



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

NÁVRH A KONSTRUKCE UKÁZKOVÉ ÚLOHY DO PŘEDMĚTU PPI

DESIGN AND CONSTRUCTION OF THE TASK TO THE SUBJECT PPI

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JIŘÍ KRÁL

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ NÁVRAT, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jiří Král

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Mechatronika (3906R001)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Návrh a konstrukce ukázkové úlohy do předmětu PPI

v anglickém jazyce:

Design and construction of the task to the subject PPI

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce je zaměřena na vytvoření ukázkové úlohy do předmětu PPI. Konkrétně může být realizována rovinná prutová soustava, na které bude možno určovat posuvy jednotlivých styčnicků a sil v prutech.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je:

- navrhnout ukázkovou úlohu do PPI (prutová soustava, uložení prutu apod.)
- vytvořit výpočtový model
- realizovat konstrukci (výstupem bude fyzický model)

Seznam odborné literatury:

Florian, Z., Ondráček, E., Příkryl, K.: Mechanika těles - Statika, Brno, 1992

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 15.2.2011

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá vytvořením výpočtového modelu pro určení napjatosti a deformací rovinné prutové soustavy. Na základě tohoto modelu je pak následně vytvořen fyzický model určený pro výukové účely. S využitím tenzometrů bude měřeno napětí jednotlivých prutů soustavy. V závěru budou prezentovány případné rozdíly mezi teoretickým a reálným modelem.

Abstract

The bachelor thesis deals with creating of computational model for definition of tensity and deformations of bars system. Then the physical model is made according to the theoretical model. This physical model is used for educational purposes. Next step is measurement of stress and deformation of bars. The final part is focused on eventual variations between theoretical and real model.

Klíčová slova

prutové soustavy, pružnost, pevnost, mezní stavy, tenzometry, měření napětí, výukové modely, výpočtové modely, statická určitost, Castiglianova věta,

Keywords

bars systems, elasticity, strength, ultimate state, strain gauges, stress measurement, educational models, computational model, static determination, Castigliano's theorem

Bibliografická citace

KRÁL, J. Návrh a konstrukce ukázkové úlohy do předmětu PPI. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 30 s + IV s příloh. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedených pramenů a literatury.

V Brně:

.....

podpis

Poděkování

Zde bych chtěl poděkovat všem, kteří mi pomohli při řešení problémů vzniklých během tvorby mé bakalářské práce. Zejména bych uvedl vedoucího mé práce, kterým byl Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

Obsah

1. Úvod.....	2
2. Prutové soustavy	3
3. Teoretické podklady.....	5
3.1. Statické předpoklady.....	5
3.2. Vnější statická určitost.....	6
3.3. Vnitřní statická určitost	6
3.4. Metody řešení	7
3.5. Předpoklady dle Pružnosti a Pevnosti I.....	8
3.6. Napjatost prutové soustavy	10
3.7. Castiglianova věta	12
3.8. Mezní stavy, bezpečnost	14
4. Výpočtový model	17
4.1. Posouzení statické určitosti	17
4.2. Výpočet prutových sil	19
4.3. Výpočet napětí	21
4.4. Výpočet posuvu styčnicku	21
4.5. Výpočet bezpečnosti	22
5. Reálný model.....	24
5.1. Tenzometrie.....	27
6. Závěr	28
7. Použité prameny	29
8. Seznam příloh.....	30

1. Úvod

Bakalářská práce vychází z obsáhlé problematiky mechaniky těles, která je vyučována na Fakultě strojního inženýrství VUT. Konkrétně jsem zde čerpal znalosti z oblasti Pružnosti a Pevnosti a pak ze Statiky. Já jsem z těchto oblastí využil informace vztahující se k řešení prutových soustav. Tuto problematiku jsem pak v práci rozdělil do tří hlavních částí.

V první části uvádím teoretický popis prutových soustav. Tato teorie vlastně popisuje odlišnosti mezi praktickými realizacemi soustav z kapitoly první a soustavami, které jsou náplní výuky na FSI. Plynule zde přecházím ze Statiky k Pružnosti a Pevnosti.

Druhá část práce obsahuje výpočtový model. Všechny výpočty použité pro tento model vychází právě z části první. Konkrétně jsem zde musel navrhnout rozměrové parametry soustavy. Dále jsem zde řešil namáhání soustavy při určitém zatížení a s tím spojené výpočty napětí, pohybu soustavy a také bezpečnost. Tyto výpočty a návrh jsem musel několikrát opakovat tak, aby soustava vyhověla bezpečnosti.

Poslední část se pak věnuje návrhu a realizaci konkrétní fyzického modelu. Tento model vychází z modelu výpočtového uvedeného ve druhé části. Uvedl jsem zde řešení všech částí, které bylo nutné vyrobit. Také jsem tu uvedl veškerá úskalí při realizaci součástí. Samozřejmostí byla tvorba výrobních výkresů jednotlivých součástí, které jsou přiloženy v přílohách práce. Reálný model pak slouží k měření teoreticky vypočtených hodnot a jejich vzájemnému porovnání s teorií.

Z těchto částí jsou jasné cíle této práce. Jsou jimi: sestavení výpočtového modelu na základě teoretických znalostí, návrh a realizace fyzického modelu pro měření mechanických veličin.

2. Prutové soustavy

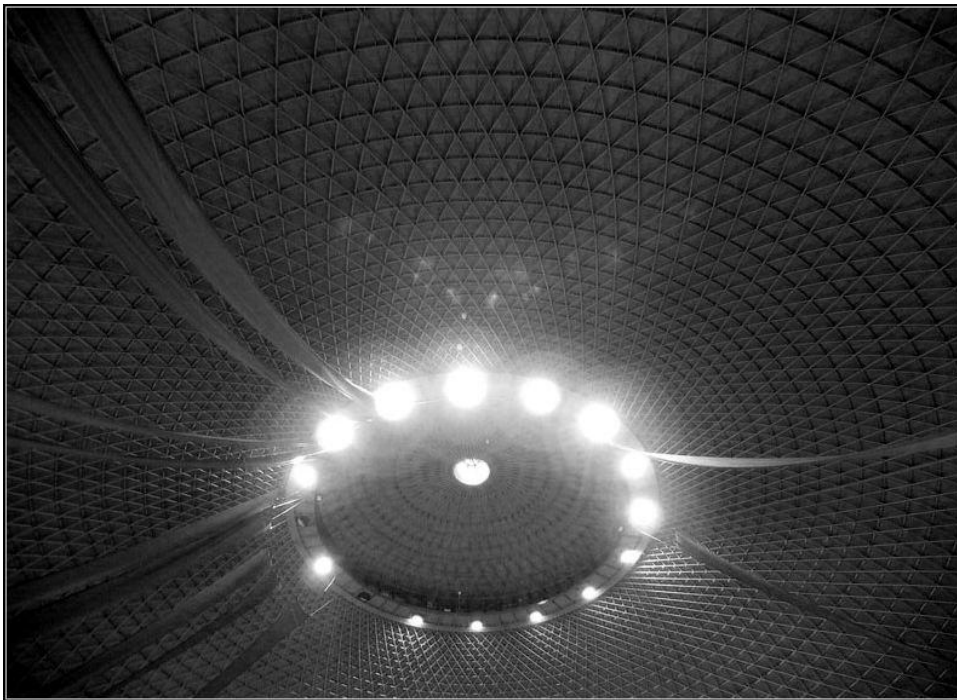
Konstrukce skládající se z jednotlivých prutů je možné nalézt na mnoha místech. Můžeme se s nimi setkat velmi často v dopravním stavitelství, kdy jsou pomocí prutových konstrukcí, jinak nazývaných příhradové konstrukce, realizovány například železniční mosty nejrůznějších velikostí.



Obr. 1: železniční příhradový most nedaleko Chebu-převzato z [2]

Boční příhradové nosníky [5] mostu na Obr. 1, velmi názorně reprezentují prutové konstrukce, kterými se zabýváme v Pružnosti a Pevnosti I.

Nemalé zastoupení lze nalézt v architektuře, kde dovolují realizaci rozsáhlých nosných konstrukcí. Pro příklad není třeba chodit daleko, protože pavilon Z brněnského výstaviště a jeho kopule s průměrem 93m^[9] je dobrou ukázkou.



Obr. 2: pohled na kopuli pavilonu Z brněnského výstaviště-převzato z [4]

Z mého pohledu studenta FSI je dobré vědět, že prutové konstrukce lze nalézt i v případě konstrukcí strojů a zařízení. Snadno rozpoznatelným zástupcem mohou být věžové jeřáby používající se ve stavebnictví. Na obrázku níže je dobře vidět že jednotlivé segmenty se skládají z jednoduchých prutových konstrukcí.



Obr. 3: jednotlivé segmenty určené pro stavbu věžového jeřábu-převzato z [3]

Z nemnoha výše uvedených příkladů je patrné, že znalost problematiky prutových konstrukcí je poměrně užitečná a mohu si tím položit základy pro řešení složitějších konstrukcí.

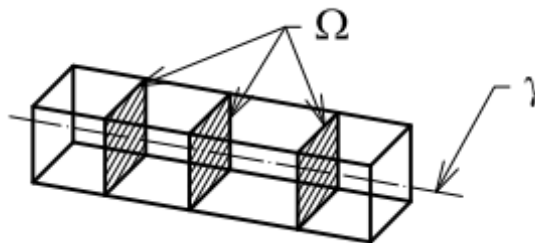
3. Teoretické podklady

V první části mé práce uvedu teoretický rozbor a problematiku, jakou jsem použil pro řešení výpočtového modelu. Jsou zde uvedeny předpoklady z hlediska statiky a pružnosti a také možnosti řešení prutových soustav.

3.1. Statické předpoklady

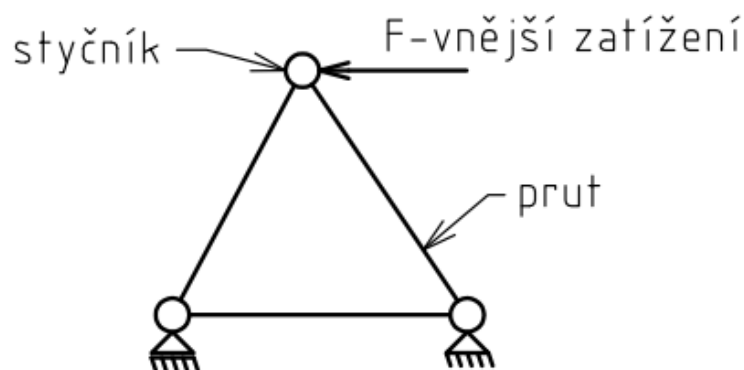
Statické předpoklady definují, z čeho se prutová konstrukce skládá a jak je možné ji zatížit z pohledu statiky [6].

- Vazby mezi pruty jsou realizovány pomocí rotačních kinematických dvojic v případě rovinných soustav, což je můj řešený případ.
- Soustavy jsou složeny z prutů nebo styčnickových těles. Prut je určen střednicí γ , která představuje spojnici těžišť příčných průřezů Ω prutu. Takto definovaný prut může nabývat nejrůznějších tvarů. V mém případě se však omezím pouze na případ přímých prutů.



Obr. 4: střednice prutu se znázorněnými příčnými průřezy

- Styčnickové těleso, dále jen styčnick, je střed kinematických dvojic mezi jednotlivými vázanými pruty.
- Vnější zatížení soustavy je realizováno pouze přes styčnicky (viz Obr. 5). Tento předpoklad je vzhledem k realitě velmi omezující, protože málokterá soustava je zatížena pouze podle tohoto předpokladu. S tím souvisí i uložení soustavy k základnímu tělesu, které je realizováno taktéž pouze pomocí styčnicků prostřednictvím kinematických silových dvojic.

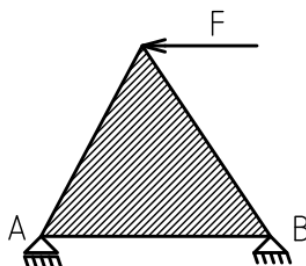


Obr. 5: jednotlivé prvky soustavy

Tímto jsem si stanovil základní předpoklady pro řešení prutových soustav a je možné začít s řešením, na jehož konci získám síly působící na jednotlivé pruty.

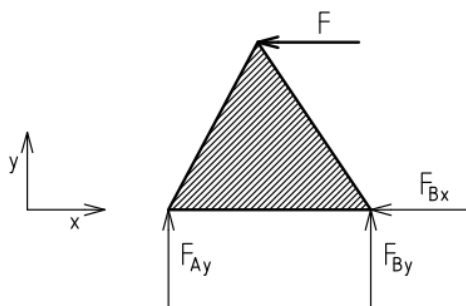
3.2. Vnější statická určitost

Při řešení vnější určitosti [6] je možné uvažovat soustavu jako jedno těleso, kdy mě jako řešitele nezajímá z čeho je toto těleso složeno (viz Obr. 6).



Obr. 6: těleso pro určení vnější určitosti

Z obrázku výše je vidět, že uvažované těleso je k základnímu tělesu vázáno pomocí dvou vazeb *A*, *B*. Vazba *A* je obecná, vazba *B* je rotační. Pro zjištění určitosti je třeba tyto vazby uvolnit a nahradit je tak odpovídajícími silovými účinky. Obecná vazba se nahrazuje jednou silou, rotační vazba pak dvojicí sil (viz. Obr. 7).

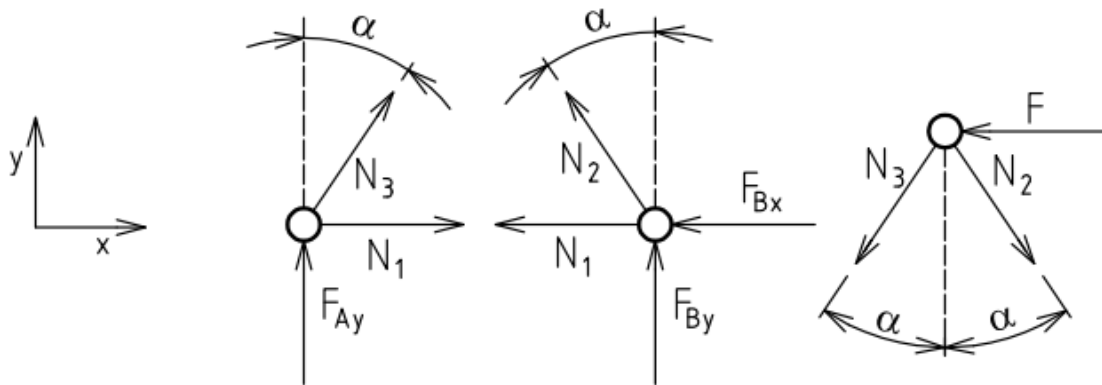


Obr. 7: uvolněné těleso

Pro vnější určitost si zavedu označení s_{ex} a pro její určení lze sestavit jednoduchou rovnici $\mu_{ex} - \nu_{ex} = s_{ex}$, kde μ_{ex} jsou vnější neznámé parametry, zde síly F_{Ay} , F_{By} , F_{Bx} , ν_{ex} udává počet použitelných statických podmínek pro danou silovou soustavu. V mém případě se jedná o obecnou rovinnou soustavu sil, pro kterou platí $\nu_{ex} = 3$ a z toho jsou dvě silové ν_F a jedna momentová ν_M statická podmínka. Po dosazení získám, že $0 = s_{ex}$ z čehož vyplývá, že těleso je staticky určitě uložené.

3.3. Vnitřní statická určitost

Pro vyřešení vnitřní statické určitosti [6] je třeba uvolnit pruty a styčníky prutové soustavy. Na každý uvolněný prut bude působit jedna síla, která bude ležet na střednici prutu. Kladný smysl této síly je orientován ven z prutu. Při uvolňování styčniců je třeba respektovat princip akce a reakce. Síly z uvolněných prutů budou tedy na styčníku orientovány opačným směrem. Pro početní řešení stačí uvolnit pouze styčníky, jak je uvedeno na obrázku níže.



Obr. 8: uvolněné styčníky

Po uvolnění styčníků je patrné, že na každý styčník působí centrální rovinná soustava sil. Vnitřní statickou určitost si nazvu sin a lze napsat, že pokud platí rovnost $2k - 3 = p$, pak je soustava vnitřně staticky určitá. Písmeno k prezentuje počet styčníků soustavy, p je počet prutů soustavy, číslo 2 mi říká, kolik statických podmínek mohu použít pro každý styčník a číslo 3 pak kolik statických podmínek musím odečíst, protože již byly použity pro výpočet vnější statické určitosti. Po dosazení získám rovnost $3 = 3$, soustava je tedy vnitřně staticky určitá.

3.4. Metody řešení

Nyní jsem konečně dospěl k bodu, kdy je možné určit jednotlivé síly působící v prutech. Pro jejich stanovení existuje více metod, já zde nastíním pár z nich a ukázkový výpočet předvedu pro metodu, kterou jsem zvolil pro řešení výpočtového modelu (viz. kapitola 4).

Obecná styčníková metoda

Tato metoda [6] spočívá v úplném uvolnění celé soustavy z Obr. 5. Pro uvolněné styčníky dle Obr. 8, mohu napsat rovnice statické rovnováhy, které pak tvoří soustavu lineárních rovnic. Takovou soustavu pak mohu přepsat do maticového zápisu ve tvaru

$$Ax=b, \quad (3.1)$$

kde A je matice soustavy, x je matice neznámých parametrů, v mém případě prutové síly a síly ve vazbách a matice b obsahuje úplně zadané silové parametry. Pro takové řešení je vhodné zvolit nějaký výpočtový software, protože pro větší prutovou soustavu mohou být matice poměrně velké a ruční výpočet poměrně obtížný.

Postupná styčníková metoda

Je to metoda [6], kterou lze použít na řešení staticky určitých soustav. Nejprve si musím zvolit styčník, u kterého začnu řešit výpočet. Volba prvního styčníku je důležitá s hlediska dalších výpočtů. Jako první si vyberu takový styčník, na který mimo úplně zadaných silových parametrů, působí pouze dva další neznámé silové parametry. V mém případě je to styčník, na který působí vnější úplně zadaná síla F a také prutové síly N_2 , N_3 neznámé velikosti. Pro tento styčník si pak sestavím rovnice rovnováhy ve dvou osách (viz. 3.2).

$$\begin{aligned} \sum F_x : N_2 \cdot \sin(\alpha) - F - N_3 \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ \sum F_y : -N_2 \cdot \cos(\alpha) - N_3 \cdot \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Z rovnic rovnováhy bych získal prutové síly N_2 a N_3 jako funkci zadané síly F . Dále mohu řešit styčník s vazbou A, na který opět působí známá prutová síla N_3 a pouze dva neznámé silové parametry N_1 , F_{Ay} . Po sestavení rovnic statické rovnováhy (3.3) mohu tyto parametry vypočítat.

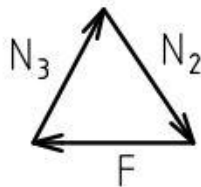
Z tohoto postupu je patrné, že pro určení sil v prutech jsem nepotřeboval výpočty pro všechny styčníky. Pro úplnost uvedu rovnice statické rovnováhy také pro poslední styčník, ze kterého je možné získat síly vznikající v rotační vazbě.

$$\begin{aligned} \sum F_x : N_3 \cdot \sin(\alpha) - N_1 &= 0 \\ \sum F_y : F_{Ay} + N_3 \cdot \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \sum F_x : -N_1 - F_{Bx} - N_2 \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ \sum F_y : F_{By} + N_2 \cdot \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Grafické řešení

Z výše uvedené postupné styčníkové metody vychází také grafické řešení [5]. Pokud budu uvažovat jednoduchou soustavu dle Obr. 5, pak musím nejprve stanovit z podmínek statické rovnováhy síly vznikající ve vazbách. Stejně jako u postupné metody, začínám řešení od styčníku, ve kterém jsou neznámé pouze dva silové parametry. Tyto síly se pak postupně zakreslují do silových obrazců jednotlivých styčníků. Například pro styčník A bude obrazec vypadat tak, jak je uvedeno na Obr. 9.



Obr. 9: silový obrazec

Nejprve je nutné v patřičném měřítku vynést známou sílu F , ke které se následně sestrojí dvě přímky svírající úhel 2α a jejich průsečík určí velikost N_2 , N_3 . V pravdě si nedokážu představit grafické řešení složitějších prutových soustav.

3.5. Předpoklady dle Pružnosti a Pevnosti I

Díky zavedení několika omezení a předpokladů ze statiky, jsem byl schopen určit síly působící na jednotlivé pruty. Pro určení „jak moc“ jsou pruty namáhány, je však potřeba zavést další předpoklady, tentokrát z oblasti pružnosti a pevnosti [1].

Prutové předpoklady

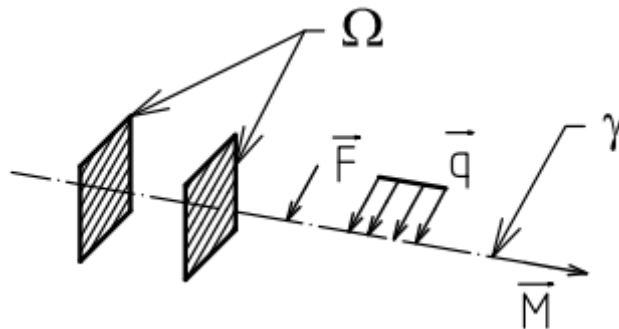
Tyto předpoklady popisují model reálného tělesa z hlediska napjatosti a deformace [1].

1. Geometrické předpoklady

- Prut je určen střednicí γ a v každém bodě střednice je určen příčným průřezem Ω (viz Obr. 4). Tento předpoklad je stejný jako v případě statických předpokladů uvedených výše. Průsečík střednice γ a příčného průřezu Ω je těžištěm příčného průřezu.
- Střednice γ je spojitá a hladká křivka.
- Příčný průřez je spojitá nebo vícenásobně spojitá souvislá oblast ohraničená obrysovou křivkou. Takto definovaný průřez lze popsat průřezovými charakteristikami.
- Délka střednice je řádově větší jak největší rozměr příčného průřezu.

2. Vazbové a zatěžovací předpoklady

- Vazby prutu omezují jen posuvy a úhly natočení střednice.
- Zatížení působí pouze na střednici. Silové působení tedy prezentují osamělé, liniové síly, silové dvojice (viz Obr. 10).



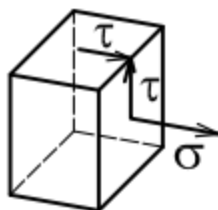
Obr. 10

3. Deformační předpoklady

- Střednice zůstává při deformaci spojitá a hladká.
- Příčné průřezy zůstávají při deformaci rovinné a kolmé k deformované střednici. Podle charakteru zatěžování lze rozlišit průřezy:
 - a) vzájemně se oddalující nebo přibližující a deformující se – tah/tlak
 - b) natáčeující se kolem osy ležící v průřezu a deformující se – ohyb
 - c) natáčeující se kolem osy kolmé k průřezu a nedeformující se – krut
 - d) posouvající a nedeformující – smyk

4. Napjatostní předpoklady

- Napjatost v bodě prutu je dána smykovým napětím τ v příčném průřezu a normálovým napětím σ , tak jak je znázorněno na obrázku 11. Takový typ napjatosti je nazýván jako prutová napjatost.



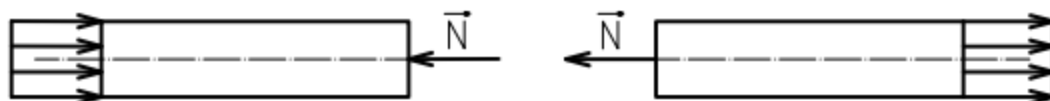
Obr. 11: prutová napjatost na elementárním prvku

3.6. Napjatost prutové soustavy

Tak jak jsem výše uvedl, na pruty soustavy působí prutové síly, jejichž nositelka je totožná se střednicí prutu. Tyto síly způsobují namáhání tlakem resp. tahem.

Prostý tah a tlak

Při namáhání prostým tahem a tlakem je jedinou složkou VVÚ normálová síla [1]. V případě namáhání tlakem je tato normálová síla orientována proti směru vnější normály, tedy míří „do prutu“. V případě tahu je pak orientována v kladném směru vnější normály a míří tak „z prutu“, tak jak je pro názornost uvedeno na obrázku 12.



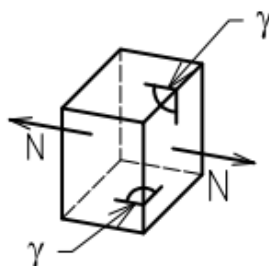
Obr. 12: orientace normálových sil

V mém případě uvažuji homogenní, lineárně pružný materiál, pro který platí:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \tau = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \gamma \quad (3.5)$$

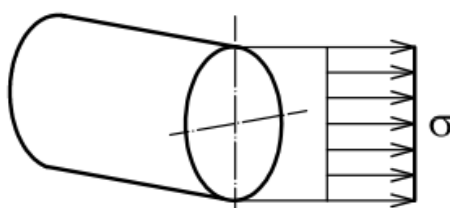
Význam veličin v rovnicích (3.5) je následující, E modul pružnosti v tahu, ε délkové přetvoření zde ve směru střednice, μ součinitel příčné deformace (Poissonovo číslo), γ je úhlové přetvoření.

Při namáhání tahem a tlakem se příčné průřezy prutů pouze oddalují nebo přibližují, z čehož plyne, že úhlová přetvoření γ jsou nulová a smykové napětí je taktéž rovno nule. Při výpočtech je tedy nutno stanovit pouze normálové napětí.



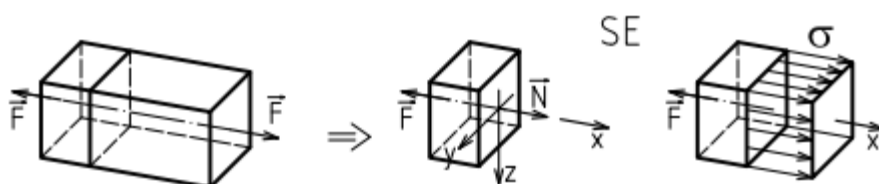
Obr. 13: úhlová přetvoření

Za předpokladu, že E je společně s ε v průřezu konstantní, pak lze říci, že normálové napětí bude v tomto průřezu konstantní. Takto vzniklá napjatost se označuje jako jednoosá



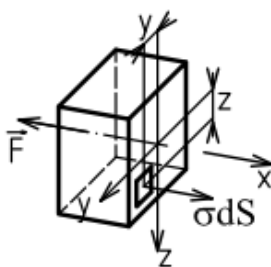
Obr. 14: napětí v průřezu

Z výše uvedeného vztahu (3.5) lze napětí σ vypočítat, nicméně málokdy je známá hodnota ε ba naopak je často nutné ji vypočítat. Proto níže uvedu, jak napětí vypočítat pomocí známých průřezových charakteristik a pomocí normálové síly. Z prutu zatíženého silou F si uvolním elementární prvek podle obrázku 11.



Obr. 15

Pro takto uvolněný prvek použijí podmínku statické ekvivalence [6] $dN = \sigma dS$.



Obr. 16

Teď je možné sestavit podmínky statické rovnováhy statické ekvivalence.

$$\begin{aligned} \sum F_x : \quad & \iint \sigma_x ds = N \\ \sum M_{oy} : \quad & \iint z \cdot \sigma dS = M_{oy} \\ \sum M_{oz} : \quad & \iint y \cdot \sigma dS = M_{oz} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ze silové rovnováhy za předpokladu $\sigma_x = konst.$, vyplívá vztah $\sigma = N/S$. Z tohoto vztahu už mohou snadno vypočítat tahové resp. tlakové napětí, protože tvar a rozměry průřezu jsou většinou známé a pro určení N je potřeba znát VVÚ.

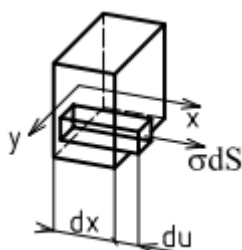
3.6.1. Energie napjatosti

Díky znalosti této energie mohou pomocí Castiglianovy věty dále vypočítat posuvy libovolného styčnicku prutové soustavy.

V oblasti lineární pružnosti je energie napjatosti tělesa dána deformační prací působících sil a nezáleží přitom na druhu sil, tedy jestli je to osamělá síla, silová dvojice či soustava těchto sil [7]. V mém případě je každý prut zatížen jedinou osamělou prutovou silou. Pro osamělou sílu je deformační práce dána vztahem

$$A_F = \frac{1}{2} \cdot F \cdot u_F \quad (3.7)$$

kde F je působící síla, u_F posuv působíště této síly. Pokud si uvolním elementární prvek podle obrázku 13, pak mohou ve vztahu (3.7) sílu F zapsat jako σdS , u_F jako du .



Obr. 17

Ze zvyše zmíněných vztahů vím, že $du = \varepsilon dx$, $\varepsilon = \sigma/E$ a vztah (3.5) mohou přepsat jako

$$A_F = \iint \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{ES^2} dS dx = \frac{N^2 dx}{2ES^2} \int dS = \frac{N^2 dx}{2ES} \quad (3.8)$$

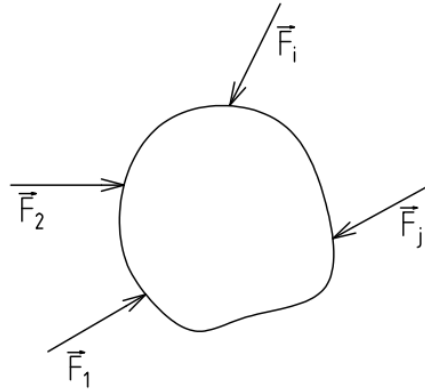
Pokud se tedy změna energie napjatosti W rovná celé deformační práci A_F , pak lze pro prut délky l zapsat akumulovanou energii napjatosti jako

$$W = \int_0^l \frac{N^2}{2ES} dx \quad (3.9)$$

kde N je normálová síla, E modul pružnosti v tahu, S plocha průřezu.

3.7. Castiglianova věta

Tuto větu využiji pro výpočet posuvu libovolného styčnicku prutové soustavy. Jako další možnost mám určení jednotlivých prodloužení prutů a z toho dopočítat posuvy styčnicků jenomže by to bylo velmi zdouhavé a poměrně pracné. Nyní zde uvedu, jak je Castiglianova věta definována [1].



Obr. 18

Pokud budu mít těleso dle Obr. 14 zatížené soustavou sil F_1, F_2, \dots, F_j , pak pro takovou soustavu mohu napsat výraz pro deformační práci A ve tvaru

$$A = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} F_j u_j \quad (3.10)$$

Teď vezmu do úvahy i -tou sílu soustavy a zvětším ji o velikost dF_i . Tento přírůstek síly způsobí změnu deformační práce A soustavy a lze jej zapsat jako

$$dA_i = \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i \quad (3.11)$$

V případě lineárně pružného materiálu deformační práce nezávisí na historii zatěžování a tak musí platit vztahy i pro případ, kdy bych nejprve těleso zatížil přírůstkem síly dF_i s deformační prací podle (3.12).

$$dA_{i1} = \frac{1}{2} dF_i du_i \quad (3.12)$$

Dále pak zatížím těleso opět soustavou sil F_1, F_2, \dots, F_j a přírůstek síly dF_i pak vykoná práci danou vztahem (3.13). Pro tento způsob zatěžování je pak celková deformační práce přírůstku rovna vztahu (3.14).

$$dA_{i2} = dF_i u_i \quad (3.13) \quad dA_i = \frac{1}{2} dF_i du_i + dF_i u_i \quad (3.14)$$

Pokud teď porovnáím pravé strany rovnic (3.13), (3.14), ve druhé zanedbám člen druhého řádu a přihlédnu k tomu, že deformační práce se rovná energii napjatosti, získám první část Castiglianovy věty (3.15).

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (3.15)$$

Tento vzorec mi říká, že posuv síly po její nositelce ve směru působení síly je dán parciální derivací energie napjatosti podle této síly. Mnou uvedená energie napjatosti odpovídá jednomu tělesu, proto dále uvedu, jak určit energii napjatosti prutové soustavy obsahující n -prvků. Ve vztahu (3.9) mám uvedený obecný vztah pro energii napjatosti tahu resp. tlaku. Tento mohu za předpokladu konstantního průřezu S , normálové síly N a modulu pružnosti E přepsat jako

$$W = \frac{N^2 l}{2ES} \quad (3.16)$$

kdy tento vztah platí pro jeden prut. Pro celou soustavu pak platí vztah (3.17) a následně pak mohu určit posuv libovolného styčnicku podle vztahu (3.18).

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2ES} \quad (3.17)$$

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{ES} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_i} \quad (3.18)$$

3.8. Mezní stavy, bezpečnost

Všechny výše uvedené vztahy platí pro prut jako modelové těleso. Vymezení prutu jsem provedl výše a dále jsem předpokládal, že se pohybuji v pružném elastickém stavu materiálu. Otázkou zůstává, jestli je prut v takovém stavu, v jakém předpokládám a jak případně zjistím hranici tohoto stavu.

3.8.1. Mezní stav pružnosti

Pro tento stav, dále jen MSP, je charakteristické, že po jeho překročení se v materiálu začnou objevovat plastické deformace [7]. Mezní hodnota, kterou nesmím překročit, se nazývá mez kluzu σ_K a je pro většinu materiálů zjišťována experimentálně pomocí tahové zkoušky.

Co se týká bezpečnosti, tak ta se dá obecně vyjádřit jako poměr provozní hodnoty ku hodnotě mezní. Provozní hodnota bude v mém případě tlakové resp. tahové napětí $\sigma = N/S$. V souladu s tím mohu zapsat bezpečnost vzhledem k MSP jako

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma}, \quad (3.19)$$

kdy jsou pro mě důležité tři hodnoty bezpečnosti k_K a to:

$k_K > 1$: v tomto případě jsem nedosáhl MSP a mohu uvažovat všechny výše uvedené vztahy.

$k_K = 1$: v tomto případě jsem dosáhl meze bezpečnosti vzhledem k MSP.

$k_K < 1$: tady už jsem překročil bezpečnost vzhledem k MSP.

3.8.2. Mezní stav vzpěrné stability

Tento stav nastává pouze u prutů namáhaných tlakem. V principu jde o to, že během zatěžování se může náhle změnit charakter deformace prutu [7]. Již dříve jsem poukázal, že při namáhání tlakem dochází k vzájemnému přibližování příčných průřezů a jedinou složkou VVÚ je normálová síla. Ovšem při velkém zatížení může dojít k vybočení prutu, tak jak je naznačeno na Obr. 15 a začne převládat ohybový moment a dominantní deformací bude ohyb.

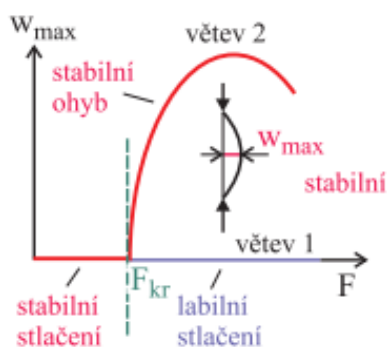


Obr. 19

K takovému chování může dojít při překročení kritické síly F_{kr} , kterou lze pro prut dle Obr. 15 popsat vztahem

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (3.20)$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J hlavní centrální kvadratický moment příčného průřezu, l je délka prutu. Takto popsaný stav však nemusí nastat ani po překročení kritické síly F_{kr} . V okamžiku jejího překročení může dojít k stabilnímu ohybu nebo bude pokračovat stlačování prutu, ale tento stav nebude stabilní ale labilní, jak je vidět z grafu na Obr. 16 popisující závislost mezi průhybem prutu a silou na něj působící.



Obr. 20: převzato z [7]

Vztah (3.20) byl ovšem odvozen pro případ lineárně pružného materiálu bez omezení, kdy nevznikají žádné plastické deformace. Já však musím uvažovat nejjednodušší model materiálu, kterým je houževnatý materiál s mezí kluzu σ_K . Za tohoto předpokladu mohu určit mezní napětí σ_{kr} odpovídající kritické síle.

$$\sigma_{kr} = \frac{N}{S} = \frac{F_{kr}}{S} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2 S} \quad (3.21)$$

Při zavedení veličiny λ nazývané se štíhlost prutu získám následující vztahy (3.22) a (3.23).

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{J}{S}}} \quad (3.22), (3.23)$$

Mezní stav vzpěrné stability houževnatého materiálu může nastat pouze za předpokladu $\sigma_{kr} < \sigma_K$. Pokud bych dosadil σ_K do vztahu (3.22), pak mohu získat vztah pro výpočet tzv. kritické štíhlosti λ_k .

$$\lambda_k = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} \quad (3.24)$$

Výpočet bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability lze pak provést pomocí součinitele k_v .

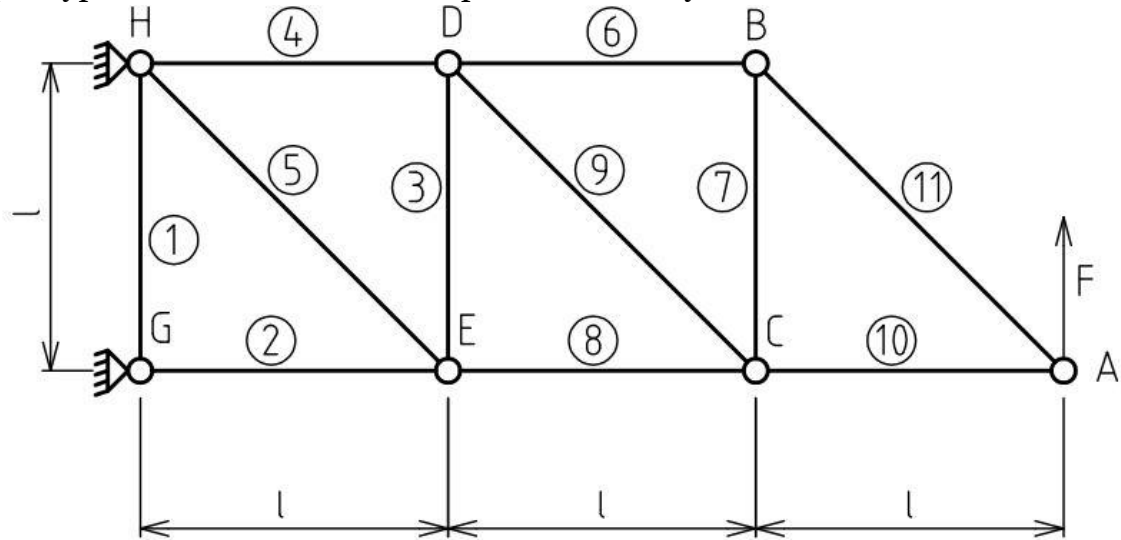
$$k_v = \frac{F_{kr}}{F} \quad (3.25)$$

Teď je jasné, že u prutu namáhaného tlakem přichází do úvahy vyšetřování dvou mezních stavů, proto dále uvedu, za jakých podmínek je možné jednotlivé bezpečnosti určit.

- $\lambda < \lambda_k$: pro tento případ je rozhodující mezní stav pružnosti, protože nastane dříve.
- $\lambda > \lambda_k$: zde je rozhodující mezní stav vzpěrné stability.

4. Výpočtový model

V předchozí části jsem si zavedl teoretické podklady, které budu využívat pro výpočet teoretického modelu prutové soustavy uvedené na Obr. 21. Tato

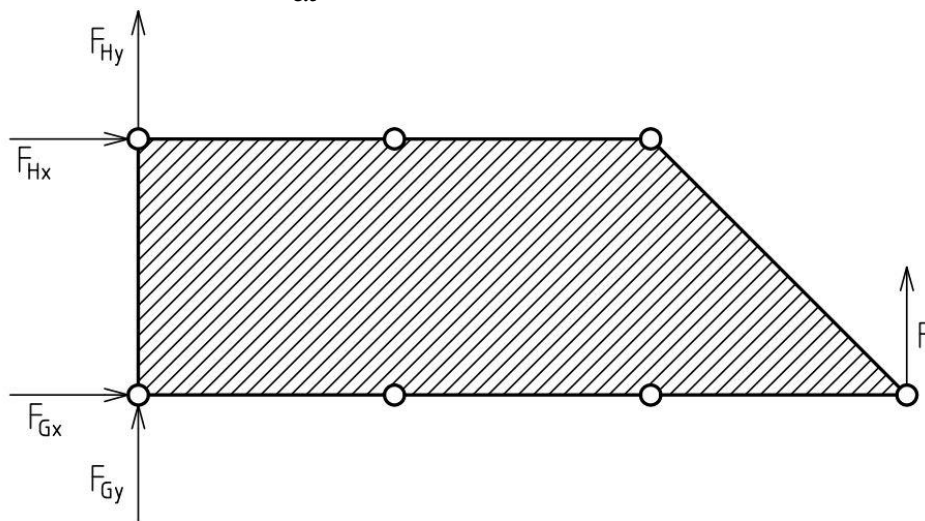


Obr. 21

soustava se skládá celkem z 11 prutů a zatížení je vyvozeno silou F působící ve styčnicku A. Velikost síly F je rovna $100N$ a délka l je $250mm$.

4.1. Posouzení statické určitosti

vnější statická určitost s_{ex}



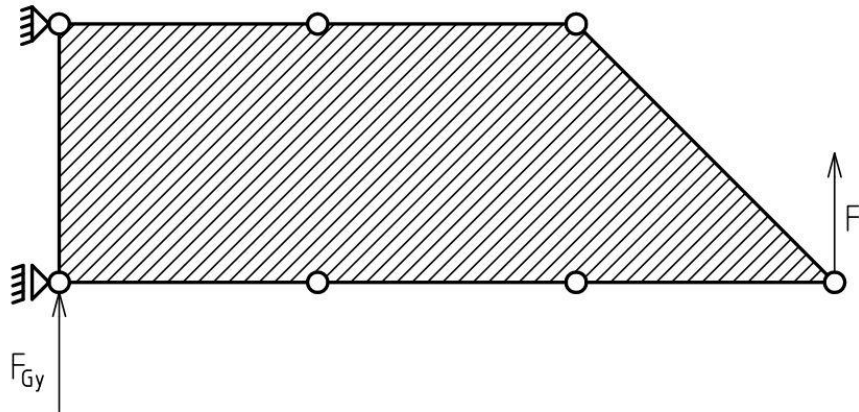
Obr. 22: úplné uvolnění

neznámé parametry $\mu_{ex} = \{F_{HX}, F_{HY}, F_{GX}, F_{GY}\} = 4$

použitelné podmínky statické rovnováhy $\nu_{ex} = 3$

$$s_{ex} = \mu_{ex} - \nu_{ex} = 4 - 3 = 1 \quad (4.1)$$

Protože je soustava 1x staticky neurčitá je třeba provést částečné uvolnění na úroveň vnější statické určitosti.



Obr. 23

Nyní musím předepsat deformační podmínku ve vertikálním směru pro styčník G ve znění, že $u_G = 0$. Tuto deformační podmínku využiji pro výpočet neznámé síly F_{GY} , pomocí níž budu poté schopný dopočítat ostatní síly vznikající ve vazbách.

$$u_G = \frac{\partial W}{\partial F_{GY}} = \sum_{i=1}^{11} \frac{N_i l_i}{ES} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{GY}} = 0 \quad (4.2)$$

Z takto vyjádřené deformační podmínky po dosazení získám $F_{GY} = 0$.

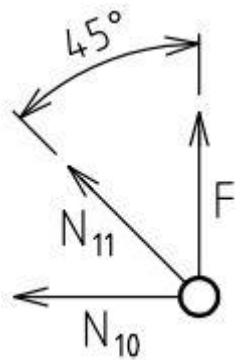
vnitřní statická určitost s_{in}

počet prutů $p = 11$

počet styčniců $k = 7$

$$s_{in} = p - (2k - 3) = 11 - (14 - 3) = 0 \quad (4.3)$$

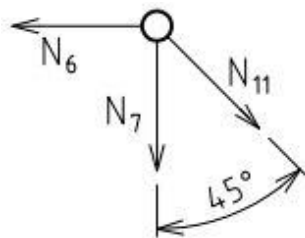
4.2. Výpočet prutových sil



styčnick A

$$\sum F_x: N_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F = 0$$

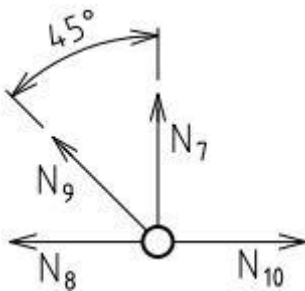
$$\sum F_y: -N_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_{10} = 0$$



styčnick B

$$\sum F_x: N_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_6 = 0$$

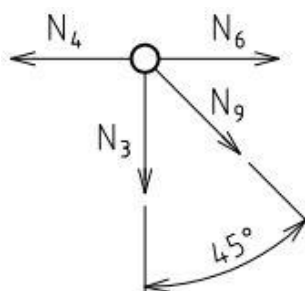
$$\sum F_y: -N_7 - N_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



styčnick C

$$\sum F_x: N_{10} - N_8 - N_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

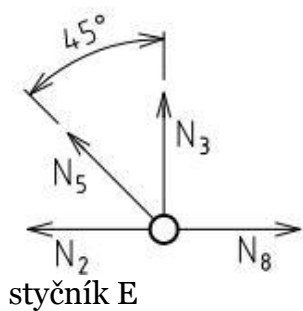
$$\sum F_y: N_7 + N_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



styčnick D

$$\sum F_x: N_6 - N_4 + N_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

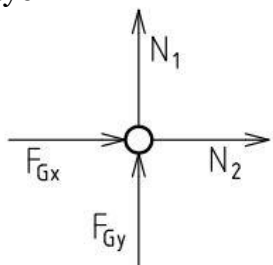
$$\sum F_y: -N_3 - N_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



styčník E

$$\sum F_x: N_8 - N_2 - N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

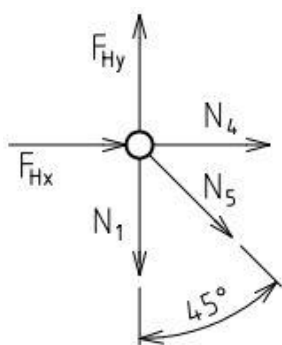
$$\sum F_y: N_3 + N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



styčník G

$$\sum F_x: N_2 + F_{Gx} = 0$$

$$\sum F_y: N_1 + F_{Gy} = 0$$



styčník H

$$\sum F_x: F_{Hx} + N_4 + N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_y: F_{Hy} - N_1 - N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

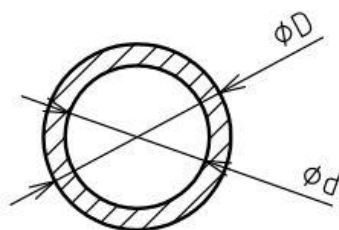
Z výše uvedených rovnic statické rovnováhy pro jednotlivé styčníky jsem si vypočítal velikosti jednotlivých sil, které jsou uvedeny v následující tabulce. Pokud je síla uvedena jako záporná, pak působí naopak, než je uvedeno na obrázku uvolněných styčniců a příslušný prut je tak namáhán tlakem.

N_x	$N_x [N]$
$N_1 = -F_{GY}$	0
$N_2 = 3F$	300
$N_3 = F$	100
$N_4 = -2F$	-200
$N_5 = -F\sqrt{2}$	-141,4
$N_6 = -F$	-100
$N_7 = F$	100
$N_8 = 2F$	200
$N_9 = -F\sqrt{2}$	-141,4
$N_{10} = F$	100
$N_{11} = -F\sqrt{2}$	-141,4

Tab. 1

4.3. Výpočet napětí

Napětí jsem vypočítal podle vztahu (3.6) uvedeného výše. Pro jeho určení ještě potřebuji příčný průřez, jehož tvar je na Obr. 19. Rozměry jsou $\varnothing D = 8$ mm, $\varnothing d = 6$ mm.



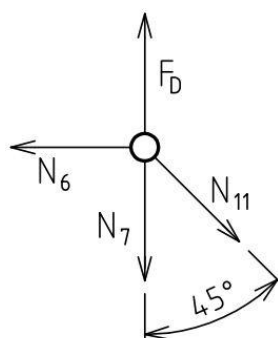
Obr. 24

$\sigma_x [MPa]$
$\sigma_1 = 0$
$\sigma_2 = 13,64$
$\sigma_3 = 4,55$
$\sigma_4 = -9,09$
$\sigma_5 = -6,43$
$\sigma_6 = -4,55$
$\sigma_7 = 4,55$
$\sigma_8 = 9,09$
$\sigma_9 = -6,43$
$\sigma_{10} = 4,55$
$\sigma_{11} = -6,43$

Tab. 2

4.4. Výpočet posuvu styčniců

Pro určení vertikálního posuvu jsem si vybral styčník B ale pro výpočet podle Castiglianovy věty musím v tomto směru zavést doplňkovou sílu $F_D = 0$, protože v tomto směru žádná síla nepůsobí a nemohl bych tak posuv vypočítat. Uvolněný styčník B bude tedy vypadat tak, jak je uvedeno na obrázku níže.



Obr. 25

Tvar normálových sil v závislosti na doplňkové síle F_D je následující.

$N_x [N]$
$N_1 = 0$
$N_2 = 2F_D + 3F$
$N_3 = F_D + F$
$N_4 = -F_D - 2F$
$N_5 = -F_D\sqrt{2} - F\sqrt{2}$
$N_6 = -F$
$N_7 = F_D + F$
$N_8 = F_D + 2F$
$N_9 = -F_D\sqrt{2} - F\sqrt{2}$
$N_{10} = F$
$N_{11} = -F\sqrt{2}$

Tab. 3

Při použití vztahu (3.18) získám posuv styčnicku B:

$$u_B = \sum_{i=1}^{11} \frac{N_i L_i}{ES} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_D} = \underline{\underline{0,28mm}} \quad (4.4)$$

4.5. Výpočet bezpečnosti

Nejprve si vypočítám štíhlost λ a kritickou štíhlost prutu λ_K pro pruty délky 250mm a zvlášť pro diagonální pruty délky 353mm.

$$\lambda_1 = \frac{l}{\sqrt{\frac{J}{S}}} = \frac{0,25}{\sqrt{\frac{1,37 \cdot 10^{-10}}{2,2 \cdot 10^{-5}}}} = 100,18 \quad \lambda_2 = \frac{l}{\sqrt{\frac{J}{S}}} = \frac{0,25\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1,37 \cdot 10^{-10}}{2,2 \cdot 10^{-5}}}} = 141,6$$

$$\lambda_K = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_K}} = \pi \sqrt{\frac{69500 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6}} = 67,62 \quad (4.5)$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že $\lambda_1 > \lambda_K$ a $\lambda_2 > \lambda_K$, musím tedy provést kontrolu bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability k_V . Nejprve ale musím zjistit velikosti kritických sil F_{kr1} , F_{kr2} .

$$F_{kr1} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 69500 \cdot 10^6 \cdot 1,37 \cdot 10^{-10}}{0,25^2} = 478,6N \quad (4.6)$$

$$F_{kr2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 69500 \cdot 10^6 \cdot 1,37 \cdot 10^{-10}}{(0,25\sqrt{2})^2} = 239,6N \quad (4.7)$$

Nyní mohu určit bezpečnosti k_{V1} , k_{V2} jako:

U dalších prutů namáhaných tahem stačí vybrat nejvíce namáhaný prut a určit bezpečnost vzhledem k MSP k_k pouze pro něj. Pokud tento vyhoví, pak je jasné,

$$k_{V1} = \frac{F_{kr1}}{\max\{N_4; N_6\}} = \frac{478,6}{200} = 2,39 \quad (4.8)$$

$$k_{V2} = \frac{F_{kr2}}{\max\{N_2; N_9; N_{11}\}} = \frac{239,6}{141,4} = 1,69 \quad (4.9)$$

$$k_k = \frac{\sigma_K}{\max\{\sigma_2; \sigma_3; \sigma_7; \sigma_8; \sigma_{10}\}} = \frac{150}{13,64} = 11 \quad (4.10)$$

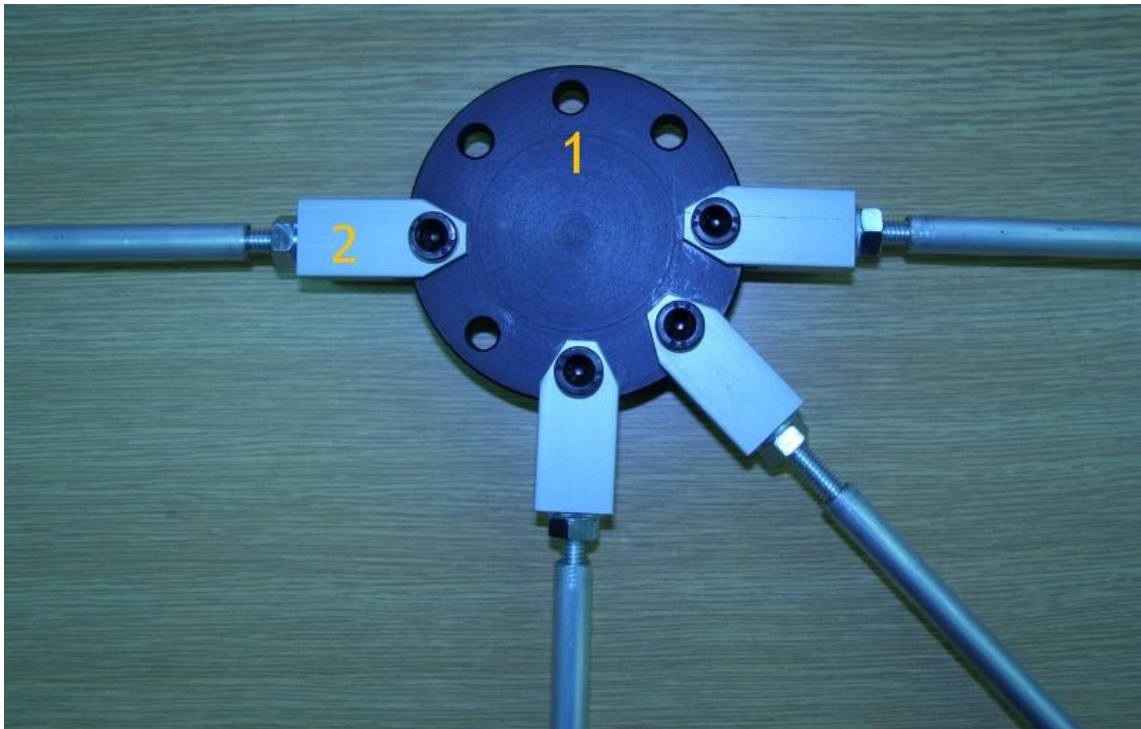
že ostatní taktéž splní podmínky bezpečnosti.

Z tohoto je patrné, že soustava má k překročení MSP hodně daleko a tak je limitujícím faktorem nebezpečí vybočení prutů při jejich zatěžování.

5. Reálný model

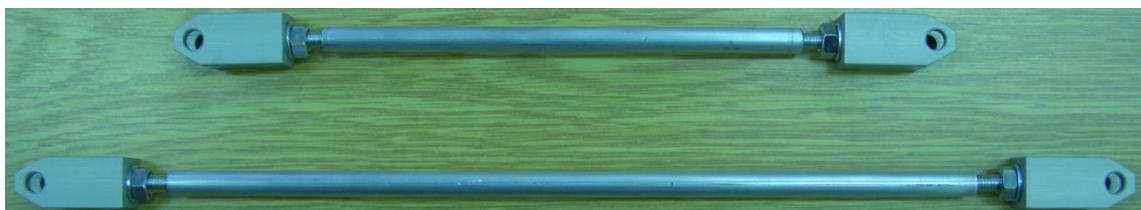
Poslední částí mé práce je realizace fyzického modelu, který vychází z výpočtového modelu z předchozí kapitoly. Jedním z hlavních požadavků byla jednoduchost a zároveň variabilita celé soustavy. Já jsem zvolil poměrně jednoduchou soustavu, ale neměl by být problém sestavit libovolnou, vnitřně statickou prutovou soustavu.

Nejtěžší při navrhování konstrukce bylo vymýšlení podoby styčnicků tak, aby byla zajištěna požadovaná variabilita. Nakonec jsem zvolil řešení, které je na obrázku níže.



Obr. 26

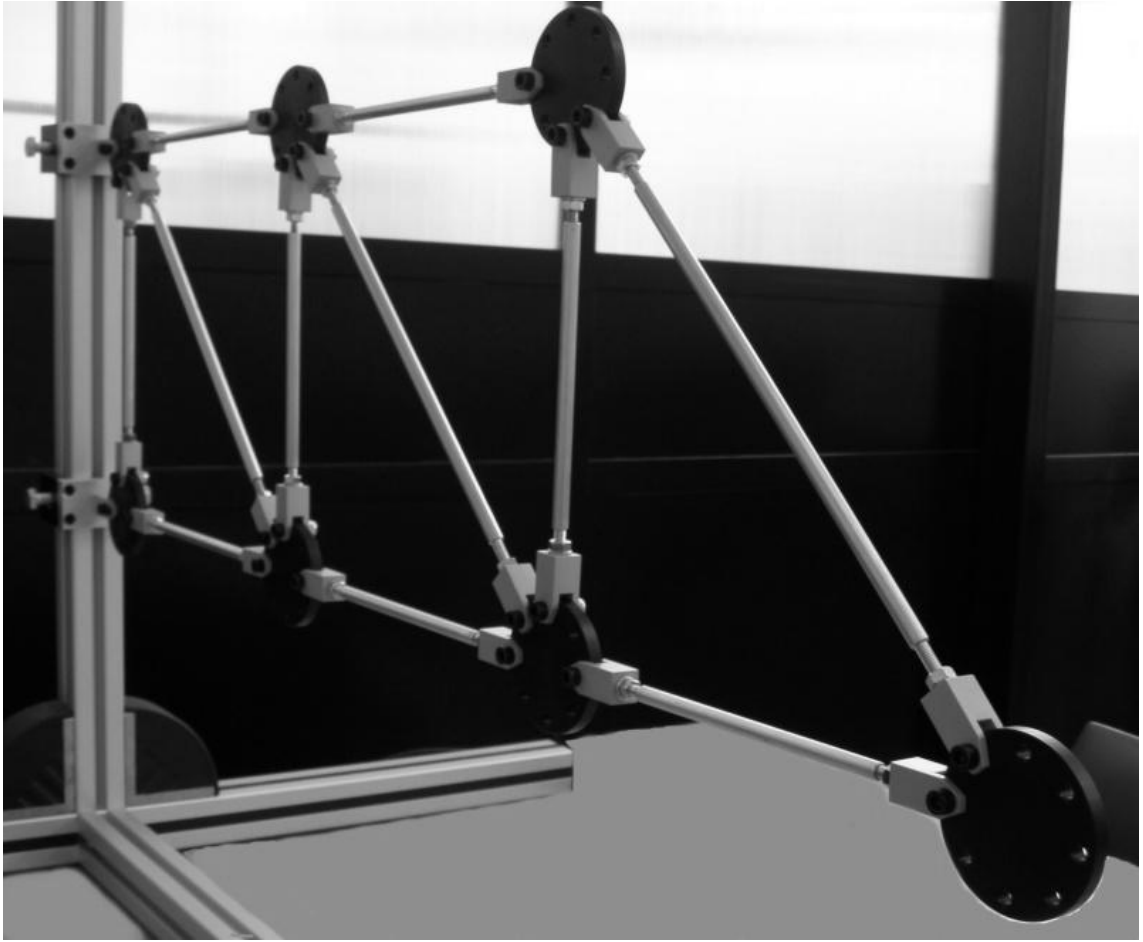
Samotný styčník, označený na obrázku číslem 1, je tvořen hliníkovým diskem o průměru 70mm. K styčníku jsou pak pomocí upínek 2 přišroubovány pruty. Realizace prutů je vidět na Obr. 22. Pro všechny tyto součásti jsem vytvořil také



Obr. 27

výrobní výkresy, které jsou přiloženy v přílohách této práce.

Pruty mají stejný průřez, jako u výpočtového modelu a jsou vyrobeny z hliníku EN AW-6060. Na každém konci prutu je pak pomocí lepidla zalepen šroub pro našroubování upínky, která je zajištěna pomocí matice proti povolání. Sestavená prutová soustava je pak na Obr. 23.



Obr. 28



Zatížení bylo vyvozeno pomocí svorníku na Obr. 24, kde uprostřed je vřazen elektronický siloměr, který je zároveň limitující, protože má velmi krátké závity a není možné tak vyvodit požadovanou sílu.

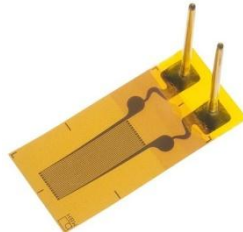
Posuv styčnicku je měřen pomocí analogového úchylkoměru, který je uchycen k rámu pomocí magnetického stojánku a je tak možné měřit posuv libovolného styčnicku.

5.1. Tenzometrie

Tato technika se využívá pro snímání mechanického napětí v materiálu. Nejpoužívanější tenzometry [8] jsou odporové, které lze dále rozdělit na:

- drátkové
- foliové
- vrstvé

Tyto provedení se liší použitým druhem odporové mřížky, ovšem všechny využívají deformace drátu.



Obr. 29: příklad tenzometru firmy HBM-převzato z [10]

Při deformaci zkoumaného objektu se deformace přenáší na tenzometr, u kterého dochází ke změně elektrického odporu [8]. Elektrický odpor je definován vztahem (5.1)

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}, \quad (5.1)$$

kde ρ je měrný elektrický odpor (rezistivita), l je délka drátu a S plocha příčného průřezu. Z toho je zřejmé, že při deformaci se mění odpor tenzometru, což je způsobeno změnou jeho délky. Pro celkovou změnu odporu ΔR je třeba znát přetvoření $\varepsilon = \Delta l/l$. Změna odporu je pak dána vztahem [8]

$$\Delta R = R \cdot k \cdot \varepsilon, \quad (5.1)$$

kde k je deformační součinitel tenzometru, jinak nazývaný k-faktor.

Pro samotné měření byl vybrán z časových důvodů pouze jeden prut a dle Obr. 25 byl nalepen tenzometr.



Obr. 30

6. Závěr

V první části práce jsem se věnoval teorii prutových soustav. Zde bylo asi nejobtížnější najít všechny potřebné informace a jejich následné zformulování a sepsání do práce.

V druhé části je popsán výpočtový model. Jeho sestavování byl několikanásobný iterační proces, protože ne všechny výpočty byly správné hned na první pokus. Zejména pak výpočty bezpečností způsobily několikeré předělání všech rozměrů.

Poslední část, fyzický model, byla asi nejobtížnější část, ač se to zprvu nezdálo. První problém, samotnou realizaci jsem nakonec zvládnul, ale při sestavení modelu se ukázalo, že šrouby držící pruty musí být utažené. Ovšem pak si nejsem jistý, jestli styčník opravdu představuje rotační vazbu. Dalším kritickým místem fyzického modelu byly pruty, respektive připevnění závitů pro upínky. Pro připevnění bylo zvoleno lepidlo, ale při prvním sestavení se pruty rozlepily kvůli malému množství lepidla. Pro měření už byla soustava připravena, ale při zatěžování se opět pruty rozlepily, naneštěstí také prut s tenzometrem. Díky tomu jsem ze soustavy nezískal žádné hodnoty pro porovnání s výpočtovým modelem.

Na soustavě proběhnou další úpravy, aby bylo možné provést měření. Tyto úpravy se ale nestihnou dokončit do odevzdání této práce, čímž se mi nepodařilo dosáhnout jednoho z cílů mé práce.

7. Použité prameny

- [1] JANÍČEK, Přemysl; ONDRÁČEK, Emanuel; VRBKA, Jan.: Mechanika Těles: Pružnost a Pevnost I. 2004. Brno: CERM, 2004. 287 s. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] <http://cestovani.kr-karlovarsky.cz> : mosty a mostky [online]. 2008 [cit. 2011-05-25]. Turistický portál Karlovarského kraje. Dostupné z WWW: <<http://cestovani.kr-karlovarsky.cz/cz/pronavstevniky/Clovekmenitvarkraje/mostyamostky/Stranky/default.aspx>>. (MOST)
- [3] <http://www.tootoo.com/> [online]. 2008. 2008 [cit. 2011-05-25]. International trade portal. Dostupné z WWW: <<http://imgs.tootoo.com/e5/96/e596fodf4f691223fcd70fcce6e936e2.jpg>>
- [4] CUPÁK, Ondřej. <http://www.fotoaparát.cz/> [online]. 2009. 2005 [cit. 2011-05-25]. Rádce fotografa. Dostupné z WWW: <<http://www.fotoaparát.cz/index.php?r=25&gal=photo&rp=171769>>.
- [5] KADLČÁK, Jaroslav; KYTÝR, Jiří. Statika stavebních konstrukcí. Druhé vydání. Brno: VUTIUM, 2001. 349 s. ISBN 80-214-1877-X.
- KUČERA, Václav. Architektura inženýrských staveb. První vydání. Praha: Grada, 2009. 320 s. ISBN 978-80-247-2504-8.
- [6] FLORIAN, Zdeněk; PELLANT, Karel; SUCHÁNEK, Miroslav. Technická mechanika I: Statika [online]. Brno : [s.n.], 2004 [cit. 2011-05-25]. Dostupné z WWW: <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/cz/studium/studijni-materialy.html>>.
- [7] HORNÍKOVÁ, Jana; ŠANDERA, Pavel. Pružnost a pevnost [online]. První vydání. Brno: CERM, 2003 [cit. 2011-05-25]. Dostupné z WWW: <<http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>>. ISBN 80-7204-268-8.
- [8] VLK, Miloš, et al. Experimentální mechanika [online]. Brno : [s.n.], 2003 [cit. 2011-05-25]. Dostupné z WWW: <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/cz/studium/studijni-materialy.html>>.
- [9] <http://www.bvv.cz> [online]. Brno : 2011 [cit. 2011-05-25]. BVV Veletrhy Brno. Dostupné z WWW: <<http://www.bvv.cz/i2000/Akce/b-rent.nsf/d47bb7af394888c1c12569f000656e14/33d784c832aof2d780256c01003e1092!OpenDocument>>.
- [10] <http://www.directindustry.com> [online]. [s.l.] : [s.n.], 2011 [cit. 2011-05-25]. Dostupné z WWW: <<http://www.directindustry.com/prod/hbm/structurally-integrated-strain-gauges-6017-252932.html>>.

8. Seznam příloh

1. styčnick
2. styčnick – pevný
3. upínka
4. upínka – pevná