



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

## MODELÝ HROMADNÉ OBSLUHY

MODELS OF QUEUEING SYSTEMS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. MIROSLAV HORKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. RNDr. Ing. MILOŠ ŠEDA, Ph.D.

BRNO 2015



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav automatizace a informatiky

Akademický rok: 2014/15

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Miroslav Horký

který/která studuje v **magisterském studijním programu**

obor: **Aplikovaná informatika a řízení (3902T001)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### **Modely hromadné obsluhy**

v anglickém jazyce:

### **Models of Queueing Systems**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V systému hromadné obsluhy v náhodných okamžicích přichází požadavky (zákazníci) a vyžadují obsluhu. Možnosti obsluhy mohou být omezeny, např. počtem obslužných linek. Doba obsluhy však má rovněž náhodný charakter, protože požadavky mohou být různě náročné. Jestliže jsou všechny obslužné linky obsazeny, pak se požadavky (zákazníci) řadí do fronty a musí čekat, až po zpracování předchozích požadavků na ně přijde řada. Úkolem diplomové práce je implementovat modely základních typů hromadné obsluhy včetně grafického výstupu simulačních experimentů.

Cíle diplomové práce:

1. Provést klasifikaci systémů hromadné obsluhy s využitím markovských řetězců.
2. Implementovat vybrané modely včetně generování dat a grafického znázornění simulačních výpočtů.

Seznam odborné literatury:

- [1] Bose, S.K.: An Introduction to Queueing Systems. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [2] Cooper, R.B.: Introduction to Queueing Theory. North Holland, New York, 1981.
- [3] Gross, D., Shortle, J.F., Thompson, J.M., Harris, C.M.: Fundamentals of Queueing Theory. John Wiley & Sons, New York, 2008.
- [4] Hrubina, K., Jadlovská, A., Hrehová, S.: Algoritmy optimalizačních metod s využitím programových systémů. Technická univerzita v Košiciach, Prešov-Košice, 2005.
- [5] Jablonský, J.: Operační výzkum. Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky, Praha, 2001.

[6] Klvaňa, J.: Modelování 20. České vysoké učení technické, Fakulta stavební, Praha, 2005.

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/15.

V Brně, dne 17. 2. 2015



Ing. Jan Roupec, Ph.D.  
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan

## **ABSTRAKT**

V diplomové práci se zabývám modely hromadné obsluhy s využitím Markovových řetězců. Systém hromadné obsluhy je takový systém, kde požadavky přicházejí do tohoto systému v náhodných okamžicích a vyžadují obsluhu. Tato práce se zabývá konkrétně takovými modely hromadné obsluhy, v nichž intervaly mezi příchody požadavků a doby obsluhy požadavků mají exponenciální rozdělení. V teoretické části diplomové práce se věnuji problematice stochastických procesů, systému hromadné obsluhy, klasifikaci systémů hromadné obsluhy a popisu exponenciálních modelů Markovova typu. V praktické části popisuji tvorbu a funkci programu, který řeší simulaci vybraného modelu M/M/m. Na závěr srovnávám výpočty získané analyticky a simulací daného modelu M/M/m.

## **ABSTRACT**

The master's thesis solves models of queueing systems, which use the property of Markov chains. The queueing system is a system, where the objects enter into this system in random moments and require the service. This thesis solves specifically such models of queueing systems, in which the intervals between the objects incomings and service time have exponential distribution. In the theoretical part of the master's thesis I deal with the topics stochastic process, queueing theory, classification of models and description of the models having Markovian property. In the practical part I describe realization and function of the program, which solves simulation of chosen model M/M/m. At the end I compare results which were calculated in analytic way and by simulation of the model M/M/m.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Stochastický proces, Markovovy řetězce, Markovovy procesy se spojitým časem, Poissonův proces, systém hromadné obsluhy, modely front, zdroj požadavků, doba trvání obsluhy, disciplína fronty, režim fronty, režim obsluhy, Kendallova klasifikace systému hromadné obsluhy, modely hromadné obsluhy Markovova typu, MATLAB, simulace.

## **KEYWORDS**

Stochastic process, Markov chain, Continuous-time Markov chain, Poisson process, Queueing theory, Queueing models, source of objects, service rate, queue discipline, queue mode, service mode, Kendall's notation describing queueing models, Markovian queueing models, MATLAB, simulation.



## **PROHLÁŠENÍ O ORIGINALITĚ**

Tímto prohlašuji, že předkládaná diplomová práce je mojí původní autorskou prací, kterou jsem vypracoval pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím uvedené odborné literatury.

V Brně dne 29. května 2015

Bc. Miroslav Horký

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

HORKÝ, M. *Modely hromadné obsluhy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 59 s. Vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D..





## **PODĚKOVÁNÍ**

Děkuji doc. RNDr. Miloši Šedovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, připomínky a za celkovou pomoc při zpracování této diplomové práce.



## OBSAH

Abstrakt	5
Prohlášení o originalitě	7
Poděkování	9
1 Úvod	13
2 Stochastické procesy	15
2.1 Markovovy řetězce	16
2.2 Markovovy procesy se spojitým časem	17
3 Poissonův proces	19
4 Systémy hromadné obsluhy	21
4.1 Historie teorie hromadné obsluhy	22
4.2 Základní charakteristiky systému hromadné obsluhy	22
4.2.1 Vstupní proud požadavků	22
4.2.2 Doba trvání obsluhy	23
4.2.3 Disciplína čekání ve frontě	23
4.2.4 Režim fronty	23
4.2.5 Režim obsluhy	23
5 Klasifikace systémů hromadné obsluhy	25
5.1 Kendallova klasifikace systému hromadné obsluhy	25
5.2 Modely hromadné obsluhy Markovova typu	25
5.2.1 Exponenciální model jednoduché obsluhy M/M/1	26
5.2.2 Exponenciální model vícenásobné obsluhy M/M/m	30
5.2.3 Exponenciální model jednoduché obsluhy s omezenou kapacitou M/M/1/k	33
5.2.4 Exponenciální model vícenásobné obsluhy s omezenou kapacitou M/M/m/k	34
5.2.5 Uzavřený exponenciální model jednoduché obsluhy M/M/1/.r	36
5.2.6 Uzavřený exponenciální model vícenásobné obsluhy M/M/m/.r	37
5.2.7 Modely systémů hromadné obsluhy s netrpělivostí požadavků	39
5.2.8 Modely systémů hromadné obsluhy s prioritami požadavků	39
6 Program simulace modelu M/M/m	41
6.1 Programová realizace	41
6.1.1 Vstupní parametry modelu	42
6.1.2 Generování náhodných hodnot	42
6.1.3 Popis realizace zpracování požadavků v modelu	43
6.1.4 Stanovení základních charakteristik systému	44
6.1.5 Grafické výstupy simulace	46
6.2 Popis uživatelské rozhraní programu	47
6.3 Práce s programem	49
6.4 Simulace konkrétního případu	50
6.5 Ověření funkčnosti vytvořeného programu na konkrétním případě	55
7 Závěr	57
Seznam použité literatury	59
Přílohy	



# 1 ÚVOD

Tato práce se věnuje problematice systému hromadné obsluhy a tématům s ní spojených. Systém hromadné obsluhy popisuje systémy, kde požadavky vyžadují obsluhu. Každý z nás se stává účastníkem systému hromadné obsluhy, jestliže se dostane do situace, která si žádá řešení, které lze modely hromadné obsluhy popsat. Systém hromadné obsluhy je takový systém, ve kterém jsou dané požadavky obsluhovány určitým zařízením. Na příkladu samoobsluhy lze jednoduše systém hromadné obsluhy popsat, danou situaci si lze lehce představit. Samoobsluha je v tomto případě obecně systém hromadné obsluhy. Zákazníci, kteří vstoupili do samoobsluhy, tedy do systému hromadné obsluhy, se stávají požadavky, kteří vyžadují obsluhu. Na obsluhu čekají ve frontě, pokud jsou všechny linky obsazeny. Odtud se odvozuje i další název problematiky systému hromadné obsluhy, teorie front. Pokladna se v tomto systému hromadné obsluhy stává obslužnou linkou a zákazníci požadavky vyžadující obsluhu. Rozhodující je intenzita vstupů požadavků do systému, intenzita obsluhy a počet obslužných linek v samoobsluze, dále počet požadavků čekajících na obsluhu a další. Tyto a další parametry popisují chování systému hromadné obsluhy. Jednotlivé modely systému hromadné obsluhy jsou detailně popsány v teoretické části této diplomové práce.

Cílem diplomové práce je klasifikovat systémy hromadné obsluhy s využitím Markovových řetězců, dále implementovat vybraný model včetně generování dat a grafického znázornění simulačních výpočtů. Ze samé povahy zadání, diplomová práce je rozdělena na teoretickou část a praktickou část. V teoretické části diplomové práce se zabývám tématy systému hromadné obsluhy, které s danou problematikou úzce souvisí. V první kapitole popisují stochastické procesy, které vychází z předpokladu, že ke změnám v systému dochází s určitými pravděpodobnostmi a prvky tohoto procesu mají náhodný charakter. Mezi stochastické procesy řadíme i Markovovy řetězce a Markovovy procesy se spojitým časem, které popisují přechody mezi jednotlivými stavy. Další kapitola se věnuje Poissonovu procesu, neboť Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti má velký význam právě v teorii hromadné obsluhy, protože toto rozdělení popisuje náhodné jevy. V teorii hromadné obsluhy pak takto můžeme označit příchody zákazníků vyžadujících obsluhu a dobu obsluhy zákazníka. Následuje 4. kapitola, která se věnuje popisu charakteristik systému hromadné obsluhy. V další kapitole je provedena klasifikace systémů hromadné obsluhy. Teoretickým východiskem pro naši klasifikaci systému hromadné obsluhy jsou Markovovy řetězce. Markovovy řetězce popisují pravděpodobnosti přechodu mezi stavy procesu systému. V podkapitolách jsou tyto jednotlivé modely detailně popsány. U každého modelu jsou uvedeny jeho základní vlastnosti a dále také jeho další charakteristiky, které slouží k posouzení efektivnosti daného modelu. V praktické části diplomové práce popisují vytvoření programu, který byl realizován za účelem simulace vybraného modelu M/M/m. Závěrečná kapitola popisuje realizaci a funkci tohoto programu. Cílem práce bylo implementovat vybraný model včetně generování dat a grafického znázornění simulačních výpočtů. Program simulace byl implementován na konkrétním případě a výsledky byly znázorněny graficky. Správnost realizovaného programu byla provedena a ověřena pomocí simulačních experimentů na tomto konkrétním případě.



## 2 STOCHASTICKÉ PROCESY

Podstatou stochastických modelů je aplikace počtu pravděpodobnosti. V matematických modelech deterministických jsou prvky a vztahy mezi nimi pevně dány, pak chování modelu za určitých podmínek je dáno těmito podmínkami. Veličiny a vazby mezi těmito prvky jsou pevné a lze zanedbat jejich kolísání. Opakem tohoto modelu je matematický model stochastický. O matematických modelech stochastických mluvíme, jestliže prvky nebo vztahy mezi nimi mají náhodný charakter. Prvky modelu a vztahy mezi nimi mají charakter náhodných jevů, náhodných veličin nebo náhodných procesů. Takový stochastický model uvažuje jednu nebo více náhodných složek. Stochastické modelování má základ v teorii pravděpodobnosti, která se zabývá opakovatelnými jevy náhodné povahy. Tento model se přibližuje reálným dějům, ve kterých je náhodná složka většinou přítomná. Metody stochastického modelování mají význam především v rozhodovacím procesu v situacích za neurčitosti a pro řízení procesů a dějů, kde se taková náhodná složka vyskytuje. Také modely hromadné obsluhy a Markovovy řetězce využívají metod stochastického modelování. Reálnými příklady, které lze řešit metodami stochastického modelování, mohou být hromadění jednotek, které mají projít určitým systémem (hromadná obsluha, problém front, čekací linky), stanovení počtu obslužných jednotek aby nevznikala fronta, nebo stanovení počtu jednotek aby nečekala obsluha, apod. [15].

Jak již bylo zmíněno výše, stochastické modely vychází z předpokladu, že ke změnám v určitém systému dochází s určitými pravděpodobnostmi; model pracuje s náhodnými veličinami. Hlavním nástrojem modelování stochastických procesů jsou náhodné procesy. Náhodný proces pak může být definován, jako množina náhodných veličin, závislých na určitém počtu parametrů.

V mnoha aplikacích se vyskytují především procesy s jedním parametrem a tím je čas. Takové náhodné procesy se nazývají stochastické procesy. Definice stochastického procesu je následující:

Stochastický proces je množina náhodných veličin  $\{X_t\}_{t \in T}$ , kde  $T$  chápeme jako množinu jistých parametrů [11].

Definiční obor  $T$  chápeme nejčastěji jako časovou množinu. Obor funkčních hodnot se běžně nazývá stavový prostor, či prostor stavů stochastického procesu  $R$ . Stavem stochastického procesu se rozumí určitá hodnota, obvykle číslo, z čehož vyplývá, že oborem funkčních hodnot je číselná množina. Typy stochastických procesů podle definičního oboru  $T$  a stavového prostoru  $R$  – v obou případech dané množiny mohou obsahovat konečný nebo spočetný počet hodnot. V těchto případech se jedná o diskrétní časy, respektive o stavy. Pokud dané množiny obsahují nespočetný počet hodnot, pak se jedná o spojitý čas, respektive stavy.

Typy stochastických procesů podle definičního oboru  $T$  a stavového prostoru  $R$  jsou přehledně shrnuty v následující tabulce.

Tab. 2.1 [12]

Stavový prostor $R$	Definiční obor $T$ , čas $t \in T$	
	diskrétní	spojitý
diskrétní	(1) diskrétní náhodná posloupnost	(2) diskrétní náhodný proces
spojitý	(3) spojitá náhodná posloupnost	(4) spojitý náhodný proces

V reálných aplikacích lze najít všechny čtyři uvedené typy stochastických procesů, například (1) diskrétní náhodná posloupnost může popisovat model rozhodování v konečně mnoha etapách a s konečným počtem alternativ, (2) diskrétní náhodný proces může popisovat počty zákazníků ve frontě, kteří čekají na obsluhu v nějaké obslužné jednotce, (3) spojitá náhodná posloupnost pak může popisovat dobu čekání zákazníka ve frontě na obsluhu v obslužné jednotce a (4) spojitý náhodný proces pak popisuje například změnu zásob v čase [12].

V dalších dvou podkapitolách se budeme zabývat takovými stochastickými procesy, mezi které řadíme Markovovy řetězce (množina  $T, R$  je diskrétní) a Markovovy procesy se spojitým časem.

## 2.1 Markovovy řetězce

Markovovy řetězce patří mezi stochastické procesy, které mají diskrétní jak časovou množinu  $T$ , tak také stavový prostor  $R$ , tzn. Markovovy řetězce popisují stochastický proces probíhající v diskrétním čase při diskrétních přechodech mezi stavy. Stochastický charakter diskrétní náhodné posloupnosti spočívá v tom, že v okamžiku  $n$  se vyskytuje jeden z možných stavů  $s(n)$  s určitou pravděpodobností, tedy  $s(n) = j$ .

Proces musí splňovat také tzv. Markovskou vlastnost. Markovská vlastnost se týká pravděpodobnosti přechodu mezi stavy a říká, že pravděpodobnost přechodu v následujícím kroku závisí pouze na současném stavu, ve kterém se proces nachází a nezávisí na stavech minulých. Markovská vlastnost se vyjádří podmíněnými pravděpodobnostmi následovně:

$$P(s(n) = j | s(n-1) = i, s(n-2) = k, \dots, s(0) = m) = P(s(n) = j | s(n-1) = i). \quad (2.1)$$

Podmíněná pravděpodobnost výskytu stavu  $j$  v okamžiku  $n$  závisí pouze na stavu, který se vyskytuje v okamžiku  $(n-1)$ , tedy Markovův řetězec udává budoucnost jen na základě současnosti, minulost nezná. Tyto podmíněné pravděpodobnosti se též nazývají pravděpodobnosti přechodu [12]. Chování systému s konečným počtem stavů se modeluje pomocí Markovova řetězce a je určeno:

1. vektorem nepodmíněných (absolutních) pravděpodobností v určitém okamžiku

$$\mathbf{p}(n) = [p_1(n), p_2(n), \dots, p_N(n)] \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

kde  $p_i(n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , značí pravděpodobnosti, že proces v okamžiku  $n$  je ve stavu  $i$ .

2. maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P}(n) = [p_{ij}(n)], \quad \text{kde } i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Pravděpodobnost  $p_{ij}(n)$  budeme nazývat podmíněnou pravděpodobností přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$ , k němuž dochází mezi okamžiky  $(n-1)$  a  $n$ . Nehomogenní Markovův řetězec znamená, že  $p_{ij}(n)$  závisí na  $n$ . Markovův řetězec se nazývá homogenní, jestliže pravděpodobnosti  $p_{ij}(n)$  nezávisí na tom, mezi kterými okamžiky k přechodu dochází, tj. platí-li  $p_{ij}(n) = p_{ij}$ . Dále se budeme zabývat pouze homogenními Markovovými řetězci.

Pravděpodobnost  $p_{ij}$  musí splňovat tyto podmínky:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad \text{a} \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

protože při sumarizaci každého řádku matice vychází, že řádek je roven 1.

Pro přechod systému ve dvou po sobě následujících okamžicích platí:

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n)\mathbf{P} \quad (2.6)$$

Postupným dosazením dojdeme ke vztahu:

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^{n+1} \quad (2.7)$$

který značí přechod mezi dvěma časovými okamžiky.

Přechod od prvního časového okamžiku („0“) ke druhému časovému okamžiku („1“) se vyjádří:

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} \quad (2.8)$$

Postupným dosazováním odvodíme vztah:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n \quad (2.9)$$

Chování homogenních Markovových řetězců po  $n$  časových okamžicích je tedy popsáno mocninami matice pravděpodobností přechodu a vektorem výchozích absolutních pravděpodobností [11].



## 2.2 Markovovy procesy se spojitým časem

Hovoříme-li o Markovových procesech se spojitým časem, znamená to, že přechody mezi jednotlivými stavy se mohou uskutečnit v libovolně blízkých časových okamžicích, a můžeme tak případy změn vystihnout ve spojitém čase. I zde náhodné proměnné  $X(t)$  nabývají hodnoty, které jsou přiřazené určitým stavům. V okamžiku  $t_i$  se může vyskytnout jeden ze stavů  $i_1, i_2, \dots, i_N$ ; okamžiky  $t_i, t_{i+1}, \dots$  se liší o veličinu  $\Delta t$ , která se blíží k nule. Intenzita pravděpodobnosti přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  je vyjádřena pomocí limity následovně:

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ i \neq j}} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = a_{ij}(t) \geq 0 \quad (2.10)$$

Ve většině případů se předpokládá, že tyto pravděpodobnosti přechodu  $a_{ij}(t)$  jsou konstantní, tedy  $a_{ij}$ . Pravděpodobnosti setrvání  $p_{ij}(t, t + \Delta t)$  v limitě malé době by se ovšem blížila jedné, proto se sleduje její jednotkový doplněk. Tento jednotkový doplněk rovněž představuje intenzitu výstupu ze stavu  $j$ :

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ i=j}} \frac{1 - p_{jj}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = a_{jj}(t) \geq 0 \quad (2.11)$$

Matici pravděpodobností přechodu, zachycující podmíněné pravděpodobnosti výskytu určitých stavů v době  $(t + \Delta t)$ , podmíněné výskytem určitých stavů v době  $t$ , lze zapsat:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11}(t)\Delta t & a_{12}(t)\Delta t & \dots & a_{1n}(t)\Delta t \\ a_{21}(t)\Delta t & 1 - a_{22}(t)\Delta t & \dots & a_{2n}(t)\Delta t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t)\Delta t & a_{n2}(t)\Delta t & \dots & 1 - a_{nn}(t)\Delta t \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Matice  $\mathbf{A}(t)$  představuje matici intenzit pravděpodobností přechodu a má tvar:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Jestliže průběh procesu nezávisí na době, která uplynula od počátku procesu, jedná se opět o homogenní proces. Pro homogenní proces platí vztah, který lze zapsat:

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{A} \quad (2.14)$$

Výraz (2.14) je soustavou diferenciálních rovnic pro veličiny  $p_i(t)$ , kterou lze dále upravovat a tím dojít k řešení:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) \cdot e^{\mathbf{A}t} \quad (2.15)$$

Rovnici pro stacionární pravděpodobnosti procesu lze odvodit z předešlého vztahu a platí:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

kde  $\mathbf{0}$  znamená nulový vektor.

Z aplikačního hlediska jsou nejvýznamnější některé jednoduché Markovovy procesy, při kterých jsou přechody mezi stavy velmi omezené. Mezi tyto procesy patří také Poissonův proces, který bude popsán v další kapitole [11].



### 3 POISSONŮV PROCES

Poissonův proces je základní diskrétní stochastický proces, který se používá v matematických modelech systémů hromadné obsluhy. Jelikož se v každém systému hromadné obsluhy vyskytuje vstup požadavků a obsluha požadavků, předpokládáme, že vstup i obsluha požadavků je ovlivňována náhodnými vlivy. Proto je vhodným matematickým objektem pro modelování počtu požadavků (jak vstupujících, tak obsluhovaných) v systému hromadné obsluhy právě diskrétní stochastický proces [12].

Problematika Poissonova procesu bude dostatečně popsána v následujícím textu. Uvažujme  $X(t)$ , že je počet výskytů určitého jevu v čase  $(0, t)$ , pak  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  je spočtený Markovovův proces s množinou stavů  $S = \{1, 2, \dots\}$  a s počátečním rozdělením  $p_0(0) = 1$  a  $p_i(0) = 0$  pro stav  $i \neq 0$ .

Poissonův proces bývá charakterizován těmito vlastnostmi:

#### 1) Nezávislost

- proces  $\{X_t\}$  má nezávislé přírůstky. Počet jevů připadajících na určitý časový interval nezávisí na počtu jevů v libovolném jiném intervalu.

#### 2) Stacionárnost (homogenita v čase)

- proces  $\{X_t\}$  má homogenní přírůstky. Intenzita vyskytujících se jevů (průměrná hodnota počtu těchto jevů za časový interval  $(\lambda)$  je konstantní. Tato vlastnost se nazývá stacionárnost a příslušné procesy se nazývají homogenní Poissonovy procesy. V případě, že intenzita jevů závisí na čase  $(\lambda_t)$  hovoříme o nehomogenních Poissonových procesech.

#### 3) Regulárnost (ordinárnost)

- při dostatečně malém  $\Delta t$  při konstantní hodnotě  $\lambda$  se pravděpodobnosti přechodu ze stavu  $n$  do stavu  $n + 1$  v intervalu  $(t, t + \Delta t)$  rovnají:

$$p_{n, n+1}(t; t + \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (3.1)$$

Pro pravděpodobnost setrvání ve stejném stavu v časovém intervalu  $(t, t + \Delta t)$  platí:

$$p_{n, n}(t; t + \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (3.2)$$

Pravděpodobnost ostatních přechodů je v porovnání s předešlými přechody zanedbatelná a platí:

$$\sum_{j=i+2}^{\infty} p_{ij}(t + \Delta t) = o(\Delta t) \quad (3.3)$$

Veličina  $o(\Delta t)$  obsahuje všechny výrazy řádu  $(\Delta t)^2$  a vyššího, tedy ty, které se blíží k nule podstatně rychleji než  $\Delta t$ , platí:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad (3.4)$$

Poissonův proces je tedy proces, ve kterém je možný přechod jen do nejbližšího vyššího stavu. Matice intenzit pravděpodobností přechodu má tvar následující:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Na základě shora uvedených charakteristik platí pro pravděpodobnosti  $p_n$  vztahy:

$$p_0(t + \Delta t) = [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] p_0(t), \quad n = 0 \quad (3.6)$$

$$p_n(t + \Delta t) = [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] p_n(t) + [\lambda \Delta t + o(\Delta t)] p_{n-1} + o(\Delta t), \quad n > 0 \quad (3.7)$$

po úpravě získáme:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (3.8)$$

a

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \lambda p_{n-1}(t) \quad (3.9)$$

Při  $\Delta t \rightarrow 0$  dostaneme:

$$\frac{p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) \quad (3.10)$$

$$\frac{p_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad (3.11)$$

zároveň musí platit počáteční podmínky:

$$p_n(0) = 1, \quad n = 0 \quad (3.12)$$

$$p_n(0) = 0, \quad n > 0 \quad (3.13)$$

Rovnice (3.7), (3.8) představují rekurentní soustavu diferenciálně-diferenčních rovnic, které mají počáteční podmínky  $p_0(0)=1$  a  $p_n(0)=0$  a pro  $n>0$  řešením je:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Závěrem tedy můžeme tvrdit, že Poissonovo rozdělení je rozdělením počtu změn za určitou dobu  $t$ . Pokud položíme  $n=0$  obdržíme člen:

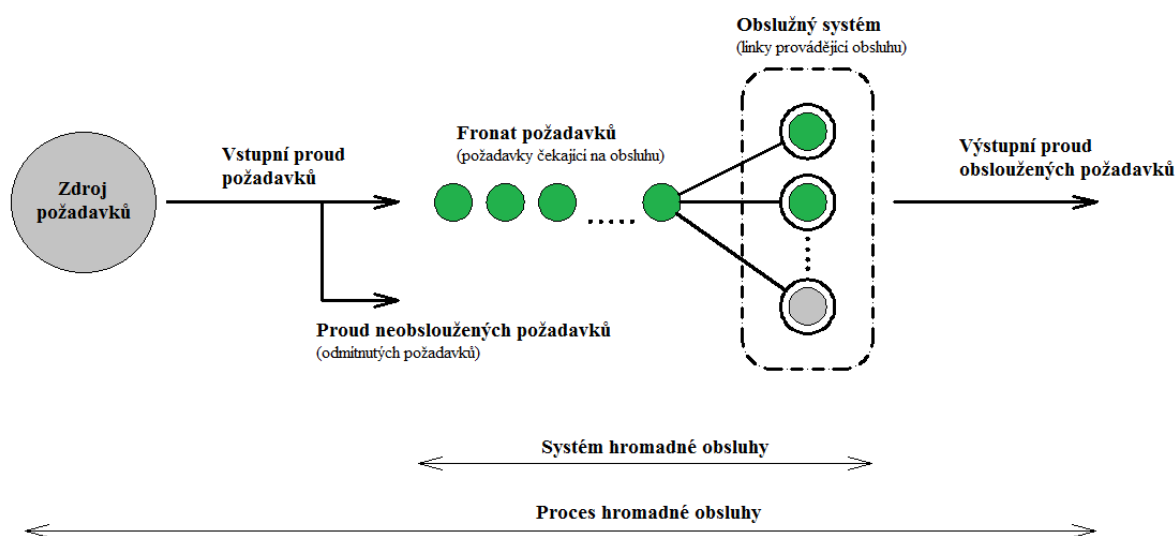
$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (3.15)$$

který udává pravděpodobnost, že v období délky  $t$  nedojde ke změně. Dále platí, že jestliže je rozdělení počtu změn systému za určitou dobu Poissonovo, pak pro tentýž proces je rozdělení dob mezi změnami exponenciální [11]. Nyní můžeme odvodit vztah distribuční funkce  $F(t)$  exponenciálního rozdělení s parametrem  $\lambda$ :

$$F(t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (3.16)$$

## 4 SYSTÉMY HROMADNÉ OBSLUHY

V reálném životě se setkáváme se systémy hromadné obsluhy velmi často. Jedná se o takové systémy, ve kterých dochází k realizaci obsluhy požadavků, které do systému vstupují. V systémech hromadné obsluhy se vyskytují dva různé druhy jednotek. Prvním druhem jsou požadavky na obsluhu, dalším jsou pak obslužné linky, které vyřizují dané požadavky na obsluhu. Důležitým faktorem v systému hromadné obsluhy je kapacita obslužné linky a dále pak intenzita přicházejících požadavků do systému. V závislosti na těchto dvou veličinách může docházet před obslužnými linkami k hromadění požadavků, tedy k vytváření front (odtud alternativní název dané problematiky - modely front). Cílem zkoumání systémů hromadné obsluhy je analýza dat s následnou optimalizací celého systému hromadné obsluhy[7]. Na činnost systému lze pohlížet ze dvou hledisek, a sice z hlediska zákazníka a z hlediska obsluhy. Cílem zákazníka je strávit v systému co nejkratší dobu, proto volí co nejkratší frontu, přechází do jiné fronty, popřípadě odchází ze systému zcela. Cílem provozovatele je minimalizace nákladů na provoz systému. Snahou je tedy zintenzivnit obsluhu, reorganizovat a specializovat obslužné linky ke spokojenosti zákazníků[3]. Obecně lze systém hromadné obsluhy znázornit následovně dle obrázku 4.1.



Obr. 4.1 Struktura systému hromadné obsluhy [16]

Následující tab. 4.1 představuje situace každodenního života, které lze systémem hromadné obsluhy popsat. Na příkladu ordinace lékaře lze systém hromadné obsluhy jednoduše objasnit. Ordinace lékaře tedy představuje obecně systém hromadné obsluhy, lékař potom představuje obslužnou linku a pacienti v tomto modelu zastupují požadavky vyžadující obsluhu. Z tabulky je rovněž patrné, že systémy hromadné obsluhy mají různou strukturu. Od nejjednodušších struktur, kde se nachází jedna obslužná linka (ordinace lékaře) až po systémy s velmi složitou strukturou (linky ve výrobě). Systém hromadné obsluhy je dále ovlivňován veličinami, které budou jednotlivě popsány v dalších podkapitolách.

Tab. 4.1 Příklady systému hromadné obsluhy [7]

Systém hromadné obsluhy	Obslužné linky	Požadavky
ordinace lékaře	lékař	pacienti
banka	přepážky	klienti
samoobsluha	pokladny	zákazníci
výrobní linka	místa na výrobní lince	výrobky
dopravní systém	křižovatky se semaforey	vozidla
benzínová pumpa	čerpací stojany	vozidla
nádraží	pokladny	cestující
telefonní centrála	telefonní linky	volající
lyžařské středisko	vleky	lyžaři

## 4.1 Historie teorie hromadné obsluhy

Teorie hromadné obsluhy byla vyvinuta za účelem předvídat chování systému poskytující určité služby, tak aby docházelo k jeho optimalizaci, popřípadě zkvalitňování. Základy teorie hromadné obsluhy položil dánský matematik A. K. Erlang (1878-1929), který pracoval pro společnost provozující telefonickou síť v Kodani a v roce 1909 popsal aplikaci teorie pravděpodobnosti na problémy telefonního provozu. Erlangova teorie byla dále rozvíjena ruským matematikem A.N. Kolmogorovem. Klasifikace systémů hromadné obsluhy tak, jak ji používáme dnes byla zavedena v 50. letech minulého století anglickým matematikem D. G. Kendalllem. Dnes jde již o klasickou část logistiky, popsanou v řadě cizojazyčných i českých monografií a ve vysokoškolských textech [16].

## 4.2 Základní charakteristiky systému hromadné obsluhy

Abychom popsali systém hromadné obsluhy matematickým modelem, je potřeba vycházet z analýzy jeho chování. Nejdříve je nutné zkoumat oboustranné vazby základních prvků systému, tedy specifikovat vstupní proud požadavků (zdroj požadavků, vstupní proud požadavků), způsob a mechanismus jejich obsluhy, včetně počtu a uspořádání obsluhujících zařízení (režim obsluhy), disciplínu čekání ve frontě, dále pořadí, v jakém vstupují požadavky do režimu obsluhy (režim fronty) a charakter dob trvání obsluhy. Další důležitou fází modelování systému hromadné obsluhy je statistická analýza jeho jednotlivých prvků. Máme-li k dispozici potřebná statistická data, je možné popsat chování systému hromadné obsluhy matematickým modelem. Výsledkem jeho řešení jsou hodnoty základních charakteristik. V závislosti na zkoumaném prvku systému, výsledkem tedy může být střední hodnota doby čekání ve frontě, střední hodnota délky fronty, střední hodnota doby setrvání v systému, vytížení a prostoje jednotlivých zařízení obsluhy, počet nebo podíl požadavků čekajících na obsluhu apod. [11].

### 4.2.1 Vstupní proud požadavků

Rozhodující vliv na činnost systému hromadné obsluhy mají vlastnosti a intenzita vstupního proudu. Vstupní proud požadavků lze obecně charakterizovat jako stochastický proces, protože požadavky přicházejí do systému obsluhy nejčastěji v náhodných okamžicích. Empirické údaje získané ze systému obsluhy vyhovují předpokladu Poissonova rozdělení počtu vstupujících požadavků za určitý interval. Rozdělení vstupujících požadavků za určitý interval odpovídá exponenciální rozdělení intervalů mezi jejich příchody, a proto se nazývají systémy s Poissonovým vstupním proudem exponenciální systémy. Kromě Poissonova rozdělení je možné setkat se i s jinými zákony rozdělení vstupního proudu, tyto systémy jsou však analyticky obtížnější [11].

Jako zdroj požadavků lze chápat množinu potenciálních zájemců o obsluhu. Důležité pro popis systému hromadné obsluhy je jejich početnost, popřípadě struktura. Zdrojem požadavků je tedy skupina nositelů požadavků, může být jeden nebo i více zdrojů, které jsou konečné nebo nekonečné. Pokud je zdroj nekonečný (vysoký počet potenciálních zájemců o obsluhu), pak na počet potenciálních zájemců nemá vliv počet již obsluhovaných nebo čekajících zájemců. V případě malých omezených zdrojů se počet potenciálních požadavků zmenšuje, zdroj požadavků je tedy konečný. Vstupy požadavků do systému popisujeme pomocí intenzity vstupu ( $\lambda$ ) (počet požadavků vstupujících do systému za jednotku času) a nebo pomocí intervalu mezi vstupy  $X_N$  (čas mezi dvěma po sobě následujícími vstupy) [3]. Tyto veličiny mezi sebou úzce souvisí. Mohou být jako deterministické (intervaly mezi vstupy jsou neměnné, např. automatická výrobní linka) a nebo jako pravděpodobnostní (intervaly mezi vstupy jsou proměnlivé, např. samoobsluha). Pravděpodobnostní intervaly jsou tedy charakterizovány typem tohoto pravděpodobnostního rozdělení a hodnotami jeho parametrů. V mnoha praktických aplikacích vyhovuje tomuto popisu exponenciální rozdělení. Exponenciální rozdělení je rozdělení s jediným parametrem  $\lambda$ . Střední hodnota tohoto rozdělení je rovna  $E(X)=1/\lambda$  [7].

#### 4.2.2 Doba trvání obsluhy

Dalším rozhodujícím vlivem na činnost ve frontě je doba trvání obsluhy. Dobu obsluhy jednotlivých požadavků ovlivňuje řada náhodných faktorů, proto ji lze také pokládat za náhodnou veličinu. Je to tedy doba, po kterou je požadavek obsluhován obslužnou linkou. Doba trvání obsluhy se obvykle také řídí exponenciálním zákonem rozdělení [11]. Podobně jako intervaly mezi příchody požadavků do systému, tak i doba trvání obsluhy může být buď deterministická a nebo pravděpodobnostní - exponenciální rozdělení je nejvhodnějším rozdělením, které popisuje intervaly mezi příchody požadavků do systému. Pokud označíme parametr exponenciálního rozdělení symbolem  $\mu$ , pak střední doba trvání obsluhy je zapsána jako  $E(X)=1/\mu$  a parametr  $\mu$  je možné označit jako intenzitu obsluhy, neboť jej lze interpretovat jako průměrný počet obslužených požadavků za určitou časovou jednotku [7].

#### 4.2.3 Disciplína čekání ve frontě

V systému hromadné obsluhy můžeme rovněž popsat chování požadavků čekajících na obsluhu. Dle trpělivosti požadavků vyžadujících obsluhu se dělí systémy hromadné obsluhy na systémy bez čekání a systémy s čekáním. Jedná-li se o systém hromadné obsluhy bez čekání, znamená to, že požadavek do systému nevstoupí, jelikož všechna zařízení obsluhy jsou obsazena a rezignuje na obsluhu. Systému s čekáním, každý požadavek který vstoupí buď trpělivě čeká a opouští systém až po ukončení obsluhy a nebo čeká po určitou dobu a teprve není-li během ní obslužen, opouští systém. Mezi systémy obsluhy s čekáním se řadí jednak systémy s neomezenou délkou fronty, jednak systémy s omezenou délkou fronty. Při neomezené délce fronty jsou všechny požadavky obslouženy, pokud jsou požadavky na obsluhu ochotny čekat. Je-li počet míst ve frontě omezen, pak při jejich plném obsazení není dalším požadavkům přicházejícím do systému obsluha poskytnuta. Tyto systémy se také nazývají systémy se ztrátami – jedná se o systémy bez čekání, ale i o systémy s čekáním, avšak s omezenou kapacitou fronty nebo s netrpělivostí požadavků během čekání ve frontě [11].

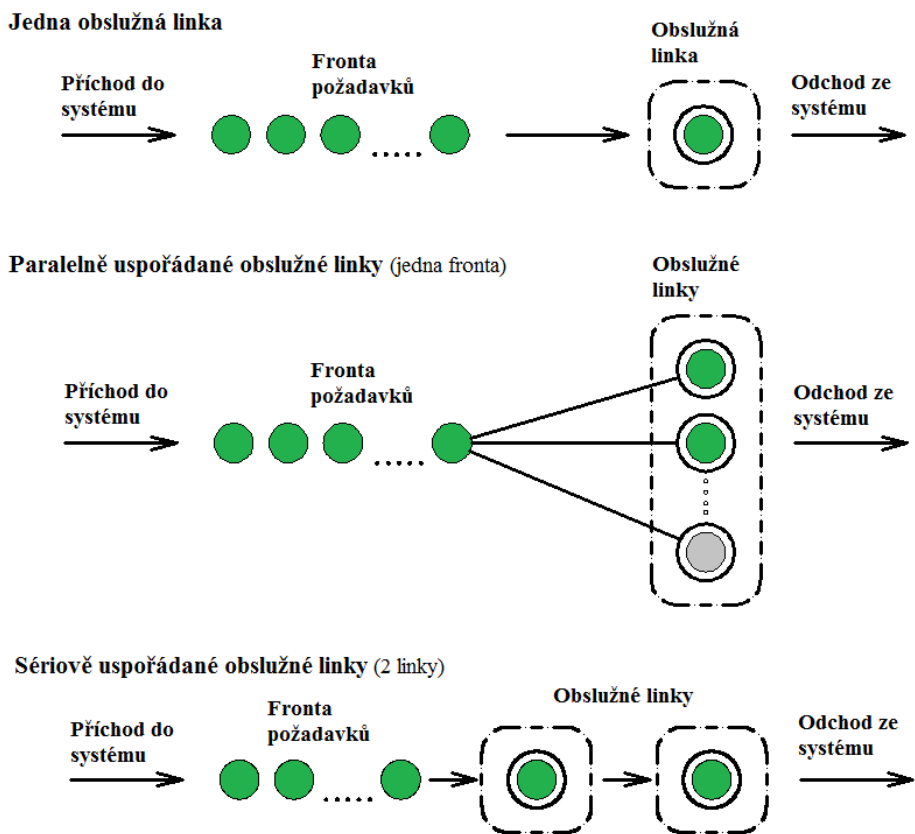
#### 4.2.4 Režim fronty

Dalším významným faktorem, který ovlivňuje efektivnost celého systému hromadné obsluhy je správně zvolený režim fronty. Režim fronty označovaný též jako řád fronty určuje způsob přechodu požadavků z fronty do obsluhy. Tyto anglické zkratky FIFO, LIFO, SIRO, PRI označují základní typy režimu fronty. FIFO (first in / first out) popisuje režim, kdy jsou požadavky obsluhovány v pevně stanoveném pořadí, tedy požadavky přicházejí z fronty do obsluhy v tom pořadí, v jakém do systému přišly. Příkladem může být samoobsluha, banka, benzínová stanice apod., jedná se o situaci, která se nejčastěji vyskytuje v systémech hromadné obsluhy. LIFO (last in / first out) popisuje opačný režim fronty. Požadavky jsou obsluhovány v opačném pořadí než v jakém do systému vstoupily, tedy jako první požadavek je obsluhován ten, který vstoupil do systému jako poslední. SIRO (selection in random order) označuje režim, kdy dojde k náhodnému způsobu přechodu požadavků z fronty do obsluhy. PRI (priority) popisuje režim, kdy požadavky přechází z fronty do obsluhy dle zadaných priorit. Požadavky jsou tedy obsluhovány dle definovaných priorit. Pokud se současně vyskytne ve frontě několik požadavků s nejvyšší prioritou, potom jsou tyto požadavky obsluhovány ve zvoleném režimu daného systému [7].

#### 4.2.5 Režim obsluhy

Počet a uspořádání obslužných linek ovlivňuje rovněž efektivní fungování systému hromadné obsluhy. Každý systém je specifický právě počtem a uspořádáním těchto linek. Počet a uspořádání obslužných linek je podstatný pro optimalizaci systému. Je nutné zvolit kompromis mezi náklady na provoz jednotlivých obslužných linek (které chceme logicky minimalizovat, tzn. čím méně linek, tím nižší náklady) a na straně druhé délkou fronty čekajících požadavků na obsluhu [10].

Nejjednodušší jsou ty systémy, kde je pouze jedna obslužná linka. O uspořádání obslužných linek hovoříme, až při provozu více obslužných linek. Takové uspořádání může být buď paralelní nebo sériové. Obrázek 4.2 schematicky znázorňuje systémy obslužných linek – jedna obslužná linka, paralelně uspořádané obslužné linky a sériově uspořádané obslužné linky.



Obr. 4.2 Uspořádání obslužných linek [8]

Paralelní uspořádání obslužných linek je takové, kdy je vedle sebe uspořádáno několik linek, které všechny poskytují stejnou obsluhu. Příkladem mohou být pokladny v samoobsluze, stojany u benzínové pumpy apod. Dále se musí brát v potaz, zda se před každou linkou vytváří samostatná fronta nebo zda je zde fronta pouze jedna, ze které přechází do obsluhy první požadavek po uvolnění libovolné linky. Podle tohoto režimu se mluví o systémech s jednou frontou nebo o systémech s více frontami.

Sériové uspořádání obslužných linek znamená uspořádání obslužných linek za sebou. Požadavek tedy musí postupně projít všemi obslužnými linkami. Příkladem může být výrobní linka. V reálných systémech hromadné obsluhy se nejčastěji vyskytuje kombinace obou těchto typů [7].



## 5 KLASIFIKACE SYSTÉMU HROMADNÉ OBSLUHY

Klasifikovat konkrétní systémy hromadné obsluhy lze na základě specifikace jejich základních prvků. Nejčastějšími kritérii jsou charakter a typ rozdělení vstupního proudu požadavků, charakter a typ rozdělení dob obsluhy, režim a struktura obsluhy, disciplína čekání a počet míst ve frontě a režim fronty. Abychom systémy hromadné obsluhy mohli jednoduše popsat, používá se standardní klasifikace základních typů systému hromadné obsluhy, která byla navržena D.G. Kendalllem.

### 5.1 Kendallova klasifikace systému hromadné obsluhy

Tato standardní klasifikace používá třímístný kód, založený na kombinaci dvou písmen a jedné číslice ve formě  $A/B/s$ , kde

$A$  označuje rozdělení intervalů mezi příchody požadavků

$B$  označuje rozdělení doby trvání obsluhy

$s$  udává počet paralelních zařízení obsluhy v systému

Pro typ rozdělení intervalů mezi příchody, a pro rozdělení dob obsluhy se obvykle používají symboly  $D, M, E_k, GI, G$ , kde

$D$  značí deterministické rozdělení

$M$  označuje exponenciální rozdělení (Markovova typu)

$E_k$  označuje Erlangovo rozdělení  $k$ -tého řádu

$GI$  značí obecné nezávislé rozdělení

$G$  značí rozdělení obecné.

Kromě tohoto třímístného kódu, se používá i rozšířený pětímístný kód ve formě  $A/B/s/x/y$ . Písmeno  $x$  označuje maximální počet míst v systému a písmeno  $y$  značí velikost zdroje požadavků. Pokud jsou deskriptory  $x$  nebo  $y$  vynechány, znamená to, že jejich hodnota je nekonečně velká, tedy neomezená [11]. Šestým kódem se obecně označuje režim fronty (FIFO, LIFO, SIRO, PRI). Pokud jsou v uvedeném zápise uvedeny pouze první tři symboly, znamená to, že režim fronty je vždy FIFO a kapacita systému hromadné obsluhy a zdroj požadavků jsou neomezené [7].

Potom např. označení  $M/M/1$  znamená, že se jedná o systém hromadné obsluhy s exponenciálním rozdělením intervalů mezi příchody požadavků i dob obsluhy s jednou obslužnou linkou [11].

### 5.2 Modely hromadné obsluhy Markovova typu

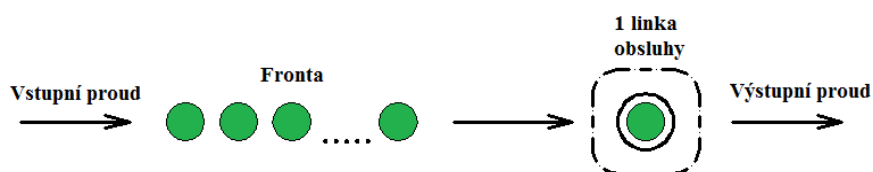
V dalších podkapitolách budou popsány základní exponenciální modely systémů hromadné obsluhy, jejichž matematické modely lze řešit analyticky. Budeme se zabývat modely hromadné obsluhy, v nichž intervaly mezi po sobě následujícími příchody požadavků a doby obsluhy mají exponenciální rozdělení (Markovova typu). Stanovení základních charakteristik kvality a efektivnosti složitějších systémů hromadné obsluhy analytickým způsobem je zpravidla obtížné, proto se v těchto případech musí použít postupy založené na simulačních metodách [11].

V reálných situacích existuje značné množství modelů hromadné obsluhy. Modely se především liší povahou vstupů jednotek do systému, charakterem doby obsluhy, počtem a uspořádáním obslužných linek, kapacitou systému a režimem fronty. Při řešení modelů nás budou zajímat základní charakteristiky systému, především střední hodnota počtu požadavků v systému hromadné obsluhy, střední hodnota počtu požadavků ve frontě, střední hodnota doby strávené požadavkem v systému hromadné obsluhy, střední hodnota doby strávené čekáním požadavku ve frontě apod.[13].

### 5.2.1 Exponenciální model jednoduché obsluhy M/M/1

Základní předpoklady exponenciálního modelu jednoduché obsluhy jsou následující:

- v systému hromadné obsluhy je jedno obslužné zařízení
- jedná se o otevřený systém, tzn. zdroj požadavků je neomezený
- velikost fronty je neomezena
- požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když je kapacita obslužného zařízení nedostatečná
- režim fronty je FIFO [12].



Obr. 5.1 Schéma modelu jednoduché obsluhy M/M/1/∞/∞/FIFO [8]

M/M/1 model je nejjednodušší případ systému hromadné obsluhy, kdy rozdělení četností náhodných, navzájem nezávislých veličin - doba obsluhy, doba mezi příchody, má exponenciální charakter rozdělení. V celém následujícím textu bude použito následující značení:

$\lambda$  ... průměrný počet požadavků, které vstupují do systému za určitý časový interval, tedy intenzita příchodů

$\mu$  ... průměrný počet požadavků obslužených za časový interval, tedy intenzita obsluhy

Pravděpodobnost vstupu  $n$  jednotek do systému v intervalu  $T = (0, t)$  je možno vyjádřit za předpokladu Poissonova rozdělení počtu vstupujících požadavků takto:

$$P_n(T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda T} \quad (5.1)$$

a odpovídá-li rozdělení dob mezi příchody  $t$  exponenciálnímu rozdělení, pak pro hustotu rozdělení dostaneme:

$$q(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (5.2)$$

Dále předpokládáme, že stav systému v libovolném okamžiku  $t$ , který bude určen číslem  $n$  (udávající počet jednotek v systému), nezávisí kromě stavu předcházejícího na žádném z předešlých stavů, tudíž, že proces hromadné obsluhy má charakter Markovova procesu.

Označíme-li  $S_n$  stav, kdy v systému je právě  $n$  jednotek, pak v intervalu  $(t, t+\Delta t)$  se mohou uskutečnit pouze tyto přechody:

$$S_0 \rightarrow S_0, S_0 \rightarrow S_1, S_1 \rightarrow S_0 \text{ pro výchozí stav}$$

a

$$S_n \rightarrow S_n, S_n \rightarrow S_{n+1}, S_n \rightarrow S_{n-1} \text{ pro } n \geq 1$$

Uvažujeme tedy pouze možnost setrvání ve stavu nebo přechod mezi sousedními stavy. To je důsledek toho, že pravděpodobnosti přechodů, za předpokladu exponenciálního rozdělení, mezi nesousedními stavy budou nekonečně malé, neboť pravděpodobnosti vstupu příp. obsluhy více než jedné jednotky v časovém intervalu  $\Delta t$  jsou zanedbatelné.

Nepodmíněnou pravděpodobnost, že systém se nachází v časovém okamžiku  $t$  ve stavu  $S_n$ , tedy  $(n-1)$  požadavků je ve frontě a jeden v obsluze, označíme  $p_n(t)$ .

Je-li  $\lambda \Delta t$  pravděpodobnost příchodu jednotky v intervalu  $(t, t+\Delta t)$  a  $\mu \Delta t$  pravděpodobnost ukončení obsluhy v intervalu  $(t, t+\Delta t)$ , pak po uplynutí doby  $\Delta t$  se změní  $p_n(t)$  v pravděpodobnost  $p_n(t+\Delta t)$ . Matice P je matice pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými stavy za dobu  $\Delta t$ :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu\Delta t & 1 - \mu\Delta t - \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu\Delta t & 1 - \mu\Delta t - \lambda\Delta t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Je-li v okamžiku  $t$  vektor nepodmíněných pravděpodobností  $p_n(t)$  dán výrazem:

$$\mathbf{p}(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \dots], \quad (5.4)$$

pak po uplynutí intervalu  $\Delta t$  bude platit:

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{P} \quad (5.5)$$

Ze vztahu (5.5) dostaneme tudíž:

$$p_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)p_0(t) + \mu\Delta t p_1(t), \quad n = 0 \quad (5.6)$$

$$p_n(t + \Delta t) = \lambda\Delta t p_{n-1}(t) + (1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t)p_n(t) + \mu\Delta t p_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \quad (5.7)$$

Po přechodu k limitě pro  $\Delta t \rightarrow 0$  pak platí:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \quad n = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n \geq 1 \quad (5.9)$$

Pak získáme soustavu  $(n+1)$  lineárních homogenních diferenciálních rovnic pravděpodobností  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \dots$ , která se nazývá Erlangovou soustavou. Řešením integrování této soustavy lze určit  $p_n(t)$  jako funkce parametrů  $\lambda$  a  $\mu$ . V dalších výpočtech bude zkoumáno, zda systém hromadné obsluhy se po době fungování stabilizuje, tzn. zda přestane být závislý na čase  $t$  a na výchozích podmínkách.

Podmínkou stabilizace zkoumaného systému je platnost vztahu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

kdy alespoň jeden z výrazů  $p_n$  je různý od nuly. Protože Markovův řetězec, odpovídající matici pravděpodobností přechodu  $\mathbf{P}$  je ergodický a neperiodický, existují pro všechny pravděpodobnosti  $p_n(t)$  limity  $p_n$  buď všechny kladné nebo všechny nulové.

Pokud je splněna podmínka pro stabilizaci systému hromadné obsluhy, pak pro  $t \rightarrow \infty$  se budou derivace v rovnicích (5.9) blížit k nule, proto může být zapsáno:

$$\lambda p_0 = \mu p_1, \quad n = 0 \quad (5.11)$$

$$(\lambda + \mu)p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}, \quad n \geq 1 \quad (5.12)$$

Rozepsáním těchto rovnic získáme:

$$p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0, \quad p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0, \quad \dots, \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \quad (5.13)$$

Platí, že  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ , může se tedy psát:

$$1 - p_0 = p_0 \left[ \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \dots \right] \quad (5.14)$$

nebo:

$$1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n, \quad \lambda < \mu \quad (5.15)$$

$$1 = p_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \quad (5.16)$$

proto:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho \quad (5.17)$$

kde  $\rho = \lambda/\mu$  udává stupeň vytíženosti systému hromadné obsluhy a je nazýváno průměrnou intenzitou provozu. Použije-li se výraz  $p_0 = 1 - (\lambda/\mu) = 1 - \rho$  pro vyjádření limitní, tj. stacionární pravděpodobnosti  $p_n$ , pak získáme:

$$p_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n, \quad n \geq 0 \quad (5.18)$$

Pro otevřený systém můžeme předpokládat, že řada  $\rho^n$  bude klesající, tj. s rostoucím  $n$  konverguje k nule, takže platí, že  $|\rho| > 1$ , systém se nestabilizuje a řada  $\rho^n$  by rostla neohraničeně nade všechny meze. Pravděpodobnost toho, že náhodná veličina  $N$ , představující počet jednotek systému, bude větší než  $n$  vyjádříme pro  $\rho < 1$  takto:

$$P(N > n) = p_{n+1} + p_{n+2} + \dots = (1 - \rho)\rho^{n+1}(1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \rho^{n+1} \quad (5.19)$$

Proto např. pravděpodobnost, že jednotka bude v systému muset čekat, která je dána pravděpodobností, že v systému je alespoň jeden požadavek, lze vyjádřit:

$$P(N > 0) = \rho = 1 - p_0 [11]. \quad (5.20)$$

Základní charakteristiky systému M/M/1

Následně budou uvedeny vzorce pro výpočty základních charakteristik používané k posouzení efektivnosti daného systému jak z hlediska obsluhovaných požadavků, tak z hlediska využití obslužných zařízení. Tyto charakteristiky jsou určeny na základě použití shora odvozených obecných vztahů a potom za předpokladu, že je známo rozdělení stacionárních pravděpodobností  $p_n$ , které vyjadřují pravděpodobnost počtu jednotek nacházejících se v systému hromadné obsluhy.

- Střední hodnota počtu požadavků v systému:

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (1 - \rho) \rho^n = 0 + (1 - \rho) \rho \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} = \\ &= (1 - \rho) \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d \rho^n}{d \rho} = (1 - \rho) \rho \frac{d \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n}{d \rho} = \\ &= (1 - \rho) \rho \frac{d \frac{\rho}{1 - \rho}}{d \rho} = (1 - \rho) \rho (1 - \rho + \rho)(1 - \rho)^{-2} = \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned} \quad (5.21)$$

a dosadíme-li za  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , získáme  $\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

- Střední hodnota počtu požadavků ve frontě:

$$E(N_f) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) p_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n - \left( \sum_{n=1}^{\infty} p_n \right) \quad (5.22)$$

$$= E(N) - (1 - p_0) = E(N) - \rho = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Střední hodnota počtu volných obslužných míst:

$$E(K) = \sum_{n=0}^{1-1} (1-n) p_n = p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (5.23)$$

- Pravděpodobnost, že požadavek bude čekat:

$$P(N > 0) = 1 - \sum_{n=0}^{1-1} p_n = 1 - p_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5.24)$$

- Pravděpodobnost, že požadavek nebude čekat:

$$P(N \leq 0) = \sum_{n=0}^{1-1} p_n = p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad (5.25)$$

- Pravděpodobnost vzniku fronty:

$$P(N > 1) = 1 - \sum_{n=0}^1 p_n = 1 - p_0 - p_1 = \rho - (1 - \rho)\rho = \rho^2 = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \quad (5.26)$$

- Střední hodnota doby strávené požadavkem v systému hromadné obsluhy:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda^*} = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (5.27)$$

- Střední hodnota doby strávené čekáním požadavku ve frontě:

$$E(T_f) = \frac{E(N_f)}{\lambda^*} = \frac{E(N_f)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (5.28)$$

kde pro  $\lambda^*$  platí:

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda p_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (p_n) = \lambda$$

Mezi  $E(T)$  a  $E(T_f)$  platí vztah:

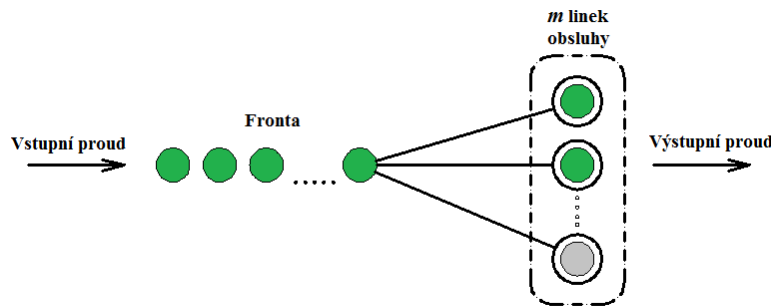
$$E(T_f) = E(T) - \frac{1}{\mu} \quad (5.29)$$

který znamená, že stření hodnotu doby strávené čekáním požadavku ve frontě dostaneme, když od střední hodnoty doby strávené požadavkem v SHO odečteme stření hodnotu doby strávené požadavkem v obsluze [12].

### 5.2.2 Exponenciální model vícenásobné obsluhy M/M/m

Základní vlastnosti exponenciálního modelu vícenásobné obsluhy jsou následující:

- na rozdíl od exponenciálního modelu jednoduché obsluhy, v tomto modelu se nachází  $m$  paralelně uspořádaných homogenních obslužných zařízení, z nichž každé obslužné místo má intenzitu obsluhy  $\mu$  (jsou-li v provozu dvě zařízení obsluhy, budou mít dohromady intenzitu obsluhy  $2\mu$  atd., tedy nejvýše  $m\mu$ )
- opět se jedná o otevřený systém, tzn. zdroj požadavků je neomezený
- velikost fronty je neomezena
- požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když je kapacita obslužného zařízení nedostatečná
- režim fronty je FIFO[12].



Obr. 5.2 Schéma modelu vícenásobné obsluhy M/M/m/∞/∞/FIFO [8]

Fronta v tomto modelu se začíná vytvářet až při vstupu  $(m+1)$ -ního požadavku. Rozdělení intervalů mezi příchody a rozdělení dob trvání obsluhy v každém obslužném zařízení se předpokládá zase exponenciální. Dále se předpokládá, že požadavky vstupují do systému s konstantní intenzitou  $\lambda$ .

Matice pravděpodobností přechodu vypadá takto:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}
 1 - \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \mu\Delta t & 1 - (\lambda + \mu)\Delta t & \lambda\Delta t & \dots & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 2\mu\Delta t & 1 - (\lambda + 2\mu)\Delta t & \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - [\lambda + (m-1)\mu]\Delta t & \lambda\Delta t & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & m\mu\Delta t & 1 - (\lambda + m\mu)\Delta t & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m\mu\Delta t & \dots
 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Tak jako u M/M/1 i zde platí:

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{P}, \text{ kde } \mathbf{p}(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \dots] \quad (5.31)$$

Rozepsáním vztahu získáme:

$$p_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)p_0(t) + \mu\Delta t p_1(t) \quad (5.32)$$

$$p_n(t + \Delta t) = \lambda\Delta t p_{n-1}(t) + [1 - (\lambda + n\mu)\Delta t]p_n(t) + (n+1)\mu\Delta t p_{n+1}(t), \quad 1 \leq n < m \quad (5.33)$$

$$p_n(t + \Delta t) = \lambda\Delta t p_{n-1}(t) + [1 - (\lambda + m\mu)\Delta t]p_n(t) + m\mu\Delta t p_{n+1}(t), \quad n \geq m \quad (5.34)$$

Po přechodu k limitě  $\Delta t \rightarrow 0$  pak platí:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \quad (5.35)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad 1 \leq n < m \quad (5.36)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + m\mu) p_n(t) + m\mu p_{n+1}(t), \quad n \geq m \quad (5.37)$$

Získáme soustavu lineárních homogenních diferenciálních rovnic pravděpodobností  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \dots$ . Za předpokladu stabilizace zkoumaného systému  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n$ , pro  $n=0,1,\dots$

můžeme soustavu (5.36) psát ve tvaru:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (5.38)$$

$$(\lambda + n\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} = 0, \quad 1 \leq n < m \quad (5.39)$$

$$(\lambda + m\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + m\mu p_{n+1} = 0, \quad n \geq m \quad (5.40)$$

Veličinu  $p_n$  získáme postupným dosazováním ze soustavy rovnic (5.39), kde pro zjednodušení použijeme  $\rho = \lambda/\mu$  a získáme tak:

$$p_n = p_0 \frac{\rho^n}{n!}, \quad 1 \leq n < m \quad (5.41)$$

$$p_n = p_0 \frac{\rho^n}{m^n} \frac{m^m}{m!}, \quad n \geq m \quad (5.42)$$

Veličinu  $p_0$  dostaneme opět z podmínky  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ , obecně lze podmínku vyjádřit ve tvaru

$$p_0 \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\rho^n}{m^{n-m} m!} \right] = 1 \quad (5.43)$$

přitom platí:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{\rho^n}{m^{n-m} m!} p_0 = \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{\rho}{m} \right)^{n-m} p_0 = \frac{\rho^m}{m!} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{m} \right)^i p_0 = \frac{\rho^m}{m!} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{m}} p_0 \quad (5.44)$$

proto:

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{m}} \right]^{-1} \quad (5.45)$$

Podmínka stabilizace v tomto systému je vyjádřena takto:

$$\frac{\lambda}{m\mu} = \frac{\rho}{m} < 1 \quad (5.46)$$

Znamená to tedy, že intenzita vstupu musí být menší než intenzita obsluhy všech zařízení [11].

Základní charakteristiky systému M/M/m

Následně budou uvedeny vzorce pro výpočty základních charakteristik používané k posouzení efektivnosti daného systému jak z hlediska obsluhovaných požadavků, tak z hlediska využití obslužných zařízení.

- Střední hodnota počtu požadavků v systému:

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = E(N_f) + \frac{\lambda}{\mu} = E(N_f) + m\rho \quad (5.47)$$

- Střední hodnota počtu požadavků ve frontě:

$$E(N_f) = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m)p_n = p_0 \lambda \mu (\lambda/\mu)^m / ((m-1)!(m\mu - \lambda)^2) \quad (5.48)$$

- Střední hodnota počtu volných obslužných míst:

$$E(K) = \sum_{n=0}^{m-1} (m-n)p_n = m - \lambda/\mu = (1-\rho)m \quad (5.49)$$

- Pravděpodobnost, že požadavek bude čekat:

$$P(N > m-1) = 1 - \sum_{n=0}^{m-1} p_n = \sum_{n=m}^{\infty} P_n = p_0 \mu \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{(m-1)!(m\mu - \lambda)} \quad (5.50)$$

- Pravděpodobnost, že požadavek nebude čekat:

$$P(N \leq m-1) = \sum_{n=0}^{m-1} p_n = 1 - p_0 \mu \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{(m-1)!(m\mu - \lambda)} \quad (5.51)$$

- Střední hodnota doby strávené požadavkem v systému hromadné obsluhy:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda^*} = \frac{E(N)}{\lambda} = E(T_f) + \frac{1}{\mu} \quad (5.52)$$

- Střední hodnota doby strávené čekáním požadavku ve frontě:

$$E(T_f) = \frac{E(N_f)}{\lambda^*} = \frac{E(N_f)}{\lambda} = p_0 \mu \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{(m-1)!(m\mu - \lambda)^2} \quad (5.53)$$

- Pravděpodobnost, že požadavek bude na obsluhu čekat alespoň dobu  $w$ :

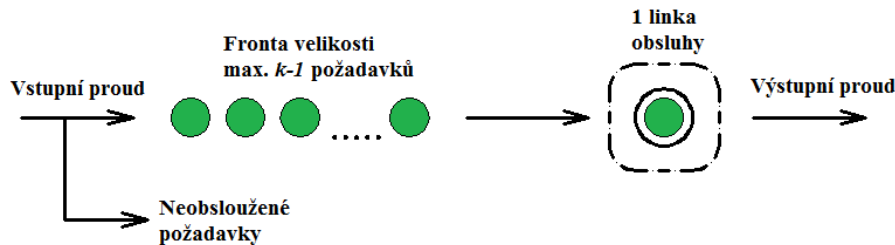
$$p(w) = \int_w^{\infty} f(u) du = p_0 \mu \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{(m-1)!(m\mu - \lambda)} \exp(w(\lambda - m\mu)), w > 0 [12]. \quad (5.54)$$



### 5.2.3 Exponenciální model jednoduché obsluhy s omezenou kapacitou M/M/1/k

V předchozích dvou modelech M/M/1 a M/M/m jsme předpokládali, že celý systém má neomezenou kapacitu. Model M/M/1/k neomezenou kapacitu nemá, ale kapacita systému hromadné obsluhy je omezena tak, že v systému se celkem může vyskytovat maximálně  $k$  požadavků. Tento systém je rovněž systémem se ztrátami, protože je-li systém plně obsazen, vstup dalších požadavků do systému není možný (tzn. 1 požadavek je obsluhován a pouze  $(k-1)$  požadavků čeká ve frontě). Základní vlastnosti exponenciálního modelu jednoduché obsluhy s omezenou kapacitou jsou následující:

- v systému hromadné obsluhy se nachází jedno obslužné zařízení, tj.  $m=1$
- jedná se o otevřený systém, zdroj požadavků je neomezený
- velikost fronty je v tomto systému omezena kapacitou, ve frontě může být maximálně  $(k-1)$  požadavků
- i když nedostačuje kapacita obslužného zařízení, požadavky na obsluhu trpělivě čekají ve frontě
- požadavky postupují do obsluhy v režimu fronty FIFO [12].



Obr. 5.3 Schéma modelu jednoduché obsluhy s omezenou kapacitou M/M/1/k/∞/FIFO [8]

Pro stacionární pravděpodobnosti platí:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad n \leq k \quad (5.55)$$

$$p_n = 0, \quad n > k \quad (5.56)$$

stacionární pravděpodobnost  $p_0$  bude určena z podmínky  $\sum_{n=0}^k p_n = 1$ . Dále opět označíme  $\rho = \lambda/\mu$  ( $\rho$  nemusí být v tomto případě menší než 1), pak bude platit:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^k \rho^n}. \quad (5.57)$$

Řada ve jmenovateli je konečná a součet této řady:

$$\frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho}, \quad \rho \neq 1$$

a

$$k+1, \quad \rho = 1$$

proto

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} \quad \text{a} \quad p_n = \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^{k+1}}, \quad \rho \neq 1 \quad (5.58)$$

a

$$p_0 = \frac{1}{k+1} \quad \text{a} \quad p_n = \frac{1}{k+1}, \quad \rho = 1 [11]. \quad (5.59)$$

Základní charakteristiky modelu M/M/1/k

Následně budou popsány výpočty základních charakteristik systému používané k posouzení efektivity daného systému.

- Střední hodnota počtu požadavků v systému:

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^k np_n = p_0 \sum_{n=0}^k np^n = \frac{\rho(1 - (k+1)\rho^k + k\rho^{k+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})} \quad (5.60)$$

- Střední hodnota počtu požadavků ve frontě:

$$E(N_f) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n = \sum_{n=1}^k (n-1)p_n = E(N) - \frac{\rho(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}} \quad (5.61)$$

- Střední hodnota doby strávené požadavkem v systému hromadné obsluhy:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda^*} \quad (5.62)$$

- Střední hodnota doby strávené čekáním požadavku ve frontě:

$$E(T_f) = \frac{E(N_f)}{\lambda^*} \quad (5.63)$$

kde pro  $\lambda^*$  platí:

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda p_n) = \sum_{n=0}^{k-1} (\lambda p_n) = \lambda \sum_{n=0}^{k-1} (p_n) = \lambda(1 - p_k)$$

a  $p_k$  udává pravděpodobnost, že v systému je právě  $k$  požadavků:

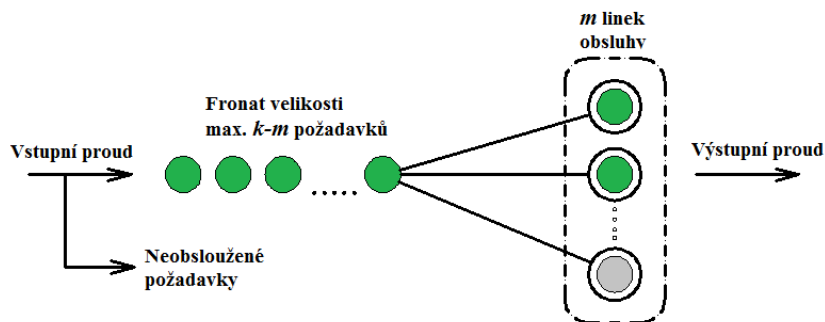
$$p_k = \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{k+1}} \quad (5.64)$$

Rovněž také udává pravděpodobnost, že požadavek nebude obslužen v důsledku omezené kapacity systému. Opačným jevem je, že požadavek bude obslužen a jeho pravděpodobnost je právě  $(1 - p_k)$  [12].

#### 5.2.4 Exponenciální model vícenásobné obsluhy s omezenou kapacitou M/M/m/k

U tohoto modelu celý systém hromadné obsluhy opět nemá neomezenou kapacitu, ale kapacita systému je omezena tak, že v systému se celkem může vyskytovat maximálně  $k$  požadavků, zároveň obsluhováno současně může být  $m$  požadavků na  $m$  homogenních paralelně uspořádaných obslužných zařízeních a zbývajících maximálně  $(k-m)$  požadavků může být ve frontě. Tento model obsluhy je opět systém se ztrátami. Základní vlastnosti modelu M/M/m/k jsou podobné jako u již popisovaného modelu M/M/m:

- v tomto modelu se nachází  $m$  paralelně uspořádaných homogenních obslužných zařízení, z nichž každé obslužné místo má intenzitu obsluhy  $\mu$
- opět se jedná o otevřený systém, tzn. zdroj požadavků je neomezený
- velikost fronty je ale omezena počtem, ve frontě může být maximálně  $(k-m)$  požadavků
- všechny požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když je kapacita obslužného zařízení nedostatečná
- požadavky vstupují do obsluhy v režimu FIFO



Obr. 5.4 Schéma modelu vícenásobné obsluhy s omezenou kapacitou M/M/m/k/FIFO [8]

Intenzita vstupu je konstantní pro všechna  $n < k$ , zatímco pro  $n \geq k$  je nulová, neboť požadavky do systému nemohou z důvodu kapacity vstupovat. Intenzita obsluhy je proměnná. Intenzity vyjádříme následně takto:

$$\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, \dots, k-1, \lambda_n = 0, n = k, k+1, \dots, \quad (5.65)$$

$$\mu_n = n\mu, n = 1, \dots, m, \mu_n = m\mu, n = m+1, m+2, \dots [12]. \quad (5.66)$$

Pro stacionární pravděpodobnosti  $p_k$  platí:

$$p_n = p_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{n!} = p_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}, n \leq m \quad (5.67)$$

$$p_n = p_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{m! m^{n-m}} = p_0 \frac{m^m \rho^n}{m!}, m < n \leq k \quad (5.68)$$

Pomocí vztahu  $\sum_{n=0}^k p_n = 1$  vypočítáme  $p_0$ :

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \sum_{n=m}^k \frac{(m\rho)^n}{m! m^{n-m}} \right]^{-1} [11]. \quad (5.69)$$

Základní charakteristiky modelu M/M/m/k

Následně budou uvedeny vzorce pro výpočty nejběžnějších charakteristik systému používané k posouzení efektivity daného systému.

- Střední hodnota počtu požadavků ve frontě:

$$E(N_f) = \sum_{n=m}^{\infty} (n-m) p_n = \sum_{n=m}^k (n-m) p_n = p_0 m^m \rho^{m+1} \frac{1 - \rho^{k-m+1} - (1-\rho)(k-m+1)^{k-m}}{m!(1-\rho)^2} \quad (5.70)$$

- Střední hodnota doby strávené čekáním požadavku ve frontě:

$$E(T_f) = \frac{E(N_f)}{\lambda^*} \quad (5.71)$$

- Střední hodnota doby strávené požadavkem v systému hromadné obsluhy:

$$E(T) = E(T_f) + \frac{1}{\mu} \quad (5.72)$$

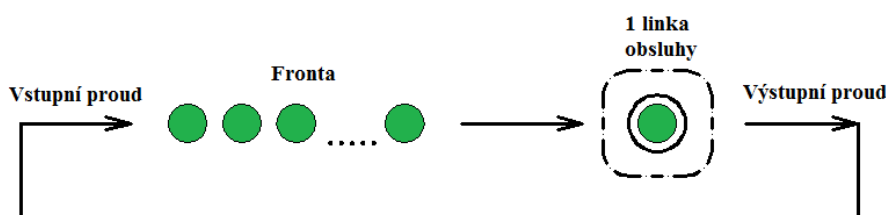
- Střední hodnota počtu požadavků v systému:

$$E(N) = \lambda^* E(T) [12]. \quad (5.73)$$

### 5.2.5 Uzavřený exponenciální model jednoduché obsluhy M/M/1./r

V předešlých modelech otevřených systémů hromadné obsluhy jsme považovali zdroj požadavků vyžadujících obsluhu za neomezený. Následkem tohoto předpokladu byla nezávislost intenzity vstupu požadavků na stavu systému. V případě uzavřeného systému hromadné obsluhy platí, že zdroj požadavků je omezený, tedy konečný. V tomto případě intenzita obsluhy ovlivňuje intenzitu vstupu požadavků. Po skončení obsluhy požadavky opouštějí systém a stávají se znovu prvky množiny potenciačních požadavků ve zdroji [11]. Základní vlastnosti modelu M/M/1./r jsou podobné jako u již popisovaného modelu M/M/1:

- v systému se nachází jedno obslužné zařízení, tj.  $m = 1$
- jedná se o uzavřený systém, tzn. zdroj požadavků je omezený  $r$  požadavky
- velikost fronty není omezena
- všechny požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když je kapacita obslužného zařízení nedostatečná
- požadavky vstupují do obsluhy v režimu FIFO



Obr. 5.5 Schéma modelu uzavřeného systému jednoduché obsluhy M/M/1./r/FIFO [8]

Intenzita vstupu není konstantní, ale závisí na počtu požadavků v systému. Obvyklý způsob vyjádření této závislosti je založen na předpokladu, že známe intenzitu vstupu požadavků  $\lambda$  v otevřeném systému. Intenzita obsluhy je konstantní, nezávisí na stavu systému:

$$\lambda_n = \lambda(r - n), \quad n = 0, 1, \dots, r \quad \lambda_n = 0, \quad n = r + 1, r + 2 \quad (5.74)$$

$$\mu_n = \mu, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.75)$$

Za podmínky stabilizace systému hromadné obsluhy  $\rho = \lambda/\mu < 1$ , platí pravděpodobnosti  $p_n, n=0, 1, \dots$ . Pro stacionární pravděpodobnosti  $p_n$  tedy platí:

$$p_n = p_0 \frac{\rho^n r!}{(r - n)!}, \quad n = 0, 1, \dots, r \quad p_n = 0, \quad n > r \quad (5.76)$$

Stacionární pravděpodobnost  $p_0$  bude určena z podmínky  $\sum_{n=0}^r p_n = 1$ , a potom:

$$p_0 = \left( \sum_{n=0}^r \frac{\rho^n r!}{(r - n)!} \right)^{-1} \quad (5.77)$$

Základní charakteristiky modelu M/M/1./r

Následně budou uvedeny vzorce pro výpočty nejběžnějších charakteristik systému používané k posouzení efektivity daného systému. Tyto výpočty lze provést obdobně jako v otevřeném jednonábovém systému.

- Střední hodnota počtu požadavků v systému:

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} (np_n) = \sum_{n=0}^r (np_n) = r - \frac{1-p_0}{\rho} \quad (5.78)$$

- Střední hodnota počtu požadavků ve frontě:

$$E(N_f) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)p_n = \sum_{n=0}^r (n-1)p_n = r - (1-p_0)\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \quad (5.79)$$

- Střední hodnota doby strávené požadavkem v systému hromadné obsluhy:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda^*} \quad (5.80)$$

- Střední hodnota doby strávené čekáním požadavků ve frontě:

$$E(T_f) = \frac{E(N_f)}{\lambda^*} \quad (5.81)$$

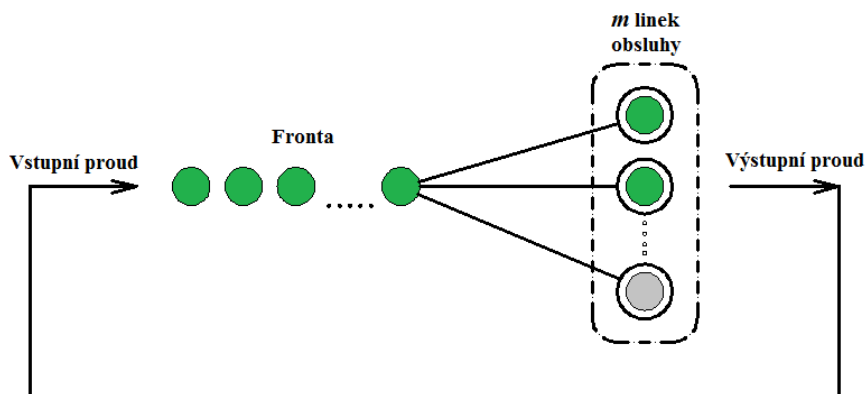
kde pro  $\lambda^*$  platí:

$$\lambda^* = \lambda(r - E(N)) = \frac{\lambda(1-p_0)}{\rho} \quad [12].$$

### 5.2.6 Uzavřený exponenciální model vícenásobné obsluhy M/M/m./r

Základní vlastnosti modelu M/M/m./r jsou podobné jako u již popisovaného modelu M/M/m:

- v tomto modelu se nachází  $m$  paralelně uspořádaných homogenních obslužných zařízení, z nichž každé obslužné místo má intenzitu obsluhy  $\mu$
- jedná se ale o uzavřený systém, tzn. zdroj požadavků je omezený  $r$  požadavky
- v rámci tohoto uzavřeného systému velikost fronty není vlastně omezena
- všechny požadavky trpělivě čekají ve frontě na obsluhu, i když je kapacita obslužného zařízení nedostatečná
- požadavky vstupují do obsluhy v režimu fronty FIFO



Obr. 5.6 Schéma modelu uzavřeného systému jednoduché obsluhy M/M/m./r/FIFO [8]

Intenzita vstupu a intenzita obsluhy požadavku nejsou konstantní, ale závisí na počtu požadavků v systému, tj. na stavu, v jakém se systém hromadné obsluhy nachází.

Pro tyto intenzity platí:

$$\lambda_n = \lambda(r-n), n=0,1,\dots,r \quad \lambda_n = 0, n=r+1, r+2, \dots, \quad (5.82)$$

$$\mu_n = n\mu, n=1,2,\dots,m, \quad \mu_n = n\mu, n=m+1, m+2,\dots \quad (5.83)$$

Za podmínky stabilizace systému hromadné obsluhy  $\rho = \lambda / (m\mu) < 1$  platí pravděpodobnosti  $p_n, n=0,1,\dots$ . Pro stacionární pravděpodobnosti  $p_n$  tedy platí:

$$p_n = p_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{r!}{n!(r-n)!}, n=0,1,\dots,m \quad (5.84)$$

$$p_n = p_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{r!}{m^{n-m} m!(r-n)!}, n=m+1, \dots, r, \quad (5.85)$$

$$p_n = 0, n=r+1, \dots \quad (5.86)$$

Stacionární pravděpodobnost  $p_0$  bude určena z podmínky  $\sum_{n=0}^r p_n = 1$ , potom:

$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^{m-1} \binom{r}{n} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=m}^r \binom{r}{n} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{n!}{m! m^{n-m}} \right]^{-1} \quad (5.87)$$

Základní charakteristiky modelu M/M/m./r

Následně budou uvedeny vzorce pro výpočty nejběžnějších charakteristik systému používané k posouzení efektivnosti daného systému.

- Střední hodnota počtu požadavků v systému:

$$E(N) = \sum_{n=0}^r n p_n = p_0 \left[ \sum_{n=0}^{m-1} n \binom{r}{n} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=m}^r n \binom{r}{n} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{1}{m!} \frac{n!}{m^{n-m}} \right] \quad (5.88)$$

- Střední hodnota počtu požadavků ve frontě:

$$E(N_f) = \sum_{n=m}^r (n-m) p_n = E(N) - m + p_0 \sum_{n=0}^{m-1} (m-n) \binom{r}{n} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \quad (5.89)$$

- Střední hodnota doby strávené požadavkem v systému hromadné obsluhy:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda^*} \quad (5.90)$$

- Střední hodnota doby strávené čekáním požadavku ve frontě:

$$E(T_f) = \frac{E(N_f)}{\lambda^*} \quad (5.91)$$

kde pro  $\lambda^*$  platí:

$$\lambda^* = \lambda(r - E(N)) [12].$$

### 5.2.7 Modely systémů hromadné obsluhy s netrpělivostí požadavků

Netrpělivost požadavků znamená, že pokud požadavky v systému hromadné obsluhy nejsou ochotny čekat ve frontě, rezignují na obsluhu. Tato netrpělivost se může projevit dvojím způsobem. Potom hovoříme o tzv. apriorní netrpělivosti a o aposteriorní netrpělivosti. Apriorní netrpělivost znamená, že požadavek do systému nevstoupí, pokud je v systému již jistý stanovený počet požadavků, nebo zadaný počet požadavků ve frontě, případně jistá zadaná předpokládaná mez doby čekání na obsluhu. Apriorní netrpělivost se modeluje pomocí proměnlivých hodnot  $\lambda_n$  závislých na stavu systému. Aposteriorní netrpělivost znamená, že požadavek vstoupí do systému, zařadí se do fronty, avšak po jisté mezní době rezignuje na obsluhu a systém opouští. Aposteriorní netrpělivost se modeluje pomocí proměnlivých hodnot  $\mu_n$  závislých na stavu systému.

Pro intenzity vstupu a obsluhy požadavků u apriorní netrpělivosti požadavků platí:

$$\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, \dots, m, \lambda_n = \lambda J(n), n = m + 1, m + 2, \dots, \quad (5.92)$$

$$\mu_n = n\mu, n = 1, 2, \dots, m, \mu_n = m\mu, n = m + 1, m + 2, \dots, \quad (5.93)$$

přítom funkce  $J(n)$  je zadaná funkce netrpělivosti.

Pro intenzity vstupu a obsluhy požadavků u aposteriorní netrpělivosti požadavků platí:

$$\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, \dots, \quad (5.94)$$

$$\mu_n = n\mu, n = 1, 2, \dots, m, \mu_n = m\mu + (n - m)v, n = m + 1, m + 2, \dots, \quad (5.95)$$

parametr  $v$  zde představuje intenzitu exponenciálního rozdělení náhodné veličiny, pomocí níž se modeluje aposteriorní netrpělivost požadavků, tzn. dobu čekání požadavků ve frontě, nežli rezignují na obsluhu[12].

### 5.2.8 Modely systémů hromadné obsluhy s prioritami požadavků

Všechny předchozí modely hromadné obsluhy měly společné to, že režim fronty byl FIFO, tzn. požadavky přistupovaly k obsluze v pořadí, ve kterém do systému přišly. Je-li aplikována v systému hromadné obsluhy jistá priorita požadavků, znamená to, že tyto požadavky jsou obsluhovány přednostně a režim fronty se mění na PRI. U takových požadavků můžeme rozlišovat tzv. relativní prioritu (požadavek je obslužen po příchodu do systému ihned, jakmile se uvolní obslužné zařízení; k přerušení probíhající obsluhy nedochází) a absolutní prioritu (požadavek je obslužen okamžitě ve chvíli svého příchodu do systému bez ohledu na to, že je obsluhován jiný požadavek a v tomto případě dochází k přerušení probíhající obsluhy).

Intenzita obsluhy je konstantní pro všechny stavy systému a je označena  $\mu$ . Uvažovaný celkový počet vstupujících požadavků do systému je popsateľný Poissonovým procesem s intenzitou  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ , kde  $\lambda_1$  je intenzita vstupu preferovaných požadavků a  $\lambda_2$  je intenzita vstupu ostatních, nepreferovaných. Intenzita provozu systému je označena  $\rho$ , a podmínkou stabilizace systému je opět  $\rho = \lambda/\mu < 1$ . Pravděpodobnost výskytu  $n$  požadavků v systému se vyjádří  $p_n$ . Musí být zavedeny pravděpodobnosti, které podrobněji vystihují skladbu preferovaných požadavků ( $r=1$ ) a nepreferovaných požadavků ( $r=2$ ) v systému. Pak pro pravděpodobnosti  $p_{k,m,r}$  platí, že v systému ve stabilizovaném stavu je právě  $k$  preferovaných a  $m$  nepreferovaných požadavků, tzn. v systému se nachází celkem  $k+m=n$  požadavků.

Základní charakteristiky modelu systémů hromadné obsluhy s prioritami požadavků  
Nyní budou popsány výpočty nejběžnějších charakteristik systému:

- Pravděpodobnost, že systém je prázdný:

$$p_0 = 1 - \rho \quad (5.96)$$

- Pravděpodobnost dalších stavů, vzhledem k zavedeným  $p_{k,m,r}$ :

$$p_n = \sum_{m=0}^{n-1} (p_{n-m,m,1} + p_{m,n-m,2}) = (1 - \rho)\rho^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.97)$$

- Průměrné relativní vytížení systému jednotlivými druhy požadavků:

$$r_r = \frac{\rho\lambda_r}{\lambda}, \quad r = 1, 2. \quad (5.98)$$

- Podíly z celkové střední hodnoty doby obsluhy připadající na jednotlivé druhy požadavků:

$$E(T_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (p_{k,m,1}) = \frac{\lambda_1}{\mu}, \quad \text{popř.} \quad E(T_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (p_{k,m,2}) = \frac{\lambda_2}{\mu} \quad (5.99), (5.100)$$

- Střední hodnoty počtů jednotlivých druhů požadavků v systému:

$$E(N_1) = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu} \left(1 + \rho - \frac{\lambda_1}{\mu}\right)}{1 - \frac{\lambda_1}{\mu}}, \quad \text{popř.} \quad E(N_2) = \frac{\frac{\lambda_2}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu}\right) (1 + \rho)}{(1 - \rho) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu}\right)} \quad (5.101), (5.102)$$

- Střední hodnoty délek front připadající na jednotlivé druhy požadavků a střední hodnota celkové délky fronty:

$$E(N_{f,1}) = \frac{\rho \frac{\lambda_1}{\mu}}{1 - \frac{\lambda_1}{\mu}}, \quad E(N_{f,2}) = \frac{\rho \frac{\lambda_2}{\mu}}{(1 - \rho) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu}\right)},$$

$$\text{popř.} \quad E(N_f) = E(N_{f,1}) + E(N_{f,2}) \quad (5.103), (5.104), (5.105)$$

- Střední hodnoty dob čekání ve frontách a střední hodnota celkové doby čekání ve frontě:

$$E(T_{f,1}) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda_1)}, \quad E(T_{f,2}) = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)(\mu - \lambda_1)},$$

$$\text{popř.} \quad E(T_f) = \frac{\lambda_1}{\lambda} E(T_{f,1}) + \frac{\lambda_2}{\lambda} E(T_{f,2}) \quad [12]. \quad (5.106), (5.107), (5.108)$$



## 6 PROGRAM SIMULACE MODELU M/M/m

V předchozí kapitole jsem se zabýval popisem analytického způsobu řešení exponenciálních modelů hromadné obsluhy. U analytických postupů jsou výsledné charakteristiky modelu přesné, neboť chování modelu je popsáno funkčními vztahy. Výsledné charakteristiky modelu jsou získány dosazením konkrétních hodnot do těchto vztahů. Modely hromadné obsluhy lze také zkoumat simulačními experimenty. Simulaci lze tedy charakterizovat jako proces vytvoření modelu reálného systému a následné provádění experimentů s vytvořeným modelem za účelem pochopení činnosti a chování zkoumaného systému. Simulace nám poskytuje poměrně rychlou představu o chování zkoumaného systému při měnících se podmínkách. Simulační experimenty lze díky vytvořenému modelu opakovat a hodnoty získané simulací je možno dále statisticky nebo graficky zpracovávat a vyhodnocovat.

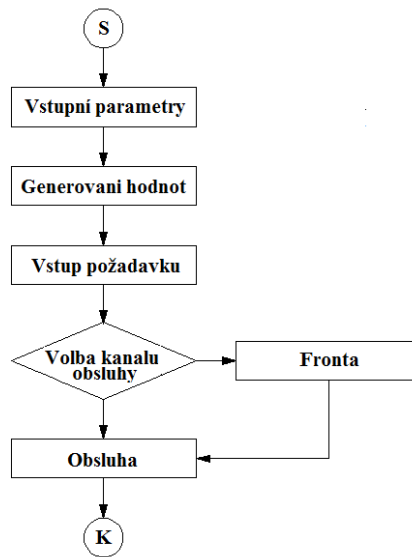
Při provádění simulačních experimentů je důležité rozhodnout, jak vyjádříme dynamické vlastnosti modelu, tj. jakým způsobem zachytíme čas v modelu. Nejedná se pouze o volbu časové jednotky (minuta, den, týden, atd.), ale především se rozhodujeme jakým způsobem zachytíme postup času v modelu. Jsou dvě možnosti zachycení času v modelu a to metoda pevného časového kroku a metoda proměnného časového kroku. V metodě pevného časového kroku se vždy po uplynutí časového intervalu (pevného kroku) zjišťuje, k jakým změnám během uplynulého kroku v modelu došlo. V metodě proměnného časového kroku postupuje čas modelem po nepravidelných časových krocích, tedy jednotlivé časové kroky nám představují právě ty okamžiky, kdy dochází ke změně v systému např. příchod požadavku do systému, ukončení obsluhy požadavku. [9]

Pro provádění simulačních experimentů modelu hromadné obsluhy M/M/m byl vytvořen program simulace modelu M/M/m. Při tvorbě programu bylo pro zachycení dynamické vlastnosti modelu využito metody proměnného časového kroku. V níže uvedených podkapitolách je proveden rozbor tvorby programu včetně implementace vytvořeného programu na konkrétním případu.

### 6.1 Programová realizace

Program simulace modelu hromadné obsluhy M/M/m byl vytvořen v programovacím prostředí MATLAB. MATLAB je sofistikované programové prostředí umožňující provádět výpočty, vykreslování 2D i 3D grafů funkcí, implementaci algoritmů, počítačovou simulaci, analýzu a prezentaci dat i vytváření aplikací včetně uživatelského rozhraní.

Při tvorbě programu byl využit integrovaný nástroj MATLABu nazývaný GUIDE (Graphical User Interface Development Environment), umožňující interaktivní tvorbu grafického uživatelského rozhraní. Základními atributy tohoto nástroje je jednoduchost, provázanost a komplexnost. Vytvořené grafické rozhraní se uloží do souboru \*.fig. Současně se uloží zdrojový kód aktuálního vzhledu do souboru \*.m. V prostředí GUIDE bylo vytvořeno grafické uživatelské rozhraní programu simulace. Vytvořené grafické rozhraní programu je uloženo v souboru MHO\_simulace.fig a MHO\_simulace.m. Po vytvoření tohoto grafického rozhraní následovala fáze, kdy jednotlivým vytvořeným objektům byly přiřazeny jejich funkce. Pro editaci m-souborů je využit v MATLABu editor zdrojových kódů. Kód programu realizující simulaci uvedeného modelu včetně všech hlavních podmínek, cyklů a výpočtů je součástí souboru MHO\_simulace.m. Při tvorbě zdrojového kódu simulačního programu jsem vycházel z vytvořeného zjednodušeného vývojového diagramu na obrázku 6.1 (zadání vstupních parametrů, generování náhodných hodnot s požadovaným rozdělením, splnění podmínky stability, vstup požadavku do systému, volba linky obsluhy, jsou-li všechny linky obsazeny, pak čekání ve frontě, obsluha požadavku, odchod požadavku). V následujících podkapitolách budou popsány pouze hlavní části vytvořeného kódu programu simulace modelu M/M/m.



Obr. 6.1 Zjednodušený vývojový diagram programu simulace modelu M/M/m

### 6.1.1 Vstupní parametry modelu

Zadání vstupních parametrů modelu se provádí přes příslušná editovatelná okna, kde jsou tyto parametry zadávány jako textový řetězec (detailněji popsáno v kapitole 6.3). Pro převod textového řetězce na požadovaný číselný datový typ je využita přímo implementovaná funkce MATLABu *str2double*. Po zadání vstupních parametrů je provedena kontrola těchto zadaných parametrů. Musí být splněna podmínka, že všechny zadané parametry jsou  $>0$ . Pokud je tato podmínka splněna, provede se následující test podmínky stability systému  $\lambda/(m\mu)=\rho/m < 1$ . Podmínka zajistí, že systém se může stabilizovat a fronta neroste nade všechny meze. Popsané zadání vstupních parametrů včetně výpočtu stability systému tvoří část programu reprezentovaný kódem programu:

```

lambda=str2double(get(handles.Lambda_edit,'String'));
mi=str2double(get(handles.mi_edit,'String'));
PocKan=str2double(get(handles.PocKan_edit,'String'));
PocSim=str2double(get(handles.PocSim_edit,'String'));
ro=lambda/mi;
PodStab=ro/PocKan;
% lambda      ... intenzita vstupu λ
% mi          ... intenzita obsluhy μ
% PocKan      ... počet linek obsluhy m
% PocSim      ... počet simulovaných požadavků
% ro          ... intenzita provozu
% PodStab     ... podmínka stability, musí platit PodStab < 1 v opačném případě by fronta rostla nade všechny meze a nedošlo by ke stabilizaci systému

```

### 6.1.2 Generování náhodných hodnot

Základem simulace je generování náhodných hodnot s požadovaným rozdělením. Jelikož je nutno zajistit u těchto náhodných hodnot dané pravděpodobnostní rozdělení, musíme se rozhodnout jakou metodu zvolit - existují různé metody jako je vylučovací metoda, metoda inverzní funkce nebo tabulková metoda. Pro simulaci potřebujeme generovat dvě hodnoty a to intervaly mezi příchody jednotlivých požadavků a dobu trvání obsluhy jednotlivých příchozích požadavků. V obou případech se jedná o náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s příslušným parametrem (intenzita vstupu  $\lambda$ , intenzita obsluhy  $\mu$ ). Pro generování hodnot těchto dvou veličin využijeme metodu inverzní funkce. K aplikaci této metody je nutné znát distribuční funkci  $F$  náhodné veličiny  $x$ , která musí být rostoucí na intervalu  $\langle a,b \rangle$  a musí zobrazovat interval  $\langle a,b \rangle$  na interval  $\langle 0,1 \rangle$ .

Postup této metody je takový, že vygenerujeme náhodné číslo  $r$  s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $\langle 0,1 \rangle$  a číslo  $r$  považujeme za hodnotu distribuční funkce v dosud neznámém bodě  $x$ , tedy  $F(x) = r$ . Z tohoto vztahu odvodíme  $x$  podle vztahu pro inverzní funkci:

$$x = F^{-1}(r) \quad (6.1)$$

V kapitole 3 jsme již provedli odvození vztahu (3.16) distribuční funkce  $F(x)$  exponenciálního rozdělení s parametrem  $\lambda$ .

Vztah pro generování náhodných čísel s exponenciálním rozdělením můžeme díky tomuto vztahu odvodit  $r = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - r \Rightarrow -\lambda x = \ln(1 - r)$ . Z tohoto vztahu vyplývá, že intervaly mezi příchody jednotlivých požadavků odpovídají náhodným hodnotám s exponenciálním rozdělení plynoucím ze vztahu:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r) \quad (6.2)$$

Pokud bude ve vztahu změněn parametr  $\lambda$  na  $\mu$  dostaneme náhodné hodnoty dob trvání obsluhy s exponenciálním rozdělením jednotlivých příchozích požadavků. V kódu programu je pro toto generování náhodných hodnot s exponenciálním rozdělením využita přímo implementovaná funkce MATLABu *exprnd*. Díky této funkci se kód programu pro vygenerování náhodných hodnot mezi příchody jednotlivých požadavků a doby obsluhy zjednoduší. Tato část programu je reprezentována kódem programu:

```
IntMezPri=exprnd(1/lambda,PocSim,1);
DobObsPoz=exprnd(1/mi,PocSim,1);
% IntMezPri      ... intervaly mezi příchody požadavků
% DobObsPoz     ... doba obsluhy požadavku
```

Počet vygenerovaných náhodných hodnot závisí na zadaném počtu simulovaných požadavků, pokud tedy zadáme proměnnou  $PocSim=100$  (simulujeme průchod 100 požadavků modelem). Generujeme jednořádkovou matici se 100 náhodnými intervaly příchozích požadavků a jednořádkovou matici náhodných dob obsluh jednotlivých požadavků s exponenciálním rozdělením.

### 6.1.3 Popis realizace zpracování požadavků v modelu

V předchozí kapitole 6.1.2 jsme popsali generování náhodných hodnot intervalu příchozích požadavků a dob obsluh jednotlivých požadavků. V této kapitole bude popsána programová realizace zpracování požadavků v modelu, tedy rozdělení požadavků do jednotlivých linek obsluhy. Jestliže jsou všechny linky obsazeny, příchozí požadavky se řadí do fronty a čekají ve frontě po dobu, než se některá linka uvolní. Tato část kódu programu realizující uvedené zpracování požadavků využívá přímo implementovaných funkcí MATLABu *cumsum*, *min*, *for*, *if*.

Uvažujme exponenciální systém hromadné obsluhy s  $m$  obslužnými linkami, neomezeným zdrojem požadavků, jež trpělivě čekají ve frontě, která funguje v režimu FIFO. Z vygenerovaných náhodných hodnot intervalu příchozích požadavků získáme okamžiky příchozích požadavků kumulativním sčítáním intervalů příchozích požadavků. Zpracování prvních  $m$  požadavků jednotlivými linkami je zajištěno prvním cyklem *for* v programu. Okamžik odchodu požadavku je roven součtu okamžiku příchodu požadavku do systému a době obsluhy daného požadavku. V pomocném vektoru uchováваме okamžiky odchodu požadavku z jednotlivých linek obsluhy. Podle těchto okamžiků odchodů následně rozhodujeme, ke které lince přistoupí další požadavek ke zpracování. V našem případě požadavek vstoupí do linky, která je nejdéle volná (hledáme minimum v dobách odchodů), což je realizováno v programu pomocí podmínky *if* v druhém cyklu *for*. Je-li v okamžiku příchodu požadavku některá z linek volná, zpracuje příchozí požadavek nejdéle volná linka okamžitě. Jsou-li všechny linky obsazeny, požadavek čeká ve frontě na okamžik, kdy se některá z linek uvolní.

Začátek obsluhy daného požadavku je tedy součet okamžiku příchodu požadavku do systému a doba čekání požadavku ve frontě (rozdíl mezi dobou ukončení obsluhy předchozího požadavku a dobou příchodu požadavku). Posledním cyklem for v této části programu zajistíme aktualizaci okamžiku odchodu požadavku příslušné linky, která daný požadavek zpracovává. Popsaný algoritmus zpracování požadavku tvoří část programu reprezentovaný kódem programu:

```

OkaPriPoz=cumsum(IntMezPri);
% OkaPriPoz      ... okamžik příchodu požadavku do systému

for i=1:PocKan
    OkaOdcPoz(i)=OkaPriPoz(i)+DobObsPoz(i);
    Pom_vek(i)=OkaOdcPoz(i);
    VyuKan(i)=i;
    NevLinObs(i)=0;
end
% OkaOdcPoz      ... okamžik odchodu požadavku ze systému
% Pom_vek        ... pomocný vektor pro ukládání odchodů požadavků pro jednotlivé kanály
% VyuKan         ... kanál na kterém je daný požadavek zpracováván
% NevLinObs      ... doba nevyužití kanálu (prostož kanálu)

for i=(PocKan+1):PocSim
    if OkaPriPoz(i)>min(Pom_vek)
        DobCekFro(i)=0;
        NevLinObs(i)=OkaPriPoz(i)-min(Pom_vek);
    else
        DobCekFro(i)=min(Pom_vek)-OkaPriPoz(i);
        NevLinObs(i)=0;
    end
    ZacObsPoz(i)=OkaPriPoz(i)+DobCekFro(i);
    OkaOdcPoz(i)=ZacObsPoz(i)+DobObsPoz(i);
    % ZacObsPoz      ... začátek obsluhy požadavku
    % DobCekFro      ... doba čekání požadavku na obsluhu ve frontě

    for j=1:PocKan
        if Pom_vek(j)==min(Pom_vek)
            Pom_vek(j)=OkaOdcPoz(i);
            VyuKan(i)=j;
            break
        end
    end
end
end

```

#### 6.1.4 Stanovení základních charakteristik systému

V této fázi již známe okamžiky odchodu všech požadavků ze systému, doby strávené jednotlivými požadavky ve frontě a doby nevyužití jednotlivých linek obsluhy. Z těchto získaných hodnot již můžeme stanovit některé základní charakteristiky systému a to průměrnou dobu obsluhy požadavku, průměrnou dobu čekání požadavku ve frontě, průměrnou dobu strávenou požadavkem v systému a průměrnou dobu nevyužití linek obsluhy. Pro stanovení těchto charakteristik je využito přímo implementované funkce MATLABu *mean*. Tato část programu je reprezentována kódem programu:

```

prumer_PDO=mean(DobObsPoz);
prumer_PDCVF=mean(DobCekFro);
prumer_PDSVS=mean(prumer_PDO+prumer_PDCVF);
prumer_NLO=mean(NevLinObs);
%prumer_PDO      ... průměrná doba obsluhy požadavku
%prumer_PDCVF    ... průměrná doba čekání požadavku ve frontě
%prumer_PDSVS    ... průměrná doba strávená požadavkem v systému
%prumer_NLO      ... průměrná doba nevyužití linek obsluhy

```

Stanovení následujících základních charakteristik systému jako je průměrný počet požadavků v systému, průměrný počet požadavků ve frontě a průměrný počet požadavků v obsluze je oproti předchozím časovým charakteristikám náročnější. Musíme nejprve určit počty požadavků v systému v jednotlivých časových intervalech. Určíme tedy časové intervaly, pro které se nachází v systému 1,2 až  $n$  požadavků. Ze znalostí doby, kterou jednotlivé požadavky strávily v systému a ze znalostí konkrétního počtu požadavků jsme schopni stanovit četnost jednotlivých požadavků v systému. Nyní jsme již schopni určit celkové doby příslušných počtů požadavků v systému. Ze znalosti celkové doby příslušného počtu požadavků v systému a celkové doby simulace (doba průchodu všech požadavků modelem) stanovíme podílem těchto dvou hodnot pravděpodobnost, se kterou se nachází v systému právě  $n$  požadavků. Pro stanovení těchto charakteristik je využito přímo implementovaných funkcí MATLABu *sort*, *diff*, *for*, *if*, *sum* atd. Pro popisovanou část programu uvádím pouze části kódu programu pro seřazení časových intervalů, určení počtu požadavků v systému, stanovení pravděpodobností a základních charakteristik systému. Části programu řešící zmíněnou problematiku jsou reprezentovány kódem programu:

```

CasOkam=[OkaPriPoz;OkaOdcPoz];
CasOkam=sort(CasOkam);
%CasOkam      ...seřazení časových okamžiků příchodů a odchodů jednotlivých požadavků do a ze systému

PocPozSys(1)=1;
for i=2:2*PocSim
    citac=0;
    for j=1:PocSim
        if (OkaPriPoz(j)==CasOkam(i))
            citac=citac+1;
        end
        if (OkaOdcPoz(j)==CasOkam(i))
            citac=citac-1;
        end
    end
    PocPozSys(i)=PocPozSys(i-1)+citac;
    % přijde-li požadavek, zvýší se počet požadavků v systému o 1
    % odejde-li požadavek, sníží se počet požadavků v systému o 1
end
%PocPozSys      ...počet požadavků v systému v průběhu simulace

PravSim=CelDobCasOka_min/max(OkaOdcPoz_min);
N=PravSim*CisPoz;
Nfr=PravSim((PocKan+1):MaxPozSys)*CisPoz(1:MaxPozSys-PocKan);
Ns=N-Nfr;
%PravSim      ...pravděpodobnosti jednotlivých počtů požadavků v systému
%N            ...průměrný počet požadavků v systému
%Nfr         ... průměrný počet požadavků ve frontě
%Ns          ... průměrný počet obsluhovaných požadavků

```

V části programu realizující výpočet základních charakteristik systému jsou implementovány vzorce z kapitoly 5.2.2. čímž získáme střední hodnotu počtu požadavků v systému, střední hodnotu počtu požadavků ve frontě, střední hodnotu počtu obsluhovaných požadavků, střední hodnotu doby obsluhy požadavku, střední hodnotu doby strávenou požadavkem ve frontě a střední hodnotu doby strávenou požadavkem v systému.

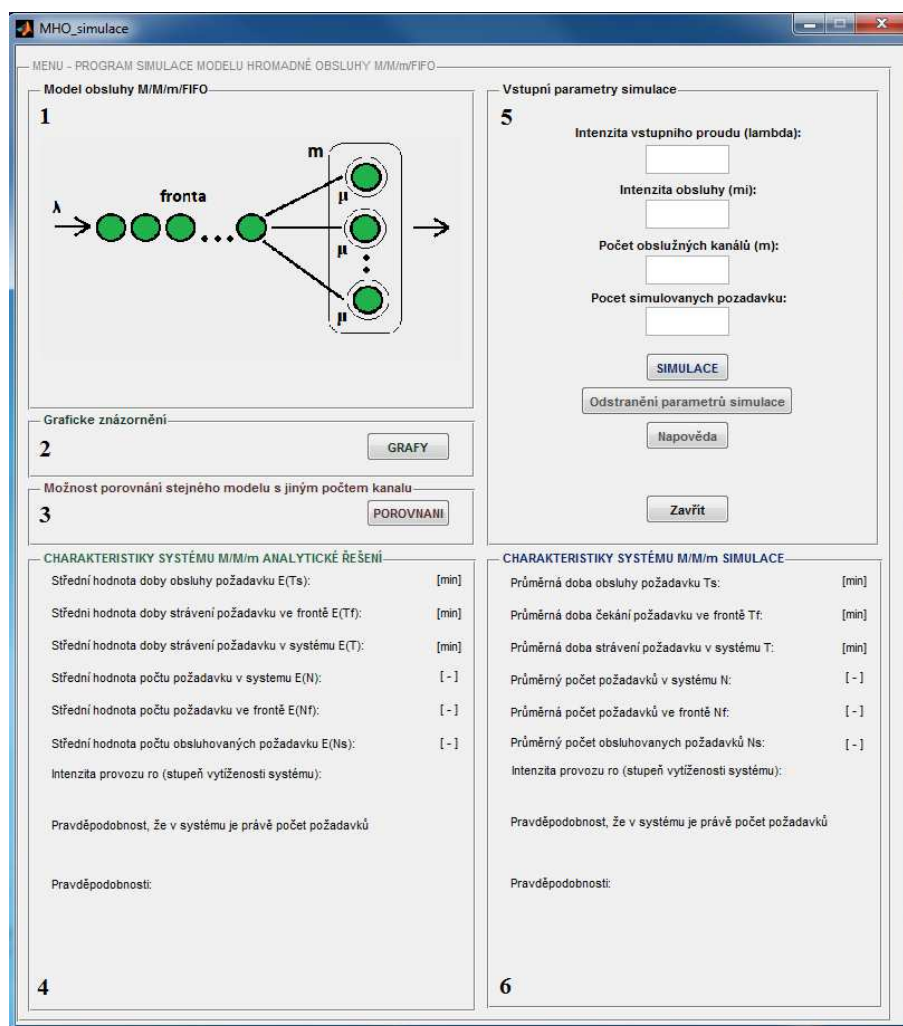
### 6.1.5 Grafické výstupy simulace

V předchozích podkapitolách byly popsány zadávání vstupních parametrů systému, generování náhodných hodnot a stanovení základních charakteristik simulovaného systému M/M/m. Nyní přejdeme k řešení grafické interpretace hodnot získaných simulací. Grafickým výstupem simulovaných hodnot jsou grafy. Pro hodnoty získané simulací jako jsou okamžik příchodu požadavku do systému, doba obsluhy požadavku, okamžik odchodu požadavku jsou vytvořeny jednotlivé skripty (m-soubory), které mají přesně definovanou strukturu pro vykreslení požadovaného grafu. Pro vykreslení grafu bylo využito přímo implementovaných grafických funkcí MATLABu *bar*, *plot*, *stairs*. Uvedena bude pouze část kódu skriptu *Graf\_Opp\_Dop\_Oop.m* pro vykreslení simulovaných hodnot okamžiku příchodu požadavku do systému, doby obsluhy požadavku a okamžiku odchodu požadavku. Tyto hodnoty jsou vykresleny v jednom grafu. Část programu uvedeného skriptu je reprezentována kódem programu:

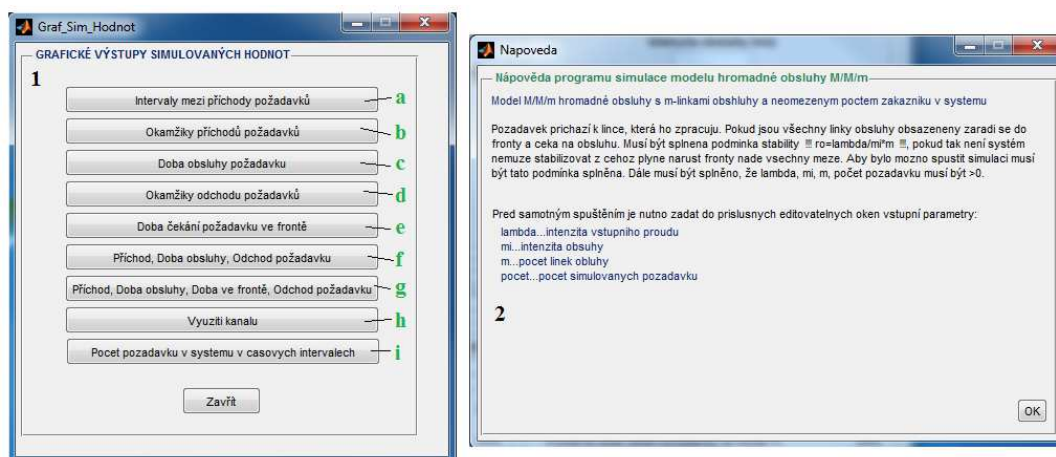
```
plot(x,'Parent',axes1,'MarkerSize',5,'Marker','*','LineWidth',1,...
     'Color',[1 0 0],'DisplayName','Prichod pozadavku');
hold on
plot(y,'Parent',axes1,'MarkerSize',5,'Marker','*','LineWidth',1,...
     'Color',[0 0 1],'DisplayName','Doba obsluhy pozadavku');
hold on
plot(z,'Parent',axes1,'MarkerSize',5,'Marker','*','LineWidth',1,...
     'Color',[0 1 0],'DisplayName','Odchod pozadavek');
% Vykreslení grafu tří hodnot v jednom grafu
% x - okamžik příchodu požadavku do systému
% y - doba obsluhy požadavku v systému
% z - okamžik odchodu požadavku ze systému
```

## 6.2 Popis uživatelské rozhraní programu

Jak již bylo uvedeno v úvodu kapitoly 6.1, pro tvorbu uživatelského rozhraní programu bylo využito nástroje GUIDE. Vytvořené hlavní okno programu zobrazené na obrázku 6.2 se skládá ze šesti hlavních panelů. V levé části hlavního okna programu jsou čtyři panely a v pravé části okna dva panely. Nejprve budou popsány panely levé části okna od horní části okna směrem dolů. Pro snadnější identifikaci panelů, panely byly číselně označeny 1 až 6. Panel číslo 1 je nazván Model obsluhy M/M/m/FIFO a je zde zobrazeno zjednodušené schéma simulovaného modelu. Panel číslo 2 je nazván Grafické znázornění a je zde umístěno tlačítko *GRAFY*. Stiskem tlačítka se vyvolá okno s nabídkou dalších voleb pro vykreslení grafu, vyvolané okno je na obrázku 6.3. Panel číslo 3 je nazván Možnost porovnání stejného modelu s jiným počtem linek a je zde umístěno tlačítko *POROVNANI*. Stiskem tlačítka je vyvoláno okno umožňující provést simulaci stejného modelu s jiným počtem obslužných linek, vyvolané okno je na obrázku 6.4. Panel číslo 4 je pojmenován Charakteristiky systému M/M/m – analytické řešení a slouží k zobrazení analyticky vypočtených hodnot simulovaného modelu. V pravé horní části hlavního okna programu se nachází panel číslo 5 a je nazván Vstupní parametry simulace. Panel slouží pro zadání vstupních parametrů simulace do příslušných editovatelných oken. Panel obsahuje tlačítko *SIMULACE*, které slouží pro spuštění simulace, tlačítko *Odstranění parametrů simulace* umožňuje odstranit zadané parametry včetně již vypočtených charakteristik daného modelu (v případě, že již proběhla simulace), tlačítko *Nápověda* slouží pro vyvolání okna s nápovědou pro vytvořený program a tlačítko *ZAVŘÍT* ukončí běh programu. Panel číslo 6 je nazván Charakteristiky systému M/M/m simulace a slouží k zobrazení hodnot získaných simulací daného modelu.



Obr. 6.2 Hlavní okno programu

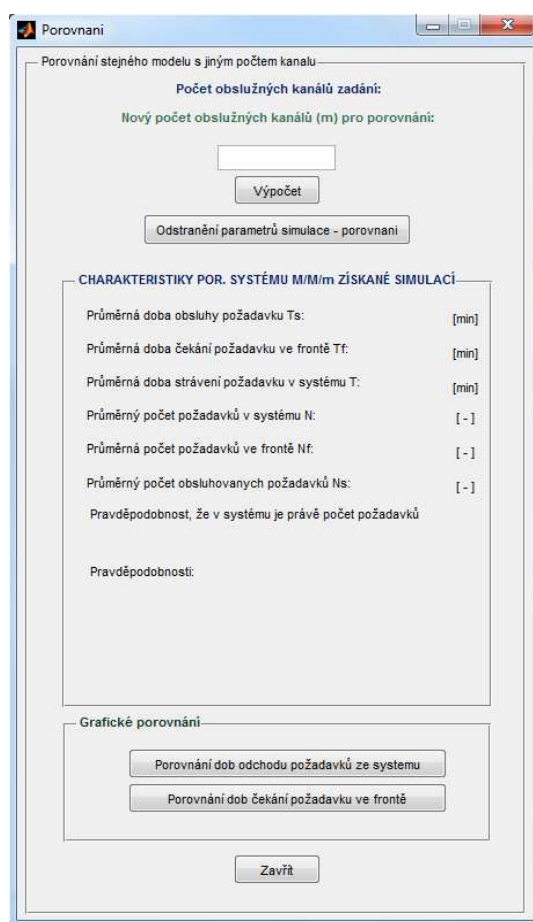


Obr. 6.3 Okno 1 - Grafické výstupy simulovaných hodnot,  
Okno 2 - Nápověda

Na obrázku 6.3 je zobrazeno okno 1 nazvané Grafické výstupy simulovaných hodnot určené ke grafické interpretaci hodnot získaných simulací vyvolané tlačítkem *GRAFY* v hlavním okně programu. Okno obsahuje celkem devět tlačítek. Osm tlačítek slouží pro vyvolání grafů hodnot získaných simulací. Poslední tlačítko *Zavřít* slouží pro uzavření okna. Pro snadnější identifikaci tlačítek v obrázku byla tlačítka označena a až i. Tlačítko *a* vyvolá okno grafu s vygenerovanými hodnotami intervalů mezi příchody. Tlačítko *b* slouží k vyvolání okna grafu, pokud zjišťujeme okamžik příchodu požadavku do systému. Tlačítko *c* slouží pro vyvolání okna grafu s vygenerovanými hodnotami dob obsluhy požadavku. Tlačítko *d* vyvolá okno grafu, zjišťujeme-li okamžik odchodu požadavku ze systému. Tlačítko *e* slouží pro vyvolání okna grafu s dobou čekání požadavků ve frontě. Tlačítko *f* vyvolá další možné okno grafu, kde nalezneme tři hodnoty vykreslené současně - příchod požadavku do systému, dobu obsluhy požadavku, odchod požadavku ze systému. Tlačítko *g* slouží pro vyvolání okna grafu se čtyřmi hodnotami vykreslených v tomto grafu – tento graf zachytí příchod požadavku do systému, dobu obsluhy požadavku, dobu čekání požadavku ve frontě, okamžik odchodu požadavku ze systému. Tlačítko *h* slouží k vyvolání okna grafu, potřebujeme-li zjistit využití linek jednotlivými požadavky (informace udávající, na které lince je zpracováván daný požadavek). Tlačítko *i* slouží pro vyvolání okna grafu udávající počet zákazníku v systému v jednotlivých časových intervalech v průběhu simulace. Na obrázku 6.3 je zobrazeno také okno 2 nazvané Nápověda vyvolané tlačítkem *Nápověda* v hlavním okně programu. Okno obsahuje informace o vytvořeném programu simulace. Uzavření okna se provede tlačítkem *OK*.

Na obrázku 6.4 je zobrazeno okno pojmenované Porovnání stejného modelu s jiným počtem linek vyvolané tlačítkem *POROVNANI* v hlavním okně programu. Okno umožňuje provést simulaci stejného modelu s jiným počtem obslužných linek. Okno obsahuje editovatelné okno pro zadání nového počtu obslužných linek, tlačítko *Výpočet*, které slouží pro spuštění simulace se zadaným počtem obslužných linek, tlačítko *Odstranění parametrů simulace-porovnání* umožňuje odstranění zadaných parametrů včetně již vypočtených charakteristik daného modelu (v případě, že již proběhla simulace s jiným počtem linek), tlačítko *Zavřít* slouží pro uzavření okna. Okno obsahuje dva panely. Panel nazván Charakteristiky porovnávaného systému M/M/m získané simulací slouží pro zobrazení hodnot získaných simulací s jiným počtem obslužných linek. Panel nazván Grafické porovnání určen ke grafickému porovnání hodnot získaných simulací v hlavním okně programu a hodnot získaných simulací s jiným počtem obslužných linek. Panel obsahuje dvě tlačítka. První tlačítko slouží pro vyvolání okna grafu dvou hodnot vykreslených do jednoho grafu - odchod požadavku ze systému (hodnoty získané simulací v hlavním okně programu) a odchod požadavku ze systému porovnání (hodnoty získané simulací s jiným počtem obslužných linek). Druhé tlačítko slouží pro vyvolání okna grafu dvou hodnot vykreslených do jednoho grafu - dob čekání požadavků ve frontě (hodnoty získané simulací v hlavním okně programu) a dob čekání požadavků ve frontě porovnání (hodnoty získané simulací s jiným počtem obslužných linek).





Obr. 6.4 Okno porovnání stejného modelu s jiným počtem linek

### 6.3 Práce s programem

Spuštění programu simulace modelu obsluhy M/M/m se provádí v programovacím prostředí MATLAB. V MATLABu musí být nastavena správná cesta ke složce, kde je program uložen. V okně Command Window se zadá příkaz `MHO_simulace`, tím se provede spuštění programu simulace modelu obsluhy M/M/m a zobrazí se hlavní okno programu popsané v předchozí kapitole. Ovládání programu je velmi snadné a intuitivní. V hlavním okně programu v panelu Vstupní parametry simulace zadáme intenzitu vstupu  $\lambda$ , intenzitu obsluhy  $\mu$ , počet linek obsluhy  $m$  a počet simulovaných požadavků zkoumaného systému. Poté stiskneme tlačítko *SIMULACE*. Pokud jsou zadané hodnoty  $>0$  a je splněna podmínka stability proběhne simulace pro zadané parametry modelu M/M/m (pokud některá z podmínek není splněna, zobrazí se chybová hláška, která nás upozorní, že jsme při zadávání parametrů simulace chybovali). V hlavním okně programu máme již dostupné základní charakteristiky systému. Pomocí tlačítka *GRAFY* si jednoduše vyvoláme grafy z již nasimulovaných hodnot, které chceme zkoumat. Pokud chceme experimentovat s daným modelem je možno zadanou hodnotu pouze přepsat, následně musí vždy následovat stisk tlačítka *SIMULACE*. Ukončení programu se provede stiskem tlačítka *Zavřít*.

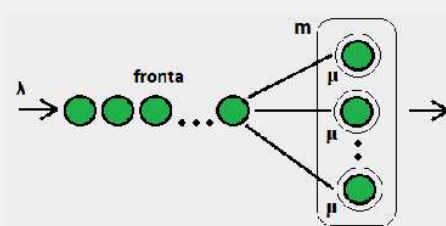
### 6.4 Simulace konkrétního případu

V předchozích kapitolách byl popsán program vytvořený pro simulaci modelu hromadné obsluhy M/M/m včetně popisu práce s tímto programem. V této kapitole bude provedena simulace konkrétního případu včetně provedení rozboru získaných dat simulací.

Konkrétním případem uvažujeme simulaci systému hromadné obsluhy reprezentovaným supermarketem Kaufland. Tento systém můžeme charakterizovat jako systém s neomezeným zdrojem trpělivých požadavků a velikostí fronty kapacitně neomezenou. Obslužné linky uvažujeme jednotlivé pokladny a požadavky uvažujeme přicházející zákazníci k pokladnám. Zákazníci k pokladnám přistupují v náhodných časových intervalech a doba obsluhy zákazníka na pokladně má rovněž náhodný charakter, obě tyto náhodné hodnoty mají exponenciální rozdělení. Intenzita příchodů zákazníků k pokladnám je 45 zákazníků za hodinu a intenzita obsluhy jedné pokladny je 18 zákazníků za hodinu. V provozu jsou 3 pokladny. Pro tento konkrétní případ provedeme simulaci průchod 50 zákazníků systémem. Vstupní parametry pro zadání do programu jsou intenzita vstupu  $\lambda=45$ , intenzita obsluhy  $\mu=18$ , počet linek obsluhy  $m=3$  a počet simulovaných zákazníků je 50. Po zadání těchto hodnot do spuštěného programu a stisknutím tlačítka *SIMULACE* se provede v případě splnění podmínky stability (intenzita provozu je rovna hodnotě 0,8333; podmínka stability je tedy splněna, protože platí  $0,8333 < 1$ ) simulace konkrétního případu.

MENU - PROGRAM SIMULACE MODELU HROMADNÉ OBSLUHY M/M/m/FIFO

**Model obsluhy M/M/m/FIFO**



**Grafické znázornění**

**Možnost porovnání stejného modelu s jiným počtem kanálu**

**Vstupní parametry simulace**

Intenzita vstupního proudu (lambda):

Intenzita obsluhy (mi):

Počet obslužných kanálů (m):

Počet simulovaných požadavků:

**CHARAKTERISTIKY SYSTÉMU M/M/m ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ**

Sřední hodnota doby obsluhy požadavku E(Ts):	3.33333 [min]
Sřední hodnota doby strávení požadavku ve frontě E(Tf):	4.68165 [min]
Sřední hodnota doby strávení požadavku v systému E(T):	8.01498 [min]
Sřední hodnota počtu požadavku v systému E(N):	6.01124 [-]
Sřední hodnota počtu požadavku ve frontě E(Nf):	3.51124 [-]
Sřední hodnota počtu obsluhovaných požadavku E(Ns):	2.5 [-]
Intenzita provozu ro (stupeň vytiženosti systému):	0.833333

Pravděpodobnost, že v systému je právě počet požadavků [1;2;3;4;5;6;7;8;9;10]

Pravděpodobnosti:  
[0.112;0.14;0.117;0.0975;0.0813;0.0677;0.0564;0.047;0.0392;0.0327]

**CHARAKTERISTIKY SYSTÉMU M/M/m SIMULACE**

Průměrná doba obsluhy požadavku Ts:	3.64353 [min]
Průměrná doba čekání požadavku ve frontě Tf:	3.06941 [min]
Průměrná doba strávení požadavku v systému T:	6.71293 [min]
Průměrný počet požadavků v systému N:	5.09125 [-]
Průměrný počet požadavků ve frontě Nf:	2.30994 [-]
Průměrný počet obsluhovaných požadavků Ns:	2.78131 [-]
Intenzita provozu ro (stupeň vytiženosti systému):	0.998003

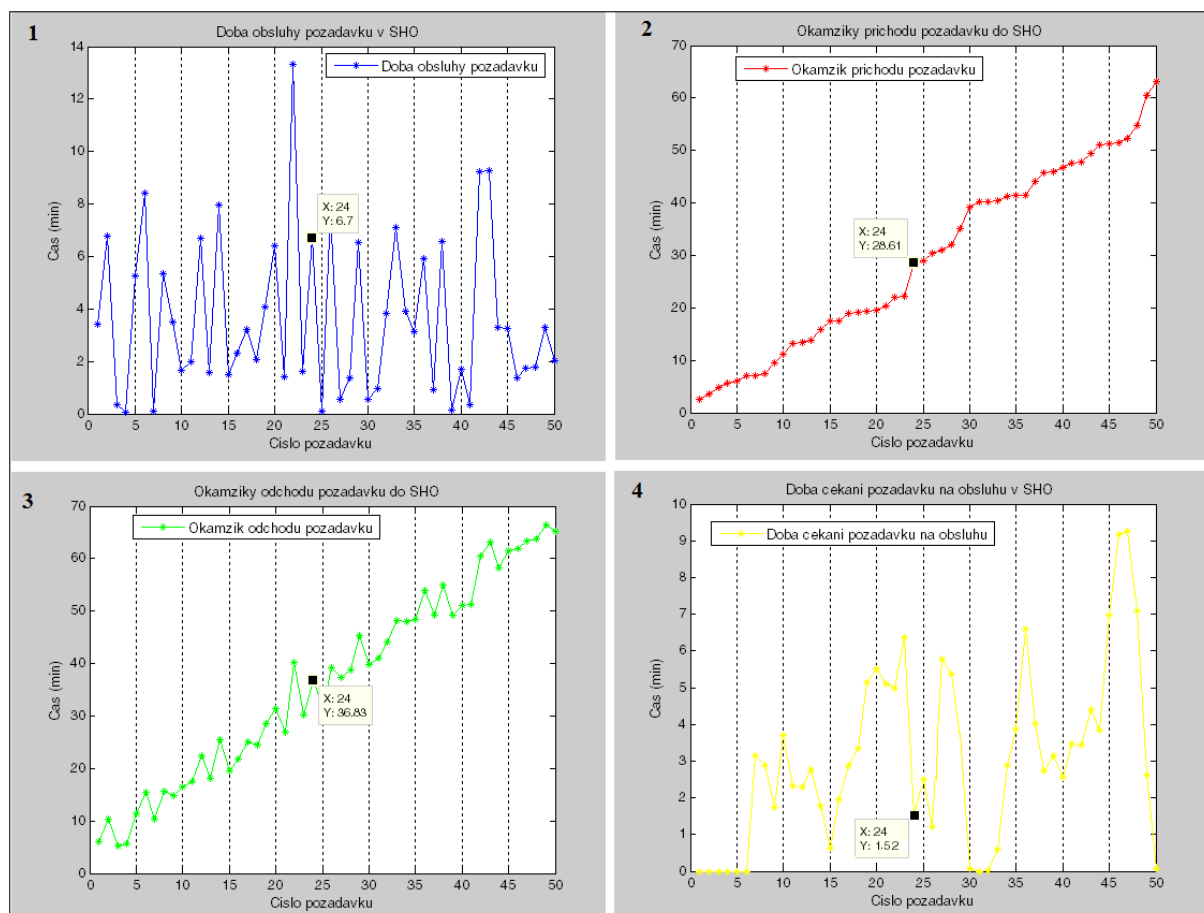
Pravděpodobnost, že v systému je právě počet požadavků [1;2;3;4;5;6;7;8;9;10]

Pravděpodobnosti:  
[0.071;0.0766;0.0357;0.168;0.187;0.208;0.14;0.0987;0.0123;0.00204]

Obr. 6.5 Získané hodnoty simulací konkrétního případu

Podmínka stability byla splněna. V hlavním okně programu (obrázek 6.5) lze již vyčíst řadu základních charakteristik konkrétního systému - jako jsou průměrná doba obsluhy zákazníka 3,65 min, průměrná doba čekání zákazníka ve frontě 3,06 min, průměrná doba strávená zákazníkem u pokladny 6,71min, průměrný počet zákazníků v systému 5 zákazníků, průměrný počet zákazníků ve frontě 2,3 zákazníci, průměrný počet zákazníků u pokladen 2,7 zákazníků. Tyto základní charakteristiky získané simulací je možno porovnat s výsledky získanými analytickým řešením. Kromě těchto základních charakteristik lze vyčíst také doplňující pravděpodobnosti charakteristiky. Ze simulace je patrné, že v jistém okamžiku je maximální počet zákazníků u pokladen 10 (3 zákazníci jsou obsluhováni a zbylých 7 zákazníků čeká ve frontě na obsluhu). Pro počty zákazníků 1,2,3...10 jsou ze simulace stanoveny jejich pravděpodobnosti výskytu po dobu simulace. Například 8 zákazníků se v systému nachází s pravděpodobností  $p_8=0,0987$ . Odhady pravděpodobností jsou stanoveny i pro analytickou část řešení konkrétního systému a tedy mohou být tyto pravděpodobnosti opět porovnány. V této fázi jsme již seznámeni se základními charakteristikami konkrétního simulovaného případu.

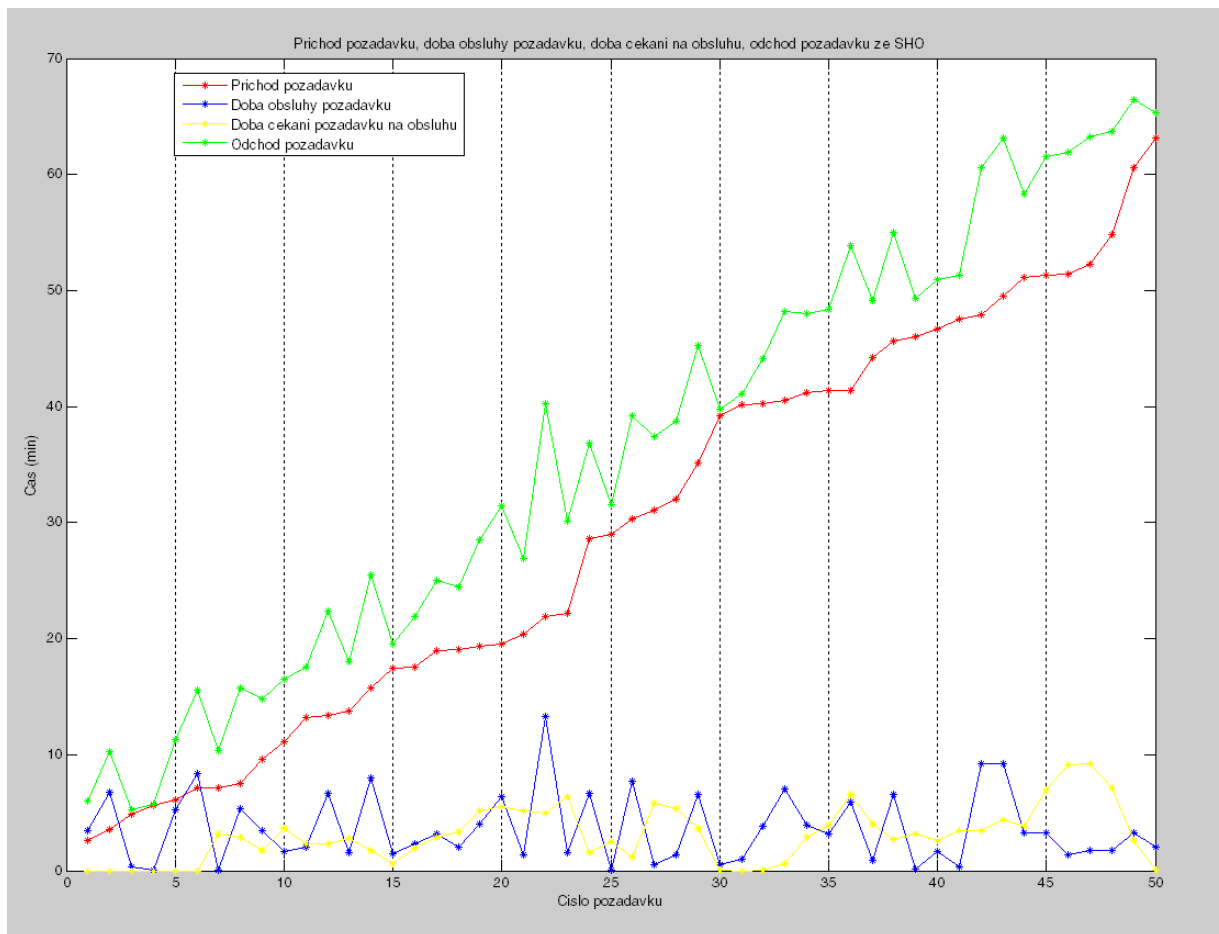
Tyto základní charakteristiky nás ale dostatečně neinformují o tom, jak probíhal průchod všech 50 zákazníků přes pokladny. K pochopení chování systému nám slouží grafická interpretace hodnot získaných simulací, které je možno vyvolat pomocí tlačítka *GRAFY*. Ve vyvolaném podokně si zvolíme graf, který chceme zkoumat. Na obrázku 6.6 jsou uvedeny 4 grafy, ve kterých jsou zachyceny časové okamžiky průchodu 50 zákazníků přes pokladny. Na obrázku 6.6 jsou uvedeny grafy doby obsluhy jednotlivých zákazníků (každý zákazník má jiný obsah nákupního koše, tedy jejich zpracování na pokladně trvá různou dobu), okamžik příchodu zákazníka k pokladně, okamžik odchodu obsluženého zákazníka od pokladny a doba strávená zákazníkem ve frontě (pokud jsou všechny pokladny obsazeny, zákazník čeká na obsluhu ve frontě).



Obr. 6.6 Graf 1 - doba obsluhy zákazníka, Graf 2- okamžik příchodu zákazníka k pokladně, Graf 3 - okamžik odchodu obsluženého zákazníka od pokladny, Graf 4 - doba strávená zákazníkem ve frontě

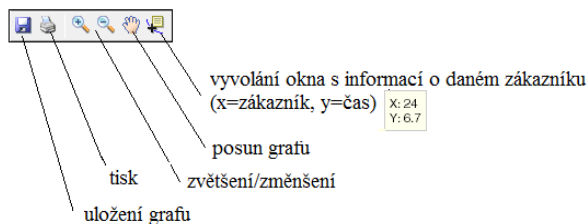
Pro vysvětlení získaných hodnot simulací si vezmeme zákazníka, který přišel k pokladně v pořadí jako 24. zákazník. Tento Zákazník přichází k pokladně v čase 28,61min a jeho obsluha na pokladně trvá 6,7min. V okamžiku příchodu tohoto zákazníka k pokladnám (příchod v čase 28,61min) jsou všechny pokladny obsazeny a proto musí čekat ve frontě po dobu 1,52min. Po uplynutí tohoto časového intervalu se na něj dostane řada. Zákazník odchází od pokladny v čase 36,83min.

Pro lepší interpretaci průchodu 50 zákazníků si uživatel může zvolit graf uvedený na obrázku 6.7, který zahrnuje v jednom grafu dobu obsluhy jednotlivých zákazníků, okamžiky příchodů zákazníků k pokladnám, okamžiky odchodů obsloužených zákazníků a doby strávené zákazníkem ve frontě.



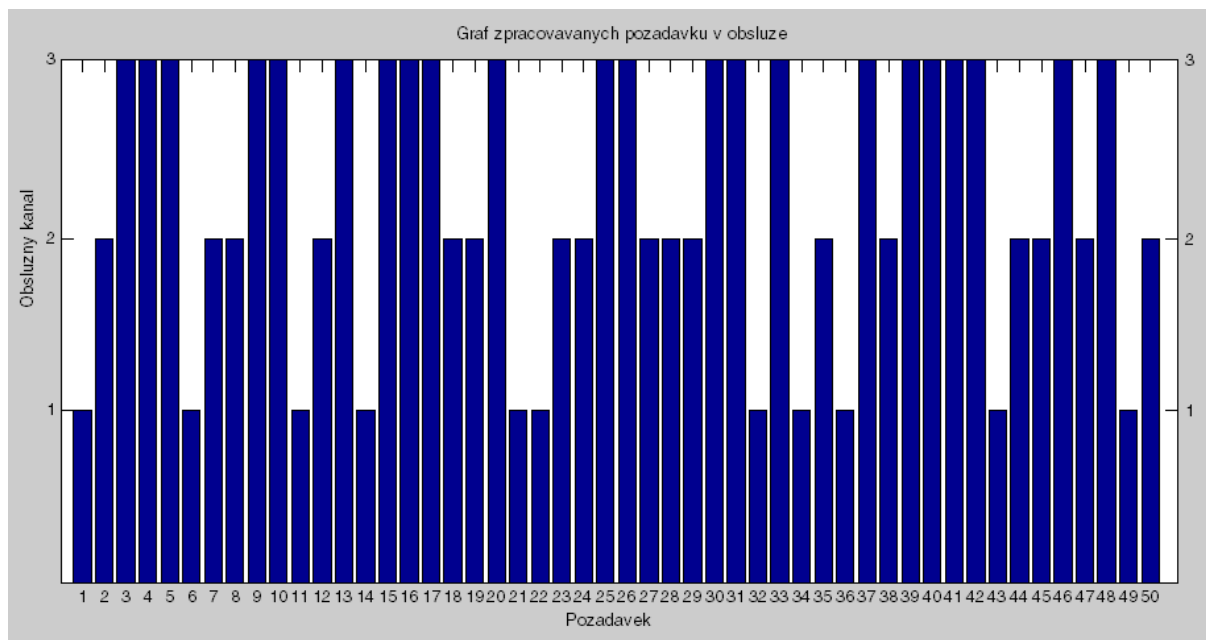
Obr. 6.7 Graf doby obsluhy zákazníka, okamžiky příchodů zákazníků k pokladnám, okamžiky odchodů zákazníků od pokladen, doba strávená zákazníkem čekajícím na obsluhu

Každý graf je vyvolán v samostatném okně. Pro snadnou práci s grafem jsou v MATLABu implementovány různé funkce. Na obrázku 6.8 jsou uvedeny základní operace, které umožňují s daným grafem manipulovat. Graf je možno uložit, vytisknout, zvětšit/zmenšit nebo různě posouvat. Pro naše využití je velmi vhodná poslední ikona, která nám umožňuje snadnou identifikaci zákazníka a vybraného časového okamžiku.



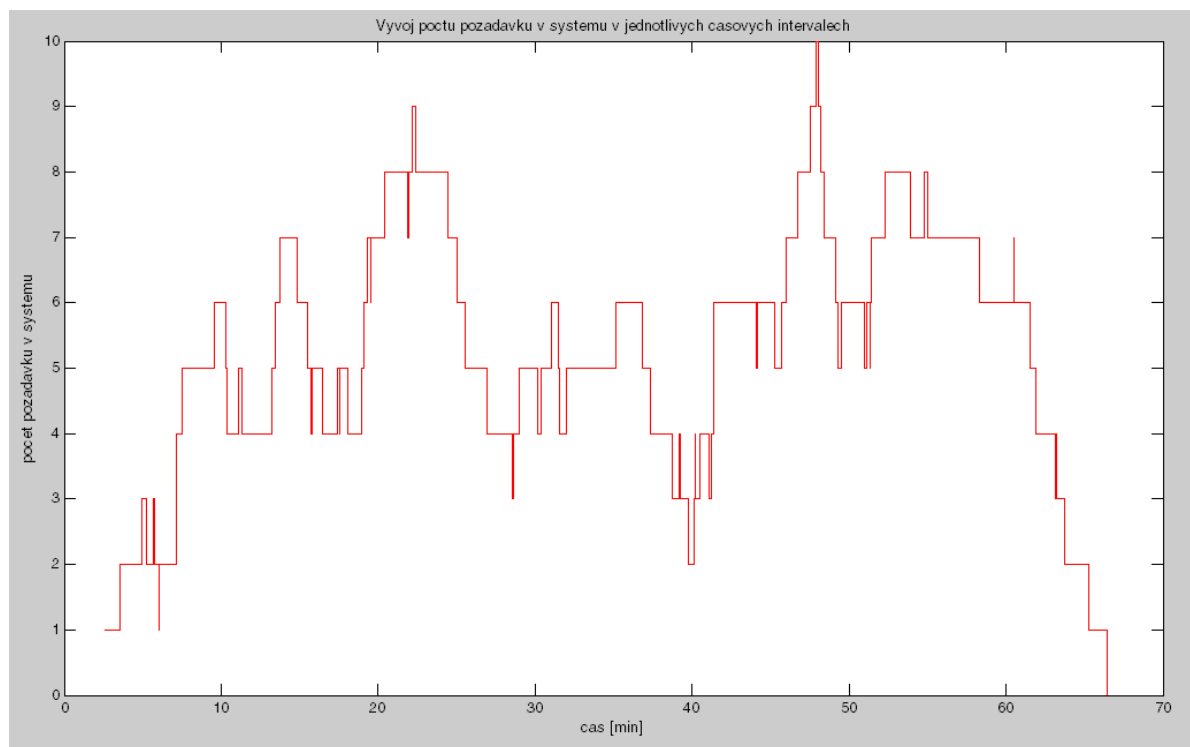
Obr. 6.8 Možné operace práce s grafem

V této fázi jsme již prozkoumali časové okamžiky průchodů zákazníků systémem. Graf na obrázku 6.9 nám interpretuje další důležitou informaci. Zobrazuje nám, na které pokladně konkrétně je daný zákazník obslužen. Z tohoto grafu lze vyčíst, že námi zkoumaný 24. zákazník byl obslužen na druhé pokladně.



Obr. 6.9 Graf zpracování požadavku danou pokladnou

Graf na obrázku 6.10 nám podává informaci o vývoji počtu zákazníků v systému v průběhu simulace. Vidíme, že po většinu času jsou všechny pokladny využity. Pouze ve 3 časových intervalech se u pokladen nachází méně než 3 zákazníci.



Obr. 6.10 Graf vývoje počtu zákazníků v systému

V hlavním okně programu (obrázek 6.5) byly zjištěny základní charakteristiky konkrétního systému a to průměrná doba obsluhy zákazníka 3,65 min, průměrná doba čekání zákazníka ve frontě 3,06 min, průměrná doba strávená zákazníkem u pokladny 6,71min, průměrný počet zákazníků v systému 5 zákazníků, průměrný počet zákazníků ve frontě 2,3 zákazníci, průměrný počet zákazníků u pokladen 2,7 zákazníků.

V programu simulace modelu M/M/m je umožněno porovnat chování konkrétního případu při změně počtu pokladen při zachování okamžiku příchodu požadavku do systému a době obsluhy požadavku. Pokud bychom porovnávali systém se 2 pokladnami, podmínka stability by nebyla splněna. Systém by se nemohl stabilizovat a fronta by rostla nade všechny meze. Z tohoto důvodu byla pro porovnání chování systému provedena simulace pro 4 pokladny. Simulací byly zjištěny základní charakteristiky porovnávaného systému (obrázek 6.11). Průměrná doba čekání zákazníka ve frontě klesla z 3,06 min na 0,4 min, průměrná doba strávená zákazníkem u pokladny klesla z 6,71 min na 4 min, průměrný počet zákazníků v systému klesl z 5 zákazníků na 3 zákazníky. Pro grafickou interpretaci dosažených výsledků simulací je využito grafů pro porovnání odchodu zákazníků od pokladen a doby strávené zákazníkem ve frontě. Porovnání je zobrazeno na obrázku 6.12.

Počet obslužných kanálů zadání: 3

Nový počet obslužných kanálů (m) pro porovnání:

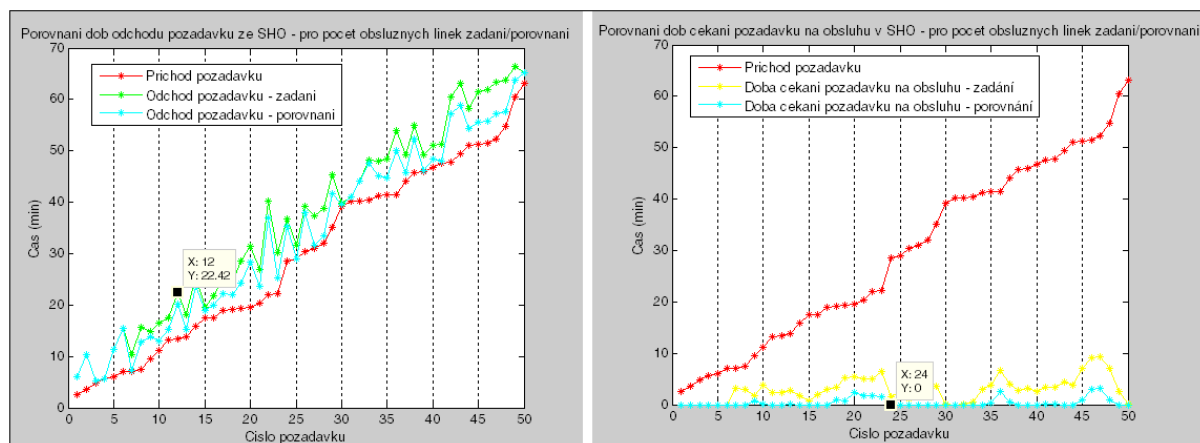
Výpočet

Odstranění parametrů simulace - porovnání

CHARAKTERISTIKY POR. SYSTÉMU M/M/m ZÍSKANÉ SIMULACÍ

Průměrná doba obsluhy požadavku Ts:	3.64353	[min]
Průměrná doba čekání požadavku ve frontě Tf:	0.436495	[min]
Průměrná doba strávení požadavku v systému T:	4.08002	[min]
Průměrný počet požadavků v systému N:	3.12756	[-]
Průměrný počet požadavků ve frontě Nf:	0.334597	[-]
Průměrný počet obsluhovaných požadavků Ns:	2.79296	[-]
Pravděpodobnost, že v systému je právě počet požadavků [0;1;2;3;4;5;6;7]		
Pravděpodobnosti:	[0.0675;0.126;0.194;0.172;0.233;0.0863;0.115;0.00624]	

Obr. 6.11 Hodnoty porovnávaného systému získané simulací



Obr. 6.12 Graf porovnání odchodů zákazníků a doba strávená zákazníkem ve frontě

Možnost porovnávání může být využita například při optimalizaci daného systém hromadné obsluhy. Z pohledu zákazníka je cílem optimalizace zkrácení čekací doby ve frontě. Z pohledu provozovatele je důležitá optimalizace vytížení jednotlivých pokladen a samozřejmě počet pokladen. V praxi je tedy nutné hledat kompromis, který bude vyhovovat oběma stranám.

## 6.5 Ověření funkčnosti vytvořeného programu na konkrétním případě

V předchozí kapitole byla provedena simulace průchodu 50 zákazníků systémem. Tento počet byl volen z důvodu zachování přehlednosti a lepší vypovídající hodnotě uvedených grafů. Provedeme porovnání analytického řešení s hodnotami získané simulací pro různé počty průchodů požadavků systémem. Hodnoty analytického řešení vyplývají ze vzorců základních charakteristik systému M/M/m, které lze nalézt v kapitole 5. Pro srovnání výsledků jsou využity střední hodnoty získané analytickým řešením. Střední hodnota doby obsluhy zákazníka, střední hodnota doby strávené zákazníkem ve frontě, střední hodnota doby strávené zákazníkem v systému, střední hodnota počtu zákazníků ve frontě a střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků.

V programu byla provedena simulace průchodu různých počtů zákazníků systémem – pro přehlednost bylo zvoleno 50 zákazníků, 200 zákazníků a 500 zákazníků. V tabulce č. 6.1 jsou zapsané získané průměrné hodnoty dob obsluhy zákazníka, dob strávené zákazníkem ve frontě, dob strávené zákazníkem v systému, počtu zákazníků ve frontě a počtu obsluhovaných zákazníků. Dále jsou zde zaneseny i hodnoty získané analytickým řešením. Následně bylo provedeno srovnání jednotlivých výsledků výpočtů.

Tab.6.1 Porovnání hodnot analytického řešení s hodnotami získané simulací konkrétního případu

	Analytický výpočet	Výpočet simulace		
		Průměrná hodnota daných charakteristik		
	Střední hodnota daných charakteristik	50 zákazníků	200 zákazníků	500 zákazníků
Doba obsluhy zákazníka $T_s$	3,33333	3,64353	3,5118	3,45478
Doba strávená zákazníkem ve frontě $T_f$	4,68165	3,06941	4,17567	5,21177
Doba strávená zákazníkem v systému $T$	8,01498	6,71293	7,68747	8,66655
Počet zákazníků v systému $N$	6,01124	5,09125	5,62803	6,23332
Počet zákazníků ve frontě $N_f$	3,51124	2,30994	3,05703	3,74851
Počet obsluhovaných zákazníků $N_s$	2,5	2,78131	2,57101	2,48481

Správnost vytvořeného programu pro simulaci modelu M/M/m byla provedena a ověřena porovnáním hodnot získaných simulací konkrétního případu s výsledky získanými pomocí analytického řešení. Při simulaci dostatečného množství počtu průchodů zákazníků systémem byly tyto hodnoty získané simulací velmi podobné hodnotám analytického řešení. Při simulaci průchodu 50 zákazníků se rozdíl mezi analytickým řešením a simulací pohyboval v průměru okolo 12%. Při simulaci průchodu 500 zákazníků se rozdíl mezi analytickým řešením a simulací pohyboval v průměru okolo 5%. Na základě těchto dosažených výsledků lze tedy usuzovat, že realizace programu pro simulaci modelu M/M/m byla provedena správně.





## 7 ZÁVĚR

Tato diplomová práce řeší problematiku modelů hromadné obsluhy, poznatky byly následně aplikovány při tvorbě programu simulace modelu hromadné obsluhy M/M/m. V teoretické části jsem se zabýval matematickým pozadím problematiky systémů hromadné obsluhy, kde jsem se zaměřil na Markovovy řetězce, Markovovy procesy se spojitým časem a Poissonův proces. V teoretické části byla dále provedena klasifikace systémů hromadné obsluhy, což bylo také jedním z cílů této diplomové práce. Modely hromadné obsluhy, v nichž intervaly mezi příchody požadavků a doba obsluhy mají exponenciální rozdělení, byly detailně rozpracovány v teoretické části této práce. U jednotlivých modelů uvádím základní vlastnosti, jejich obecná schémata včetně matematického pozadí pro odvození vzorců základních charakteristik systému. Uváděné základní charakteristiky jednotlivých modelů jsou v praxi využívány pro posouzení efektivity daného systému. V praxi se samozřejmě vyskytuje i řada dalších systémů než jen systémy s exponenciálním rozdělením jako např. Gama rozdělení, Erlangovým rozdělením nebo Gassovým normálním rozdělením. Důležité postavení v systémech hromadné obsluhy mají simulační modely umožňující uživateli poskytnout poměrně rychlou představu o chování zkoumaného systému při měnících se podmínkách. Simulační experimenty lze díky simulačnímu modelu opakovat a s hodnotami získanými simulací je možno dále pracovat, vyhodnocovat je a vyvozovat z nich různá stanoviska.

V praktické části jsem se zabýval zmiňovanými simulačními modely. Byl vytvořen program umožňující provádět simulaci modelu hromadné obsluhy M/M/m, který byl vytvořen v programovém prostředí MATLAB. Program umožňuje provádění simulace modelu M/M/m a byl vytvořen včetně grafického uživatelského rozhraní. Uživatelské rozhraní programu bylo koncipováno tak, aby bylo pro uživatele snadno ovladatelné a intuitivní. Základem je generování hodnot s exponenciálním rozdělením na základě uživatelem zadaných parametrů, kterými jsou intenzita vstupu  $\lambda$ , intenzita obsluhy  $\mu$ , počet linek obsluhy  $m$  a počet simulovaných požadavků. V případě, že jsou splněny všechny nutné podmínky, provede se simulace na základě zadaných parametrů uživatelem. Uživateli jsou poskytnuty základní charakteristiky daného systému získané jak simulací, tak i analytickým řešením. Výsledné hodnoty získané simulací včetně chování systému může uživatel pozorovat díky grafickému znázornění, což bylo dalším cílem této diplomové práce. Program poskytuje uživateli možnost provádět simulaci pro jiný počet obslužných linek se zachováním příchodů požadavků do systému a doby obsluhy požadavku. Tato funkce může být využita při optimalizaci daného systému. Program poskytuje uživateli díky tomuto rozšířenou možnost provádění simulačních experimentů.

Je-li vytvořený model chybný, výsledky simulace mohou vést k chybným závěrům. Správnost funkce vytvořeného programu simulace modelu hromadné obsluhy M/M/m byla ověřena simulací na konkrétním případu. Byly porovnány hodnoty získané simulací s hodnotami získané analytickým řešením. Při dostatečné délce simulace (dostatečný počet průchodů požadavků systémem) byly hodnoty získané simulací a hodnoty získané analytickým řešením velmi podobné. Díky těmto výsledkům lze usoudit, že realizace programu pro simulaci modelu M/M/m byla provedena správně.



## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Bose, S.K.: An Introduction to Queueing Systems. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [2] COOPER, R., B. *Introduction to Queueing Theory*. New York : Elsevier North Holland, 1981. ISBN 0-444-00379-7.
- [3] DÖMEOVÁ, Ludmila a Martina BERÁNKOVÁ. *Systémy hromadné obsluhy I*. Vyd. 1. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze, Provozně ekonomická fakulta, 2004, 57 s. ISBN 80-213-1193-2.
- [4] GROSS, D., SHORTLE, J.F., THOPSON, J.M., HARRIS, C.M.: *Fundamentals of Queueing Theory*. John Wiley & Sons, New York, 2008, 528 s. ISBN: 978-0-471-79127-0.
- [5] HOUŠKA, Milan. *Simulační modely I*. Vyd. 1. V Praze: Česká zemědělská univerzita, Provozně ekonomická fakulta, 2005, 57 s. ISBN 80-213-1334-x.
- [6] Hrubina, K., Jadlovská, A., Hrehová, S.: *Algoritmy optimalizačních metod s využitím programových systémů*. 1.vyd. Technická univerzita v Košiciach, Prešov-Košice, 2005, 392 s. ISBN 80-88941-31-8.
- [7] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum*. 2. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1998, 297 s. ISBN 80-7079-597-2.
- [8] JABLONSKÝ, Josef. *Operační výzkum: kvantitativní metody pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007, 323 s. ISBN 978-80-86946-44-3.
- [9] KLVANA, Jaroslav. *Modelování 20. Operační výzkum*. 3. vyd. 246 s. Praha: ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03263-9.
- [10] KOLČAVOVÁ, Alena. *Kvantitativní metody v rozhodování: studijní pomůcka pro distanční studium*. Vyd. 4., upr. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2010, 194 s. ISBN 978-80-7318-950-1.
- [11] KOŘENÁŘ, Václav. *Stochastické procesy*. 2., přeprac. vyd. Praha: Oeconomica, 2010, 228 s. ISBN 978-80-245-1646-2.
- [12] LUKÁŠ, Ladislav. *Pravděpodobnostní modely v managementu: Markovovy řetězce a systémy hromadné obsluhy*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2009, 135 s. ISBN 978-80-200-1704-8.
- [13] PLEVNÝ, Miroslav a Miroslav ŽIŽKA. *Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování*. Vyd. 2. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010, 296 s. ISBN 978-80-7043-933-3.
- [14] PLEVNÝ, Miroslav a Ladislav LUKÁŠ. *Operační výzkum*. 2. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita v Plzni, 2003, 191 s. ISBN 80-7043-240-3.
- [15] SKALSKÁ, Hana. *Stochastické modelování*. Vyd. 2., rozš. a upr. Hradec Králové: Gaudeamus, 2006, 162 s. ISBN 80-7041-488-x.
- [16] ŠEDA, Miloš, *Modely hromadné obsluhy* [online]. Článek, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: [http://web2.vslg.cz/fotogalerie/acta\\_logistica/2011/2\\_cislo/3\\_seda.pdf](http://web2.vslg.cz/fotogalerie/acta_logistica/2011/2_cislo/3_seda.pdf)
- [17] TYC, Otto. *Operační výzkum*. Vyd. 1. V Brně: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, 2003, 124 s. ISBN 80-7157-726-x.
- [18] WALTER, Jaromír. *Modely hromadné obsluhy*. Praha, 1973.
- [19] ZAPLATÍLEK, Karel a Bohuslav DOŇAR. *MATLAB: tvorba uživatelských aplikací*. 1. vyd. Praha: BEN, 2004, 215 s. : il. ISBN 80-7300-133-0.
- [20] ZAPLATÍLEK, Karel. *MATLAB®: tvorba grafického uživatelského rozhraní*. V Tribunu EU vyd. 1. Brno: Tribun EU, 2014, 90 s. ISBN 978-80-263-0861-4.

## **PŘILOHY**

### **- CD-R digitální nosič**

Obsah CD-R digitálního nosiče

- Text diplomové práce ve formátu PDF
- Program simulace modelu M/M/m