

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Analýza časových řad z oblasti bankovníctví



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. et PhDr. Ivo Müller, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Ing. Andrea Gruntová
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. et PhDr. Ivo Müllera, Ph.D. a s použitím uvedené literatury.

V Olomouci, dne 23. března 2011

.....
Andrea Gruntová

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu diplomové práce panu RNDr. et PhDr. Ivo Müllerovi, Ph.D. za věnovaný čas, cenné rady a vstřícný přístup při vypracování této práce. Dále bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za to, že mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod a cíl práce	6
TEORETICKÁ ČÁST	8
1 Úvod do problematiky analýzy časových řad	8
2 Lineární regresní model	11
3 Modelování trendu	13
3.1 Globální polynomický trend	13
3.2 Exponenciální vyrovňávání	14
3.2.1 Jednoduché exponenciální vyrovňávání	16
3.2.2 Dvojitě exponenciální vyrovňávání	17
3.2.3 Trojitě exponenciální vyrovňávání	18
4 Modelování sezónnosti	19
4.1 Regresní metoda modelování sezónnosti	19
4.2 Model skrytých period	22
4.2.1 Periodogram	22
4.2.2 Fisherův test periodicity	23
4.2.3 Vyrovnané hodnoty a předpovědi v modelu	24
5 Analýza náhodné složky	25
6 Posouzení vhodnosti modelu	28
7 Měření rizika	30
PRAKTICKÁ ČÁST	35
8 Analýza časové řady „ <i>Pokladna</i> “	35
8.1 Popis dat	35
8.2 Ekonomická zdůvodnitelnost analýzy časové řady	35
8.3 Tvorba modelu	37
8.3.1 Model trendu	38
8.3.2 Model 1: oddělené modelování trendu a sezónní složky (MSP)	42
8.3.3 Model 2: $\hat{T}_t^{(0,1)} \wedge \text{MSP}$	46
8.3.4 Model 3: $\hat{T}_t^{(3)} \wedge \text{UP}$	48
8.3.5 Model 4: $\hat{T}_t^{(0,1)} \wedge \text{UP}$	50
8.4 Předpovědi	52
8.4.1 Model 1: $\hat{T}_t^{(E3)} + \text{MSP}$	52
8.4.2 Model 2: $\hat{T}_t^{(0,1)} \wedge \text{MSP}$	53

8.4.3	Model 3: $\hat{T}_t^{(3)} \wedge \text{UP}$	54
8.4.4	Model 4: $\hat{T}_t^{(0,1)} \wedge \text{UP}$	54
8.5	Shrnutí výsledků a zhodnocení modelů	56
9	Analýza časových řad „Kurz měny“	59
9.1	Popis dat	59
9.2	Ekonomická zdůvodnitelnost analýzy měnových kurzů	59
9.3	Analýza kurzů	60
9.4	Shrnutí výsledků a zhodnocení	76
	Závěr	79
	Literatura	80

Seznam obrázků

1	Určení hodnoty VaR jako kvantilu	31
2	Časová řada „Pokladna“ - vývoj dat, leden 2005 - prosinec 2009 .	37
3	Časová řada „Pokladna“ - modely trendů	40
4	Časová řada „Pokladna“ - periodogram Modelu 1a	43
5	Časová řada „Pokladna“ - Model 1	53
6	Časová řada „Pokladna“ - Model 2	53
7	Časová řada „Pokladna“ - Model 3	54
8	Časová řada „Pokladna“ - Model 4	55
9	Vývoj kurzu a denních výnosů EUR, 3.1.2005 – 31.12.2009 . . .	60
10	Vývoj kurzu a denních výnosů GBP, 3.1.2005 – 31.12.2009 . . .	61
11	Vývoj kurzu a denních výnosů USD, 3.1.2005 – 31.12.2009 . . .	61
12	Charakteristiky denních výnosů EUR, 3.1.2005 – 31.12.2009 . . .	62
13	Charakteristiky denních výnosů GBP, 3.1.2005 – 31.12.2009 . . .	62
14	Charakteristiky denních výnosů USD, 3.1.2005 – 31.12.2009 . . .	63
15	DF výnosů CZK/EUR s vyznačeným VaR (z dat 2005-2009) . .	69
16	DF výnosů CZK/GBP s vyznačeným VaR (z dat 2005-2009) . . .	70
17	DF výnosů CZK/USD s vyznačeným VaR (z dat 2005-2009) . . .	70
18	DF výnosů CZK/EUR s vyznačeným VaR (z dat 2009)	72
19	DF výnosů CZK/GBP s vyznačeným VaR (z dat 2009)	72
20	DF výnosů CZK/USD s vyznačeným VaR (z dat 2009)	73
21	Měnový kurz CZK/EUR a denní míra výnosu, 2005 - 2010	73
22	Měnový kurz CZK/GBP a denní míra výnosu, 2005 - 2010	74
23	Měnový kurz CZK/USD a denní míra výnosu, 2005 - 2010	74

Seznam tabulek

1	Časová řada „Pokladna“ - výsledky modelů trendu	40
2	Časová řada „Pokladna“ - testy náhodnosti v Modelu 1	45
3	Časová řada „Pokladna“ - testy náhodnosti v Modelu 2	47
4	Časová řada „Pokladna“ - testy náhodnosti v Modelu 3	49
5	Časová řada „Pokladna“ - testy náhodnosti v Modelu 4	50
6	Časová řada „Pokladna“ - shrnutí výsledků modelů	58
7	Číselné charakteristiky denních výnosů kurzů	63
8	Tabulka výsledků pro $VaR_{0,05}^{(25)}$ měny „EUR“	66
9	Tabulka výsledků pro $VaR_{0,05}^{(25)}$ měny „GBP“	68
10	Tabulka výsledků pro $VaR_{0,05}^{(25)}$ měny „USD“	68

Úvod a cíl práce

S časovými řadami, jakožto posloupnostmi pozorovaných hodnot nějaké veličiny, se setkáváme prakticky ve všech oblastech lidské činnosti. Zejména v oblasti ekonomie, ať už na úrovni národní (makroekonomické), či na úrovni podnikové (mikroekonomické), bychom našli velké množství časových řad různých ekonomických ukazatelů - cen akcií, komodit, kurzů měn, hodnot indexů, příjmů domácností, vládních výdajů, výše tržeb, nákladů, a mnoha jiných veličin. Proč jsou tyto časové řady důležité? Poslední dobou se takřka žádné odpovědné rozhodnutí neobejde bez posouzení minulého vývoje a současného stavu některého z mnoha ukazatelů, o němž máme záznamy právě ve formě časové řady. Co je však důležitější, většina takových rozhodnutí je ovlivněna budoucím vývojem jedné nebo několika veličin. Přitom je však potřeba si uvědomit, že vytvoření prognózy budoucího stavu není cílem, ale pouze prostředkem k dosažení cílů. Predikce budoucího vývoje rozličných ekonomických ukazatelů má pak stěžejní význam pro úspěšné fungování a konkurenceschopnost každého podniku, potažmo celého národního hospodářství. S vytvořením takové předpovědi nám může významným způsobem pomoci, vedle znalosti ekonomické teorie, znalost teorie časových řad. V závislosti na účelu použití a významnosti učiněného rozhodnutí pak volíme jednodušší nebo složitější model. Postup je však v zásadě vždy stejný - zvolit vhodnou metodu k vytvoření modelu (a určení předpovědi), ověření kvality modelu (je-li to možné), eventuálně jeho úprava, a následně vytvoření predikce.

Hlavním **cílem** této diplomové práce je aplikovat vybrané metody z teorie časových řad na skutečná data a ukázat tak možnosti praktického využití těchto metod, vyvodit z provedených analýz závěry a případně i doporučení. Přitom se budu snažit klást důraz na praktickou stránku této problematiky - využitelnost provedených analýz a možnost použití vytvořených modelů v praxi. I když se v této práci zabývám časovými řadami z oblasti bankovníctví, věřím, že práce nastíní široké možnosti využití časových řad v oblasti celé ekonomie.

Předložená diplomová práce má dvě části - teoretickou část, v níž jsou především popsány metody použité v praktické části, která je pro tuto práci stěžejní.

První kapitola teoretické části je věnována úvodu do problematiky časových řad, především zavedení základních pojmů. Ve *druhé kapitole* jsem popsala lineární regresní model, princip odhadu jeho parametrů a konstrukce předpovědí. Ve *třetí kapitole* jsem se věnovala metodám lineární regrese a exponenciálního vyrovňování, jakožto přístupům k modelování trendu v časové řadě. Ve *čtvrté kapitole* jsem popsala některé metody používané k modelování složky sezónní, a sice model skrytých period a regresní přístup k modelování sezónnosti. *Pátá kapitola* obsahuje popis testů náhodnosti v rámci analýzy složky náhodné a v *kapitole šesté* uvádím některé ukazatele, které jsem zvolila pro posouzení kvality modelů vytvořených v praktické části práce. V *sedmé*, poslední kapitole teoretické části, jsem se věnovala jednomu z přístupů k měření rizika, a sice metodě Value at Risk.

Na teoretickou část navazuje **část praktická**, v níž jsem se zabývala dvěma časovými řadami. *Osmá kapitola* je věnována analýze časové řady „Pokladna“, vyjadřující hodnotu bankovek a mincí v držení obchodních bank. Cílem bylo sestavit pro danou časovou řadu pomocí metod popsaných v teoretické části práce modely vhodné k popisu této časové řady a pomocí těchto modelů predikovat vývoj časové řady na jeden rok dopředu. Výsledkem je potom zhodnocení jednotlivých modelů z různých hledisek. V *deváté kapitole* jsem se pak věnovala významu a analýze kurzového rizika metodou Value at Risk s tím, že jsem se opět zaměřila na využitelnost této metody pro praktické účely.

Veškerá **data**, s nimiž jsem pro účely analýz a tvorbu modelů v této diplomové práci pracovala, jsem čerpala z veřejně dostupné databáze časových řad České národní banky. Pro provedení všech potřebných výpočtů jsem potom používala **software MATLAB**. Jak soubor s daty, tak soubory typu „M-file“ s výpočty jsou součástí přiloženého CD.

TEORETICKÁ ČÁST

1 Úvod do problematiky analýzy časových řad

Časovou řadou obecně rozumíme věcně a prostorově srovnatelná pozorování (data), která jsou jednoznačně uspořádána z hlediska času ve směru od minulosti do přítomnosti. Jsou-li sledovanými daty hodnoty určitého ekonomického ukazatele, hovoříme zpravidla o *ekonomické časové řadě*.¹ Věcnou srovnatelností rozumíme pozorování ukazatele, jehož obsahové vymezení má být v čase neměnné. Obdobně prostorovou srovnatelnost charakterizuje čerpání dat ze stejné oblasti, ať už je tím myšleno geografické území, úsek podniku či klientský segment.

Ekonomické časové řady můžeme členit dle různých hledisek, přičemž zařazení časové řady k některému z jejích typů je důležité například pro správnou volbu postupu a metod při její analýze. V následující části uvádím, z důvodu rozsahu práce jen stručně, některá členění.²

Jedním z důležitých hledisek je členění časových řad **podle periodicity**, s jakou jsou údaje sledovány, na dlouhodobé, krátkodobé a vysokofrekvenční časové řady. *Dlouhodobá* časová řada je řadou ukazatelů, jejichž hodnoty sledujeme v ročních, případně delších časových úsecích. Oproti tomu *krátkodobé* časové řady mají periodu pozorování kratší než jeden rok. Nejčastěji se jedná o data měsíční, setkáváme se však také s pololetními, čtvrtletními či týdenními časovými řadami. Pro *vysokofrekvenční* časové řady je charakteristická kratší než týdenní perioda, zpravidla se jedná o denní data. Tento typ časových řad je v oblasti ekonomie spolu s měsíčními a ročními časovými řadami nejčastější, jedná se například o časové řady kurzů měn či akcií.

¹definice upravena podle [2], str. 14

²podle [2], str. 14; další členění lze najít např. v [13], str. 246

Podle **typu sledovaného ukazatele** dělíme časové řady na *intervalové*, jejichž hodnoty závisí na délce pozorovaného intervalu, a řady *okamžikové*, jejichž hodnoty se vztahují k určitým časovým okamžikům. Příkladem ekonomické časové řady intervalové je objem produkce za dané období, okamžikovou časovou řadu tvoří například hodnoty akciového kurzu k danému dni.

Pod pojmem **analýza časových řad** rozumíme vhodné použití souboru metod, pomocí nichž pro danou časovou řadu sestavíme takový model, který umožní nejen její popis, ale především predikci (předpověď) jejích budoucích hodnot.

Pro studium časových řad je nutné mít „dostatečné“ množství napozorovaných hodnot. Uvedení pojmu „dostatečné“ v uvozovkách je na místě, neboť velmi záleží na tom, co je objektem a cílem pozorování. Pro určení krátkodobého trendu měnového kurzu (například za účelem spekulace na kurzový rozdíl) nám postačí kratší časová řada než při sledování vývoje produkce, která je typická svým sezónním charakterem. Volba počtu pozorovaných dat je někdy čistě subjektivní záležitostí, na druhou stranu použití některých metod přímo vyžaduje velký počet pozorování.

V oblasti analýzy časových řad existuje poměrně značné množství různých přístupů k jejich modelování. Jedním z nich je také klasická **dekompozice** časové řady, jejíž podstatou je rozložení časové řady na složky a zkoumání těchto složek odděleně.

Trend časové řady popisuje obecně dlouhodobou tendenci vývoje sledovaného ukazatele v čase, proto může být rostoucí, klesající, naměřené hodnoty ale také mohou po určitou dobu oscilovat kolem určité úrovně. Trend nemusí být po celou dobu pozorování stejný, neboť může docházet i k jeho změnám, případně korekcím. Trend je svou podstatou složkou každé časové řady, tedy neexistuje časová řada „bez trendu“.

Sezónností rozumíme pravidelné odchylky od trendu s periodou kratší než jeden rok. Z toho vyplývá, že sezónnost lze pozorovat pouze u krátkodobých časových řad. Jak již napovídá název této složky, příčinou takovýchto výkyvů může být například vliv ročního období, svátků a prázdnin, výplatní termíny mezd a podobně.

Objevuje-li se v časové řadě kolísání kolem trendu s periodou delší než jeden rok, hovoříme o přítomnosti **cyklické složky**. Identifikace příčin cyklické složky v časové řadě je o něco složitější než určení sezónních vlivů, a to z důvodu dlouhodobosti, se kterou se cyklus v časové řadě projevuje. Jako nejčastější příčiny cyklů jsou však tradičně uváděny vliv hospodářského cyklu, demografického vývoje, technologického pokroku či inovačních vln. Jelikož jsou tyto faktory těžko postižitelné, nebudu se analýze cyklické složky v této práci zabývat.

Doposud zmíněné složky tvoří dohromady složku **systematickou** (deterministickou), jejíž namodelování je zpravidla naším cílem.

V každé časové řadě (a o ekonomických časových řadách to platí dvojnásob) se nachází také složka **náhodná**, jejíž příčiny jsou neznámé. Jejím zdrojem mohou být drobné nepostižitelné nahodilosti, ale také chyby měření.

Závěrem úvodní kapitoly uvádím **značení**, které se běžně v teorii časový řad používá a jehož se budu v následujícím textu držet.

y_t	...	skutečná hodnota sledovaného ukazatele v čase t
$\hat{y}_t$	...	odhad skutečné hodnoty ukazatele v čase t
$\hat{y}_T^P$	...	predikovaná hodnota ukazatele pro čas T
$\hat{y}_{t+T}^P$	...	hodnota ukazatele predikovaná v čase t pro čas $t + T$
T_t	...	trendová složka závislá na čase
S_t	...	sezónní složka závislá na čase
ε_t	...	náhodná složka závislá na čase

2 Lineární regresní model

Jelikož regresní analýza je při analýze časových řad často využívanou metodou, budu se v této kapitole věnovat obecnému lineárnímu modelu, odhadu jeho parametrů a konstrukci předpovědí.³ Na tento model se budu dále odkazovat v dalším textu.

Mějme tedy lineární model s absolutním členem ve tvaru

$$y_t = \theta_0 + \theta_1 x_{t1} + \cdots + \theta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

který lze maticově zapsat jako

$$\mathbf{y} = \mathbb{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.2)$$

s vektorem pozorování $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, regresní maticí $\mathbb{X} = (x_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, vektorem parametrů $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)'$ a vektorem chyb $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$.

V modelu s absolutním členem je celkový počet parametrů $p = k+1$, v modelu bez absolutního členu je počet parametrů $p = k$.

V lineárním regresním modelu předpokládáme, že počet pozorování je větší než celkový počet parametrů, tedy $n > p$, dále plnou hodnotu regresní matice, tj. $h(\mathbb{X}) = p$, a dále, že chyby ε_t , $t = 1, \dots, n$, tvoří tzv. bílý šum, tedy $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$, $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$.

Neznámé parametry $\boldsymbol{\theta}$ najdeme *metodou nejmenších čtverců*, kdy řešíme úlohu

$$\min_{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k} \sum_{t=1}^n \left(y_t - \sum_{i=0}^k \theta_i x_{ti} \right)^2 = \min_{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k} (\mathbf{y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\theta})' (\mathbf{y} - \mathbb{X}\boldsymbol{\theta}). \quad (2.3)$$

Řešením této úlohy jsou potom odhady $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbf{y}. \quad (2.4)$$

Vyrovnané hodnoty $\hat{\mathbf{y}}$, určené na základě tohoto modelu, potom získáme ze vztahu

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbb{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.5)$$

³zpracováno podle [1], str. 111-116; [9], str. 231-233; [12], str. 59-66; kde lze také nalézt odvození uvedených vztahů.

Bodovou předpověď pro čas T , značenou $\hat{y}_T^P$, získáme pro daný model jako

$$\hat{\mathbf{y}}_T^P = \mathbf{x}_T' \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.6)$$

kde $\mathbf{x}_T' = (1, x_{T1}, \dots, x_{Tk})$ je vektor regresorů pro budoucí čas T .

Intervalovou předpověď, představující interval I , který s předem danou pravděpodobností $1 - \alpha$ pokrývá skutečnou budoucí hodnotu y_T , získáme jako

$$I = \langle \hat{y}_T^P - \sqrt{\hat{\sigma}^2 f_T} t_{n-p}(\alpha), \quad \hat{y}_T^P + \sqrt{\hat{\sigma}^2 f_T} t_{n-p}(\alpha) \rangle, \quad (2.7)$$

kde

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbb{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})'(\mathbf{y} - \mathbb{X}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{n - p} = \frac{1}{n - p} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2, \quad (2.8)$$

$$f_T = 1 + \mathbf{x}_T'(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbf{x}_T$$

a $t_{n-p}(\alpha)$ je kritická hodnota Studentova rozdělení o $(n - p)$ stupních volnosti na hladině α .

Někdy je účelné otestovat, zda jsou parametry v modelu (2.1) statisticky významné. Zpravidla tento test používáme pro určení stupně polynomu trendové funkce, neboť nejjednodušší je modelovat trend konstantní funkcí.

Uvažujeme-li vyšší stupně polynomu, pak testujeme hypotézy

$$H_0 : \theta_j = 0 \quad \text{proti alternativě} \quad H_1 : \theta_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.9)$$

Hypotézu H_0 potom na hladině významnosti α zamítneme, jestliže

$$|T| = \left| \frac{\hat{\theta}_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 q^{jj}}} \right| > t_{n-p}(\alpha), \quad (2.10)$$

kde $\hat{\sigma}^2$ určíme podle vztahu (2.8) a q^{jj} je prvek matice $(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}$ odpovídající j -tému regresoru (parametru) v modelu (2.1). Zamítáme-li hypotézu H_0 ve prospěch alternativy H_1 , pak parametr θ_j je nenulový, tedy jej považujeme za významný a příslušný regresor do modelu zahrneme.

3 Modelování trendu

Jedním z hlavních úkolů, které jsou spojeny s analýzou časové řady, je odhad a predikce trendu v časové řadě. Jak jsem již uvedla v úvodu první kapitoly, neexistuje časová řada, která by v sobě trend neobsahovala. Trend můžeme modelovat různými přístupy, jako globální - tedy pro všechna data společný (nejčastěji jako polynom), a jako lokální, pomocí tzv. adaptivních metod.

3.1 Globální polynomický trend

V rámci klasické aditivní dekompozice časové řady, ve tvaru $y_t = T_t + \varepsilon_t$, se trend T_t velmi často modeluje jako polynom k -tého stupně s časovou proměnnou t , $t = 1, \dots, n$. Jelikož polynomická funkce je lineární v parametrech, můžeme pro modelování časové řady s takovou trendovou složkou využít lineární regresní model popsany v předchozí kapitole.

Mějme tedy lineární model s absolutním členem ve tvaru

$$y_t = T_t + \varepsilon_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_k t^k + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Tento model přesně odpovídá modelu (2.1), resp. (2.2), kde vektor parametrů $\theta = \beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)'$. Proto odhad parametrů $\hat{\beta}$ získáme z (2.4), vyrovnané hodnoty $\hat{\mathbf{y}}$ z (2.5), bodovou předpověď $\hat{y}_T^P$ z (2.6) a intervalovou předpověď podle (2.7).

Nejčastěji se při využití tohoto přístupu trend modeluje jako polynom prvního nebo druhého stupně, nicméně vzhledem k možnosti maticového zápisu a při dostupnosti vhodného softwaru není problém takto modelovat ani polynomy vyšších stupňů. Nevýhodou této metody je, že takto namodelovaný trend se uvažuje jako neměnný v čase, což nemusí vždy platit. Tento nedostatek odstraňují některé adaptivní metody, které přistupují k trendu jako neměnnému jen po určité krátké časové období, po jehož uplynutí může trend svůj charakter měnit. Jedním z těchto přístupů je i metoda *exponenciálního vyrovnavání* uvedená v následující podkapitole.

3.2 Exponenciální vyrovňávání

Exponenciální vyrovňávání⁴ vychází z aditivního rozkladu časové řady na složky, z nichž modeluje složku trendovou, o které předpokládá, že ji lze popsat polynomem k -tého stupně. V modelu může, ale nemusí, být zahrnuta i složka periodická, záleží na stupni vyhlazení časové řady. Modelovaný trend má neměnné parametry jen po určité krátké období, proto se tato metoda dobře přizpůsobuje změnám v datech. Tedy

$$y_{t-j} = T_{t-j}^{(k)} + \varepsilon_{t-j} = \beta_0 - \beta_1 j + \beta_2 j^2 - \dots + (-1)^k \beta_k j^k + \varepsilon_{t-j}, \quad (3.2)$$

kde

y_{t-j} je pozorovaná hodnota,
 $t = 1, 2, \dots, n$ indexuje aktuální okamžik pozorování,
 $j = 0, 1, \dots, t-1$ indexuje stáří pozorování vzhledem k aktuálnímu okamžiku.

Záporná znaménka v trendové funkci jsou z toho důvodu, že v daném časovém okamžiku t je tento bod považován za „počátek souřadnic“, a vzhledem k němu se s pozorovanými hodnotami y_{t-j} pohybujeme směrem do minulosti.

Metoda exponenciálního vyrovňávání je potom postavena na myšlence, že výpočet vyrovnané hodnoty využívá všech minulých pozorování. Jelikož se předpokládá, že novější pozorování ovlivňují budoucí vývoj časové řady více než pozorování starší, přiřazují se všem pozorovaným hodnotám váhy, které směrem do minulosti exponenciálně klesají. Odhad parametrů v příslušném modelu potom získáme **váženou metodou nejmenších čtverců**, kde hledáme

$$\min_{\beta_0, \dots, \beta_k} \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j (y_{t-j} - T_{t-j}^{(k)})^2, \quad (3.3)$$

kde α , $0 < \alpha < 1$, je vyhlazovací konstanta a pro váhy α^j platí, že s rostoucím indexem j exponenciálně klesají.

⁴upraveno podle [9], str. 57 - 74, a [16], str. 141

Úkolem je tedy nalézt příslušné odhady $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k$, které jsou konstruované vždy z aktuálně dostupných dat a závisí tedy na časovém okamžiku, v němž je odhad proveden. Jelikož by postup, kdy se s každým novým pozorováním počítají nové odhady $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k$, byl poněkud náročný, používají se k vlastnímu vyhlazování tzv. „**vyrovnávací statistiky**“, které jsou založeny pouze na počátečních odhadech parametrů $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k$ a dále se již rekurentně aktualizují, čímž se výpočty značně zjednodušují. Pomocí těchto vyrovnávacích statistik se potom počítají i vyrovnané hodnoty a predikce.

Obečný postup při exponenciálním vyhlazování je následující:

- 1) Z prvních přibližně $n_1 = \frac{n}{2}$ pozorování spočteme počáteční odhady parametrů příslušné trendové funkce, které označíme $\hat{\beta}_0(0), \dots, \hat{\beta}_k(0)$.
- 2) Pomocí těchto parametrů vypočteme pro konkrétní hodnotu vyhlazovací konstanty α počáteční hodnoty příslušných vyrovnávacích statistik.
- 3) Pomocí rekurentních vzorců aktualizujeme, postupně pro $t = 1, \dots, n$, vyrovnávací statistiky, spočteme příslušnou vyrovnanou hodnotu a předpověď o jeden krok dopředu.
- 4) Pro dané α určíme pomocí vhodného ukazatele průměrnou chybu předpovědi a najdeme takové α_{opt} , pro které je chyba předpovědi minimální.

Pro volbu vhodné vyhlazovací konstanty α se nejčastěji používá metoda simulací, kdy kroky 1) – 4) provádíme opakovaně pro vybrané hodnoty $\alpha = \alpha_0 + \kappa$, kde α_0 je startovací hodnota vyhlazovací konstanty (například $\alpha_0 = 0,7$) a κ je krok zvolené délky (například $\kappa = 0,05$).

- 5) S nalezeným optimálním α_{opt} provedeme celý vyhlazovací proces znovu s tím rozdílem, že počáteční odhady parametrů $\hat{\beta}_0(0), \dots, \hat{\beta}_k(0)$ v bodě 1) počítáme ze všech dostupných dat.

Vzhledem k rozsahu diplomové práce uvedu v následujících kapitolách vzorce, které se při praktických výpočtech používají, bez odvození.

3.2.1 Jednoduché exponenciální vyrovňování

V modelu jednoduchého exponenciálního vyrovňování považujeme trend v krátkých časových úsecích za konstantní, tedy

$$T_{t-j} = \beta_0, \quad j = 0, 1, \dots, t-1.$$

Vyrované hodnoty získáme podle rekurentního vztahu

$$\hat{y}_t = (1 - \alpha)y_t + \alpha\hat{y}_{t-1}, \quad t = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

kde počáteční vyrovnanou hodnotu $\hat{y}_0$ určíme jako

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= \frac{1}{n_1} \sum_{t=1}^{n_1} y_t \quad \text{ve fázi hledání optimálního } \alpha, \\ \hat{y}_0 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t \quad \text{ve fázi vlastního vyhlazování s nalezeným } \alpha_{opt}. \end{aligned}$$

Pro bodovou předpověď počítanou v čase t pro časový okamžik $t+T$, $T = 1, 2, \dots$, platí

$$\hat{y}_{t+T}^P = \hat{y}_t, \quad (3.5)$$

pro intervalovou předpověď počítanou v čase t pro čas $t+T$, $T = 1, 2, \dots$, na hladině významnosti p pak

$$\langle \hat{y}_{t+T}^P - u_{(1-\frac{p}{2})} \cdot d \cdot \Delta_n, \quad \hat{y}_{t+T}^P + u_{(1-\frac{p}{2})} \cdot d \cdot \Delta_n \rangle, \quad (3.6)$$

kde

$$\begin{aligned} u_{(1-\frac{p}{2})} &\text{ je } (1 - \frac{p}{2}) \text{ kvantil rozdělení } \mathcal{N}(0, 1), \\ d &= 1, 25 \\ \Delta_n &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_t^P|. \end{aligned}$$

3.2.2 Dvojité exponenciální vyrovnávání

V modelu dvojitého exponenciálního vyrovnávání uvažujeme v krátkých časových úsecích lineární trend, tedy

$$T_{t-j} = \beta_0 - \beta_1 j, \quad j = 0, 1, \dots, t-1.$$

Vyrovnávací statistiky mají potom následující tvar:

$$\begin{aligned} S_t &= (1 - \alpha)y_t + \alpha S_{t-1}, \\ S_t^{[2]} &= (1 - \alpha)S_t + \alpha S_{t-1}^{[2]}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Počáteční hodnoty vyrovnávacích statistik získáme ze vztahů

$$\begin{aligned} S_0 &= \hat{\beta}_0(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \hat{\beta}_1(0), \\ S_0^{[2]} &= \hat{\beta}_0(0) - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \hat{\beta}_1(0), \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde $\hat{\beta}_0(0), \hat{\beta}_1(0)$ jsou odhady lineárního trendu získané metodou nejmenších čtverců spočtené:

- 1) ve fázi hledání optimální hodnoty vyhlazovací konstanty α_{opt} z počátečních $\frac{n}{2}$ pozorování,
- 2) ve fázi vlastního vyhlazování s optimální vyhlazovací konstantou α_{opt} ze všech n pozorování.

Vyrovnanou hodnotu potom vypočteme pomocí vztahu

$$\hat{y}_t = 2S_t - S_t^{[2]}, \quad (3.9)$$

bodovou předpověď hodnoty $\hat{y}_{t+T}^P$ provedenou v čase t pro čas $t+T, T = 1, 2, \dots$, vypočteme pomocí vzorce

$$\hat{y}_{t+T}^P = \left(2 + \frac{(1-\alpha)T}{\alpha}\right) S_t - \left(1 + \frac{(1-\alpha)T}{\alpha}\right) S_t^{[2]}, \quad (3.10)$$

intervalovou předpověď počítanou v čase t pro čas $t+T, T = 1, 2, \dots$, na hladině významnosti p pak určíme stejně jako v (3.6), pouze s tím rozdílem, že

$$d_T = 1,25 \left\{ \frac{1 + \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^3} [(1 + 4\alpha + 5\alpha^2) + 2(1-\alpha)(1+3\alpha)T + 2(1-\alpha)^2 T^2]}{1 + \frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^3} [(1 + 4\alpha + 5\alpha^2) + 2(1-\alpha)(1+3\alpha) + 2(1-\alpha)^2]} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

3.2.3 Trojité exponenciální vyrovnávání

V modelu trojitého exponenciálního vyrovnávání uvažujeme v krátkých časových úsecích kvadratický trend, tedy

$$T_{t-j} = \beta_0 - \beta_1 j + \beta_2 j^2, \quad j = 0, 1, \dots, t-1.$$

Vyrovnávací statistiky mají potom následující tvar:

$$\begin{aligned} S_t &= (1 - \alpha)y_t + \alpha S_{t-1}, \\ S_t^{[2]} &= (1 - \alpha)S_t + \alpha S_{t-1}^{[2]}, \\ S_t^{[3]} &= (1 - \alpha)S_t^{[2]} + \alpha S_{t-1}^{[3]}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Počáteční hodnoty těchto tří vyrovnávacích statistik vypočítáme ze vztahů

$$\begin{aligned} S_0 &= \hat{\beta}_0(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\hat{\beta}_1(0) + \frac{\alpha(1+\alpha)}{2(1-\alpha)^2}\hat{\beta}_2(0), \\ S_0^{[2]} &= \hat{\beta}_0(0) - \frac{2\alpha}{1-\alpha}\hat{\beta}_1(0) + \frac{2\alpha(1+2\alpha)}{2(1-\alpha)^2}\hat{\beta}_2(0), \\ S_0^{[3]} &= \hat{\beta}_0(0) - \frac{3\alpha}{1-\alpha}\hat{\beta}_1(0) + \frac{3\alpha(1+3\alpha)}{2(1-\alpha)^2}\hat{\beta}_2(0), \end{aligned} \tag{3.12}$$

kde $\hat{\beta}_0(0)$, $\hat{\beta}_1(0)$, $\hat{\beta}_2(0)$ jsou odhady kvadratického trendu získané metodou nejmenších čtverců spočtené:

- 1) ve fázi hledání optimální hodnoty vyhlazovací konstanty α_{opt} z počátečních $\frac{n}{2}$ pozorování,
- 2) ve fázi vlastního vyhlazování s optimální vyhlazovací konstantou α_{opt} ze všech n pozorování.

Vyrovnané hodnoty potom vypočteme pomocí vztahu

$$\hat{y}_t = 3S_t - 3S_t^{[2]} + S_t^{[3]} \tag{3.13}$$

a bodové předpovědi $\hat{y}_{t+T}^P$ provedené v čase t o T kroků dopředu pomocí vzorce

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+T}^P &= \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ [6\alpha^2 + (1 + 5\alpha)(1 - \alpha)T + (1 - \alpha)^2 T^2] S_t - \right. \\ &\quad - [6\alpha^2 + 2(1 + 4\alpha)(1 - \alpha)T + 2(1 - \alpha)^2 T^2] S_t^{[2]} + \\ &\quad \left. + [2\alpha^2 + (1 + 3\alpha)(1 - \alpha)T + (1 - \alpha)^2 T^2] S_t^{[3]} \right\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

4 Modelování sezónnosti

4.1 Regresní metoda modelování sezónnosti

Předpokládáme-li model v aditivním tvaru $y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$, obsahující trendovou a sezónní složku, resp. model v tvaru multiplikativním, $y_t = T_t S_t \varepsilon_t$, po logaritmické transformaci, pak lze regresní přístup k modelování sezónnosti⁵ použít dvěma způsoby.

- 1) Nejprve odhadneme vhodným způsobem trend, poté data od trendu očistíme a na zbylou část dat aplikujeme regresní model pro sezónnost. Nebo,
- 2) chceme-li modelovat pomocí lineární regrese také trendovou složku, je vhodnější použít model lineární regrese současně pro trend i sezónnost. Tomuto přístupu se budu věnovat v následující části.

Mějme tedy model ve tvaru

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_k t^k + \varphi_2 x_{t2} + \varphi_3 x_{t3} + \dots + \varphi_L x_{tL} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

kde k udává stupeň polynomu, jímž modelujeme trend, L udává počet sezón obsažených v časové řadě během jednoho roku, r udává počet celých let, během nichž časovou řadu sledujeme, a regresory (tzv. „kvalitativní“ nebo „umělé“ proměnné) x_{ti} , $i = 1, \dots, L$, $t = 1, \dots, n$, $n = r \cdot L$, jsou definovány:

$$\begin{aligned} x_{ti} &= 1 \quad \text{jestliže v čase } t \text{ bylo pozorování uskutečněné v } i\text{-té sezóně,} \\ &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

V modelu je celkem $p = k + L$ parametrů, neboť odhadujeme $k + 1$ parametrů pro trend a $L - 1$ parametrů pro sezónnost.

Lineární regresní model je tedy tvaru (2.2) s vektorem parametrů $\theta = (\beta, \varphi)'$, kde $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_k)'$, $\varphi = (\varphi_2, \dots, \varphi_L)'$, a s maticí plánu X tvaru

⁵upraveno podle [9], str. 83-86, a [12], str. 98-99

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^k & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 4^2 & \dots & 4^k & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & L & L^2 & \dots & L^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 1 & (L+1) & (L+1)^2 & \dots & (L+1)^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (L+2) & (L+2)^2 & \dots & (L+2)^k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (L+3) & (L+3)^2 & \dots & (L+3)^k & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (L+4) & (L+4)^2 & \dots & (L+4)^k & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (2L) & (2L)^2 & \dots & (2L)^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & [(r-1)L+1] & [(r-1)L+1]^2 & \dots & [(r-1)L+1]^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & [(r-1)L+2] & [(r-1)L+2]^2 & \dots & [(r-1)L+2]^k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & [(r-1)L+3] & [(r-1)L+3]^2 & \dots & [(r-1)L+3]^k & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & [(r-1)L+4] & [(r-1)L+4]^2 & \dots & [(r-1)L+4]^k & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (rL) & (rL)^2 & \dots & (rL)^k & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

Všimněme si, že v modelu ani v regresní matici není obsažen parametr pro první sezónu φ_1 . Je to z toho důvodu, že pokud by byl tento parametr v modelu (a příslušný vektor regresorů v matici $\mathbb{X}$) obsažen, pak by matice $\mathbb{X}$ měla lineárně závislé sloupce a neměla by plnou hodnost.

Odhady parametrů modelu (4.1) spočítáme metodou nejmenších čtverců ze vztahu (2.4), výpočet vyrovnaných hodnot pak lze provést dvojím způsobem:

- 1) Vyrovnané hodnoty získáme z (2.5) a bodovou předpověď určíme podle (2.6), kde $\mathbf{x}'_T = (1, T, \dots, T^k, x_{T2}, x_{T3}, \dots, x_{TL})$.

Případne-li na čas T 1. sezóna, potom klademe $\mathbf{x}'_T = (1, T, \dots, T^k, 0, 0, \dots, 0)$, pokud na čas T připadne 2. sezóna, pak $\mathbf{x}'_T = (1, T, \dots, T^k, 1, 0, \dots, 0)$ a tak dále, až po L -tou sezónu v čase T bude $\mathbf{x}'_T = (1, T, \dots, T^k, 0, 0, \dots, 1)$.

- 2) Druhou možností je přejít od odhadů sezónních parametrů k sezónním faktorům. Aby byl dekompoziční rozklad na jednotlivé sezóny jednoznačný, požaduje se většinou, aby se vliv sezónních faktorů v rámci každého roku vykompenzoval (součet sezónních faktorů je roven nule). Při výpočtu vyrovnaných hodnot pak postupujeme následovně.

Spočteme průměr odhadů parametrů $\bar{\varphi} = \frac{\hat{\varphi}_2 + \hat{\varphi}_3 + \dots + \hat{\varphi}_L}{L}$ a od odhadů $\hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_L$ přejdeme k sezónním faktorům

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 &= -\bar{\varphi}, \\ \hat{S}_2 &= \hat{\varphi}_2 - \bar{\varphi}, \\ &\dots \\ \hat{S}_L &= \hat{\varphi}_L - \bar{\varphi},\end{aligned}\tag{4.2}$$

s tím, že ještě musíme upravit nový absolutní člen

$$\widehat{\hat{\beta}}_0 = \hat{\beta}_0 + \bar{\varphi}.$$

Vyrovnané hodnoty potom určíme jako

$$\hat{y}_{t,j} = \widehat{\hat{\beta}}_0 + \hat{\beta}_1 t + \dots + \hat{\beta}_k t^k + \hat{S}_j,\tag{4.3}$$

kde $t = 1, \dots, n$ je čas běžící po krocích a $j = 1, \dots, L$ je index příslušné sezóny, odpovídající danému času t , a obdobně bodovou předpověď

$$\hat{y}_{T,j}^P = \widehat{\hat{\beta}}_0 + \hat{\beta}_1 T + \dots + \hat{\beta}_k T^k + \hat{S}_j.\tag{4.4}$$

Intervalovou předpověď potom pro oba předchozí způsoby výpočtu spočteme dle vztahu (2.7).

O tom, že způsob výpočtu vyrovnaných, resp. predikovaných hodnot je stejný pro způsob výpočtu 1) i 2) se přesvědčíme v praktické části této práce.

4.2 Model skrytých period

Model skrytých period spadá do oblasti spektrální analýzy, kdy jde o modelování periodické složky časové řady ve tvaru

$$y_t = \mu + \sum_{j \in J} (\gamma_j \cos(\omega_j t) + \delta_j \sin(\omega_j t)) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

kde $\mu, \gamma_j, \delta_j, j \in J$, jsou parametry modelu a $J = \{j_1, j_2, \dots, j_q\}$ je množinou indexů q významných period. Paramter μ v modelu značí konstantní trend časové řady. U časové řady, která nekolísá kolem konstantní úrovně, je nutné při analýze periodické složky řadu nejprve očistit, $y_t^{o(T)} = y_t - \hat{T}_t$, a zkoumat odchylky od trendu $y_t^{o(T)}$. Modifikovaný model skrytých period pak vypadá následovně

$$y_t^{o(T)} = \sum_{j \in J} (\gamma_j \cos(\omega_j t) + \delta_j \sin(\omega_j t)) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Jak vyplývá z (4.5), resp. (4.6), je v modelu zahrnuto q významných frekvencí tvaru $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in J$, kterým odpovídá celkem $p = 2q$ parametrů. Které frekvence jsou v modelu významné a které ne pomůže zjistit analýza periodogramu a Fisherův test periodicity, kterým budou věnovány následující podkapitoly. Frekvence ω_j interpretujeme pro příslušné indexy j tak, že jeden celý cyklus proběhne za $\frac{n}{j}$ časových jednotek, neboli za dobu n proběhne j celých cyklů.

4.2.1 Periodogram

V oblasti spektrální analýzy časových řad slouží periodogram k nalezení významných periodických složek v dané časové řadě. Periodogram $I(\omega)$ časové řady $y_1, \dots, y_n$ se definuje⁶ jako funkce proměnné ω ve tvaru

$$\begin{aligned} I(\omega_j) &= \frac{1}{4\pi} [a^2(\omega_j) + b^2(\omega_j)], \quad \text{kde} \\ a(\omega_j) &= \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^n y_t \cos(\omega_j t), \\ b(\omega_j) &= \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{t=1}^n y_t \sin(\omega_j t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

⁶podle [9], str.206; jinou definici lze najít například v [18], str. 98, nebo [12], str. 111. Definice periodogramu se liší pouze o konstantu, při provádění Fisherova testu se rozdíly odstraní normováním.

Jelikož pomocí periodogramu máme najít natolik významné frekvence, aby mělo smysl zařadit je do modelu (4.6), počítáme hodnoty periodogramu pro všechny $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j = 1, \dots, H$, kde $H = \frac{n}{2}$ pro sudá n a $H = \frac{n-1}{2}$ pro lichá n , přičemž větší hodnota periodogramu svědčí o větší významnosti frekvence.

4.2.2 Fisherův test periodicity

Fisherův test periodicity⁷ umožňuje na základě statistických postupů určit v modelu (4.6) významné periody ω_j . Nulová hypotéza Fisherova testu má tvar $H_0 : y_t^{o(T)} = \varepsilon_t$, tedy testuje se, že řada y_t neobsahuje žádnou periodickou složku. Alternativa k H_0 je ve tvaru modelu (4.6), kde alespoň jedno γ_j , či δ_j je významně nenulové. Fisherův test zkoumá, zdali některé hodnoty periodogramu (tedy frekvence) jsou natolik významné, aby souvisely s výskytem periodické složky v časové řadě. Pokud platí H_0 , pak by žádná z hodnot periodogramu neměla být významně větší než ostatní hodnoty. Postupujeme tak, že nejprve určíme hodnotu testové statistiky

$$W_H = \max_{j=1, \dots, H} Y_j, \quad \text{kde} \quad Y_j = \frac{I(\omega_j)}{\sum_{i=1}^H I(\omega_i)}, \quad j = 1, \dots, H. \quad (4.8)$$

H_0 se potom zamítá, jestliže $W_H > g_F(\alpha)$, kde $g_F(\alpha)$ je kritická hodnota Fisherova testu na zvolené hladině významnosti α . Pokud nemáme k dispozici speciální tabulky pro tento Fisherův test, lze postupovat tak, že spočteme pravděpodobnost $p = P(W > x)$, kde $x = W_H$, podle následujícího vzorce:

$$p = P(W > x) = \sum_{k \in \mathbb{N}: (1-kx > 0)} (-1)^{k-1} \binom{H}{k} (1 - kx)^{H-1}. \quad (4.9)$$

H_0 potom zamítáme, jestliže $p < \alpha$.

Pokud zamítneme H_0 , našli jsme významnou frekvenci $\omega_{j_0}^*$ a můžeme testovat další velké hodnoty periodogramu tak, že hodnotu $I(\omega_{j_0}^*)$ z periodogramu vynecháme, hodnotu H nahradíme hodnotou $H - 1$ a dál postupujeme stejně jako předtím tak dlouho, dokud H_0 nelze na dané hladině významnosti α zamítnout.

⁷[9], str. 222

4.2.3 Vyrovnané hodnoty a předpovědi v modelu

Výsledkem tohoto postupu je q významných period $\omega_j, j \in J, J = \{j_1, j_2, \dots, j_q\}$, které zahrneme do modelu a jejichž parametry γ_j a δ_j , získané metodou nejmenších čtverců⁸, mají tvar

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_j &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \cos(\omega_j t), \quad j \in J, \\ \widehat{\delta}_j &= \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \sin(\omega_j t), \quad j \in J.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Dosazením těchto odhadů do modelu (4.6) dostaneme vyrovnané odhady sezónnosti, které po sečtení s vyrovnanými hodnotami pro trend tvoří vyrovnané hodnoty časové řady. Obdobně dostaneme také bodové předpovědi v modelu.

Druhým způsobem⁹, pokud již známe významné frekvence, jak odhadnout všechny parametry modelu s trendem i sezónností ve tvaru

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_k t^k + \sum_{j \in J} \gamma_j \cos(\omega_j t) + \sum_{j \in J} \delta_j \sin(\omega_j t) + \varepsilon_t \tag{4.11}$$

současně, je použít metodu lineární regrese na model (4.11), kde matice plánu je tvaru

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^k & \cos(\omega_{j_1} t_1) & \dots & \cos(\omega_{j_q} t_1) & \sin(\omega_{j_1} t_1) & \dots & \sin(\omega_{j_q} t_1) \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^k & \cos(\omega_{j_1} t_2) & \dots & \cos(\omega_{j_q} t_2) & \sin(\omega_{j_1} t_2) & \dots & \sin(\omega_{j_q} t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \dots & t_n^k & \cos(\omega_{j_1} t_n) & \dots & \cos(\omega_{j_q} t_n) & \sin(\omega_{j_1} t_n) & \dots & \sin(\omega_{j_q} t_n) \end{pmatrix}.$$

Pak odhad parametrů modelu získáme metodou nejmenších čtverců ze vztahu (2.4), kde $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}, \widehat{\boldsymbol{\delta}})'$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\beta_0, \dots, \beta_k)'$, $\widehat{\boldsymbol{\gamma}} = (\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_q})'$ a $\widehat{\boldsymbol{\delta}} = (\delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_q})'$. Vyrovnané hodnoty vypočteme ze vztahu (2.5), bodovou předpověď z (2.6), kde $\mathbf{x}'_T = (1, T, \dots, T^k, \cos(\omega_{j_1} T), \dots, \cos(\omega_{j_q} T), \sin(\omega_{j_1} T), \dots, \sin(\omega_{j_q} T))$ a intervalovou předpověď ze vztahu (2.7), kde počet paramterů $p = k + 1 + 2q$, kde $k + 1$ parametrů náleží odhadnutému trendu a $2q$ parametrů odhadnutým významným frekvencím.

⁸[9], str. 224

⁹upraveno podle [12], str. 69-72

5 Analýza náhodné složky

Po provedení dekompozice časové řady na jednotlivé složky je často účelné ověřit, zda po vyloučení všech systematických složek z modelu zůstávají v časové řadě pouze náhodné výkyvy ε_t , jejichž vliv se v rámci časové řady vykompenzuje, tj. $E(\varepsilon_t) = 0$, $t = 1, 2, \dots, n$, a o nichž předpokládáme, že mají stejný rozptyl a jsou nekorelované, tedy $\text{var}(\varepsilon_t) = \psi$ a $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$ pro $t = 1, 2, \dots, n$, $t' = 1, 2, \dots, n$, $t \neq t'$. Mají-li chyby v modelu tyto vlastnosti, říkáme také, že tvoří tzv. „bílý šum“ (angl. *white noise*), značíme $\varepsilon_t \sim WN(0, \psi)$.

Máme-li tedy model v aditivním tvaru $y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \dots, n$, pak po odhadu trendu a sezónní složky očistíme řadu tak, abychom získali pouze odhad reziduí $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t$, $t = 1, 2, \dots, n$. Potom testujeme hypotézu

$$H_0 : \varepsilon_t \sim WN(0, \psi). \quad (5.1)$$

Pokud hypotézu nelze zamítnout, pak v modelu zůstala pouze náhodná složka, kterou již neumíme vhodným přístupem popsat. Zamítneme-li však hypotézu H_0 , je zřejmé, že v modelu zůstala po očištění složka systematická, kterou by bylo vhodné identifikovat a odhadnout.

Pro testování hypotézy (5.1) slouží testy¹⁰, které bez odvození uvedu v následující části. Jelikož tyto testy jsou primárně určeny pro testování hypotézy tvaru $H_0 : y_t = \varepsilon_t$, kde ε_t má výše popsané vlastnosti bílého šumu, je nutné si při jejich použití pro test hypotézy (5.1) uvědomit, že testované chyby vznikly jako rezidua po odečtení odhadnutého modelu od časové řady a jsou tedy zatíženy odhady chybami, které neumíme vyčíslit. Testovaná rezidua pak mohou porušovat zejm. předpoklad nekorelovanosti.

¹⁰upraveno podle [9], str. 94-99, [12], str. 103 - 108, [27], str. 77-81

Znaménkový test

Zavedeme náhodné veličiny Z_t , $t = 2, 3, \dots, n$, tak, že

$$Z_t = 1, \quad \text{pokud} \quad \hat{\varepsilon}_t > \hat{\varepsilon}_{t-1}. \quad Z_t = 0 \quad \text{jinak.}$$

Hypotézu H_0 zamítáme, pokud

$$|U| = \left| \frac{\sum_{t=2}^n Z_t - \frac{n-1}{2}}{\sqrt{\frac{n+1}{12}}} \right| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (5.2)$$

kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $1 - \frac{\alpha}{2}$ kvantil rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$.

Test bodů obratu

Zavedeme náhodné veličiny Z_t , $t = 2, 3, \dots, n-1$, tak, že

$$Z_t = 1, \quad \text{pokud} \quad \hat{\varepsilon}_{t+1} < \hat{\varepsilon}_t > \hat{\varepsilon}_{t-1} \text{ nebo } \hat{\varepsilon}_{t+1} > \hat{\varepsilon}_t < \hat{\varepsilon}_{t-1}. \quad Z_t = 0 \quad \text{jinak.}$$

Hypotézu H_0 zamítáme, pokud

$$|U| = \left| \frac{\sum_{t=2}^{n-1} Z_t - \frac{2}{3}(n-2)}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}} \right| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (5.3)$$

kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $1 - \frac{\alpha}{2}$ kvantil rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$.

Test založený na Kendallově koeficientu pořadové korelace τ

Zavedeme náhodné veličiny $Z_{s,t}$, $s = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, n$, tak, že

$$Z_{s,t} = 1, \quad \text{pokud} \quad \hat{\varepsilon}_s < \hat{\varepsilon}_t. \quad Z_{s,t} = 0 \quad \text{jinak.}$$

Označme $\tau = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n Z_{s,t}$ počet dvojic $(\hat{\varepsilon}_s, \hat{\varepsilon}_t)$, kde $\hat{\varepsilon}_s < \hat{\varepsilon}_t$ pro $s < t$, pak hypotézu H_0 zamítáme, pokud

$$|U| = \left| \frac{\frac{4\tau}{n(n-1)} - 1}{\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}} \right| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (5.4)$$

kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $1 - \frac{\alpha}{2}$ kvantil rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$.

Test založený na Spearmanově korelačním koeficientu ρ

Nechť veličiny $R_1, \dots, R_n$ označují pořadí hodnot $\widehat{\varepsilon}_1, \dots, \widehat{\varepsilon}_n$, potom Spearmanův koeficient pořadové korelace definujeme jako

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (i - R_i)^2$$

a hypotézu H_0 zamítáme, pokud

$$|U| = |\sqrt{n-1} \cdot \rho| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (5.5)$$

kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je $1 - \frac{\alpha}{2}$ kvantil rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$.

6 Posouzení vhodnosti modelu

Pro posouzení toho, nakolik model odpovídá skutečným datům, resp. jak přesně předpovídá budoucí hodnoty časové řady, lze použít poměrně mnoho ukazatelů. V této kapitole uvedu jen ty, které budu v praktické části této práce používat.¹¹

Jedním z nejužívanějších ukazatelů je bezrozměrný *index determinace* R^2 daný následujícími dvěma ekvivalentními vztahy

$$R^2 = \frac{S_M}{S_T} = 1 - \frac{S_R}{S_T}, \quad R^2 \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (6.1)$$

Při jeho výpočtu se vychází z toho, že pomocí empirických a vyrovnaných hodnot lze zkonstruovat tři různé součty čtverců odchylek, a sice *celkový součet čtverců* S_T , charakterizující celkovou variabilitu dat

$$S_T = \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2, \quad \text{kde} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t,$$

dále *teoretický součet čtverců* S_M , vyjadřující tu část variability závisle proměnné y , kterou zachycuje regresní funkce,

$$S_M = \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y})^2,$$

a *reziduální součet čtverců* S_R , který charakterizuje tu část variability proměnné y , kterou nelze vysvětlit regresní funkcí použitou v daném modelu,

$$S_R = \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2, \quad \text{resp.} \quad S_R = (\mathbf{y} - \mathbb{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbb{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}).$$

Přitom pro lineární regresní modely platí $S_T = S_M + S_R$.

Z konstrukce R^2 je zřejmé, že čím menší je podíl variability S_R , která není vysvětlená modelem, na celkové variabilitě S_T , tím více se index determinace R^2 blíží hodnotě 1, což značí lepší model.

¹¹upraveno podle [4], str. 27, a [5], str. 17.

Dalším ukazatelem, který budu v této práci používat, je ***průměrná absolutní procentuální chyba MAPE*** (z angl. „mean absolute percentage error“), která vyjadřuje, o kolik procent se průměrně v absolutní hodnotě odchy-
lují vyrovnané hodnoty od hodnot skutečných:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t} \cdot 100. \quad (6.2)$$

Analogický vzorec budu používat pro spočtení chyby předpovědi v procentech:

$$EP = \frac{|y_T - \hat{y}_T^P|}{y_T} \cdot 100. \quad (6.3)$$

7 Měření rizika

V této kapitole se budu věnovat jednomu z přístupů k měření rizika, a sice metodě **Value at Risk** („hodnota v riziku“, „riziková hodnota“), zkráceně **VaR**.¹² Jedná se o metodu, která je často používána nejen bankami, ale i jinými podnikatelskými subjekty k měření tržního rizika (měnového, úrokového, akciového či komoditního).

Princip metody Value at Risk je následující. Uvažujme, že nás zajímá budoucí vývoj ukazatele V , který sledujeme a u nějž umíme (zpravidla z historických dat) určit jeho očekávanou hodnotu μ_V . Nejméně riziková budoucí situace je taková, kdy se hodnota ukazatele V rovná jeho očekávané hodnotě. Z praxe však víme, že existuje možnost, že se hodnota ukazatele V od námi očekávané hodnoty odchýlí. Jelikož se metoda VaR nejčastěji používá pro měření rizika vyplývajícího z investování do různých druhů aktiv, snažíme se vyčíslit ztrátu, ke které může dojít v důsledku poklesu ceny aktiva, a proti tomuto pohybu se potom vhodným způsobem snažíme své investice zajistit.

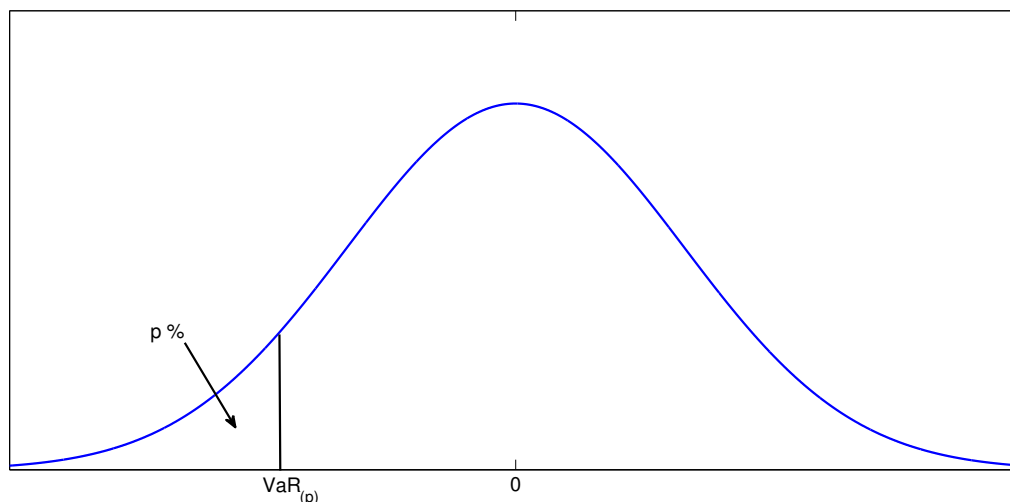
Proto v praxi hodnota ukazatele **VaR** nejčastěji udává nejvyšší očekávanou ztrátu (kterou určíme jako rozdíl skutečné hodnoty ukazatele V oproti jeho očekávané hodnotě), ke které dojde se stanovenou pravděpodobností během předem určeného období.¹³ Veličina VaR je potom zavedena vztahem

$$P(V - \mu_V \leq VaR) = p. \quad (7.1)$$

Jedná se v podstatě o statistický odhad toho, že v daném časovém horizontu nebude se stanovenou pravděpodobností $1 - p$ překročena výše ztráty VaR, kde pravděpodobnost p volíme malé číslo (nejčastěji 0,05 resp. 0,01). VaR jako jednostranný kvantil rozdělení centrované náhodné veličiny je znázorněn na následujícím obrázku č. 1.

¹²zpracováno podle [3], str. 13-24, [11], str. 52-110, [15], str. 107-112, [19], str. 26-28, [25], str. 152-156, a [28], str. 102-111.

¹³Vyjde-li rozdíl skutečné hodnoty ukazatele oproti jeho očekávané hodnotě kladný, jedná se potom o zisk.



Graf č. 1 Určení hodnoty VaR jako kvantilu

V praxi se nejčastěji jako veličina V uvažuje vhodně zvolená míra výnosu aktiva. Vztah (7.1) potom interpretujeme tak, že s pravděpodobností p bude míra výnosu aktiva nižší než očekávaný výnos o více než VaR, nebo jinými slovy, že s pravděpodobností $1 - p$ ztráta výnosu oproti jeho očekávané hodnotě nepřesáhne hodnotu VaR.

Cílem metody je určit, na základě historických dat a se zvolenou pravděpodobností, ztrátu, vyplývající z tržního vývoje ceny aktiva během doby držby. Přitom předpokládáme, že

- 1) chování vývoje ceny aktiva vyhovuje modelu náhodné procházky a změny ceny lze aproximovat normálním rozdělením,
- 2) změny ceny aktiva v různých časových okamžicích jsou na sobě nezávislé.

Před aplikací metody VaR je potřeba stanovit dva parametry metody: pravděpodobnost p a období, pro něž budeme VaR počítat. Metodu VaR vysvětlím pro případ denního VaR na hladině p ($VaR_p^{(1)}$) a dále uvedu modifikaci na T -denní VaR ($VaR_p^{(T)}$).

Označíme-li P_t , $t = 1, \dots, n$, cenu aktiva v čase t , pak absolutní denní změna ceny aktiva v čase t je

$$R_t = P_t - P_{t-1}, \quad t = 2, \dots, n,$$

a relativní denní změna ceny aktiva, tedy denní míra výnosu z aktiva, v čase t je

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad t = 2, \dots, n, \quad (7.2)$$

míra výnosu v procentech pak $r_t \cdot 100$.

Jelikož cena aktiva i její vývoj v čase podléhá řadě nepostižitelných vlivů, považujeme také míru výnosu r_t za náhodnou veličinu. Dále předpokládejme, že je $r_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Potom definujeme náhodnou veličinu

$$U = \frac{r_t - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Pro kvantily u_p rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$ platí $u_p = -u_{1-p}$, tedy můžeme psát

$$p = P(U \leq u_p) = P\left(\frac{r_t - \mu}{\sigma} \leq u_p\right) = P(r_t - \mu \leq u_p \sigma) = P(r_t - \mu \leq -u_{1-p} \sigma).$$

Z výše uvedeného tedy vyplývá, že

$$p = P(r_t - \mu \leq -u_{1-p} \sigma), \quad (7.3)$$

což v porovnání se vztahem (7.1) znamená, že

$$VaR_p^{(1)} = -u_{1-p} \sigma. \quad (7.4)$$

Z toho vyplývá, že denní výnos se bude lišit od očekávaného výnosu o hodnotu $VaR_p^{(1)}$ nebo o hodnotu větší (VaR je záporné a představuje ztrátu) v $p \cdot 100\%$ případech. Alternativně lze říci, že s pravděpodobností $(1 - p)$ nepřesáhne rozdíl mezi skutečnou mírou výnosu a jeho očekávanou hodnotou veličinu $VaR_p^{(1)}$. Tímto postupem jsme tedy získali dolní mez intervalu spolehlivosti pro denní míru výnosu aktiva. Analogicky by se potom odvodila mez horní.

V praxi se pro **odhad střední hodnoty** používá aritmetický průměr

$$\hat{\mu} = \bar{r} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n r_t, \quad (7.5)$$

pro **odhad rozptylu** $\hat{\sigma}^2$, resp. **směrodatné odchyly** $\hat{\sigma}$ veličiny

$$s_r^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n (r_t - \bar{r})^2, \quad \text{resp.} \quad s_r = \sqrt{s_r^2}. \quad (7.6)$$

Pro úplnost ještě uvádím bodové **odhady šikmosti** $\widehat{SK}_r$, která u normálního rozdělení je rovna nule, a **špičatosti** $\widehat{K}_r$, která je rovna číslu 3.

$$\widehat{SK}_r = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \frac{(r_t - \bar{r})^3}{s_r^3}, \quad \widehat{K}_r = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \frac{(r_t - \bar{r})^4}{s_r^4}. \quad (7.7)$$

Výše uvedené předpoklady pro použití metody VaR bohužel v praxi často nejsou zcela splněny (zejm. předpoklad normality), potom záleží na účelu analýzy, zda se spokojíme s tím, že data mají pouze přibližně normální rozdělení a postupujeme dále podle metody VaR, nebo zkonstruujeme přesnější, ovšem často také značně složitější model a teprve na tento aplikujeme metodu VaR.¹⁴

Popsaný způsob použití metody VaR odpovídal situaci, kdy měříme denní změnu (výnos) daného aktiva (viz definice (7.2) relativní změny ceny aktiva). V praxi se však často stává, že chceme spočítat **vícedenní změnu aktiva**. Za splnění výše uvedeného předpokladu nezávislosti výnosů platí, že odhad směrodatné odchyly na čas $t + T$ se rovná $\sqrt{T}$ -násobku směrodatné odchyly na čas $t + 1$. Potom

$$VaR_p^{(T)} = VaR_p^{(1)} \sqrt{T}. \quad (7.8)$$

¹⁴blíže viz [3], str. 11-24

Máme-li vypočtenu výše uvedeným způsobem hodnotu VaR pro míru výnosu, tedy ztrátu výnosu na investovanou peněžní jednotku, snadno spočteme také absolutní částku, kterou ztratíme v důsledku nepříznivého vývoje aktiva. Máme-li tedy v daném aktivu investován objem peněžních prostředků W a máme-li určenu hodnotu VaR pro míru výnosu podle vztahu (7.4), resp. (7.8), pak absolutní ztráta v peněžních jednotkách je za dané období rovna $W \cdot VaR$.

Metoda VaR je však použitelná nejen pro investice do jednoho aktiva, ale lze ji snadno aplikovat též na investiční portfolio složené z několika různých aktiv. Uvažujeme-li n aktiv, jejichž VaR pro míry výnosu označíme $VaR^1, VaR^2, \dots, VaR^n$,¹⁵ která máme sdružena do portfolio (pro jednoduchost předpokládejme, že aktiva jsou v portfolio zastoupena stejným dílem), pak **VaR portfolio aktiv** VaR^P určíme

$$VaR^P = \sqrt{VaR' \cdot R \cdot VaR}, \quad (7.9)$$

kde $VaR = (VaR^1, VaR^2, \dots, VaR^n)'$ je sloupcový vektor VaR pro výnos jednotlivých aktiv a R je matice korelačních koeficientů výnosů jednotlivých aktiv.

¹⁵Označení VaR^n znamená hodnotu příslušného VaR n -tého aktiva, nikoliv n -tou mocninu hodnoty VaR.

PRAKTICKÁ ČÁST

8 Analýza časové řady „*Pokladna*“

8.1 Popis dat

Časová řada „*Pokladna*“ je časovou řadou měsíčních dat vyjadřujících „*po-kladní hotovost, tj. hodnotu bankovek a mincí v tuzemské měně v držení banky*“.¹⁶ Zdrojem těchto dat je veřejně dostupná¹⁷ databáze časových řad *ARAD*, kterou sestavuje Česká národní banka. Podkladem pro zpracování dat je účetní výkaz „*Měsíční bilance aktiv a pasiv Bil (ČNB 1 -12)*“ sestavený a předkládaný obchodními bankami České národní bance k poslednímu dni v měsíci. Jedná se tedy o agregovanou veličinu za všechny obchodní banky, které podléhají dohledu České národní banky.¹⁸ Údaje v časové řadě jsou v milionech korun českých.

8.2 Ekonomická zdůvodnitelnost analýzy časové řady

Ačkoliv v dnešní době probíhá stále větší množství peněžních operací v bezhotovostní formě (platby debetními resp. kreditními kartami přes platební terminál obchodníka, bezhotovostní převody mezi účty), musí banka držet ve svých pokladnách, trezorech a bankomatech určité množství hotovostních prostředků (bankovek a mincí). Nejedná se jen o požadavek uspokojení klientů, kteří si přijdou do banky (resp. bankomatu) vybrat peníze ze svého účtu, ale banka musí také dodržovat *pravidla řízení likvidity*, která jsou součástí řízení rizik banky.

„***Rizikem likvidity*** se rozumí riziko, že banka ztratí schopnost dostát svým finančním závazkům v době, kdy budou splatnými, nebo nebude schopna financovat svá aktiva.“¹⁹ Pokud banka nemá dostatečnou hotovost, nebo krátkodobá tržní aktiva s vysokým stupněm likvidity, která lze na hotovost rychle převést,

¹⁶Metodický list, dostupný z [29], str. 1

¹⁷dostupné z [30]

¹⁸těchto subjektů je k 1.10.2010 celkem 41

¹⁹Opatření ČNB č. 2 o standardech řízení likvidity bank, dostupné z [31], str. 3

nemůže ihned uspokojit své klienty požadující vyplacení vkladů. Pravidla řízení likvidity upravuje Česká národní banka vydáním příslušného opatření²⁰, jedná se ovšem jen o minimální požadavky, které jsou dále upraveny a rozšířeny vnitřními směrnici konkrétních bank, jež se týkají oblasti řízení bankovních rizik.

Jelikož problematika řízení likvidity banky je značně rozsáhlá, omezím se pro účely této práce pouze na faktory související přímo s řízením hotovosti.

Pokladní hotovost, kromě toho, že pokrývá normální denní potřebu peněz v hotovosti, je nejlikvidnějším aktivem, které má banka k dispozici, a tvoří tak část primárních rezerv pro případ okamžité úhrady závazků banky. Při řízení pokladní hotovosti je dobré mít na paměti, že tyto prostředky nepřinášejí bance žádný výnos, naopak generují náklady - na zajištění bezpečnosti, kontrolu, prevenci „praní špinavých peněz“, či ztrátu úroku z alternativního použití těchto prostředků. Udržování velkého množství hotovosti je tak sice v souladu s dodržováním pravidel likvidity, ovšem v přímém rozporu s cílem rentability banky, která je podnikatelským subjektem, založeným za účelem dosahování zisku.

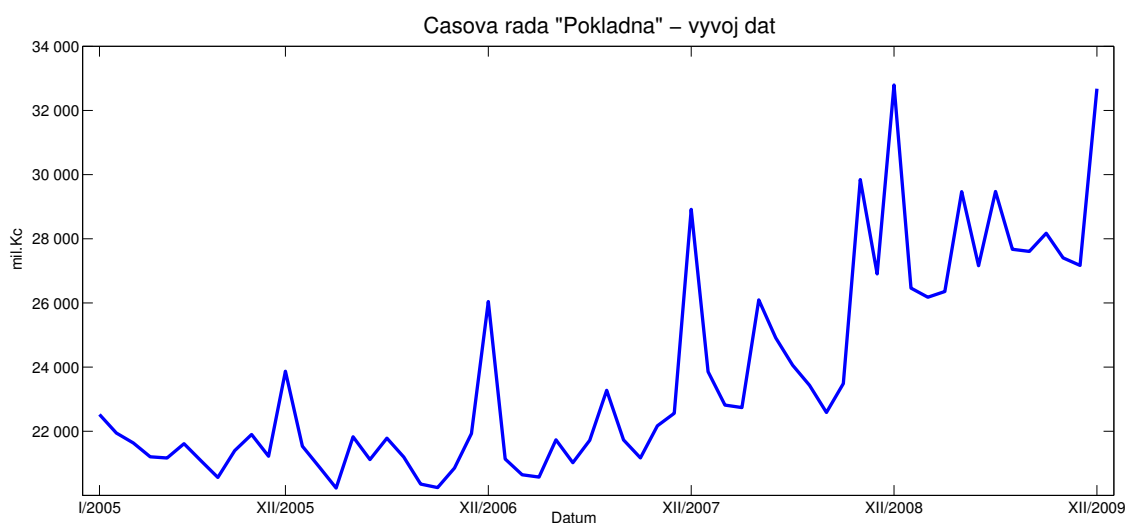
Banka tedy u pokladní hotovosti řeší při řízení krátkodobé (denní) likvidity zajištění dostatečného objemu hotovosti pro běžný provoz poboček a bankomatů, ze střednědobého a dlouhodobého hlediska je pak potřeba předvídat potřebu hotovosti jako jedné ze složek likvidních aktiv, které pokryjí potřebu splacení budoucích závazků (výběr vkladů se splatností, požadavky úvěrů apod.). Při predikci potřeby pokladní hotovosti vychází bankovní analytici z toho, že na pokladnách a v trezorech udržují takové množství peněžních prostředků, které pokryje očekávané požadavky. Bude-li banka udržovat objem hotovosti příliš velký, přichází o úrok, který by získala alternativním využitím těchto prostředků, naopak při příliš malém objemu podstupuje riziko neuspokojení požadavků klienta, což s sebou nese ztrátu její dobré pověsti. Proto je nutné vývoj hotovosti sledovat, předvídat a řídit.²¹

²⁰dostupné z [31]

²¹zpracováno dle [17], str. 59; [24], str.34-35, 176-177; [28], str. 133-136

8.3 Tvorba modelu

Pro účely této práce budu pracovat při tvorbě jednotlivých modelů s měsíčními daty časové řady „Pokladna“ za období leden 2005 - prosinec 2009, predikci provedu pro období leden 2010 - prosinec 2010, abych mohla následně předpovězené hodnoty porovnat se skutečností a určit přesnost predikce a tím kvalitu modelu.²² Jak jsem uvedla v podkapitole 8.1 „Popis dat“, jedná se o data agregovaná. Jelikož lze předpokládat, že chování klientů jedné banky se v oblasti hotovostního platebního styku nijak zásadně neliší od chování klientů banky jiné, můžeme problematiku řízení hotovostního toku vztáhnout k celému bankovnímu sektoru. Pro případ jedné konkrétní banky by byla analýza podobná, zřejmě jen v menších objemech. Nyní již přistoupím k vlastní analýze dat. Nejprve všechna data vykreslím do grafu č. 2 pro představu o jejich vývoji.



Graf č. 2 Časová řada „Pokladna“ - vývoj dat, leden 2005 - prosinec 2009

Z průběhu dat je vidět, že kromě trendové složky se zjištěné hodnoty vyznačují i určitou periodicitou, což znamená, že vedle trendu bude nutné namodelovat i sezónnost, přičemž předpokládám, že časovou řadu lze rozložit dekompozicí na

²²Data jsou obsažena v souboru „Data.xls“, list „Pokladna“, který je součástí přílohy této práce na přiloženém CD.

složku trendovou a sezónní v aditivním tvaru, tedy $y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$. Aditivní rozklad časové řady jsem zvolila z toho důvodu, že sezónní výkyvy v rámci roku jsou v čase přibližně neměnné, pro multiplikativní rozklad by svědčil růst amplitudy sezónních výkyvů úměrný rostoucímu trendu.

8.3.1 Model trendu

Nejprve odhadnu v časové řadě trend metodou lineární regrese. Odhad **lineárního trendu** je tvaru $\hat{T}_t^{(1)} = 19374,15 + 142,95t$, parametr $\hat{\beta}_1 = 142,95$ byl testem (2.10) na hladině $\alpha = 5\%$ prokázán jako významný, neboť testová statistika $T = 9,159$ překročila kritickou hodnotu $t_{58}(0,05) \doteq 2,002$.²³ Index determinace pro tento model je $R^2 = 0,5912$ a $MAPE = 6,69\%$, což nejsou příliš uspokojivá čísla i přes přítomnost sezónních výkyvů.

Proto na data zkusím aplikovat **trend kvadratický**, který má po odhadu parametrů tvar $\hat{T}_t^{(2)} = 21925,89 - 103,98t + 4,05t^2$, kde parametr $\hat{\beta}_2 = 4,05$ je opět po provedení testu (2.10) považován za významný, neboť $T = 4,68 > 2,002 \doteq t_{57}(0,05)$. Pro tento model trendu je potom $R^2 = 0,7049$ a $MAPE = 4,79\%$, což je lepší výsledek než u trendu lineárního.

Dále zkusím trend namodelovat **kubickou křivkou**. Pro odhadnutý trend tvaru $\hat{T}_t^{(3)} = 22555,51 - 222,96t + 8,88t^2 - 0,05t^3$ je $R^2 = 0,7094$ a $MAPE = 4,77\%$, ale test (2.10) nezamítl nulovou hypotézu, tedy parametr $\hat{\beta}_3 = -0,05$ se na hladině $\alpha = 5\%$ významně neliší od nuly, neboť $T = 0,92 < 2,002 \doteq t_{56}(0,05)$. V tuto chvíli se může model trendu ve tvaru kubické křivky jevit, vzhledem k nevýznamnosti parametru $\hat{\beta}_3$ zjištěné testem, jako neopodstatněný. Zde je však potřeba si uvědomit, že v datech je kromě trendové složky obsažena také složka sezónní, která může výpočet modelu trendu zkreslovat. Proto nyní nebudu kubický model trendu zavrňovat, vezmu jej v úvahu a budu s ním dále pracovat s tím, že po získání více informací o datech a vytvoření sezónního modelu se rozhodnu, je-li použití tohoto modelu trendu vhodné, či nikoliv.

²³Kritická hodnota získaná lineární interpolací hodnot $t_{50}(0,05) = 2,009$ a $t_{60}(0,05) = 2,000$. Kritické hodnoty $t_f(\alpha)$ viz [1], str. 259

Podíváme-li se znovu na data v grafu č. 2, pak se jeví, že zhruba do poloviny roku 2007 byl trend přibližně konstantní a začal růst až od poloviny roku 2007, přičemž tento růst se jeví jako lineární. Proto nyní zkusím časovou řadu (celkem 60 pozorování) rozdělit na dvě poloviny a zkonstruovat pro ně model **složeného trendu** - na prvních třicet dat použiji trend konstantní, na druhých třicet dat trend lineární. Pro první část dat je konstantní trend tvaru $\widehat{T1}_t = \widehat{\beta}_0 = 21496,83$, pro druhou polovinu dat je lineární trend $\widehat{T2}_t = 14417,97 + 253,92t$, $t = 31, 32, \dots, 60$. Pro takto zkonstruovaný model složeného trendu, který označím $\widehat{T}_t^{(0,1)}$, je $R^2 = 0,7159$ a $MAPE = 4,66\%$.

Posledním přístupem, který na datech vyzkouším, je adaptivní modelování trendu metodou **exponenciálního vyrovnávání**, přičemž zkusím **dvojitě exponenciální vyrovnávání**, kde je trend modelován lokálním lineárním trendem, model označím $\widehat{T}_t^{(E2)}$, a **trojitě exponenciální vyrovnávání**, kde se na data používá lokální kvadratický trend, tento model označím $\widehat{T}_t^{(E3)}$. Výpočet modelu trendu metodou exponenciálního vyrovnávání provedu v souladu s postupem popsáním v teoretické části této práce, včetně hledání optimální vyhlazovací konstanty α metodou simulací, kde volím startovací hodnotu $\alpha_0 = 0,01$ a krok $\kappa = 0,01$. Po provedení příslušných výpočtů vychází pro metodu dvojitě exponenciálního vyrovnávání optimální vyhlazovací konstanta $\alpha_{opt}^{(E2)} = 0,93$, pro metodu trojitě exponenciálního vyrovnávání pak $\alpha_{opt}^{(E3)} = 0,96$. Vysoká hodnota vyhlazovací konstanty značí především to, že v porovnání s ostatními je nejnovějšímu pozorování dána velmi vysoká váha.

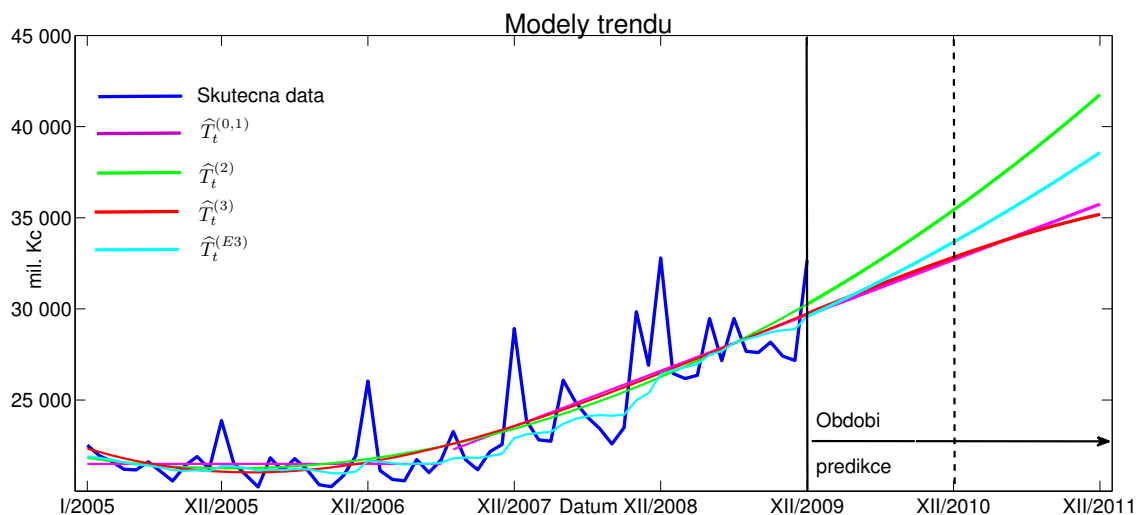
Pro lepší přehlednost uvádím indexy determinace R^2 a průměrné absolutní procentní chyby $MAPE$ všech použitých modelů trendů²⁴ do následující tabulky č. 1. Posoudíme-li pouze číselné hodnoty ukazatelů, můžeme vyloučit použití lineárního trendu aplikovaného na všechna data a metody dvojitě exponenciálního vyrovnávání, které se v porovnání s ukazateli ostatních trendů nejeví jako vhodné. Pro ostatní modely je průměrná absolutní procentní chyba MAPE nižší než 5%, proto budu jejich použití dále zvažovat.

²⁴Výpočty v SW MATLAB jsou součástí souboru „*Pokladna.Trend.m*“.

Model	R^2	MAPE
$\hat{T}_t^{(1)}$	0,5912	6,69%
$\hat{T}_t^{(2)}$	0,7049	4,79%
$\hat{T}_t^{(3)}$	0,7094	4,77%
$\hat{T}_t^{(0,1)}$	0,7159	4,66%
$\hat{T}_t^{(E2)}$	0,7052	5,68%
$\hat{T}_t^{(E3)}$	0,7226	4,52%

Tabulka č. 1 Časová řada „Pokladna“ - výsledky modelů trendu

Kromě posouzení toho, jak dobře daný model popisuje data (ukazatele R^2 a MAPE), se musíme při modelování trendu též zamyslet nad tím, jak se mohou data vyvíjet v budoucnu. Proto vytvořím pro modely $\hat{T}_t^{(2)}$, $\hat{T}_t^{(3)}$, $\hat{T}_t^{(0,1)}$ a $\hat{T}_t^{(E3)}$ **předpovědi trendů** pro dva roky dopředu a do grafu č. 3 zakreslím jak dosavadní průběh dat, tak také odhadnuté trendy a jejich předpovědi.



Graf č. 3 Časová řada „Pokladna“ - modely trendů

Vizuální analýzou grafu je vidět, že nejlépe se datům přizpůsobuje trend $\hat{T}_t^{(E3)}$, získaný metodou **trojitého exponenciálního vyrovňování**, což je zřejmé, neboť se jedná o adaptivní metodu modelování trendu. Tento závěr potvrzuje i nejvyšší index determinace z vytvořených modelů (viz tabulka č. 1). Dále je z

grafu vidět, že tímto modelem predikovaný budoucí vývoj má rostoucí trend, který se svým chováním blíží kvadratickému trendu. To je odůvodnitelné tím, že metoda trojitého exponenciálního vyrovnávání vyhlazuje data právě lokálním kvadratickým trendem. Nevýhodou tohoto přístupu je, že pro tvorbu modelu ani předpovědi nelze použít lineární regresní model. Dále je třeba vzít v úvahu, že ačkoliv růst množství hotovostních prostředků bank lze uvažovat jako jednu z možných alternativ budoucího vývoje, nelze z hlediska ekonomického takovýto vývoj považovat za dlouhodobý, naopak spíše lze očekávat stagnaci nebo postupný pokles potřeby peněz v hotovosti, v souvislosti s neustále se rozvíjejícím a zdokonalujícím bezhotovostním platebním stykem.

Proto se nyní zaměříme na další dva modely trendu, a sice **trend kubický** a **trend složený** z konstantního a lineárního. U nich si v grafu č. 3 povšimněme, že zejména pro období prvního roku (2010) je u obou trendů $\hat{T}_t^{(3)}$ a $\hat{T}_t^{(0,1)}$ vývoj téměř totožný. V dalším roce však lineární trend, na rozdíl od kubického, zachovává pro budoucnost stálý lineární růst. V tomto ohledu lze považovat model trendu $\hat{T}_t^{(3)}$ za variantu stabilnějšího vývoje, kdy se množství hotovostních peněz udržuje na určité konstantní úrovni, roste jen mírně nebo dokonce může i postupně klesat. Nevýhodou modelu kubického trendu je větší počet parametrů oproti ostatním modelům (včetně trendu složeného) a fakt, že test (2.10) neprokázal významnost parametru $\hat{\beta}_3$, což ovšem mohlo být způsobeno přítomností sezónní složky v datech. Naopak trend složený má všechny tři parametry významné, ovšem nevýhodou je stálý lineární růst v budoucnu. Výhodou obou modelů oproti metodě exponenciálního vyrovnávání je potom možnost použití regresního přístupu.

Proto se s ohledem na výše provedenou analýzu budu v další části věnovat analýze trendové a sezónní složky, s cílem vytvořit model, který by nejlépe vyhovoval skutečnosti, přičemž budu pracovat s modely trendu $\hat{T}_t^{(E3)}$ (model, založený na adaptivním přístupu a předpokládající růst hotovostních peněz) a model trendu $\hat{T}_t^{(3)}$, u nějž po sestavení výsledného modelu otestuji významnost parametru β_3 . Vyjde-li tento parametr jako nevýznamný, nahradím trendovou funkci odhadem $\hat{T}_t^{(0,1)}$.

8.3.2 Model 1: oddělené modelování trendu a sezónní složky (MSP)

Při konstrukci tohoto modelu budu postupovat následovně.

- 1) Nejprve provedu **odhad trendu** $\hat{T}_t$ vhodným způsobem a časovou řadu **od trendu očistím**, $y_t^{o(T)} = y_t - \hat{T}_t = S_t + \varepsilon_t$.
- 2) Na tato očištěná data $y_t^{o(T)}$ aplikuji **model skrytých period (MSP)** ve tvaru (4.6) pro odhad složky sezónní - spočtu **hodnoty periodogramu** podle (4.7), Fisherovým testem periodicity určím **významné frekvence** modelu, pro ně odhadnu příslušné parametry, čímž dostanu **odhad sezónní složky** $\hat{S}_t$.
- 3) V této fázi mohu výpočet ukončit a spočíst **vyrovnané hodnoty** $\hat{y}_t = \hat{T}_t + \hat{S}_t$, nebo mohu pokračovat druhou „iterací“ - původní data očistit od odhadnuté sezónní složky $y_t^{o(S)} = y_t - \hat{S}_t$, pro takto očištěná data spočíst odhad trendu $\hat{\hat{T}}_t$, a dále postupovat stejně jako v bodě 1) a dál.

Model 1a: $\hat{T}_t^{(E3)} + \text{MSP}$

V tomto modelu budu trend T_t modelovat metodou trojitého exponenciálního vyrovnavání $\hat{T}_t^{(E3)}$ s optimální vyhlazovací konstantou $\alpha_{opt} = 0,96$. Po provedení příslušných výpočtů podle bodů 1) a 2) jsem došla k následujícím výsledkům. Největších hodnot nabývá periodogram (viz graf č. 4) pro frekvence $\omega_{10}, \omega_{30}, \omega_5, \omega_{20}$, které odpovídají po řadě periodám 6, 2, 12 a 3 měsíců.

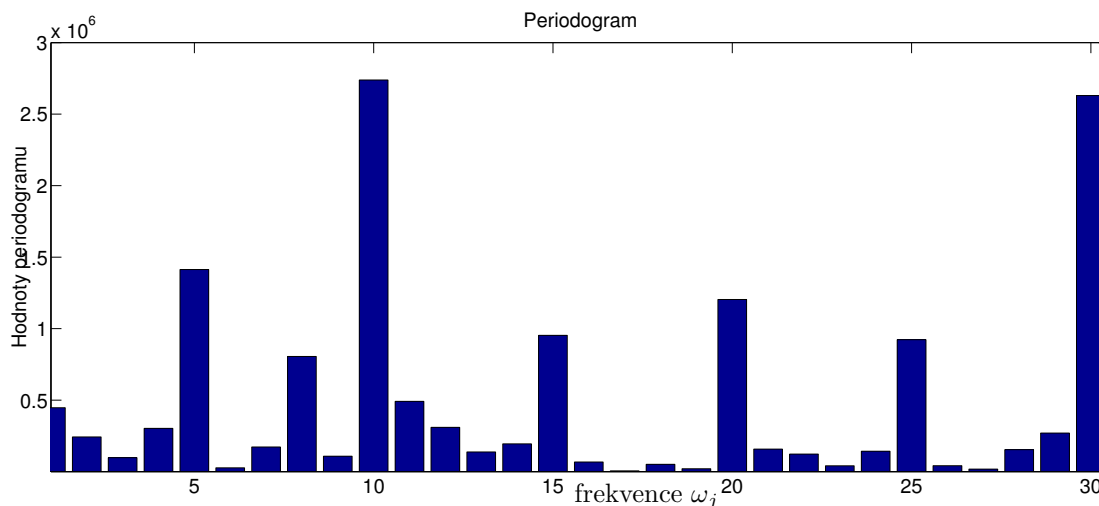
Provedením Fisherova testu²⁵ významnosti period vyšla frekvence ω_{10} , odpovídající periodě 6 měsíců, která by měla být nejvýznamnější, jako nevýznamná ($p = 0,0624 > 0,05 = \alpha$), i když překročení hladiny $\alpha = 0,05$ není v tomto případě nijak velké. Toto však může být způsobeno složenou periodicitou, kdy se v časově řadě vyskytuje více významných frekvencí, neboť je známo, že Fisherův

²⁵pravděpodobnost p , která se porovnává s hladinou významnosti $\alpha = 0,05$ jsem počítala dle vzorce (4.9)

test není při složené periodicitě příliš silný. Proto je vhodné brát v úvahu i jiné faktory rozhodování o významných frekvencích.

Pokud bychom tedy frekvenci ω_{10} , odpovídající periodě 6 měsíců, přijali vzhledem k její velikosti jako významnou, potom další významná frekvence je ω_{30} , odpovídající periodě 2 měsíce, pro kterou $p = 0,0209 < 0,05 = \alpha$. Pro frekvence ω_5 (perioda 12 měsíců) a ω_{20} (perioda 3 měsíce) vyšla $p \doteq 0,25$, tudíž podle testu by měly být tyto frekvence nevýznamné.

Z vývoje dat lze však očekávat, vzhledem k výrazným sezónním výkyvům v prosinci každého roku, že perioda 12-ti měsíců, a jí příslušná frekvence ω_5 , by měla být též významná, což se ale testem významnosti period nepotvrdilo. Navině opět může být složená periodicitu, kdy dva cykly půlroční periody překrývají periodu roční.



Graf č. 4 Časová řada „Pokladna“ - periodogram Modelu 1a

Vzhledem k výše uvedeným okolnostem sestavím dva modely sezónnosti. Základem obou bude trend $\hat{T}_t^{(E3)}$ a modifikovat budu pouze sezónní složku dle počtu zahrnutých frekvencí. Do prvního modelu, který označím „**Model 1a1**“²⁶, zahrnu frekvence ω_{10} a ω_{30} (periody 6 měsíců a 2 měsíce), do druhého - „**Model 1a2**“²⁷, zahrnu navíc též roční periodu, tedy frekvence ω_{10} , ω_{30} i ω_5 , v každém z mo-

²⁶Výpočty k tomuto modelu jsou obsaženy v souboru „Pokladna_Model_1a1.m“.

²⁷Výpočty k tomuto modelu jsou obsaženy v souboru „Pokladna_Model_1a2.m“.

delů spočtu odhady parametrů, čímž získám odhad sezónnosti $\widehat{S}_t$, který následně přičtu k již odhadnutému trendu, a zjistím, který z modelů je vhodnější.

Pro „Model 1a1“ je $R^2 = 0,7779$ a $MAPE = 5,04\%$, pro „Model 1a2“ je $R^2 = 0,8065$ a $MAPE = 4,73\%$. Porovnáním ukazatelů je zřejmé, že „Model 1a2“ se třemi zahrnutými periodami je přesnější, což je samozřejmě způsobeno větším počtem frekvencí (a parametrů) v modelu. Z ekonomického hlediska je však rozumné zejména periody 6 a 12 měsíců do modelu zahrnout, neboť sezónní výkyvy v datech jsou v polovině a na konci roku nejvýraznější.

Proto dám nyní přednost „**Modelu 1a2**“ a zkusím jej ještě vylepšit tak, že vypočítám iteraci podle postupu uvedeného v bodě 3) v úvodu kapitoly 8.3.2, přičemž trend opět modeluji metodou trojitého exponenciálního vyrovnávání. Nyní projdou testem významnosti period na hladině $\alpha = 5\%$ frekvence ω_{30} ($p = 0,0166$), ω_{10} ($p = 0,0044$). Pokud bychom dbali přesně pravidel testu, pak frekvence ω_5 je již nevýznamná ($p = 0,0540$), nicméně překročení hodnoty α je nepatrné, proto ji do modelu též zahrnu.

Po výpočtu vyrovnaných hodnot $\widehat{y}_t = \widehat{T}_t^{(E3)} + \widehat{S}_t$ je pro tento model $R^2 = 0,8250$ a $MAPE = 4,70\%$. Porovnáváním s předchozím výsledkem, kdy byl trend i sezónnost odhadnut pouze jednou, není rozdíl zejm. v ukazateli $MAPE$ příliš velký, zvláště když zohledním pracnost takto vytvořeného modelu. Na druhou stranu byla druhá iterace užitečná proto, že provedením druhé iterace při modelování sezónní složky byla testem potvrzena významnost frekvencí ω_{10} a ω_{30} , s přihlédnutím k velmi malému překročení hladiny α také frekvence ω_5 .

Shrnu-li výše uvedené, pak za výsledek výše popsaného postupu považuji „**Model 1a2**“ po první iteraci, který je tvaru (po dosazení za $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$)

$$\begin{aligned} \widehat{y}_t = & \widehat{T}_t^{(E3)} + 768,75 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 974,21 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 1049,53 \cos(\pi t) + \\ & + 33,30 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 444,88 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right), \end{aligned} \quad (8.1)$$

kde v modelu sezónnosti vypadl parametr $\widehat{\delta}_{30}$, který vyšel nulový. Pro takto odhadnutý model je $R^2 = 0,8065$ a $MAPE = 4,73\%$. Tento model ($\widehat{T}_t^{(E3)} + \text{MSP}$ bez iterace) pro další práci označím zkráceně jako „**Model 1**“. Ještě ověřím,

pomocí testů uvedených v kapitole „Analýza náhodné složky“, hypotézu o tom, že rezidua v modelu tvoří „bílý šum“ (hypotéza (5.1)). Testy provedu na hladině $\alpha = 5\%$, tedy testové statistiky U porovnám s kvantilem $u_{0,975} = 1,96$. Výsledky udává následující tabulka č 2.

Test	U	Výsledek
Znaménkový test (5.2)	0,6653	H_0 nelze zamítnout,
Test bodů obratu (5.3)	1,9691	H_0 se zamítá,
Test (Kendall) (5.4)	0,3572	H_0 nelze zamítnout,
Test (Spearman) (5.5)	0,3159	H_0 nelze zamítnout.

Tabulka č. 2 Časová řada „Pokladna“ - testy náhodnosti v Modelu 1

Vzhledem k tomu, že tři z testů hypotézu (5.1) nezamítly a testová statistika pro test bodů obratu překročila kvantil $u_{0,975} = 1,96$ jen nepatrně, lze považovat rezidua v tomto modelu za realizaci „bílého šumu“, a tedy lze říci, že je tento model dobře odhadnutý, neboť po odhadu trendové a sezónní složky v datech zůstaly jen náhodné vlivy.

Model 1b: $\hat{T}_t^{(3)} + \text{MSP}$

Nyní budu opět postupovat podle bodů 1) - 3) popsanych v úvodu této podkapitoly, s tím rozdílem, že trend budu nyní modelovat polynomem třetího stupně $\hat{T}_t^{(3)}$, po první iteraci očistím data od odhadnuté sezónnosti, čímž získám data obsahující pouze trendovou a náhodnou složku, znovu odhadnu trend $\hat{\hat{T}}_t^{(3)}$ a testem ověřím, je-li příslušný parametr β_3 významný.

Po provedení testu významnosti period vyšly jako významné frekvence ω_{10} ($p = 0,048$) pro periodu 6 měsíců, a ω_{30} ($p = 0,015$) pro periodu 2 měsíce. Pro roční periodu vyšla frekvence ω_5 nevýznamná ($p = 0,215$). Opět tedy pro sezónnost vytvořím dva modely - „**Model 1b1**“²⁸, obsahující významné frekvence ω_{10} a ω_{30} , a „**Model 1b2**“²⁹, který bude navíc obsahovat i frekvenci ω_5 .

²⁸Výpočty k tomuto modelu jsou obsaženy v souboru „Pokladna_Model_1b1.m“.

²⁹Výpočty k tomuto modelu jsou obsaženy v souboru „Pokladna_Model_1b2.m“.

Po přičtení odhadu trendové složky k příslušným odhadům sezónnosti je pro „**Model 1b1**“ $R^2 = 0,7732$ a $MAPE = 5,22\%$ a pro „**Model 1b2**“ $R^2 = 0,8054$ a $MAPE = 4,78\%$. Po očištění dat od sezónnosti a znovuořadení trendu $\hat{T}_t^{(3)}$ vyšel v obou modelech parametr β_3 u proměnné t^3 na hladině $\alpha = 5\%$ statisticky nevýznamný. Proto kubický trend $T_t^{(3)}$ nahradím trendem $T_t^{(0,1)}$ a celý postup zopakují.

Model 1c: $\hat{T}_t^{(0,1)} + \text{MSP}$

Pokud modeluji trend jako složený z konstantního pro první polovinu dat a lineárního pro druhou polovinu dat, tedy jako $T_t^{(0,1)}$, vychází opět po provedení testu významnosti period jako významné frekvence ω_{10} ($p = 0,038$) a ω_{30} ($p = 0,012$), frekvence ω_5 vyšla jako nevýznamná ($p = 0,1762$). Opět tedy vytvořím dva modely - „**Model 1c1**“³⁰, kde do modelu sezónnosti zahrnu frekvence ω_{10} a ω_{30} , a model „**Model 1c2**“³¹, kde navíc přidám i frekvenci ω_5 , odpovídající roční periodě. Pro první model je $R^2 = 0,7803$ a $MAPE = 5,06\%$, pro druhý z modelů je $R^2 = 0,8126$ a $MAPE = 4,69\%$.

Předchozí modely byly všechny vytvořeny tak, že jsem modelovala zvlášť složku trendovou a zvlášť složku sezónní. V následující části tento přístup opustím a budu se věnovat **simultánnímu** modelování trendu a sezónnosti.

8.3.3 Model 2: $\hat{T}_t^{(0,1)} \wedge \text{MSP}$

Nyní vyjdu z „**Modelu 1c2**“, kde jsem trend a sezónnost odhadovala zvlášť a obě složky aditivně slučovala, a vytvořím alternativní model stejného typu (tedy trend budu modelovat jako konstantní pro první polovinu dat a lineární pro druhou polovinu dat a do sezónní složky zahrnu frekvence ω_5, ω_{10} a ω_{30} , které odpovídají periodám 12, 6 a 2 měsíce), v němž trendovou i sezónní složku

³⁰Výpočty k tomuto modelu jsou obsaženy v souboru „Pokladna_Model_1c1.m“.

³¹Výpočty k tomuto modelu jsou obsaženy v souboru „Pokladna_Model_1c2.m“.

budu modelovat současně. Vzhledem k tomu, že celý model trendu i sezónnosti je lineární v parametrech, lze použít metodu lineární regrese, konkrétně potom teoretický model (4.11). Tento postup umožní především lépe spočítat bodové a hlavně intervalové odhady. Po provedení všech potřebných výpočtů³² dostávám „**Model 2**“ ve tvaru

$$\begin{aligned}\hat{y}_t = & \hat{T}_t^{(0,1)} + \\ & + 749,89 \cos(\frac{\pi}{6}t) + 1062,52 \cos(\frac{\pi}{3}t) + 271,16 \cos(\pi t) \\ & + 273,42 \sin(\frac{\pi}{6}t) - 391,77 \sin(\frac{\pi}{3}t) - 171,3 \sin(\pi t),\end{aligned}\quad (8.2)$$

kde konstantní trend pro první polovinu dat ($t = 1, 2, \dots, 30$) je tvaru $\hat{T}_t^{(0,1)} = 21485,50$ a pro druhou polovinu dat ($t = 31, 32, \dots, 60$) je lineární trend tvaru $\hat{T}_t^{(0,1)} = 15153,73 + 238,25t$.

Pro takto zkonstruovaný model je $R^2 = 0,8475$ a $MAPE = 3,74\%$. Pro tento model opět provedu testy (5.2)-(5.5), kdy na hladině $\alpha = 5\%$ testuji hypotézu, že rezidua v modelu tvoří bílý šum. Testové statistiky U porovnám s kvantilem $u_{0,975} = 1,96$. Výsledky udává následující tabulka č 3.

Test	U	Výsledek
Znaménkový test (5.2)	0,6653	H_0 nelze zamítnout,
Test bodů obratu (5.3)	0,2073	H_0 nelze zamítnout,
Test (Kendall) (5.4)	0,6505	H_0 nelze zamítnout,
Test (Spearman) (5.5)	0,4525	H_0 nelze zamítnout.

Tabulka č. 3 Časová řada „Pokladna“ - testy náhodnosti v Modelu 2

Všechny testy hypotézu nezamítly, tedy rezidua lze na dané hladině významnosti považovat za realizaci „bílého šumu“ a tedy můžeme říci, že po odhadnutí trendové a sezónní složky zůstaly v časové řadě jen náhodné vlivy, tedy model lze z tohoto hlediska považovat za vhodný.

³²Výpočty k tomuto modelu jsou obsaženy v souboru „Pokladna_Model.2.m“.

8.3.4 Model 3: $\hat{T}_t^{(3)} \wedge \text{UP}$

Dalším modelem, který na těchto datech vyzkouším, bude model vytvořený metodou lineární regrese současně pro kubický trend i sezónnost s využitím tzv. umělých proměnných (UP) - viz teoretický model (4.1). Model trendu v podobě kubické křivky jsem opět zvolila z důvodu, že z ekonomického hlediska není příliš pravděpodobný stálý růst množství hotovostních peněz, proto kubický trend lépe popisuje budoucí vývoj. Nicméně pro úplnost opět otestuji statistickou významnost parametru β_3 .

Tento model je též výpočetně nejméně náročný, neboť stačí zadat vedle vektoru pozorování jen matici plánu $\mathbb{X}$ a odhady parametrů vypočítat metodou nejmenších čtverců. V kapitole o modelování trendu i sezónnosti metodou lineární regrese jsem uvedla, že existují dva způsoby výpočtu vyrovnaných hodnot, resp. předpovědí. Na tomto modelu nyní ukážu, že výsledky obou přístupů se neliší. Nejprve tedy vypočítám vyrovnané hodnoty tak, jak se běžně při použití metody regrese postupuje, tedy ze vztahu (2.5). Vzhledem k velkému množství dat uchovám vyrovnané hodnoty pouze v souboru M-file spolu s ostatními výpočty příslušnými k tomuto modelu ³³, abych je mohla následně porovnat s vyrovnanými hodnotami, vypočtenými druhým způsobem uvedeným v teoretické části práce. Druhý způsob výpočtu vyrovnaných hodnot, resp. předpovědí, je tedy přechod od odhadů parametrů v regresním modelu k sezónním faktorům podle vztahů (4.2) a následně výpočet příslušných odhadů podle (4.3). Zde po provedení příslušných výpočtů dostáváme

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_t &= 233305,36 - 334,55t + 13,27t^2 - 0,10t^3 + \hat{S}_j, \\
 \text{kde } \hat{S}_1 &= -160,06 & \hat{S}_7 &= -407,41 \\
 \hat{S}_2 &= -822,36 & \hat{S}_8 &= -1282,99 \\
 \hat{S}_3 &= -1076,87 & \hat{S}_9 &= -1072,45 \\
 \hat{S}_4 &= +606,64 & \hat{S}_{10} &= +344,92 \\
 \hat{S}_5 &= -468,56 & \hat{S}_{11} &= -261,28 \\
 \hat{S}_6 &= +91,57 & \hat{S}_{12} &= +4508,88.
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

³³Výpočty jsou k tomuto modelu v souboru „Pokladna_Model3.m“

Tento model, dále jen „**Model 3**“, je jednodušší na interpretaci, neboť jasné vidíme, jakou hodnotu mají sezónní faktory, které se přičítají v j -té sezóně k trendu. Oba přístupy výpočtu vyrovnaných hodnot, které jsem uvedla, však dávají shodné vyrovnané hodnoty, a také hodnoty ukazatelů $R^2 = 0,9123$ a $MAPE = 3,05\%$.

Jelikož jsem v tomto případě použila kubický trend, otestuji významnost parametru β_3 u proměnné t^3 . Tedy data očistím od odhadnuté sezónnosti a na očištěná data použiji model kubického trendu. Po výpočtu trendu z očištěných dat od sezónní složky dostáváme stejné hodnoty parametrů trendu jako v modelu (8.3), což je též známkou toho, že trend byl odhadnut správně. Po provedení testu (2.10) významnosti parametru β_3 vychází hodnota testové statistiky $T = 3,26 > 2,004 \doteq t_{56}(0,05)$,³⁴ tedy hypotéza o nulovosti parametru se zamítá a parametr β_3 je statisticky významný, a tedy použití kubické křivky pro modelování trendu je v tomto případě odůvodněné. Opět pro tento model provedu testy chyb na hladině $\alpha = 5\%$, pro kterou je $u_{0,975} = 1,96$. Výsledky udává následující tabulka č. 4.

Test	U	Výsledek
Znaménkový test (5.2)	0,6653	H_0 nelze zamítnout,
Test bodů obratu (5.3)	2,0728	H_0 se zamítá.
Test (Kendall) (5.4)	0,3699	H_0 nelze zamítnout,
Test (Spearman) (5.5)	0,2548	H_0 nelze zamítnout.

Tabulka č. 4 Časová řada „Pokladna“ - testy náhodnosti v Modelu 3

Vzhledem k ukazatelům R^2 a $MAPE$ se zatím ukazuje tento model jako nejvhodnější. Co se týče chyb v modelu, tak tři testy hypotézu o tom, že chyby tvoří „bílý šum“ nezamítly.

³⁴Kritická hodnota $t_{56}(0,05) \doteq 2,004$ získána lineární interpolací hodnot $t_{50}(0,05) = 2,009$ a $t_{60}(0,05) = 2,009$. Kritické hodnoty $t_f(\alpha)$ viz [1], str. 259.

8.3.5 Model 4: $\hat{T}_t^{(0,1)} \wedge \text{UP}$

Jelikož kubický model trendu je složitější co do interpretace parametrů, vytvořím ještě poslední model podle (4.1), v němž oproti „Modelu 3“ budu trend modelovat složeným trendem $T_t^{(0,1)}$. Výhodou modelu se složeným trendem je snadnější interpretace parametrů trendu, naopak nevýhodou tohoto modelu je, že v něm vystupují dva různé parametry, odpovídající absolutnímu členu trendu (jeden pro konstantní trend první poloviny dat a druhý parametr pro absolutní člen lineárního trendu druhé poloviny dat) a nelze tedy provést jednoznačnou transformaci na snadněji interpretovatelné sezónní faktory podle vztahu (4.2). Proto tento „**Model 4**“ musíme zapsat ve tvaru, odpovídajícímu obecnému modelu (4.1), tedy

$$\begin{aligned} \hat{y}_t = \hat{T}_t^{(0,1)} & -700,52x_{t,2} - 982,60x_{t,3} + 683,36x_{t,4} - 399,99x_{t,5} + \\ & +160,79x_{t,6} - 534,13x_{t,7} - 1439,99x_{t,8} - 1252,77x_{t,9} + \\ & +147,64x_{t,10} - 469,79x_{t,11} + 4294,27x_{t,12}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

kde $\hat{T}_t^{(0,1)} = 21571,05$ pro $t = 1, 2, \dots, 30$,
 $15358,33 + 233,44t$ pro $t = 31, 32, \dots, 60, \dots$

Pro tento model je $R^2 = 0,9129$ a $MAPE = 2,77\%$. Provedením testů chyb na hladině $\alpha = 5\%$, pro kterou je $u_{0,975} = 1,96$, dostávám výsledky, které shrnuje tabulka č. 5.

Test	U	Výsledek
Znaménkový test (5.2)	0,6653	H_0 nelze zamítnout,
Test bodů obratu (5.3)	2,6946	H_0 se zamítá.
Test (Kendall) (5.4)	1,1353	H_0 nelze zamítnout,
Test (Spearman) (5.5)	0,9314	H_0 nelze zamítnout.

Tabulka č. 5 Časová řada „Pokladna“ - testy náhodnosti v Modelu 4

Opět tedy tři ze čtyř testů nezamítly hypotézu o tom, že chyby vytvořeného modelu tvoří „bílý šum“.

Výsledkem provedených analýz jsou čtyři modely, které jsem zvolila k použití pro predikci budoucího vývoje pro období roku 2010. „**Model 1**“, v němž je odhadnut zvlášť trend metodou trojitého exponenciálního vyrovnavání, zvlášť sezónnost modelem skrytých period a odhady jsou poté aditivně sloučeny, „**Model 2**“, kde trend i sezónnost jsou modelovány současně metodou lineární regrese, přičemž na trend je aplikován model složeného trendu a na sezónnost metoda skrytých period. Další dva modely jsou utvořeny obdobně, opět je modelován trend i sezónnost současně metodou lineární regrese, ovšem pro vytvoření modelu sezónnosti je použit přístup tzv. umělých proměnných. V případě „**Modelu 3**“ je pak trend modelován kubickou křivkou, v případě „**Modelu 4**“ je použit trend složený.

V následující kapitole spočtu pro všechny čtyři vytvořené modely předpovědi na dvanáct měsíců a podle výsledků zhodnotím, použití kterého modelu je vhodnější.

8.4 Předpovědi

Nyní se budu věnovat predikci budoucího vývoje časové řady „Pokladna“ pro období leden 2010 - prosinec 2010. Předpovědi bodové i intervalové zkonstruuji pro „**Model 1**“ tvaru (8.1), „**Model 2**“ tvaru (8.2), „**Model 3**“ tvaru (8.3) a „**Model 4**“ tvaru (8.4).³⁵ Jakmile budou k dispozici skutečná data, spočítám pro každý model průměrnou absolutní procentní chybu predikce v procentech podle vzorce (6.3) a znázorním vývoj časové řady dat, vyrovnané hodnoty a predikované hodnoty graficky. Chyby předpovědi pro jednotlivé měsíce i průměrnou chybu předpovědi potom uvádím pro všechny modely v souhrnné tabulce č. 6 v podkapitole 8.5 „Shrnutí výsledků a zhodnocení modelů“.

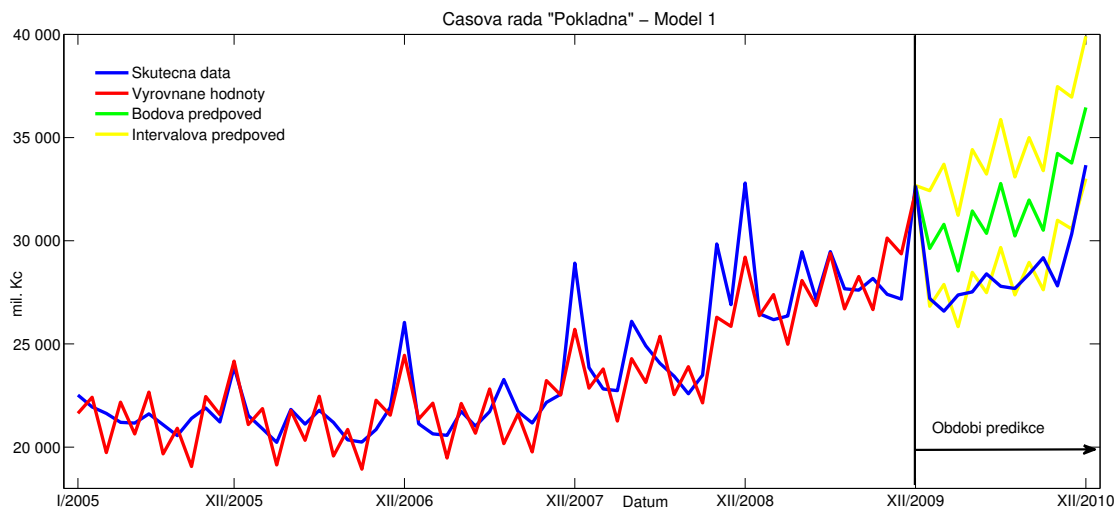
8.4.1 Model 1: $\hat{T}_t^{(E3)} + \text{MSP}$

Předpovědi pro tento model tvaru (8.1) zkonstruuji tak, že spočtu zvlášť bodové předpovědi z modelu pro trend a zvlášť bodové předpovědi z modelu pro sezónnost, poté obě složky sečtu, čímž získám celkovou bodovou předpověď. Časová proměnná T odpovídající budoucnosti přitom nabývá hodnot $T = 61, 62, \dots, 72$. Hodnoty bodové předpovědi poté zanesu do grafu spolu se skutečnými daty a vyrovnanými hodnotami.

Jelikož pro metodu exponenciálního vyrovňování ani model skrytých period neznám předpis pro intervalovou předpověď, vytvořím předpovědní interval tak, že za jeho střed vezmu bodovou předpověď a jako šířku intervalu vezmu vzdálenost $2 \cdot MAPE$, kde $MAPE = 4,73\%$, od této bodové předpovědi na obě strany. Většinou se bere jako šířka intervalu spolehlivosti dvojnásobek směrodatné odchylky, já jsem zvolila dvojnásobek procentní chyby predikce, neboť se jedná o veličinu relativní vzhledem k datům. Postupně, jak získávám skutečná data pro období leden 2010 - prosinec 2010, zanáším tato do grafu a počítám chyby předpovědi pro jednotlivé měsíce, i průměrnou chybu.

V následujícím grafu č. 5 jsou zobrazena skutečná data, vyrovnané hodnoty a předpovědi získané modelem.

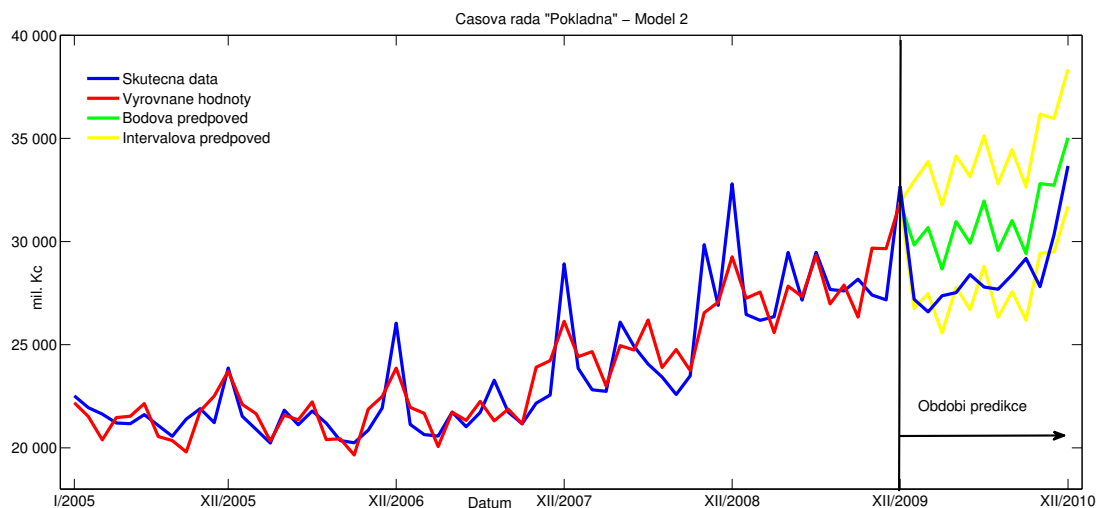
³⁵Výpočty předpovědí jsou pro jednotlivé modely obsaženy v souborech „Pokladna_Model_1.P.m“, „Pokladna_Model_2.P.m“, „Pokladna_Model_3.P.m“ a „Pokladna_Model_4.P.m“



Graf č. 5 Časová řada „Pokladna“ - Model 1

8.4.2 Model 2: $\hat{T}_t^{(0,1)} \wedge \text{MSP}$

V tomto modelu byly složky trendu i sezónnosti odhadnuty společně, pro bodovou a intervalovou předpověď (hladina $\alpha = 5\%$), použijí vztahy (2.6) a (2.7). V modelu pro 60 dat je 9 parametrů, proto v intervalové předpovědi pracuji s kritickou hodnotou $t_{51}(0,05) \doteq t_{50}(0,05) = 2,009$.³⁶ V následujícím grafu č. 6 jsou zobrazena skutečná data, vyrovnané hodnoty a předpovědi získané modelem.

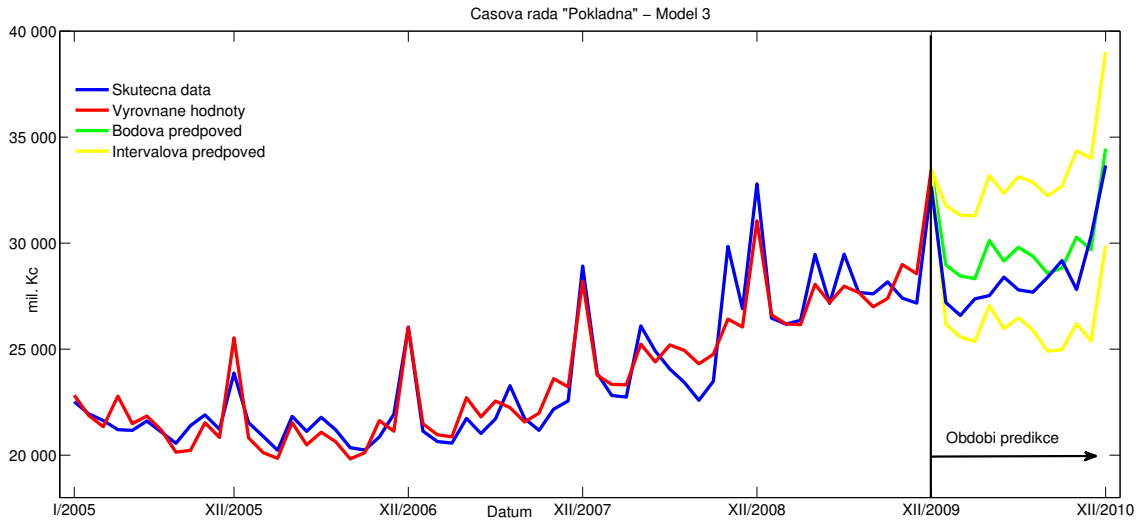


Graf č. 6 Časová řada „Pokladna“ - Model 2

³⁶viz Tabulka kritických hodnot rozdělení $t_f(\alpha)$ v [1], str. 259.

8.4.3 Model 3: $\widehat{T}_t^{(3)} \wedge \text{UP}$

Při konstrukci bodové a intervalové předpovědi budu postupovat opět přesně podle vzorců (2.6) a (2.7). Hladinu významnosti pro intervalovou předpověď volím $\alpha = 0,05$ a vzhledem k tomu, že v modelu mám celkem 60 dat a 15 parametrů $(\widehat{\beta}_0, \dots, \widehat{\beta}_3, \widehat{\varphi}_2, \dots, \widehat{\varphi}_{12})$, pracuji s kritickou hodnotou $t_{45}(0,05) = 2,014$.³⁷ V následujícím grafu č. 7 jsou zobrazena skutečná data, vyrovnané hodnoty a předpovědi získané modelem.

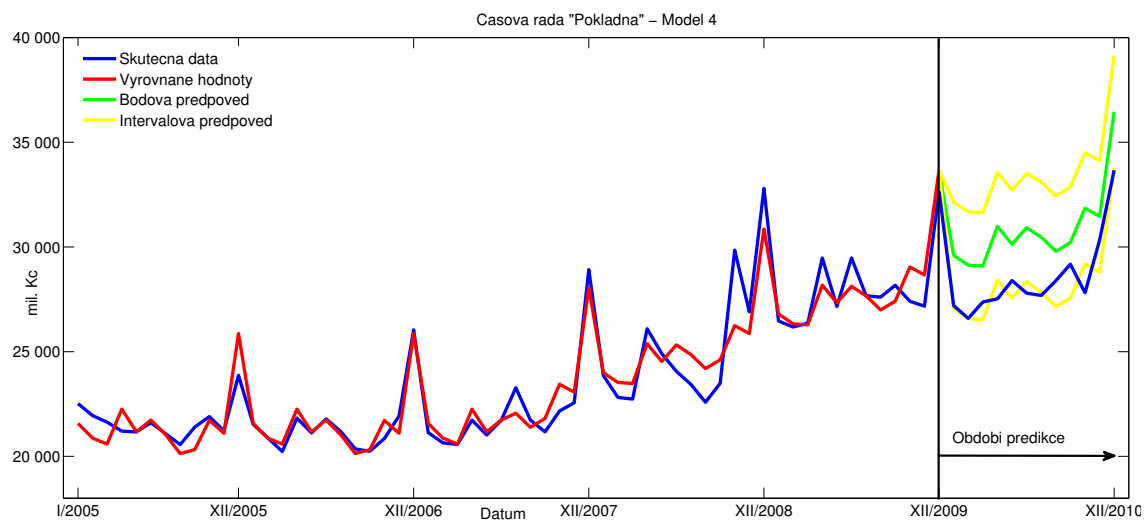


Graf č. 7 Časová řada „Pokladna“ - Model 3

8.4.4 Model 4: $\widehat{T}_t^{(0,1)} \wedge \text{UP}$

Při konstrukci předpovědí postupuji stejně jako u „Modelu 3“, v modelu je pouze o jeden paramter méně (trend odhaduji jedním parametrem pro konstantní trend v první polovině dat a dvěma parametry pro lineární trend v druhé polovině dat), kritická hodnota $t_{46}(0,05) \doteq t_{45}(0,05) = 2,014$. Vyrovnané hodnoty a předpovědi získané modelem jsou uvedeny v následujícím grafu č. 8.

³⁷viz Tabulka kritických hodnot rozdělení $t_f(\alpha)$ v [1], str. 259.



Graf č. 8 Časová řada „Pokladna“ - Model 4

8.5 Shrnutí výsledků a zhodnocení modelů

Co se týče samotné **složitosti konstrukce** uvedených modelů, nejpracnějším byl „Model 1“, neboť se v něm modelovala zvlášť trendová složka a zvlášť sezónnost. Nejméně pracné na výpočet byly potom „Model 3“ a „Model 4“, kde sezónnost byla modelována přímo pomocí sezónních faktorů, navíc (oproti „Modelu 1“ a „Modelu 2“) odpadlo hledání významných frekvencí s využitím periodogramu a testování periodicity pomocí Fisherova testu.

Co do **přesnosti modelu**, s jakou odhaduje hodnoty časové řady a předpovědi, se jeví jako nejlepší též „Model 3“, především vzhledem k určeným chybám předpovědí. Paradoxní je, že zatímco „Model 4“ měl ve fázi konstrukce modelu a výpočtu vyrovnaných hodnot nejlepší ukazatele R^2 a MAPE, pro předpovědi tento model, vzhledem k relativně vysoké průměrné chybě, lepší není.

„Model 3“ má také lépe **interpretovatelné odhady** sezónní složky - zejm. z odhadů sezónních faktorů vidíme, že k největší změně oproti trendu dochází vždy na konci roku, což lze vysvětlit zvýšenými výběry hotovosti z účtů z důvodů vánočních svátků. Naproti tomu parametry sezónní složky odhadnuté pomocí modelu skrytých period ve tvaru goniometrických funkcí lze interpretovat jen těžko.

Dalším faktorem, který je třeba zvážit, je již zmíněné **ekonomické hledisko**, předpokládající, že množství peněz v hotovosti, které mají banky ve svých pokladnách a trezorech, nebude dlouhodobě růst. Tomuto vývoji pak též nejlépe odpovídá „Model 3“, zejména proto, že trend je modelován kubickou křivkou (připomínám, že v tomto modelu byl parametr u kubického členu statisticky významný), na rozdíl od „Modelu 4“, kde trend je v budoucnu lineárně rostoucí.

Jeho nevýhodou, stejně jako nevýhodou „Modelu 4“, je (oproti „Modelu 1“ a „Modelu 2“) poměrně vysoký **počet parametrů**, který je dán odhadem sezónní složky pomocí metody umělých proměnných, kde pro každý měsíc je v modelu jeden parametr. Na druhou stranu jsou tyto parametry lépe interpretovatelné než parametry v modelu skrytých period.

Pro užití „Modelu 3“ hovoří též fakt, že v něm jako jediném interval spolehlivosti pro předpovědi pokryl skutečná data.

Zvážíme-li tedy všechny faktory, pak se celkově „Model 3“ jeví jako vhodný pro použití v praxi. Jak vidíme z grafu, bodová předpověď je oproti skutečným hodnotám nadhodnocující, což je v tomto případě v pořádku, neboť pravděpodobně bude lépe, pokud banka bude držet v pokladně a trezorech o něco větší objem prostředků, než je nutné, než kdyby se jí hotovosti nedostávalo a nemohla by požadavky svých klientů uspokojit. V tomto případě je tedy ztráta úroku z nevyužitých peněz přijatelnější než ztráta klienta nebo neuskutečněného (v případě hotovostních operací v bankách také poplatky zatíženého) obchodu.

Zde také částečně narážíme na ekonomickou odůvodněnost bankovního poplatku za výběr hotovosti na pokladně (resp. o něco menších poplatků v případě výběru hotovosti prostřednictvím bankomatu). Bance tyto poplatky kompenzují úroky z hotovosti, kterou drží kvůli klientům bezúročně ve svých pokladnách a trezorech a kterou by jinak, pokud by tyto operace neexistovaly, mohla využít jiným, efektivnějším způsobem.

Vytvořený model může také banka využít k provádění dalších obchodů. V okamžiku, kdy stav hotovosti v pokladnách překročí horní intervalovou mez, může banka volné prostředky vložit do jiného aktiva. V případě, že by prostředky naopak poklesly pod dolní intervalovou mez, bude se pro banku pravděpodobně jednat o signál nutnosti získání peněz například na mezibankovním peněžním trhu.

K vytvořenému modelu je však nutné dodat, že se jedná o zjednodušený, ilustrativní model. Bankovní analytici v rámci řízení rizik a modelů krizových situací pracují s mnohem složitějšími modely, které mají velké množství vstupních proměnných a které jsou do určité míry jakýmsi „know-how“ každé banky. Dále pro potřeby banky bude pravděpodobně nutné sledovat tuto položku v kratších časových intervalech (např. denních). Nicméně domnívám se, že podobný model může být bez obav využitelný v jakémkoliv jiném podniku, kde je potřeba řídit oběh a objem peněžních prostředků.

V následující tabulce č. 6 uvádím shrnutí výsledků pro jednotlivé modely.

Ukazatel	MODEL 1 $\hat{T}^{(E3)} + MSP$			MODEL 2 $\hat{T}^{(0,1)} \wedge MSP$			MODEL 3 $\hat{T}^{(3)} \wedge UP$			MODEL 4 $\hat{T}^{(0,1)} \wedge UP$		
R^2			0, 8065			0, 8475			0,9123			0,9129
MAPE			4, 73%			3, 97%			3.05%			2, 77%
Období	y_T	y_T^P	EP	y_T^P	EP	y_T^P	EP	y_T^P	EP	y_T^P	EP	EP
I/2010	27197, 65	29625, 58	8, 93%	29839, 76	9, 71%	28969, 70	6, 51%	29598, 11	8, 83%			
II/2010	26587, 99	30795, 54	15, 82%	30675, 82	15, 37%	28447, 99	6, 99%	29131, 03	9, 56%			
III/2010	27372, 28	28534, 82	4, 25%	28666, 55	4, 73%	28322, 68	3, 47%	29082, 38	6, 24%			
IV/2010	27522, 41	31443, 28	14, 25%	30963, 49	12, 50%	30123, 39	9, 45%	30981, 78	12, 57%			
V/2010	28395, 76	30356, 49	6, 91%	29920, 68	5, 37%	29152, 77	2, 66%	30131, 87	6, 11%			
VI/2010	27793, 15	32775, 14	17, 93%	31965, 24	15, 01%	29804, 26	7, 23%	30926, 09	11, 27%			
VII/2010	27684, 77	30233, 21	9, 21%	29562, 67	6, 78%	29382, 78	6, 13%	30464, 61	10, 04%			
VIII/2010	28386, 07	31976, 21	12, 65%	31016, 10	9, 27%	28570, 27	0, 64%	29792, 18	4, 95%			
IX/2010	29177, 06	30509, 97	4, 57%	29414, 89	0, 82%	28828, 81	1, 19%	30212, 85	3, 55%			
X/2010	27812, 93	34230, 77	23, 07%	32803, 55	17, 94%	30278, 51	8, 86%	31846, 69	14, 50%			
XI/2010	30326, 47	33765, 78	11, 34%	32728, 09	7, 92%	29688, 33	2, 10%	31462, 70	3, 75%			
XII/2010	33144, 68	36458, 38	9, 99%	35028, 77	5, 68%	34457, 64	3, 96%	36460, 21	10, 00%			
Průměrná chyba predikce v %			11, 58%		9, 26%		4, 94%		8, 45%			

Tabulka č. 6 Časová řada „Pokladna“ - shrnutí výsledků modelů

9 Analýza časových řad „Kurz měny“

9.1 Popis dat

V této části se budu věnovat zkoumání vývoje měnových (devizových) kurzů, stanovených a zveřejňovaných³⁸ Českou národní bankou, které jsou výsledkem obchodování měn na devizovém trhu a používají se zejména pro účely vedení účetnictví, například při oceňování majetku a závazků vyjádřených v cizí měně.³⁹ Pro analýzu jsem zvolila kurzy nejvíce používaných měn *CZK/EUR*, *CZK/GBP* a *CZK/USD*.⁴⁰ Pro analýzu vývoje kurzu použiji data denních kurzů za období od 3.1.2005 do 31.12.2010.

9.2 Ekonomická zdůvodnitelnost analýzy měnových kurzů

Na začátek této kapitoly uvádím základní pojmy z teorie měnových kurzů.⁴¹ **Měnový kurz** je poměr, v němž se směňují dvě navzájem cizí měny, neboli kurz je cena jedné měny vyjádřená v jednotkách jiné měny. Z hlediska formy peněz rozlišujeme **devizový kurz**, který je cenou bezhotovostních cizích peněz, zejména ve formě zůstatků bankovních účtů, a **valutový kurz**, který je cenou cizích hotovostních peněz - bankovek a mincí.

Měnové kurzy jsou uváděny dvěma způsoby kotace - při **přímé kotaci** je vyjádřen počet jednotek domácí měny za jednotku měny cizí. Příkladem je kurz koruny vůči euru (též kurz eura) uváděn jako 30 CZK/EUR, což znamená, že „1 EUR = 30 Kč“. Tento způsob kotace je obvyklý ve většině zemí, včetně České republiky, tudíž se tohoto vyjádření budu držet. Druhou možností je **kotace nepřímá**, typická například pro Velkou Británii, vyjadřující počet jednotek cizí měny za jednotku měny domácí. Potom zápis 0,03 EUR/CZK znamená, že „1 Kč = 0,03 EUR“. Při použití **přímé kotace** si musíme uvědomit, že růst takto vyjádřeného kurzu znamená **depreciaci** (znehodnocení, oslabení) domácí měny,

³⁸dostupné z [32]

³⁹viz 24, odst. (6) zákona č. 563/1991 Sb., o účetnictví, dostupné např. z [33]

⁴⁰data jsou obsažena v souboru „Data.xls“, listy „EUR“, „GBP“, „USD“

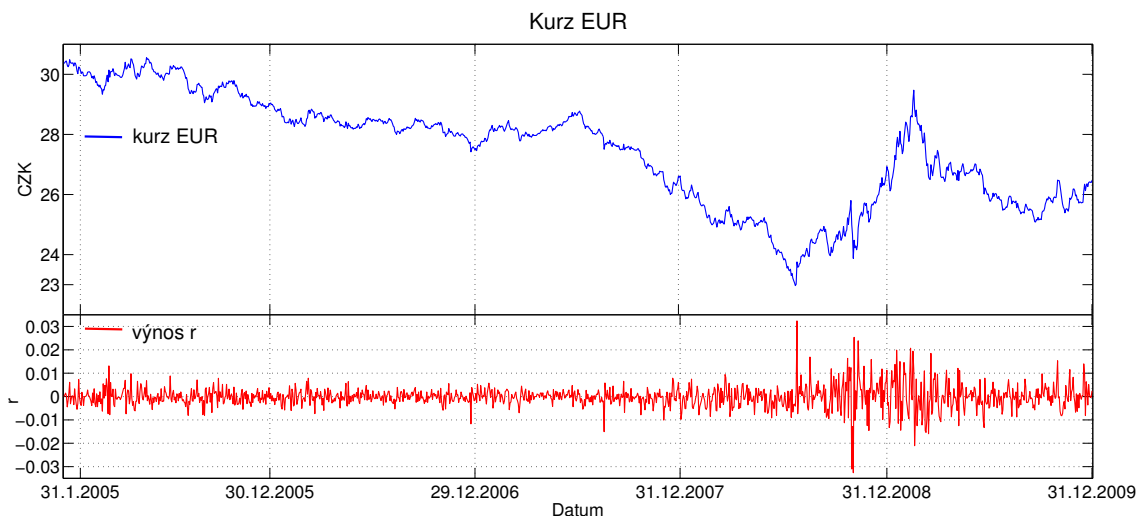
⁴¹zpracováno podle [22], str. 268 - 273 a [23], str. 604 - 606

a tedy posílení cizí měny, naopak pokles kurzu značí **apreciaci** (zhodnocení, posílení) domácí měny a oslabení souvztažné měny zahraniční.

Znalost teorie měnového kurzu je důležitá pro všechny instituce, které operují se zahraniční měnou, tedy i banky, neboť mezi činnosti bank zpravidla patří, kromě jiného, zahraniční platební styk, směnářenská činnost, či obchodování na vlastní účet nebo účet klienta s devizovými hodnotami (dále jen „devizové obchody“). Při všech těchto činnostech banka obchoduje s cizí měnou a podstupuje tak **měnové (kurzové) riziko**, spojené se zhodnocováním a znehodnocováním měny. Kurzové riziko, jako součást rizika tržního, působí na všechny subjekty, které vstupují do daného obchodního vztahu. Přitom platí, že čím vyšší jsou objemy takových obchodů a čím je nestabilnější měna, v níž se obchod uskuteční, tím je riziko vyšší.⁴²

9.3 Analýza kurzů

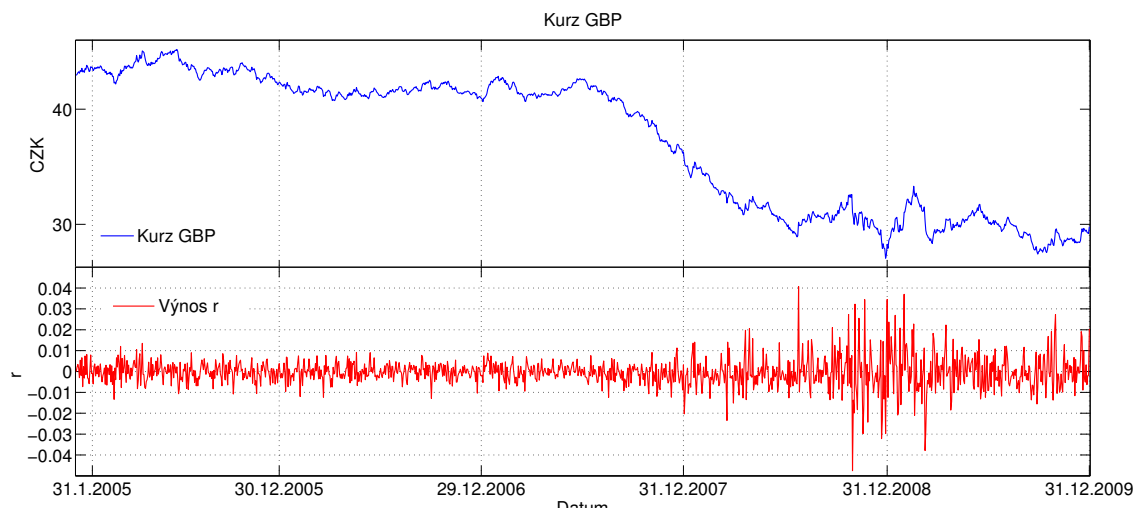
Nejprve spočítám pro každou měnu podle vztahu (7.2) denní míru výnosu $r^{(1)}$ v desetinném vyjádření, plynoucí z pohybu kurzu. Do grafů č. 9, 10 a 11 potom pro každou měnu vykreslím vývoj denního kurzu a míry denního výnosu, vše za období od 3.1.2005 do 31.12.2009.⁴³



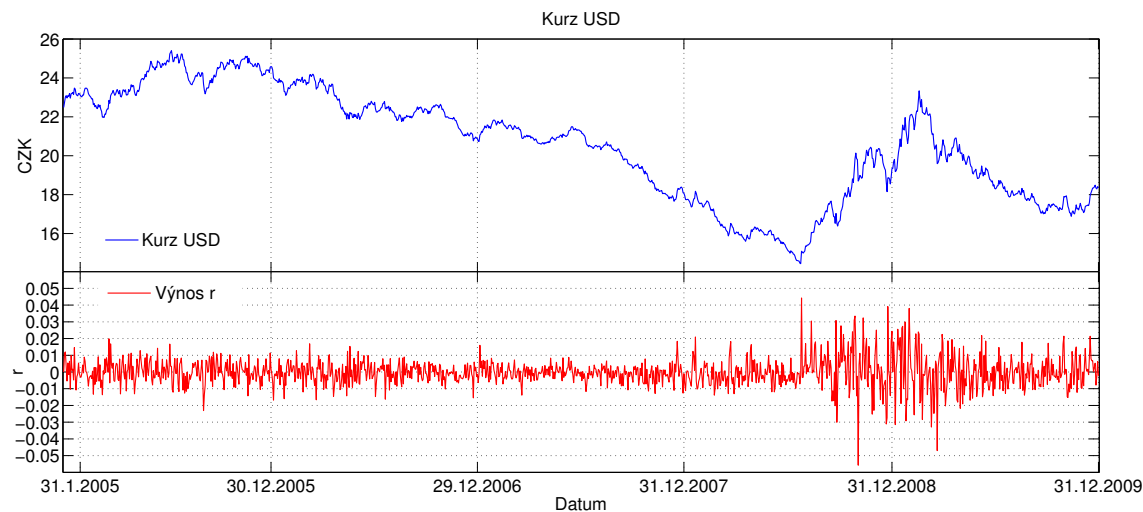
Graf č. 9 Vývoj kurzu a denních výnosů EUR, 3.1.2005 – 31.12.2009

⁴²[17], str. 39

⁴³veškeré výpočty v této kapitole jsou obsahem souboru „Kurzy.m“.

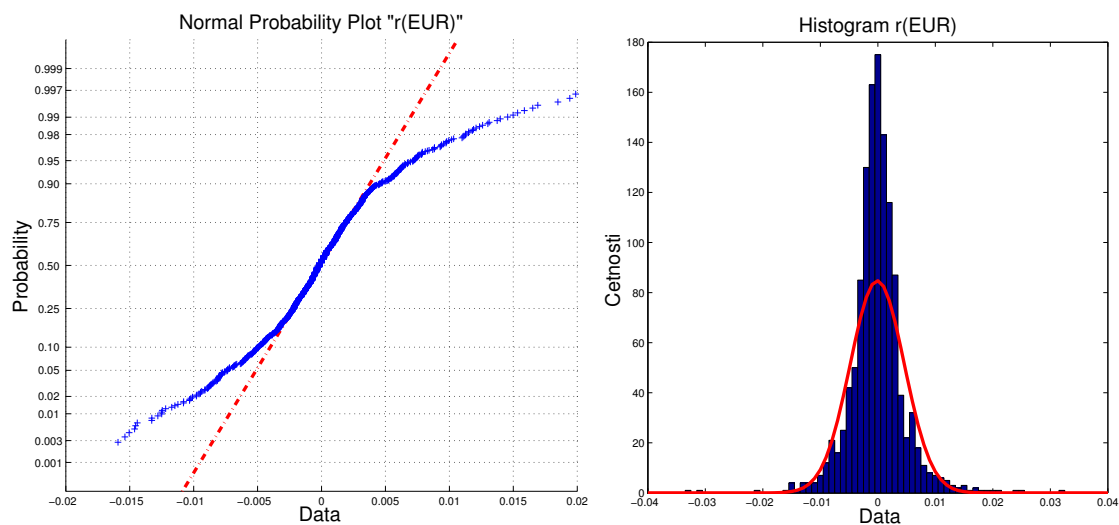


Graf č. 10 Vývoj kurzu a denních výnosů GBP, 3.1.2005 – 31.12.2009

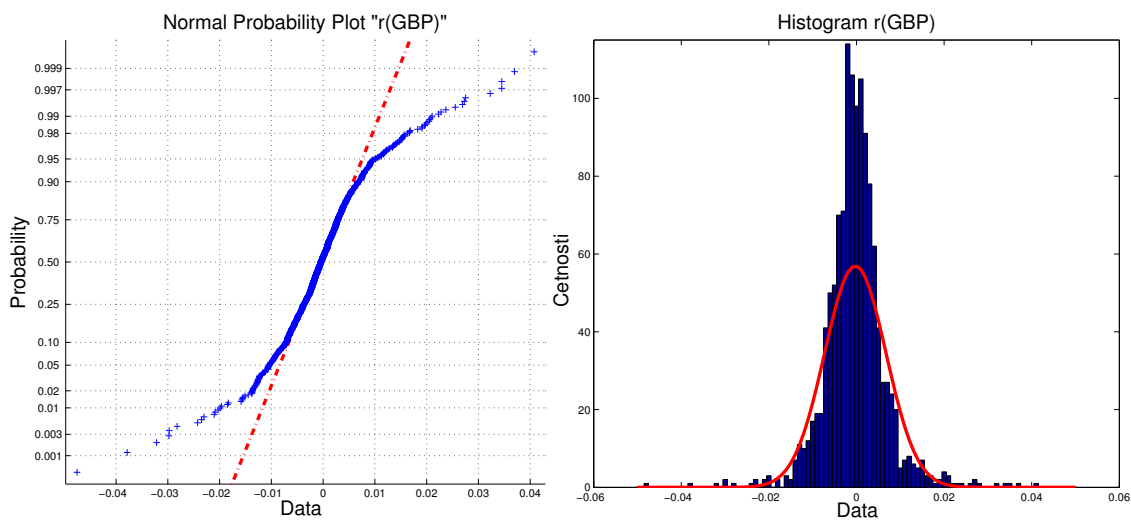


Graf č. 11 Vývoj kurzu a denních výnosů USD, 3.1.2005 – 31.12.2009

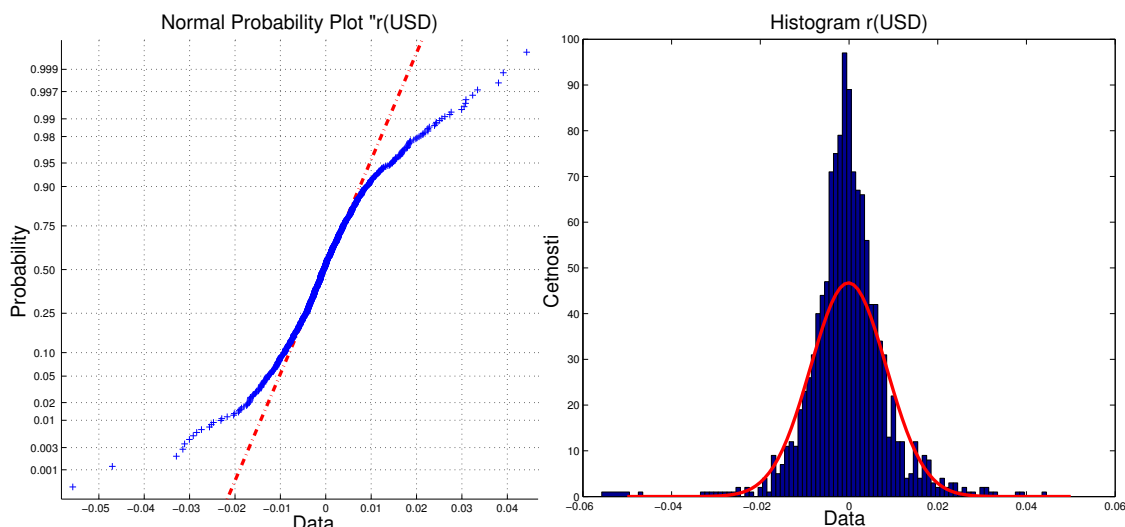
Podle vztahů (7.5) a (7.6) dále spočtu očekávanou hodnotu a směrodatnou odchylku výnosu a podle (7.7) jeho výběrový koeficient šikmosti a špičatosti. Dále pro tato data zobrazím v následujících grafech č. 12, 13 a 14 histogramy výnosu a hustoty odpovídajícího normálního rozdělení.



Graf č. 12 Charakteristiky denních výnosů EUR, 3.1.2005 – 31.12.2009



Graf č. 13 Charakteristiky denních výnosů GBP, 3.1.2005 – 31.12.2009



Graf č. 14 Charakteristiky denních výnosů USD, 3.1.2005 – 31.12.2009

Z grafů je zřejmé, že rozdělení výnosů není normální, čemuž odpovídají i výběrové charakteristiky šikmosti a špičatosti, které spolu s odhady střední hodnoty a směrodatné odchylky denního výnosu uvádím pro všechny zkoumané měny v následující tabulce č. 7.

Ukazatel	n	$\bar{r}$	s_r	$\widehat{SK}_r$	$\widehat{K}_r$
$r_{EUR}^{(1)}$	1259	−0,000098	0,004706	0,2228	10,7518
$r_{GBP}^{(1)}$	1259	−0,000266	0,007011	0,2227	9,6304
$r_{USD}^{(1)}$	1259	−0,000124	0,008535	0,1180	7,6390

Tabulka č. 7 Číselné charakteristiky denních výnosů kurzů

Z teorie normálního rozdělení víme, že koeficient šikmosti je v případě normality dat roven nule a koeficient špičatosti roven číslu tři. Z výše uvedené tabulky č. 7 vidíme, že odhad šikmosti roven nule není, ovšem rozdíl, o který se od nuly liší, není příliš velký. Naproti tomu odhad špičatosti je pro všechny tři měny vyšší než číslo tři. Z teorie finančních časových řad⁴⁴ víme, že tato vyšší špičatost je

⁴⁴viz [3], str. 21

způsobena tím, že malé kladné výnosy a malé záporné ztráty se vyskytují častěji než by tomu bylo u normálního rozdělení. Jak jsem již uvedla v kapitole 7 „Měření rizika“ v teoretické části této práce, porušení normality dat lze vyřešit použitím transformací na jiné rozdělení a sestavením složitějšího modelu. Tímto se však v této práci nebudu zabývat a dále budu předpokládat, že rozdělení je přibližně normální.

Nyní přistoupím k analýze kurzového rizika a jeho využití v praxi. Uvažujme modelovou situaci **exportního podniku**, který obchoduje se zahraničním partnerem a jehož faktury jsou vystaveny na částku v cizí měně se splatností 25 pracovních (obchodních) dní. Vystaví-li takový podnik svou fakturu 31.12.2009 v hodnotě 1000 EUR (pohledávka za obchodním partnerem v cizí měně), je nutné částku přepočíst kurzem platným v den vzniku pohledávky (tj. vystavení faktury), tedy kurzem 26,465 CZK/EUR - pohledávka činí 26465 Kč. Dále předpokládejme, že faktura bude zaplacená poslední den splatnosti, tedy 5.2.2010 v částce 1000 EUR. Pokud v daný den byl kurz, který se použije pro zaúčtování vyrovnání pohledávky, 26,180 CZK/EUR, pak celková přepočtená výše pohledávky činí 26180 Kč, čímž podniku vznikla kurzová ztráta 285 Kč.

Podívejme se na stejný příklad z pohledu podniku, který zboží **dováží** a má vůči svému obchodnímu partneru závazek zaplatit fakturu znějící na 1000 EUR. Ta je ke dni vystavení faktury přepočtena kurzem 26,465 CZK/EUR, v den splatnosti zaplacená ve výši 1000 EUR a v účetnictví přeúčtována na koruny kurzem 26,180 CZK/EUR. Podniku vzniká kurzový zisk, vyplývající ze změny kurzu mezi dobou, kdy byla faktura přijata a zaúčtována, a dnem, kdy byla zaplacená.

Shrňme-li výše uvedené, pak pro **exportní podnik** (dostává zaplacen v cizí měně) znamená posilování koruny (pokles kurzu) kurzové ztráty a oslabení koruny naopak kurzové zisky, u podniku zabývajících se **importem** (platí za zboží v cizích měnách) posílení koruny znamená kurzový zisk, oslabení koruny kurzovou ztrátou. Metoda VaR umožňuje exportnímu podniku určit s danou pravděpodobností dolní odhad budoucího kurzu a tím i očekávanou „maximální“ ztrátu.

Podnik zabývající se dovozem zboží vyčíslí k určení kurzové ztráty obdobně horní odhad kurzu. Totéž platí obecně také pro nákup a prodej dané měny v odlišných časových okamžicích, tedy investice na měnových trzích, kde opět sledujeme výši kurzové ztráty. Ve všech uvedených případech se veličina VaR obvykle počítá pro realizované míry výnosu (resp. ztrát), aby výpočty nebyly závislé na výši investované částky do dané měny, tak jak je popsáno v teoretické části této práce.

Pro daný modelový příklad **exportního podniku** budu počítat 25-ti denní $VaR_p^{(25)}$ podle vzorce (7.8) na hladině významnosti $p = 0,05$, pro niž je $u_{1-p} = u_{0,95} = 1,645$. Výpočetní postup bude následující:

- 1) Z historických dat za období 3.1.2005 – 31.12.2009 mám spočtené výběrové charakteristiky míry výnosu $\bar{r}$ a s_r nutné pro výpočet **jednodenního $VaR_{0,05}^{(1)}$** , který vyjadřuje maximální očekávanou ztrátu na jednu investovanou korunu (vyjádřeno desetinným číslem, po přenásobení stem pak v procentech), která s pravděpodobností 95% nebude překročena.
- 2) Dále mám k dispozici „nejnovější“ skutečnou hodnotu měnových kurzů ke dni 31.12.2009, kterou pro příslušnou měnu označím $P_{31.12.2009}$. Budu uvažovat, že pokud koupím jednotku dané cizí měny za tento kurz, pak moje investice činí $W = P_{31.12.2009}$.
- 3) Pokud vynásobím kurz $P_{31.12.2009}$ hodnotou $VaR_{0,05}^{(1)}$, pak získám **absolutní ztrátu v Kč** vzniklou v důsledku změny kurzu následující den, která nebude s pravděpodobností 95% překročena.
- 4) Po přičtení této hodnoty (záporné) ke kurzu $P_{31.12.2009}$ tedy dostanu **dolní odhad hodnoty kurzu pro následující den $\hat{P}_{t+1}^{(L)}$** , přesněji dolní (proto označení „L“) mez intervalu spolehlivosti pro daný kurz, který vyjadřuje s jakým „nejnižším“ kurzem je na dané hladině spolehlivosti potřeba počítat, jestliže ztráta způsobená poklesem kurzu oproti předchozímu dni bude právě ve výši hodnoty příslušného VaR.

- 5) Dále vypočítám $VaR_{0,05}^{(25)}$ a obdobným postupem získám dolní odhad budoucí hodnoty kurzu, který se na trhu utvoří za 25 pracovních dní $\widehat{P}_{t+25}^{(L)}$.
- 6) Vypočtené hodnoty zanesu do tabulky, abych je později mohla porovnat se skutečnými hodnotami kurzů a spočíst rozdíl, který označím E , jenž vyjadřuje, o kolik procent se odchyluje skutečný kurz od námi vytvořené dolní bodové předpovědi kurzu. Přitom čím vyšší je v tomto případě E , tím lépe, neboť ve skutečnosti byl kurz právě o tolik procent, kolik činí chyba, vyšší, než námi předpokládaná hodnota zahrnující danou „maximální“ ztrátu, s níž jsme s danou pravděpodobností počítali.
- 7) V okamžiku, kdy budu mít k dispozici nová data, přidám je k časové řadě dat kurzů za období 3.1.2005 – 31.12.2009, aktualizuji výpočet charakteristik $\bar{r}$ a s_r , vypočítám hodnoty VaR a nové odhady pro další období.

Výsledky budu postupně zapisovat pro jednotlivé měny zvlášť do tabulek č. 8, 9 a 10.

t	P_t	$t + 25$	$VaR_{0,05}^{(25)}$	$\widehat{P}_{t+25}^{(L)}$	P_{t+25}	E (%)
31.12.2009	26,465	05.02.2010	-0,0387	25,441	26,180	2,90%
05.02.2010	26,180	12.03.2010	-0,0386	25,169	25,515	1,37%
12.03.2010	25,515	19.04.2010	-0,0384	24,536	25,255	2,93%
19.04.2010	25,255	24.05.2010	-0,0381	24,292	25,660	5,63%
24.05.2010	25,660	28.06.2010	-0,0382	24,679	25,745	4,31%
28.06.2010	25,745	04.08.2010	-0,0382	24,761	24,735	-0,11%
04.08.2010	24,735	08.09.2010	-0,0381	23,794	24,710	3,85%
08.09.2010	24,710	14.10.2010	-0,0378	23,776	24,435	2,77%
14.10.2010	24,435	22.11.2010	-0,0375	23,517	24,695	5,00%
22.11.2010	24,695	28.12.2010	-0,0373	23,773	25,360	6,68%

Tabulka č. 8 Tabulka výsledků pro $VaR_{0,05}^{(25)}$ měny „EUR“

Z výše uvedené tabulky může podnik vyvodit následující závěry - v 95% případech by kurzová ztráta neměla překročit přibližně 3,87% investované hodnoty (uvažujeme-li první hodnotu $Var_{0,05}^{(25)}$, která se během roku příliš nemění). Podíváme-li se na první případ, kdy vystavená faktura je přeúčtována kurzem $P_{31.12.2009} = 26,465$ Kč a zaplacená faktura kurzem $P_{5.2.2010} = 26,180$ Kč, pak kurzová ztráta na 1 Kč činí 0,285 Kč. Počítá-li podnik díky výpočtu VaR s tím, že přepočtový kurz bude $\hat{P}_{5.2.2010}^{(L)} = 25,441$ místo $P_{31.12.2009} = 26,465$, a vytvoří si vhodným způsobem rezervu ve výši rozdílu, tedy 1,024 Kč, pak dopad skutečné ztráty pro něj nebude tak razantní. Připomeňme, že pro exportní podnik dochází ke kurzovým ztrátám pokud kurz CZK/EUR klesá (česká měna posiluje). Pokud kurz CZK/EUR oproti očekávání vzroste, vzniká podniku kurzový zisk.

Pokud bychom tedy uvažovali, že podnik vystavuje faktury (pro jednoduchost uvažujeme hodnotu faktury 1 EUR), které jsou mu propláceny podle výše uvedené tabulky, pak v důsledku vývoje kurzu dojde pro podnik ke **kurzové ztrátě** 1,105 Kč (za sledované období). Vypočteme ji jako rozdíl částek, které byly podniku v součtu zaplacený, tj. $\sum P_{t+25}$, a částek, které podnik po přepočtu fakturoval, tj. $\sum P_t$. Pokud podnik v souladu s principem metody VaR počítá s tím, že mu budou během roku zaplacený částky ve výši dolních odhadů budoucího kurzu, tedy $\sum \hat{P}_{t+25}^{(L)}$, pak si vytvoří rezervu (nebo se proti ztrátě zajistí jiným vhodným způsobem) ve výši $\sum P_t - \sum \hat{P}_{t+25}^{(L)}$, tedy 9,657 Kč, čímž následnou celkovou ztrátu vykryje. Výše rezervy je uvažována na celé sledované období, obdobně lze uvažovat rezervu též pro jeden účetní případ. Opět připomeňme, že pokud by se uvedená tabulka týkala podniku, který zboží dováží, pak by výsledný rozdíl částek zaplacených a fakturovaných, tj. $\sum P_{t+25} - \sum P_t$, byl kurzovým ziskem. Zde by však neplatila úvaha o výpočtu VaR v podobě, v jaké jsem jej uvedla ve vzorci (7.4), nicméně i přesto by byl výpočet velmi jednoduchý, neboť bychom neuvažovali ztrátu, ale zisk, tudíž by se ve výsledku pouze změnilo znaménko u hodnoty VaR, neboť by bylo potřeba namísto dolní meze intervalu spolehlivosti spočítat horní mez pro interval spolehlivosti měnového kurzu.

Nyní sestavíme obdobnou tabulku č. 9 pro kurz CZK/GBP.

t	P_t	$t + 25$	$Var_{0,05}^{(25)}$	$\hat{P}_{t+25}^{(L)}$	P_{t+25}	E (%)
31.12.2009	29,798	05.02.2010	-0,0576	28,080	29,981	6,77%
05.02.2010	29,981	12.03.2010	-0,0577	28,252	28,091	-0,57%
12.03.2010	28,091	19.04.2010	-0,0575	26,475	28,670	8,29%
19.04.2010	28,670	24.05.2010	-0,0573	27,028	29,796	10,24%
24.05.2010	29,796	28.06.2010	-0,0578	28,074	31,401	11,85%
28.06.2010	31,401	04.08.2010	-0,0581	29,578	29,853	0,93%
04.08.2010	29,853	08.09.2010	-0,0581	28,119	30,073	6,95%
08.09.2010	30,073	14.10.2010	-0,0580	28,330	27,789	-1,91%
14.10.2010	27,789	22.11.2010	-0,0579	26,179	28,888	10,35%
22.11.2010	28,888	28.12.2010	-0,0581	27,209	29,700	9,15%

Tabulka č. 9 Tabulka výsledků pro $Var_{0,05}^{(25)}$ měny „GBP“

V tomto případě činí rozdíl $\sum P_{t+25} - \sum P_t = -0,098$ Kč, tedy pro exportní podnik opět kurzovou ztrátu, pro dovozní podnik kurzový zisk.

Poslední tabulka č. 10 udává výsledky pro kurz CZK/USD.

t	P_t	$t + 25$	$Var_{0,05}^{(25)}$	$\hat{P}_{t+25}^{(L)}$	P_{t+25}	E (%)
31.12.2009	18,368	05.02.2010	-0,0702	17,079	19,121	11,96%
05.02.2010	19,121	12.03.2010	-0,0701	17,779	18,535	4,25%
12.03.2010	18,535	19.04.2010	-0,0699	17,239	18,811	9,12%
19.04.2010	18,811	24.05.2010	-0,0697	17,503	20,753	18,57%
24.05.2010	20,753	28.06.2010	-0,0705	19,290	20,862	8,15%
28.06.2010	20,862	04.08.2010	-0,0706	19,389	18,721	-3,45%
04.08.2010	18,721	08.09.2010	-0,0706	17,399	19,460	11,85%
08.09.2010	19,460	14.10.2010	-0,0704	18,089	17,328	-4,21%
14.10.2010	17,328	14.10.2010	-0,0703	16,109	18,096	12,34%
22.11.2010	18,096	28.12.2010	-0,0705	16,821	19,210	14,20%

Tabulka č. 10 Tabulka výsledků pro $Var_{0,05}^{(25)}$ měny „USD“

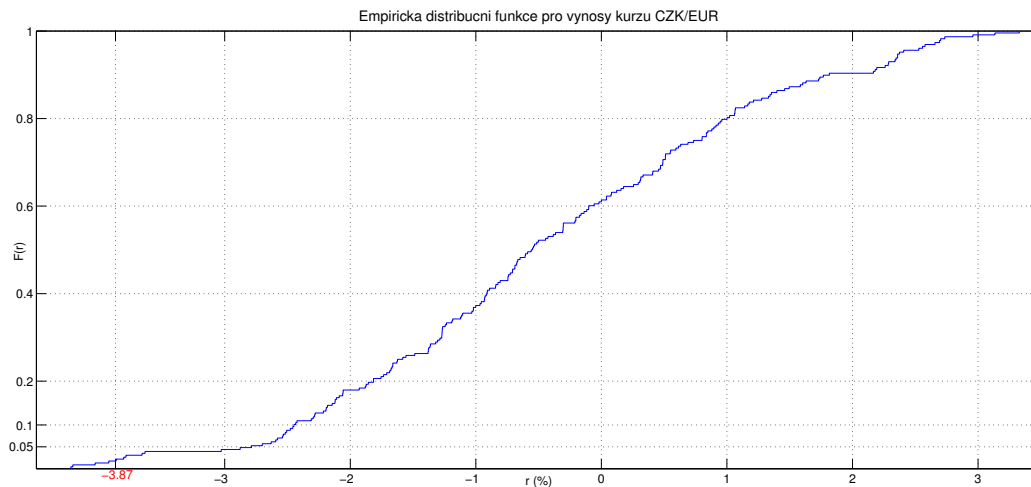
V tomto případě by exportnímu podniku vznikl kurzový zisk 0,842 Kč, naopak dovoznímu podniku kurzová ztráta ve stejné výši.

Z výše uvedených tabulek je dále zřejmé, že velikost $Var_{0,05}^{(25)}$ se v průběhu roku výrazně nemění. Výsledky výpočtu této veličiny pak interpretujeme tak, že v případě kurzu CZK/EUR nebude s pravděpodobností 95% ztráta způsobená poklesem kurzu v období 25 pracovních dní větší než 3,87%, v případě kurzu CZK/GBP nebude tato ztráta větší než 5,76% a pro měnový kurz CZK/USD větší než 7,02%.

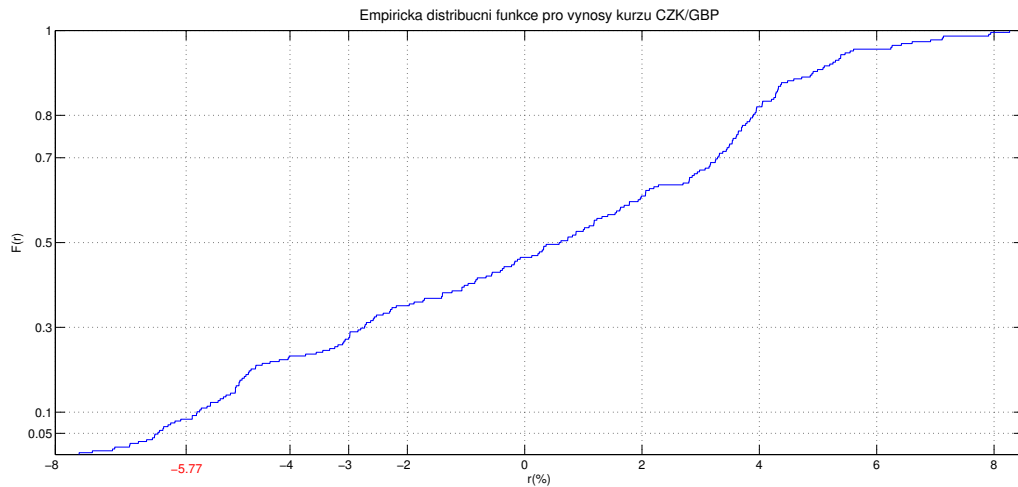
To, zda ve skutečnosti došlo pouze v 5% případů k větším ztrátám na výnosu, než jsou vypočtené hodnoty $Var_p^{(25)}$, zjistíme výpočtem míry výnosu z aktiva, tedy porovnáním kurzů výchozího dne a kurzů, které byly realizovány o dvacetpět pracovních dní později, neboli

$$r_t^{(25)} = \frac{P_t - P_{t-25}}{P_{t-25}}. \quad (9.1)$$

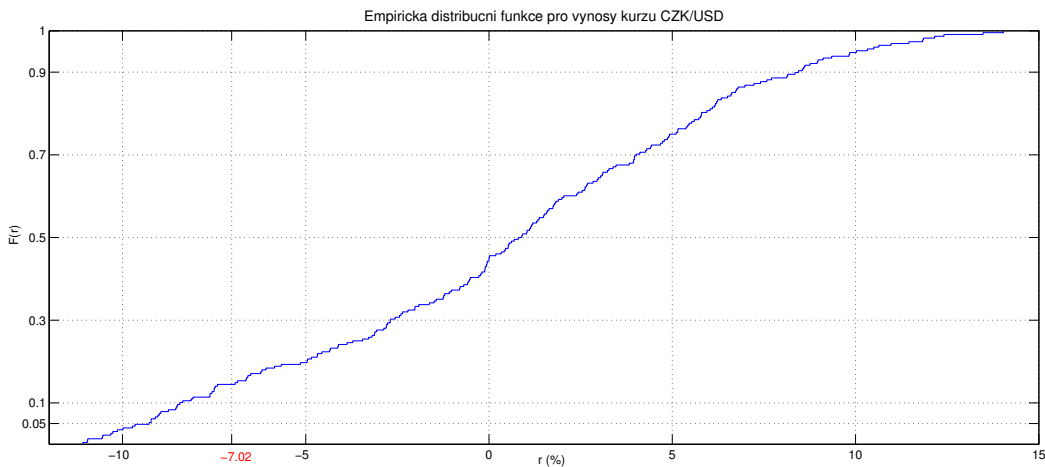
Míru výnosu přitom počítáme pro data za rok 2010. Pro takto vypočtené míry výnosu potom zkonstruuje empirickou distribuční funkci. Její průběh uvádím pro každou měnu zvlášť v následujících grafech č. 15, 16 a 17.



Graf č. 15 DF výnosů CZK/EUR s vyznačeným VaR (z dat 2005-2009)



Graf č. 16 DF výnosů CZK/GBP s vyznačeným VaR (z dat 2005-2009)



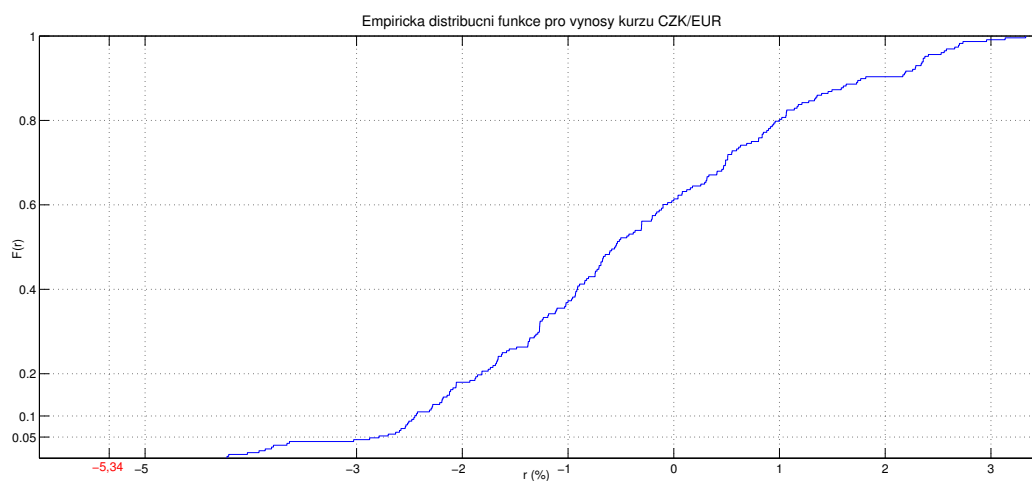
Graf č. 17 DF výnosů CZK/USD s vyznačeným VaR (z dat 2005-2009)

Z výše uvedených grafů je vidět, že pouze u kurzu CZK/EUR je méně než 5% výnosů menších než hodnota $-3,87\%$ vypočtená jako VaR pro kurz CZK/EUR (díky zápornému znaménku se jedná o ztrátu na výnosu). U kurzu CZK/GBP i CZK/USD byla v obou případech ve skutečnosti vypočtená hodnota $Var_{0,05}^{(25)}$ překročena ve více než 5% případech. Konkrétně u měny GBP tomu tak bylo v přibližně 8% případech, pro měnu USD bylo dokonce 14% výnosu nižších než vypočtená hodnota $Var_{0,05}^{(25)}$ příslušná daným kurzům.

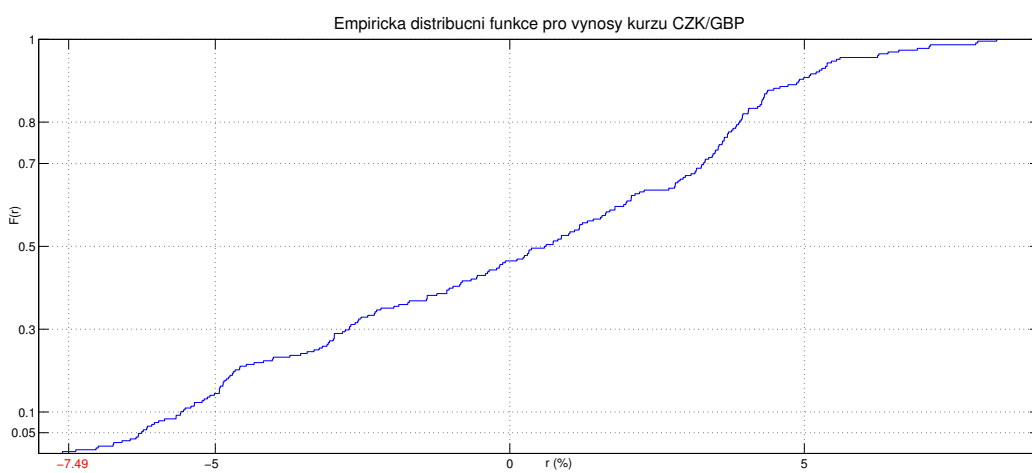
Důvodem může být to, že pro výpočet výběrové směrodatné odchylky, na níž je výpočet veličiny $Var_{0,05}^{(25)}$ založen, byla použita příliš dlouhá časová řada dat, za období leden 2005 - prosinec 2009. Vrátime-li se zpět ke grafům č. 9, 10 a 11 a zaměříme-li se zejména na vývoj denní míry výnosu r v %, pak vidíme, že u kurzu CZK/EUR se od roku 2005 do zhruba poloviny roku 2008 a od první třetiny roku 2009 do konce roku 2009 denní míra výnosu pohybovala v rozsahu $\pm 1\%$ a v mezidobí, tj. od poloviny roku 2008 do první třetiny roku 2009 v rozmezí nejčastěji $\pm 2\%$ s výkyvy do $\pm 3\%$. U kurzů CZK/GBP i CZK/USD se od roku 2005 do zhruba poloviny roku 2008 a od první třetiny roku 2009 do konce roku 2009 denní míra výnosu pohybovala též přibližně v rozsahu $\pm 1\%$, s občasnými výkyvy do $\pm 2\%$, avšak v mezidobí denní výnos r kolísal u CZK/GBP v rozmezí $\pm 3 - \pm 4\%$, u CZK/USD dokonce $\pm 3 - \pm 5\%$.

Tyto výrazné výkyvy, objevující se na přelomu roku 2008 a 2009 a dále pokračující (v menší míře) i po celý rok 2009, byly z velké části způsobeny probíhající finanční a ekonomickou krizí. Jejím projevem je, kromě jiného, vyšší volatilita ve směnných kurzech sledovaných měn, kterou lze vzhledem k doznívání krize předpokládat i v roce 2010. Výpočet veličiny $Var_{0,05}^{(25)}$ (vztah (7.3)) je založen na směrodatné odchylce σ , ovšem její hodnota se liší podle délky časové řady dat, z nichž je počítána. Proto také zřejmě v předchozím výpočtu došlo k tomu, že malé výkyvy míry výnosu v letech 2005 - 2007 kompenzovaly u měn GBP a USD výrazné výkyvy přelomu let 2008 a 2009, čímž mohla být směrodatná odchylka podhodnocená.

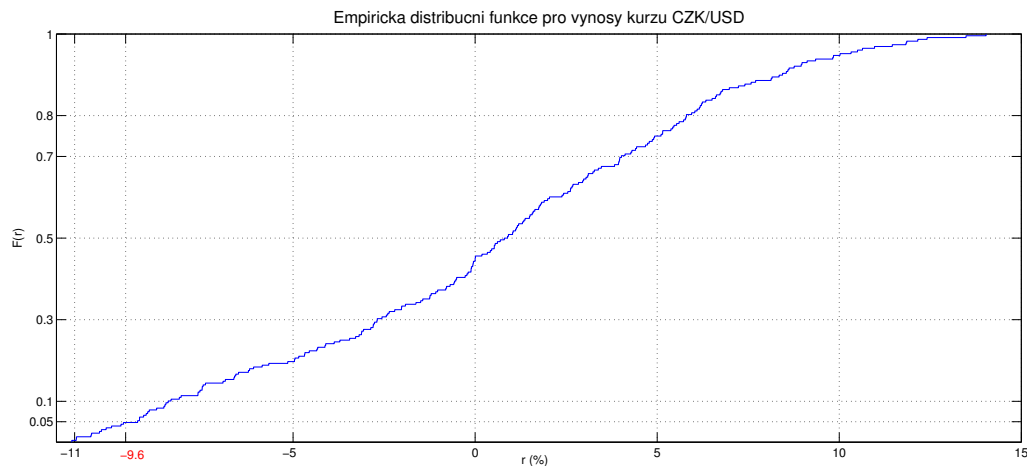
Budeme-li tedy předpokládat, že kolísavost kurzů (a tedy měr výnosu z nich) bude pokračovat i v roce 2010, a chceme přitom, alespoň částečně, zohlednit vliv výkyvů z přelomu let 2008 a 2009, spočítáme výběrovou směrodatnou odchylku denních výnosů kurzů pouze z dat roku 2009. Potom spočtené hodnoty $Var_{0,05}^{(25)}$ jsou pro kurz CZK/EUR $-5,34\%$, kurz CZK/GBP $-7,49\%$ a kurz CZK/USD $-9,60\%$. Tyto hodnoty ztrát na výnosu by měly být „dosahovány“ nejvýše v 5% případech, což lze opět ověřit porovnáním s empirickou distribuční funkcí výnosů, počítaných dle vztahu (9.1), za rok 2010 v následujících grafech č. 18, 19 a 20.



Graf č. 18 DF výnosů CZK/EUR s vyznačeným VaR (z dat 2009)



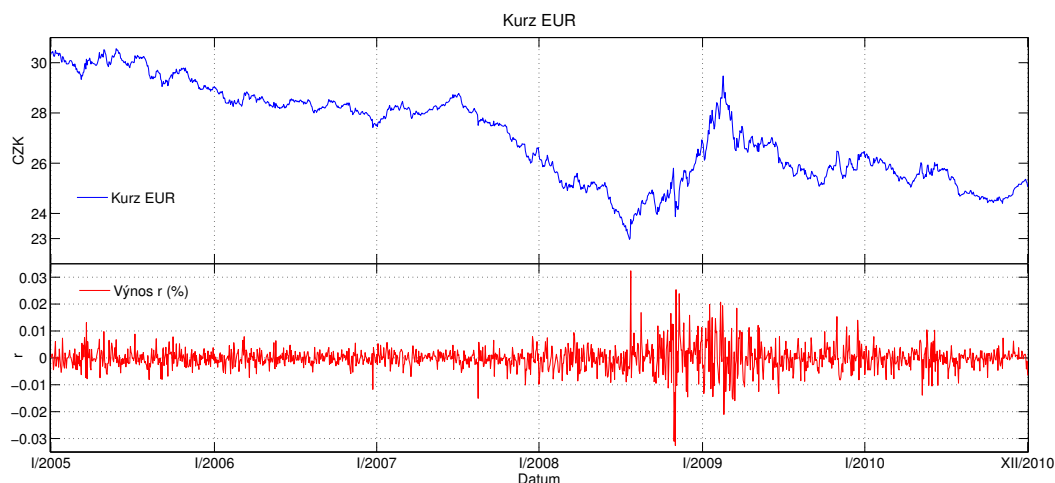
Graf č. 19 DF výnosů CZK/GBP s vyznačeným VaR (z dat 2009)



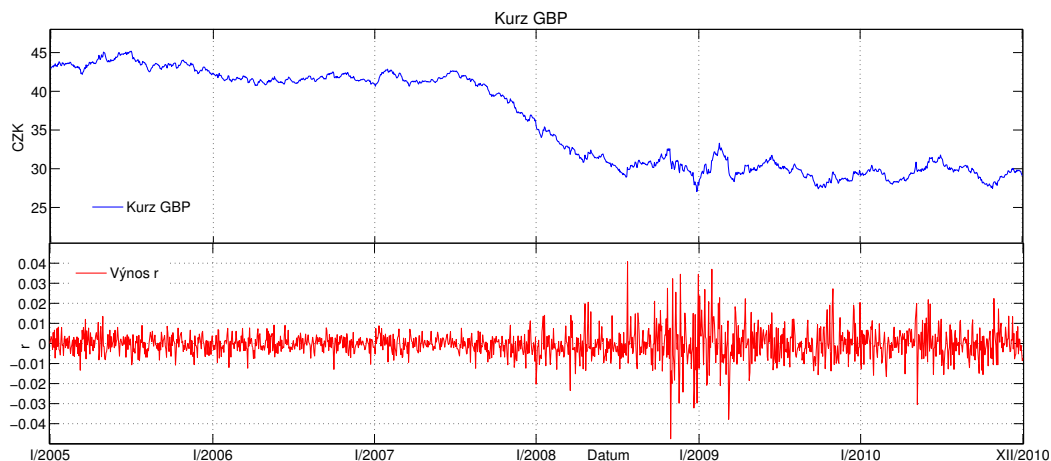
Graf č. 20 DF výnosů CZK/USD s vyznačeným VaR (z dat 2009)

Z grafů vidíme, že po zkrácení časové řady dat a aktualizaci výpočtu již veličina $Var_{0,05}^{(25)}$ lépe odpovídá skutečnosti u kurzů CZK/GBP a CZK/USD, kde v roce 2010 byly ztráty v 95% případů menší než hodnota příslušného $Var_{0,05}^{(25)}$. Naopak u kurzu CZK/EUR došlo k poklesu $Var_{0,05}^{(25)}$ na hodnotu ztráty, která ve skutečnosti v roce 2010 nebyla vůbec realizována. To může být znakem toho, že narozdíl od kurzů CZK/GBP a CZK/USD došlo u kurzu CZK/EUR ke stabilizaci jeho výkyvů, které již nebyly tak značné jako v předchozím roce.

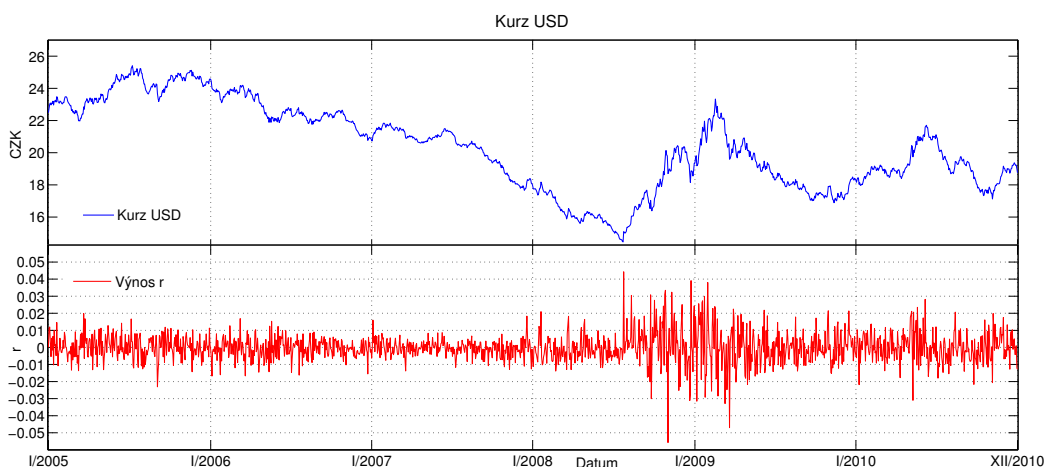
Pro úplnost ještě v grafech č. 21, 22 a 23 uvádím vývoj kurzu a denní míry výnosu v desetinném vyjádření pro období leden 2005 - prosinec 2010.



Graf č. 21 Měnový kurz CZK/EUR a denní míra výnosu, 2005 - 2010



Graf č. 22 Měnový kurz CZK/GBP a denní míra výnosu, 2005 - 2010



Graf č. 23 Měnový kurz CZK/USD a denní míra výnosu, 2005 - 2010

Z vytvořených grafů je vidět, že volatilita kurzů zůstala zachována přibližně na úrovni stavu od poloviny roku 2009. To také potvrzuje předchozí úvahu o zkrácení časové řady a výpočtu směrodatné odchylky, a tím i ukazatele VaR, pouze z dat za rok 2009, čímž se do výpočtu promítla vyšší kolísavost kurzu a s tím spojené větší riziko z případné ztráty způsobené jeho poklesem (u exportního podniku), resp. růstem (u podniku zabývajícího se dovozem).

Metoda VaR se využívá, kromě určení měnového rizika jedné měny, tak jak jsem se tomu věnovala v předchozí části, také k určení **měnového rizika portfolia**, které je složené z různých měn. To ocení především podniky, které obchodují současně s několika zahraničními partnery a jejichž příjmy, resp. platby za zboží, jsou realizovány ve více cizích měnách. Stejně tak je tato metoda vhodným vodítkem pro všechny obchodníky s cizími měnami, kteří nakupují a prodávají měny na měnových trzích za účelem dosažení zisku z pohybu kurzů měn.

Předpokládejme opět případ **exportního podniku**, jehož faktury jsou zahraničními partnery placeny v měnách EUR, GBP a USD. Pro výpočet VaR portfolia dle vztahu (7.9) známe již příslušné hodnoty $Var_{0,05}^{(25)}$, které jsou pro dané měny po řadě $-5,34\%$, $-7,49\%$ a $-9,60\%$. Potřebujeme tedy spočítat matici korelačních koeficientů. Pro výpočet opět použijeme časové řady měnových kurzů za rok 2009. Korelační matice R pro dvacetipětidenní kurzové výnosy za rok 2009 je tvaru

$$R = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,794 & 0,872 \\ 0,794 & 1,000 & 0,739 \\ 0,872 & 0,738 & 1,000 \end{pmatrix},$$

z čehož je zřejmé, že mezi kurzovými výnosy měn je poměrně silná závislost. Nejvíce závislé jsou měny EUR a USD, dále EUR a GBP a nakonec GBP a USD. Pokud tedy podnik bude mít portfolio faktur splatných v těchto měnách, pak vzhledem k pozitivní korelaci roste riziko kurzových ztrát. Dvacetipětidenní $Var_{0,05}^{(P)}$ tohoto portfolia je roven $20,87\%$, což interpretujeme tak, že při investicích do měn EUR, GBP a USD nebude celková ztráta portfolia větší jak $20,87\%$ s pravděpodobností 95% .

9.4 Shrnutí výsledků a zhodnocení

Jak jsem již uvedla v kapitole 9.2 této práce, týkající se ekonomické zdůvodnitelnosti použití metody VaR, vyčíslení měnového rizika má obrovský význam zejména pro ty **podnikatelské subjekty**, které vstupují do obchodních vztahů se zahraničními partnery. Metoda VaR napomáhá k rozhodnutí, zda je měnové riziko pro daný podnik natolik významné, aby mělo smysl se proti němu zajistit. Nejprve je ovšem potřeba vyčíslit předpokládanou ztrátu, ke které může v důsledku změny kurzu dojít, a na základě toho posoudit, je-li takové zajištění se proti riziku pro daný podnik výhodné, či nikoliv. Obdobně **banka** využívá metodu VaR pro vyčíslení maximální očekávané ztráty z daného obchodu, ke které může dojít během daného časového horizontu, ať už se jedná o obchodování s cizí měnou na účet zákazníka (zajišťovací operace), nebo na vlastní účet (nákup a prodej měny na devizových a valutových trzích pro potřeby vlastní směnářské činnosti či vedení cizoměnových účtů), či obchodování s cennými papíry (zejm. akcie), jejichž výnosy v čase vykazují volatilitu stejně jako měnové kurzy.

Co se týče samotných výsledků provedených analýz, zde můžeme učinit několik **závěrů a doporučení**. Především první poznatek se týká **délky časové řady**, kterou použijeme k výpočtům. Z uvedeného příkladu je zřejmé, že záleží na počtu dat a jejich charakteru. Obecně lze říci, že čím vyšší je volatilita sledovaného ukazatele, tím vyšší hodnoty veličiny VaR dostaneme, což značí vyšší riziko vzniku pro nás nepříznivé situace. Pokud jsme použili pro výpočet všechna data za období leden 2005 - prosinec 2009, došlo k tomu, že menší výkyvy míry výnosu v prvních letech kompenzovaly vyšší volatilitu v posledních přibližně dvou letech. Pokud by podnik založil své rozhodnutí na tomto výpočtu, míra rizika, plynoucí z kurzových změn, by byla ve skutečnosti vyšší, než vypočtená. Proto je vhodné zamyslet se právě nad délkou časové řady a vůbec průběhem a charakterem dat a případně výpočty modifikovat tak, aby co nejlépe odpovídaly skutečnosti. Tento postup byl patrný v druhé části, kdy po zkrácení časové řady, z níž se výpočty prováděly, získané výsledky lépe odpovídaly skutečnému stavu.

Dále je potřeba se zabývat **normalitou dat** jakožto předpokladem, na kterém je základní model metody VaR postaven. Z teorie finančních časových řad víme, že míry výnosu, na něž většinou metodu VaR aplikujeme, normálnímu rozdělení nepodléhají. U mnou sledovaných měnových kurzů byl problém zejména s větší špičatostí než u normálního rozdělení, která byla způsobena tím, že nízké míry výnosu se ve skutečnosti vyskytovaly častěji než u rozdělení normálního. Potom je potřeba zohlednit účel, k němuž mají analýzy provedené metodou VaR sloužit. Pokud podniku nepostačují modely založené na předpokladu normality, pak je možné přejít k alternativním modelům uvažujícím jiná vhodná rozdělení. Jejich výhodou je větší přesnost výpočtů, nevýhodou pak značně větší složitost.

Je tedy zřejmé, že v praxi lze použít značné množství modelů VaR, které jsou přizpůsobeny potřebám subjektu, který jej užívá. Já jsem v této práci zvolila jeden z jednodušších modelů, a to zejména z důvodu vysvětlení podstaty metody a rozsahu práce. Hlavní **výhodou** tohoto přístupu v podobě, v jaké jsem jej popsala a použila, je především jeho jednoduchost. Domnívám se, že pro každý podnik, který by tuto metodu chtěl využít k určení měnového rizika, které podstupuje, by nebyl problém **zavedení metody do praxe**.

Pro podnik obchodující se zahraničím v menších objemech a ne příliš často, jehož faktury mají splatnost 1 měsíc, bude stačit vyčíslení měsíčního VaR výše popsaným způsobem. Vypočtenou možnou budoucí ztrátu může částečně zahrnout do ceny svého produktu, nebo se proti ní vhodným způsobem zajistit. Pro podnik, jenž obchoduje se svým zahraničím denně a jehož pohledávky v cizí měně se pohybují v řádech milionů korun, může postupovat metodicky stejně, ovšem pravděpodobně bude sledovat VaR v častějších intervalech. Naproti tomu banka, která obchoduje jak s valutami, tak devizami na svůj účet i účet klienta, a sama ještě funguje jako subjekt, poskytující nástroje k zajištění měnového rizika, bude muset metodicky upravit výpočet VaR tak, aby vyhovoval jejím potřebám. Ačkoliv princip, na kterém metoda VaR funguje, zůstane stejný, model se mnohonásobně zesložití již jen upuštěním od normálního rozdělení, či přidáním doplňujících rizikových faktorů (například pohyb úrokových sazeb na cizoměnových účtech).

Ve všech případech je však potřeba výsledek provedených analýz vztáhnout k podmínkám dané instituce, která vytvořený model používá. I když některé výstupy jsou obecně platné (například poznatek o volatilitě sledovaného ukazatele), závěry vyvozené z provedených výpočtů jsou již vysoce individuální. V případě jednoho podniku může být určitá míra rizika přijatelná, pro jiný podnik může být stejná míra rizika likvidační. Též je vždy potřeba zvážit, zda dané zajišťovací opatření přijmout nebo ne, a to zejména s ohledem na podstupované riziko a náklady na zajištění. Pokud se podnik pro zajištění rozhodne, nabízí se použít vhodné zajišťovací instrumenty měnového trhu, například měnové forwardy (dohody o budoucím měnovém kurzu). Jedná se o obchod, kdy podnik s bankou uzavře dohodu, v níž se zavazuje k prodeji (resp. nákupu) cizí měny za české koruny v kurzu, který v budoucnu očekává. V případě očekávání nižších ztrát je možné určitou míru rizika plynoucí z pohybu kurzu zahrnout již do ceny transakce, kdy v podstatě případnou ztrátu plynoucí z poklesu kurzu hradí odběratel našeho zboží v ceně produktu. Opět je však vhodné mít pro takovéto rozhodnutí podklad v podobě provedené rizikové analýzy metodou VaR, která je v poslední době čím dál více využívaným přístupem k určení míry rizika.

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo především ukázat možnosti použití některých metod z oblasti analýzy časových řad na reálných datech. Jelikož teorie časových řad je co do metodologie velice rozsáhlá a oblast ekonomických a finančních řad prochází neustálým rozvojem, zvolila jsem pro ilustraci metody, které lze, dle mého názoru, poměrně snadno aplikovat do praxe.

Zejména v případě analýzy první časové řady jsem se snažila o použití více metod a přístupů k jejímu modelování, abych mohla poukázat na jejich výhody a nevýhody a případně určit, který přístup je nejvhodnější. V průběhu zpracování práce jsem došla k závěru, že vedle volby matematicko-statistického přístupu k modelování časové řady je nutné zvažovat také ekonomickou podstatu problému, který řešíme. Mnohdy je pak potřeba volit určité kompromisní řešení, například pokud složitější model lépe vystihuje reálnou situaci.

Přístupy a aplikace, kterými jsem se v této práci zabývala, jsou do určité míry modelové - ukazují, jakým způsobem lze pomocí metodologie z oblasti časových řad přistupovat k praktickému řešení z oblasti reálné hospodářské praxe. Ačkoliv použité metody byly demonstrovány, vzhledem k dostupnosti dat, na časových řadách z oblasti bankovníctví, mohou být obdobné modely stejně dobře využity též v podnikatelské sféře (model pokladní hotovosti pro konkrétní podnik), stejně jako pro jednotlivce (analýza měnového kurzu pro investory - spekulanty na měnových trzích), a to ať už v podobě, v jaké jsem je zde uvedla, či v určité modifikaci, s přidáním dalších parametrů, zesložitěním, či zjednodušením modelu. Oblast časových řad a metod, které se k jejich analýze používají, je natolik pestrá, že možností jak daný problém pojmut a zpracovat je nepřeborné množství.

Proto věřím, že čtenář, kterému se tato práce dostane do rukou, v ní najde inspiraci jak využít teorii časových řad k řešení praktických problémů a že pro něj bude její přečtení přínosem. Doufám, že i já ve své budoucí praxi budu moci své poznatky nabyté zpracováním této práce využít a k tématu analýzy časových řad se ve svém budoucím profesním životě vrátím.

Literatura

- [1] Anděl, J. *Statistické metody*. 3. vydání. Praha: Matfyzpress, 2003. 299 s. ISBN: 80-86732-08-8.
- [2] Arlt, J., Arltová, M. *Ekonomické časové řady:[vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]*. 1. vydání. Praha: Grada, 2007. 285 s. ISBN: 978-80-247-1319-9.
- [3] Arlt, J., Arltová, M. *Finanční časové řady:[vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]*. 1. vydání. Praha: Grada, 2003. 220 s. ISBN: 80-247-0330-0.
- [4] Arlt, J., Arltová, M., Rublíková, E. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. 2.vydání. Praha: Oeconomica, 2004. 146 s. ISBN: 80-245-0777-3.
- [5] Blatná, D. *Metody statistické analýzy*. 4. vydání. Praha: BIVŠ, 2009. 92 s. ISBN: 978-80-7265-143-6.
- [6] Blatná, D. *Srovnávací analýza metod pro krátkodobé extrapolací prognózy časových řad*. 1. vydání. Praha: Český statistický úřad, 1995. 102 s. ISBN: 80-85949-00-8.
- [7] Bowerman, B.L., O'Connell, R. T. *Applied Statistics: Improving Business Processes*. 1. vydání. Chicago: Richard D. Irwin, 1997. 1273 s. ISBN: 0-256-19386-X.
- [8] Box, G. E. P., Jenkins, G. M. *Time series analysis, forecasting and control*. 2. vydání. San Francisco, 1976. 575 s. ISBN: 0-8162-1104-3.
- [9] Cipra, T. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. 1. vydání. Praha: SNTL, 1986. 248 s.
- [10] Czesaný, S., Macháčková, J., Sedláček, P. *Monitorování a analýza hospodářského cyklu*. Praha: Český statistický úřad, 2007. 31 s. ISBN: 978-80-250-1401-1.
- [11] Černošáková, E., Sato, A., Taušer, J. *Finanční strategie v mezinárodním podnikání*. 1. vydání. Praha: ASPI, 2007. 317 s. ISBN: 978-80-7357-321-8.
- [12] Forbelská, M. *Stochastické modelování jednorozměrných časových řad*. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2009. 245 s. ISBN: 978-80-210-4812-6.
- [13] Hindls, R., Hronová, S., Seger, J. *Statistika pro ekonomy*. 1. vydání. Praha: Professional Publishing, 2002. 415 s. ISBN: 80-86419-26-6.
- [14] Jarett, J. *Business Forecasting Methods*. 1. vydání. Oxford: B. Blackwell, 1989. 346 s. ISBN: 0-631-15346-2.

- [15] Kašparovská, V. *Řízení obchodník bank: vybrané kapitoly*. 1. vydání. Praha: C. H. Beck, 2006. 339 s. ISBN: 80-7179-381-7.
- [16] Klímek, P. *Ekonomické aplikace statistiky a data miningu*. 1. vydání. Bučovice: Martin Stříž, 2008. 342 s. ISBN: 978-80-87106-10-5.
- [17] Kolektiv autorů. *Bankovníctví*. 5. vydání. Praha: Bankovní institut vysoká škola, 2005. 280 s. ISBN 80-7265-080-7
- [18] Kozák, J., Arlt, J., Hindls, R. *Úvod do analýzy ekonomických časových řad*. 1. vydání. Praha: VŠE, 1994. 208 s. ISBN 80-7079-760-6.
- [19] *Matematika a řízení rizik 2008/2009*. Univerzita Karlova. 1. vydání. Praha: Matfyzpress, 2009. 72 s. ISBN: 978-80-7378-081-4.
- [20] Marček, M. *Viacnásobná statistická analýza dat a modely časových radov v ekonomii*. 1. vydání. Opava: Slezská univerzita, 2009. 242 s. ISBN: 978-80-7248-513-0.
- [21] Montgomery, D.C., Gardiner, J.S., Johnson, L.A. *Forecasting and Time Series Analysis*. 2. vydání. New York: McGraw-Hill, 1990. 381 s. ISBN: 0-07-042858-1.
- [22] Radová, J., Dvořák, P., Málek, J. *Finanční matematika pro každého*. 7. aktualiz. vyd. Praha: Grada, 2009. 293 s. ISBN: 978-80-247-3291-6.
- [23] Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D., Gregor, M.: *Ekonomie: 18. vydání*. 1. vydání. Praha: NS Svoboda, 2007. 775 s. ISBN: 978-80-205-0590-3
- [24] Sartoris, W. L., Hill, N. C. *Cash Management Course*. 1. vydání. New York: McGraw-Hill, 1993. 274 s. ISBN 0-07-054936-2.
- [25] Sekerka, B. *Řízení bankovních rizik*. 1. vydání. Praha: Profess, 1998. 203 s. ISBN 80-85235-56-0.
- [26] Seger, J., Hindls, R. *Statistické metody v ekonomii*. 1. vydání. Jinočany: H+H, 1993. 445 s. ISBN: 80-85787-26-1.
- [27] Zapletal, J. *Úvod do analýzy ekonomických časových řad*. 1. vydání. Brno: Vysoké učení technické, 2000. 112 s. ISBN: 80-214-1719-6
- [28] Ziegler, K. a kol. *Finanční řízení bank*. 1. vydání. Praha: Bankovní institut vysoká škola, 2005. 204 s. ISBN 80-7265-078-5
- [29] Metodický list k časové řadě „Pokladna“, dostupné z URL: <http://www.cnb.cz/docs/arady/met_list/b112_cs.pdf> [15.7.2010]

- [30] Data časové řady „Pokladna“, dostupné z URL:<[> \[15.7.2010\]](http://www.cnb.cz/cnb/STAT.ARADY_PKG.VYSTUP?p_period=1&p_sort=1&p_des=2&p_sestuid=1897&p_uka=2&p_strid=ABAA&p_od=200501&p_do=201012&p_lang=CS&p_format=0&p_decsep=.)
- [31] Pravidla řízení likvidity - Opatření ČNB, dostupné z URL:<[> \[21.10.2010\]](http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislativa/vestnik/2001/asas/v_2001_6.pdf)
- [32] Časové řady měnových kurzů, dostupné z URL:<[> \[20.8.2010\]](http://www.cnb.cz/cs/financni_trhy/devizovy_trh/kurzy_devizoveho_trhu/vybrane_form.jsp)
- [33] Zákon č. 563/1991 Sb., o účetnictví. URL:<[> \[20.8.2010\]](http://business.center.cz/business/pravo/zakony/ucto/)
- [34] Zákon č. 21/1992 Sb., o bankách. URL:<[> \[30.7.2010\]](http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislativa/zakony/download/zakon_o_bankach.pdf)