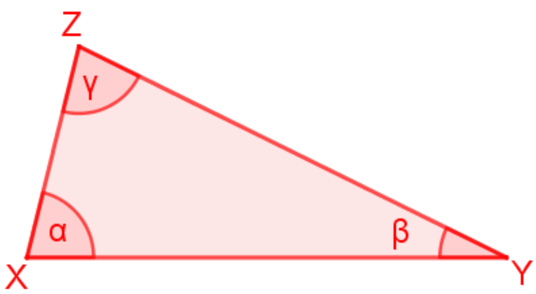
1. Je-li právě jeden z vnitřních úhlů v trojúhelníku tupý, nazýváme tento trojúhelník **tupoúhlý**. (viz úhel $\boldsymbol{\alpha}$ při vrcholu ***A*** v trojúhelníku ***ABC*** na obr. 1.2-6)
2. Je-li právě jeden z vnitřních úhlů v trojúhelníku pravý, tak tento trojúhelník nazýváme **pravoúhlý**. (viz úhel ∢ ***MLK*** při vrcholu ***L*** na obr. 1.2-7)
3. Pokud jsou všechny tři vnitřní úhly v trojúhelníku ostré, tak tento trojúhelník nazýváme **ostroúhlý**. (viz vnitřní úhly $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ v trojúhelníku ***XYZ*** na obr. 1.2-8)



Obrázek 1.2-6



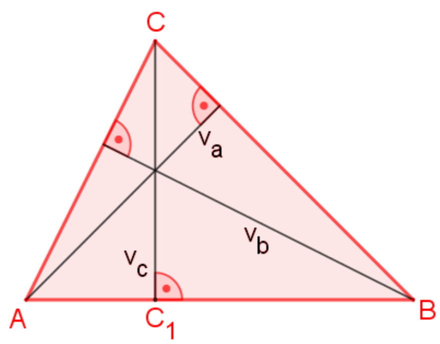
Obrázek 1.2-7



Obrázek 1.2-8

1.2.1.3 Výšky v trojúhelníku

Každý trojúhelník má právě tři výšky. Výškou trojúhelníku rozumíme úsečku spojující vrchol trojúhelníku s patou kolmice spuštěné z příslušného vrcholu k protější straně



Obrázek 1.2-9

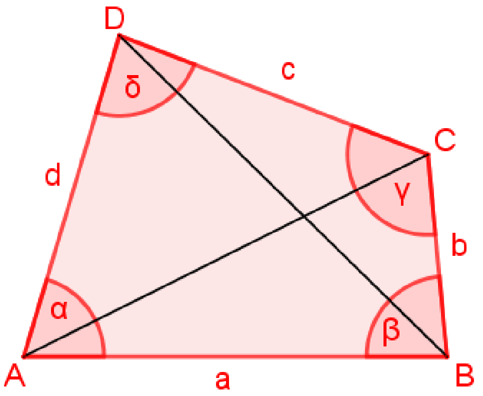
trojúhelníku, případně k přímce, na které protější strana trojúhelníku leží. Výšky v trojúhelníku ***ABC*** značíme zpravidla v_a, v_b a v_c, pak např. $v_c \equiv CC_1$.

1.2.2 Čtyřúhelníky a jejich vlastnosti

V tomto odstavci zopakujeme základní teoretické poznatky o čtyřúhelnících. Jak takový čtyřúhelník poznáme? Poznáme jej jednoduše, stačí si pamatovat, že čtyřúhelník má:

- 4 vrcholy
- 4 strany
- 4 vnitřní úhly
- 2 úhlopříčky

Definice čtyřúhelníku: Obecným konvexním čtyřúhelníkem ***ABCD*** rozumíme průnik čtyř rovin $\rightarrow$ ***ABC***, $\rightarrow$ ***BCD***, $\rightarrow$ ***CDA***, $\rightarrow$ ***DAB***, jestliže žádné tři body ***A***, ***B***, ***C*** a ***D*** neleží v jedné přímce.



Obrázek 1.2-10

1.2.2.1 Rozdělení čtyřúhelníků

Čtyřúhelníky je možné dělit podle dvou kritérií. Prvním kritériem je jejich dělení podle velikostí vnitřních úhlů. Zde čtyřúhelníky rozdělujeme na pravoúhelníky, je-li alespoň jeden z jejich vnitřních úhlů pravý, a na kosodélníky, jsou-li jejich vnitřní úhly ostré nebo tupé. Druhým kritériem dělení čtyřúhelníků je dělení podle vzájemné polohy jejich protějších stran. V tomto případě dělíme čtyřúhelníky na lichoběžníky, rovnoběžníky a různoběžníky. V další části textu se budeme zabývat nejprve lichoběžníky, poté rovnoběžníky.

1. **Lichoběžníky**

   Lichoběžníkem rozumíme takový čtyřúhelník, jehož dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné různé a další dvě jeho strany leží na různoběžných přímkách. Strany lichoběžníku, které jsou navzájem rovnoběžné různé, nazýváme základny lichoběžníku a zbývající dvě strany lichoběžníku, které leží na navzájem různoběžných přímkách, nazýváme ramena lichoběžníku. Pro libovolný lichoběžník platí, že délky jeho základen jsou různé.

   Příklady různých typů lichoběžníků:

   a. **Rovnoramenný lichoběžník** je takový lichoběžník, jehož ramena jsou stejně dlouhá. Důsledkem této skutečnosti je, že vnitřní úhly, které svírají ramena s příslušnou základnou, jsou shodné. Na obr. 1.2-11a je znázorněný rovnoramenný lichoběžník ***ABCD***, pro který platí:

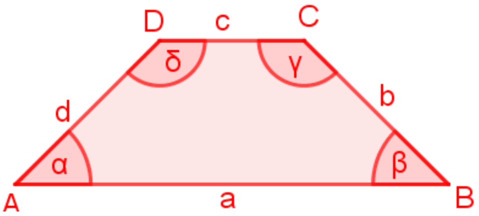
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d},$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta},$$
$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\delta}.$$

   Rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný podle splývajících os jeho základen.

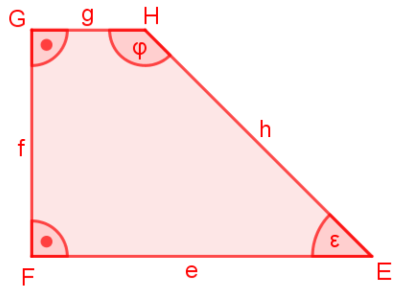
Rovnoramennému lichoběžníku je možné opsat kružnici. Střed kružnice rovnoramennému lichoběžníku opsané je průsečíkem os jeho stran.

b. **Pravoúhlý lichoběžník** – Svírá-li jedno rameno lichoběžníku pravý úhel s jednou jeho základnou, pak toto rameno lichoběžníku svírá pravý úhel i s druhou základnou lichoběžníku. Takovýto lichoběžník nazýváme pravoúhlý. Na obr. 1.2-11b je znázorněný pravoúhlý lichoběžník ***FEHG***.

c. **Obecný lichoběžník** – délky ramen obecného lichoběžníku jsou různé.



Obrázek 1.2-11a



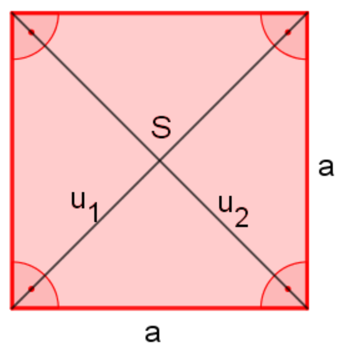
Obrázek 1.2-11b

2. **Rovnoběžníky**

Jak už sám název napovídá, rovnoběžníky jsou takové čtyřúhelníky, které mají každé dvě protější strany navzájem rovnoběžné, tyto navzájem rovnoběžné protější strany jsou přitom stejně dlouhé. Zajímavou vlastností rovnoběžníků je ta, že se skládají vždy alespoň ze dvou dvojic shodných trojúhelníků. Mezi rovnoběžníky řadíme čtverec, obdélník, kosočtverec a kosodélník. V tomto odstavci čtenáře seznámíme se základními vlastnostmi těchto rovinných útvarů.

Čtverec a obdélník

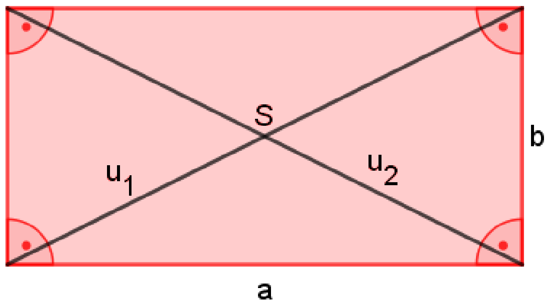
Základními vlastnostmi čtverce jsou:



Obrázek 1.2-12

- všechny strany jsou stejně dlouhé
- všechny vnitřní úhly jsou rovny 90°
- úhlopříčky se vždy protínají ve středu čtverce
- úhlopříčky čtverce jsou k sobě kolmé
- úhlopříčky jsou stejně dlouhé, jsou půleny středem čtverce, čtverec půlí na dvě shodné části
- úhlopříčka čtverce má velikost rovnou $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$, kde $\boldsymbol{a}$ je délka strany čtverce
- Střed čtverce je středem kružnice čtverci opsané i středem kružnice čtverci vepsané, odtud plyne, že čtverec řadíme mezi tzv. dvojstředové čtyřúhelníky; poloměr kružnice čtverci o straně $\boldsymbol{a}$ opsané je roven jedné polovině délky úhlopříčky čtverce, tedy ($\frac{a\sqrt{2}}{2}$), a poloměr kružnice čtverci vepsané je roven jedné polovině délky strany čtverce, tj. v našem případě $\frac{a}{2}$.
- Střední příčky čtverce, tj. spojnice středů protějších stran čtverce, rozdělují čtverec na čtyři shodné dílčí čtverce, délky stran těchto dílčích čtverců jsou rovny jedné polovině délky strany původního čtverce.

Základními vlastnostmi obdélníku jsou:

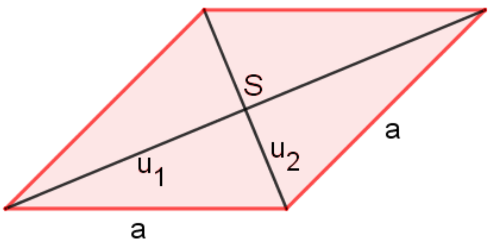


Obrázek 1.2-13

- protilehlé strany jsou stejně dlouhé
- všechny vnitřní úhly jsou rovny 90°
- úhlopříčky se protínají ve středu obdélníku, tj. navzájem se půlí
- úhlopříčky jsou stejně dlouhé a každá z nich rozděluje obdélník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky
- délku úhlopříčky obdélníku lze vypočítat užitím Pythagorovy věty, jsou-li známy délky obou jeho stran
- obdélníku lze opsat kružnici, střed obdélníku je středem kružnice obdélníku opsané; poloměrem této kružnice je poloviční délka úhlopříčky obdélníku
- střední příčky obdélníku, tj. spojnice středů protějších stran obdélníku, rozdělují obdélník na čtyři shodné dílčí obdélníky, délky stran těchto dílčích obdélníků jsou rovny vždy jedné polovině délky odpovídající strany původního obdélníku.

Kosočtverec a kosodélník

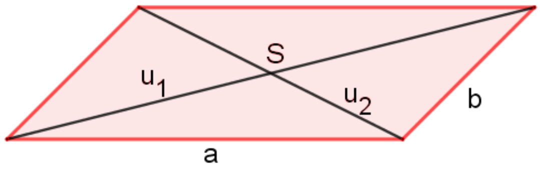
Základní vlastnosti kosočtverce:



Obrázek 1.2-14

- všechny strany jsou stejně dlouhé
- jeho vnitřní úhly nejsou pravé
- úhlopříčky jsou na sebe kolmé a protínají se ve středu kosočtverce
- úhlopříčky kosočtverce se navzájem půlí
- každá ze dvou úhlopříček rozděluje kosočtverec na dva navzájem shodné rovnoramenné trojúhelníky
- vnitřní úhly u protějších vrcholů kosočtverce mají stejnou velikost
- Kosočtverci lze vepsat kružnici, střed kosočtverce je středem kružnice kosočtverci vepsané a poloměr této kružnice je roven vzdálenosti středu kosočtverce od jeho jednotlivých stran
- Střední příčky kosočtverce, tj. spojnice středů protějších stran kosočtverce, rozdělují kosočtverec na čtyři shodné dílčí kosočtverce, délky stran těchto dílčích kosočtverců jsou rovny jedné polovině délky strany původního kosočtverce; vnitřní úhly dílčích kosočtverců jsou stejně velké jako vnitřní úhly původního kosočtverce

Základní vlastnosti kosodélníku:



Obrázek 1.2-15

- protilehlé strany jsou stejně dlouhé
- jeho vnitřní úhly nejsou pravé
- úhlopříčky se navzájem půlí a protínají se ve středu kosodélníku
- každá ze dvou úhlopříček rozděluje kosodélník na dva navzájem shodné obecné trojúhelníky
- vnitřní úhly u protějších vrcholů kosodélníku mají stejnou velikost
- kosodélníku není možné ani vepsat, ani opsat kružnici
- střední příčky kosodélníku, tj. spojnice středů protějších stran kosodélníku, rozdělují kosodélník na čtyři shodné dílčí kosodélníky, délky stran těchto dílčích kosodélníků jsou rovny vždy jedné polovině délky odpovídající strany původního kosodélníku

1.3 Konstrukční úlohy

V této kapitole připomeneme nejčastěji užívanou symboliku v symbolických zápisech planimetrických konstrukcí vyučovaných na základní škole. Zopakujeme také jednotlivé fáze řešení planimetrických konstrukčních úloh.

1.3.1 Stručný přehled symboliky v geometrii

V této podkapitole je v tabulce 1 sestaven přehled nejčastěji využívaných symbolů základních rovinných objektů, a také přehled částí symbolických zápisů planimetrických konstrukcí vyučovaných na základní škole. V levém sloupci tabulky 1 jsou vepsány zmíněné symboly, resp. části symbolických zápisů a v pravém sloupci tabulky 1 jsou slovně popsány významy jednotlivých symbolů či symbolických zápisů.

Zápis	Význam
$\leftrightarrow$ ***AB***	Přímka ***AB***.
$\rightarrow$ ***AB***	Polopřímka ***AB***.
|***AB***| = 5 cm	Délka úsečky ***AB*** je rovna 5 cm.
p ∥ $\leftrightarrow$ ***AB***	Přímka ***p*** je rovnoběžná s přímkou ***AB***.
q ⊥ $\leftrightarrow$ ***AB***	Přímka ***q*** je kolmá k přímce ***AB***.
A ∈ ***q***	Bod ***A*** náleží (leží na) přímce ***q***.
s ⊥ ***AB***, ***A*** ∈ ***s***	Přímka ***s*** je kolmá k úsečce ***AB*** a současně bod ***A*** leží na přímce ***s***.
|∢ ***AVB***| = 45°	Velikost (konvexního) úhlu ***AVB*** je rovna 45°.
A ≡ ***B***	Bod ***A*** je totožný (shodný) s bodem ***B***.
A ≢ ***B***	Bod ***A*** není totožný (shodný) s bodem ***B***.
A ∈ ***p*** ∩ ***q***	Bod ***A*** je průsečíkem přímek ***p*** a ***q***.
k (***S***, ***r***)	Kružnice ***k*** se středem v bodě ***S*** a s poloměrem ***r***.

Tabulka 1

1.3.2 Postup řešení konstrukční úlohy

Principy řešení konstrukčních úloh se neopírají pouze o rýsování či konstruktivní dovednosti žáků, ale jsou založeny především na nalezení cesty vedoucí k sestrojení požadovaného výsledného obrazce, anebo hledané množiny bodů daných vlastností apod.

Proces řešení každé konstrukční úlohy by měl začít náčrtkem, tj. ručně nakresleným obrázkem toho rovinného útvaru či té rovinné situace, které mají být výsledkem konstrukční úlohy. V náčrtku barevně zvýrazníme ty části/prvky sestrojovaného rovinného útvaru nebo rovinné situace, které známe ze zadání úlohy. Správně nakreslený náčrtek nám pomůže nejen v tom, že vidíme, jaký rovinný objekt, resp. rovinné objekty mají být výsledkem konstrukční úlohy, ale je důležitý i proto, abychom si uvědomili vlastnosti platné pro sestrojovaný rovinný útvar či hlavní principy rovinných zobrazení, jejichž užití může vést k úspěšnému vyřešení konstrukční úlohy.

Druhou fází řešení konstrukční úlohy je grafický rozbor. V rámci grafického rozboru nejprve zobrazíme zadané prvky, je-li to možné, a následně pak črtáme na základě platnosti uvědomělých si a použitelných vlastností zobrazovaného rovinného útvaru, anebo na základě platných principů rovinných zobrazení postupně jednotlivé kroky konstrukce tak, abychom sestrojili požadovaný rovinný útvar, či hledanou rovinnou situaci.

Ve druhé fázi řešení konstrukční úlohy je možné společně s črtáním jednotlivých kroků konstrukce zapisovat i symbolický zápis konstrukce a na jeho základě pak v následující třetí fázi rýsovat samotnou konstrukci.

Jinou možností je, je-li grafický rozbor úlohy hotový, pustit se rovnou do samotné konstrukce. Během konstrukce pak zapisujeme její jednotlivé kroky pomocí symbolického zápisu, ke kterému se můžeme později vrátit a připomenout si na jeho základě postup řešení konstrukční úlohy.

Jsou-li rovinný útvar nebo požadovaná rovinná situace sestrojeny, ověříme, zda výsledný sestrojený rovinný útvar či rovinná situace odpovídají podmínkám zadání úlohy.

Poslední fází řešení konstrukční úlohy je provedení diskuse řešitelnosti úlohy a následné vyřčení počtu řešení dané konstrukční úlohy, tj. sdělení, kolik řešení má daná úloha v jedné polorovině nebo v celé rovině.

Shrňme si ještě jednou ve stručnosti jednotlivé fáze řešení konstrukční úlohy:

1. Náčrtek (zvýraznění zadaných prvků, uvědomění si platnosti vlastností sestrojovaného rovinného útvaru, resp. principů rovinných transformací vhodných k vyřešení úlohy, podmínky řešitelnosti).
2. Grafický rozbor konstrukce (jednotlivé kroky konstrukce načrtnuté od ruky).
3. Konstrukce a současně provedení symbolického zápisu konstrukce.
4. Ověření správnosti výsledné konstrukce a diskuse řešitelnosti úlohy, tj. určení počtu řešení konstrukční úlohy.

1.3.3 Osová a středová souměrnost

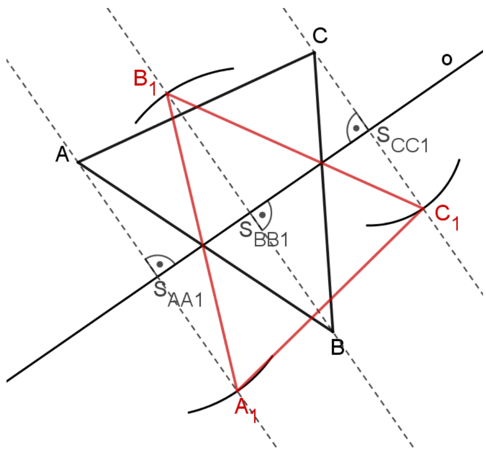
Ve státních ostrých přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy se často objevují konstrukční úlohy, ve kterých se využívají dva typy shodných zobrazení v rovině, a to osová a středová souměrnost. Proto si hlavní principy a vlastnosti těchto dvou souměrností zopakujeme.

Definice shodného zobrazení: Zobrazení v rovině, které každým dvěma různým bodům X, Y přiřazuje po řadě body X_1, Y_1 tak, že $|XY| = |X_1Y_1|$ se nazývá **shodné zobrazení** v rovině.

Osová souměrnost

Definice osové souměrnosti: Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu $A \in o$, kde o je pevně zvolená přímka, přiřazuje týž bod $A \equiv A_1$ a každému bodu $X \notin o$ přiřazuje bod X_1 tak, že přímka o je osou úsečky XX_1, se nazývá **osová souměrnost** (někdy též souměrnost podle osy). Přímka o se nazývá **osa souměrnosti**.

Osová souměrnost je typ shodného rovinného geometrického zobrazení, v němž se zachovávají velikosti úseček a velikosti úhlů. Jedná se o zobrazení, které je nepřímo shodné, což znamená, že obraz rovinného obrazce, který v osové souměrnosti získáme, bude převrácený.



Obrázek 1.3-1

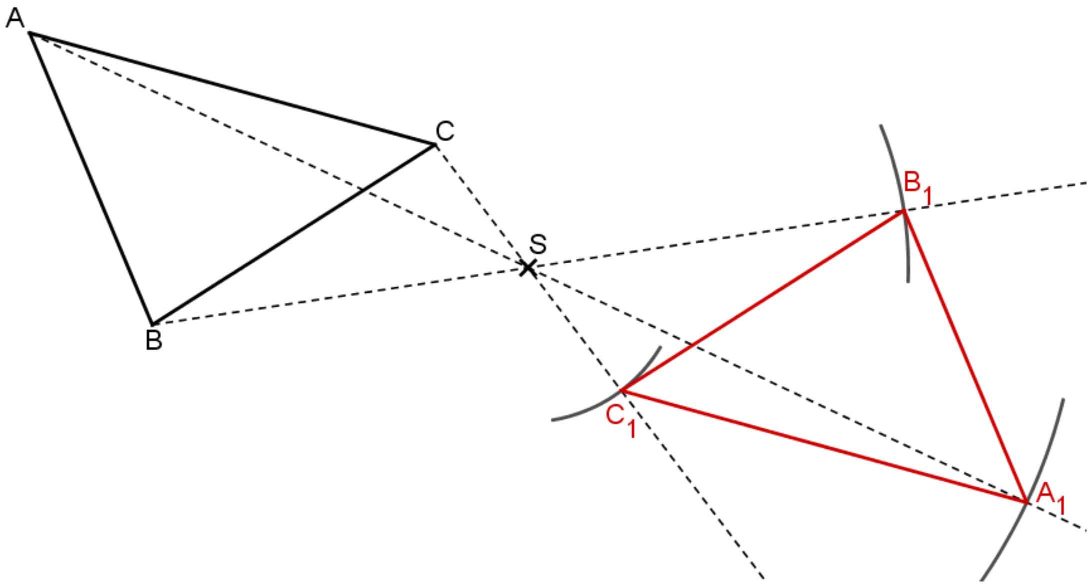
Na obr. 1.3-1 je znázorněný černý trojúhelník ABC, který nazýváme vzorem trojúhelníku $A_1B_1C_1$, a červený trojúhelník $A_1B_1C_1$, který je obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti podle osy o.

Body ležící na ose souměrnosti se zobrazují samy na sebe. Tyto body nazýváme samodružné. V osové souměrnosti zobrazujeme body nebo geometrické útvary pomocí využití základních principů osové souměrnosti. Tj. body zobrazujeme následujícím postupem. Sestrojíme přímku, která je kolmá k ose o a zároveň prochází daným bodem A, jež chceme v osové souměrnosti zobrazit. Průsečík této přímky s osou o označíme S (na obr. 1.3-1 bod S_{AA1}). Hledaný bod A_1 (obraz bodu A) leží na polopřímce AS a platí, že $|AS| = |A_1S|$, kde $A \not\equiv A_1$.

Středová souměrnost

Definice středové souměrnosti: Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \notin S$ bod X_1 tak, že bod S je středem úsečky XX_1, se nazývá **středová souměrnost** (souměrnost podle středu). Bod S se nazývá **střed souměrnosti**.

Středová souměrnost je dalším typem shodného rovinného geometrického zobrazení, zachovávají se v něm velikosti úseček a velikosti úhlů. Jedná se o zobrazení, které je přímo shodné, což znamená, že vzor libovolného geometrického útvaru stačí v rovině „posunout“ nebo „otočit“, abychom získali obraz shodný se vzorem.



Obrázek 1.3-2

Na obr. 1.3.3-2 je znázorněný černý trojúhelník ***ABC***, který nazýváme vzorem červeného trojúhelníku $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$. Trojúhelník $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ je obrazem trojúhelníku ***ABC***. Obraz trojúhelníku ***ABC*** jsme zobrazili ve středové souměrnosti podle bodu ***S***. Lze si všimnout, že každým vrcholem trojúhelníku ***ABC*** jsme vedli polopřímku procházející bodem ***S***. Tj. sestrojili jsme polopřímky ***AS***, ***BS*** a ***CS***. Poté jsme na příslušné polopřímky s počátečním bodem v bodě ***S***, tj. na opačné polopřímky k polopřímkám ***SA***, ***SB*** a ***SC***, přenesli po řadě vzdálenosti bodů ***A***, ***B***, ***C*** od středu ***S***, tj. tak, aby platilo $|\boldsymbol{AS}| = |\boldsymbol{SA_1}|$; $|\boldsymbol{BS}| = |\boldsymbol{SB_1}|$; $|\boldsymbol{CS}| = |\boldsymbol{SC_1}|$.

1.4 Hranatá a krychlová tělesa

V této kapitole popíšeme krychlová a hranatá tělesa, uvedeme jejich základní vlastnosti.

Podobně jako rovinnými útvary nazýváme omezené a souvislé množiny bodů v rovině, tak geometrickými tělesy nazýváme prostorově omezené a souvislé množiny bodů v prostoru. Geometrická tělesa dělíme na mnohostěny, tj. na tělesa, která jsou omezená mnohoúhelníky neležícími v jedné rovině, a na rotační tělesa, tedy na tělesa, která vznikají rotací rovinného útvaru kolem přímky.

Hranolem rozumíme mnohostěn omezený dvěma shodnými mnohoúhelníky ležícími v navzájem rovnoběžných rovinách a čtyřúhelníky spojující tyto dva shodné mnohoúhelníky.

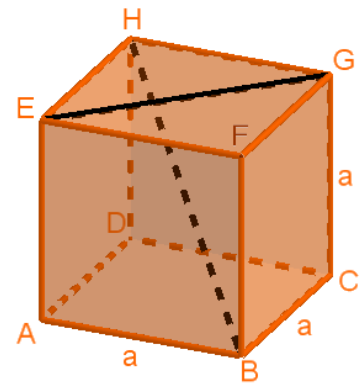
Speciálním příkladem hranolu je pravidelný čtyřboký hranol. Ten má nejméně jednu dvojici protilehlých stěn čtvercovou.

1.4.1 Krychle a kvádr

Základní „stavební" jednotkou každého krychlového tělesa je **krychle**. Krychle je speciálním příkladem pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož všechny stěny jsou shodné čtverce. Odtud plyne, že všechny hrany krychle mají stejnou délku.

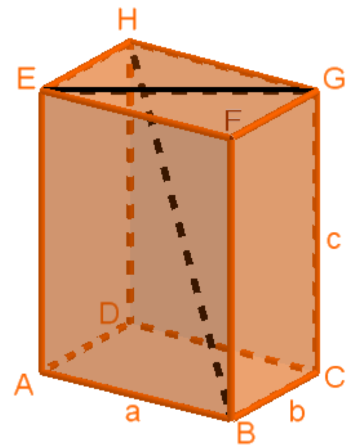
Čtyřboký hranol, jehož stěny tvoří šest pravoúhlých čtyřúhelníků (zpravidla obdélníků, ale existují i speciální případy, kdy dvojicí protilehlých, navzájem rovnoběžných stěn jsou čtverce) se nazývá kvádr. Kvádr má tři skupiny navzájem rovnoběžných hran, hrany každé skupiny mají shodné délky.

Tato dvě tělesa mají mnoho společného.



Obrázek 1.4-1

Na obrázku je znázorněna krychle ***ABCDEFGH***. Krychle je zobrazena v rovnoběžném promítání, a to speciálně v nadhledu zprava. Že se jedná o nadhled zprava, plyne z toho, jaké stěny, a tedy i hrany krychle jsou zakresleny viditelně, tedy plnými čarami. V nadhledu zprava jsou viditelné horní stěna, přední stěna a pravá boční stěna. Zbývající tři stěny krychle jsou v nadhledu zprava neviditelné. Neviditelné jsou tedy i průsečnice těchto stěn, tj. hrany *AD*, *CD* a *DH*. Neviditelné hrany krychle jsou zakresleny čárkovanou čarou. Analogickým způsobem zobrazujeme viditelné a neviditelné hrany kvádru.



Obrázek 1.4-2

Černé úsečky zakreslené na obrázcích krychle, resp. kvádru znázorňují úhlopříčky krychle, resp. kvádru. Přitom úsečky *BH* představují tělesovou úhlopříčku krychle, resp. kvádru, neboť jejich krajními body jsou dva vrcholy krychle, resp. kvádru neležící ve stejné stěně krychle, resp. kvádru. Úsečky *EG* znázorňují stěnovou úhlopříčku krychle, resp. kvádru. Stěnová úhlopříčka spojuje dva protilehlé vrcholy jedné stěny krychle, resp. kvádru.

V krychli i v kvádru se nachází celkem 4 tělesové úhlopříčky a 12 stěnových úhlopříček. V krychli jsou všechny tělesové úhlopříčky stejně dlouhé a je-li délka hrany krychle označena ***a***, pak je délka tělesové úhlopříčky krychle rovna $\boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{3}}$. Také všech 12 stěnových úhlopříček krychle je stejně dlouhých, jejich délka je při označení hrany ***a*** krychle rovna velikosti úhlopříčky čtverce o straně ***a***, tj. je rovna délce $\boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{2}}$. I velikosti všech 4 tělesových úhlopříček kvádru jsou si rovny. Obě tělesa mají 8 vrcholů a 6 stěn.

1.4.2 Hranoly

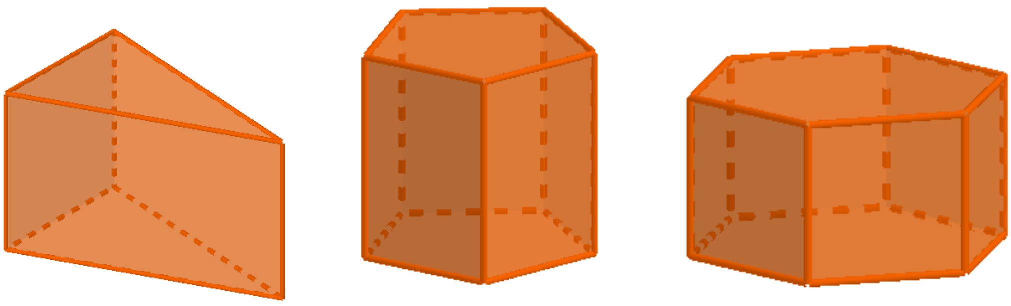
Žáci se v nižších ročnících základní školy setkávají se speciálními případy hranolů, a to s krychlemi a s kvádry. Ve vyšších ročnících základní školy se žáci seznamují s obecnějšími typy hranolů, přesněji s kolmými hranoly.

Kolmým hranolem se rozumí takové těleso, jehož podstavy jsou shodné mnohoúhelníky ležící v rovnoběžných, navzájem různých rovinách, které jsou kolmé k bočním hranám hranolu. Nejsou-li boční hrany hranolu kolmé k rovinám jeho mnohoúhelníkových podstav, nejedná se o kolmý hranol, ale o kosý hranol.

Základní vlastnosti hranolů

- hranol má dvě podstavy, které jsou tvořeny shodnými mnohoúhelníky (mnohoúhelníky mohou být pravidelné, ale i nepravidelné)
- mnohoúhelníkové podstavy hranolu leží v rovnoběžných, navzájem různých rovinách
- boční stěny kolmého hranolu jsou buď čtverce, anebo obdélníky
- výška kolmého hranolu se rovná délce boční hrany
- výška kosého hranolu je rovna vzdálenosti rovnoběžných rovin, v nichž leží mnohoúhelníkové podstavy hranolu

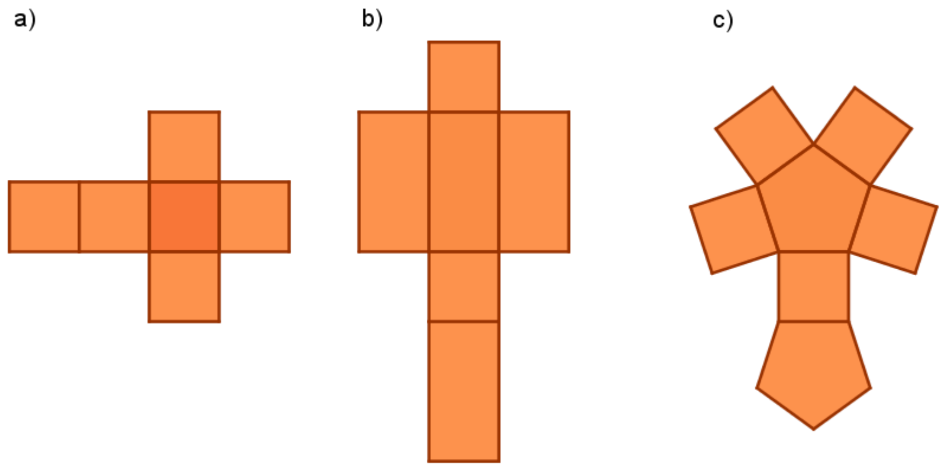
Na obr. 1.4-3 jsou znázorněny příklady tří kolmých hranolů.



Obrázek 1.4-3

1.4.3 Sítě těles

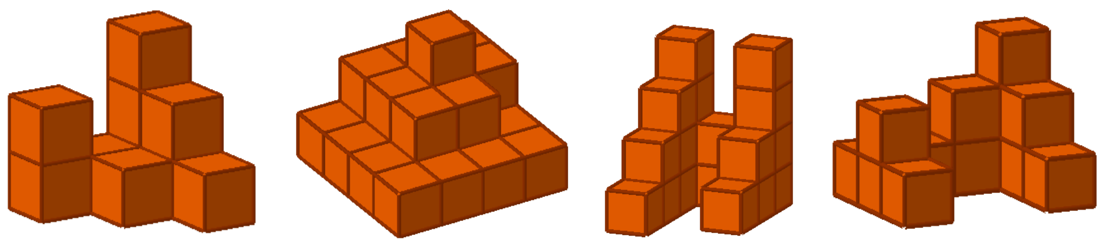
Síť tělesa je rovinný obrazec znázorňující sjednocení podstav a pláště tělesa v rovině neboli zobrazuje povrch tělesa rozložený do roviny. Každé těleso má svou síť, muže se ale stát, že těleso má větší počet možných sítí. Takovým případem je např. krychle, která má celkem 11 různých sítí, ze kterých se dá složit. Na obr. 1.4-4 je znázorněna síť krychle, kvádru a pravidelného kolmého pětibokého hranolu.



Obrázek 1.4-4 síť: a) krychle, b) kvádr, c) pětiboký hranol

1.4.4 Krychlová tělesa

Krychlová tělesa jsou taková tělesa, která vznikají sjednocením shodných krychlí umísťovaných v prostoru vedle sebe, na sebe apod. Příklady s krychlovými tělesy jsou vhodné k procvičování prostorové představivosti (např. zobrazování půdorysů, bokorysů a nárysů krychlových těles, dále pak hledání vhodných krychlových těles při doplňování daného krychlového tělesa v celistvou krychli, trénování kótového zápisu krychlových těles atd.). Na následujícím obr. 1.4-5 jsou ukázky příkladů čtyř různých krychlových těles.



Obrázek 1.4-5

1.5 Míry v geometrii

1.5.1 Převody jednotek

V této podkapitole se podíváme na základní, ale i pokročilejší převody jednotek. Převody jednotek se vyskytují v ostrých přijímacích zkouškových testech z matematiky na SŠ pravidelně, a proto je dobré si zde některé převodní vztahy zopakovat.

Jednotky délky

1 km =	**1 000 m**	**1 m** =	0,001 km	**1 dm** =	0,000 1 km	**1 cm** =	0,000 01 km
	10 000 dm		**10 dm**		0,1 m		0,01 m
	100 000 cm		**100 cm**		**10 cm**		0,1 dm
	1 000 000 mm		**1 000 mm**		**100 mm**		**10 mm**

Tabulka 2

Jednotky obsahu

1 km² =	**1 000 000 m²**	**1 m² =**	0,000 001 km²
	100 000 000 dm²		**100 dm²**
	10 000 000 000 cm²		**10 000 cm²**
	1 000 000 000 000 mm²		**1 000 000 mm²**
1 dm² =	0,000 000 01 km²	**1 cm² =**	0,000 000 000 1 km²
	0,01 m²		0,000 1 m²
	100 cm²		0,01 dm²
	10 000 mm²		**100 mm²**
1 mm² =	0,000 000 000 001 km²		
	0,000 001 m²		
	0,000 1 dm²		
	0,01 cm²		

Tabulka 3

Jednotky objemu

1 km³ =	**1 000 000 000 m³**	**1 m³ =**	0,000 000 001 km³
	1 000 000 000 000 dm³		**1 000 dm³**
	1 000 000 000 000 000 cm³		1 000 000 cm³
	1 000 000 000 000 000 000 mm³		1 000 000 000 mm³
1 dm³ =	0,000 000 000 001 km³	**1 cm³ =**	0,000 000 000 000 001 km³
	0,001 m³		0,000 001 m³
	1 000 cm³		0,001 dm³
	1 000 000 mm³		**1 000 mm³**
1 mm³ =	0,000 000 000 000 000 001 km³		
	0,000 000 001 m³		
	0,000 001 dm³		
	0,001 cm³		
1 dm³ =	**1 litr**		

Tabulka 4

Jednotky hmotnosti

1 t =	**1 000 kg**	**1 kg =**	0,001 t	**1 g =**	0,000 001 t
	1 000 000 g		**1 000 g**		0,001 kg
	1 000 000 000 mg		1 000 000 mg		**1 000 mg**

Tabulka 5

Jednotky času

1 hodina =	**60 minut**	**1 minuta** =	0,017 hodin
	3 600 sekund		**60 sekund**

Tabulka 6

1.5.2 Obvody a obsahy rovinných útvarů

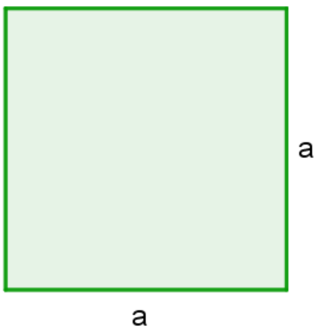
1.5.2.1 Obvod a obsah čtverce a obdélníku

Již na prvním stupni základní školy se žáci setkávají se dvěma speciálními případy pravoúhelníků, tj. se čtverci a obdélníky. Ve 3. třídě se seznamují s jejich základními vlastnostmi a učí se vypočítat velikosti obvodu a obsahu těchto základních geometrických útvarů. Vzorce pro výpočty obvodu čtverce a obdélníku, resp. obsahu čtverce a obdélníku připomeneme proto jen ve stručnosti.

Čtverec

Vzorec pro výpočet obvodu čtverce můžeme zapsat ve tvaru $\boldsymbol{o} = 4 \,.\, \boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{a}$ je délka strany čtverce. Obvodem čtverce tedy rozumíme součet délek všech jeho čtyř stran.

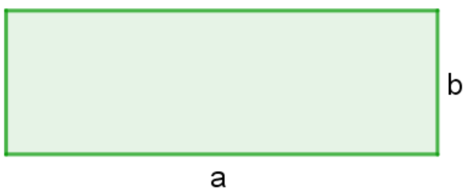
Obsahem čtverce je myšlena velikost plochy, kterou čtverec v rovině zaujímá. Vzorec pro výpočet obsahu čtverce lze zapsat obecně ve tvaru $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$, kde $\boldsymbol{a}$ je opět délka strany čtverce.



Obrázek 1.5-1

Obdélník

Obvod obdélníku se vypočítá jako součet délek jeho čtyř stran. Z výše uvedených vlastností obdélníku plyne, že vzorec pro výpočet obvodu obdélníku je možné zapsat ve tvaru: $\boldsymbol{o} = 2 \,.\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou délky jeho stran.



Obrázek 1.5-2

Obsah obdélníku vyjadřuje velikost plochy, kterou obdélník v rovině zaujímá. Obsah obdélníku vypočítáme užitím vzorce $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ jsou opět délky stran obdélníku.

1.5.2.2 Obvod a obsah trojúhelníku

S trojúhelníkem jako s geometrickým rovinným útvarem se žáci setkávají již na 1. stupni základních škol, přesněji ve 3. třídě. Ve 3. třídě se děti učí určit obvod trojúhelníku pomocí měření délek jeho stran, ale i graficky pomocí přenesení délek jeho stran na polopřímku a posléze změřením výsledné úsečky. Ve 4. třídě se pak učí určovat obsah trojúhelníku s využitím čtvercové sítě, zpravidla doplněním na čtverec, resp. obdélník. Vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku je žákům zaveden ale až v 7. třídě základní školy.

Obvod trojúhelníku se rovná součtu délek všech tří jeho stran, tj.

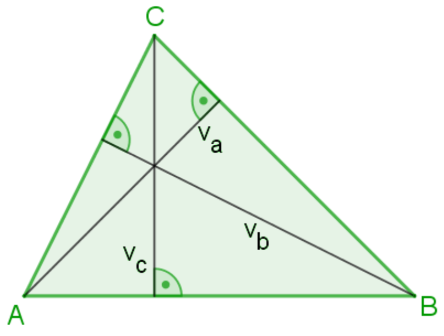
$$\boldsymbol{o = a + b + c},$$

kde ***a***, ***b***, ***c*** jsou délky stran daného trojúhelníku.

Je-li dán trojúhelník ***ABC*** s typickým označením jeho stran a výšek k jeho jednotlivým stranám, pak lze jeho obsah vypočítat třemi různými způsoby, tedy

$$\boldsymbol{S = \frac{a \,.\, v_a}{2} = \frac{b \,.\, v_b}{2} = \frac{c \,.\, v_c}{2}},$$

kde $\boldsymbol{v_a}$, $\boldsymbol{v_b}$, $\boldsymbol{v_c}$ jsou výšky trojúhelníku ***ABC*** příslušné po řadě k jeho stranám ***a***, ***b***, ***c***.



Obrázek 1.5-3

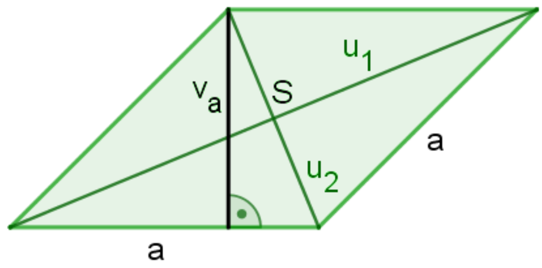
1.5.2.3 Obvod a obsah kosočtverce a kosodélníku

<u>Kosočtverec</u>

Z vlastností kosočtverce víme, že všechny čtyři jeho strany mají stejnou délku, proto pro obvod kosočtverce platí vztah

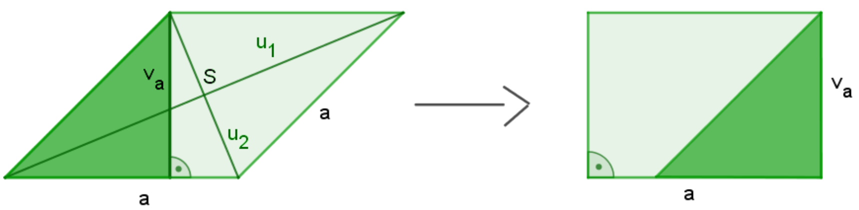
$$\boldsymbol{o = 4 \,.\, a},$$

kde ***a*** je délka strany kosočtverce.



Obrázek 1.5-4

V porovnání s výpočtem obsahu čtverce se obsah kosočtverce určí jiným způsobem, a to následujícím způsobem. K výpočtu obsahu kosočtverce je možné využít rozdělení kosočtverce na dva rovinné útvary a následné vytvoření obdélníku z obou částí



Obrázek 1.5-5

rozděleného kosočtverce. V tomto případě využijeme s výhodou již známého vzorce pro výpočet obsahu obdélníku, v němž délka jedné strany obdélníku odpovídá délce ***a*** strany kosočtverce a délka druhé strany sestaveného obdélníku odpovídá velikosti výšky $\boldsymbol{v_a}$ kosočtverce, tedy vzorec pro výpočet obsahu kosočtverce je možné zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{S = a \,.\, v_a}.$$

Pokud neznáme délku strany ***a*** kosočtverce a velikost výšky $\boldsymbol{v_a}$ kosočtverce, ale známe naopak délky úhlopříček kosočtverce, můžeme pro výpočet obsahu kosočtverce použít vzorec zapsaný ve tvaru

$$\boldsymbol{S = \frac{u_1 \,.\, u_2}{2}},$$

kde $\boldsymbol{u_1}$ a $\boldsymbol{u_2}$ značí délky úhlopříček kosočtverce.

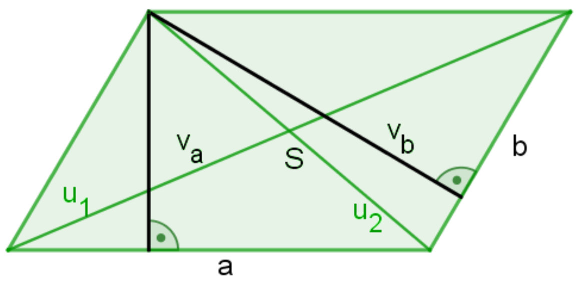
<u>Kosodélník</u>

Vzorec pro výpočet obvodu kosodélníku je roven vzorci pro výpočet obvodu obdélníku, tedy

$$\boldsymbol{o = 2 \,.\, (a + b)},$$

kde ***a***, ***b*** jsou délky stran kosodélníku.

Vzorec pro výpočet obsahu kosodélníku je na první pohled odlišný od vzorce pro výpočet obsahu obdélníku. Rozdělíme-li však kosodélník vhodným způsobem např. na pravoúhlý lichoběžník a pravoúhlý trojúhelník, pak přemístěním a následným sjednocením těchto dílčích rovinných útvarů je možné vytvořit obdélník, jehož délka jedné strany je rovna odpovídající délce strany původního kosodélníku a jehož délka druhé strany je rovna výšce kosodélníku k odpovídající straně původního kosodélníku. A protože má kosodélník dvě různě dlouhé výšky, je možné vypočítat obsah kosodélníku pomocí dvou následujících vztahů



Obrázek 1.5-6

$$\boldsymbol{S = a \,.\, v_a = b \,.\, v_b},$$

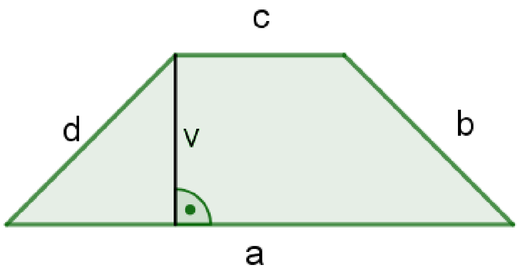
kde $\boldsymbol{v_a}$, $\boldsymbol{v_b}$ jsou po řadě výšky ke stranám ***a***, ***b*** kosodélníku.

1.5.2.4 Obvod a obsah lichoběžníku

Je zřejmé, že obvod lichoběžníku je roven součtu délek všech čtyř stran lichoběžníku, tedy

$$\boldsymbol{o = a + b + c + d},$$

kde ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** jsou délky stran lichoběžníku.

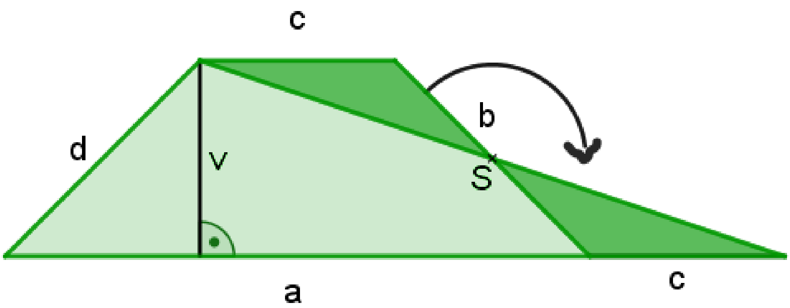


Obrázek 1.5-7

Vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku je tvaru

$$\boldsymbol{S = \frac{(a + c)\ .\ v}{2}},$$

kde ***a***, ***c*** jsou délky základen lichoběžníku a ***v*** je výška lichoběžníku. Tzn. obsah lichoběžníku vypočteme jako jednu polovinu součinu výsledku součtu délek základen lichoběžníku a výšky lichoběžníku. K odvození vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku je opět možné lichoběžník vhodným způsobem rozdělit na dva rovinné útvary – obecný čtyřúhelník a trojúhelník. Složením těchto dvou útvarů v trojúhelník o délce jedné strany rovné ***a*** + ***c*** a o výšce ***v*** přechází výpočet obsahu lichoběžníku na výpočet obsahu trojúhelníku. Tj. můžeme použít již známého vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku, který odpovídá uvedenému vzorci pro výpočet obsahu lichoběžníku.



Obrázek 1.5-8

1.5.2.5 Obvod a obsah kruhu

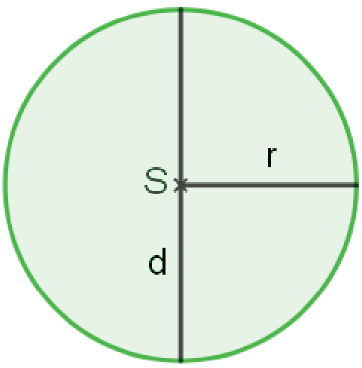
Obvodem kruhu rozumíme délku kružnice, která daný kruh ohraničuje. Vzorec pro výpočet obvodu kruhu je možné obecně zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{o = 2\ .\ \pi\ .\ r},$$

kde ***r*** je poloměr kruhu. Na základě platnosti rovnosti, že délka průměru ***d*** kruhu je rovna dvojnásobku poloměru ***r*** téhož kruhu, můžeme vzorec pro výpočet obvodu kruhu psát ve tvaru

$$\boldsymbol{o = \pi\ .\ d},$$

kde ***d*** je průměr kruhu.



Obrázek 1.5-9

Obsah kruhu vypočteme ze vztahu

$\boldsymbol{S = \pi\ .\ r^2 = \pi\ .\frac{d^2}{4}}$, kde ***r*** je poloměr kruhu a ***d*** je průměr téhož kruhu.

1.5.3 Povrchy a objemy těles

V této podkapitole připomeneme vzorce pro výpočty povrchů a objemů základních těles. V uvedených vzorcích budeme povrch těles označovat písmenem ***S***. Hodnoty povrchu počítáme v jednotkách čtverečních. Zatímco objem těles budeme označovat písmenem ***V*** a počítáme ho v krychlových jednotkách. Někdy jsou v praktické části této práce při výpočtech objemů těles přepočítávány krychlové jednotky na tzv. duté míry.

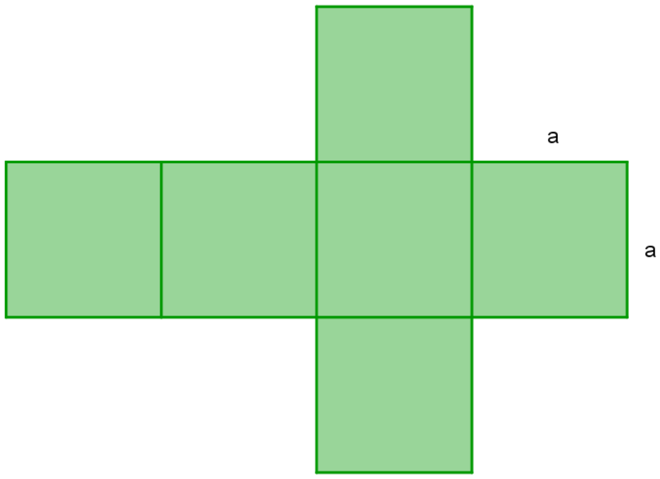
1.5.3.1 Krychle a kvádr

V tomto odstavci se zaměříme na určování povrchu a objemu krychle a kvádru. V podkapitole 1.4.1 jsme zopakovali pojmy spojené s krychlí a kvádrem, mimo jiné jsme připomněli pojmy stěnová a tělesová úhlopříčka krychle, resp. kvádru.

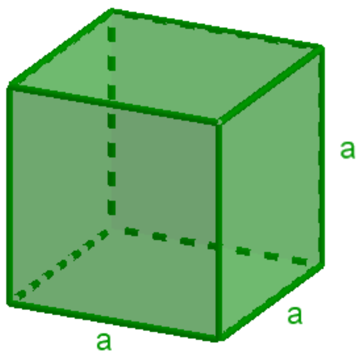
<u>Krychle</u>

Povrch krychle se skládá ze 6 shodných čtverců. Pro lepší názornost je možné zobrazit povrch krychle do roviny, tj. vytvořit síť krychle. Je zřejmé, že obsah sestrojené sítě se vypočítá s užitím vzorce pro výpočet obsahu čtverce a shodných čtverců v síti krychle je právě 6, tj.

$$\boldsymbol{S = 6\,.\,a\,.\,a = 6\,.\,a^2}$$



Obrázek 1.5-10



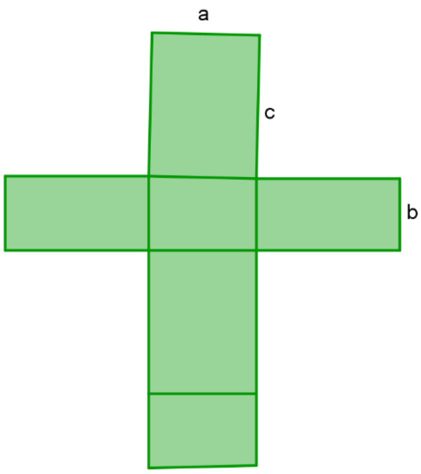
Obrázek 1.5-11

Kromě výpočtu hodnoty povrchu krychle budeme chtít počítat také hodnotu objemu krychle. Přitom objem tělesa (krychle) vyjadřuje velikost části prostoru, kterou těleso (krychle) v prostoru vyplňuje. K výpočtu hodnoty objemu krychle je důležité znát délku hrany ***a*** krychle, protože vzorec pro výpočet objemu krychle je ve tvaru

$$\boldsymbol{V = a\,.\,a\,.\,a = a^3}.$$

Kvádr

Velikost povrchu kvádru je možné vypočítat analogickým způsobem, jako byl popsán výpočet velikosti povrchu krychle, pouze ale s tím rozdílem, že krychle má 6 shodných čtvercových stěn, zatímco kvádr má 3 dvojice shodných obdélníkových stěn. Vzorec pro výpočet povrchu kvádru je snadné odvodit ze sítě kvádru. Z ní je patrné, že se povrch kvádru skládá ze tří dvojic shodných obdélníkových stěn, jak již bylo zmíněno, tedy povrch kvádru můžeme vypočítat následovně ze vzorce



Obrázek 1.5-12

$$\boldsymbol{S = 2\,.\,a\,.\,b + 2\,.\,a\,.\,c + 2\,.\,b\,.\,c},$$

kde ***a***, ***b***, ***c*** jsou délky hran kvádru.

Tento vzorec lze upravit vytknutím čísla 2 na zkrácený tvar

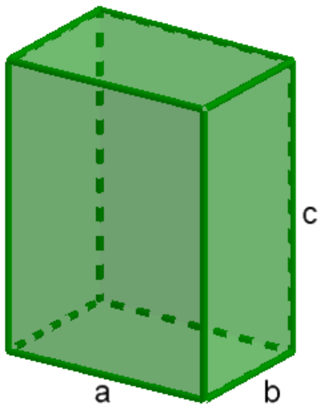
$$\boldsymbol{S = 2\,.\,(\,a\,.\,b + a\,.\,c + b\,.\,c)}.$$

Objem kvádru určíme tak, že nejdříve vypočítáme obsah podstavy kvádru, který posléze vynásobíme ještě výškou kvádru. Víme-li, že obsah podstavného obdélníku kvádru je dán vztahem

$$\boldsymbol{S = a\,.\,b},$$

kde ***a***, ***b*** jsou délky podstavných hran kvádru, a že výška kvádru je označena písmenem ***c***, pak lze vzorec pro výpočet objemu kvádru zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{V = a\,.\,b\,.\;c}.$$



Obrázek 1.5-13

Když se podíváme na vzorce pro výpočty objemů krychle a kvádru, tak si můžeme všimnout, že vypadají velmi podobně. To je z toho důvodu, že krychle je speciálním případem kvádru, který má všechny hrany stejně dlouhé.

1.5.3.2 Hranoly

Krychle a kvádr jsou speciálními případy kolmých čtyřbokých hranolů. Vzorce pro výpočty velikostí jejich povrchů a objemů jsou speciálními vzorci, které jsou ekvivalentní s obecně platnými vzorci pro výpočty velikostí povrchů a objemů kolmých hranolů. Velikost povrchu libovolného kolmého hranolu se vypočítá jako součet obsahů dvou jeho shodných mnohoúhelníkových podstav a obsahu pláště. Plášť kolmého hranolu se skládá buď z obdélníků, anebo ze čtverců. Obecně můžeme vzorec pro výpočet povrchu kolmého hranolu zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{S = 2\,.\,S_p + S_{pl}},$$

kde S_p je obsah mnohoúhelníkové podstavy kolmého hranolu a S_{pl} je obsah pláště téhož kolmého hranolu.

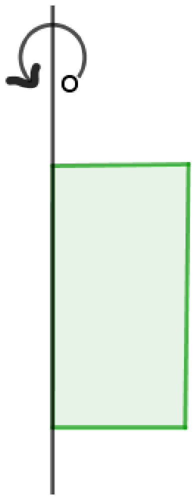
Hodnotu objemu kolmého hranolu určíme vynásobením velikosti obsahu mnohoúhelníkové podstavy kolmého hranolu s velikostí jeho výšky, tj. zapsáno symbolicky

$$V = S_p \,.\, v,$$

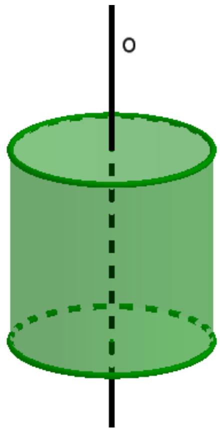
kde S_p je obsah mnohoúhelníkové podstavy kolmého hranolu a v je velikost výšky daného kolmého hranolu.

1.5.3.3 Válec

Tento odstavec je věnován rotačnímu válci.



Obrázek 1.5-15



Obrázek 1.5-14

Rotační válec řadíme mezi oblá geometrická tělesa. V reálném životě nacházíme mnoho různých předmětů běžné potřeby, např. konzervy, plechovky, svíčky atd., ve tvaru rotačního válce, ale i různé objekty v reálném světě, jako např. balíky slámy, cisterny, hradní věže apod. jsou válcového tvaru.

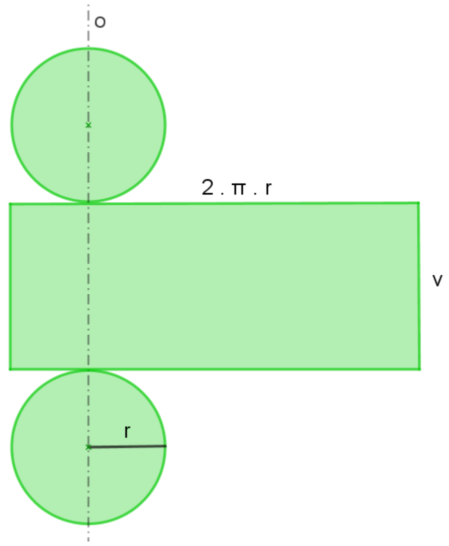
Připomeňme jeden možný způsob vzniku rotačního válce. Rotační válec může vznikat rotací obdélníku kolem přímky, která buď splývá s jednou stranou obdélníku, anebo je totožná s jednou ze dvou středních příček obdélníku. Přímku, kolem které obdélník rotuje, nazýváme osa rotačního válce. Osa rotačního válce prochází středy kruhových podstav válce. Z obrázku je patrné, že poloměr rotačního válce je v našem případě roven délce kratší strany obdélníku a výška rotačního válce je rovna délce delší strany obdélníku. Výše popsaný způsob vzniku rotačního válce vede k uvedení jedné z několika jeho možných definic.

Definice rotačního válce: Část prostoru vymezená rotací obdélníku buď kolem jedné jeho strany, anebo kolem jedné jeho střední příčky se nazývá rotační válec.

K odvození vzorce pro výpočet povrchu rotačního válce opět s výhodou využijeme síť válce. Když se podíváme na obrázek sítě rotačního válce, lze si všimnout, že povrch válce je tvořen dvěma shodnými kruhy a jedním obdélníkem. Jednou stranou obdélníku je výška ***v*** rotačního válce a druhou stranou obdélníku je velikost obvodu podstavného kruhu. Obvod podstavného kruhu vypočítáme pomocí vztahu

$$\boldsymbol{o = 2\,.\,\pi\,.\,r.}$$

Sečteme-li velikosti obsahů dvou podstavných kruhů s velikostí obsahu obdélníku tvořícího plášť rotačního válce, získáme velikost povrchu rotačního válce, což je možné zapsat symbolicky vzorcem



Obrázek 1.5-16

$$\boldsymbol{S = 2\,.\,\pi\,.\,r^2 + 2\,.\,\pi\,.\,r\,.\,v.}$$

Výraz na pravé straně rovnosti lze vytknutím upravit, čímž dostaneme vzorec ve tvaru

$$\boldsymbol{S = 2\,.\,\pi\,.\,r\,.\,(r + v).}$$

Je-li odvozen vztah pro výpočet velikosti povrchu rotačního válce, zmíníme ještě vzorec pro výpočet objemu rotačního válce. Vzorec pro výpočet objemu rotačního válce je podobného tvaru jako vzorec pro výpočet objemu kolmého hranolu. Tedy objem rotačního válce určíme jako výsledek součinu obsahu kruhové podstavy a velikosti výšky rotačního válce, což můžeme symbolicky zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{V = S_p\,.\,v,}$$

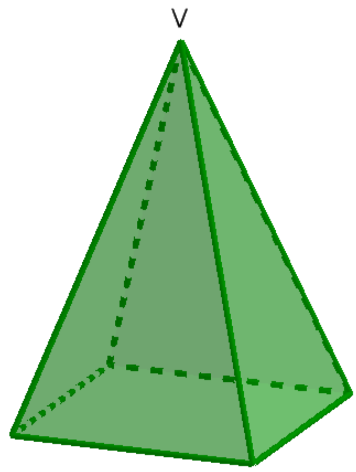
který lze ještě rozepsat na tvar

$$\boldsymbol{V = \pi\,.\,r^2\,.\,v,}$$

kde ***r*** je poloměr kruhové podstavy rotačního válce a ***v*** je výška rotačního válce.

1.5.3.4 Jehlan

V tomto odstavci pojednáme o jehlanech. Zmíníme základní pojmy související s jehlany, a to *n*-úhelníkovou podstavu jehlanu, boční stěny jehlanu, hlavní vrchol jehlanu, výšku jehlanu, ale uvedeme i vzorce pro výpočty povrchu a objemu jehlanu.



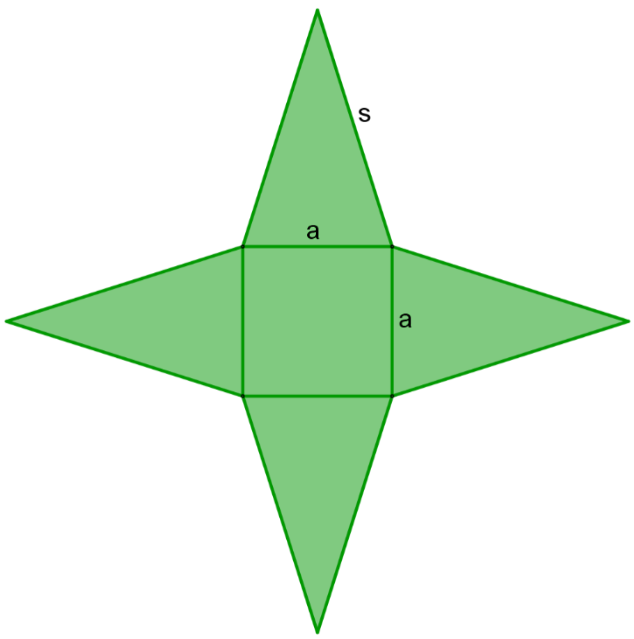
Obrázek 1.5-17

Definice jehlanu: Jehlan je geometrické těleso omezené mnohoúhelníkovou podstavou a trojúhelníkovými stěnami, které se protínají ve společném průsečíku neležícím v rovině mnohoúhelníkové podstavy.

Jehlan jako geometrické těleso a pojmy s ním související se probírají v devátém ročníku základní školy. S pojmem jehlan a s jeho modely jsou žáci seznámeni, ale již na prvním stupni základní školy. Proto pro žáky deváté třídy není toto geometrické těleso ve škole novinkou, jistě se s předměty ve tvaru jehlanů setkali už i v běžném životě. Žáci se mohou v reálném životě setkat např. se svíčkou ve tvaru jehlanu, s bodovým světlem či zásuvkou ve tvaru jehlanu, ale i s dalšími podobnými předměty, které mají tvar jehlanu. Dalším takovým velmi zajímavých příkladem jehlanů mohou být např. egyptské pyramidy.

Povrch jehlanu je tvořen podstavou a bočními stěnami. Podstavou jehlanu je vždy nějaký *n*-úhelník, kde $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{n} \geq 3$ (např. trojúhelník, čtverec, obdélník, pětiúhelník, šestiúhelník apod.). Boční stěny jehlanu jsou vždy trojúhelníkového tvaru a hlavní vrchol jehlanu je místem, kde se střetávají všechny boční stěny jehlanu.

Pro odvození obecného vzorce pro výpočet velikosti povrchu jehlanu si pomůžeme ilustračním obrázkem sítě pravidelného čtyřbokého jehlanu.



Obrázek 1.5-18

Stejně jako u výše uvedených těles je možné vypozorovat ze sítě jehlanu rovinné obrazce, z nichž je síť jehlanu, a tedy jeho povrch tvořen. V případě sítě pravidelného čtyřbokého jehlanu znázorněné na obrázku je vidět, že je síť tvořena čtvercovou podstavou a čtyřmi bočními trojúhelníkovými stěnami, které tvoří plášť jehlanu. Vzorec pro výpočet povrchu jehlanu má tedy obecný tvar

$$\boldsymbol{S = S_p + S_{pl},}$$

kde $\boldsymbol{S_p}$ je obsah podstavy jehlanu a $\boldsymbol{S_{pl}}$ je obsah pláště tvořeného bočními trojúhelníkovými stěnami. Počet bočních trojúhelníkových stěn jehlanu závisí na typu podstavného mnohoúhelníku jehlanu. V případě kolmých jehlanů jsou boční stěny tvořeny vždy shodnými rovnoramennými trojúhelníky.

Pro výpočet obsahu jedné boční trojúhelníkové stěny se v závislosti na zadaných hodnotách užívá někdy s výhodou znalost Pythagorovy věty.

Vzorec pro výpočet objemu jehlanu lze obecně zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \, . S_p \, . v},$$

kde $\boldsymbol{S_p}$ je obsah mnohoúhelníkové podstavy a $\boldsymbol{v}$ je výška jehlanu.

Vzorec pro určení objemu jehlanu se odvozuje pomocí vzorce pro výpočet objemu krychle. Máme-li krychli, která má délku hrany rovnou dvojnásobku výšky $\boldsymbol{v}$ jehlanu, tj. $\boldsymbol{a = 2v}$, tak se do této krychle vejde 6 shodných jehlanů se čtvercovou podstavou o délce strany $\boldsymbol{a}$. Z odstavce 1.5.2.1 víme, že vzorec pro výpočet objemu krychle je $\boldsymbol{V = a^3}$. A protože je krychle speciálním příkladem kolmého hranolu, lze tento vzorec také zapsat jako $\boldsymbol{V = S_p \, . a}$. V našem případě jsme délku hrany $\boldsymbol{a}$ krychle vyjádřili pomocí velikosti výšky jehlanu, tj. $\boldsymbol{a = 2v}$. Po dosazení tohoto vztahu do uvedeného obecného vzorce pro výpočet objemu krychle dostáváme $\boldsymbol{V = S_p \, . 2v}$. Dále víme, že se do uvažované krychle vejde šest shodných jehlanů. Pokud chceme určit objem pouze jednoho z nich, tak musíme celek vydělit šesti, tj.

$$\boldsymbol{V_{jehlanu} = \frac{1}{6} \, . V_{krychle} = \frac{1}{6} \, . S_p \, . 2v},$$

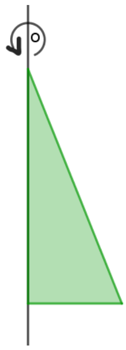
$$\boldsymbol{V_{jehlanu} = \frac{1}{3} \, . S_p \, . v}.$$

1.5.3.5 Kužel

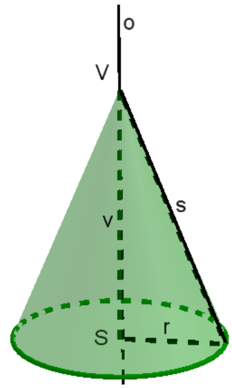
Dalším geometrickým tělesem, o kterém se žáci v devátých ročnících učí, je kužel. S předměty ve tvaru kužele se žáci opět setkávají v běžném životě. Takovým příkladem předmětu ve tvaru kužele může být např. hrot ořezané tužky, dále pak vonný kužel – tzv. františek, svíčka nebo dnes již méně často vyskytující se předměty jako dřevěný kužel na stáčení zmrzlinových kornoutů, ale i dříve často užívaná tzv. homole cukru.

V další části textu pojednáme o rotačním kuželi. Na rozdíl od rotačního válce, kterému byl věnován odstavec 1.5.3.3, jednou možností vzniku rotačního kužele je rotace pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné ze dvou jeho odvěsen. Z této skutečnosti vychází i jedna z definic rotačního kužele.

Definice rotačního kužele: Část prostoru vymezená rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny se nazývá rotační kužel.



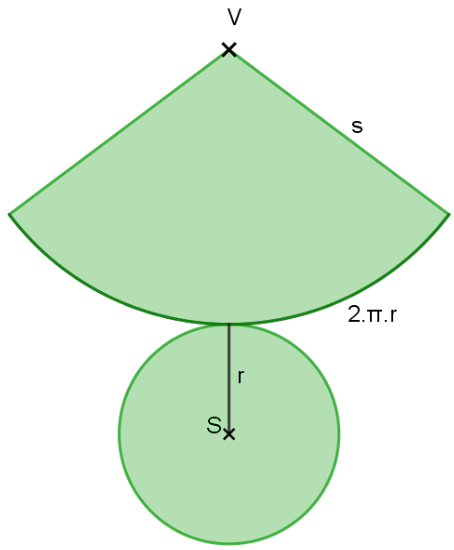
Obrázek 1.5-19



Obrázek 1.5-19

Z obrázku rotačního kužele znázorněného v rovnoběžném promítání je zřejmé, že jeho podstavou je kruh s poloměrem $\boldsymbol{r}$ a se středem v bodě $\boldsymbol{S}$. Dále je na obrázku vyznačená výška $\boldsymbol{v}$ rotačního kužele, která spojuje střed $\boldsymbol{S}$ podstavného kruhu s vrcholem $\boldsymbol{V}$ rotačního kužele. Na obrázku je též vyznačena a popsána strana $\boldsymbol{s}$ rotačního kužele.

Vzorec pro výpočet povrchu rotačního kužele určíme podobně jako u výše uvedených základních těles z jeho sítě. Síť rotačního kužele je tvořena podstavným kruhem a kruhovou výsečí. Délka oblouku této kruhové výseče se rovná délce obvodu kruhové podstavy a poloměr kruhové výseče se rovná délce strany $\boldsymbol{s}$ rotačního kužele.



Obrázek 1.5-20

Povrch rotačního kužele tedy vypočítáme jako

$$\boldsymbol{S = S_p + S_{pl},}$$

kde $\boldsymbol{S_p}$ je obsah kruhové podstavy kužele a $\boldsymbol{S_{pl}}$ je obsah pláště kužele v podobě popsané kruhové výseče. Po vyjádření obsahu kruhové podstavy a obsahu kruhové výseče pomocí známých vzorců a po jejich následném dosazení dostaneme vzorec ve tvaru

$$\boldsymbol{S = \pi\,.\,r^2 + \pi\,.\,r\,.\,s.}$$

A následnou úpravou v podobě vytknutí získáme vzorec ve tvaru

$$\boldsymbol{S = \pi\,.\,r\,.\,(r + s).}$$

Objem rotačního kužele vypočítáme užitím podobného vzorce, který platí pro výpočet objemu jehlanu. Tato dvě tělesa se odlišují pouze ve tvaru svých podstav, rotační kužel má kruhovou podstavu, zatímco podstavu jehlanu tvoří mnohoúhelník.

Vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele má tedy obecně tvar

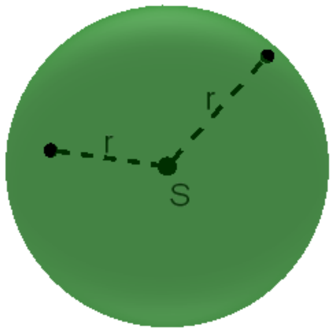
$$V = \frac{1}{3} \,.\, S_p \,.\, v,$$

dosazením vztahu pro výpočet obsahu kruhu dostaneme vzorec ve tvaru

$$V = \frac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, r^2 \,.\, v.$$

1.5.3.6 Koule

Posledním geometrickým tělesem, o kterém pojednáme, je koule.



Obrázek 1.5-21

__Definice koule__: Koule je množina bodů splňujících následující nerovnost $\boldsymbol{0 \leq l \leq r}$, $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}$, kde ***l*** je libovolná vzdálenost od středu ***S*** v intervalu $< 0; \boldsymbol{r} >$ a ***r*** je poloměr koule.

Povrch koule je tvořen kulovou plochou. Kulová plocha je množinou takových bodů v prostoru, které mají od jejího středu ***S*** vždy stejnou vzdálenost, tato vzdálenost je rovna poloměru ***r*** kulové plochy, kde ***r*** je kladné reálné číslo.

Vzorec pro výpočet povrchu koule je tvaru

$$S = 4 \,.\, \pi \,.\, r^2,$$

kde ***r*** je poloměr koule.

Vzorec pro výpočet objemu koule je ve tvaru

$$V = \frac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, r^3,$$

kde ***r*** je poloměr koule.

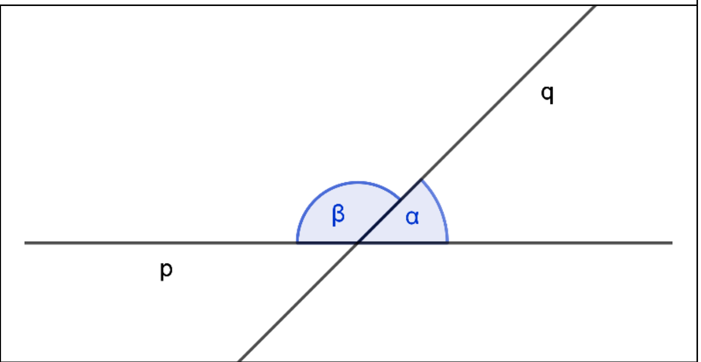
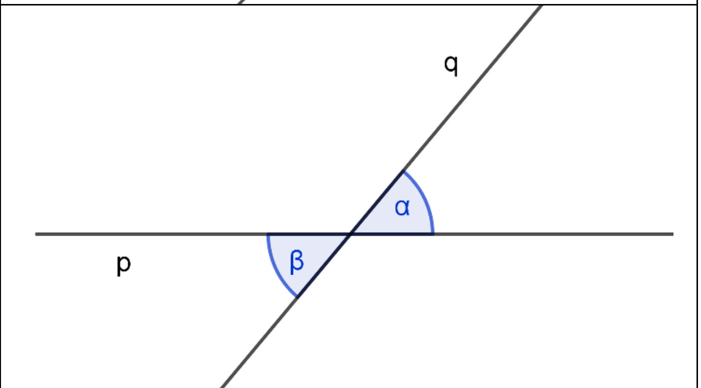
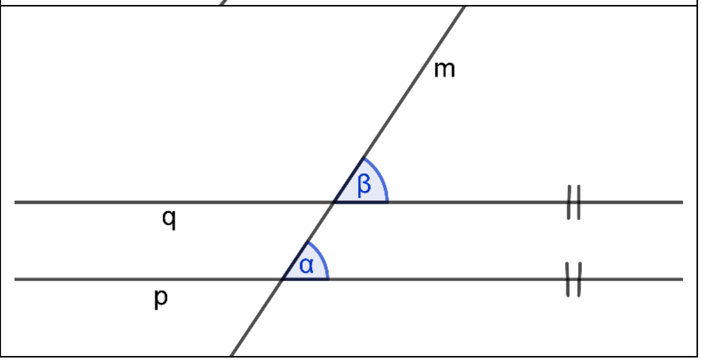
Vzorce pro výpočty povrchu a objemu koule zde nebudeme z důvodu jejich složitosti odvozovat.

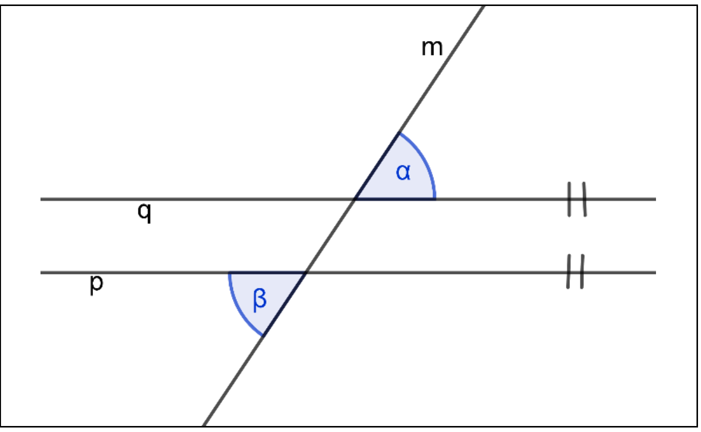
2 Praktická část

V praktické části práce jsou uvedeny některé příklady, které se v posledních letech vyskytly v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy, ale také mé vlastní příklady podobné příkladům vyskytujícím se v učebnicích určených pro přípravu žáků 9. tříd ZŠ na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ. Příklady v této části jsou doplněny komentovaným vzorovým řešením, jsou zde přidána i zadání úloh určených k samostatnému procvičování. Na konci každé kapitoly jsou vloženy správné výsledky úloh určených k samostatnému procvičování. V této části práce jsou zařazeny příklady procvičující ta témata z geometrie, která jsou probírána na 2. stupni ZŠ, a také ta, z nichž se příklady vyskytují v ilustrativních, a především také v ostrých státních přijímacích zkouškových testech přijímacích zkoušek z matematiky na střední školy. Jedná se o následující témata z geometrie: úhly a jejich velikosti, mnohoúhelníky, konstrukční úlohy, tělesa a míry v geometrii.

2.1 Úhly a jejich velikosti

V této kapitole je nejprve uvedeno 8 vzorově řešených příkladů zaměřených na výpočty velikostí úhlů. Při výpočtech jsou využívány znalosti vedlejších a vrcholových úhlů, ale také znalosti dvojic souhlasných a střídavých úhlů, dále pak i vlastnosti některých rovinných geometrických obrazců a součtů velikostí jejich vnitřních úhlů. Kromě 8 vzorově řešených příkladů je v této kapitole vloženo zadání 6 úloh k procvičování. Obsahově jsou tyto úlohy podobné vzorově řešeným příkladům. Kapitola je zakončena uvedením správných výsledků 6 úloh určených k samostatnému procvičování.

<table>
<tr><th colspan="2">Dvojice úhlů</th></tr>
<tr><td>Vedlejší úhly:
$\alpha + \beta = 180°$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Vrcholové úhly:
$\alpha = \beta$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Souhlasné úhly:
$\alpha = \beta$</td><td>
</td></tr>
</table>

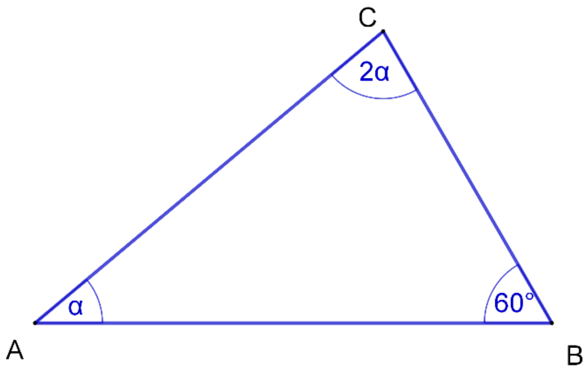
Střídavé úhly: $\alpha = \beta$	

Tabulka 7

2.1.1 Vzorově řešené příklady

Příklad 1.1:

Úhel $\boldsymbol{\beta}$ při vrcholu ***B*** v trojúhelníku ***ABC*** má velikost **60°**. Velikosti zbývajících vnitřních úhlů v trojúhelníku ***ABC*** jsou v poměru 1 : 2. Jakou velikost má nejmenší vnitřní úhel trojúhelníku ***ABC***? [17]



Řešení:

Víme, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je dohromady roven 180°, což lze při obvyklém značení vnitřních úhlů v trojúhelníku ***ABC*** zapsat symbolicky následovně:

$$\mathbf{180°} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$$

Výpočet:

Po dosazení zadaných hodnot získáváme, že $\mathbf{180°} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{60°} + \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}$, a po úpravách dále

$$\mathbf{180°} - \mathbf{60°} = \mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}$$

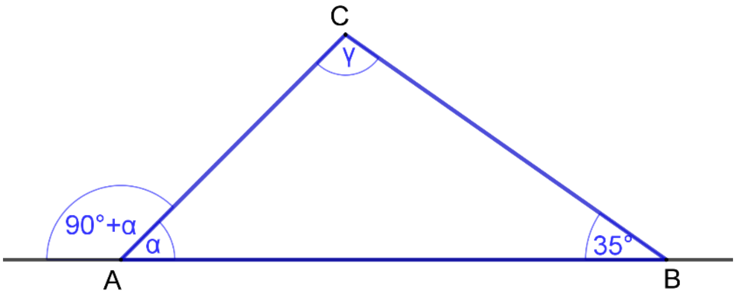
$$\frac{\mathbf{120°}}{\mathbf{3}} = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{40°}$$

Odpověď: Nejmenší vnitřní úhel trojúhelníku ***ABC*** má velikost 40°.

Příklad 1.2:

Je dán trojúhelník ***ABC***, velikosti jeho vnitřních úhlů, resp. velikost vnějšího úhlu u vrcholu ***A*** jsou dány podle obrázku. Jaká je velikost úhlu ***γ***? [18]



Řešení:

Víme, že přímý úhel má velikost rovnu 180° a že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je roven také 180°.

Výpočet:

Velikost vnitřního úhlu ***α*** vypočteme na základě platnosti rovnosti, která říká, že součet velikostí vrcholového úhlu a velikosti úhlu k němu vedlejšímu je roven 180°, tj. **180° = 90° + *α* + *α*.** Odtud po úpravách obdržíme

$$\mathbf{180^\circ = 90^\circ + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}}$$

$$\mathbf{180^\circ - 90^\circ = 2\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\frac{\mathbf{90^\circ}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{45^\circ}$$

Je-li známá velikost úhlu ***α**,* pak lze dle výše uvedeného tvrzení o součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku jednoduše dopočítat velikost úhlu ***γ***, tedy

$$\mathbf{180^\circ = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}}$$

$$\mathbf{180^\circ = 45^\circ + 35^\circ + \boldsymbol{\gamma}}$$

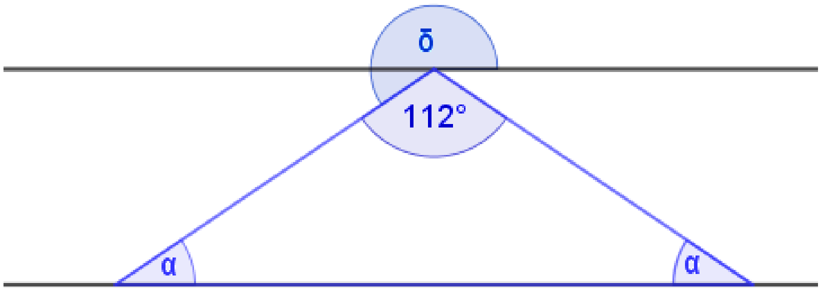
$$\mathbf{180^\circ - 45^\circ - 35^\circ = \boldsymbol{\gamma}}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{100^\circ}$$

Odpověď: Velikost úhlu ***γ*** je 100°.

Příklad 1.3:

Na obrázku je dán trojúhelník s modrými stranami. Dále jsou dány dvě různé navzájem rovnoběžné přímky, přitom na jedné z nich leží jedna ze stran daného trojúhelníku. K ní přiléhají zobrazené úhly o velikosti ***α***. Viz obrázek. Jaká je velikost úhlu ***δ***? [19]



Řešení:

Víme, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je vždy roven 180° a že střídavé úhly s jedním shodným ramenem a se druhými rameny navzájem rovnoběžnými různými jsou stejně velké a stejně tak souhlasné úhly s jedním shodným ramenem a se druhými rameny navzájem rovnoběžnými různými jsou též stejně velké.

Výpočet:

Z obrázku je patrné, že trojúhelník s modrými stranami je rovnoramenný trojúhelník s úhly o velikosti $\boldsymbol{\alpha}$ při základně. Velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ vypočítáme ze vzorce platného pro výpočet součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku, tedy:

$$\mathbf{180^\circ = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} + 112^\circ}$$

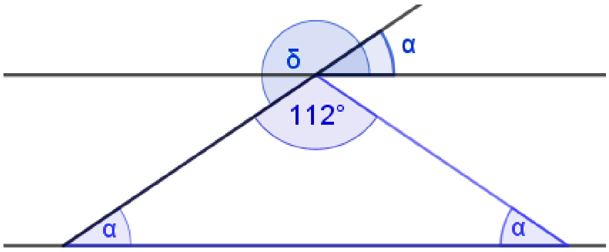
$$\mathbf{180^\circ - 112^\circ = 2\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\mathbf{68^\circ = 2\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\mathbf{\boldsymbol{\alpha} = 34^\circ}$$

Úhel $\boldsymbol{\alpha}$ má velikost rovnu 34°.

Z následujícího obrázku je patrné, že velikost úhlu $\boldsymbol{\delta}$ je rovna velikosti přímého úhlu plus velikosti úhlu $\boldsymbol{\alpha}$. Symbolicky zapsáno platí:



$$\mathbf{180^\circ + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\delta}}$$

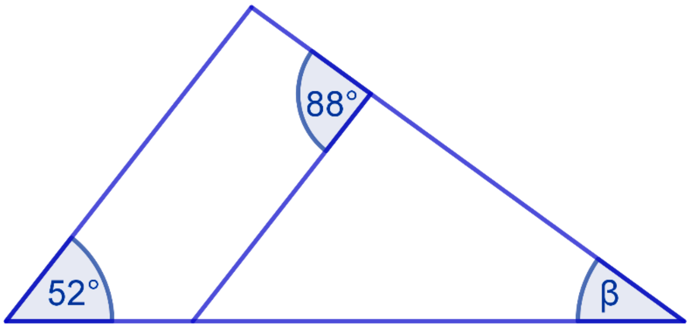
$$\mathbf{180^\circ + 34^\circ = \boldsymbol{\delta}}$$

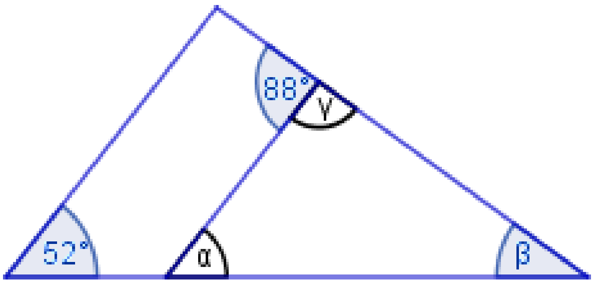
$$\mathbf{\boldsymbol{\delta} = 214^\circ}$$

Odpověď: Úhel $\boldsymbol{\delta}$ má velikost rovnu 214°.

Příklad 1.4:

Je dán trojúhelník a v něm je dána úsečka rovnoběžná různá se stranou trojúhelníku proti úhlu $\boldsymbol{\beta}$. Dále jsou dány velikosti vyznačených úhlů. Jaká je velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$? [20]





__Řešení:__

K výpočtu velikosti úhlu $\boldsymbol{\beta}$ si pomůžeme určením velikostí vnitřních úhlů $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\gamma}$. Velikost úhlu $\boldsymbol{\gamma}$ určíme z hodnoty 180°, které se rovná součet velikostí vedlejších úhlů, takže:$\mathbf{88°} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{180°}$.

Úpravou získáme, že velikost úhlu $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{180°} - \mathbf{88°}$, tj.$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{92°}$.

Úhel $\boldsymbol{\alpha}$ je souhlasným úhlem s úhlem o velikosti 52°, tj. i jeho velikost je rovna 52°.

Známe-li velikosti úhlů $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\gamma}$, lze vypočítat velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$, protože víme, že součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°. Tj. platí, že

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{180°}$$

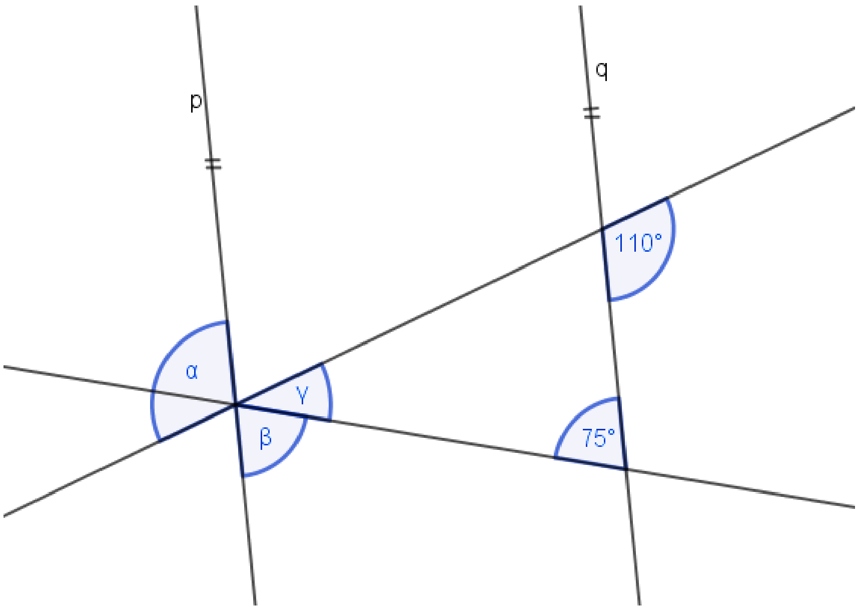
$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{180°} - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{180° - 52° - 92°}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{36°}$$

<u>Odpověď</u>: Úhel $\boldsymbol{\beta}$ má velikost 36°.

Příklad 1.5:



Jsou dány dvě navzájem různé rovnoběžné přímky $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ a s nimi dvě různoběžné přímky, jejichž společný průsečík leží na přímce $\boldsymbol{p}$. Dále jsou dány velikosti vyznačených úhlů. Určete velikosti úhlů $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\gamma}$. Viz obrázek.

<u>Řešení:</u>

Velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$ určíme na základě znalosti střídavých úhlů. Když se podíváme na obrázek, tak si všimneme, že velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$ odpovídá velikosti úhlu k němu střídavému o hodnotě 75°. Tedy víme, že velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$ je 75°.

Velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ můžeme určit analogicky. Z obrázku si lze všimnout, že velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ je rovna 110°. Opět zde využíváme znalosti o velikostech střídavých úhlů. Další možnost určení velikosti úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ je výpočet.

Nejprve spočítáme velikost úhlu $\boldsymbol{\gamma}$. K tomuto výpočtu využijeme znalosti, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°. A také toho, že přímý úhel má velikost 180°. Na základě poslední zmíněné skutečnosti určíme velikost vedlejšího úhlu k úhlu o velikosti 110°, tj.

$$\mathbf{180^\circ - 110^\circ = 70^\circ}.$$

Pokud známe velikosti dvou vnitřních úhlů trojúhelníku, lze snadno spočítat velikost třetího vnitřního úhlu, v tomto případě se jedná o úhel $\boldsymbol{\gamma}$, tedy

$$\mathbf{180^\circ = 75^\circ + 70^\circ +} \ \boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{180^\circ - 75^\circ - 70^\circ}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{35^\circ}$$

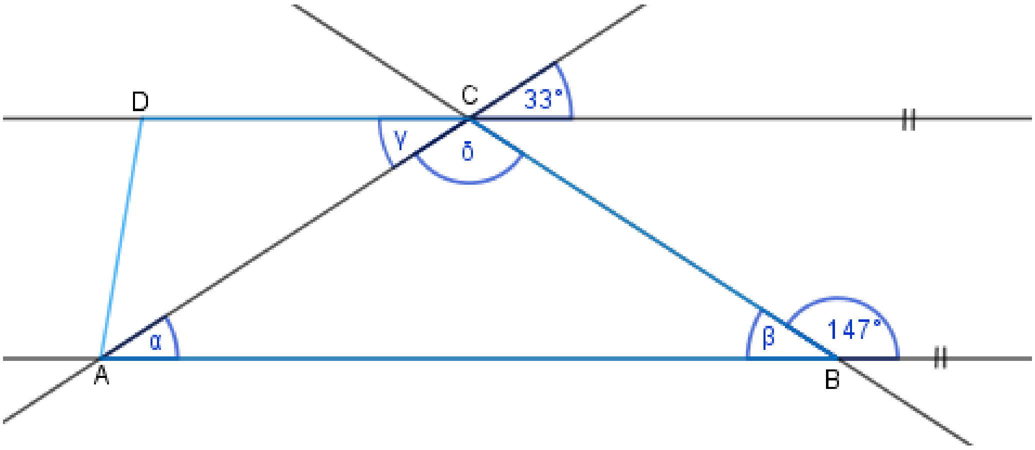
Víme-li velikost úhlu $\boldsymbol{\gamma}$, lze na základě znalosti o vrcholových úhlech určit velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$, tj. platí rovnost $\boldsymbol{\alpha} = \ \boldsymbol{\beta} + \ \boldsymbol{\gamma}$, po dosazení dostáváme

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{75^\circ + 35^\circ}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{110^\circ}$$

<u>Odpověď:</u> Velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ je rovna 110°, velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$ je rovna 75° a velikost úhlu $\boldsymbol{\gamma}$ je rovna 35°.

Příklad 1.6:



Je dán obecný lichoběžník ***ABCD***, dále jsou dány úhly vyznačené na obrázku. Určete velikosti úhlů $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\delta}$.

__**Řešení:**__

Při řešení tohoto příkladu použijeme jak znalost vrcholových a vedlejších úhlů, tak také znalost o střídavých a souhlasných úhlech.

Velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ můžeme určit dvěma způsoby. První způsob je takový, že si uvědomíme, že se jedná o souhlasný úhel s úhlem o velikosti 33°. Tedy úhel $\boldsymbol{\alpha}$ má velikost 33°. Druhý způsob využívá velikosti úhlu $\boldsymbol{\beta}$. Lze si z obrázku všimnout, že v lichoběžníku ***ABCD*** se nachází rovnoramenný trojúhelník ***ABC.*** U rovnoramenných trojúhelníků platí, že velikosti vnitřních úhlů při základně si jsou rovny. V našem případě stačí tedy dopočítat velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$ na základě znalosti velikosti součtu vedlejších úhlů, tj.

$$\mathbf{180° = 147° + \boldsymbol{\beta}}$$

$$\boldsymbol{\beta} \mathbf{= 180° - 147°}$$

$$\boldsymbol{\beta} \mathbf{= 33°}$$

$$\boldsymbol{\alpha = \beta}$$

Velikost úhlu $\boldsymbol{\delta}$ určíme pomocí znalosti hodnoty součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku, tedy:

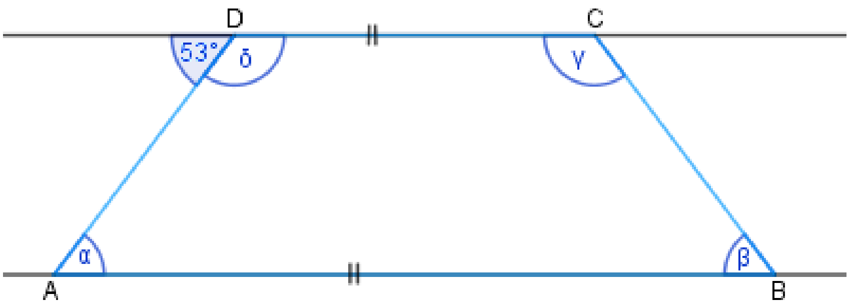
$$\mathbf{180° = \boldsymbol{\alpha + \beta + \delta}}$$

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{= 180° - 33° - 33°}$$

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{= 114°}$$

<u>Odpověď:</u> Úhel $\boldsymbol{\alpha}$ má velikost rovnu 33°. Úhel $\boldsymbol{\delta}$ má velikost rovnu 114°.

Příklad 1.7:



Je dán rovnoramenný lichoběžník ***ABCD***. Urči velikosti úhlů $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\gamma}$.

<u>**Řešení:**</u>

Z vlastností rovnoramenného lichoběžníku víme, že velikosti vnitřních úhlů přiléhajících k téže základně jsou si rovny (v tomto případě jsou si tedy rovny velikosti úhlů $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ a stejně tak si jsou rovny velikosti úhlů $\boldsymbol{\gamma}$ a $\boldsymbol{\delta}$).

K určení velikosti úhlu $\boldsymbol{\gamma}$ stačí dopočítat velikost úhlu $\boldsymbol{\delta}$ jako úhlu vedlejšího k úhlu o velikosti 53°. Tedy $\mathbf{180°} = \mathbf{53°} + \boldsymbol{\delta}$ a dále

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{180°} - \mathbf{53°}$$

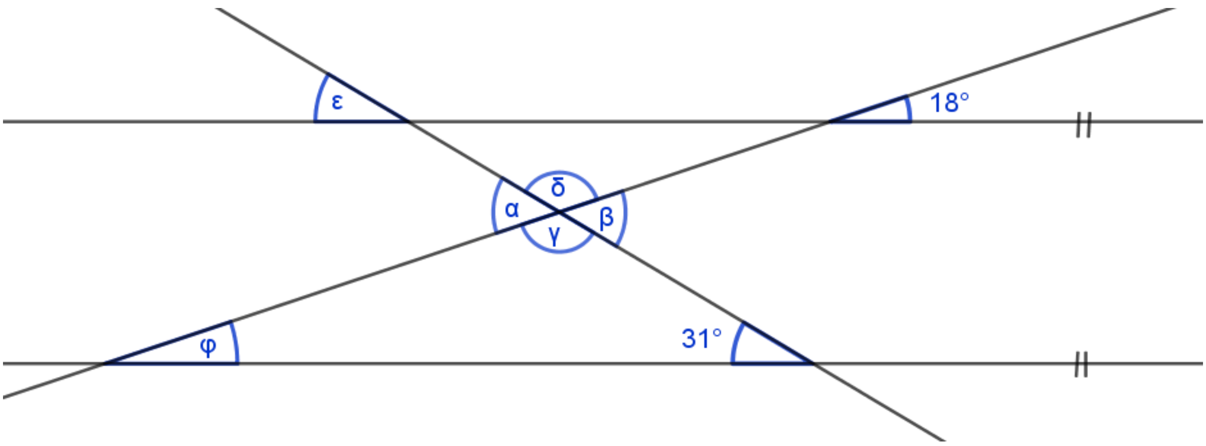
$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{127°}$$

Platí-li, že $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\delta}$, pak $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{127°}.$

Velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ určíme pomocí znalosti o střídavých úhlech. Z obrázku je tedy patrné, že velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ je rovna velikosti úhlu 53°. A protože $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, je velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$ rovna 53°.

<u>Odpověď</u>: Velikost úhlu $\boldsymbol{\beta}$ je rovna 53° a velikost úhlu $\boldsymbol{\gamma}$ je rovna velikosti 127°.

Příklad 1.8:



Na obrázku je znázorněno několik úhlů. Určete velikosti vyznačených úhlů $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ a $\boldsymbol{\delta}$.

__Řešení__:

Ze znalosti o souhlasných úhlech lze určit velikost úhlu φ = 18° a velikost úhlu ε = 31°.

Velikost úhlu γ vypočítáme pomocí znalosti hodnoty součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku, tj.

$$\mathbf{180° = \varphi + 31° + \gamma}$$

$$\mathbf{\gamma = 180° - 18° - 31°}$$

$$\mathbf{\gamma = 131°}$$

Součet velikostí vedlejších úhlů je roven 180°, proto z vypočtené hodnoty velikosti úhlu γ lze spočítat velikost vedlejšího úhlu α, tedy

$$\mathbf{180° = \alpha + \gamma}$$

$$\mathbf{\alpha = 180° - 131°}$$

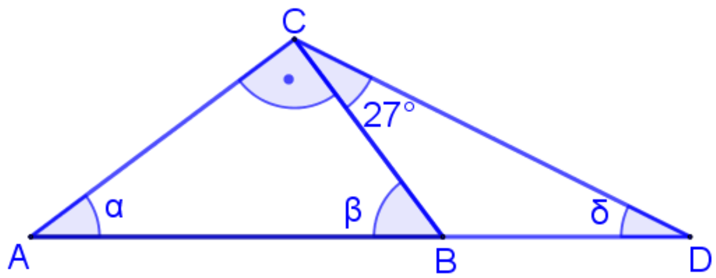
$$\mathbf{\alpha = 49°}$$

__Odpověď__: Úhly γ a δ jsou vrcholové úhly a jejich velikosti jsou rovny 131°. Úhly α a β jsou také vrcholové úhly a každý z nich má velikost rovnu 49°.

2.1.2 Úlohy k procvičení

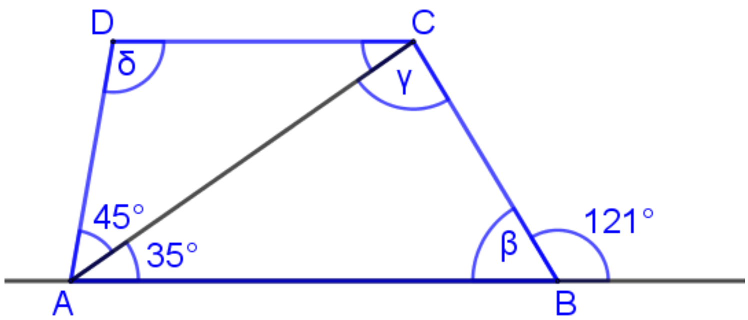
Úloha 1.1:

Na obrázku jsou znázorněny dva trojúhelníky – pravoúhlý trojúhelník ***ABC*** a rovnoramenný trojúhelník ***BDC*** – se společnou stranou ***BC*** a s vyznačenými vnitřními úhly. Určete velikost úhlu α.



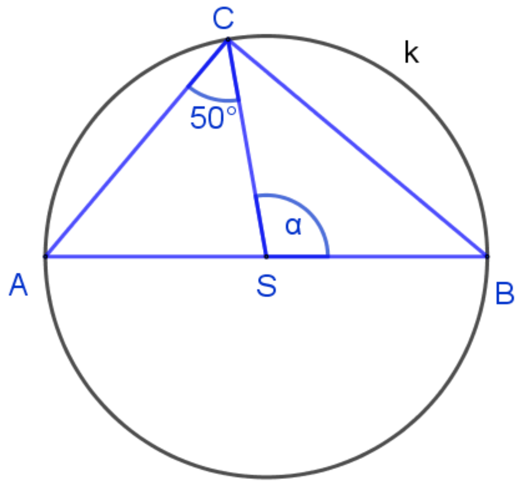
Úloha 1.2:

Je dán lichoběžník ***ABCD***. Určete velikosti úhlů γ a δ.



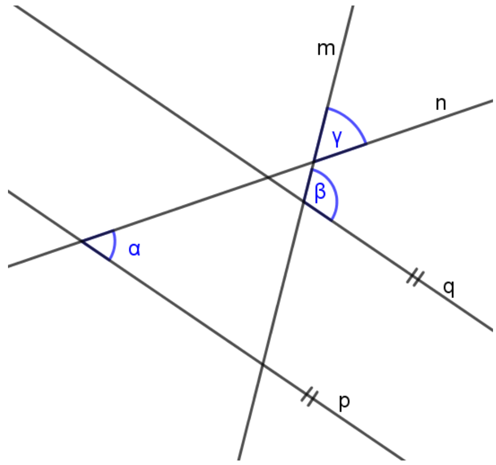
Úloha 1.3:

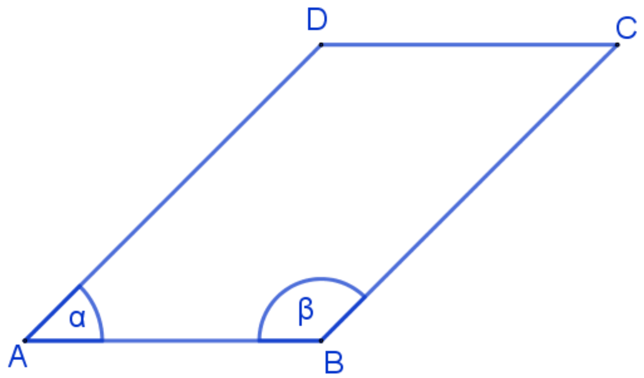
Na kružnici ***k*** se středem ***S*** a s poloměrem ***r*** leží bod ***C***, úsečka ***AB*** je průměrem kružnice ***k***. Úhel ***ACS*** má velikost rovnu 50°. Jakou velikost má úhel ***α***?



Úloha 1.4:

Na obrázku jsou znázorněny dvě navzájem rovnoběžné různé přímky ***p*** a ***q***. Tyto rovnoběžky protínají dvě různoběžné přímky ***m*** a ***n***. Velikost úhlu ***α*** je 53°, velikost úhlu ***β*** je 110°. Jakou velikost má úhel ***γ***?



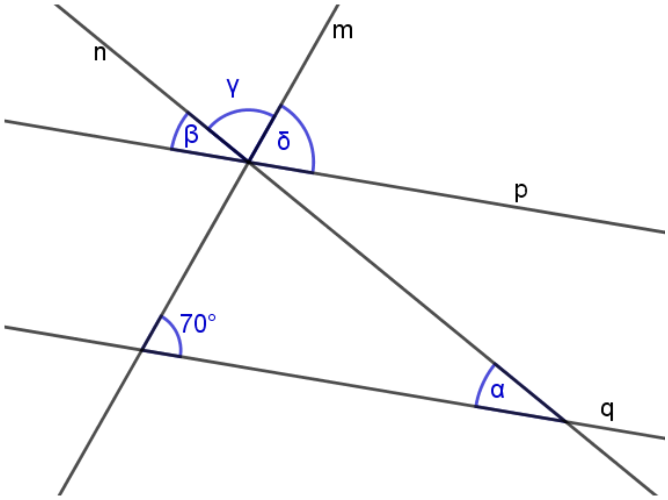


Úloha 1.5:

Je dán kosodélník ***ABCD***. Jaká je velikost úhlu ***β***, víme-li, že úhel ***α*** má velikost rovnu jedné polovině 90°?

Úloha 1.6:

Jsou dány dvě navzájem rovnoběžné různé přímky ***p*** a ***q*** a dvě různoběžné přímky ***m*** a ***n***. Přitom průsečík přímek ***m*** a ***n*** leží na přímce ***p***, viz obrázek. Určete velikosti úhlů β, γ a δ, víme-li, že velikost úhlu α je rovna jedné třetině pravého úhlu.



2.1.2.1 *Výsledky*

Úloha 1.1: Úhel α má velikost rovnu 36°.

Úloha 1.2: Úhel γ má velikost rovnu 86°a úhel δ má velikost rovnu 100°.

Úloha 1.3: Úhel α má velikost rovnu 100°. (K výpočtu použita znalost Thaletovy věty)

Úloha 1.4: Úhel γ má velikost rovnu 57°.

Úloha 1.5: Úhel β má velikost rovnu 135°.

Úloha 1.6: Úhel β má velikost rovnu 30°. Úhel γ má velikost rovnu 80° a úhel δ má velikost rovnu 70°.

2.2 Mnohoúhelníky

Tato kapitola obsahuje 9 vzorových příkladů s komentovaným řešením, příklady jsou zaměřeny na téma mnohoúhelníky, přesněji na trojúhelníky a čtyřúhelníky. Po komentovaných příkladech následuje zadání 5 úloh k samostatnému vypracování, úlohy se také týkají tematického celku mnohoúhelníky. Tyto úlohy by žákům měly upevnit znalosti o trojúhelnících, čtyřúhelnících a jejich vlastnostech. K úlohám jsou i v tomto případě v závěru kapitoly připojeny správné výsledky.

2.2.1 Vzorově řešené příklady

2.2.1.1 *Trojúhelníky a jejich vlastnosti*

Příklad 2.1:

V pravoúhlém trojúhelníku ***ABC*** leží proti přeponě ***c*** úhel γ a proti odvěsnám ***a***, ***b*** po řadě úhly α, β. [18]

Platí: ***a*** = 6 cm, ***c*** = 10 cm.

1. Jakou délku má strana ***b***?
2. Je úhel β větší než úhel γ?
3. Je pravda, že $\alpha + \beta = 90°$?

Řešení:

1. Délku strany ***b*** vypočítáme s užitím Pythagorovy věty. Tu lze zapsat symbolicky pro dané označení pravoúhlého trojúhelníku ***ABC*** ve tvaru $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$. Z uvedené rovnice nejprve vyjádříme druhou mocninu délky strany ***b*** pravoúhlého trojúhelníku ***ABC***, následně postupnými úpravami a po dosazení zadaných hodnot určíme délku strany ***b***, tj.

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 - a^2}$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{10^2 - 6^2}\,\mathrm{cm}}$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{100 - 36}\,\mathrm{cm} = \sqrt{64}\,\mathrm{cm} = 8\ \mathrm{cm}}$$

<u>Odpověď 1</u>.: Strana ***b*** trojúhelníku ***ABC*** má délku 8 cm.

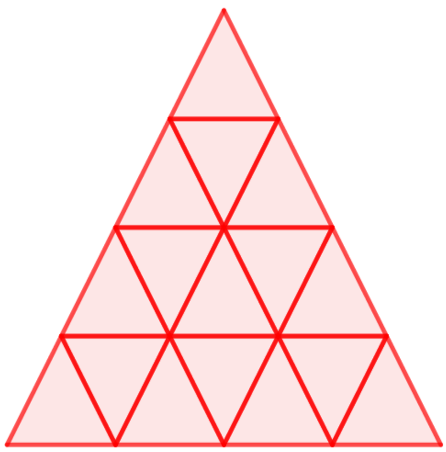
2. Víme-li, že součet velikostí všech tří vnitřních úhlů trojúhelníku je roven přesně 180°, tak není možné sestrojit pravoúhlý trojúhelník, ve kterém by byl další úhel větší než 90°. Pokud by takový úhel (s velikostí větší než 90°) v pravoúhlém trojúhelníku s již uvažovaným pravým úhlem existoval, pak by součet velikostí dvou vnitřních úhlů trojúhelníku byl větší než 180°, což je v rozporu s výše uvedeným tvrzením.

3. Ano, je pravda, že součet velikostí vnitřních úhlů $\boldsymbol{\alpha + \beta}$ v pravoúhlém trojúhelníku s pravým úhlem $\boldsymbol{\gamma}$ = 90° je roven 90°. Uvedené tvrzení lze odůvodnit následujícím způsobem. Jedná-li se o pravoúhlý trojúhelník, pak jeden jeho vnitřní úhel má velikost 90° a z výše uvedeného tvrzení, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je roven 180°, plyne, že

$$\boldsymbol{180° - \gamma = 180° - 90° = 90° = \alpha + \beta.}$$

Příklad 2.2:

Na obrázku je znázorněno několik trojúhelníků. Jaký je jejich přesný počet?



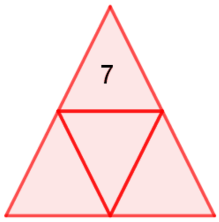
<u>Řešení:</u>

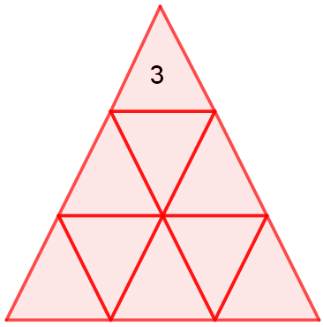
Na obrázku je 16 malých trojúhelníků,

7 trojúhelníků tvořených čtyřmi malými trojúhelníky,

3 větší trojúhelníky tvořené devíti malými trojúhelníky a

1 velký trojúhelník tvořený 16 malými trojúhelníky.





Celkově je tedy na obrázku

$$\mathbf{16 + 7 + 3 + 1 = 27}$$

trojúhelníků.

<u>Odpověď:</u> Na obrázku je celkem 27 trojúhelníků.

Příklad 2.3:

Je dán trojúhelník ***ABC***. Obvod tohoto trojúhelníku je 24 cm. Délka jedné strany je rovna 8 cm, zbývající dvě strany jsou vyjádřeny celým počtem centimetrů. Jaké mohou být délky zbývajících dvou stran?

<u>Řešení:</u>

V tomto příkladě využijeme při řešení tzv. trojúhelníkovou nerovnost. Musí tedy platit současně všechny tři následující nerovnosti, v nichž ***a***, ***b*** a ***c*** představují označení stran daného trojúhelníku ***ABC***:

$$\boldsymbol{a + b > c}$$

$$\boldsymbol{a + c > b}$$

$$\boldsymbol{b + c > a}$$

Obvod trojúhelníku vypočítáme s užitím vzorce $\boldsymbol{o = a + b + c}$.

My známe hodnotu obvodu a délku jedné strany trojúhelníku ***ABC***. Označme např. ***c*** = 8 cm, pak

$$\boldsymbol{o - c} \;=\; \mathbf{24\ cm - 8\ cm} = \boldsymbol{a + b}$$

$$\mathbf{16\ cm} = \boldsymbol{a + b}$$

První možnost, které si můžeme všimnout, jsou hodnoty ***a*** = 8 cm a ***b*** = 8 cm, v tomto případě jsou všechny výše uvedené nerovnosti splněny a vznikne rovnostranný trojúhelník ***ABC***.

Dále hledáme takové celočíselné hodnoty délek stran ***a***, ***b*** trojúhelníku ***ABC***, pro které platí, že jejich součet je roven 16 cm, a pro které též platí výše uvedené trojúhelníkové nerovnosti, tj. získáme následující možnosti:

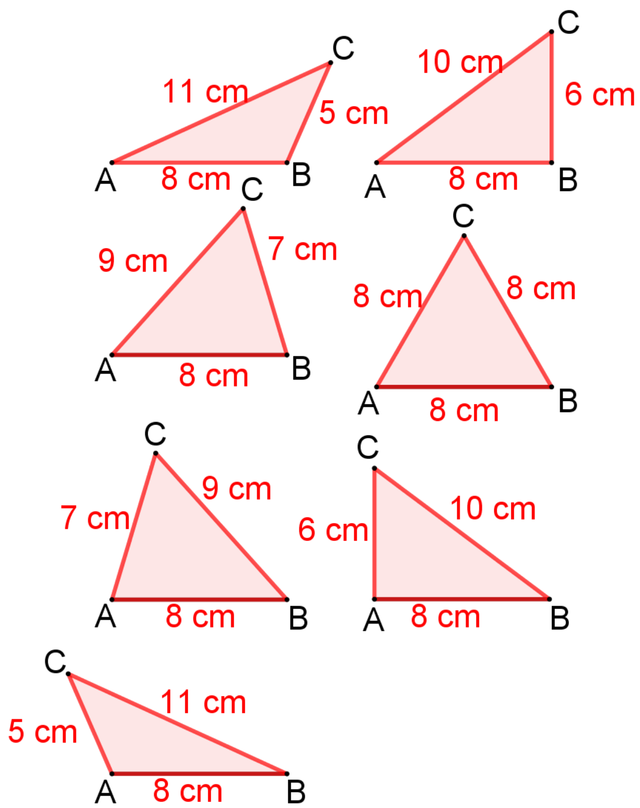
$8 < 7 + 9, 7 < 8 + 9, 9 < 7 + 8$ všechny tyto tři nerovnosti platí současně

$8 < 6 + 10, 6 < 8 + 10, 10 < 6 + 8$ všechny tyto tři nerovnosti platí současně

$8 < 5 + 11, 5 < 8 + 11, 11 < 5 + 8$ všechny tyto tři nerovnosti platí současně

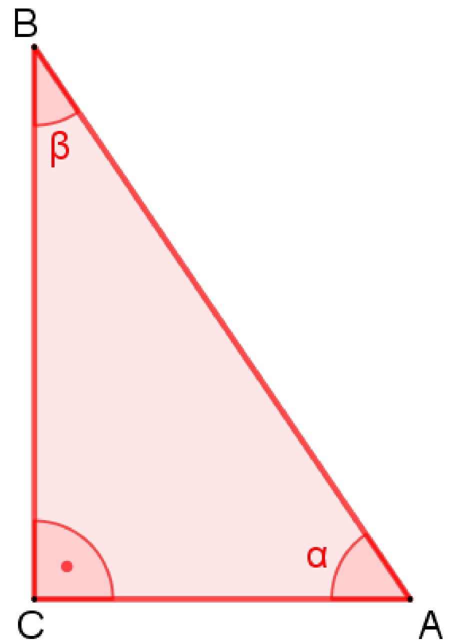
$8 < 4 + 12, 4 < 8 + 12, 12 < 4 + 8$ poslední uvedená nerovnost neplatí

<u>Odpověď:</u> Délky zbývajících stran ***a***, ***b*** trojúhelníku ***ABC*** mohou být po řadě rovny 5 cm a 11 cm, 6 cm a 10 cm, 7 cm a 9 cm, 8 cm a 8 cm, ale i 9 cm a 7 cm, 10 cm a 6 cm, 11 cm a 5 cm. Celkem je tedy možné sestrojit 7 různých trojúhelníků požadovaných vlastností.



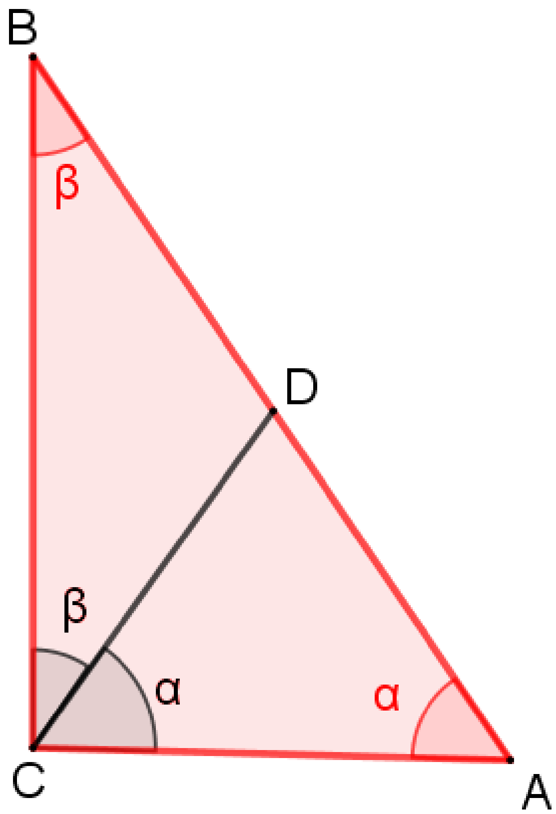
Příklad 2.4:

Na obrázku je znázorněný pravoúhlý trojúhelník ***ABC***. Rozděl tento pravoúhlý trojúhelník na dva rovnoramenné trojúhelníky.



Řešení:

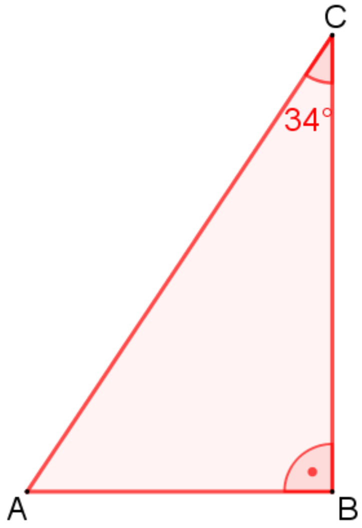
O rovnoramenných trojúhelnících víme, že velikosti vnitřních úhlů při základně si jsou navzájem rovny. Dále víme, že v pravoúhlém trojúhelníku platí, že součet velikostí dvou zbývajících úhlů je roven pravému úhlu, tj. 90°. Z toho plyne, že pokud přeneseme úhel $\boldsymbol{\alpha}$ tak, aby jedním jeho ramenem byla strana ***CA*** trojúhelníku ***ABC*** a jeho vrcholem byl bod ***C***, pak jeho druhé rameno protne přeponu ***AB*** v bodě ***D***, který je vrcholem rovnoramenného trojúhelníku ***ADC*** se základnou ***AC***. Z provedené konstrukce a z výše uvedeného tvrzení, že $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°}$, plyne, že velikost úhlu ***DCB*** je rovna velikosti úhlu β. Tím jsme získali rovnoramenný trojúhelník ***BCD*** se základnou ***BC*** a se shodnými úhly o velikosti úhlu β ležícími při ní.



Rameno ***CD*** úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ je tedy styčným ramenem úhlů ***ACD*** a ***DCB***. A úsečka ***CD*** je společnou stranou rovnoramenných trojúhelníků ***BCD*** a ***ADC***. A protože v rovnoramenném trojúhelníku ***ACD*** jsou délky ramen, tj. úseček ***AD***, ***CD*** stejné, pak jsou s nimi stejně dlouhé i délky ramen ***CD***, ***BD*** v rovnoramenném trojúhelníku ***BCD***. Z toho plyne, že bod ***D*** je středem přepony ***AB***.

Lze shrnout, že vznikly dva rovnoramenné trojúhelníky ***BCD*** a ***ADC***.

Příklad 2.5:



Na obrázku je znázorněn pravoúhlý trojúhelník ***ABC***. Na stranách ***AC*** a ***BC*** tohoto trojúhelníku sestrojte po řadě body ***D*** a ***E*** tak, aby platilo: $|\boldsymbol{AD}| = |\boldsymbol{DE}| = |\boldsymbol{EC}|$.

<u>Řešení:</u>

Ze zadání si lze všimnout, že principem řešení bude nalezení dvou rovnoramenných trojúhelníků ***ADE*** a ***CDE***.

Víme, že v rovnoramenném trojúhelníku jsou vnitřní úhly při základně shodné. Začněme rovnoramenným trojúhelníkem ***CDE*** se základnou ***DC*** a se shodnými rameny ***DE*** a ***EC***. Z uvedeného tvrzení, že v rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly při základně shodné, plyne dále, že $|\sphericalangle$ ***CDE***$|$ = 34°. Odtud dále platí, že velikost úhlu ∢***ADE***, který je vedlejším úhlem k úhlu ∢***CDE***, je rovna $180° - 34° = 146°$. Ze znalosti velikosti tohoto úhlu je možné dále vypočítat velikosti úhlů při základně ***AE*** v rovnoramenném trojúhelníku ***ADE***. Platí tedy, že

$$\mathbf{180° = |\sphericalangle \boldsymbol{DAE}| + |\sphericalangle \boldsymbol{AED}| + |\sphericalangle \boldsymbol{ADE}|}$$

$$\mathbf{180° = 2\,.\,|\sphericalangle \boldsymbol{DAE}| + 146°}$$

$$\mathbf{180° - 146° = 2\,.\,|\sphericalangle \boldsymbol{DAE}|}$$

$$\mathbf{2\,.\,|\sphericalangle \boldsymbol{DAE}| = 34°}$$

$$\mathbf{|\sphericalangle \boldsymbol{DAE}| = \frac{34°}{2}}$$

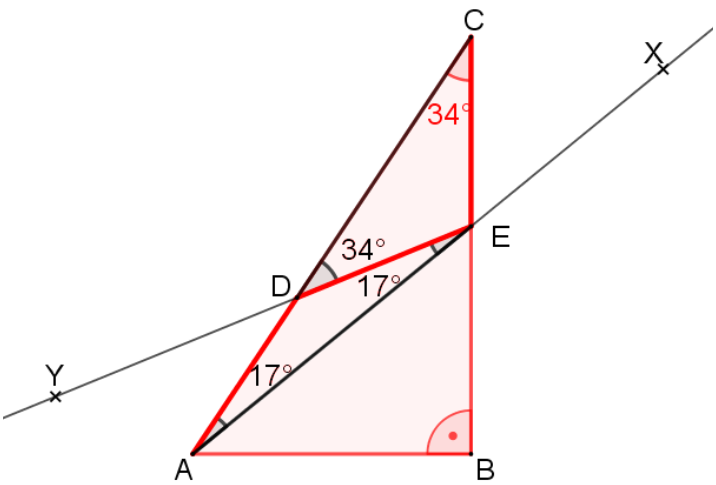
$$\mathbf{|\sphericalangle \boldsymbol{DAE}| = 17°}$$

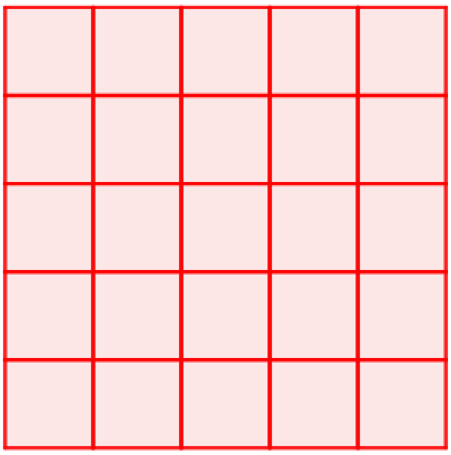
Velikost úhlu při základně v rovnoramenném trojúhelníku ***ADE*** je rovna 17°.

<u>Symbolický zápis konstrukce:</u>

1) $\sphericalangle CAX;\ |\sphericalangle CAX| = 17°$
2) $E;\ E \in \rightarrow AX \cap BC$
3) $\sphericalangle AEY;\ |\sphericalangle AEY| = 17°$
4) $D;\ D \in \rightarrow EY \cap AC$

<u>Konstrukce:</u>





Příklad 2.6:

Na obrázku je znázorněn čtverec, ve kterém je několik menších čtverců. Kolik je na obrázku celkem čtverců?

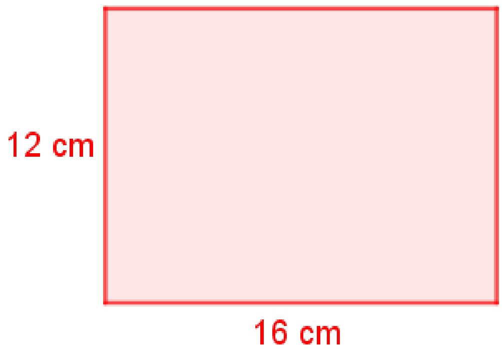
Řešení:

Na obrázku je 25 malých čtverců, 1 velký čtverec (složen z 5 x 5 malých čtverců), 16 čtverců typu 2 x 2 malé čtverce, 9 čtverců typu 3 x 3 malé čtverce a 4 čtverce typu 4 x 4 malé čtverce.

Odpověď: Na obrázku je celkem 55 čtverců.

Příklad 2.7:

Je dán obdélník se stranami délek 12 cm a 16 cm. Jaká je délka strany nejmenšího možného čtverce složeného z těchto obdélníků, když víme, že se žádný z těchto obdélníků nesmí při skládání překrývat? Kolik daných obdélníků k sestavení nejmenšího možného čtverce použijeme?



Řešení:

K řešení použijeme nalezení nejmenšího společného násobku čísel 12 a 16, tj.

$$12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3$$

$$16 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$$

$$n\,(12{,}16) = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 = 48$$

Nalezený nejmenší společný násobek čísel 12 a 16 určuje délku strany hledaného čtverce. Odtud tedy víme, že strana hledaného čtverce je dlouhá 48 cm. Musíme zjistit, jakým způsobem je třeba kombinovat umístění obdélníků daných rozměrů 12 cm a 16 cm do čtverce o délce strany 48 cm. To určíme zjištěním, kolikrát se do délky strany čtverce vejdou délky jednotlivých stran obdélníku, tj.

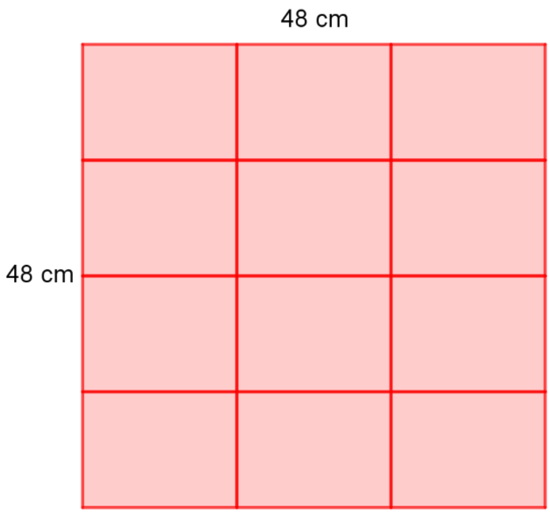
$$x = \frac{48\ \mathrm{cm}}{12\ \mathrm{cm}} = 4,$$

$$y = \frac{48\ \mathrm{cm}}{16\ \mathrm{cm}} = 3\,.$$

Když víme, kolikrát se každá strana daného obdélníku vejde do délky strany hledaného čtverce, stačí k získání výsledného počtu skládaných obdélníků tyto hodnoty spolu vynásobit, tedy

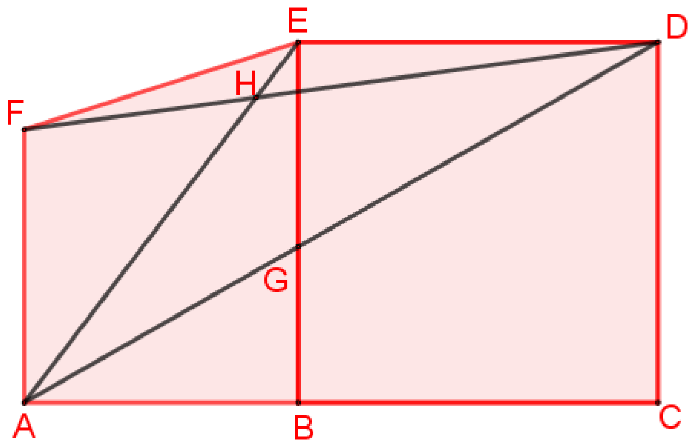
$$x \,.\, y = 3 \,.\, 4 = 12\,.$$

<u>Odpověď:</u> Délka strany nejmenšího možného čtverce je 48 cm. K sestavení čtverce se stranou o délce 48 cm budeme potřebovat 12 obdélníků se stranami o délkách 12 cm a 16 cm.



Příklad 2.8:

Nalezněte a zapište všechny čtyřúhelníky nacházející se na obrázku. Jako vrcholy čtyřúhelníků uvažujte pouze označené body, jako jejich strany pouze vyznačené úsečky nebo jejich části a také strany pětiúhelníku ***ACDEF***.

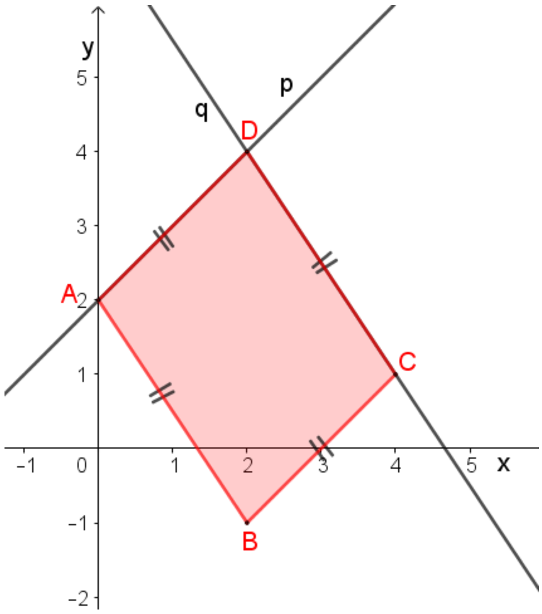


<u>Řešení:</u>

Na obrázku jsou následující čtyřúhelníky: *ABEF*, *BCDE*, *AGEF*, *ACDH*, *ADEF*, *BCDG*, *ACDF*

Příklad 2.9:

Jsou dány tři vrcholy kosodélníku ***ABCD***. Tyto body jsou dány pomocí souřadnic, tedy ***A*** [0; 2], ***B*** [2; -1] a ***C*** [4; 1]. Určete celočíselné souřadnice vrcholu ***D*** kosodélníku ***ABCD***.



Řešení:

Souřadnice vrcholu ***D*** jsou [2; 4]. K tomuto výsledku lze dojít např. pomocí geometrické konstrukce, kterou můžeme symbolicky zapsat následovně:

1. *A* [0; 2], *B* [2; -1], *C* [4; 1]
2. *AB*, *BC*
3. *p*; *p* II *BC*, *A* ∈ *p*
4. *q*; *q* II *AB*, *C* ∈ *q*
5. *D*; *D* ∈ *p* ∩ *q*
6. kosodélník *ABCD*

2.2.2 Úlohy k procvičení

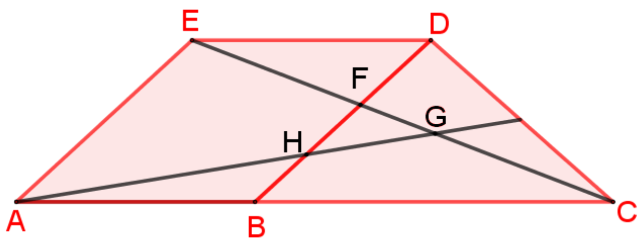
Úloha 2.1:

Je dán trojúhelník ***KLM***. Délka strany ***k*** je rovna 7 cm, délka strany ***l*** je rovna 3 cm. Jaká může být délka zbývající strany ***m*** v celých číslech? Zapište všechny možnosti.

Úloha 2.2:

Je dán obdélník se stranami délek 16 cm a 20 cm. Kolik daných obdélníků použijeme k sestavení nejmenšího možného čtverce, když víme, že se žádný z těchto obdélníků nesmí překrývat?

Úloha 2.3:



Na obrázku je znázorněný rovinný útvar, který se skládá z kosočtverce ***ABDE*** a rovnoramenného trojúhelníku ***BCD***. Uvnitř tohoto rovinného útvaru jsou zobrazeny tři body ***F***, ***G***, ***H***. Nalezněte a zapište všechny trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou body ***A*** – ***H*** a jejichž stranami jsou buď strany daného kosočtverce ***ABDE***, rovnoramenného trojúhelníku ***BCD***, anebo vyznačené úsečky či jejich části.

Úloha 2.4:

Jsou dány tři vrcholy kosodélníku ***KLMN***. Tyto body jsou dány pomocí jejich souřadnic, tj. ***K*** [2; -5], ***L*** [6; -3] a ***M*** [6; 2]. Určete souřadnice z vrcholu ***N*** kosodélníku ***KLMN***.

Úloha 2.5:

Štafle ve tvaru písmene ***A*** jsou v nerozloženém stavu dlouhé 5 m. Do jaké výšky budou štafle dosahovat, pokud roztáhneme obě části žebříku tak, že budou na zemi od sebe vzdáleny 6 m?

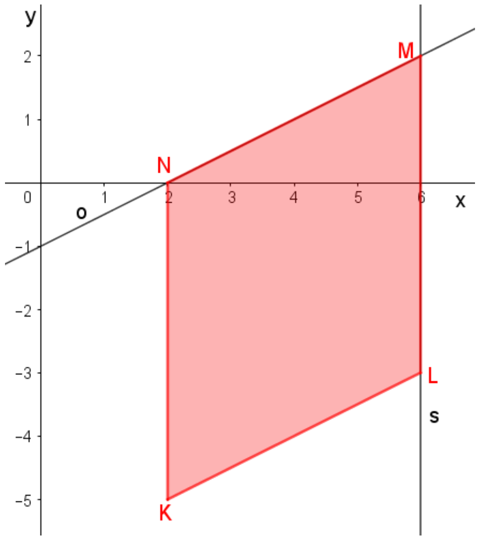
2.2.2.1 *Výsledky*

Úloha 2.1: Strana ***m*** může nabývat pěti různých celočíselných hodnot, a to 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm a 9 cm.

Úloha 2.2: K sestavení nejmenšího možného čtverce s délkou strany 80 cm budeme potřebovat 20 obdélníků se stranami 16 cm a 20 cm.

Úloha 2.3: V rovinném útvaru znázorněném na obrázku se nachází 10 různých trojúhelníků, a to trojúhelníky: *ABH*, *ACG*, *ACE*, *AEG*, *BCD*, *CDE*, *BCF*, *CDF*, *DEF*, *FGH*.

Úloha 2.4: Souřadnice bodu ***N*** jsou [2; 0] (viz obrázek).



Úloha 2.5: Žebřík bude dosahovat do výšky 4 metrů.

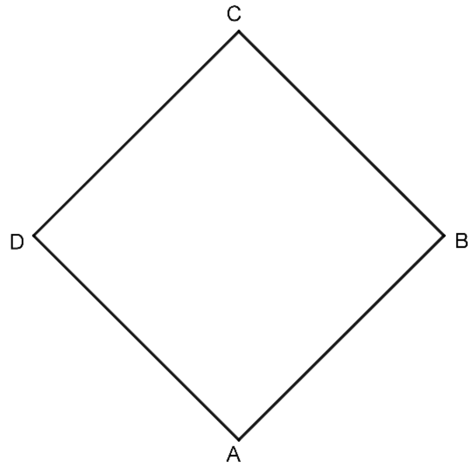
2.3 Konstrukční úlohy

Konstrukční úlohy jsou jedny z nejčastěji se vyskytujících úloh z geometrie ve státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy. V této kapitole se tedy zaměříme na konstrukční úlohy různých rovinných geometrických obrazců. Při jejich řešení budou využity nejen vlastnosti hledaných rovinných geometrických obrazců, ale i vlastnosti a principy některých shodných rovinných zobrazení. V této kapitole je vloženo 9 vzorově řešených konstrukčních příkladů a také 6 úloh k samostatnému procvičování. Vzorová řešení příkladů, stejně jako výsledky úloh k procvičování obsahují kromě slovně komentovaných řešení výsledné konstrukce a také symbolické zápisy konstrukcí, které mohou sloužit k lepšímu porozumění provedených konstrukcí.

2.3.1 Vzorově řešené příklady

Příklad 3.1:

V obrázku sestrojte střed ***S*** daného čtverce ***ABCD***. Vrcholem ***B*** veďte přímku ***p*** rovnoběžnou s úhlopříčkou ***AC***. Napište symbolický zápis konstrukce a konstrukci narýsujte. [17]



Řešení:

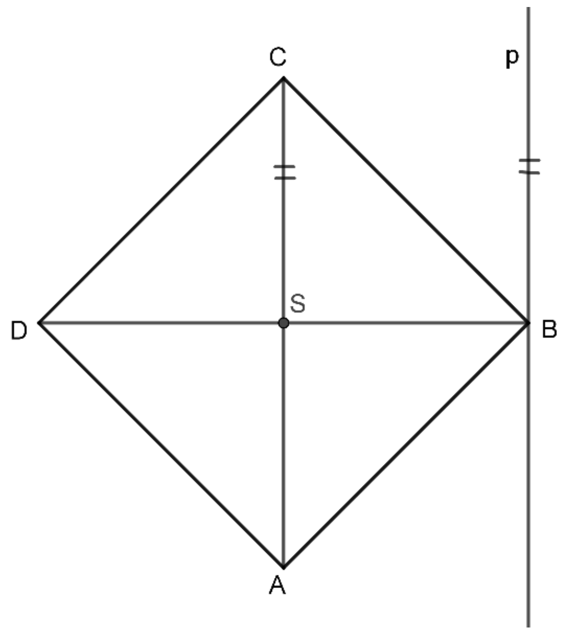
Víme, že střed ***S*** čtverce ***ABCD*** leží v průsečíku jeho úhlopříček ***AC***, ***BD***. Sestrojíme tedy úhlopříčky ***AC*** a ***BD***. V místě, kde se úhlopříčky ***AC***, ***BD*** protnou, vznikne střed ***S*** čtverce ***ABCD***.

Sestrojíme přímku ***p*** procházející bodem ***B*** a rovnoběžnou s úhlopříčkou ***AC***.

Symbolický zápis konstrukce:

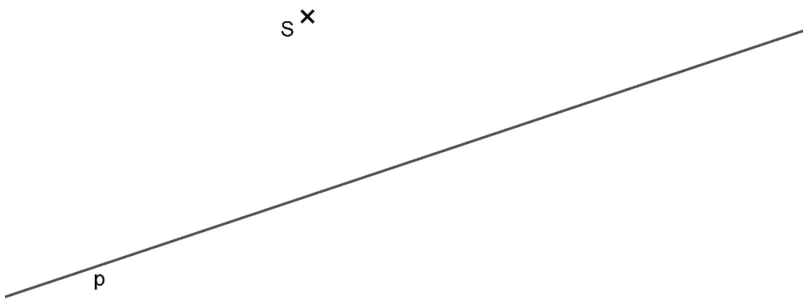
1) *AC*
2) *BD*
3) *S*; *S* ∊ *AC* ∩ *BD*
4) *p*; *p* II *AC*, *B* ∊ *p*

Konstrukce:



Příklad 3.2:

V obrázku sestrojte čtverec ***ABCD***, který má střed v daném bodě ***S***, vrchol ***B*** na přímce ***p*** a úhlopříčku ***AC*** rovnoběžnou s danou přímkou ***p***. [17]



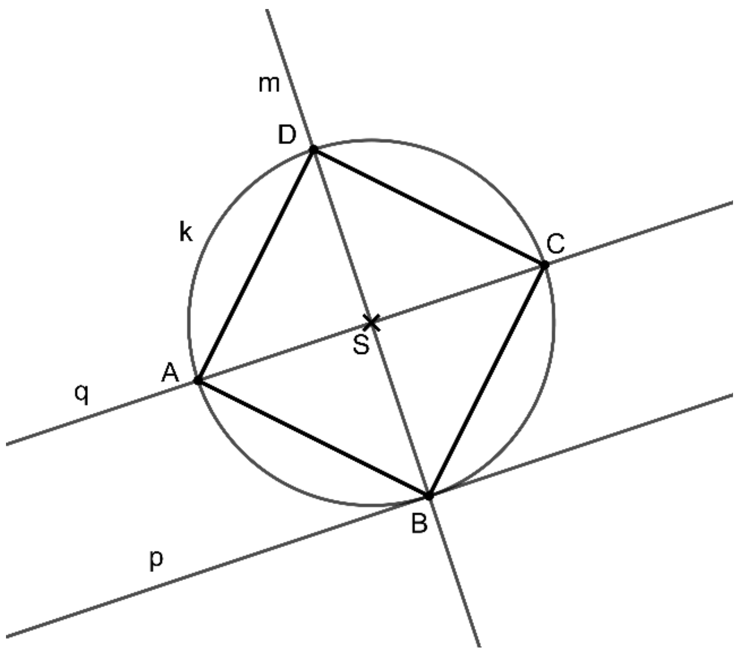
Řešení:

Z vlastností čtverce víme, že úhlopříčky jsou úsečky, které spojují dva protilehlé vrcholy čtverce, že se úhlopříčky protínají ve středu čtverce, že se navzájem půlí a že jsou k sobě navzájem kolmé. Díky těmto vlastnostem můžeme čtverec na základě daného zadání zkonstruovat.

Symbolický zápis konstrukce:

1) m; $m \perp p$, $S \in m$
2) q; $q \parallel p$, $S \in q$
3) B; $B \in p \cap m$
4) k; $k\ (S;\ |SB|)$
5) D; $D \in k \cap m$, $D \not\equiv B$
6) A, C; $A, C \in q \cap k$, $A \not\equiv C$
7) $\square\ ABCD$

Konstrukce:

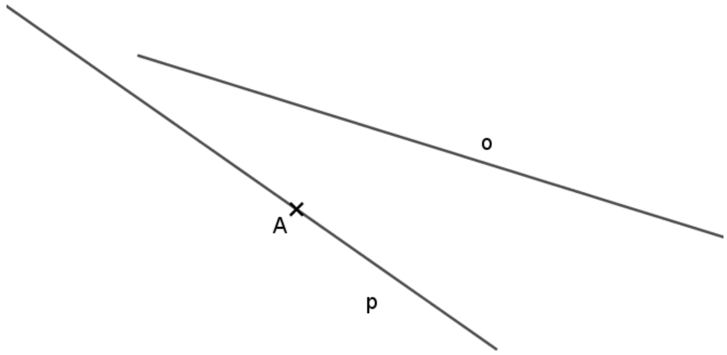


Příklad 3.3:

V rovině leží různoběžky ***o***, ***p*** a bod ***A*** na přímce ***p***.

1. Sestrojte bod ***B***, který je obrazem bodu ***A*** v osové souměrnosti s osou ***o***.
2. Sestrojte přímku ***q***, která je obrazem přímky ***p*** v osové souměrnosti s osou ***o***.

Napište symbolický zápis konstrukce a konstrukci narýsujte. [18]



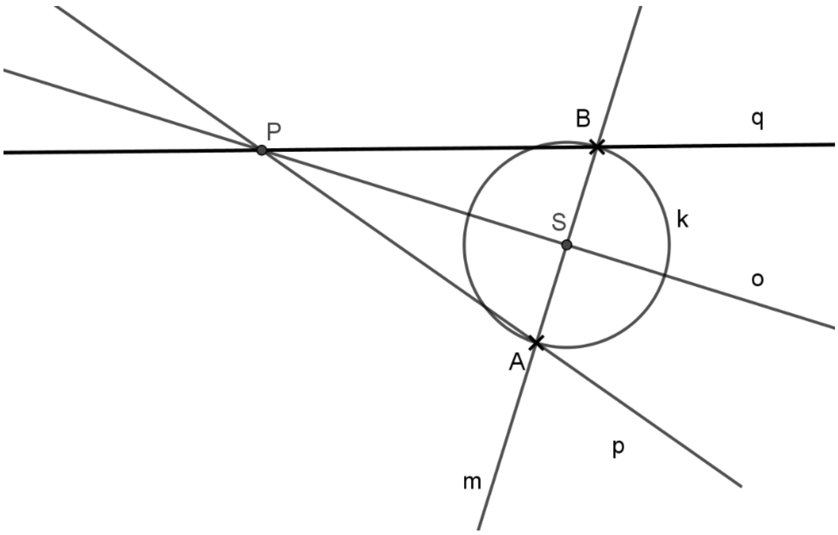
<u>Řešení:</u>

V tomto příkladě využijeme v konstrukci poznatky o osové souměrnosti. Pokud bod ***A*** leží mimo osu souměrnosti ***o***, sestrojíme jeho obraz ***B*** tak, aby platilo, že **|*AS*|** = **|*SB*|** a že body ***A***, ***B*** leží na přímce ***m*** kolmé k ose souměrnosti ***o***. Leží-li bod ***P*** na ose souměrnosti ***o***, zobrazí se sám na sebe, tj. je samodružný.

<u>Symbolický zápis konstrukce:</u>

1) m; $m \perp o$, $A \in m$
2) S; $S \in o \cap m$
3) k; $k\ (S;\ |SA|)$
4) B; $B \in m \cap k$, $B \not\equiv A$
5) P; $P \in o \cap p$
6) q; $q \equiv \leftrightarrow BP$

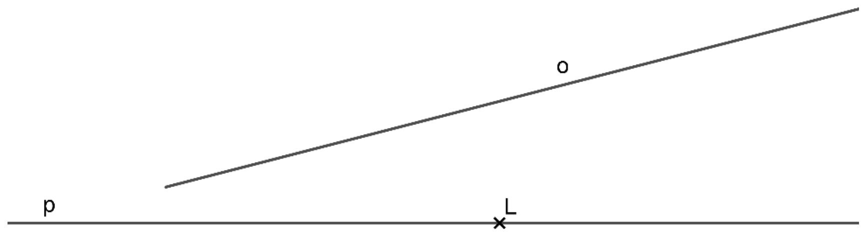
<u>Konstrukce:</u>



Příklad 3.4:

V rovině leží různoběžky ***o***, ***p*** a bod ***L*** na přímce ***p***. Bod ***L*** je vrchol rovnoramenného trojúhelníku ***KLM***, přímka ***o*** je osa ramene ***LM*** a základna ***KL*** leží na přímce ***p***.

Sestrojte chybějící vrcholy ***K***, ***M*** rovnoramenného trojúhelníku ***KLM***, trojúhelník narýsujte a napište symbolický zápis konstrukce.



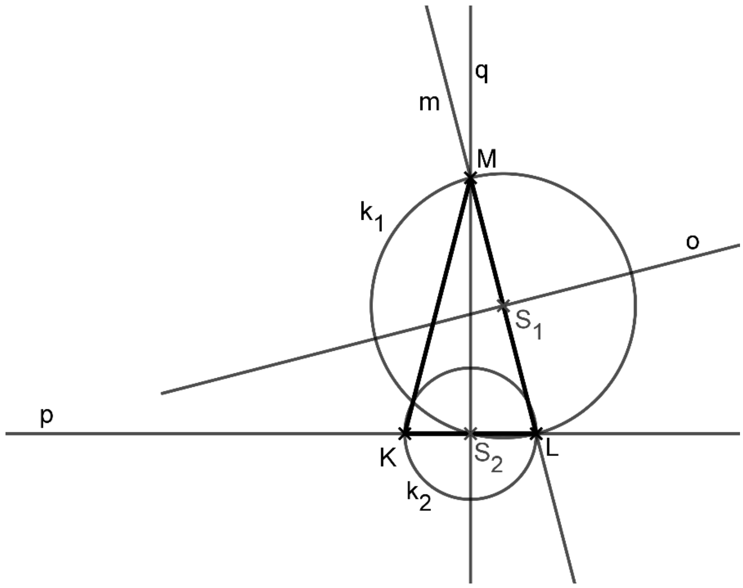
Řešení:

O rovnoramenných trojúhelnících víme, že mají dvě strany stejně dlouhé. Tyto strany nazýváme ramena rovnoramenného trojúhelníku. Další důležitou vlastností rovnoramenných trojúhelníků je, že jsou osově souměrné podle osy jejich základny. Osa základny rozdělí rovnoramenný trojúhelník na dva nepřímo shodné pravoúhlé trojúhelníky.

Symbolický zápis konstrukce:

1) $m;\ m \perp o,\ L \in m$
2) $S_1;\ S_1 \in o \cap m$
3) $k_1;\ k_1(S_1;\ |S_1L|)$
4) $M;\ M \in k_1 \cap m,\ M \not\equiv L$
5) $q;\ q \perp p,\ M \in q$
6) $S_2;\ S_2 \in q \cap p$
7) $k_2;\ k_2(S_2;\ |S_2L|)$
8) $K;\ K \in k_2 \cap p,\ K \not\equiv L$
9) ΔKLM

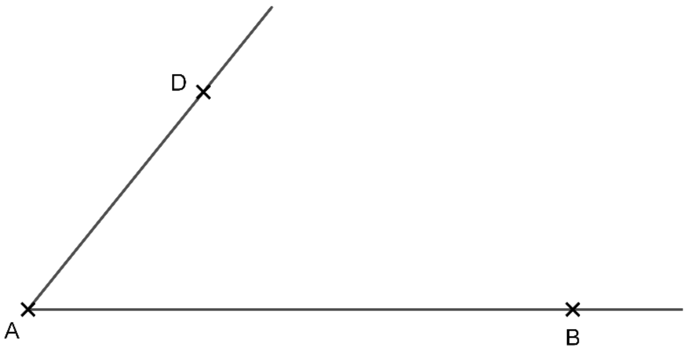
Konstrukce:



Příklad 3.5:

V rovině leží body ***A***, ***B*** a ***D***. Body ***A***, ***B*** a ***D*** jsou vrcholy pravoúhlého lichoběžníku ***ABCD***.

Sestrojte chybějící vrchol ***C*** lichoběžníku ***ABCD***, lichoběžník narýsujte a napište symbolický zápis konstrukce. [19]



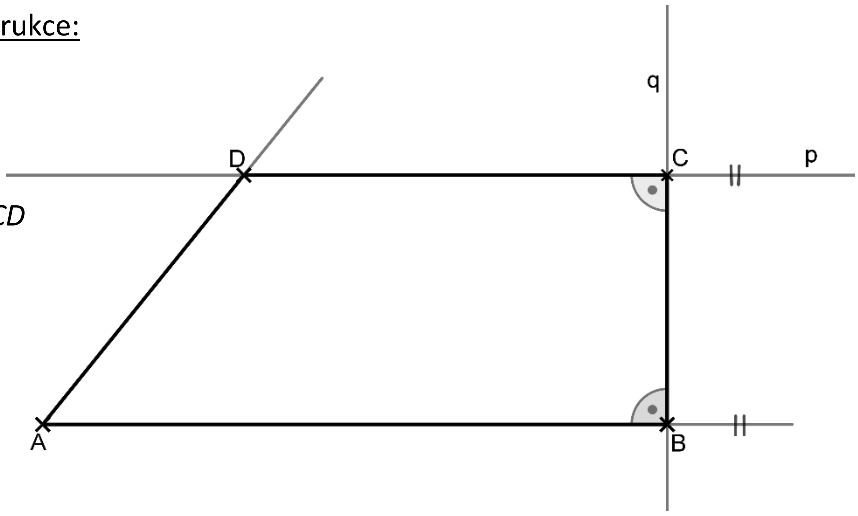
<u>Řešení:</u>

O pravoúhlém lichoběžníku víme, že jedno jeho rameno je kolmé k oběma základnám. Této skutečnosti v konstrukci využijeme.

<u>Symbolický zápis konstrukce:</u>

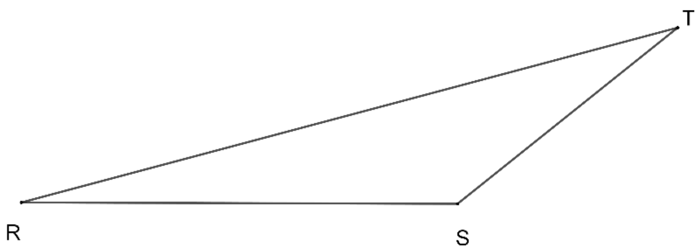
1) q; $q \perp AB$, $B \in q$
2) p; $p \parallel AB$, $D \in p$
3) C; $C \in p \cap q$
4) lichoběžník $ABCD$

<u>Konstrukce:</u>



Příklad 3.6:

V rovině leží trojúhelník ***RST***. Sestrojte obraz $\boldsymbol{R_1S_1T_1}$ trojúhelníku ***RST*** ve středové souměrnosti se středem ***S***. Všechny vrcholy trojúhelníku $\boldsymbol{R_1S_1T_1}$ označte a napište symbolický zápis konstrukce. [20]



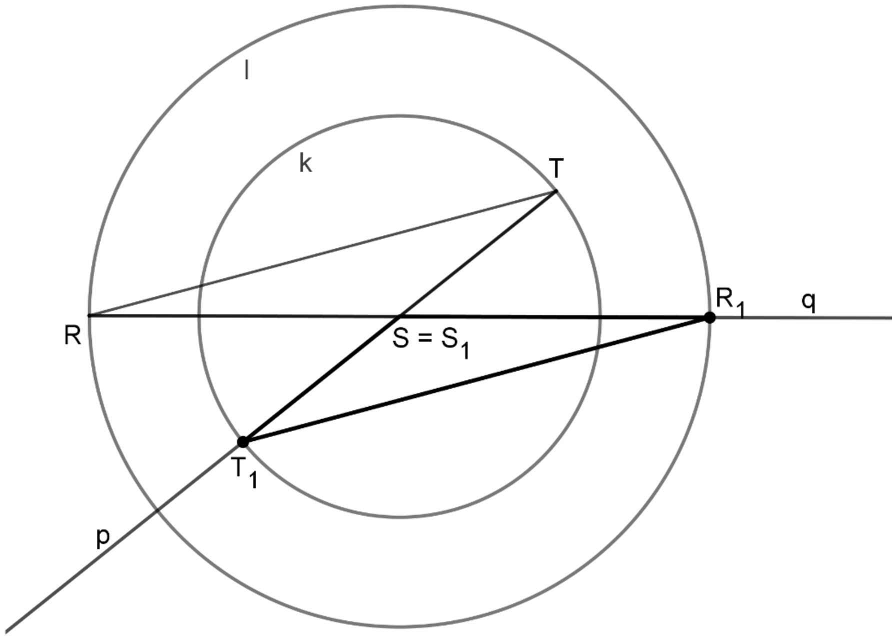
Řešení:

Z principů středové souměrnosti víme, že obraz trojúhelníku ***RST*** bude souměrně sdružen podle středu ***S***. Z toho plyne, že bod $\boldsymbol{S_1}$ bude splývat se svým vzorem, tj. se středem ***S*** dané středové souměrnosti. Vzdálenost bodu $\boldsymbol{T_1}$ od středu ***S*** bude stejná jako vzdálenost bodu ***T*** od středu ***S***, přitom bod $\boldsymbol{T_1}$ bude ležet na polopřímce ***TS***. Analogický postup platí i pro sestrojování obrazu $\boldsymbol{R_1}$ bodu ***R***.

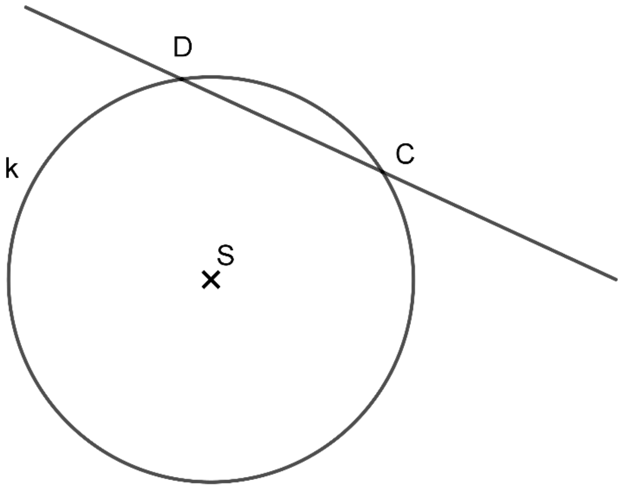
Symbolický zápis konstrukce:

1) $p; \rightarrow TS \equiv p$
2) $q; \rightarrow RS \equiv q$
3) $S_1; S \equiv S_1$
4) $k; k\,(S; |ST|)$
5) $T_1; T_1 \in k \cap p$
6) $l; l\,(S; |SR|)$
7) $R_1; R_1 \in l \cap q$
8) $\triangle\, R_1S_1T_1$

Konstrukce:



Příklad 3.7:



Kružnici ***k*** se středem ***S*** a poloměrem ***r*** protíná přímka ve dvou různých bodech ***C*** a ***D***. Body ***C***, ***D*** jsou vrcholy rovnoramenného lichoběžníku ***ABCD***. Všechny čtyři vrcholy tohoto lichoběžníku leží na kružnici ***k***. Vzdálenost chybějících vrcholů ***A***, ***B*** od přímky ***CD*** je rovna poloměru ***r*** = |***SC***| kružnice ***k***. [20]

1. Sestrojte vrcholy ***A***, ***B*** rovnoramenného lichoběžníku ***ABCD*** a lichoběžník narýsujte.
2. Sestrojte osu souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku ***ABCD*** (pokud existuje) a označte ji ***o***.
3. Sestrojte výšku lichoběžníku ***ABCD*** spuštěnou z vrcholu ***D*** a označte ji ***v***.
4. Napište symbolický zápis všech výše uvedených konstrukcí.

Řešení:

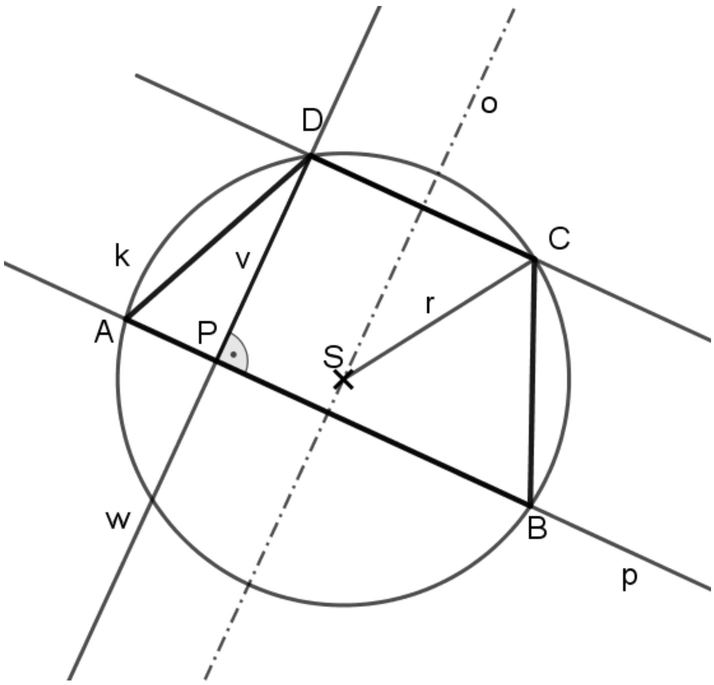
Ze zadání víme, že vzdálenost přímky ***AB*** od přímky ***CD*** je rovna velikosti poloměru kružnice ***k***, proto narýsujeme přímku ***p*** rovnoběžnou s přímkou ***CD*** a vzdálenou od ní o velikost poloměru ***r***. V místech, kde rovnoběžka ***p*** protne kružnici ***k***, vzniknou hledané body ***A***, ***B***.

Symbolický zápis konstrukce:

1. r; $r = |SC|$
2. p; $p \parallel CD$; $|p, CD| = r$
3. A, B; $A, B \in p \cap k$; $A \not\equiv B$
4. lichoběžník $ABCD$
5. w; $w \perp CD$, $D \in w$
6. P; $P \in w \cap p$
7. v; $v = |PD|$
8. o; $o \perp CD$, $S \in o$

o je hledaná osa souměrnosti úsečky ***CD***, ale i rovnoramenného lichoběžníku ***ABCD***.

Konstrukce:

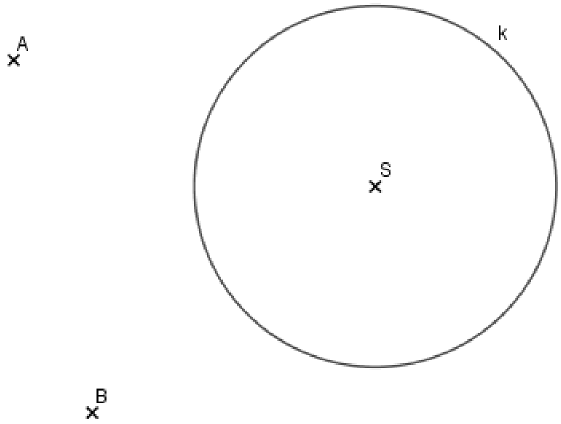


Příklad 3.8:

V rovině je dána kružnice ***k*** se středem ***S*** a dále jsou dány body ***A***, ***B*** ležící vně této kružnice.

1. Na kružnici ***k*** sestrojte takové body ***D***, aby vzdálenost bodů ***A***, ***D*** byla rovna ¾ vzdálenosti bodů ***A***, ***B***.
2. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ***ABC*** s pravým úhlem u vrcholu ***C*** tak, aby bod ***C*** ležel na kružnici ***k***.

U obou podúloh napište symbolické zápisy konstrukce.

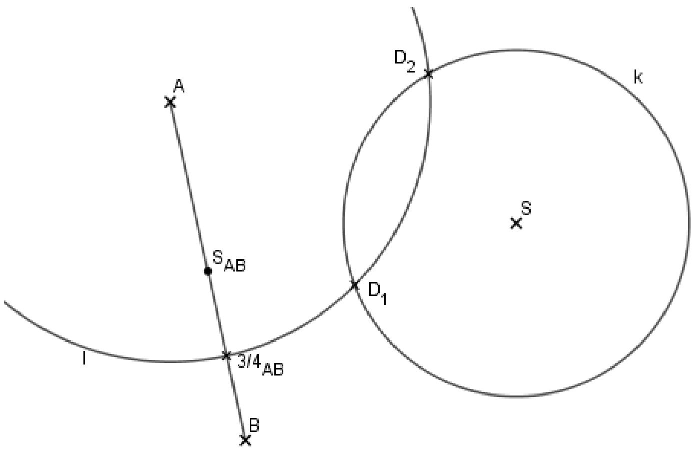


1.

<u>Symbolický zápis konstrukce</u>:

1. S_{AB}; $S_{AB} \in AB$, $|AS_{AB}| = |S_{AB}B|$
2. $3/4_{AB}$; $3/4_{AB} \in S_{AB}B$, $|S_{AB}3/4_{AB}| = |3/4_{AB}B|$
3. l; $l\,(A; |A\ 3/4_{AB}|)$
4. D_1, D_2; $D_1, D_2 \in k \cap l$, $D_1 \not\equiv D_2$

<u>Konstrukce:</u>

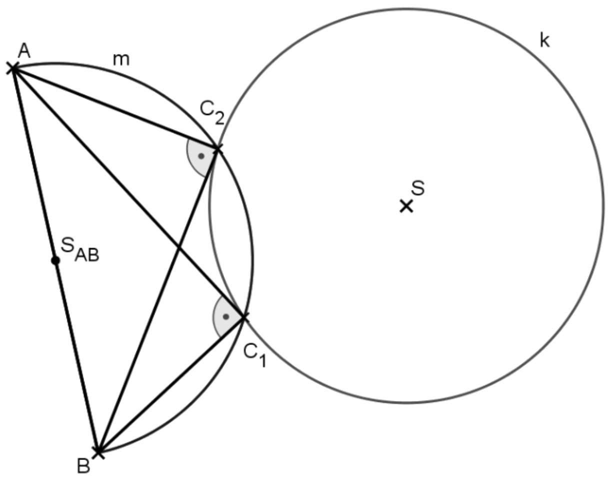


2.

<u>Symbolický zápis konstrukce</u>:

1. S_{AB}; $S_{AB} \in AB$, $|AS_{AB}| = |S_{AB}B|$
2. m; $m\,(S_{AB}; |AS_{AB}|)$
3. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in k \cap m$, $C_1 \not\equiv C_2$
4. $\triangle ABC_1$; $\triangle ABC_2$

<u>Konstrukce:</u>



Příklad 3.9

V rovině jsou dány body ***A***, ***B*** a ***Y***, které neleží v přímce, viz obrázek.

1. Na polopřímce ***BY*** sestrojte bod ***C*** tak, aby body ***A***, ***B***, ***C*** tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníku se základnou ***AB***. Trojúhelník ***ABC*** narýsujte.
2. Sestrojte osu souměrnosti ***p*** rovnoramenného trojúhelníku ***ABC***.

Napište symbolický zápis konstrukce a konstrukci narýsujte. [18]

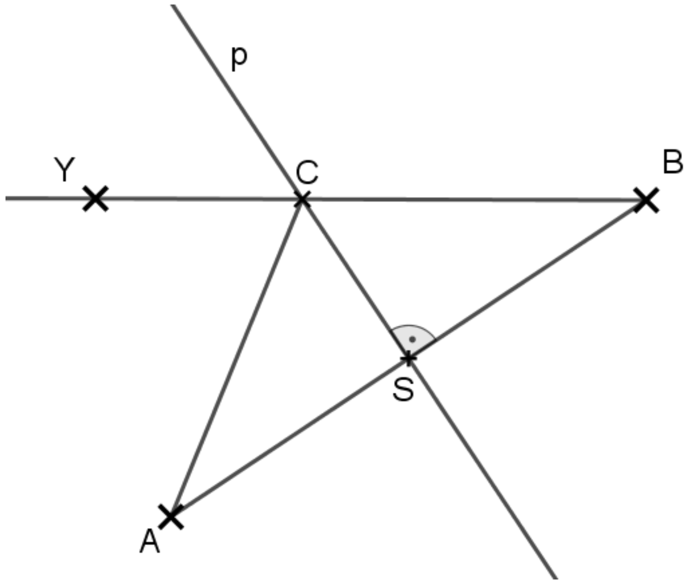
Řešení:

Symbolický zápis konstrukce:

1) $\rightarrow BY$
2) AB
3) S; $S \in AB$; $|SA| = |SB|$
4) p; $p \perp AB$, $S \in p$
5) C; $C \in p \cap \rightarrow BY$
6) $\triangle\ ABC$

Přímka ***p*** je osa souměrnosti rovnoramenného trojúhelníku ***ABC***.

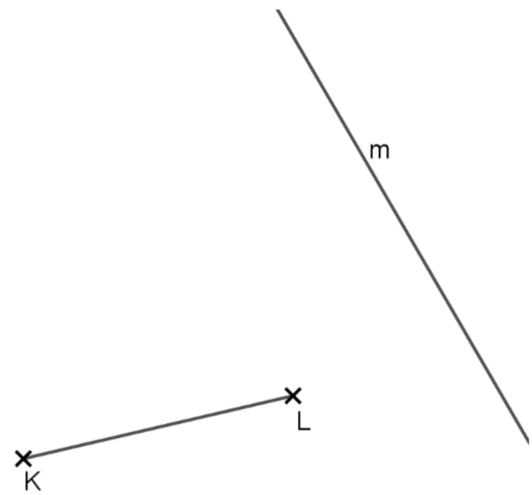
Konstrukce:



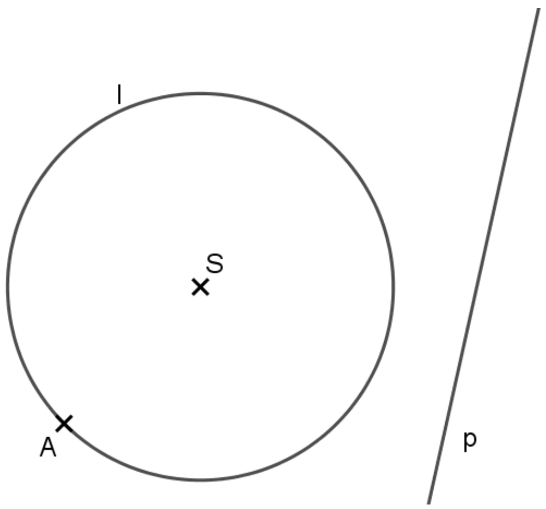
2.3.2 Úlohy k procvičení

Úlohy 3.1:

V rovině jsou dány úsečka ***KL*** a přímka ***m***. Sestrojte trojúhelník ***KLM*** tak, aby velikost vnitřního úhlu u vrcholu ***K*** v trojúhelníku ***KLM*** byla rovna 56° a aby strana ***LM*** byla rovnoběžná s přímkou ***m***. Napište symbolický zápis konstrukce.



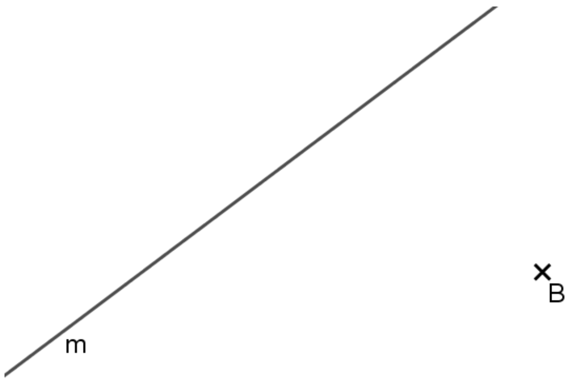
Úloha 3.2:



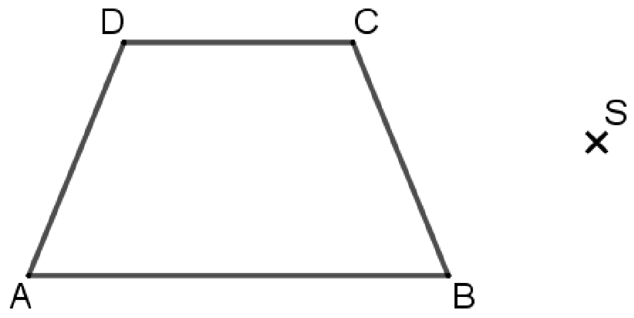
V rovině je dána kružnice ***l*** se středem ***S*** a s poloměrem ***r***. Na této kružnici leží bod ***A***. Přímka ***p*** je nesečnou kružnice ***l***, viz obrázek. Sestrojte trojúhelník ***ABC*** tak, aby body ***B*** a ***C*** ležely na kružnici ***l***. Dále musí platit, že přímka ***AB*** je kolmá k přímce ***p***, a také musí platit, že přímka ***AC*** je rovnoběžná s přímkou ***p***. Zapište symbolický zápis konstrukce trojúhelníku ***ABC***.

Úloha 3.3:

V rovině jsou dány přímka ***m*** a bod ***B***, který neleží na přímce ***m***. Sestrojte čtverec ***ABCD*** tak, aby body ***A***, ***C*** ležely na přímce ***m***. Zapište symbolický zápis konstrukce.



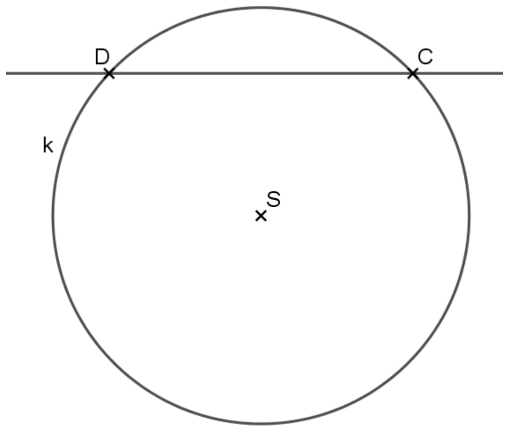
Úloha 3.4:



V rovině jsou dány rovnoramenný lichoběžník ***ABCD*** a bod ***S***, viz obrázek. Sestrojte obraz $\boldsymbol{A_1B_1C_1D_1}$ rovnoramenného lichoběžníku ***ABCD*** ve středové souměrnosti se středem ***S***. Všechny vrcholy lichoběžníku $\boldsymbol{A_1B_1C_1D_1}$ označte a napište symbolický zápis konstrukce.

Úloha 3.5:

Kružnici ***k*** se středem ***S*** a poloměrem ***r*** protíná přímka ve dvou různých bodech ***C*** a ***D***. Body ***C***, ***D*** jsou vrcholy rovnoramenného lichoběžníku ***ABCD***. Všechny čtyři vrcholy tohoto lichoběžníku leží na kružnici ***k***. Vzdálenost bodu ***A*** od bodu ***D*** je rovna velikosti poloměru ***r*** kružnice ***k***. Narýsujte všechny možnosti a zapište symbolický zápis konstrukce.

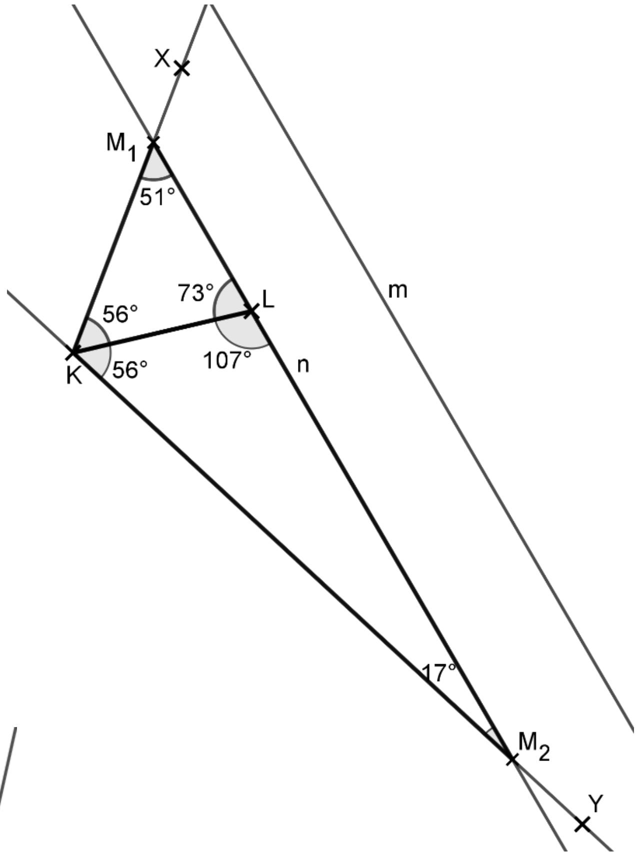


Úloha 3.6:

Sestrojte kosočtverec ***ABCD***, jestliže známe délku jeho strany ***CD***, tj. |***CD***| = 6 cm, a výšku kosočtverce ***v*** = 4 cm.

2.3.2.1 *Výsledky*

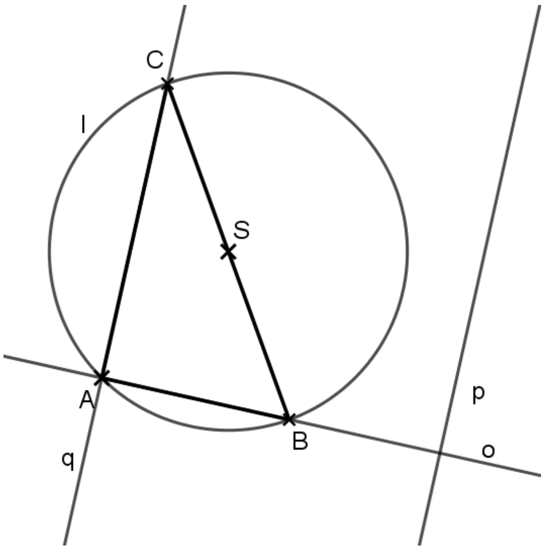
Úloha 3.1:



Symbolický zápis konstrukce:

1. n; $n \parallel m$; $L \in n$
2. $\sphericalangle LKX$; $|\sphericalangle LKX| = 56°$
3. $\sphericalangle LKY$; $|\sphericalangle LKY| = 56°$
4. M_1; $M_1 \in n \cap \rightarrow KX$
5. M_2; $M_2 \in n \cap \rightarrow KY$
6. $\triangle\ KLM_1$
7. $\triangle\ KLM_2$

Úloha 3. 2:



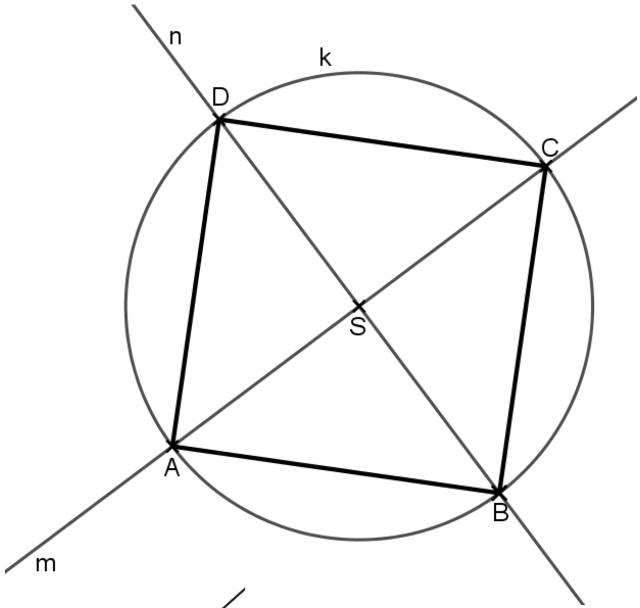
Symbolický zápis konstrukce:

1. o; $o \perp p$; $A \in o$
2. B; $B \in l \cap o$, $B \not\equiv A$
3. q; $q \parallel p$; $A \in q$
4. C; $C \in l \cap q$, $C \not\equiv A$
5. $\triangle\ ABC$

Úloha 3.3:

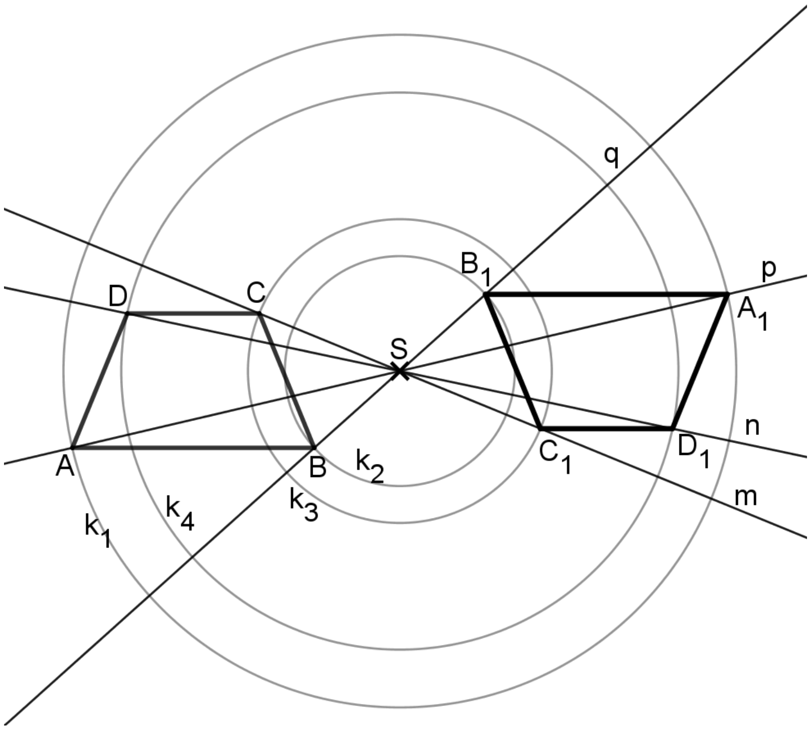
<u>Symbolický zápis konstrukce</u>:

1. n; $n \perp m$; $B \in n$
2. S; $S \in n \cap m$
3. k; $k\ (S, |SB|)$
4. D; $D \in n \cap k$; $D \not\equiv B$
5. A, C; $A, C \in m \cap k$; $A \not\equiv C$
6. $\square\ ABCD$



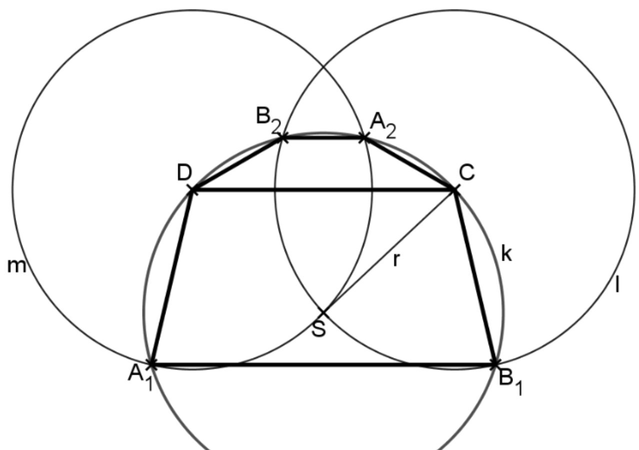
Úloha 3.4:

<u>Symbolický zápis konstrukce</u>:



1. p; $p \equiv \leftrightarrow AS$
2. k_1; $k_1\ (S, |AS|)$
3. A_1; $A_1 \in p \cap k_1$, $A_1 \not\equiv A$
4. q; $q \equiv \leftrightarrow BS$
5. k_2; $k_2\ (S, |BS|)$
6. B_1; $B_1 \in q \cap k_2$, $B_1 \not\equiv B$
7. m; $m \equiv \leftrightarrow CS$
8. k_3; $k_3\ (S, |CS|)$
9. C_1; $C_1 \in m \cap k_3$, $C_1 \not\equiv C$
10. n; $n \equiv \leftrightarrow DS$
11. k_4; $k_4\ (S, |DS|)$
12. D_1; $D_1 \in n \cap k_4$, $D_1 \not\equiv D$
13. lichoběžník $A_1B_1C_1D_1$

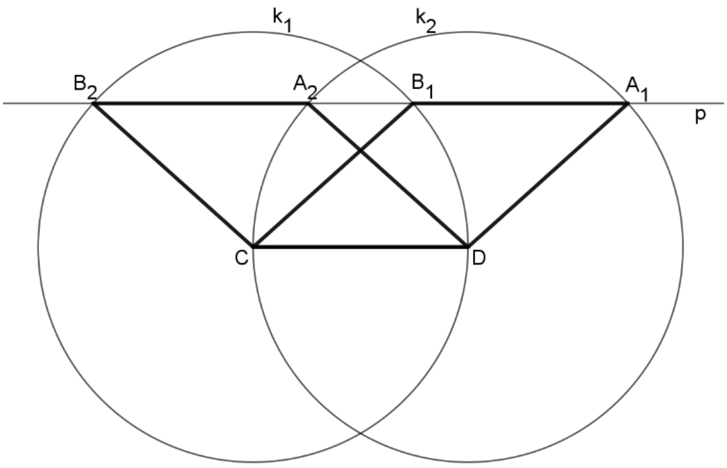
Úloha 3.5:



<u>Symbolický zápis konstrukce</u>:

1. r; $r = |CS|$
2. m; $m\ (D, r)$
3. A_1, A_2; $A_1, A_2 \in k \cap m$, $A_1 \not\equiv A_2$
4. l; $l\ (C, r)$
5. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in k \cap l$, $B_1 \not\equiv B_2$
6. lichoběžník A_1B_1CD
7. lichoběžník A_2B_2DC

Úloha 3.6:



Symbolický zápis konstrukce:

1. CD; $|CD| = 6$ cm
2. p; $p \parallel CD$, $|p, CD| = v = 4$ cm
3. k_1; $k_1 (C, |CD|)$
4. B_1, B_2; $B_1, B_2 \in k_1 \cap p$, $B_1 \not\equiv B_2$
5. k_2; $k_2 (D, |CD|)$
6. A_1, A_2; $A_1, A_2 \in k_2 \cap p$, $A_1 \not\equiv A_2$
7. kosočtverec A_1B_1CD
8. kosočtverec A_2B_2CD

2.4 Hranatá a krychlová tělesa

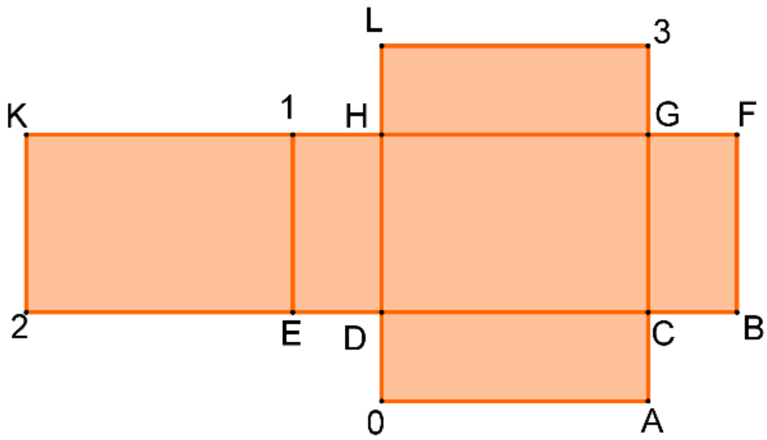
Do této kapitoly je zařazeno 6 vzorově vypracovaných příkladů procvičujících sítě hranatých těles, krychlová tělesa, ale i prostorovou představivost. Vzorově řešené příklady jsou doplněny zadáním 4 úloh k samostatnému vypracování. K nim jsou opět připojeny výsledky správných řešení. Tato kapitola je pro čtenáře a případně pro žáky spíše taková oddechová po předchozích konstrukčních úlohách.

2.4.1 Vzorově řešené příklady

2.4.1.1 *Sítě těles*

Příklad 4.1:

Některé z bodů vyznačených v síti kvádru představují ve složeném kvádru jeden a týž vrchol. Např. dva různé body ***0*** a ***E*** sítě kvádru představují ve složeném kvádru stejný vrchol. Jaké body v síti kvádru tvoří s následujícími jednotlivými body:



1. bod 1,
2. bod 2,
3. bod 3

postupně jeden a týž vrchol po složení dané sítě v kvádr? [18]

Poznámka: Jeden vrchol kvádru může být představován dvěma, ale i více body sítě.

Řešení:

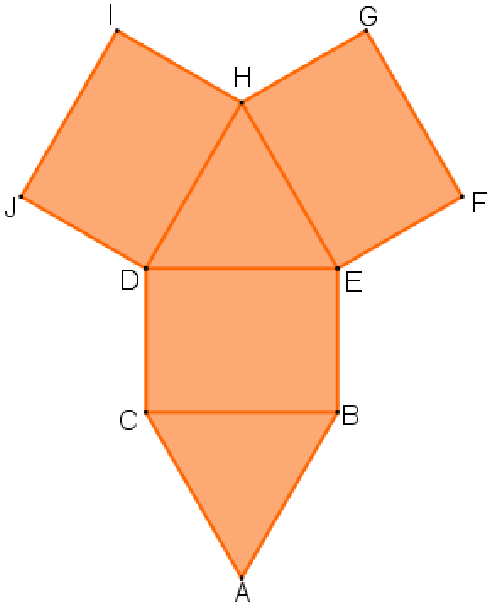
1. Bod **1** po složení dané sítě v kvádr splyne s bodem ***L***.

2. Bod **2** po složení dané sítě v kvádr splyne s body ***A*** a ***B***.

3. Bod **3** po složení dané sítě v kvádr splyne s body ***F*** a ***K***.

Příklad 4.2:

Je dána síť pravidelného trojbokého hranolu. Které body sítě představují po jejím složení stejný vrchol hranolu jako bod ***A*** a stejný vrchol hranolu jako bod ***J***?

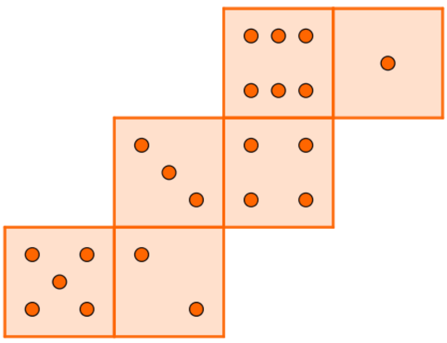


Řešení:

Stejný vrchol hranolu jako bod ***A*** představují dva body sítě, a to body ***G*** a ***I***, dále pak s bodem ***J*** splyne po složení sítě bod ***C*** a vytvoří společně jeden a týž vrchol hranolu.

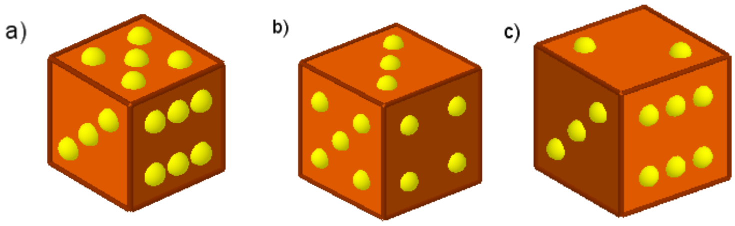
Příklad 4.3:

Na obrázku je znázorněná síť krychle. Na této síti krychle je součet bodů na sousedních čtvercových stěnách v příslušných „řadách" roven 7, viz obrázek. Které krychli zobrazené pod písmeny a) – c) tato síť odpovídá?



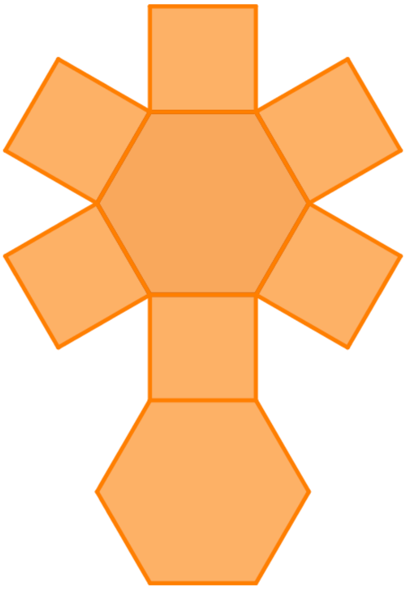
Řešení:

Síti na obrázku odpovídá krychle zobrazená pod písmenem a).



Příklad 4.4:

Na obrázku je vyznačená síť tělesa. O síť, jakého tělesa se jedná?



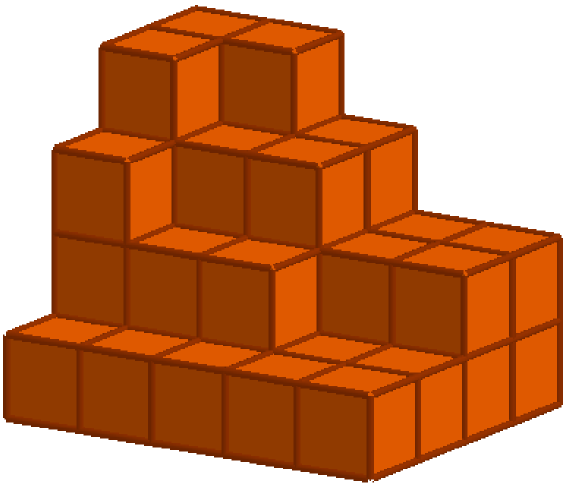
Řešení:

Jedná se o kolmý pravidelný šestiboký hranol.

2.4.1.2 *Geometrická tělesa*

Příklad 4.5:

Na obrázku je znázorněné krychlové těleso tvořené jednotkovými krychlemi o rozměrech 1 cm x 1 cm x 1 cm. Z kolika takových jednotkových krychlí je krychlové těleso na obrázku složeno?



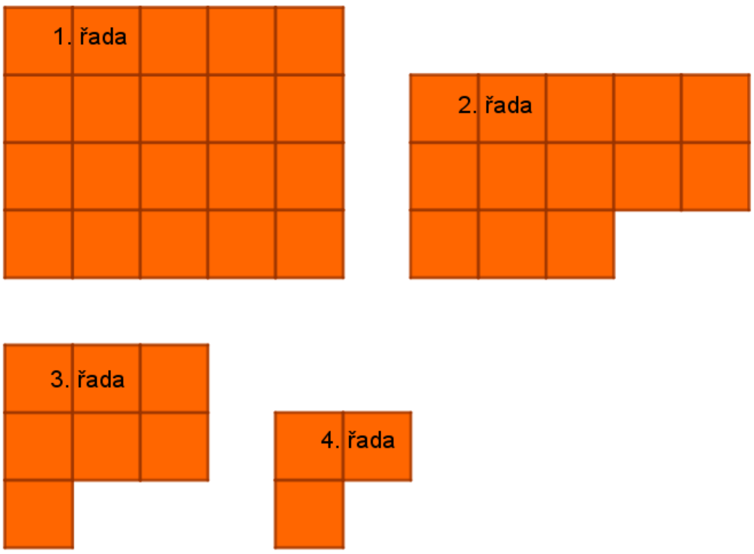
Řešení:

V první řadě krychlového tělesa se nachází 4 x 5 jednotkových krychlí, tedy celkem 20 jednotkových krychlí.

Ve druhé řadě je umístěno 2 x 5 jednotkových krychlí plus 3 jednotkové krychle, tedy 13 jednotkových krychlí.

Ve třetí řadě máme 2 x 3 jednotkové krychle plus 1 jednotková krychle, tedy 7 jednotkových krychlí.

V poslední čtvrté řadě jsou 3 jednotkové krychle.

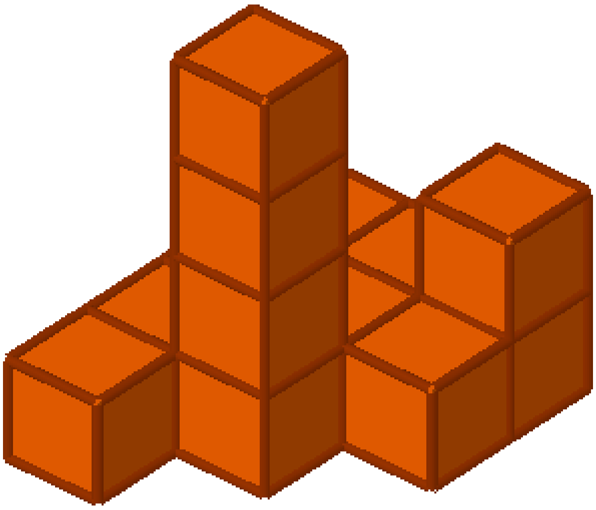


Celkový počet jednotkových krychlí v daném krychlovém tělese je 20 + 13 + 7 + 3 = 43

Odpověď: Krychlové těleso se skládá celkově ze 43 jednotkových krychlí.

Příklad 4.6:

Krychlové těleso na obrázku znázorňuje část kvádru o rozměrech 3 cm x 4 cm x 4 cm. Kolik jednotkových krychlí o rozměrech 1 cm x 1 cm x 1 cm musíme doplnit, aby byl kvádr opět celý?



Řešení:

Nejprve určíme počet jednotkových krychlí v kvádru o rozměrech 3 cm x 4 cm x 4 cm:

3 . 4 . 4 = 48.

V kvádru je celkem 48 jednotkových krychlí o rozměrech 1 cm x 1 cm x 1 cm.

Teď už stačí zjistit počet jednotkových krychlí nacházejících se v zobrazeném krychlovém tělese.

V první řadě je 9 jednotkových krychlí, ve druhé řadě se nacházejí 2 jednotkové krychle a ve třetí a čtvrté řadě je vždy po 1 jednotkové krychli.

Dohromady je tedy v zobrazeném krychlovém tělese znázorněno 9 + 2 + 1 + 1 = 13 jednotkových krychlí.

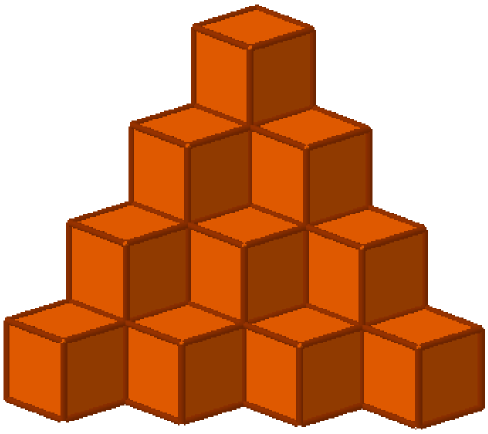
Počet jednotkových krychlí potřebných k doplnění celého kvádru o rozměrech 3 cm x 4 cm x 4 cm vypočítáme pomocí rozdílu celkového počtu jednotkových krychlí v kvádru a počtu jednotkových krychlí ve znázorněném krychlovém tělese, tj. 48 – 13 = 35 jednotkových krychlí.

Odpověď: K doplnění zobrazeného krychlového tělesa na kvádr o rozměrech 3 cm x 4 cm x 4 cm bude potřeba dodat 35 jednotkových krychlí.

2.4.2 Úlohy k procvičení

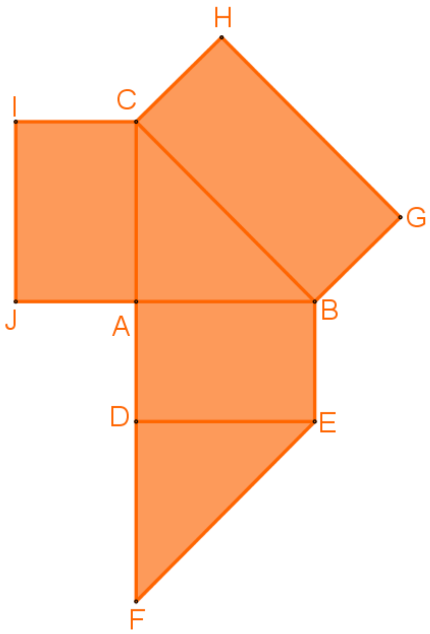
Úloha 4.1:

Na obrázku je zobrazeno krychlové těleso tvořené jednotkovými krychlemi o rozměrech 1 cm x 1 cm x 1 cm. Kolik jednotkových krychlí chybí doplnit, aby tělesem byla krychle s délkou hrany 4 cm?



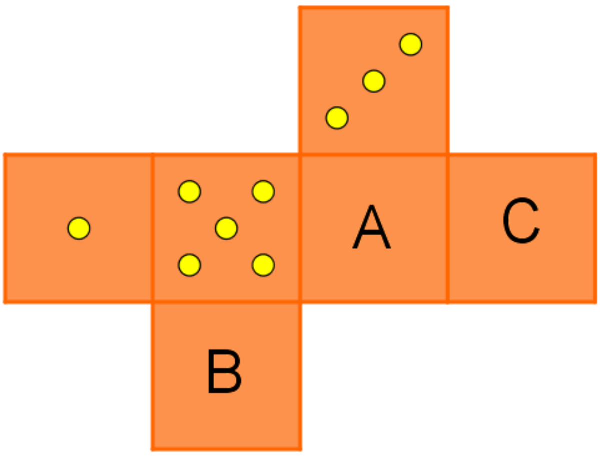
Úloha 4.2:

Na obrázku je znázorněná síť trojbokého hranolu s trojúhelníkovou podstavou ***ABC***. Které body sítě po jejím složení splývají s bodem ***H***?



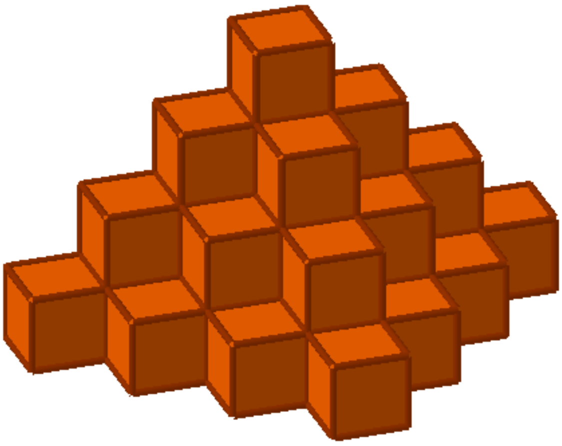
Úloha 4.3:

Na obrázku je zakreslená síť hrací kostky. U typické hrací kostky platí, že součet bodů na jejích protějších stěnách je roven 7. Kolik bodů je na stěnách kostky označených písmeny ***A***, ***B***, ***C***?



Úloha 4.4:

Na obrázku je znázorněné krychlové těleso tvořené jednotkovými krychlemi o rozměrech 1 cm x 1 cm x 1 cm. Z kolika takových jednotkových krychlí je krychlové těleso na obrázku složeno?



2.4.2.1 *Výsledky*

Úloha 4.1: K sestavení kompletní krychle s délkou hrany 4 cm chybí doplnit 44 jednotkových krychlí.

Úloha 4.2: S bodem ***H*** splývají po složení sítě dva její body, a to body ***F*** a ***I***.

Úloha 4.3: Na stěně hrací kostky označené písmenem ***A*** je 6 bodů, na stěně označené písmenem ***B*** jsou 4 body a na stěně označené písmenem ***C*** jsou 2 body.

Úloha 4.4: Zobrazené krychlové těleso je tvořeno 30 jednotkovými krychlemi.

2.5 Míry v geometrii

V poslední kapitole se zaměříme na příklady a úlohy nejobsáhlejšího tematického celku, se kterým se žáci v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy mohou setkat. Jedná se o tematický celek míry v geometrii. Vzhledem k obsáhlosti tohoto tematického celku je v první podkapitole vloženo celkem 18 vzorově řešených příkladů. V prvním odstavci jsou ukázána vzorová řešení příkladů procvičujících převody jednotek. V těchto příkladech je také popsán postup prováděných jednotlivých převodů. Ve druhém odstavci jsou příklady zaměřené na výpočty velikostí obvodů a obsahů rovinných geometrických obrazců, a to základních, ale i takových, u kterých musí žáci trochu více přemýšlet. Poslední odstavec obsahuje příklady, v nichž jsou počítány velikosti povrchů a objemů těles. K tomuto tématu se žáci většinou dostávají až v 9. třídě, ale zařazení příkladů na toto téma do ostrých státních přijímacích zkouškových testů z matematiky na střední školy je nezbytné, proto je zde snaha o takové komentované vysvětlení řešení jednotlivých příkladů, které by pro žáky mělo být jasné. Tato kapitola je doplněna druhou podkapitolou, do níž je vloženo zadání 10 úloh k samostatnému procvičování, ke všem 10 úlohám jsou na závěr uvedeny správné výsledky.

2.5.1 Vzorově řešené příklady

2.5.1.1 *Převody jednotek*

Příklad 5.1:

Vypočítejte a výsledek vyjádřete v uvedených jednotkách. [18]

1. 1,5 dm^2 + 75 mm^2 = ……………………………….. mm^2
2. 1 m^3 – 52 litrů = ……………………………. litrů

Řešení:

1. Na levé straně rovnice převedeme 1,5 dm^2 na milimetry čtvereční, tedy 1,5 dm^2 = 150 cm^2 = 15 000 mm^2, tím získáme na levé a pravé straně rovnice hodnoty se stejnými jednotkami. Výsledkem bude součet 15 000 mm^2 + 75 mm^2 = 15 075 mm^2.

Výsledek: $\mathbf{1,5\ dm^2 + 75\ mm^2 = 15\ 075\ mm^2}$

2. Hodnoty na levé straně rovnice převedeme na stejné jednotky, v tomto příkladě převedeme hodnotu uvedenou v metrech krychlových na litry. Víme, že 1 litr = 1 dm^3, a také víme, že 1 m^3 = 1 000 dm^3. Tedy 1 m^3 = 1 000 litrů. Na pravé straně bude výsledek rozdílu 1 000 l – 52 l = 948 l.

Výsledek: $\mathbf{1\ m^3 - 52\ l = 948\ l}$

Příklad 5.2:

Doplňte čísla tak, aby platila rovnost [19]:

1. 0,75 m^2 = 25 cm^2 + ……………………….. cm^2
2. 0,2 dm^3 + ……………………….. cm^3 = 1 litr
3. ……………………….. * 20 minut = 8 * 0,75 hodiny
4. 3 dm^2 = 1 dm^2 + ……………………….. cm^2
5. 1,2 litru = ………………………..dm^3 – 100 cm^3
6. ……………………….. * 1,5 hodiny + 20 minut = 1 hodina 5 minut

Řešení:

1. 0,75 m^2 = 7 500 cm^2

Víme-li, že na levé straně rovnice je 7 500 cm^2, tak na pravé straně rovnice musí součet hodnot v centimetrech čtverečních dát dohromady také 7 500 cm^2. Odtud vypočítáme, že 7 500 cm^2 – 25 cm^2 = 7 475 cm^2.

Výsledek: $\mathbf{0,75\ m^2 = 25\ cm^2 + \ 7\ 475\ cm^2}$

2. Na pravé straně rovnice je 1 litr, ten převedeme na decimetr krychlový, tedy 1 l = 1 dm^3. Na levé straně rovnice potřebujeme doplnit takovou hodnotu, aby při sečtení s 0,2 dm^3 dala

výsledek 1 dm^3. Touto hodnotou je 0,8 dm^3, nyní již jen stačí převést tuto hodnotu na centimetry krychlové. Víme, že 1 dm^3 je roven 1 000 cm^3. S užitím uvedeného převodního vztahu získáváme, že 0,8 dm^3 = 800 cm^3.

<u>Výsledek</u>: $\mathbf{0{,}2\ dm^3 + 800\ cm^3 = 1\ litr}$

3. Nejdříve vypočítáme, jaká hodnota je na pravé straně rovnice. 0,75 hodiny převedeme na minuty. Víme, že 0,75 hodiny odpovídá ¾ hodiny a ¾ hodiny přepočteno na minuty je 45 minut. Na pravé straně rovnice získáváme 8 . 45 minut = 360 minut. Chybějící číslo na levé straně rovnice dopočítáme následovně: 360 min : 20 min = 18.

<u>Výsledek</u>: $\mathbf{18 \,.\, 20\ minut = 8 \,.\, 0{,}75\ hodiny}$

4. Z této rovnice je patrné, že potřebujeme 2 dm^2 převést na cm^2. Jestliže víme, že 1 dm^2 = 100 cm^2, tak 2 dm^2 = 200 cm^2.

<u>Výsledek</u>: $\mathbf{3\ dm^2 = 1\ dm^2 + 200\ cm^2}$

5. Všechny hodnoty v rovnici převedeme na decimetry krychlové. Tedy 1,2 litru = 1,2 dm^3 a 100 cm^3 = 0,1 dm^3. Upravíme rovnici tak, že 1,2 dm^3 + 0,1 dm^3 = 1,3 dm^3.

<u>Výsledek</u>: $\mathbf{1{,}2\ litru = 1{,}3\ dm^3 - 100\ cm^3}$

6. Všechny hodnoty v rovnici převedeme na minuty, tedy 1,5 h = 90 minut a 1 hodina = 60 minut. Upravíme rovnici tak, že hodnota číselného výrazu (65 minut – 20 minut) / 90 min je rovna hledané výsledné hodnotě 0,5.

<u>Výsledek</u>: $\mathbf{\frac{1}{2} \,.\, 1{,}5\ hodiny + 20\ minut = 1\ hodina\ 5\ minut}$

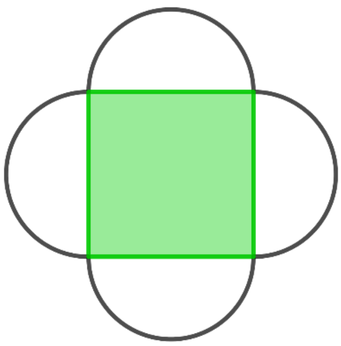
2.5.1.2 *Výpočty obvodů a obsahů rovinných obrazců*

Vzorce pro výpočet obvodu a obsahu základních geometrických útvarů		
Rovinný obrazec	***Obvod***	***Obsah***
Čtverec	$o = 4 \,.\, a$	$S = a \,.\, a$
Obdélník	$o = 2 \,.\, (a + b)$	$S = a \,.\, b$
Trojúhelník	$o = a + b + c$	$S = \frac{v_a \,.\, a}{2} = \frac{v_b \,.\, b}{2} = \frac{v_c \,.\, c}{2}$
Kruh	$o = 2 \,.\, \pi \,.\, r$	$S = \pi r^2$
Kosočtverec	$o = 4 \,.\, a$	$S = a \,.\, v = \frac{u_1 \,.\, u_2}{2}$
Kosodélník	$o = 2 \,.\, (a + b)$	$S = a \,.\, v_a = b \,.\, v_b$
Lichoběžník	$o = a + b + c + d$	$S = \frac{(a + c) \,.\, v}{2}$

Tabulka 8

Příklad 5.3:

Ornament je složen z jednoho čtverce a čtyř bílých půlkruhů. Obsah čtverce je **4 cm²**. Vypočtěte v **cm²** obsah jednoho půlkruhu a výsledek zaokrouhlete na setiny (π = 3,14). [17]



<u>**Řešení:**</u>

<u>Zápis</u>: $S_{čtverce} = 4\ cm^2$

$\pi = 3{,}14$

$S_{půlkruhu} = ?\ \text{cm}^2$

<u>Výpočet:</u> Nejdříve vypočteme délku strany čtverce:

Použijeme vzorec pro výpočet obsahu čtverce, tj. vzorec: $\boldsymbol{S = a^2}$, kde $\boldsymbol{a}$ je délka strany čtverce. Úpravou ze vzorce vyjádříme délku strany čtverce, tj. $\boldsymbol{a = \sqrt{S}}$**.** Dosazením zadané hodnoty velikosti obsahu čtverce získáváme, že $\boldsymbol{a = \sqrt{4}\ \text{cm}}$**.** Odtud vypočítáme, že strana $\boldsymbol{a}$ čtverce je dlouhá **2 cm**. Z obrázku je patrné, že strana $\boldsymbol{a}$ je zároveň rovna velikosti průměru každého bílého půlkruhu.

Víme, že obsah kruhu lze vypočítat užitím vzorce $\boldsymbol{S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}}$**.** Dosazením vypočtené hodnoty průměru kruhu do uvedeného vzorce dostáváme $\boldsymbol{S = \frac{\pi 2^2}{4}\,\text{cm}^2 = \frac{\pi 4}{4}\,\text{cm}^2\ \pi}$ cm².

Vypočítali jsme, že velikost obsahu kruhu je rovna $\boldsymbol{\pi}$ cm^2. Dle zadání je úkolem určit velikost obsahu jednoho půlkruhu. Musíme tedy velikost obsahu kruhu vydělit ještě dvěma, tj.:

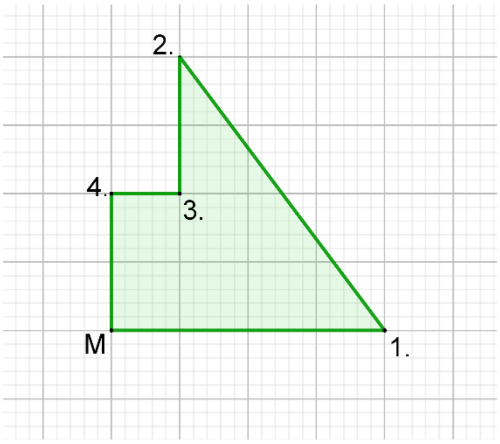
$\boldsymbol{S_{půlkruhu}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\,\mathrm{cm}^2 = \frac{\mathbf{3{,}14}}{\mathbf{2}}\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}57$ cm^2.

Odpověď: Obsah půlkruhu je 1,57 cm^2.

Příklad 5.4:

Ve čtvercové síti je vyznačena vyhlídková cesta se čtyřmi zastávkami (1. - 4.). Start a cíl vyhlídkové cesty jsou v jednom místě (M). Cesta od startu (M) k první zastávce (1.) měří 80 m. [17]

1. Vypočtěte délku cesty mezi první a druhou zastávkou.
2. Vypočítejte obsah plochy obrazce ohraničeného vyhlídkovou cestou.



Řešení:

Zápis: délka mezi startem M a 1. zastávkou ….. 80 m

délka mezi 1. a 2. zastávkou ….. ? m

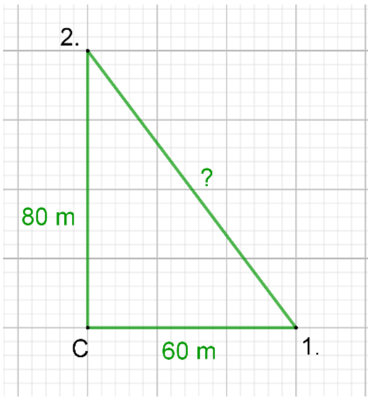
obsah plochy ….. ? m^2

1. Díky zobrazení cesty ve čtvercové síti je možné zjistit ze zadané vzdálenosti mezi startem M a 1. zastávkou délku strany jednoho základního čtverce ve čtvercové síti.

Víme, že vzdálenost startu M od první zastávky je 80 metrů. Mezi první zastávkou a startem M jsou ve čtvercové síti čtyři základní čtverce, tedy délku strany jednoho základního čtverce vypočítáme následovně: (80 : 4) m = 20 m. Délka strany základního čtverce je tedy 20 m.

K výpočtu délky cesty mezi 1. a 2. zastávkou použijeme Pythagorovu větu zapsanou symbolicky ve tvaru $\boldsymbol{c^2} = \boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}$, kde hodnoty a = 60 m a b = 80 m určíme ze čtvercové sítě na základě předchozího výpočtu délky strany základního čtverce.

Výpočet:



$$c^2 = 60^2 + 80^2$$

$$c = \sqrt{60^2 + 80^2}\ \text{m}$$

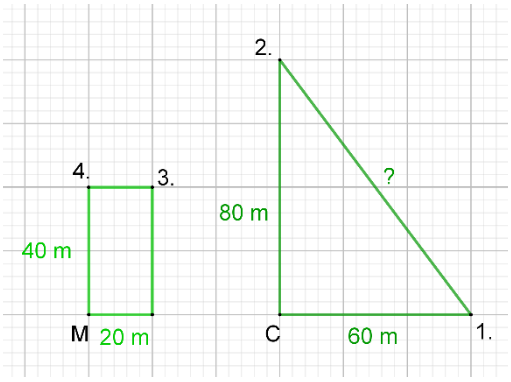
$$c = \sqrt{3\,600 + 6\,400}\ \text{m}$$

$$c = \sqrt{10\,000}\ \text{m}$$

$$c = 100\ \text{m}$$

Odpověď: Vzdálenost první zastávky od druhé zastávky je 100 m.

2. Obsah plochy obrazce ohraničeného vyhlídkovou cestou vypočítáme pomocí sečtení velikostí obsahu trojúhelníku a obsahu obdélníku, viz obrázek.



Výpočet:

Hodnotu obsahu trojúhelníku určíme ze vzorce $S = \frac{v_a\,.\,a}{2}$. Je-li trojúhelník pravoúhlý, jako je tomu v našem případě, pak můžeme vzorec pro výpočet velikosti obsahu trojúhelníku psát ve tvaru $S = \frac{a\,.\,b}{2}$, kde a = 60 m a b = 80 m, jak bylo uvedeno v podúloze a).

Po dosazení získáváme, že $S_{trojúhelníku} = \frac{60\,.\,80}{2}\,\text{m}^2 = \frac{4\,800}{2}\,\text{m}^2 = 2\,400\ \text{m}^2$, tedy

$$S_{trojúhelníku} = 2\,400\ \text{m}^2.$$

Velikost obsahu obdélníku vypočteme ze vzorce $S = d * e$, kde d = 20 m a e = 40 m. Po dosazení těchto hodnot do vzorce získáváme $S_{obdélníku} = 20\,.\,40\ \text{m}^2$ = **800 m²**. Odtud

$$S_{obdélníku} = 800\ \text{m}^2.$$

Obsah plochy obrazce ohraničeného vyhlídkovou cestou obdržíme sečtením velikostí obsahu trojúhelníku a obsahu obdélníku:

$$S = S_{trojúhelníku} + S_{obdélníku}$$

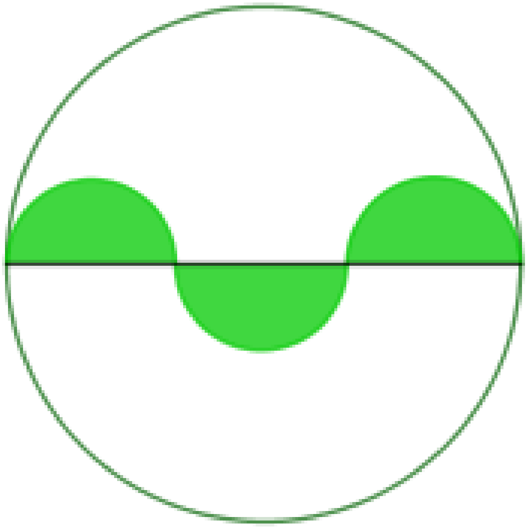
$$S = (2\,400 + 800)\ \text{m}^2$$

$$S = 3\,200\ \text{m}^2$$

Odpověď: Obsah plochy obrazce ohraničeného vyhlídkovou cestou je 3 200 m^2.

Příklad 5.5:

Uvnitř kruhu o poloměru 6 cm se nachází 3 shodné zelené půlkruhy. Jaký je obsah bílé plochy v kruhu? (počítejte v celých číslech)



<u>Řešení:</u>

<u>Zápis:</u> poloměr kruhu ….. *r* = 6 cm

$\pi = 3{,}14$

obsah bílé plochy v kruhu …..? cm^2

<u>Výpočet:</u>

Nejdříve vypočítáme obsah kruhu o poloměru 6 cm obsahujícího zelené půlkruhy, tedy

$$\boldsymbol{S_{kruhu} = \pi \, . \, r^2}$$

$$\boldsymbol{S_{kruhu} = 3{,}14 \, . \, 6^2 \ \mathrm{cm}^2 = 3{,}14 \, . \, 36 \ \mathrm{cm}^2}$$

$$\boldsymbol{S_{kruhu} = 113{,}04 \ \mathrm{cm}^2 \doteq 113 \ \mathrm{cm}^2}$$

Druhou částí výpočtu bude zjistit velikost obsahu zelených půlkruhů. Je důležité si uvědomit, že průměr kruhu je 12 cm a na těchto 12 centimetrech jsou umístěny tři stejně velké půlkruhy. Průměr jednoho zeleného půlkruhu vypočítáme následovně jako $12 \ \mathrm{cm} \ : 3 = 4 \ \mathrm{cm}$. Průměr jednoho zeleného půlkruhu je tedy roven 4 cm a poloměr jednoho zeleného půlkruhu je roven 2 cm.

Velikost obsahu jednoho zeleného půlkruhu vypočítáme následujícím způsobem: $S_{půlkruhu} = \frac{\pi \, . \, r^2}{2}$

$$\boldsymbol{S_{půlkruhu} = \frac{3{,}14 \, . \ 2^2 \ \mathrm{cm}^2}{2} = \frac{3{,}14 \, . \ 4 \ \mathrm{cm}^2}{2} = 6{,}28 \ \mathrm{cm}^2 \doteq 6 \ \mathrm{cm}^2}$$

Obsah jednoho zeleného půlkruhu je 6 cm^2. V kruhu jsou ale dané zelené půlkruhy tři, proto velikost obsahu všech tří zelených půlkruhů je $6 \ \mathrm{cm}^2 \ . \ 3 = 18 \ \mathrm{cm}^2$.

Obsah bílé části v kruhu vypočítáme jako výsledek rozdílu $\boldsymbol{S_{kruhu} - 3 \, . \, S_{půlkruhu}} = \boldsymbol{S_{bílé\ části}}$, tj.

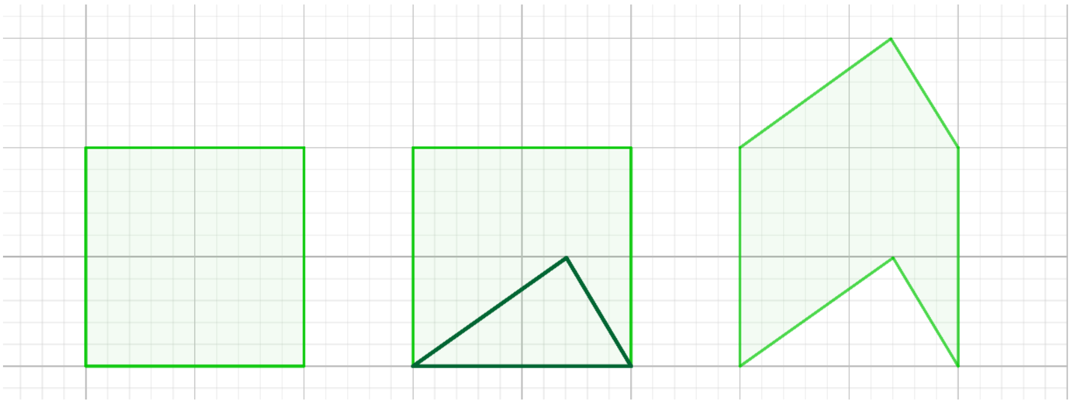
$$\boldsymbol{113 \ \mathrm{cm}^2 - 18 \ \mathrm{cm}^2 = 95 \ \mathrm{cm}^2.}$$

<u>Odpověď:</u> Obsah bílé plochy v kruhu je roven 95 cm^2.

Příklad 5.6:

Uvnitř čtverce je zobrazen trojúhelník, jehož jedna strana je současně stranou čtverce. Přemístěním trojúhelníku k protější straně čtverce vznikne nový obrazec. Obvod čtverce je 40 cm a obvod trojúhelníku je 25 cm. [18]

1. Jaký je obvod nového obrazce?
2. Jaký je obsah čtverce?
3. Jaký je obsah nového obrazce?



<u>**Řešení:**</u>

<u>Zápis:</u> $o_{\text{čtverce}}$= 40 cm

$o_{\text{trojúhelníku}}$= 25 cm

1. Následuje výpočet obvodu nového obrazce:

Nejprve ze vzorce pro výpočet velikosti obvodu čtverce ***o* = 4 . *a***, kde ***a*** je délka strany čtverce, vypočítáme délku strany daného čtverce. Z toho vyplývá, že délku jedné strany daného čtverce určíme tak, že (40 : 4) cm = 10 cm.

Délka strany daného čtverce je tedy 10 cm.

Trojúhelník má obvod roven 25 cm. Jedna jeho strana je stejně dlouhá jako strana čtverce, tj. má délku 10 cm. Zbylé dvě strany trojúhelníku mají tedy délky dohromady rovny 15 cm.

Když se podíváme na obrázek nového obrazce, je vidět, že dvěma jeho stranami jsou dvě strany daného čtverce a dalšími stranami jsou dvakrát zbylé dvě strany trojúhelníku. Zapíšeme-li uvedené poznatky číselně, získáme hodnotu obvodu nového obrazce.

<u>Výpočet</u>: $\boldsymbol{o_{obrazce}}$ **= (2 . 10 + 2 . 15) cm**

$\boldsymbol{o_{obrazce}}$ **= 50 cm**

<u>Odpověď</u>: Obvod nového obrazce je 50 cm.

2. Obsah čtverce

Z výše uvedeného výpočtu víme, že jedna strana čtverce je dlouhá 10 cm, proto můžeme tuto hodnotu dosadit do vzorce pro výpočet obsahu čtverce.

Výpočet: $\boldsymbol{S = a^2}$

$\boldsymbol{S = 10^2\ \mathrm{cm}^2}$

$\boldsymbol{S = 100\ \mathrm{cm}^2}$

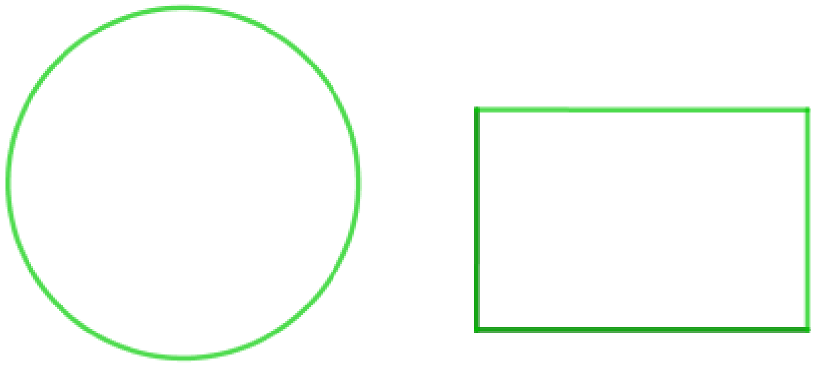
Odpověď: Obsah čtverce je 100 cm^2.

3. Jaký je obsah nového obrazce?

Z obrázku si lze všimnout, že trojúhelník je ve čtvercové síti oproti své původní poloze pouze posunut a jeho velikost se při daném posunutí nezměnila, proto je obsah nového obrazce stejný jako obsah původního čtverce. Tedy je roven 100 cm^2.

Příklad 5.7:

Kružnice je vytvořena z drátu délky 30 cm. Ze stejně dlouhého drátu se vytvaruje obdélník, v němž poměr součtu délek dvou jeho delších protějších stran ku součtu délek dvou jeho kratších protějších stran je 3 : 2. Jaký je obsah obdélníku? [18]



Řešení:

Výpočet: Z daného poměru 3 : 2 platného pro součet délek dvou delších protějších stran obdélníku ku součtu délek dvou kratších protějších stran obdélníku vypočítáme délky stran obdélníku. Hodnoty poměru sečteme, tj. získáme 3 + 2 = 5. Vydělíme-li hodnotu délky obvodu obdélníku součtem hodnot poměru, tj. pěti, pak získáme délku, která odpovídá jednomu dílu poměru. Tedy

(30 : 5) cm = 6 cm	délka odpovídající jednomu dílu poměru, a tedy délce kratší strany obdélníku
(6 . 2) cm = 12 cm	hodnota součtu délek dvou protilehlých kratších stran obdélníku, kratší strana obdélníku má tedy délku 6 cm

(6 . 3) cm = 18 cm	hodnota součtu délek dvou protilehlých delších stran obdélníku, delší strana obdélníku má tedy délku 9 cm

K určení hodnoty obsahu obdélníku použijeme vzorec pro výpočet obsahu obdélníku: ***S* = *a* . *b***, odkud po dosazení hodnot délek stran ***a*** = 6 cm, ***b*** = 9 cm dostáváme

***S* = 6 . 9 cm²**

***S* = 54 cm²**

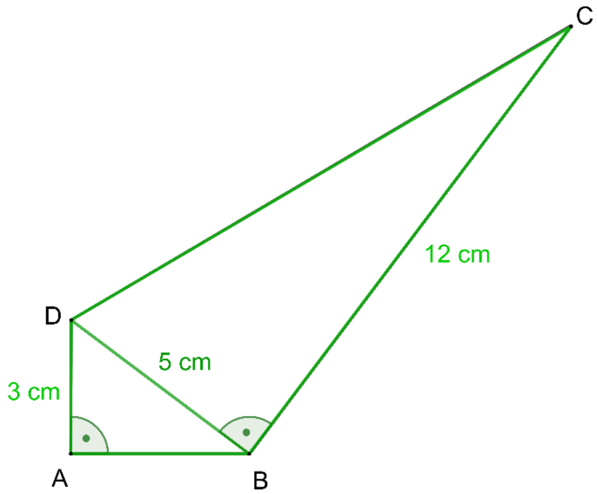
Odpověď: Obsah obdélníku je 54 cm^2.

Příklad 5.8:

Čtyřúhelník ***ABCD*** je složen ze dvou pravoúhlých trojúhelníků ***ABD*** a ***BCD***.

Pro délky stran platí: |***AD***| = 3 cm, |***BC***| = 12 cm, |***BD***| = 5 cm. [19]

1. Vypočtěte v cm délku strany ***AB***.
2. Vypočtěte v cm délku strany ***CD***.
3. Vypočtěte v cm^2 obsah čtyřúhelníku ***ABCD***.



Řešení:

1. Výpočet délky strany ***AB***.

Pro výpočet délky strany ***AB*** použijeme Pythagorovu větu zapsanou symbolicky ve tvaru: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$.

V našem případě známe délku přepony ***c*** = |***BD***| = 5 cm a délku odvěsny ***b*** = |***AD***| = 3 cm a hledáme délku odvěsny ***a*** = |***AB***|.

Výpočet: $\boldsymbol{a^2 = c^2 - b^2}$

$$|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{|\boldsymbol{BD}|^2 - |\boldsymbol{AD}|^2}$$

$$|AB| = \sqrt{25\ \mathrm{cm}^2 - 9\ \mathrm{cm}^2}$$

$$|AB| = 4\ \mathrm{cm}$$

Odpověď: Strana ***AB*** je dlouhá 4 cm.

2. Výpočet délky strany ***CD***.

K výpočtu délky strany ***CD*** trojúhelníku ***BCD*** opět použijeme Pythagorovu větu, nyní symbolicky zapsanou ve tvaru: $e^2 = c^2 + d^2$, kde ***c*** = |***BD***| = 5 cm, ***d*** = |***BC***| = 12 cm a kde ***e*** = |***CD***| značí velikost přepony pravoúhlého trojúhelníku ***BCD***.

Tentokrát pomocí Pythagorovy věty budeme počítat velikost přepony.

Výpočet: $|CD| = \sqrt{|BC|^2 + |BD|^2}$

$$|CD| = \sqrt{144\ \mathrm{cm}^2 + 25\ \mathrm{cm}^2}$$

$$|CD| = 13\ \mathrm{cm}$$

Odpověď: Délka strany ***CD*** je 13 cm.

3. Výpočet obsahu čtyřúhelníku ***ABCD***.

Velikost obsahu čtyřúhelníku ***ABCD*** vypočítáme jako součet velikostí obsahů trojúhelníků ***ABD*** a ***BCD***, tedy zapsáno symbolicky:

$$S = S_{ABD} + S_{BCD}$$

Výpočet:

S_{ABD}: Dosazením do vzorce pro výpočet velikosti obsahu pravoúhlého trojúhelníku ***ABD***, tj. dosazením do vzorce $S = \frac{b\ .\ a}{2}$ obdržíme

$$S_{ABD} = \frac{3\ \mathrm{cm}\ .\ 4\ \mathrm{cm}}{2}$$

$$S_{ABD} = 6\ \mathrm{cm}^2$$

S_{BCD}: Analogickým způsobem, tedy dosazením známých hodnot do vzorce pro výpočet velikosti obsahu pravoúhlého trojúhelníku ***BCD***, tj. dosazením do vzorce

$S_{BCD} = \frac{c\ .\ d}{2}$ dostáváme

$$S_{BCD} = \frac{5\ \mathrm{cm}\ .\ 12\ \mathrm{cm}}{2}$$

$$S_{BCD} = 30\ \mathrm{cm}^2$$

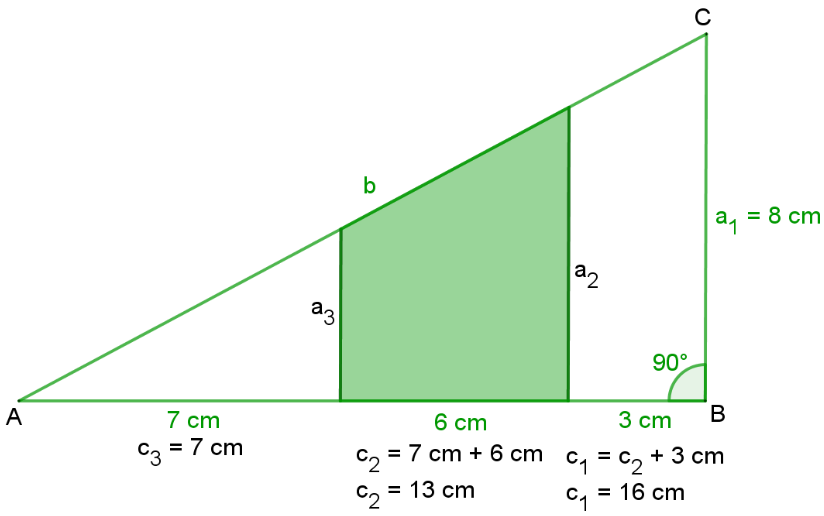
Obsah čtyřúhelníku ***ABCD*** je součtem velikostí obsahů trojúhelníků ***ABD*** a ***BCD***, jak bylo uvedeno výše, tedy: $S = 6\ \mathrm{cm}^2 + 30\ \mathrm{cm}^2$

$$S = 36\ \mathrm{cm}^2$$

Odpověď: Obsah čtyřúhelníku ***ABCD*** je roven 36 cm^2.

Příklad 5.9:

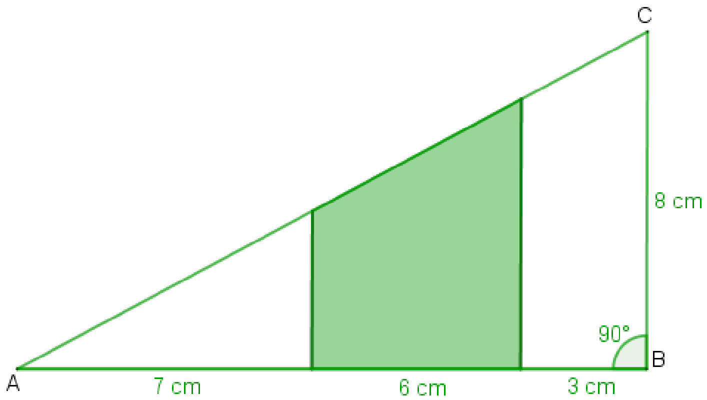
Pravoúhlý trojúhelník ***ABC*** má odvěsny s délkami 16 cm a 8 cm. Je dvěma navzájem různými úsečkami rovnoběžnými s kratší odvěsnou rozdělen na tři nepřekrývající se rovinné útvary.



Rovnoběžné úsečky rozdělily delší odvěsnu na tři úseky o délkách 7 cm, 6 cm a 3 cm. Viz obrázek. Jaký je obsah vybarveného útvaru? [21]

Řešení:

K řešení tohoto příkladu využijeme znalostí o podobnosti trojúhelníků ***ABC*** a $\boldsymbol{AB_1C_1}$:



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k; \dots k \text{ koeficient podobnosti,}$$

kde a_1, b_1, c_1 jsou délky stran trojúhelníku ***ABC*** a a_2, b_2, c_2 jsou délky stran trojúhelníku $\boldsymbol{AB_1C_1}$.

Díky uvedeným rovnostem lze dopočítat délky základen a_2 a a_3 vybarveného útvaru, kterým je pravoúhlý lichoběžník. Následuje výpočet délky základny a_2:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{8 \text{ cm}}{a_2} = \frac{16 \text{ cm}}{13 \text{ cm}}$$

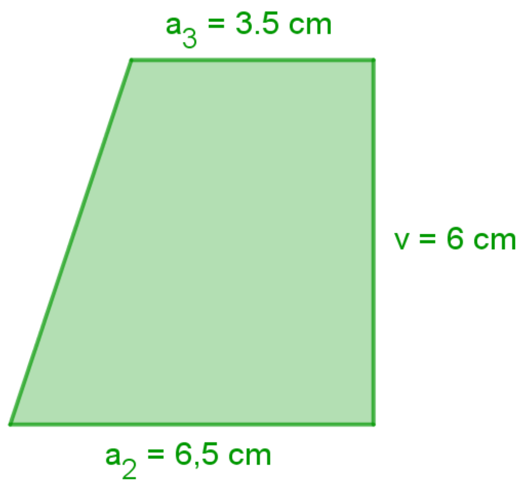
$$a_2 = \frac{8 \text{ cm} \, . \, 13 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = \frac{104 \text{ cm}^2}{16 \text{ cm}} = 6,5 \text{ cm}$$

A dále je uveden výpočet délky základny a_3 vybarveného pravoúhlého lichoběžníku, tj.

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{c_1}{c_3}$$

$$\frac{8\ \mathrm{cm}}{a_3} = \frac{16\ \mathrm{cm}}{7\ \mathrm{cm}}$$

$$a_3 = \frac{8\ \mathrm{cm}\ .\ 7\ \mathrm{cm}}{16\ \mathrm{cm}} = \frac{56\ \mathrm{cm}^2}{16\ \mathrm{cm}} = 3,5\ \mathrm{cm}$$



Máme-li vypočítané délky základen a_2, a_3 a je-li známá výška v = 6 cm vybarveného pravoúhlého lichoběžníku, lze všechny tyto hodnoty dosadit do vzorce pro výpočet velikosti obsahu lichoběžníku, tedy do vzorce $S = \frac{(a_2 + a_3)}{2}\ .\ v$

$$S = \frac{6,5\ \mathrm{cm} + 3,5\ \mathrm{cm}}{2}\ .\ 6\ \mathrm{cm}$$

$$S = \frac{10\ \mathrm{cm}}{2}\ .\ 6\ \mathrm{cm} = 5\ \mathrm{cm}\ .\ 6\ \mathrm{cm} = 30\ \mathrm{cm}^2$$

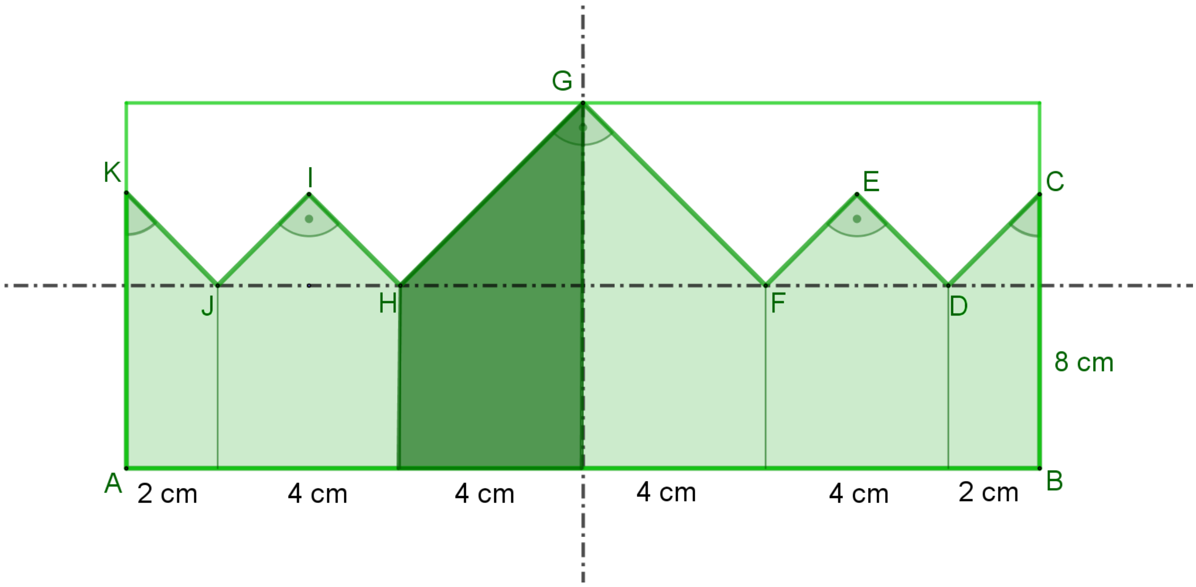
<u>Odpověď:</u> Obsah vybarveného útvaru je roven 30 cm^2.

Příklad 5.10:

Na obrázku je obdélník s rozměry 20 cm a 8 cm. V tomto obdélníku je vyznačen nekonvexní mnohoúhelník ***ABCDEFGHIJK*** osově souměrný podle střední příčky obdélníku, která je kolmá k jeho delší straně. Jedna strana nekonvexního mnohoúhelníku splývá s delší stranou obdélníku a je rozdělena na několik částí, viz obrázek. Na druhé střední příčce obdélníku, tj. ve vzdálenosti 4 cm od delší strany obdélníku, leží vrcholy ***J***, ***H***, ***F***, ***D*** nekonvexního mnohoúhelníku. Vrcholy ***K***, ***I***, ***E***, ***C*** leží ve vzdálenosti 2 cm od střední příčky rovnoběžné s delší stranou obdélníku.

a) Jaký je obsah silně vyznačené části mnohoúhelníku?

b) Jaký je obvod nekonvexního mnohoúhelníku? (mezivýpočty zaokrouhlujte na celá čísla)

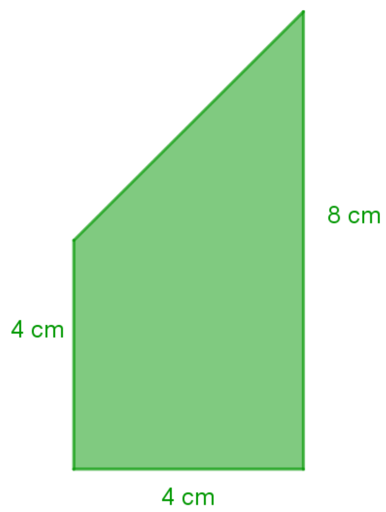


Řešení:

První částí této úlohy je vypočítat obsah silně vyznačené části nekonvexního mnohoúhelníku.

Všimněme si, že silně vyznačenou částí je pravoúhlý lichoběžník, obsah lichoběžníku vypočítáme užitím vzorce $\boldsymbol{S} = \frac{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})}{\boldsymbol{2}} \,.\, \boldsymbol{v}$, v němž ***a***, ***c*** představují délky základen lichoběžníku a ***v*** je výškou lichoběžníku, tj. vzdálenost jeho základen ***a***, ***c***.

Ze zadání známe délky základen ***a*** = 8 cm a ***c*** = 4 cm. Velikost výšky ***v*** odečteme z obrázku. Z obrázku lze vypozorovat, že výška ***v*** zvýrazněného pravoúhlého lichoběžníku je rovna 4 cm. Nyní již známe všechny hodnoty, které potřebujeme pro výpočet hodnoty obsahu silně vyznačeného pravoúhlého lichoběžníku. Tyto hodnoty dosadíme do výše uvedeného vzorce a vypočítáme obsah silně vyznačeného pravoúhlého lichoběžníku, tedy

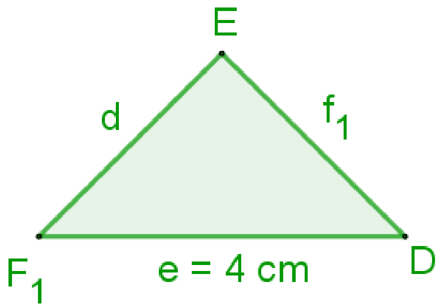


$$\boldsymbol{S} = \frac{(\mathbf{8\ cm}\ +\ \mathbf{4\ cm})}{\mathbf{2}}\ .\ \mathbf{4\ cm} = \frac{\mathbf{12\ cm}}{\mathbf{2}}\ .\ \mathbf{4\ cm}$$
$$= \mathbf{24\ cm^2}$$

Obsah zvýrazněné části nekonvexního mnohoúhelníku je 24 cm^2.

V druhé části řešení příkladu se zaměříme na výpočet velikosti obvodu nekonvexního mnohoúhelníku.

Lze si všimnout, že na obrázku v zadání úlohy je znázorněno několik pravoúhlých trojúhelníků. Vypočítáním délky odvěsny rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku ***F₁DE*** zjistíme délku jedné ze šesti shodných stran nekonvexního mnohoúhelníku. K výpočtu délky odvěsny použijeme upravenou Pythagorovu větu zapsanou symbolicky ve tvaru $\boldsymbol{f_1^2 = e^2 - d^2}$**.** A protože trojúhelník ***F₁DE*** je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, jsou si délky odvěsen ***f₁*** a ***d*** rovny.



Potom platí

$\boldsymbol{2f_1^2 = e^2}$ a z toho plyne, že

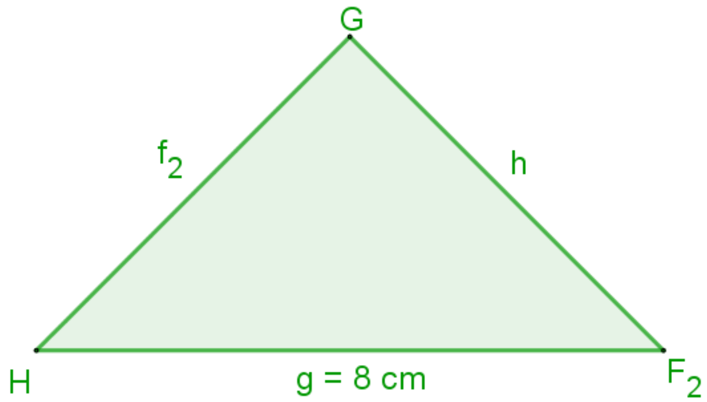
$$\boldsymbol{f_1 = \sqrt{\frac{e^2}{2}} = \sqrt{\frac{4^2}{2}}\ \mathbf{cm} = \sqrt{8}\ \mathbf{cm} \doteq 3\ \mathbf{cm}}$$

Podobným způsobem vypočítáme délky odvěsen ***f₂*** a ***h*** rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku ***HF₂G***, to je $\boldsymbol{f_2 = \sqrt{\frac{g^2}{2}} = \sqrt{\frac{8^2}{2}} = \sqrt{32}\ \mathbf{cm} \doteq 6\ \mathbf{cm}}$**.**

Obvod nekonvexního mnohoúhelníku ***ABCDEFGHIJK*** vypočteme sečtením délek všech jeho stran, tj.

$$\boldsymbol{o = 20\ \mathbf{cm} + 2\,.\,6\ \mathbf{cm}}$$
$$\boldsymbol{+\,6\,.\,3\ \mathbf{cm}}$$
$$\boldsymbol{+\,2\,.\,6\ \mathbf{cm}}$$

$$\boldsymbol{o = 62\ \mathbf{cm}}$$



<u>Odpověď</u>: Obsah zvýrazněné části nekonvexního mnohoúhelníku je 24 cm^2 a obvod nekonvexního mnohoúhelníku je 62 cm.

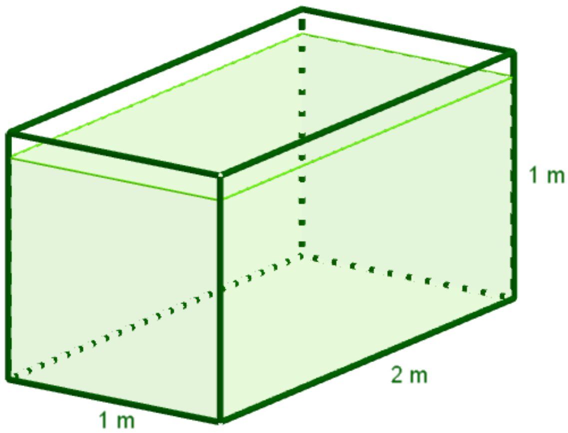
Vzorce pro výpočet povrchu a objemu základních geometrických těles		
Těleso	***Povrch***	***Objem***
Krychle	$S = 6 \,.\, a^2$	$V = a^3$
Kvádr	$S = 2 \,.\, (ab + ac + bc)$	$V = a \,.\, b \,.\, c$
Válec	$S = 2\pi r^2 + 2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, v$	$V = \pi \,.\, r^2 \,.\, v$
Jehlan	$S = S_p + S_{pl}$	$V = \frac{1}{3} \,.\, S_p \,.\, v$
Kužel	$S = \pi \,.\, r^2 + \pi \,.\, r \,.\, s$	$V = \frac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, r^2 \,.\, v$
Koule	$S = 4 \,.\, \pi \,.\, r^2 = \pi \,.\, d^2$	$V = \frac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, r^3 = \frac{\pi \,.\, d^3}{6}$

Tabulka 9

Příklad 5.11:

Nádrž s vodou má tvar kvádru. Rozměry nádrže jsou uvedeny v obrázku. Zahrádkář naplnil vodou z nádrže 15 prázdných dvanáctilitrových konví a hladina vody v nádrži klesla. [19]

O kolik **cm** klesla hladina vody v nádrži?



Řešení:

Zápis:

a = 1 m = 10 dm

b = 2 m = 20 dm

c = 1 m = 10 dm

naplnilo se 15 konví po 12 litrech

hladina vody v nádrži se snížila o .....? cm

Co víme:

Vzorec pro výpočet objemu kvádru je symbolicky zapsán ve tvaru $\boldsymbol{V = a \,.\, b \,.\, c}$, kde ***a***, ***b*** a ***c*** jsou rozměry kvádru. Dále známe převodní vztah mezi objemovými jednotkami a dutými mírami, tj. vztah $\mathbf{1\ dm^3 = 1\ litr}$.

Výpočet:

Nejprve určíme, kolik litrů vody se z nádrže odpustilo po naplnění 15 dvanáctilitrových konví:

$$\mathbf{15\ .\ 12\ l = 180\ l.}$$

Z nádrže se po naplnění 15 dvanáctilitrových konví odpustilo 180 litrů vody, tedy 180 dm^3 vody.

Dále vypočítáme výšku ***v*** kvádru s objemem 180 dm^3 a s délkami hran ***a*** = 10 dm a ***b*** = 20 dm, tedy

$$\mathbf{180\ dm^3 = 10\ dm\ .\ 20\ dm\ .\ \boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{\frac{180}{200}dm = 0{,}9\ dm = 9\ cm}$$

Výška nenaplněné části nádrže je 0,9 dm.

0,9 dm = 9 cm

Odpověď: Po odpuštění vody do 15 dvanáctilitrových konví klesla hladina vody v nádrži o 9 cm.

Příklad 5.12:

Válec s podstavou o obsahu 8 dm^2 má objem 120 litrů. Z válce zcela naplněného vodou se 40 litrů vody odebralo. V jaké výšce ode dna (s přesností na dm) je po odebrání vody vodní hladina?

Řešení:

K vyřešení úlohy použijeme vzorec pro výpočet objemu válce: $\boldsymbol{V = \pi\ .\ r^2\ .\ v}$, kde ***r*** je poloměr kruhové podstavy válce a ***v*** je výška válce.

Součin $\boldsymbol{\pi\ .\ r^2}$ představuje v uvedeném vzorci velikost obsahu kruhové podstavy válce. Ze zadání víme, že to je v našem případě 8 dm^2.

Celkový objem válce je 120 litrů, ale 40 litrů vody jsme odebrali. Po odebrání 40 litrů vody ve válci zůstalo 80 litrů vody, tj. 80 dm^3 vody.

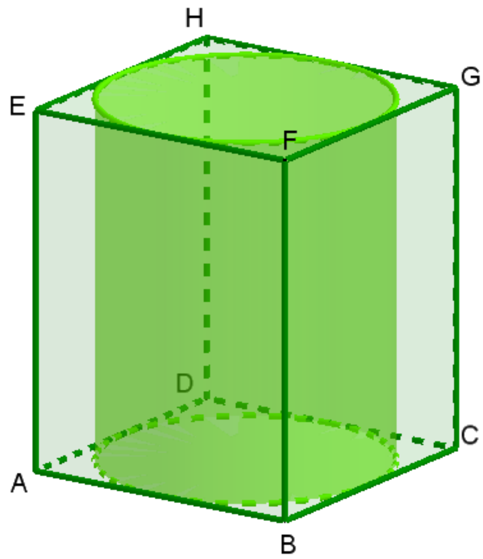
Dosazením hodnoty objemu zbylé vody ve válci a zadané hodnoty obsahu kruhové podstavy do vzorce pro výpočet objemu válce obdržíme velikost výšky, v jaké se ve válci nachází hladina vody od jeho dna po odebrání 40 litrů vody z válce, tj.

$$\mathbf{80\ dm^3 = 8\ dm^2\ .\ \boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{10\ dm}$$

Odpověď: Vodní hladina je po odebrání 40 litrů vody ve výšce 10 dm ode dna válce.

Příklad 5.13:



Kvádr ***ABCDEFGH*** se čtvercovou podstavou má délky podstavných hran 12 cm a výšku 15 cm. V kvádru ***ABCDEFGH*** se nachází rotační válec, jehož površky se dotýkají stěn kvádru a jehož výška je shodná s výškou kvádru, viz obrázek. Určete objem volného místa, které ještě zůstalo v kvádru. (hodnotu určete v cm^3, počítejte s π = 3,14) [17]

Řešení:

Ze zadání vyplývá, že průměr kruhové podstavy válce je 12 cm, tedy poloměr kruhové podstavy je 6 cm a že výška válce je shodná s výškou kvádru, tj. činí 15 cm.

Hodnotu objemu válce určíme použitím vztahu pro výpočet objemu válce a následným dosazením zadaných hodnot do něj, tj.

$$\boldsymbol{V_{válce} = \pi \,.\, r^2 \,.\, v}$$

$$\boldsymbol{V_{válce} = 3,14 \,.\, 6^2\ \mathrm{cm}^2 \,.\, 15\ \mathrm{cm}}$$

$$\boldsymbol{V_{válce} = 1\,695,6\ \mathrm{cm}^3 \doteq 1\,696\ \mathrm{cm}^3}$$

Objem válce umístěného uvnitř kvádru je roven 1 696 cm^3.

Objem kvádru se čtvercovou podstavou vypočítáme ze známého vztahu

$$\boldsymbol{V_{kvádru} = a \,.\, a \,.\, v.}$$

Po dosazení zadaných hodnot ***a*** = 12 cm a ***v*** = 15 cm, získáváme

$$\boldsymbol{V_{kvádru} = 12\ \mathrm{cm} \,.\, 12\ \mathrm{cm} \,.\, 15\ \mathrm{cm}}$$

$$\boldsymbol{V_{kvádru} = 2\,160\ \mathrm{cm}^3}$$

Objem kvádru je roven 2 160 cm^3.

Zadaným úkolem je určit velikost objemu volného místa v kvádru, proto musíme od objemu kvádru odečíst objem válce:

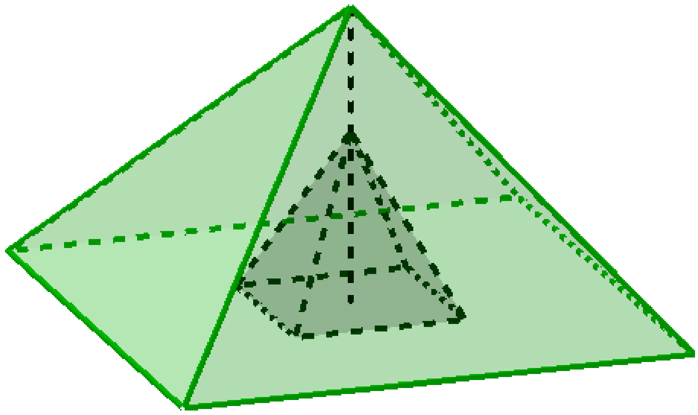
$$\boldsymbol{V = V_{kvádru} - V_{válce}}$$

$$\boldsymbol{V = 2\,160\ \mathrm{cm}^3 - 1\,696\ \mathrm{cm}^3}$$

$$\boldsymbol{V = 464\ \mathrm{cm}^3}$$

Odpověď: Velikost objemu volného místa v kvádru je 464 cm^3.

Příklad 5.14:



Na obrázku je znázorněn pravidelný čtyřboký jehlan se čtvercovou podstavou. Uvnitř jehlanu je otvor ve tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu, který má rozměry o dvě třetiny menší než vnější jehlan. Délka podstavné hrany vnějšího jehlanu je ***a*** = 6 cm, délka pobočné hrany vnějšího jehlanu je ***s*** = 6 cm a výška vnějšího jehlanu je ***v*** = 4 cm. Výška vnitřního jehlanu má délku 2 cm. Určete velikost povrchu „dutého“ jehlanu.

Řešení:

Délka pobočné hrany vnějšího jehlanu je stejná jako délka podstavné hrany vnějšího jehlanu, tedy plášť vnějšího jehlanu je tvořen čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky.

Vypočítáme nejprve velikost povrchu vnějšího jehlanu a potom také velikost povrchu vnitřního jehlanu.

Velikost povrchu vnějšího jehlanu určíme ze vztahu:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_p} + \boldsymbol{S_{pl}};\ kde\ \boldsymbol{S_p} \dots obsah\ podstavy; \boldsymbol{S_{pl}} \dots obsah\ pláště$$

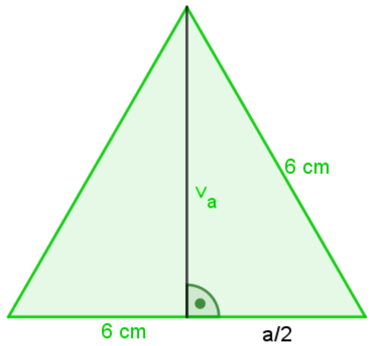
Obsah podstavy vnějšího jehlanu spočítáme jako velikost obsahu čtverce, tj.

$$\boldsymbol{S_p = a^2}$$

$$\boldsymbol{S_p = 6^2\ \mathrm{cm}^2}$$

$$\boldsymbol{S_p = 36\ \mathrm{cm}^2}$$

Následuje výpočet velikosti obsahu pláště vnějšího jehlanu:



$$\boldsymbol{S_{pl} = 4 \,.\, S_{stěny}{}^*}$$

$$\boldsymbol{S_{pl} = 4 \,.\, 15\ \mathrm{cm}^2}$$

$$\boldsymbol{S_{pl} = 60\ \mathrm{cm}^2}$$

*Výpočet velikosti obsahu jedné boční stěny vnějšího jehlanu:

$$\boldsymbol{S_{stěny} = \frac{1}{2} \,.\, a \,.\, v_a}$$

$$\boldsymbol{v_a = \sqrt{6^2 - 3^2}\ \text{cm} = \sqrt{36 - 9}\ \text{cm} = \sqrt{27}\ \text{cm} \doteq 5\ \text{cm}}$$

$$\boldsymbol{S_{stěny} = \frac{1}{2} \,.\, 6\ \text{cm} \,.\, 5\ \text{cm} = 15\ \text{cm}^2}$$

Velikost povrchu vnějšího jehlanu je

$$\boldsymbol{S = 36\ \text{cm}^2 + 60\ \text{cm}^2}$$

$$\boldsymbol{S = 96\ \text{cm}^2}$$

Povrch vnějšího jehlanu je roven 96 cm^2.

Stejným způsobem vypočítáme povrch vnitřního jehlanu.

Délky hran vnitřního jehlanu jsou o dvě třetiny kratší než délky hran vnějšího jehlanu, tedy vnitřní jehlan má délku podstavné hrany ***b*** = 2 cm a délku pobočné hrany ***t*** = 2 cm.

Velikost povrchu vnitřního jehlanu určíme ze vztahu

$$\boldsymbol{Q = Q_p + Q_{pl};} \quad \boldsymbol{Q_p} \ldots obsah\ podstavy; \boldsymbol{Q_{pl}} \ldots obsah\ pláště$$

Obsah podstavy vnitřního jehlanu spočítáme opět jako velikost obsahu čtverce, tj.

$$\boldsymbol{Q_p = b^2}$$

$$\boldsymbol{Q_p = 2^2\ \text{cm}^2}$$

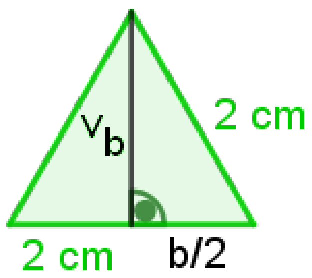
$$\boldsymbol{Q_p = 4\ \text{cm}^2}$$

Pokračujeme výpočtem velikosti obsahu pláště vnitřního jehlanu:

$$\boldsymbol{Q_{pl} = 4 \,.\, Q_{stěny}{}^*}$$

$$\boldsymbol{Q_{pl} = 4 \,.\, 2\ \text{cm}^2}$$

$$\boldsymbol{Q_{pl} = 8\ \text{cm}^2}$$



*Výpočet velikosti obsahu jedné boční stěny vnitřního jehlanu:

$$\boldsymbol{Q_{stěny} = \frac{1}{2} \,.\, b \,.\, v_b}$$

$$\boldsymbol{v_b = \sqrt{2^2 - 1^2}\ \text{cm} = \sqrt{4 - 1}\ \text{cm} = \sqrt{3}\ \text{cm} \doteq 2\ \text{cm}}$$

$$\boldsymbol{Q_{stěny} = \frac{1}{2} \,.\, 2\ \text{cm} \,.\, 2\ \text{cm} = 2\ \text{cm}^2}$$

Velikost povrchu vnitřního jehlanu určíme následovně

$$Q = 4\ \mathbf{cm^2} + 8\ \mathbf{cm^2}$$

$$Q = 12\ \mathbf{cm^2}$$

Povrch vnitřního jehlanu je 12 cm^2.

Zadaným úkolem bylo určit velikost povrchu „dutého“ jehlanu. Abychom jej určili, tak k povrchu vnějšího jehlanu přičteme velikost povrchu bočních stěn vnitřního jehlanu, a naopak od něj odečteme velikost obsahu podstavy vnitřního jehlanu, tedy

$$P = S + Q_{pl} - Q_p$$

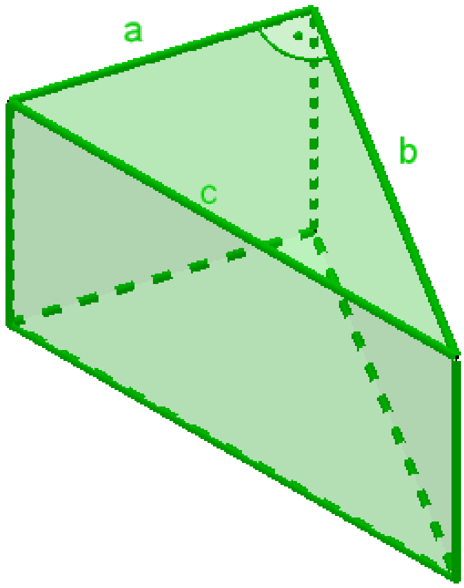
$$P = 96\ \mathbf{cm^2} + 8\ \mathbf{cm^2} - 4\ \mathbf{cm^2}$$

$$P = 100\ \mathbf{cm^2}$$

Odpověď: Povrch „dutého“ jehlanu je roven 100 cm^2.

Příklad 5.15:

Jak velký je povrch znázorněného kolmého trojbokého hranolu, známe-li délky odvěsen ***a*** = 6 cm, ***b*** = 8 cm podstavného pravoúhlého trojúhelníku? Výška znázorněného kolmého trojbokého hranolu je rovna délce kratší odvěsny v podstavném pravoúhlém trojúhelníku.



<u>Řešení:</u>

Povrch kolmého trojbokého hranolu je tvořen dvěma podstavami ve tvaru shodných pravoúhlých trojúhelníků a třemi pobočnými stěnami, z toho jedním čtvercem a dvěma obdélníky. Povrch kolmého trojbokého hranolu lze vypočítat užitím vzorce $\boldsymbol{S = 2 \,.\, S_p + S_{pl}}; kde\ \boldsymbol{S_p} - obsah\ podstavy, \boldsymbol{S_{pl}} - obsah\ pláště$

Protože jsou podstavy kolmého trojbokého hranolu tvořeny pravoúhlými trojúhelníky, lze velikosti jejich obsahů vypočítat pomocí vzorce pro výpočet velikosti obsahu pravoúhlého trojúhelníku, tj. podle vzorce:

$$\boldsymbol{S = \frac{a \,.\, b}{2}},$$

v němž ***a***, ***b*** jsou zadané délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku. A po dosazení jejich délek do vzorce získáváme

$$S_p = \frac{b\,.\,a}{2} = \frac{8\ \mathrm{cm}\,.\,6\ \mathrm{cm}}{2} = \frac{48\ \mathrm{cm}^2}{2} = 24\ \mathrm{cm}^2$$

Obsah jedné trojúhelníkové podstavy je 24 cm^2.

Výpočet velikosti obsahu pláště:

K určení celkové velikosti obsahu pláště musíme vypočítat velikost obsahu každé stěny hranolu zvlášť, a nakonec musíme tyto velikosti sečíst.

Jako první vypočítáme velikost obsahu čtvercové stěny s délkami hran ***a*** = 6 cm, ***v*** = 6 cm s užitím vzorce pro výpočet velikosti obsahu čtverce, neboť ***a*** = ***v*** = 6 cm. Odtud tedy

$$S_1 = a^2 = (a\,.\,a) = 6^2 \mathrm{cm}^2 = 36\ \mathrm{cm}^2$$

Čtvercová stěna má velikost obsahu rovnu 36 cm^2.

Druhá pobočná stěna kolmého trojbokého hranolu je obdélníkového tvaru s délkami hran rovnými ***b*** = 8 cm, ***v*** = 6 cm. Velikost jejího obsahu určíme užitím vzorce pro výpočet velikosti obsahu obdélníku, který je pro náš případ zapsán ve tvaru

$$S_2 = b\,.\,v$$

$$S_2 = 8\ \mathrm{cm}\,.\,6\ \mathrm{cm} = 48\ \mathrm{cm}^2$$

Obdélníková stěna s délkami hran rovnými ***b*** = 8 cm, ***v*** = 6 cm má velikost obsahu rovnu 48 cm^2.

I třetí pobočná stěna kolmého trojbokého hranolu je obdélníkového tvaru. Délku jedné její hrany však dosud zatím neznáme. Jedná se o neznámou délku přepony ***c*** v podstavném pravoúhlém trojúhelníku. Druhou hranou třetí pobočné stěny je opět výška ***v*** kolmého trojbokého hranolu, tj. ***v*** = 6 cm.

Délku přepony ***c*** podstavného pravoúhlého trojúhelníku spočítáme užitím Pythagorovy věty, kterou zapíšeme symbolicky ve známém tvaru $c^2 = a^2 + b^2$. Úpravou a dosazením zadaných hodnot dostáváme

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}\ \mathrm{cm} = \sqrt{100}\ \mathrm{cm} = 10\ \mathrm{cm}.$$

Vypočítali jsme, že hrana ***c*** kolmého trojbokého hranolu je dlouhá 10 cm, nyní již můžeme dopočítat velikost obsahu třetí pobočné stěny. Platí tedy, že

$$S_3 = c\,.\,v = 10\ cm\,.\,6\ cm = 60\ cm^2$$

Obdélníková stěna s délkami hran rovnými ***c*** = 10 cm, ***v*** = 6 cm má velikost obsahu rovnu 60 cm^2.

Na základě provedených výpočtů lze již určit velikost obsahu pláště daného trojbokého hranolu. Ta je výsledkem součtu velikostí obsahů všech tří pobočných stěn hranolu, tedy

$$\boldsymbol{S_{pl} = S_1 + S_2 + S_3}$$

$$\boldsymbol{S_{pl} = 36\ \mathrm{cm}^2 + 48\ \mathrm{cm}^2 + 60\ \mathrm{cm}^2}$$

$$\boldsymbol{S_{pl} = 144\ \mathrm{cm}^2}$$

Obsah pláště kolmého trojbokého hranolu má velikost 144 cm^2.

Následuje výpočet velikosti povrchu daného kolmého trojbokého hranolu pomocí sečtení velikostí obsahů obou trojúhelníkových podstav a velikostí obsahů všech tří pobočných stěn hranolu, tj. symbolicky zapsáno

$$\boldsymbol{S = 2\ .\ S_p + S_{pl}}.$$

Po dosazení vypočtených hodnot dostáváme

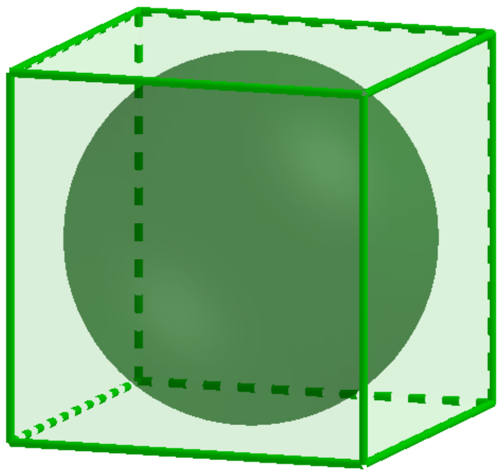
$$\boldsymbol{S = 2\ .\ 24\ \mathrm{cm}^2 + 144\ \mathrm{cm}^2}$$

$$\boldsymbol{S = 192\ \mathrm{cm}^2}$$

<u>Odpověď</u>: Velikost povrchu kolmého trojbokého hranolu daných rozměrů je rovna 192 cm^2.

Příklad 5.16:

Povrch koule znázorněné na obrázku je 113 cm^2. Jaký je objem volného prostoru v krychli, ve které je koule umístěna tak, že se svým povrchem dotýká každé ze stěn dané krychle právě v jednom bodě? (zaokrouhlujte na celá čísla)



<u>Řešení:</u>

Ze známé hodnoty velikosti povrchu koule lze dopočítat délku poloměru zadané koule. Vzorec pro výpočet velikosti povrchu koule je ve tvaru $\boldsymbol{S = 4\ .\ \pi\ .\ r^2}$, z něhož úpravami odvodíme vztah platný pro výpočet druhé mocniny délky poloměru koule, tj.

$$\boldsymbol{\frac{S}{4\ .\ \pi} = r^2}.$$

Odkud po odmocnění a následném dosazení zadaných hodnot obdržíme délku poloměru ***r*** koule, tj.

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\frac{\mathbf{113}}{\mathbf{4}\ .\ \mathbf{3,14}}} \doteq \sqrt{\mathbf{9}}\ \mathbf{cm} = \mathbf{3\ cm}$$

Poloměr koule znázorněné na obrázku je po zaokrouhlení na celé číslo roven 3 cm.

Když známe délku poloměru koule, můžeme vypočítat objem koule a následně i objem krychle, do níž je tato koule vepsaná. Hodnota výsledku rozdílu objemů krychle a koule poskytne požadovaný výsledek.

Následuje výpočet hodnoty objemu koule s užitím vzorce

$$\boldsymbol{V_{koule}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\ .\ \boldsymbol{\pi}\ .\ \boldsymbol{r}^{\mathbf{3}}.$$

Po dosazení vypočtené délky poloměru ***r*** = 3 cm koule do uvedeného vzorce obdržíme hodnotu objemu koule, tj.

$$\boldsymbol{V_{koule}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\ .\ \mathbf{3,14}\ .\ \mathbf{3^3\ cm^3} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\ .\ \mathbf{3,14}\ .\ \mathbf{27\ cm^3}$$

$$\boldsymbol{V_{koule}} = \mathbf{113,04\ cm^3} \doteq \mathbf{113\ cm^3}$$

Objem koule má hodnotu rovnu 113 cm^3.

Pokračujeme výpočtem hodnoty objemu krychle pomocí vzorce

$$\boldsymbol{V_{krychle}} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{3}},$$

kde ***a*** je délka hrany krychle. Nesmíme zapomenout, že poloměr koule je roven pouze jedné polovině délky hrany krychle, proto délka hrany krychle je ***a*** = 2 . ***r*** = 2 . 3 cm = 6 cm. Odtud

$$\boldsymbol{V_{krychle}} = \mathbf{6^3\ cm^3}$$

$$\boldsymbol{V_{krychle}} = \mathbf{216\ cm^3}.$$

Objem krychle má hodnotu rovnu 216 cm^3.

Na závěr spočítáme velikost volného prostoru v krychli pomocí zjištění hodnoty rozdílu hodnot objemu krychle a objemu koule, tj. platí, že

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_{krychle}} - \boldsymbol{V_{koule}}$$

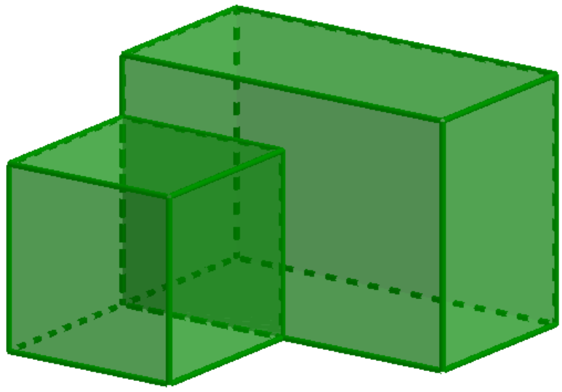
a po dosazení vypočtených hodnot

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{216\ cm^3} - \mathbf{113\ cm^3}$$

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{103\ cm^3}.$$

Odpověď: Volný prostor v krychli má hodnotu objemu rovnu 103 cm^3.

Příklad 5.17:



Určete objem znázorněného tělesa na obrázku, přitom těleso vzniklo sjednocením kvádru a krychle. Rozměry kvádru jsou 6 cm, 3 cm, 4 cm a délka hrany krychle je rovna jedné polovině nejdelší hrany kvádru.

Řešení:

Velikost objemu kvádru vypočítáme pomocí vzorce pro určení hodnoty objemu kvádru, tj. pomocí vzorce $\boldsymbol{V = a\,.\,b\,.\,c}$.

Do uvedeného vzorce dosadíme hodnoty rozměrů kvádru ze zadání, pak

$$\boldsymbol{V_{kvádru} = 6\ \mathrm{cm}\,.\,3\ \mathrm{cm}\,.\,4\ \mathrm{cm}}$$

$$\boldsymbol{V_{kvádru} = 72\ \mathrm{cm}^3}$$

Hodnota objemu kvádru je rovna 72 cm^3.

Velikost objemu krychle vypočítáme s užitím vzorce pro výpočet hodnoty objemu krychle, tj. s užitím vzorce $\boldsymbol{V_{krychle} = a^3 = a\,.\,a\,.\,a}$.

Ze zadání víme, že délka hrany krychle je rovna jedné polovině délky nejdelší hrany kvádru, přitom délka nejdelší hrany kvádru je rovna 6 cm. Jedna polovina ze 6 cm jsou 3 cm. Délka hrany krychle je tedy rovna 3 cm.

Určenou délku hrany krychle dosadíme do vzorce pro výpočet hodnoty objemu krychle, pak

$$\boldsymbol{V_{krychle} = 3^3\ \mathrm{cm}^3}$$

$$\boldsymbol{V_{krychle} = 27\ \mathrm{cm}^3.}$$

Hodnota objemu krychle je rovna 27 cm^3.

Celkový objem zobrazeného tělesa je roven součtu hodnot objemů kvádru a krychle, tj.

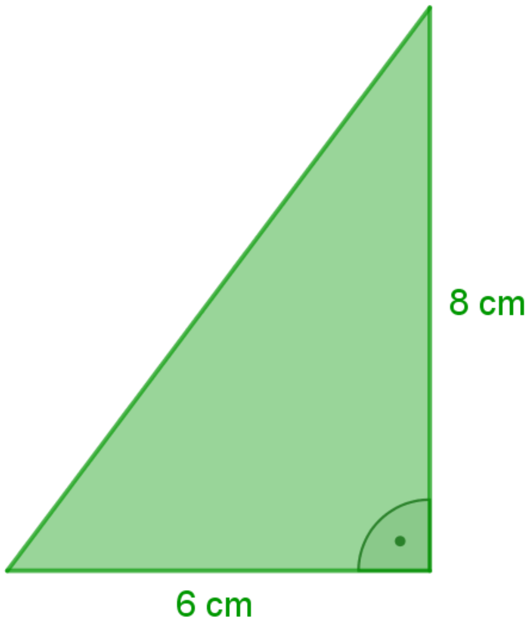
$$\boldsymbol{V = V_{kvádru} + V_{krychle}}$$

$$\boldsymbol{V = 72\ \mathrm{cm}^3 + 27\ \mathrm{cm}^3}$$

$$\boldsymbol{V = 99\ \mathrm{cm}^3.}$$

Odpověď: Hodnota objemu zobrazeného seskupeného tělesa je rovna 99 cm^3.

Příklad 5.18:



Je dán pravoúhlý trojúhelník s délkami odvěsen ***a*** = 6 cm, ***b*** = 8 cm. Rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem delší odvěsny vznikne rotační kužel. Vypočtěte objem a povrch tohoto rotačního kužele. (použijte hodnotu π = 3,14)

<u>Řešení</u>:

Víme-li, jakým způsobem vznikne rotační kužel, v tomto případě rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jeho delší odvěsny, lze snadno určit poloměr podstavy, výšku i délku strany kužele. Strana, kolem které pravoúhlý trojúhelník rotuje, bude výška kužele. V tomto příkladu je tedy ***v*** = 8 cm. Poloměr podstavného kruhu bude roven délce kratší odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, tedy ***r*** = 6 cm. A délku strany ***s*** kužele dopočítáme pomocí Pythagorovy věty, protože víme, že rotuje pravoúhlý trojúhelník.

Výpočet délky strany ***s*** kužele:

Pythagorovu větu zapíšeme pro náš příklad symbolicky ve tvaru $\boldsymbol{s^2 = v^2 + r^2}$.

Dosazením zadaných hodnot do symbolického zápisu Pythagorovy věty získáme postupnými úpravami délku strany ***s*** kužele, tedy

$$\boldsymbol{s^2 = 8^2\ \mathrm{cm}^2 + 6^2\ \mathrm{cm}^2}$$

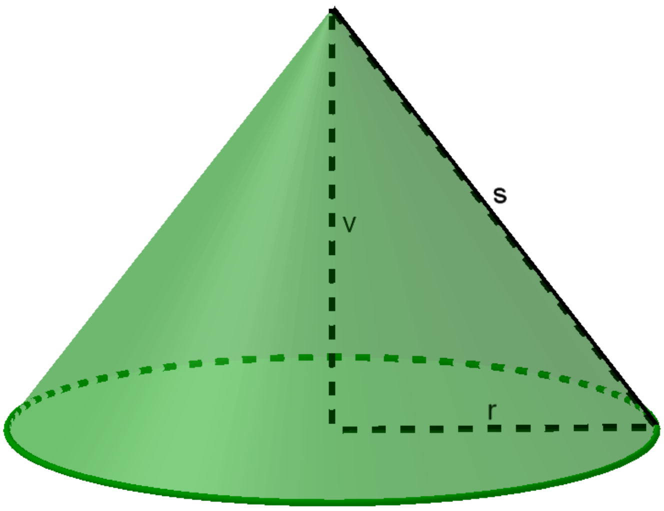
$$\boldsymbol{s = \sqrt{8^2 + 6^2}\ \mathrm{cm} = \sqrt{64 + 36}\ \mathrm{cm} = \sqrt{100}\ \mathrm{cm}}$$

$$\boldsymbol{s = 10\ \mathrm{cm}}$$

Délka strany rotačního kužele je 10 cm.

Výpočet hodnoty objemu rotačního kužele:

Objem rotačního kužele vypočítáme užitím vzorce pro určení hodnoty objemu rotačního kužele zapsaného obecně ve tvaru $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\,.\,\pi\,.\,r^2\,.\,v}$, kde $\boldsymbol{r}$ je poloměr kruhové podstavy rotačního kužele a $\boldsymbol{v}$ je výška rotačního kužele.



Dosazením zadaných hodnot do zmíněného vzorce dostaneme

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\,.\,3,14\,.\;6^2\ \mathrm{cm}^{\,2}.\,8\ \mathrm{cm}}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\,.\,3,14\,.\;36\ \mathrm{cm}^2\,.\,8\ \mathrm{cm}}$$

$$\boldsymbol{V = 301,44\ \mathrm{cm}^3}$$

Hodnota objemu rotačního kužele je 301,44 cm^3.

Výpočet velikosti povrchu rotačního kužele:

Před konkrétním výpočtem uveďme ještě vzorec pro výpočet velikosti povrchu rotačního kužele, ten lze obecně zapsat ve tvaru $\boldsymbol{S = \pi\,.\,r^2 + \pi\,.\,r\,.\,s = \pi\,.\,r\,.\,(r+s)}$, kde $\boldsymbol{r}$ je poloměr kruhové podstavy rotačního kužele a $\boldsymbol{s}$ je délka strany rotačního kužele.

Jelikož známe všechny hodnoty, které k výpočtu velikosti povrchu daného rotačního kužele potřebujeme, dosadíme tyto hodnoty do uvedeného vzorce a dostáváme

$$\boldsymbol{S = 3,14\,.\,6\ cm\,.\,(6\ cm + 10\ cm)}$$

$$\boldsymbol{S = 301,44\ cm^2}$$

<u>Odpověď</u>: Hodnota objemu rotačního kužele je 301,44 cm^3 a povrch tohoto rotačního kužele má velikost rovnu 301,44 cm^2.

2.5.2 Úlohy k procvičení

Úloha 5.1:

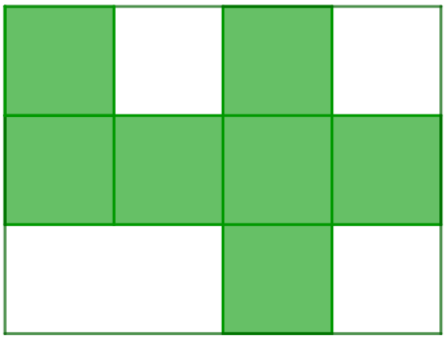
Doplňte chybějící hodnoty tak, aby platily příslušné rovnosti:

1. 0,15 m^2 = 270 cm^2 + ……………………….. cm^2
2. 21 dm^3 + ……………………….. cm^3 = 23,5 litru

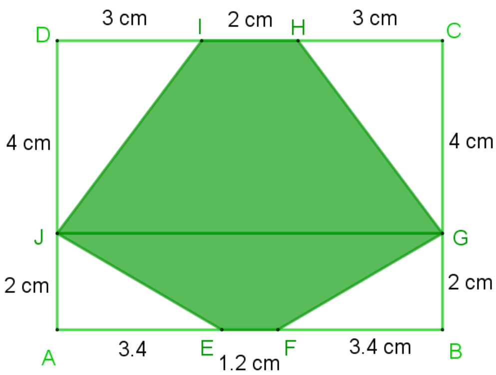
3. .... * 15 minut = 6 * 0,25 hodiny
4. 1,2 litru = ...dm^3 – 100 cm^3
5. ....* 2,75 hodiny + 60 minut = 23 hodin

Úloha 5.2:

Na obrázku je obdélník s délkami stran ***a*** = 8 cm a ***b*** = 6 cm. Délka delší strany obdélníku je rozdělena na čtvrtiny a délka kratší strany obdélníku je rozdělena na třetiny. Určete obsah zeleně zvýrazněné části v obdélníku.



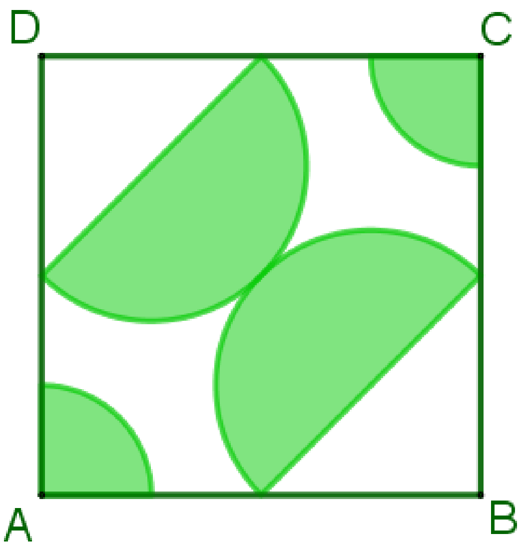
Úloha 5.3:



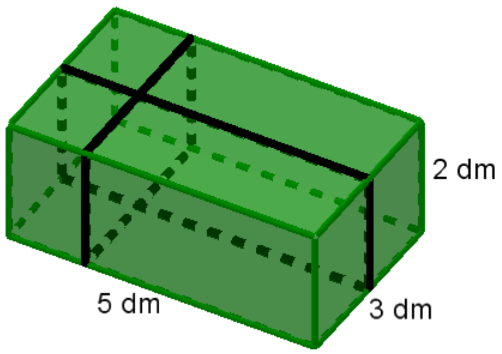
Na obrázku je dán obdélník o rozměrech 8 cm a 6 cm. Jeho strany jsou rozděleny na různé části, viz obrázek. Vypočítejte velikosti obsahu a obvodu barevného různoběžníku ***EFGHIJ***.

Úloha 5.4:

Ve čtverci ***ABCD*** jsou umístěny dva barevné půlkruhy a dva barevné čtvrtkruhy. Určete obsah bílé plochy ve čtverci ***ABCD***, je-li délka strany čtverce rovna 4 cm. Krajní body průměrů půlkruhů leží ve středech stran čtverce ***ABCD***. Délky poloměrů čtvrtkruhů jsou rovny jedné čtvrtině délky strany čtverce.



Úloha 5.5:



Na obrázku je znázorněn zabalený dárek tvaru kvádru. Rozměry tohoto dárku jsou 5 dm, 3 dm a 2 dm. Černé čáry na obrázku znázorňují ozdobnou stužku, kterou je dárek převázán. Určete délku zobrazené stužky. K výsledku ještě připočtěte 2,5 dm na uzel s mašlí.

Úloha 5.6:

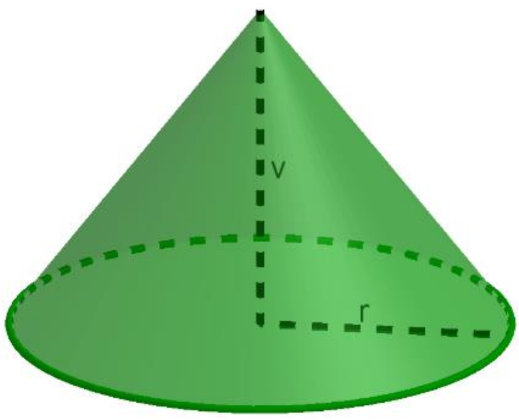
Bazén tvaru kvádru má šířku 2 m, délka bazénu je 4 m a hloubka je 1,5 m. Bazén je naplněný vodou do dvou třetin své hloubky ode dna. Kolik litrů vody se musí do bazénu ještě připustit, aby hladina vody sahala až po okraj bazénu?

Úloha 5.7:

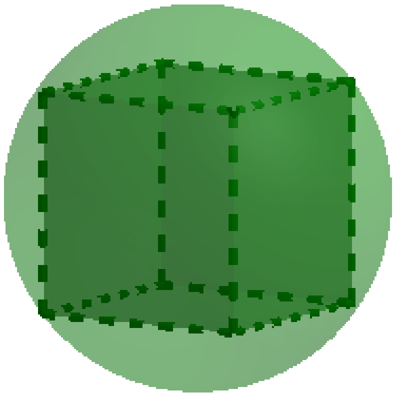
Vypočítejte objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož výška je 14 cm a podstavná hrana má délku rovnu 6 cm.

Úloha 5.8:

Je dán rotační kužel s průměrem kruhové podstavy 24 cm a s výškou 16 cm. Vypočítejte velikost povrchu tohoto kužele.



Úloha 5.9:



Uvnitř koule je umístěna krychle s délkou hrany ***a*** = 2 cm, která se každým svým vrcholem dotýká povrchu koule. Jaký je objem volného prostoru v kouli? (počítejte s π = 3,14, $(\sqrt{3})^3 \doteq 5{,}2$ cm a zaokrouhlujte na celá čísla)

Úloha 5.10:

Je dán obdélník s délkami stran ***a*** = 3 cm, ***b*** = 7 cm. Rotací zmíněného obdélníku kolem jeho delší strany vznikne rotační válec. Vypočtěte objem a povrch tohoto rotačního válce. (použijte hodnotu π = 3,14)

2.5.2.1 *Výsledky*

Úloha 5.1:

1. 0,15 m^2 = 270 cm^2 + **1 230** cm^2
2. 21 dm^3 + **2 500** cm^3 = 23,5 litru
3. **6** * 15 minut = 6 * 0,25 hodiny
4. 1,2 litru = **1,3** dm^3 – 100 cm^3
5. **8** * 2,75 hodiny + 60 minut = 23 hodin

Úloha 5.2: Velikost obsahu zeleně vyznačené části je rovna 28 cm^2.

Úloha 5.3: Velikost obsahu barevného různoběžníku ***EFGHIJ*** je rovna 29,2 cm^2. Délka obvodu různoběžníku ***EFGHIJ*** je rovna 21,2 cm.

Úloha 5.4: Velikost obsahu bílé plochy ve čtverci je rovna 8,15 cm^2.

Úloha 5.5: Na zabalení dárku je potřeba 26,5 dm ozdobné stužky.

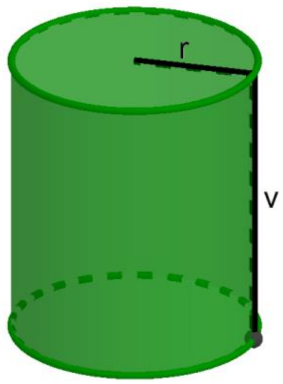
Úloha 5.6: Do bazénu je ještě potřeba připustit 4 000 litrů vody, aby hladina vody sahala až po jeho okraj.

Úloha 5.7: Hodnota objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu je 168 cm^3.

Úloha 5.8: Velikost povrchu rotačního kužele je 1 205,76 cm^2.

Úloha 5.9: Hodnota objemu volného prostoru v kouli je rovna 14 cm^3.

Úloha 5.10: Rotací obdélníku s délkami stran $a = r = 3$ cm a $b = v = 7$ cm vznikl rotační válec, hodnota jeho objemu je rovna 197,82 cm^3 a velikost jeho povrchu je rovna 188,4 cm^2.



3 Výzkumná část

Třetí část diplomové práce je věnována vyhodnocení provedeného výzkumu, jehož hlavním záměrem bylo zjištění znalostí žáků 9. tříd oslovených základních škol z Liberce a z Jablonce nad Nisou z oblasti geometrie, resp. zjištění jejich připravenosti z oblasti geometrie na státní přijímací zkoušky z matematiky na střední školy. V ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy byla v posledních několika letech téměř polovina úloh právě z oblasti geometrie. Z celkových bodových výsledků žáků získaných v ostrých přijímacích zkouškových testech z matematiky na SŠ není zřejmé, jaká je jejich úspěšnost při řešení úloh z geometrie. Proto bylo cílem uskutečněného výzkumu zjistit, jaké úspěšnosti mohou žáci dosahovat při řešení geometrických úloh ve státních zkouškových přijímacích testech z matematiky na SŠ.

Začátkem února roku 2021 byly e-mailem osloveny všechny základní školy nacházející se v Liberci, ale i některé základní školy v jeho okolí s prosbou, zda by žákům 9. tříd mohl být zadán připravený test obsahující 6 úloh z různých témat z geometrie. Rozesílané e-maily byly adresovány buď vedení základních škol, na jejichž webových stránkách nejsou uvedeny přímé kontakty na učitele matematiky, anebo přímo učitelům matematiky vyučujícím na základních školách, na jejichž webových stránkách jsou umístěné přímé kontakty na učitele včetně uvedení jejich aprobačních předmětů. K rozesílaným e-mailům bylo rovnou již přiloženo zadání sestaveného testu. Oslovení učitelé již tedy mohli přímo získat představu o zadání, jakého testu svým žákům jsou žádáni. I přestože test byl předpřipraven a učitelé jej mohli zadat svým žákům např. v rámci jejich přípravy ke státním přijímacím zkouškám z matematiky na SŠ koncem února 2021 a v průběhu března 2021, tj. ještě v době před skutečným termínem státních přijímacích zkoušek na SŠ ve školním roce 2020/2021, výzkumu se nakonec z celkově 23 oslovených základních škol zapojily pouze 4 základní školy z Liberce a 1 základní škola z Jablonce nad Nisou.

Počet spolupracujících základních škol v Liberci a jeho okolí byl vskutku minimální, příčiny tak malého zájmu o spolupráci mohou být různé. O jaké příčiny se vskutku jednalo, můžeme nyní již jen spekulovat. V důsledku současné pandemické situace se mohlo jednat např. o to, že na mnohých základních školách je počet hodin distanční výuky žákům redukován na optimální možný a učitelé nechtěli své žáky zatěžovat dalšími úkoly. Anebo příprava na státní přijímací zkoušky z matematiky je pro učitele, ale především pro žáky v době distanční výuky mnohem náročnější a učitelé tak mohli mít obavy z nízké úspěšnosti svých žáků. Na druhou stranu se domnívám, že vypracování speciálně sestaveného testu mohli učitelé pojmout i jako formu dalšího procvičování a přípravy svých žáků na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ, mnozí tak ale, jak už bylo výše uvedeno, neučinili. Anebo učinili, ale vyplněné testy nezaslali zpět. Tuto skutečnost ale již nezjistím.

3.1 Test vytvořený k ověření znalostí žáků 9. tříd z geometrie

V této kapitole je nejdříve představeno zadání testu speciálně vytvořeného za účelem testování znalostí žáků 9. tříd z geometrie a následně jsou vzorově okomentována řešení všech 6 úloh z testu. Vytvořený test obsahuje šest úloh z různých kapitol geometrie, přitom byly vymyšleny a do tohoto testu zařazeny příklady, které jsou velmi podobné těm, které se v posledních letech vyskytovaly v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky. Test byl tedy koncipován tak, aby prověřil úroveň žákovských znalostí v oblasti geometrie a také připravenost žáků 9. tříd z Liberce a okolí na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ v oblasti geometrie.

Testy žáci odevzdávali anonymně. Kromě vypracování 6 úloh byli žáci vyzváni k zodpovězení tří dotazů. Žáci byli tázáni ke sdělení svého pohlaví, k uvedení střední školy, na kterou si přejí být přijati (žákům byly testy zadávány zpravidla až v průběhu března 2021, kdy měli své přihlášky na střední školy již odevzdány) a k napsání známky z matematiky, kterou byli ohodnoceni v pololetí 9. třídy. Vzhledem k anonymnímu odevzdávání testů nebyla žákům, jejich rodičům či učitelům zavdaná žádná příčina ke zneužití uvedených informací.

Zadání testu:

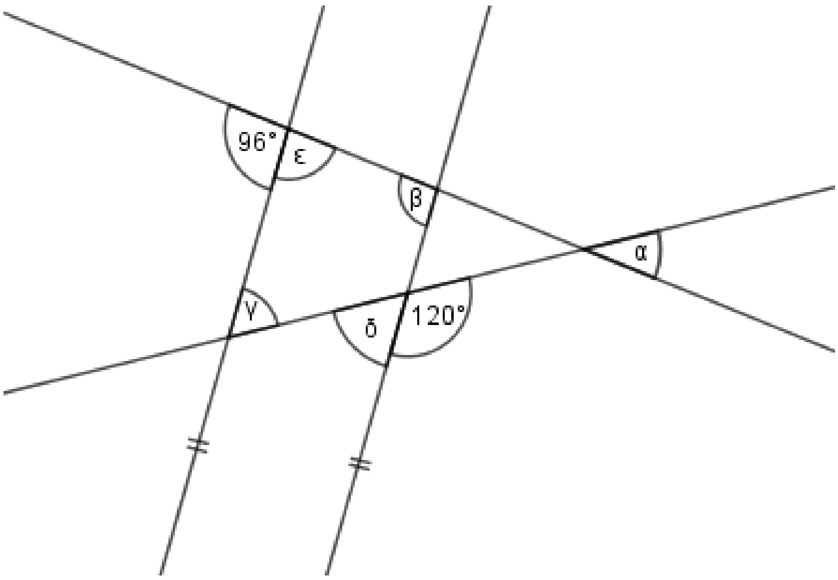
Základní škola:

Pohlaví:

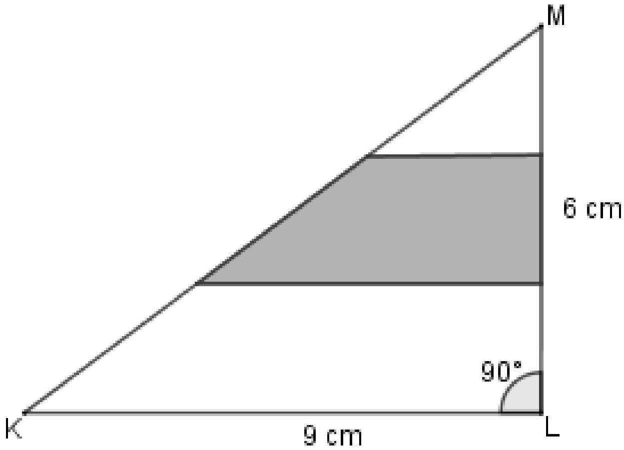
Střední škola, na kterou si přejete se dostat:

Známka z matematiky v pololetí 9. třídy:

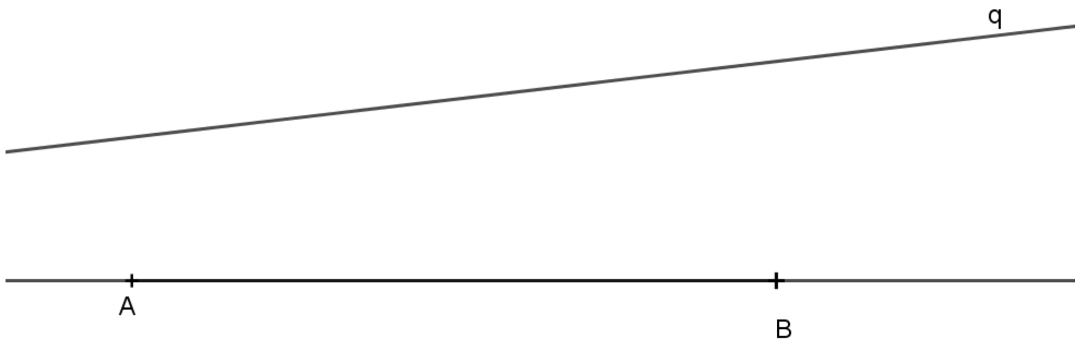
1. Určete velikost úhlu α.



2. Pravoúhlý trojúhelník *KLM* má odvěsny s délkami 9 cm a 6 cm. Je dvěma úsečkami rovnoběžnými s delší odvěsnou rozdělen na tři rovinné útvary. Rovnoběžné úsečky rozdělily kratší odvěsnu na tři shodné úsečky. Jaký je obsah tmavého útvaru?



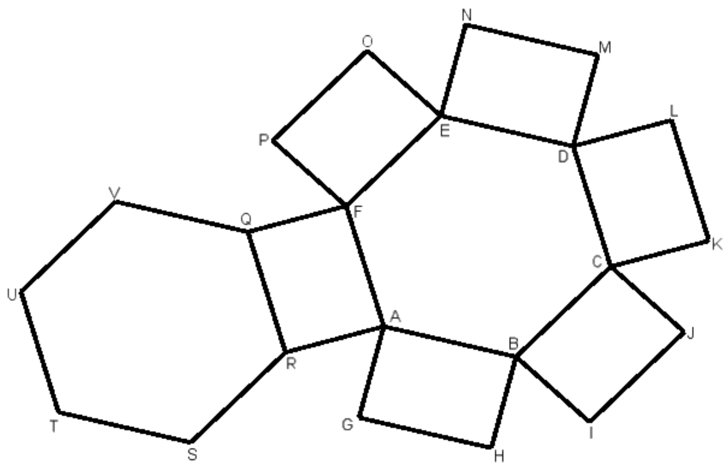
3. V rovině leží dvě různoběžné přímky – přímka *AB* a přímka *q*. Body *A*, *B* jsou vrcholy rovnoramenného lichoběžníku *ABCD*. Bod *C* leží na přímce *q*. Rameno *AD* má velikost 4 cm. Sestrojte chybějící vrcholy *C*, *D* rovnoramenného lichoběžníku *ABCD* a narýsujte všechny lichoběžníky uvedených vlastností. Napište symbolický zápis konstrukce.



4. Na vynechaná místa doplňte chybějící čísla tak, aby platily jednotlivé rovnosti:
   a) 5 dm^2 + …………… cm^2 = 7 dm^2
   b) 0,4 dm^3 + …………… cm^3 = 1 litr
   c) 2 m^3 – 150 litrů = ……………. litrů
   d) 89,3 dm – 4,7 m = …………….. cm

5. Válec s kruhovou podstavou o obsahu 30 dm^2 má objem 360 litrů. Ze zcela naplněného válce se odebralo 120 litrů vody. V jaké výšce ode dna je vodní hladina po odebrání 120 litrů vody? (s přesností na dm)

6. Na obrázku je síť kolmého pravidelného šestibokého hranolu. K bodu *N* najděte na obrázku všechny další body sítě, které ve složeném hranolu představují stejný vrchol.



Lze si všimnout, že v sestaveném testu se objevují obdobné úlohy těm, které jsou uvedeny v praktické části této diplomové práce.

Vzorové řešení testu:

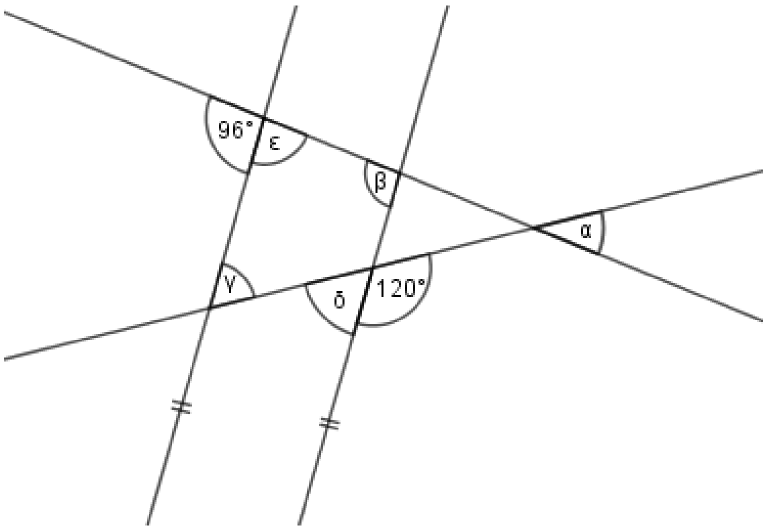
Základní škola:

Pohlaví:

Střední škola, na kterou si přejete se dostat:

Známka z matematiky v pololetí 9. třídy:

1. Určete velikost úhlu α.



K výpočtu velikosti úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ využijeme znalostí o vedlejších a vrcholových úhlech, o jejich velikostech a také známé skutečnosti, že součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180°.

V tomto příkladě určíme nejprve velikosti úhlů $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\gamma}$. Po výpočtu velikostí těchto dvou úhlů je již možné vypočítat velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$, jehož velikost bude rovna velikosti třetího vnitřního úhlu v trojúhelníku se dvěma vnitřními úhly $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\gamma}$, neboť úhel $\boldsymbol{\alpha}$ je k tomuto třetímu vnitřnímu úhlu trojúhelníku úhel vrcholový.

Výpočet:

$$\boldsymbol{\varepsilon = 180° - 96° = 84°}$$

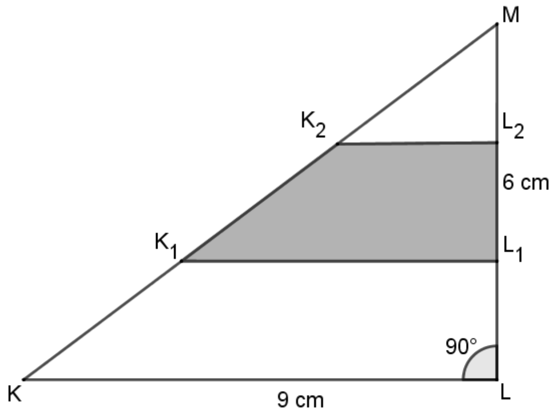
$$\boldsymbol{\gamma = 180° - 120° = 60°}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 180° - 84° - 60° = 36°}$$

Odpověď:

Velikost úhlu $\boldsymbol{\alpha}$ je rovna 36°.

2. Pravoúhlý trojúhelník *KLM* má odvěsny s délkami 9 cm a 6 cm. Je dvěma úsečkami rovnoběžnými s delší odvěsnou rozdělen na tři rovinné útvary. Rovnoběžné úsečky rozdělily kratší odvěsnu na tři shodné úsečky. Jaký je obsah tmavého útvaru?



K řešení tohoto příkladu využijeme znalostí o podobnosti trojúhelníků ***KLM***, ***K₁L₁M*** a ***K₂L₂M***. Z podobností těchto tří uvedených pravoúhlých trojúhelníků plynou rovnosti poměrů mezi délkami jejich stran, tj.

$$\boldsymbol{\frac{k}{k_1} = \frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1}},$$
$$\boldsymbol{\frac{k}{k_2} = \frac{l}{l_2} = \frac{m}{m_2}},$$

kde ***k***, ***l***, ***m*** jsou strany trojúhelníku ***KLM***, $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{l_1}$, $\boldsymbol{m_1}$ jsou strany trojúhelníku ***K₁L₁M*** a $\boldsymbol{k_2}$, $\boldsymbol{l_2}$, $\boldsymbol{m_2}$ jsou strany trojúhelníku ***K₂L₂M***. Užitím uvedených poměrů vypočítáme délky základen $\boldsymbol{m_1}$ a $\boldsymbol{m_2}$ tmavě zvýrazněného pravoúhlého lichoběžníku ***K₂L₂L₁K₁***. Poté můžeme vypočtené délky základen $\boldsymbol{m_1}$ a $\boldsymbol{m_2}$ pravoúhlého lichoběžníku ***K₂L₂L₁K₁*** společně s velikostí výšky tohoto pravoúhlého lichoběžníku, která je rovna 1/3 délky strany ***k*** trojúhelníku ***KLM***, tedy 2 cm, dosadit do vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku, čímž získáme hledaný výsledek

Výpočet:

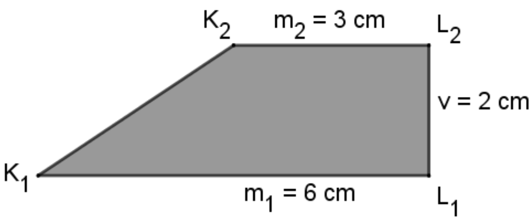
Poměr platný pro délky stran podobných pravoúhlých trojúhelníků ***KLM*** a ***K₁L₁M***:

$$\boldsymbol{\frac{k}{k_1} = \frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1}},$$

ze kterého vypočteme po úpravě a po dosazení délku základny $\boldsymbol{m_1}$ = 6 cm, a poměr platný pro délky stran podobných pravoúhlých trojúhelníků ***KLM*** a ***K₂L₂M***:

$$\boldsymbol{\frac{k}{k_2} = \frac{l}{l_2} = \frac{m}{m_2}},$$

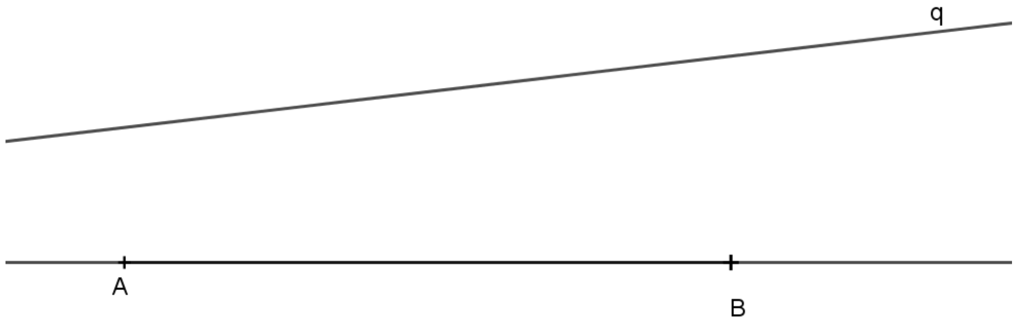
ze kterého vypočteme po úpravě a po dosazení délku základny $\boldsymbol{m_2}$ = 3 cm. Odtud po dosazení vypočtených hodnot do vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku obdržíme



$$\boldsymbol{S = \frac{(m_1 + m_2).\ v}{2} = \frac{(6\ \mathrm{cm} + 3\ \mathrm{cm})\ .\ 2\ \mathrm{cm}}{2} = 9\ \mathrm{cm}^2}.$$

Odpověď: Obsah tmavého útvaru, tj. pravoúhlého lichoběžníku je 9 cm^2.

3. V rovině leží dvě různoběžné přímky – přímka *AB* a přímka *q*. Body *A*, *B* jsou vrcholy rovnoramenného lichoběžníku *ABCD*. Bod *C* leží na přímce *q*. Rameno *AD* má velikost 4 cm. Sestrojte chybějící vrcholy *C*, *D* rovnoramenného lichoběžníku *ABCD* a narýsujte všechny lichoběžníky uvedených vlastností. Napište symbolický zápis konstrukce.

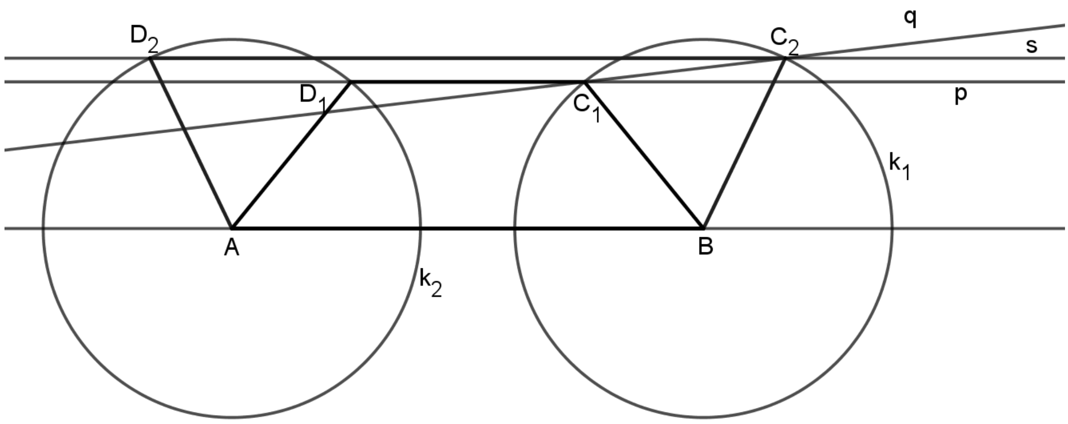


Uvědomíme-li si, že úkolem úlohy je sestrojení rovnoramenného lichoběžníku s délkou ramen 4 cm, a víme-li, že bod ***C*** má dle zadání úlohy ležet na přímce ***q***, využijeme znalostí těchto dvou skutečností k sestrojení bodu ***C***. Tj. sestrojíme kružnici $\boldsymbol{k_1}$ se středem v bodě ***B*** a s poloměrem rovným 4 cm. Bod ***C*** je průsečíkem kružnice $\boldsymbol{k_1}$ a dané přímky ***q***. Dále sestrojíme rovnoběžku s přímkou ***AB*** procházející bodem ***C*** a poté kružnici $\boldsymbol{k_2}$ se středem v bodě ***A*** a s poloměrem 4 cm. Průsečíkem rovnoběžky s přímkou ***AB*** procházející bodem ***C*** a kružnice $\boldsymbol{k_2}$ je poslední hledaný vrchol ***D*** sestrojovaného rovnoramenného lichoběžníku ***ABCD***.

<u>Symbolický zápis konstrukce</u>:

a. k_1; k_1 (B, 4 cm)
b. C_1, C_2; $C_1, C_2 \in q \cap k_1$, $C_1 \not\equiv C_2$
c. k_2; k_2 (A, 4 cm)
d. p; $p \parallel \leftrightarrow AB$, $C_1 \in p$
e. s; $s \parallel \leftrightarrow AB$, $C_2 \in s$
f. D_1, D'_1; $D_1, D'_1 \in p \cap k_2$, $D_1 \not\equiv D'_1$
g. D_2, D'_2; $D_2, D'_2 \in s \cap k_2$, $D_2 \not\equiv D'_2$
h. Lichoběžníky ABC_1D_1, ABC_2D_2

Konstrukce:



4. Na vynechané místo doplňte chybějící čísla tak, aby platily jednotlivé rovnosti:
   a) 5 dm^2 + ………….. cm^2 = 7 dm^2 200 cm^2
   b) 0,4 dm^3 + ………….. cm^3 = 1 litr 600 cm^3
   c) 2 m^3 – 150 litrů = ……………. litrů 1 850 l
   d) 89,3 dm – 4,7 m = ……………. cm 423 cm

5. Válec s kruhovou podstavou o obsahu 30 dm^2 má objem 360 litrů. Ze zcela naplněného válce se odebralo 120 litrů vody. V jaké výšce ode dna je vodní hladina po odebrání 120 litrů vody? (s přesností na dm)

V této úloze je důležité se zamyslet nad tím, co vlastně známe a co potřebujeme vypočítat. Známe-li obsah kruhové podstavy válce, tak stačí nejprve spočítat objem zbylé vody ve válci po odebrání daných 120 l a pak užitím vzorce pro výpočet objemu válce dopočítat výšku hladiny vody ode dna válce.

Výpočet: $\mathbf{360\,\boldsymbol{l} - 120\,\boldsymbol{l} = 240\,\boldsymbol{l}}$ Objem vody ve válci po odebrání 120 litrů vody.

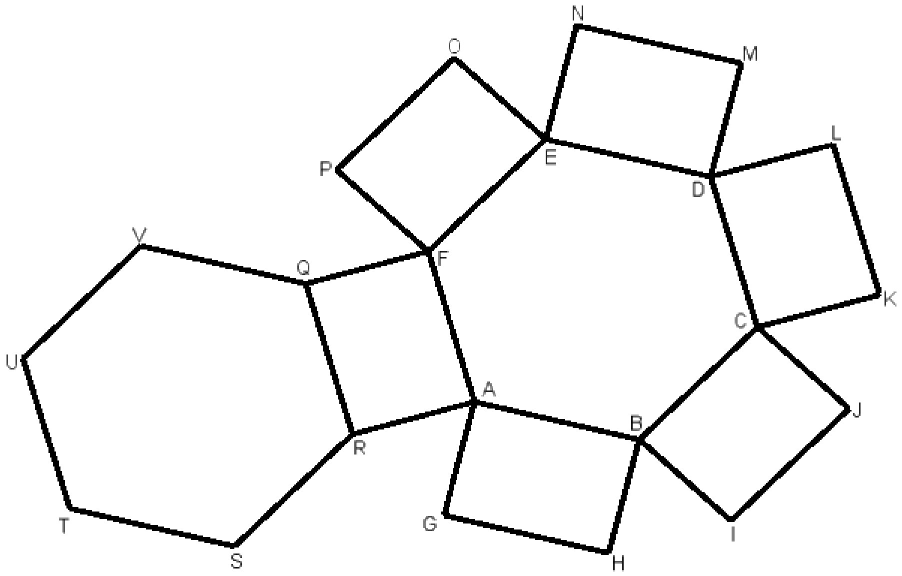
$$\boldsymbol{V = \pi \,.\, r^2 \,.\, v}$$

$$\mathbf{240\,l = 30\,dm^2}\,\boldsymbol{.\,v}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{240}\,\boldsymbol{dm^3}}{\mathbf{30\,dm^2}} = \mathbf{8\,dm}$$

Odpověď: Vodní hladina je po odebrání 120 l vody z válce ve výšce 8 dm od jeho dna.

6. Na obrázku je síť kolmého pravidelného šestibokého hranolu. K bodu *N* najděte na obrázku všechny další body sítě, které ve složeném hranolu představují stejný vrchol.



Při řešení tohoto příkladu mohou žáci s výhodou využít svou prostorovou představivost. Žáci by si totiž měli představit složený kolmý pravidelný šestiboký hranol a nalézt tak všechny body sítě, které po jejím složení v kolmý pravidelný šestiboký hranol odpovídají bodu ***N***.

<u>Odpověď</u>: Vrcholy ***O*** a ***V*** odpovídají vrcholu ***N*** po složení dané sítě v kolmý pravidelný šestiboký hranol.

<u>Bodové ohodnocení testu</u>:

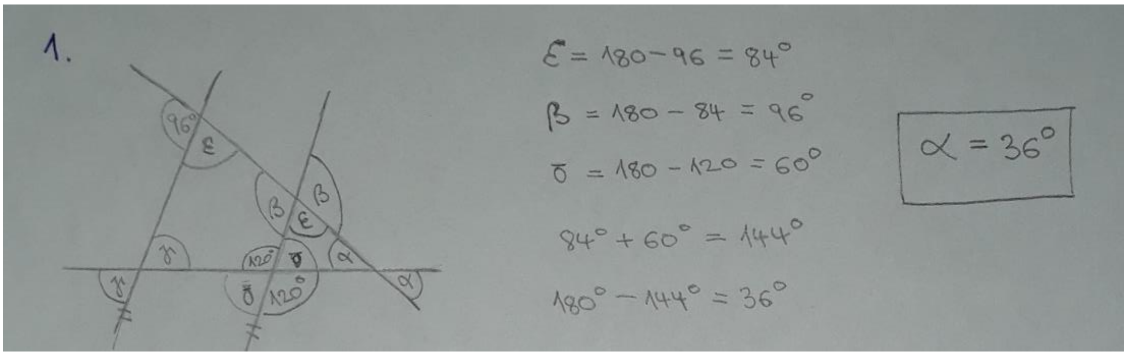
Vytvořený test byl bodován následujícím způsobem:

Všechny úlohy kromě třetí úlohy (tj. konstrukční úlohy) byly ohodnoceny stejnou maximální bodovou hodnotou. Maximální počet bodů, které žáci mohli získat za každou tuto úlohu, tj. za úlohy 1, 2 a 4 – 6, byl 2 body. Pokud žák měl alespoň polovinu výpočtů či polovinu řešení úlohy správně, obdržel 1 bod. Pokud měl ale žák správně méně než polovinu výpočtů nebo méně než polovinu řešení úlohy, anebo neměl žádný výpočet správný, anebo neměl úlohu vůbec vyřešenou, pak za ni nezískal žádný bod. U konstrukční úlohy byl maximální možný počet získaných bodů 4 body, z toho byly 2 body za konstrukci a 2 body za symbolický zápis konstrukce. Konstrukční úloha má dvě možná řešení a oproti ostatním zadaným úlohám byla náročnější, proto byla tato úloha bodována vyšším počtem bodů oproti ostatním úlohám v testu.

3.2 Žákovská řešení zadaného testu

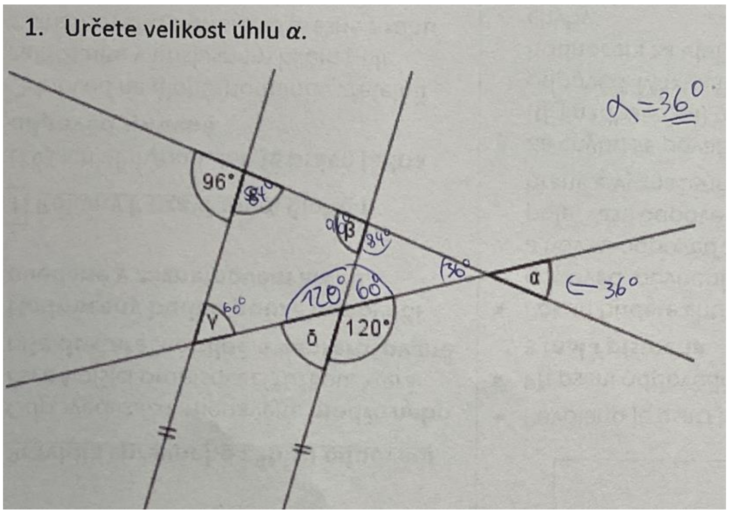
V této kapitole budou ukázána žákovská řešení čtyř úloh zadaného testu, a to přesněji ukázky žákovských řešení úloh 1, 2, 3 a 5. Konkrétní ukázky žákovských řešení úloh 4 a 6 nejsou zařazeny, a to z toho důvodu, že žáci při řešení těchto dvou úloh psali rovnou odpovědi nebo zápisy řešení u těchto dvou úloh nebyly nijak zvlášť zajímavé

3.2.1 Úloha 1



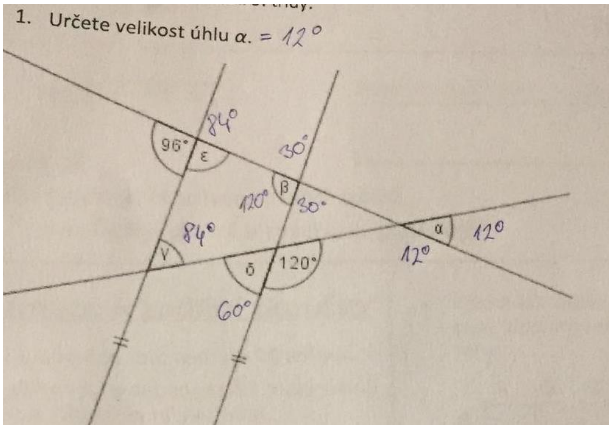
Ukázka 1

Žák, který vypracovával úlohu č. 1 v ukázce 1, si v náčrtku šikovně pomocí písmen řecké abecedy označil dvojice souhlasných úhlů, pak i dvojice vedlejších a vrcholových úhlů. Díky tomuto správnému označení a také díky jeho znalostem o vztazích platných pro velikost dvojic souhlasných, vedlejších a vrcholových úhlů, ale i o součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku už samotný numerický výpočet, který má znázorněný vpravo vedle obrázku, nebyl pro něj problematický. Jediné, na co by si tento žák měl dát do budoucna pozor, je důsledné dodržování označení stupňové míry ve výpočtech. V tomto případě tato jeho nedůslednost ale vliv na výsledek nemá.



Ukázka 2

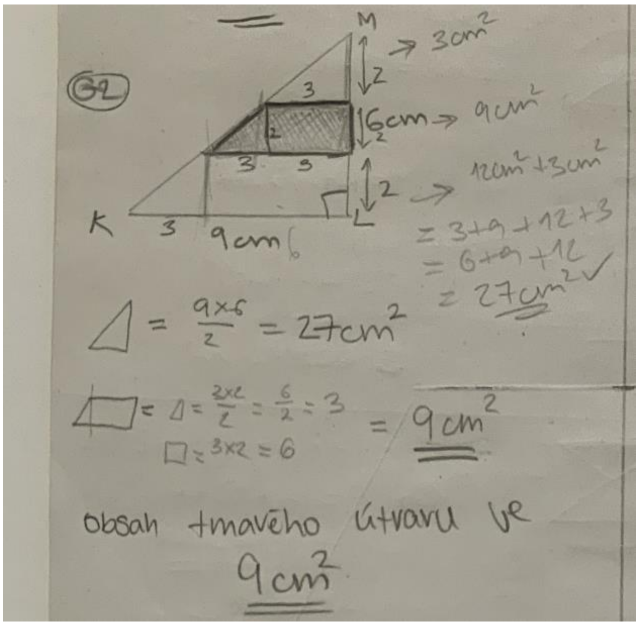
V ukázce 2 si žák při řešení úlohy č. 1 nezapisoval žádné mezivýpočty, tudíž mohou nastat dvě možnosti, jak při řešení této úlohy postupoval. Tento žák při výpočtu buď počítal všechny velikosti úhlů zpaměti nebo mezivýpočty zapisoval na pomocný papír, který však neodevzdal. Opět si lze všimnout, že využívá znalostí o velikostech dvojic vrcholových a vedlejších úhlů správně. Přesněji však nelze jeho myšlenkový postup jednotlivých výpočtů popsat, jako tomu bylo možné u předcházející ukázky 1, neboť nejsou k dispozici ukázky dílčích výpočtů a nelze tedy říct, v jakém pořadí počítal velikosti doplněných úhlů v ukázce 2. Na druhou stranu jej však jeho úvahy a výpočty dovedly ke správnému výsledku.



Ukázka 3

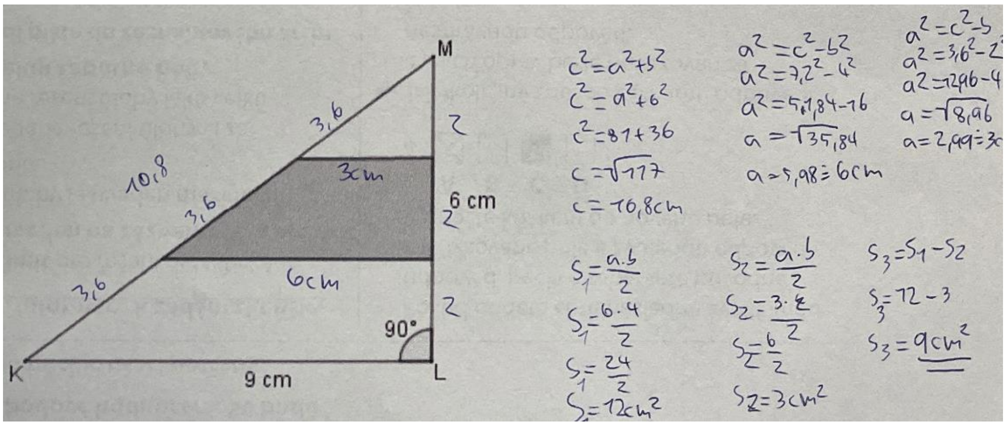
Ve třetí ukázce je znázorněné nesprávné řešení úlohy č. 1. Autor tohoto řešení pravděpodobně ví, že existují dvojice nějakých vrcholových a vedlejších úhlů, což naznačuje např. správně vypočtená velikost 60°úhlu ***δ***, tj. úhlu vedlejšího k zadanému úhlu 120°, ale na druhou stranu ze zápisu jeho řešení je patrné, že dostatečně dobře neporozuměl vlastnostem a principům dvojic souhlasných a střídavých úhlů, a proto jeho výpočty nemohly být správné a dovést jej ke zdárnému výsledku. Další skutečností, které si lze všimnout, je fakt, že žák nedokáže odhadnout, že výsledný úhel ***α*** je velikostně větší, než jím vypočtená a zapsaná hodnota 12°. V tomto případě lze konstatovat, že autor řešení úlohy č. 1 v ukázce 3 nepochopil podstatu tematického celku úhly.

3.2.2 Úloha 2



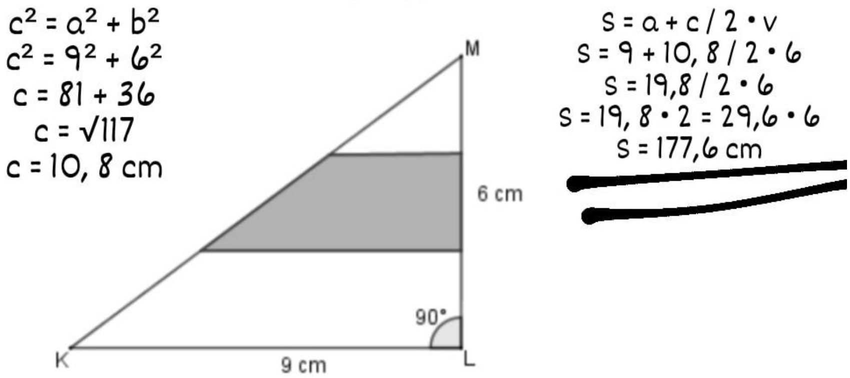
Ukázka 4

Ukázka 4 zobrazuje myšlenkové postupy řešení úlohy č. 2 jedním z testovaných žáků. V této ukázce 4 je vidět, že žák vypočítal nejdříve obsah celého pravoúhlého trojúhelníku ***KLM***. Poté pravoúhlý trojúhelník ***KLM*** rozdělil na tři menší shodné pravoúhlé trojúhelníky o délkách odvěsen 3 cm a 2 cm a na dva obdélníky, přičemž jeden z nich má délky stran rovny 6 cm a 2 cm, rozměry druhého obdélníku jsou 3 cm a 2 cm. Z žákova názorného náčrtku již vyplynulo, že obsah tmavě vybarveného obrazce je roven součtu obsahů jednoho menšího pravoúhlého trojúhelníku o délkách odvěsen 2 cm, 3 cm a obdélníku s délkami stran 3 cm a 2 cm. Žák obsahy těchto dvou rovinných útvarů spočítal s pomocí známých vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníku a pro výpočet obsahu obdélníku. Součtem těchto obsahů dospěl ke správnému výsledku, tj. k určení obsahu tmavě vybarveného obrazce, tedy k určení obsahu tmavě vybarveného pravoúhlého lichoběžníku. Tím ale svůj výpočet žák neukončil. Provedl totiž ještě dále zkoušku správnosti svého výpočtu. Z předešlých výpočtů již znal obsahy menších shodných trojúhelníků o délkách odvěsen 2 cm, 3 cm, dopočítal tedy již jen obsah obdélníku s délkami stran 6 cm a 2 cm. Následně sečetl obsah tmavě vybarveného pravoúhlého lichoběžníku s obsahy dvou menších shodných pravoúhlých trojúhelníků a s obsahem obdélníku s délkami stran 6 cm a 2 cm. Výsledná hodnota součtu těchto obsahů se rovnala na začátku vypočtené hodnotě 27 cm^2 odpovídající obsahu trojúhelníku ***KLM***. Tím žák ověřil správnost svého výpočtu, a tedy i hledaného výsledku.



Ukázka 5

V ukázce 5 je vidět zcela odlišný přístup k řešení úlohy č. 2 než ten, který byl komentován v ukázce 4. Autor řešení v ukázce 5 využíval svých znalostí Pythagorovy věty. Vypočítal nejdříve délku přepony ***KM*** v pravoúhlém trojúhelníku ***KLM***. Vypočtenou délku přepony ***KM*** vydělil třemi a přeponu ***KM*** následně rozdělil na tři shodné části. Délky základen tmavě vybarveného pravoúhlého lichoběžníku určil opět pomocí Pythagorovy věty, přesněji z dílčích pravoúhlých trojúhelníků, u nichž znal délku přepon a délku jedné odvěsny. Ze žákova zápisu je evidentní, že má zafixovanou Pythagorovu větu zapsanou symbolickým zápisem ve tvaru $c^2 = a^2 + b^2$, neboť tento zápis důsledně využívá při výpočtech délek stran u všech tří podobných pravoúhlých trojúhelníků. Na druhou stranu je ale z jeho zápisů zřejmé, že se správně orientuje v dosazovaných hodnotách. Nejen z následných výpočtů obsahů dvou pravoúhlých trojúhelníků, ale i z výpočtu jejich rozdílu lze usoudit, že autor řešení úlohy č. 2 v ukázce 5 vypočetl obsah tmavě vybarveného rovinného obrazce právě jako rozdíl obsahů dvou podobných pravoúhlých trojúhelníků s dvojicí odpovídajících odvěsen, které splývají s rovnoběžnými úsečkami s odvěsnou ***KL***, jež rozdělily pravoúhlý trojúhelník ***KLM*** na tři rovinné útvary. U tohoto způsobu řešení úlohy č. 2 je ještě nutné podotknout, že při ostrých testech státních přijímacích zkoušek z matematiky na SŠ nemohou žáci používat kalkulačky, a proto je otázkou, zda by byl žák s uvedeným způsobem řešení stejně úspěšný i bez možnosti užití kalkulačky. Předpokládáme, že hodnotu druhé odmocniny z čísla 117 s největší pravděpodobností z hlavy se zaokrouhlením na jedno desetinné místo nezná. Při ostrém testování by musel tuto hodnotu odhadnout na základě znalosti známých tabulkových hodnot pro druhé odmocniny.

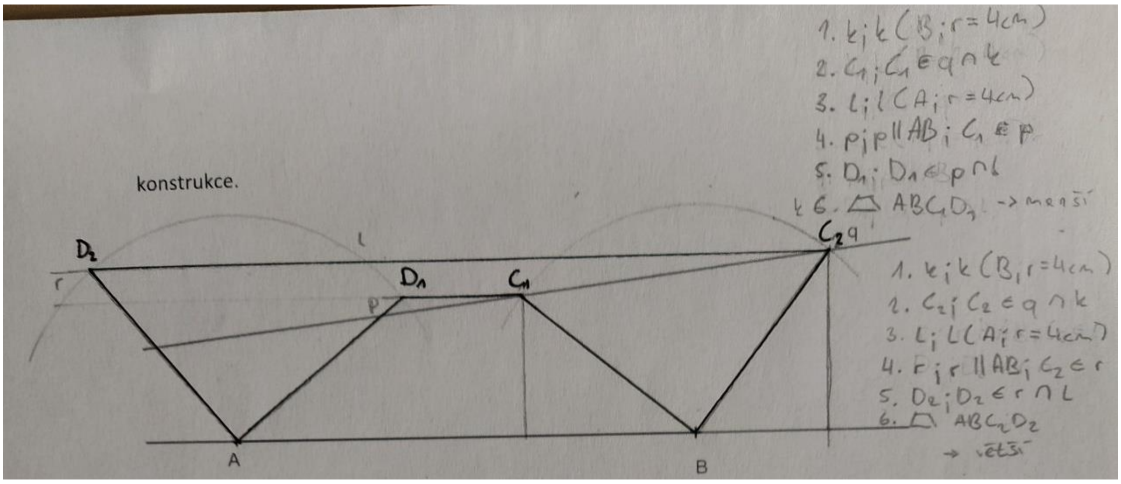


Ukázka 6

V ukázce 6 je znázorněno chybné řešení úlohy č. 2 ze zadávaného testu. Ze zápisu mezivýpočtů je vidět, že se autor tohoto řešení snažil o elektronický zápis výpočtů, možná i díky této skutečnosti chybně zapsal vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku. V tomto vzorci musí být zapsán součet délek základen lichoběžníku v závorce. Dále je ze zápisů výpočtů tohoto žákovského řešení zřejmé, že žák má zafixovány známé tabulkové vzorce pro Pythagorovu větu i pro výpočet obsahu lichoběžníku s nejčastěji používanými symboly ***a, b, c*** pro délky stran pravoúhlého trojúhelníku a symboly ***a, c*** pro délky základen lichoběžníku, symbol ***v*** pro výšku lichoběžníku. Z výpočtů si lze všimnout, že žák už bohužel ale dále nerozlišuje, zda si v příslušné úloze, a tedy i v příslušných rovinných obrazcích stejně označené objekty odpovídají, tzn. zda mají stejné délky. S užitím Pythagorovy věty žák vypočítal délku přepony ***KM*** v pravoúhlém trojúhelníku ***KLM*** (již zde je vidět, že žák nedodržel známou úmluvu, že se strany trojúhelníku pojmenovávají podle názvu vrcholu ležícího proti příslušné straně) a označil ji ***c***. Tuto vypočtenou hodnotu následně dosadil do vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku, kde měla být, ale již dosazena jiná hodnota, která by odpovídala délce základny lichoběžníku.

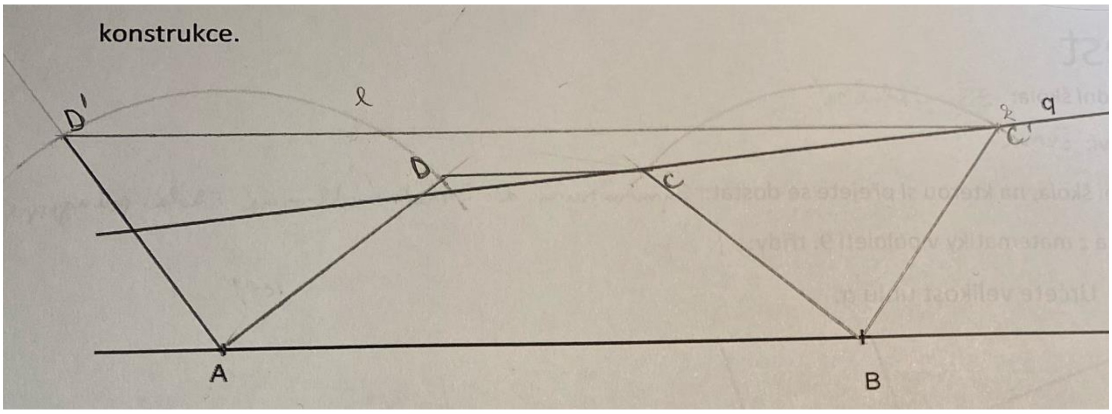
S velkou pravděpodobností nemá autor řešení úlohy č. 2 v ukázce 6 potřebné znalosti k použití vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku. Ze zápisu jeho řešení lze vypozorovat, že žák do vzorce dosadil všechny zadané hodnoty včetně vypočtené délky přepony ***KM*** pravoúhlého trojúhelníku ***KLM****.* Na druhou stranu ale již neřešil, že dosazovaná hodnota výšky ***v*** není hodnotou výšky lichoběžníku, ale délkou odvěsny ***LM*** či výšky ke straně ***KL*** pravoúhlého trojúhelníku ***KLM****.* Analogicky do vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku chybně dosadil vypočtenou délku přepony ***KM*** pravoúhlého trojúhelníku ***KLM***, která v zadané úloze neodpovídá délce ani jedné základny lichoběžníku. Díky uvedeným skutečnostem nemohl tento způsob řešení úlohy, a především dosazování neodpovídajících hodnot do vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníku dovést příslušného žáka ke správnému řešení této úlohy.

3.2.3 Úloha 3



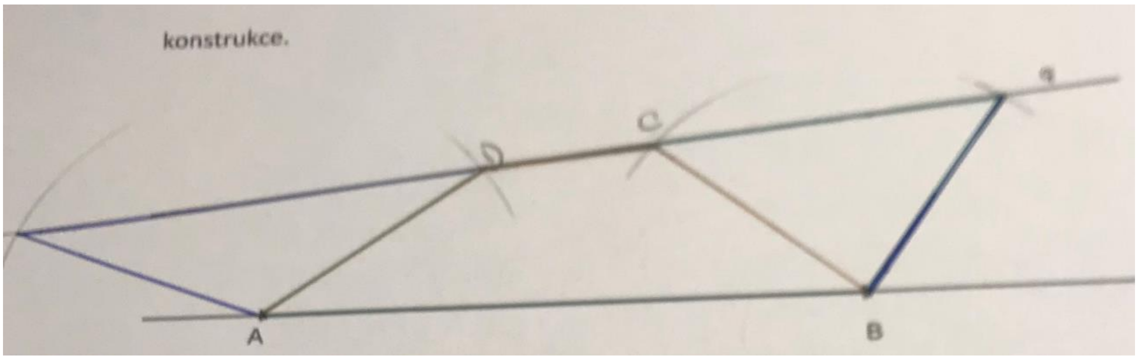
Ukázka 7

Ukázka 7 znázorňuje jedno z nejlepších řešení zadané konstrukční úlohy. Je zřejmé, že autor řešení úlohy č. 3 v ukázce 7 nemá problém se samotným rýsováním, ale ani se symbolickým zápisem konstrukce. Tomuto řešení není možné nic vytknout.



Ukázka 8

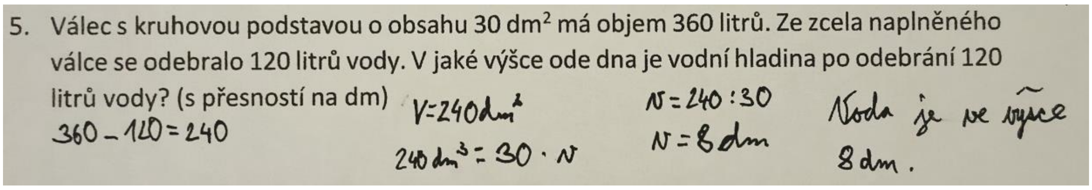
V ukázce 8 je znázorněné řešení, které se v odevzdaných testech objevovalo velmi často. Žáci zvládli na základě zadání úlohy konstrukčně sestrojit oba rovnoramenné lichoběžníky, ale symbolický zápis konstrukce již nezapsali. Tento jev, že žáci nemají v řešení úlohy zapsaný symbolický zápis konstrukce, mohl nastat buď kvůli tomu, že žáci nevěděli, jak mají zapsat symbolický zápis konstrukce, a tak jej raději ani nezačali, či vůbec netušili, co je po nich v podobě zapsání symbolického zápisu požadováno, anebo si nepřečetli pečlivě zadání úlohy, což se u žáků stává velmi často. Za uvedené řešení v ukázce 8 získali žáci vždy pouze jen polovinu bodů z maximálního možného počtu 4 bodů udělovaného za tento příklad, tj. získali za takto odevzdané řešení 2 body.



Ukázka 9

V ukázce 9 je znázorněno žákovské řešení konstrukční úlohy č. 3, které není správné. Takovéto řešení mohlo vzniknout důsledkem skutečnosti, že si buď žák chybně přečetl zadání úlohy, tj. domníval se, že oba hledané vrcholy ***C***, ***D*** sestrojovaného rovnoramenného lichoběžníku ***ABCD*** mají ležet na dané přímce ***q***, ale s velkou pravděpodobností zapomněl, anebo spíše neznal základní vlastnosti lichoběžníků. Zde se jedná speciálně o tu vlastnost, že lichoběžníky mají navzájem rovnoběžné základny, což v ukázce 9 neplatí.

3.2.4 Úloha 5



5. Válec s kruhovou podstavou o obsahu 30 dm^2 má objem 360 litrů. Ze zcela naplněného válce se odebralo 120 litrů vody. V jaké výšce ode dna je vodní hladina po odebrání 120 litrů vody? (s přesností na dm)

360 – 120 = 240
V = 240 dm³
240 dm³ = 30 · v
v = 240 : 30
v = 8 dm
Voda je ve výšce 8 dm.

Ukázka 10

V ukázce 10 je znázorněné žákovské řešení úlohy č. 5, které je numericky vyřešené správně. Autor tohoto řešení správně pochopil zadání úlohy, při numerickém výpočtu využil dosazení zadaných hodnot, ale o pomocí dílčích výpočtů určených hodnot do vzorce pro výpočet objemu válce. Tím dospěl ke správnému číselnému výsledku.

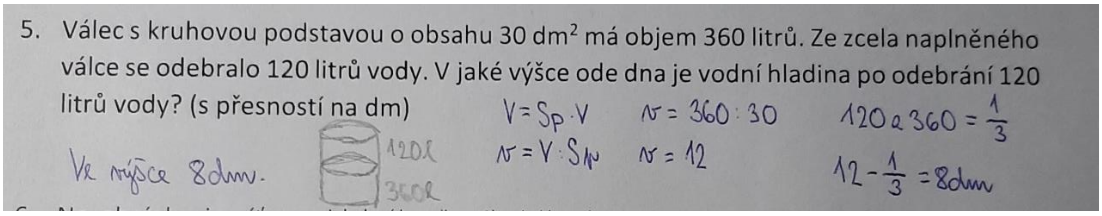
Pokud bychom chtěli být v opravě jeho řešení skutečně důslední, je třeba upozornit na chybný zápis rovnice

$$240\ \mathrm{dm}^3 = 30\ .\ \boldsymbol{v},$$

v níž je na levé straně zapsaná hodnota objemu válce včetně označení její míry, na pravé straně rovnice je však zapsán součin číselné hodnoty obsahu podstavy válce a neznámé výšky ***v*** vodní hladiny ale již bez označení jejich měr. Takovýto zápis rovnice nemůžeme považovat za správný, buď je totiž nutné zapsat míry na obou stranách rovnice, anebo je ani na jedné straně rovnice nepsat. V následujícím řádku výpočtu v upravené rovnici žák již jednotky míry neuvedl. Jednotku délky zapsal až u výsledné hodnoty.

Na tyto a podobné chyby či nedostatky se při kontrole výsledků řešení úloh z ostrých přijímacích zkoušek na SŠ nepřijde, protože žáci ve většině úloh pouze zaškrtávají jednu či více z nabízených možností, anebo zapisují finální výsledky na vyznačená místa. Mezivýpočty sice odevzdávají, ale kontrolovány nejsou.

Slovní odpověď autora uvedeného řešení v ukázce 10 je ve smyslu našeho rodného jazyka napsaná trochu komicky. Kdybychom odpověď ve znění “Voda je ve výšce 8 dm.” vzali do důsledku, znamenalo by to, že voda “visí někde ve vzduchu” ve výšce 8 dm. Odpověď by měla znít např.: “Vodní hladina ve válci je ve výšce 8 dm od jeho dna.” Asi je každému zřejmé, jak žák podstatu své odpovědi zamýšlel, ale bohužel i v matematice jsou v tomto a v jemu podobných případech vidět nepřesnosti ve vyjadřování žáků.



5. Válec s kruhovou podstavou o obsahu 30 dm^2 má objem 360 litrů. Ze zcela naplněného válce se odebralo 120 litrů vody. V jaké výšce ode dna je vodní hladina po odebrání 120 litrů vody? (s přesností na dm)

Ve výšce 8dm.

120l

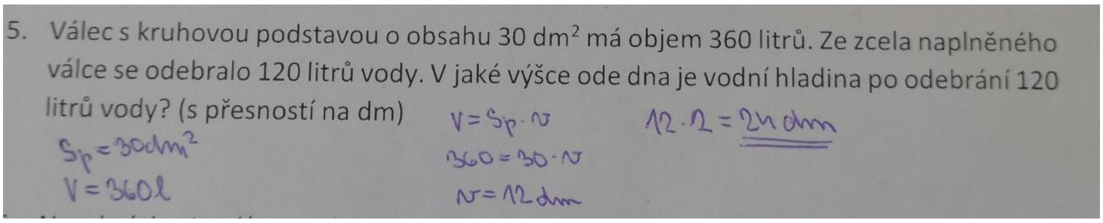
360l

$V = S_p \cdot v$ $\quad v = 360 : 30$ $\quad 120$ z $360 = \frac{1}{3}$

$v = V : S_p$ $\quad v = 12$ $\quad 12 - \frac{1}{3} = 8$dm

Ukázka 11

V ukázce 11 je znázorněné řešení dalšího testovaného žáka, který v úloze č. 5 dospěl ke správnému výsledku. Ze zápisů jeho řešení si lze všimnout, že si nejdříve na základě upraveného vzorce pro výpočet objemu válce vypočítal výšku plného válce, a poté si uvědomil, že 120 litrů představuje vlastně 1/3 celkového množství vody ve válci, a důsledku tohoto spočítal 1/3 ze 12 (dm), tj. 1/3 z celkové výšky válce, a tím získal výsledek 8 dm. Zapsání tohoto výpočtu se jeví na první pohled jako nesprávné, protože vypadá, že žák ve svých zápiscích vpravo dole uvedl rozdíl (12 – 1/3 = 8 dm). Výsledek 8 dm by však neodpovídal správné hodnotě rozdílu dvou čísel uvedených na pravé straně rovnice. Z tohoto důvodu je třeba vzít v úvahu fakt, že autor tohoto řešení spíše zapsal nejednoznačně symbol násobení mezi čísly 12 a 1/3, což by odpovídalo jeho myšlenkovým postupům i vypočtenému finálnímu výsledku.



5. Válec s kruhovou podstavou o obsahu 30 dm^2 má objem 360 litrů. Ze zcela naplněného válce se odebralo 120 litrů vody. V jaké výšce ode dna je vodní hladina po odebrání 120 litrů vody? (s přesností na dm)

$S_p = 30$dm^2

$V = 360$l

$V = S_p \cdot v$

$360 = 30 \cdot v$

$v = 12$dm

$12 \cdot 2 = 24$dm

Ukázka 12

Ukázka 12 znázorňuje ne zcela správné žákovské řešení úlohy č. 5. Lze si všimnout, že žák zná vzorec pro výpočet objemu válce a dokáže jej i správně aplikovat pro výpočet výšky válce zcela naplněného vodou. Problém v myšlenkových pochodech autora řešení nastal v nepochopení podstaty úkolu úlohy č. 5. Žák ve výpočtu vynásobil celkovou výšku válce dvěma, tzn. možná si myslel, že výška válce po odebrání vody z něj může být dvakrát vyšší než jeho původní výška. Ale jestli je tomu vskutku tak, o tom můžeme pouze jen polemizovat. V takovýchto případech by bylo vhodné, zeptat se samotného autora, jak byl uvedený výpočet zamýšlen. Při anonymním testování bohužel ale tuto možnost nemáme. Jeho chybu můžeme pouze jen obecně shrnout tvrzením, že správně nepochopil podstatu úlohy a že mu je nejspíše vzdálenější propojování praktických reálných situací s teoretickými výpočty. Z uvedeného plyne, že tento žák bude ještě muset pilně a svědomitě pracovat na procesu matematizace reálných situací.

3.3 Zpracování výzkumu

V této kapitole jsou popsány výsledky hodnocení provedeného výzkumu. Jak již bylo v úvodu této práce zmíněno, pomocí e-mailů bylo osloveno 23 základních škol z Liberce a z jeho okolí. Nakonec se do výzkumu zapojily pouze čtyři základní školy z Liberce, a to ZŠ Doctrina, ZŠ Oblačná, ZŠ Jabloňová a ZŠ Aloisina výšina, poslední pátou zapojenou školou byla ZŠ Liberecká z Jablonce nad Nisou.

Je otázkou, zda můžeme hovořit o výzkumu v pravém slova smyslu slova, protože při současné pandemické situaci a s ní související probíhající distanční formě výuky nemůžeme říct, že všichni testovaní žáci měli při vypracování testu zcela identické podmínky. Toto tvrzení dále upřesníme.

I když byli spolupracující učitelé požádáni, zda by mohli svým žákům testy zadat na 40 minut během online výuky matematiky, z rozhovorů či následné písemné korespondence s některými z nich víme, že např. ZŠ Liberecká v Jablonci nad Nisou zadali učitelé výzkumný test pouze žákům, kteří navštěvují přípravný seminář na přijímací zkoušky z matematiky. Tj. zadali test 27 žákům, přitom je ale v 9. třídách na ZŠ Liberecká v Jablonci nad Nisou dle dostupných informací získaných od vyučujících celkem 80 žáků. Zda byl tento test zadán v průběhu online výuky tohoto semináře či jako domácí cvičení, to sděleno ale již nebylo. Na ZŠ Aloisina výšina zadal vyučující žákům výzkumný test pouze dobrovolnou formou jako domácí cvičení s poznámkou, že pokud test žáci odešlou, pomohou tím studentce vysoké školy při sbírání dat pro její diplomovou práci. Ze ZŠ Aloisina výšina vypracovaly a řešení výzkumného testu odevzdaly celkem 2 dívky. Na ZŠ Jabloňová byl výzkumný test zadán všem dětem jedné 9. třídy bez ohledu na to, zda se žáci budou účastnit státních přijímacích zkoušek z matematiky na SŠ či nikoliv. Jak přesně probíhalo vyplňování výzkumných testů žáky ZŠ Oblačná a ZŠ Doctrina není bohužel známo.

Vzhledem ke skutečnostem, že na jedné základní škole (ZŠ Liberecká) byl výzkumný test zadán pouze žákům připravujícím se na státní přijímací zkoušky z matematiky, na jiných základních školách (ZŠ Jabloňová, ZŠ Doctrina) byl výzkumný test zadán celým třídám bez rozdílu, na jakou SŠ se žáci v těchto třídách hlásí, či zda vůbec budou vykonávat státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ, na ZŠ Aloisina výšina byl výzkumný test zadán pouze jako dobrovolné cvičení; dále pak vzhledem k tomu, že dle dostupných informací žáci většinou výzkumný test vypracovávali doma mimo čas online hodin matematiky, nemohly být zdaleka dodrženy jednotné podmínky pro všechny testované žáky. Není tedy známo, zda všichni testovaní žáci dodrželi doporučenou dobu 40 minut k vypracování testu, zda si při řešení nepomáhali např. vyhledáním informací či potřebných vzorců v učebnicích či na internetu, zda si např. v úloze č. 6 nevytiskli a následně nesložili síť kolmého pravidelného šestibokého hranolu, anebo zda nějakému testovanému žáku nepomáhal při vypracovávání výzkumného testu někdo jiný – spolužák, rodič atd. Mohou se tedy objevit velké odchylky mezi výsledky testovaných žáků na jedné škole, ale i rozdíly mezi výsledky testovaných žáků z různých zapojených škol.

Díky uvedeným skutečnostem a okolnostem nemohou být výsledky proběhlého výzkumného šetření brány jako nějak směrodatné. Považujeme je spíše jako informativní.

Z výše zmíněných 5 zapojených základních škol vyplněný výzkumný test odevzdalo celkem 102 žáků. V níže uvedené tabulce 10 jsou zapsány počty zapojených žáků do výzkumného testování na jednotlivých pěti zmíněných spolupracujících základních školách.

Základní škola	**Počet zapojených žáků**
ZŠ Doctrina	18
ZŠ Oblačná	21
ZŠ Jabloňová	34
ZŠ Liberecká	27
ZŠ Aloisina výšina	2

Tabulka 10

Samotným 6 testovým úlohám předcházel krátký dotazník, ve kterém měli žáci vyplnit své pohlaví, svou známku z matematiky, kterou byli ohodnoceni na vysvědčení v 1. pololetí 9. třídy, a střední školu, na kterou si přejí po ukončení základní školy nastoupit. Tyto otázky zůstaly u mnoha respondentů nezodpovězené, tj. žáci tyto údaje v mnoha případech neuvedly, i přestože testy odevzdávaly anonymně. Údaje zjištěné z tohoto dotazníku jsou přehledně zaznamenány v následujících třech tabulkách, viz tabulky 11 – 13:

Rozdělení podle pohlaví	
Pohlaví	**Počet zúčastněných**
Dívka	46
Chlapec	33
Neuvedeno	23

Tabulka 11

Známky z matematiky v prvním pololetí 9. třídy	
Známka	**Počet žáků s danou známkou**
1	28
2	30
3	11
4	3
5	0
Neuvedeno	30

Tabulka 12

Rozdělení podle výběru střední školy	
Střední škola	**Počet žáků**

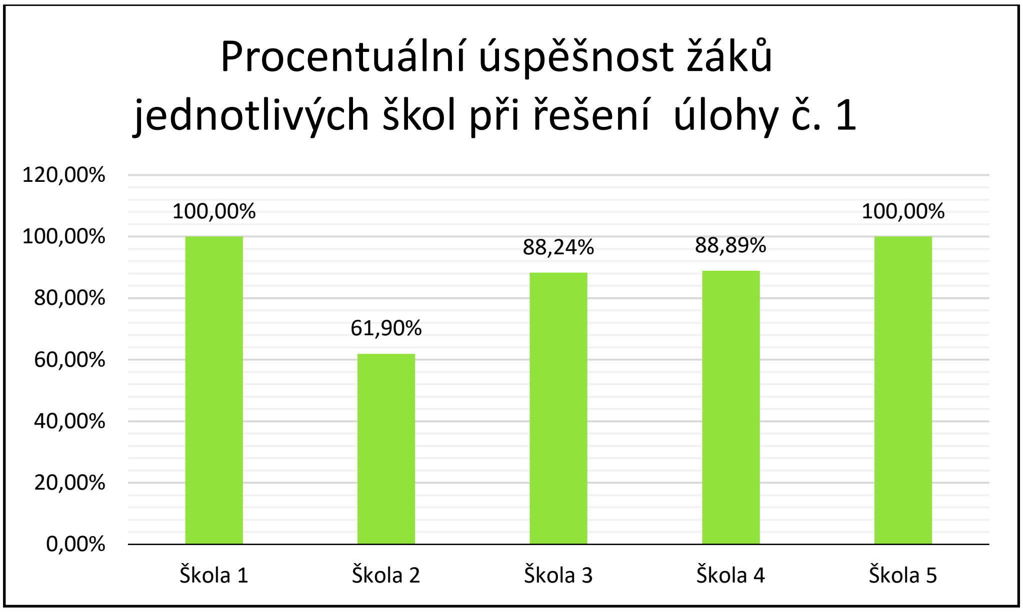
Gymnázium	27
SPŠSE a VOŠ Liberec	19
Střední zdravotnická škola	4
Střední pedagogická škola	3
Střední škola hospodářská a lesnická	3
Ostatní SŠ	13
Neuvedeno	33

Tabulka 13

Z údajů uvedených v tabulce 13 si lze všimnout, že 13 žáků je zařazeno v kolonce ostatní střední školy. Střední školy, na které si těchto 13 žáků přeje nastoupit, nejsou jednotlivě vypsány z důvodů jejich malé četnosti Tzn., že se zpravidla pouze jeden žák hlásil na jednu konkrétní školu, na kterou se již nikdo další z žáků zapojených do výzkumného testování nehlásil.

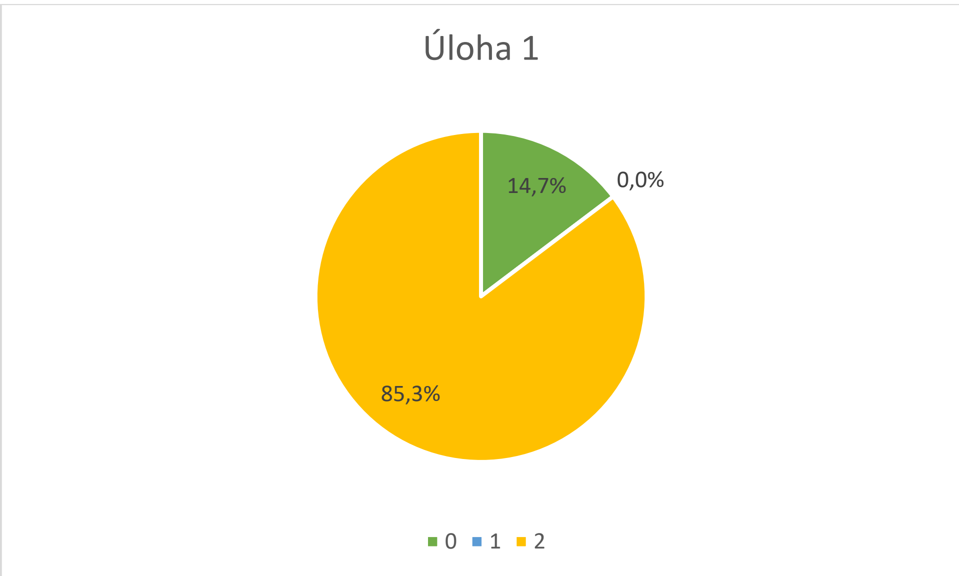
3.3.1 Grafy úspěšnosti

Tato podkapitola je věnována vytvoření přehledu procentuální úspěšnosti testovaných žáků při řešení jednotlivých testových úloh a jsou v ní také graficky znázorněny procentuální úspěšnosti žáků v jednotlivých úlohách s rozdělením podle jejich příslušnosti k zapojeným základním školám. Zapojené základní školy však nejsou v grafech z důvodu ochrany údajů uvedeny jmenovitě, ale jsou nazvány jako škola 1, škola 2, …, škola 5. Ze zobrazených grafů je přehledněji vidět, které úlohy z výzkumného testu byly pro testované žáky jednodušší a které naopak náročnější. Původně stanovený cíl v podobě vyhodnocení připravenosti testovaných žáků na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ z oblasti geometrie si netroufáme učinit vzhledem k výše uvedeným neidentickým podmínkám při vypracovávání výzkumných testů žáky. Získané výsledky proto pouze jen okomentujeme.

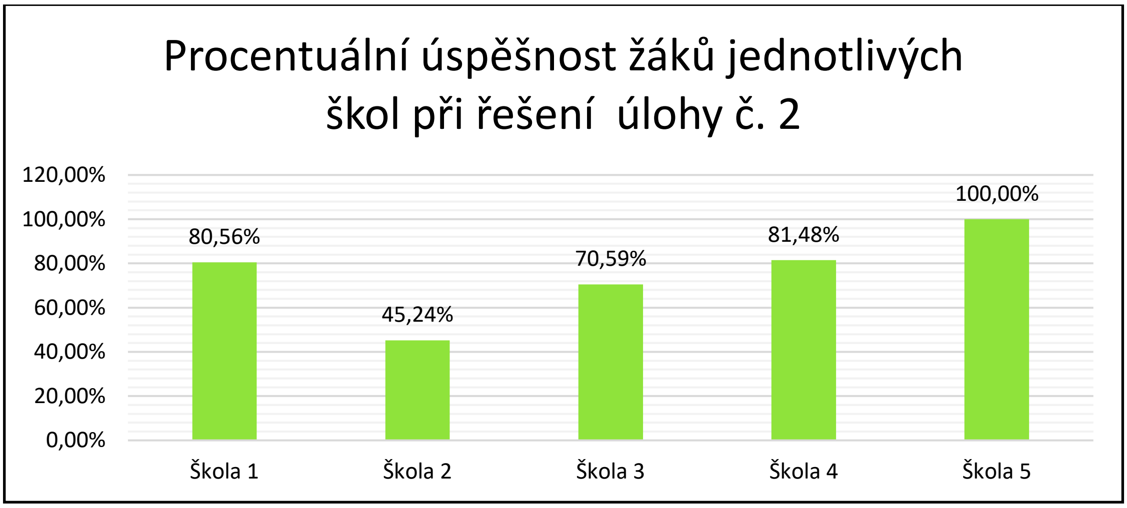


Graf 1

V grafu 1 je znázorněná procentuální úspěšnost žáků při řešení úlohy č. 1 na základě rozdělení žáků podle příslušnosti k jejich domovské základní škole. Z grafu 1 si lze všimnout, že úspěšnost žáků většiny škol byla při řešení úlohy č. 1 větší než 80 %, což je velmi dobrý výsledek. Tomuto velmi dobrému výsledku odpovídají i procentuální zastoupení bodových hodnot, které žáci získali při hodnocení úlohy č. 1. Ta jsou zobrazena v grafu 2. Z grafu 2 lze vyčíst, že 0 bodů získalo celkem 14,7 % testovaných žáků, zatímco 2 body získalo 85,3 % testovaných žáků. V této úloze nezískal žádný žák 1 bod. To mohlo být způsobeno i tím, že žáci ve velké míře odevzdávali pouze zapsaný výsledek, anebo se v jejich mezivýpočtech objevovaly chyby, tudíž i celkový výsledek nebyl správný. Co se ale této úlohy týče, počítání s úhly žákům nečinilo velké problémy.

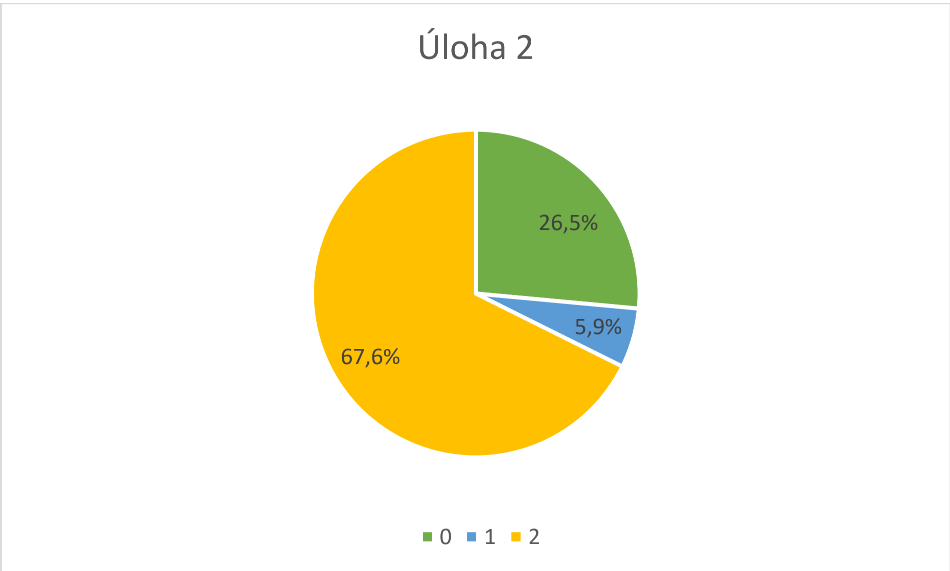


Graf 2

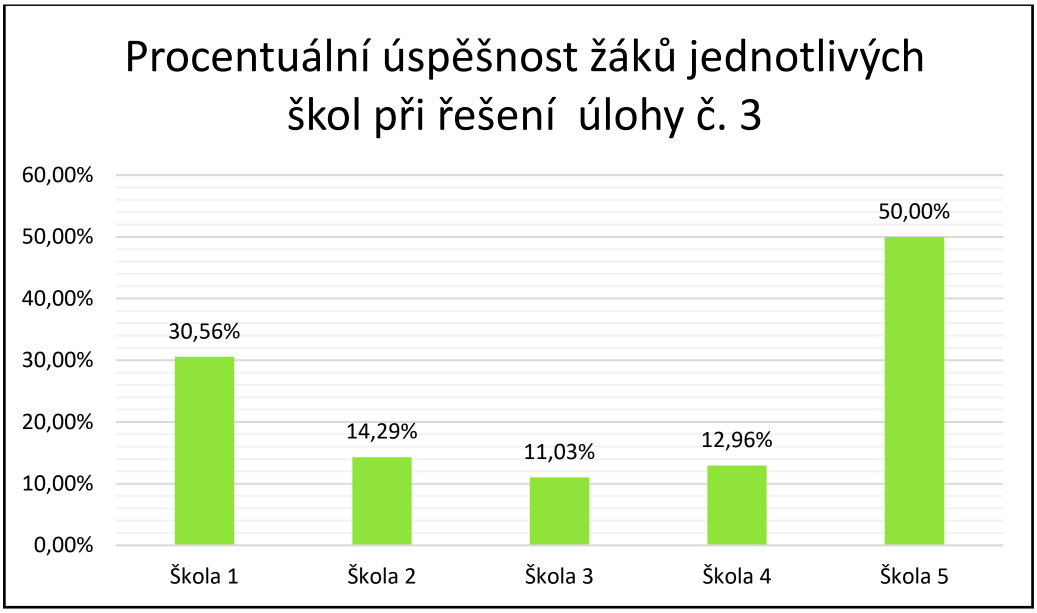


Graf 3

Úloha č. 2 zařazená do výzkumného testu je obdobnou úlohou k příkladu, který se vyskytl v ostrém státním přijímacím zkouškovém testu z matematiky na SŠ v loňském školním roce. Také tuto úlohu řešili testovaní žáci na většině spolupracujících základních škol poměrně dobře. Uvedené skutečnosti odpovídá i procentuální rozdělení bodového ohodnocení testovaných žáků při jejich řešení úlohy č. 2, toto procentuální rozdělení bodového ohodnocení je znázorněno v grafu 4. Žlutá část v grafu 4 znázorňuje bodový zisk dvou bodů, tuto bodovou hodnotu získalo téměř 70 % testovaných žáků. Při hodnocení úlohy č. 2 se vyskytl i větší počet žáků, kteří za tuto úlohu získali pouze jeden bod, to bylo většinou tím, že své výpočty buď nedokončili, anebo se v jejich výpočtu objevila numerická chyba. Nulový bodový zisk měli ti žáci, kteří nepochopili zadání úlohy a počítali něco jiného, anebo neuvedli vůbec žádné řešení. Komentované vzorové řešení úlohy č. 2 bylo založeno na využití podobnosti trojúhelníků, zde je ale nutné podotknout, že takovýto způsob řešení této úlohy nepoužil ani jeden ze 102 testovaných žáků. Na způsoby žákovských řešení této úlohy se můžete podívat v kapitole 3.2.

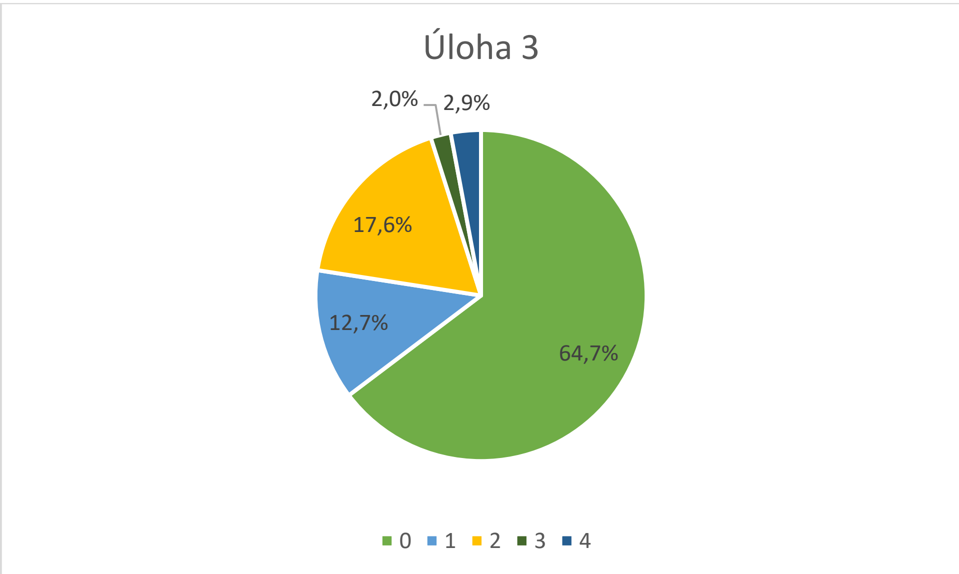


Graf 4

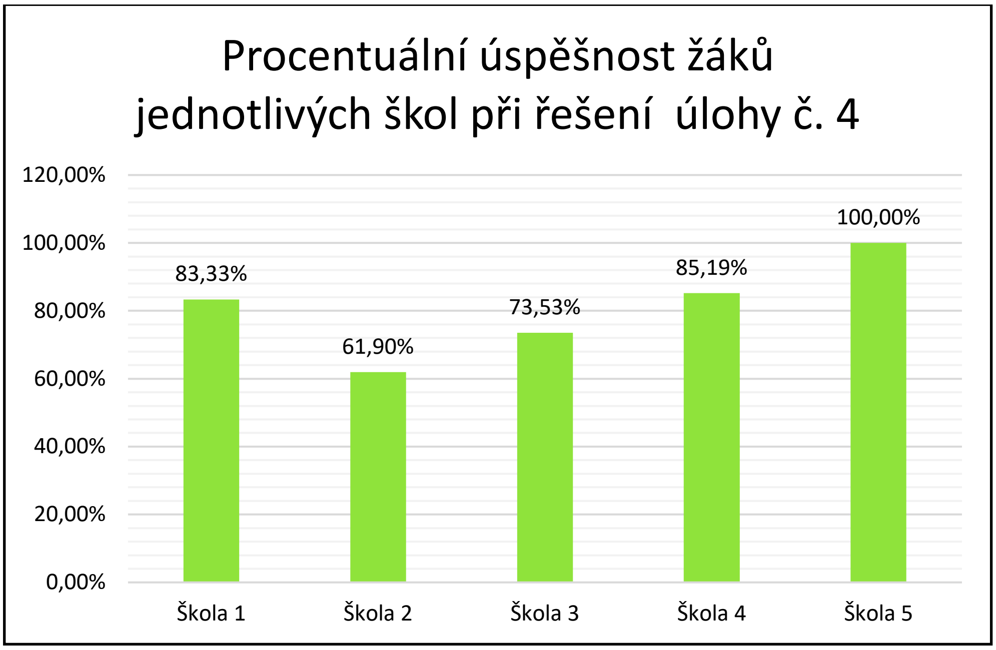


Graf 5

Třetí úloha z výzkumného testu byla pro žáky nejnáročnější. O této skutečnosti vypovídají oba grafy 5 a 6. Procentuální úspěšnost testovaných žáků z jednotlivých zapojených škol byla menší než 50 % a téměř 65 % zúčastněných žáků získalo 0 bodů. Takovýto ne moc uspokojivý výsledek lze nejspíše připsat i tomu, že žáci neměli během distanční výuky mnoho možností procvičovat se svými učiteli právě konstrukční úlohy. Další významnou částí grafu 3 je žlutá kruhová výseč, která znázorňuje získání dvou bodů, tj. jedné poloviny maximální hodnoty 4 bodů udělované za správné řešení v této úloze. Dva body žáci získali za konstrukci rovnoramenného lichoběžníku, která byla správně, ale poté nebyli již schopni své kroky zapsat pomocí symbolického zápisu. Ne každý žák se samozřejmě snažil symbolický zápis konstrukce napsat, ale spousta žáků toho nebyla ani schopna a jejich zápis nebylo možné se uznat. Na zisk čtyř bodů dosáhli pouze 3 žáci ze 102 zúčastněných.

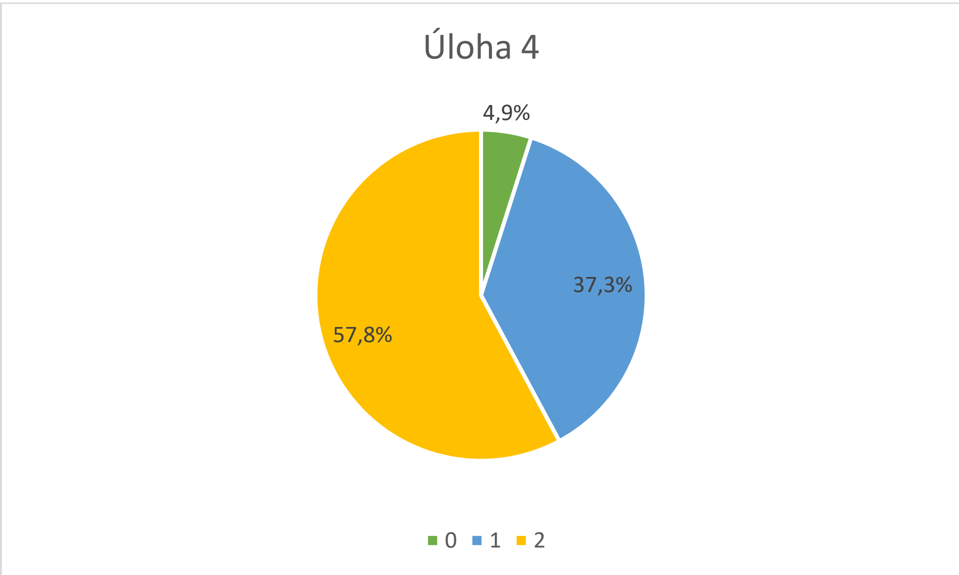


Graf 6

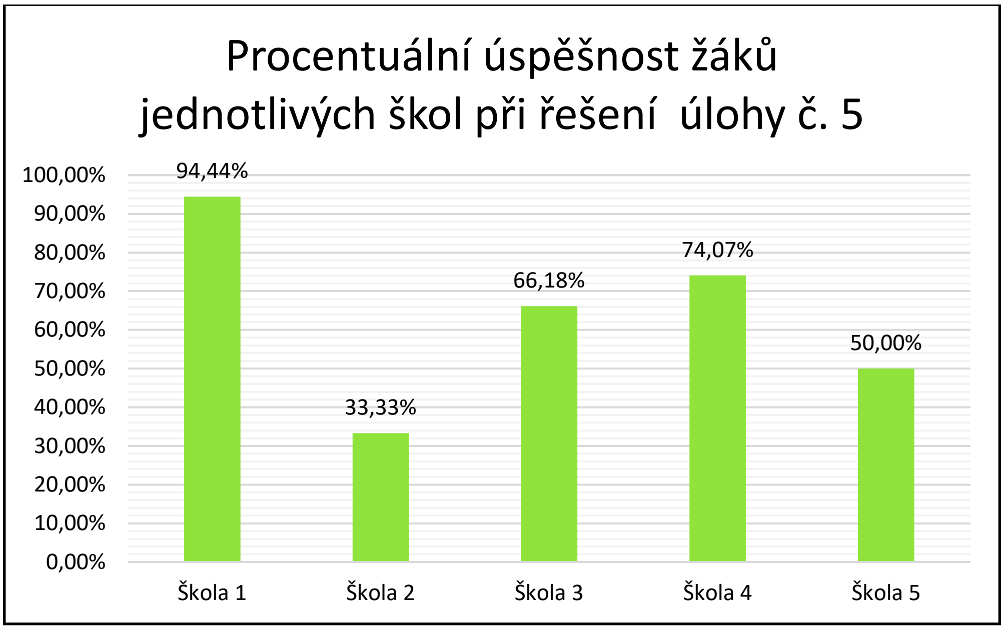


Graf 7

Úloha č. 4 zařazená do výzkumného testu byla zaměřena na zjištění znalostí testovaných žáků z převádění jednotek. Z grafů 7 a 8 vyplývá, že s převody jednotek nemá více jak polovina žáků zúčastněných se testování problém. Pro druhou polovinu testovaných žáků by bylo vhodné zařadit ještě další příklady k procvičování na toto téma. Chyby, které žáci při řešení této úlohy činili, spočívaly převážně v nesprávném umístění desetinné čárky ve výsledných hodnotách. Číselné hodnoty určovaly většinou správně.

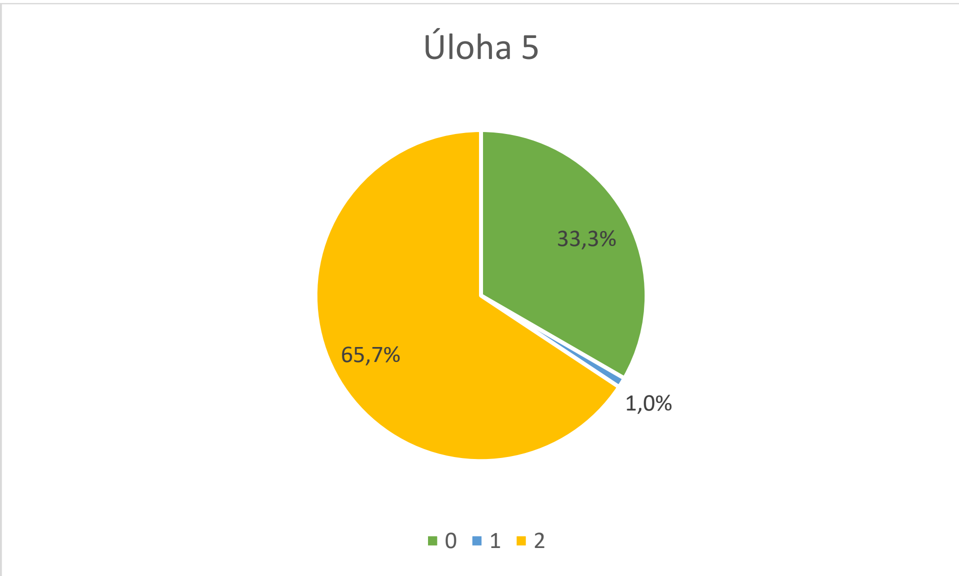


Graf 8

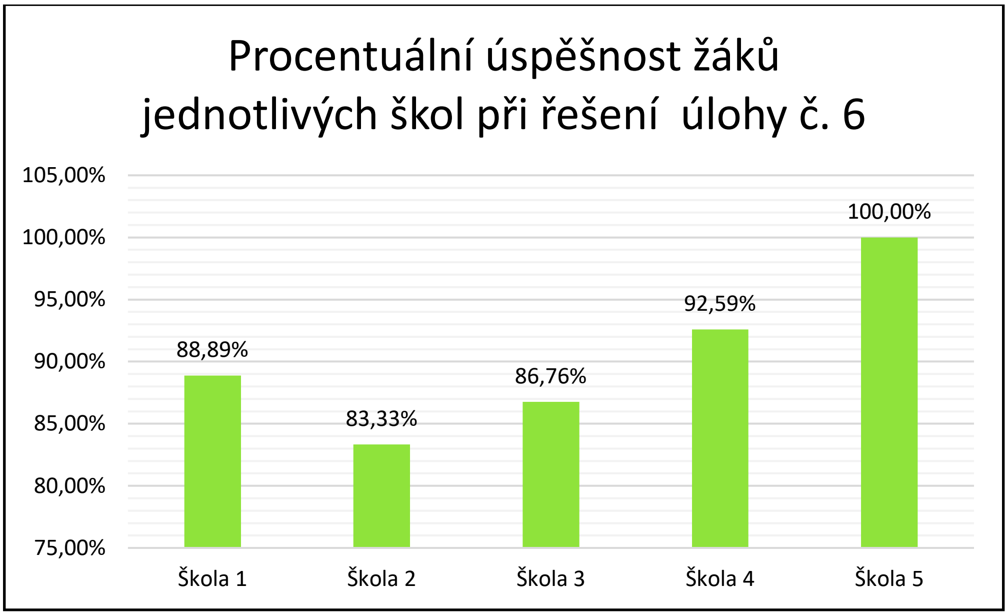


Graf 9

Úloha č. 5 z výzkumného testu byla přibližně pro dvě třetiny testovaných žáků jednoduchá, na druhou stranu byla pro zbylou jednu třetinu testovaných žáků hůře pochopitelná, o čemž vypovídají grafy 9 a 10. Žáci buď měli představu, jak mohou tuto metrickou prostorovou úlohu vyřešit, anebo naopak vymýšleli postupy, které je ke správnému výsledku nevedly a také nedovedly.

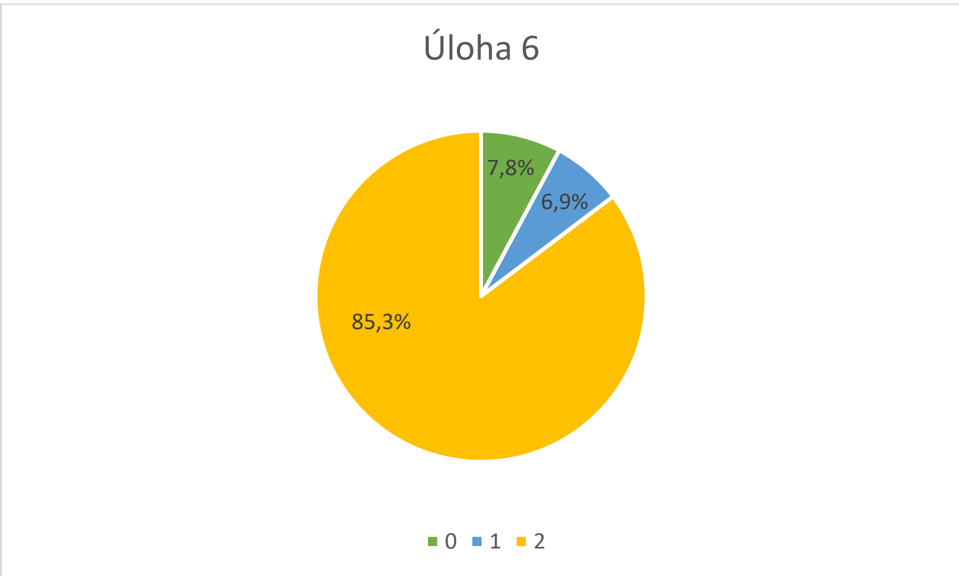


Graf 10



Graf 11

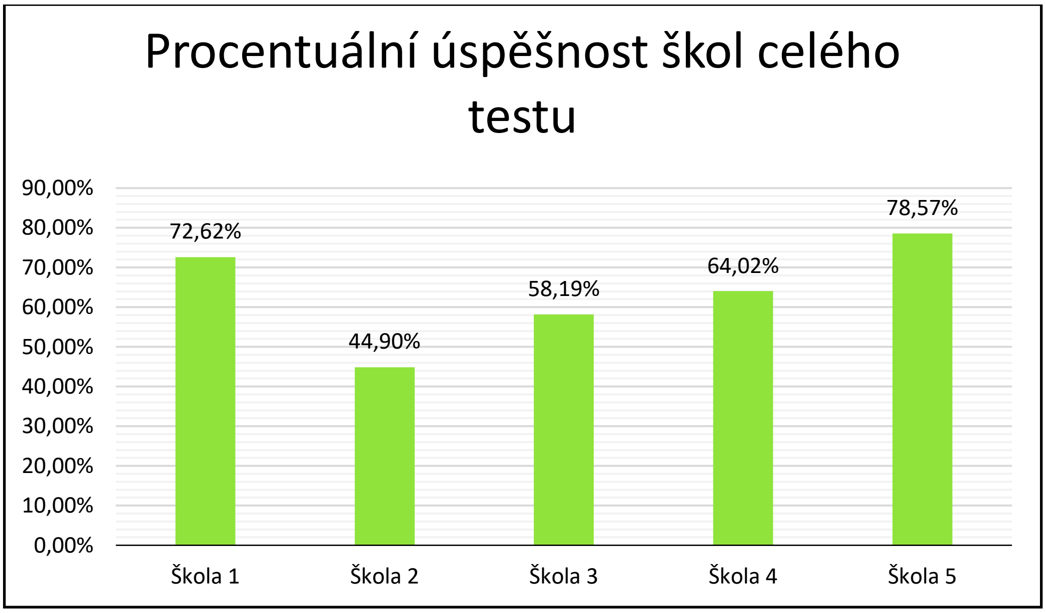
Poslední šestá úloha ze zadaného výzkumného testu byla zaměřena na využití prostorové představivosti žáků při dohledání těch bodů sítě kolmého pravidelného šestibokého hranolu, které odpovídají po složení této sítě v hranol jednomu a témuž vrcholu hranolu. Z grafů 11 a 12 lze vyčíst, že tato úloha žákům nedělala velký problém. Testovaní žáci všech zapojených škol dosáhli procentuální úspěšnosti větší než 80 % a celkově tuto úlohu úspěšně vyřešilo 85,3 % testovaných žáků. Pokud se žáci při řešení této úlohy dopouštěli chyb, tyto chyby se projevovaly v nesprávném označení bodu sítě. Chybně označený bod byl většinou druhým krajním bodem úsečky, která po složení sítě v hranol splývala s tou stranou sítě, na níž ležel zadaný bod.



Graf 12

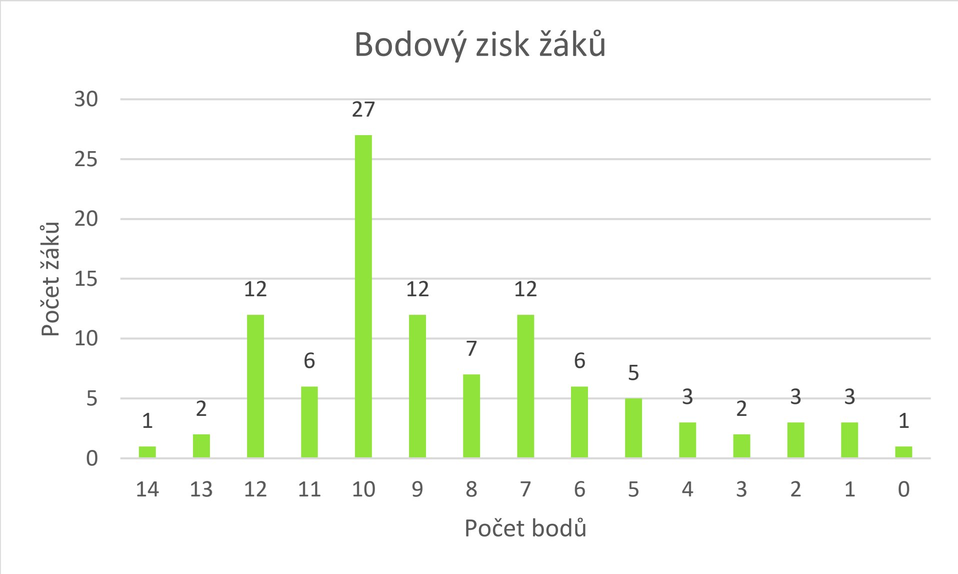
Z výše uvedených grafů i popsaných závěrů lze vypozorovat, že žáci měli při řešení testu největší problém s vypracováváním konstrukční úlohy. Podobné typy příkladů se v ostrých státních přijímacích zkouškových testech vyskytují často, a proto by bylo na základě získaných výsledků z testu vhodné s žáky tuto část z geometrie ještě znovu zopakovat. Druhou úlohou, jejíž řešení dělalo žákům větší problém, byla úloha č. 5, ve které žáci využívali své znalosti o výpočtu objemu válce. Tento příklad poukázal na fakt, že by žáci měli více počítat úlohy, které jsou zaměřeny na počítání prostorových měr v geometrii. Další čtyři příklady z výzkumného testu nedělali žákům velké problémy. Opět je dodat, že se výzkumu zúčastnili i žáci, kteří se na státní přijímací zkoušky z matematiky vůbec nepřipravovali a ostrých státních přijímacích testů na SŠ z matematiky se účastnit nebudou. Výsledky těchto žáků mohly způsobit některé výkyvy výsledků na jednotlivých zapojených školách.

Předposlední graf, který je v této podkapitole vložen, je graf 13 znázorňující procentuální úspěšnost testovaných žáků jednotlivých zapojených škol dohromady ze všech šesti testových úloh. Z tohoto grafu je možné vyčíst, že žáci ze čtyř zapojených škol by mohli být schopni splnit v ostrém státním přijímacím zkouškovém testu z matematiky na SŠ příklady z geometrické části testu na více jak 50 %.



Graf 13

Poslední graf, který je v této podkapitole vložen, je graf 14 znázorňující absolutní četnosti bodů, kterých testovaní žáci dosáhli za svá řešení zadaného testu. Z tohoto grafu lze vyčíst, že nejvyšší četnost má hodnota bodového zisku 10 bodů, což je tzv. modus v daném souboru. Pro lepší přehlednost je graf 14 doplněn tabulkou 14, ve které jsou zapsány absolutní i relativní četnosti bodů, kterými byli žáci ohodnoceni za svá řešení v zadaném testu. Z této tabulky si lze všimnout, že maximálního počtu bodů, tedy na bodový zisk 14 bodů dosáhl pouze jeden žák z pěti zapojených škol z Liberce a okolí. Dalších hodnot, kterých žáci velmi často dasahovali, jsou bodové zisky 12, 9 a 7 bodů.



Graf 14

Počet získaných bodů	Absolutní četnost	Relativní četnost
14	1	1,0%
13	2	2,0%
12	12	11,8%
11	6	5,9%
10	27	26,5%
9	12	11,8%
8	7	6,9%
7	12	11,8%
6	6	5,9%
5	5	4,9%
4	3	2,9%
3	2	2,0%
2	3	2,9%
1	3	2,9%
0	1	1,0%

Tabulka 14

Výpočtem lze také zjistit tzv. medián, což je prostřední hodnota z řady naměřených hodnot seřazených podle velikosti. Výpočtem provedeným v programu Excel vyšel medián roven 9 bodům.

Závěr

I v této nelehké době se musejí žáci 9. tříd základních škol v ČR připravovat na státní přijímací zkoušky z matematiky. Někteří žáci mají ale to štěstí, že si vybrali SŠ, na kterou se nekonají žádné přijímací zkoušky, a tento stres z učení jim tedy odpadl. Přijetí na většinu středních škol, především s maturitními obory je však podmíněno úspěšným splněním státních přijímacích zkoušek z českého jazyka a z matematiky. V letošním školním roce 2020/2021 nebyla pro žáky 9. tříd a ani pro jejich učitele příprava na státní přijímací zkoušky na SŠ vůbec snadná, neboť žáci měli minimální možnost setkávat se se svými spolužáky a se svými učiteli ve třídě a řešit tak společně mnohé příklady. Z vlastních zkušeností víme, že forma distanční výuky nedokáže plnohodnotně nahradit kontaktní výuku ve třídě. Během distanční výuky může docházet k technickým problémům. Děti, ale i učitel mohou mít při distanční výuce problémy s internetovým připojením, s kvalitou zvuku, ale i obrazu na svých elektronických zařízeních. Učitel také nemusí mít dostatečné vybavení pro výuku, a to především platí u geometrie, jejíž výuka je při distanční výuce velmi náročná. Žáci potřebují vidět, jak učitel črtá či rýsuje jednotlivé kroky konstrukčních úloh. Ne všichni učitelé matematiky umí používat vhodný geometrický software k tomu, aby v něm dětem vzorově rýsovali a jednotlivé kroky konstrukcí pak sdíleli. Na druhou stranu učitelé také nemají možnost vidět, co děti „za svými monitory" rýsují. A tak, jak jsme z rozhovorů s některými z nich zjistili, výuku geometrie spíše odložili, nebo některá geometrická témata probrali jen okrajově. Možná i toto jsou příčiny neúspěchu žáků ve 3. (konstrukční) úloze zadávaného výzkumného testu. Pomineme-li technické potíže s využívanými elektronickými zařízeními či jiné nedostatky technického rázu, dalším problémem při distanční výuce mohou být obavy či strach některých žáků zeptat se na něco, co neví, čemu nerozumí, aby se neztrapnili před svými spolužáky. Obzvláště v období puberty, tj. právě cca ve věku dětí 9. tříd se mohou tyto obavy objevovat. A protože má učitel během distanční výuky mnohem méně možností zpětných vazeb od svých žáků, než by měl při jejich práci ve třídě (nemůže procházet třídou a nahlížet do jejich sešitů, jak jednotlivé příklady vypracovávají; nevidí mimiku žáků, řeč jejich těla apod.), je odkázaný pouze na jejich ochotu spolupracovat. Žáci v 9. třídě, ale nejen oni si bohužel ještě neuvědomují, že pokud se svými učiteli nespolupracují, tak tím neškodí učiteli, ale naopak jen sami sobě. Jedním z ukazatelů kvality uskutečněné distanční výuky mohou být právě výsledky žáků 9. tříd u státních přijímacích zkoušek na SŠ.

Tato diplomová práce byla mimo jiné speciálně vytvořena jako podpůrný materiál k přípravě na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ, ale jedním z jejích cílů bylo i zjištění připravenosti žáků 9. tříd z Liberce a jeho okolí z oblasti geometrie právě na plánované státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ v letošním školním roce. Dalším cílem této práce bylo stručně shrnout teorii z učiva geometrie vyučovaného na základních školách. Přesněji řečeno, shrnout ty teoretické poznatky z geometrie, které jsou základními kameny příkladů vyskytující se v posledních několika letech téměř pravidelně v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na SŠ. Sepsané teoretické poznatky jsou doplněny o množství ilustrativních názorných obrázků, které žákům mohou pomoci ve snadnějším porozumění uvedené teorie.

Dalším cílem bylo vytvořit sbírku úloh z geometrie, jež jsou obdobné těm, které se vyskytovaly v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na střední školy v posledních několika letech. V této práci je užito pouze jen několik málo původních úloh z ostrých státních přijímacích testů z matematiky na SŠ, anebo ze vhodných sbírek z matematiky, velké množství příkladů jsou nově vytvořené a vymyšlené příklady. Praktická část práce obsahuje 50 příkladů s podrobně popsaným postupem řešení, ale také 31 zadání úloh určených k samostatnému procvičování. Každá sada úloh určená k procvičování je umístěná na konci příslušného uvedeného tematického celku z geometrie a je doplněna přehledem správných řešení.

Cílem této práce bylo také zjistit připravenost žáků 9. tříd z Liberce a okolí na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ, přesněji zjistit jejich připravenost na tyto zkoušky z tematického celku geometrie. Téměř polovina úloh, které se v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na SŠ vyskytují, jsou právě geometrické úlohy. K tomu, aby bylo možné zhodnotit žákovskou připravenost na státní přijímací zkoušky z geometrie, byl sestaven speciálně vytvořený test, do kterého bylo zařazeno 6 úloh z geometrie velmi podobných těm, které se v posledních několika letech vyskytovaly v ostrých státních přijímacích zkouškových testech z matematiky na SŠ. Vytvořený test byl rozeslán na všechny základní školy nacházející se v Liberci a také na některé školy v okolí Liberce. Nakonec žádosti o pomoc se zadáním testu žákům v 9. třídách vyhověli pouze učitelé 4 základních škol v Liberci, jmenovitě učitelé na ZŠ Doctrina, ZŠ Jabloňová, ZŠ Oblačná a ZŠ Aloisina výšina, dále pak učitelé na ZŠ Liberecká v Jablonci nad Nisou. Ze všech pěti zapojených základních škol se podařilo získat celkem 102 vypracovaných testů. Podrobné vyhodnocení úspěšnosti řešení jednotlivých úloh z testu i způsoby žákovských řešení některých úloh z testu jsou popsány ve výzkumné části této práce. Lze shrnout, že žáci 9. tříd ze čtyř základních škol zapojených do testování měli procentuální úspěšnost v řešení celého testu větší než 50 %.

Snahou bylo zpracovat tuto práci systematicky a přehledně. Doplnit ji o názorné obrázky, díky kterým by mohla být pro čtenáře lépe srozumitelná. Velký potenciál se jeví ve využití této práce při přípravě žáků na státní přijímací zkoušky z matematiky na SŠ z oblasti geometrie. Domnívám se, že práci by mohli používat učitelé matematiky na základních školách jako vhodný podpůrný výukový materiál v hodinách matematických seminářů, ale i samotní žáci 9. tříd jako studijní materiál k samostatnému procvičování.

Literatura

[1] BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. Dotisk 7. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-85849-63-1

[2] FRÝZEK, Miloslav. *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy*. Praha: Fortuna, 1992. ISBN 80-85298-51-1

[3] HEDVÁBNÁ, H. a kol.: *Testy z matematiky pro žáky 9. tříd* - 2020. Didaktis, Brno 2019. 123 str. ISBN 978-80-7358-319-4

[4] PALKOVÁ, M. a kol.: *Průvodce matematikou 2 aneb co byste měli znát z geometrie ze základní školy.* Didaktis, Brno 2007. 135 str. ISBN 978-80-7358-275-3

[5] VORDERMAN, C.: *Help Your Kids with Maths.* Dorling Kindersley Limited, London 2014. 264 p. ISBN 978-1-4093-5571-7

[6] SLOUKA, Radim a Jan SLOUKA: *Matematika: pro žáky 5.-9. tříd ZŠ, studenty víceletých gymnázií a třídy s rozšířenou výukou matematiky*. Olomouc: Fin, 1994. ISBN 80-85572-78-8

[7] BOUŠKOVÁ, Jitka, Milena BRZOŇOVÁ, Zdeněk PŮLPÁN a Michal ČIHÁK. *Matematika 6: pro základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-365-1

[8] PŮLPÁN, Zdeněk, Jitka BOUŠKOVÁ, Milena BRZOŇOVÁ a Josef TREJBAL. *Matematika 7 pro základní školy: geometrie*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008. ISBN 978-80-7235-399-6

[9] PŮLPÁN, Zdeněk, Josef TREJBAL a Jitka BOUŠKOVÁ. *Matematika 8 pro základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-241-4

[10] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 9 pro základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7235-489-4

[11] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. MATEMATIKA (3) pro 6. ročník základní školy: Úhel, trojúhelník; Osová souměrnost; Krychle a kvádr. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-144-4

[12] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2012. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-430-8

[13] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 2., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-436-0

[14] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2013. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-441-4

[15] GRAJA, Tomáš, Kamil ŠRUBAŘ, Alena FRIDRICHOVÁ, et al. *Přijímačky v pohodě: příprava na jednotné přijímací řízení SŠ*. 5. vydání. Praha: Taktik, 2020. ISBN 978-80-7563-289-0

Internetové zdroje:

[16] Přijímací zkoušky - test z matematiky pro čtyřleté obory - StátníPřijímačky.cz. *Státní přijímací zkoušky na střední školy 2021 - StátníPřijímačky.cz* [online]. Copyright © Nový Amos 2014 [cit. 28.04.2021]. Dostupné z: https://www.statniprijimacky.cz/matematika/ctyrlete-obory

[17] *Jednotná přijímací zkouška* [online]. Copyright © [cit. 28.04.2021]. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/MA9_jaro_2015_DT_ilustracni.pdf

[18] *Jednotná přijímací zkouška* [online]. Copyright © [cit. 28.04.2021]. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/MA9_jaro_2015_DT.pdf

[19] *Jednotná přijímací zkouška* [online]. Copyright © [cit. 28.04.2021]. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/M9PAD17C0T01.pdf

[20] *Jednotná přijímací zkouška* [online]. Copyright ©t [cit. 28.04.2021]. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/MA_2017_9_B.pdf

[21] *Jednotná přijímací zkouška* [online]. Copyright ©f [cit. 28.04.2021]. Dostupné z: https://prijimacky.cermat.cz/files/files/dokumenty/testova-zadani/4lete-mat/2020/MA_2020_9_A_DT.pdf