UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Zuzana Složilová

Mocninné funkce

Olomouc 2015 Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

………………………..   ……………………….

V Olomouci dne: Zuzana Složilová

Poděkování

Děkuji doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za odborné vedení, cenné rady a připomínky a čas, který mi věnovala při zpracování této bakalářské práce.

Obsah

Úvod

V této bakalářské práci se zaměřujeme na mocninné funkce, které se využívají při řešení nerovnic a různých úloh. Mocninné funkce se dále využívají v mocninných řadách, o kterých se zde také pojednává. Cílem této práce je shrnutí mocninných funkcí, jejich vlastností a trochu pojednat o mocninných řadách a jejich využití.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole zavádíme základní definice, které se funkcí týkají a které budeme dále potřebovat. Dále si uvedeme nejčastější zadávání funkcí a základní elementární funkce. Ve druhé kapitole pojednáme o mocninných a kvadratických funkcích a ukážeme si jejich grafy. Ve třetí kapitole nahlédneme do mocninných řad a ukážeme si příklady jejich využití. Poslední kapitola obsahuje sadu řešených příkladů. Jsou zde jak příklady na mocninné funkce, tak příklady na mocninné řady.

Většina grafů, které se zde vyskytují, jsou dělány v programu A&G Grapher. Tento program je volně stažitelný. Pomocí tohoto programu byly narýsovány skoro všechny obrázky, které se v této práci vyskytují.

V této bakalářské práci jsou obsaženy některé poznatky, které by žáci na základních a středních školách měli již znát. Na základních školách se učí, co je pojem funkce, tabulka a graf funkce. Dále se učí, jak vypadá funkce rostoucí a klesající. Lineární funkci, funkci nepřímé úměrnosti a kvadratickou funkci. U kvadratické funkce si pouze ukazují, jak vypadá graf, co je grafem a jak se dá pomocí tabulky narýsovat.

Na středních školách se již více učí o kvadratické funkci a jejím grafu, výpočet diskriminantu, rozklad kvadratického trojčlenu, vztahy mezi kořeny a koeficienty. Učí se také o definici n-té odmocniny, operace s odmocninami, mocniny s racionálním a reálným exponentem a učí se další elementární funkce.

Na vysokých školách se probírají cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkce a také mocninné řady.

Kapitola 1

Funkce všeobecně

Jako první, než se začneme zabývat mocninnými funkcemi, si uvedeme definici funkce a definice základních pojmů, které budeme potřebovat. Také si uvedeme základní zadávání funkcí a základní elementární funkce.

1.1 Základní definice

Definice 1.1. Zobrazení f neprázdné množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$ (zapisujeme $f: A \to \mathbb{R}$) se nazývá *reálná funkce jedné reálné proměnné* (zkráceně funkce). Skutečnost, že funkce f přiřazuje hodnotě $x \in A$ hodnotu $y \in \mathbb{R}$, zapisujeme jako $y = f(x)$. [1, s. 64]

„Proměnnou $x \in A$ budeme nazývat *argument funkce* f nebo *nezávisle proměnná*. Proměnnou $y \in \mathbb{R}$ budeme nazývat *závisle proměnná*. Číslo $f(x)$ se nazývá hodnota funkce f v bodě $x \in A$ (neboli *funkční hodnota v bodě* x).“ [1, s. 64]

Definice 1.2. Nechť $f: A \to \mathbb{R}$ je funkce. Množina A se nazývá *definiční obor funkce* f a značíme ji $D(f)$ nebo D_f. Množina $\{y \in \mathbb{R};\ y = f(x),\ x \in A\}$ (tj. množina všech funkčních hodnot funkce f) se nazývá *obor hodnot funkce* f a značíme ji $H(f)$ nebo H_f. [1, s. 64]

„Funkci f chápeme jako předpis (pravidlo neboli funkční předpis), kterým je každé hodnotě nezávisle proměnné $x \in D_f \subset \mathbb{R}$ přiřazena právě jedna hodnota $y = f(x) \in H_f \subset \mathbb{R}$.“ [1, s. 64]

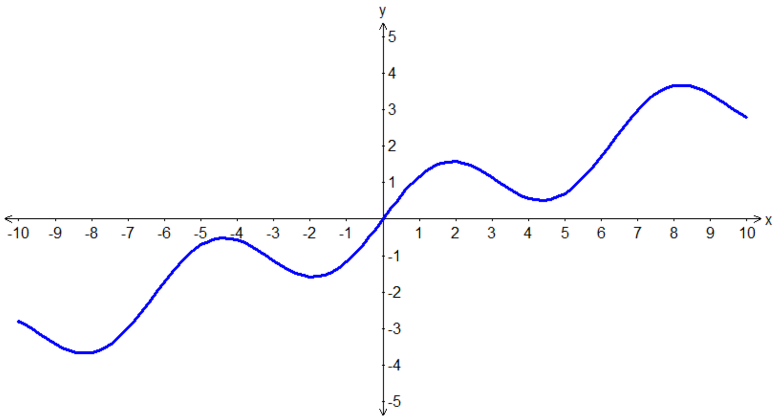
Poznámka 1.1: Funkce označujeme zpravidla písmeny $f, g, h, F, G, H, \ldots$ nebo písmeny řecké abecedy φ *a* ψ. [1, s. 64]

Definice 1.3. *Grafem funkce* f nazýváme množinu

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D_f, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Značíme ji $G(f)$ nebo G_f nebo graf f. [1, s. 65]

„Grafem funkce f je křivka v rovině o rovnici $y = f(x)$, kde $x \in D_f$.“ [1, s. 65]



Obrázek 1.1: Graf funkce $f(x) = \frac{x}{3} + \sin x$

Definice 1.4. Funkce f se nazývá *sudá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(x) = f(-x)$. Funkce f se nazývá *lichá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$ a platí $f(-x) = -f(x)$. [2, s. 89]

Sudá funkce bude mít graf souměrný podle osy y a lichá funkce bude mít graf souměrný podle osy x. [2, s. 89]

Definice 1.5. Funkci f nazýváme *rostoucí* (*klesající*) *na množině* $A \subset D(f)$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$. Funkci f nazýváme *neklesající* (*nerostoucí*) *na množině* $A \subset D(f)$, jestliže pro každé dva body x_1, $x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ $[f(x_1) \geq f(x_2)]$. [2, s. 88]

Definice 1.6. Funkci f nazýváme *konstantní na množině* A, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$. [2, s. 89]

Definice 1.7. Funkci f nazýváme *shora* (*zdola*) *omezenou na množině* $A \subset D(f)$, je-li shora (zdola) omezená množina funkčních hodnot $f(A)$. Je-li funkce f omezená shora i zdola na množině A, pak ji nazýváme *omezenou na množině* A. [2, s. 87]

Definice 1.8. Funkce f má v bodě a *maximum* na množině $M, a \in M$, právě když pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq f(a)$. [3, s. 35]

Definice 1.9. Funkce f má v bodě a *minimum* na množině $M, b \in M$, právě když pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq f(b)$. [3, s. 35]

Definice 1.10. Funkce f má v bodě a *ostré maximum* na množině $M, a \in M$, právě když pro všechna $x \in M$, $x \neq a$, je $f(x) < f(a)$. [3, s. 35]

Definice 1.11. Funkce f má v bodě b *ostré minimum* na množině $M, b \in M$, právě když pro všechna $x \in M, x \neq b$, je $f(x) > f(a)$. [3, s. 36]

1.2 Způsoby zadání funkce

Funkci můžeme zapsat několika způsoby. Zde si uvedeme analytický způsob, tabulku a graf.

Analytický způsob (zadání vzorcem) – může být zadán funkčním předpisem, jednou rovnicí nebo soustavou rovnic.

Dělí se na zadávání:

- *explicitně* – rovnicí $y = f(x)$ a definičním oborem D_f
- *implicitně* – rovnicí $F(x, y) = 0$ a podmínkami pro x a y
- *parametricky* – soustavou rovnic

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

  kde φ a ψ jsou funkce nezávisle proměnné t mající stejný definiční obor
- *polárními souřadnicemi*

Tabulka (zadání výčtem funkčních hodnot $f(x_i)$, kde $i = 1, \cdots, n$) – jestliže není definičním oborem konečná množina, pak není zadání funkce přesné a určuje se jen přibližně.

Graf – nepoužívá se tak často, protože hodnoty odečítáme z grafu pouze přibližně, ale tento způsob udává názornou představu o průběhu funkce.

Kombinací těchto způsobů [1, s. 65-66]

Příklad 1.1. Zde si uvedeme příklady zapisování funkcí:

- Explicitně

  $f(x) = \frac{1}{2}x^4, \ x \in \mathbb{R}$

- Implicitně

  $y - \frac{1}{2}x^4 = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$

- Parametricky

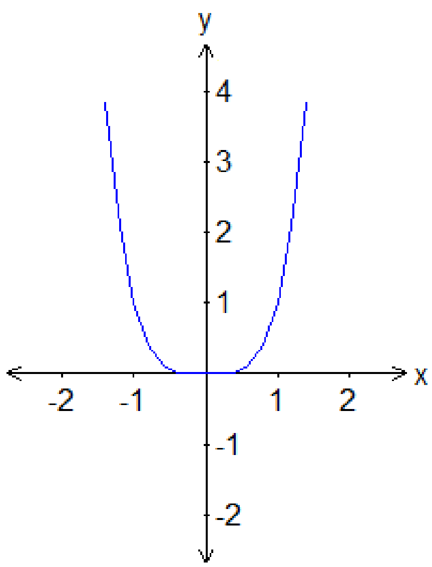
$$x = \frac{t}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}$$

$$y = t^4$$

- Tabulkou (neúplné zadání)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	8	0,5	0	0,5	8

- Grafem



Obrázek 1.2: Graf funkce $f(x) = \frac{1}{2}x^4$

[1, s. 66-67]

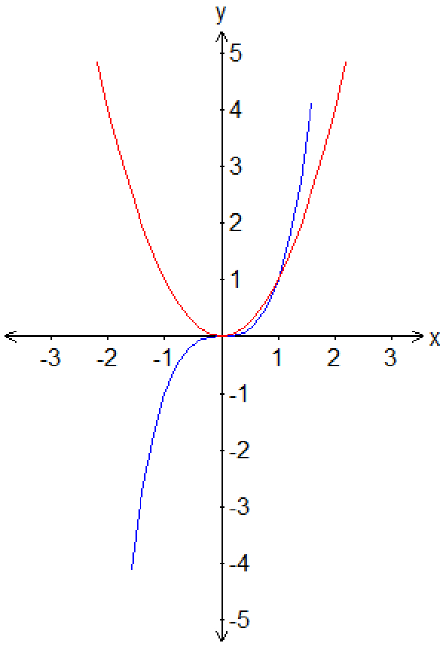
1.3 Základní elementární funkce

Mezi základní elementární funkce řadíme funkce mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické.

1.3.1 Mocninná funkce

Mocninnou funkcí se budeme dále zabývat v následující kapitole.

Definice 1.12. *Mocninnou funkcí* s reálným exponentem nazýváme funkcí $f(x) = x^a$, kde $x \in (0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$; je-li $a > 0$, pak $x \in \langle 0, \infty)$. [4, s. 84]

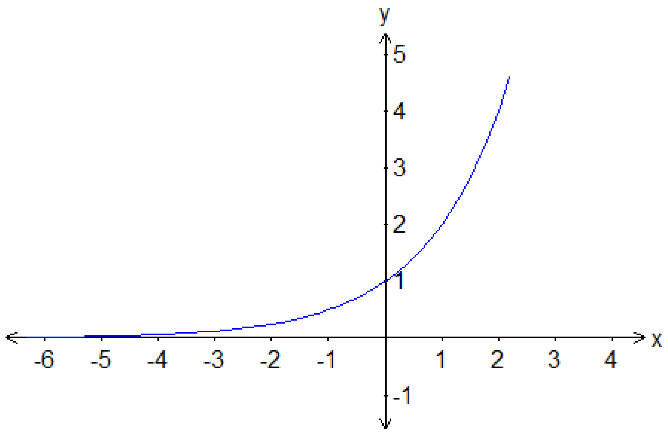


Obrázek 1.3: Příklad grafu mocninných funkcí $f(x) = x^3$ a $f(x) = x^2$

1.3.2 Exponenciální funkce

„Exponenciální funkce představuje přirozený růst. Toho se využívá v modelování nejen přírodních jevů. Pomocí exponenciální funkce se dá popsat nárůst obyvatel, chemické reakce, ochlazování, rozpouštění látek aj.“ [1, s. 90]

Definice 1.13. *Exponenciální funkcí se základem* a, $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$, je každá funkce tvaru $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$. [1, s. 90]

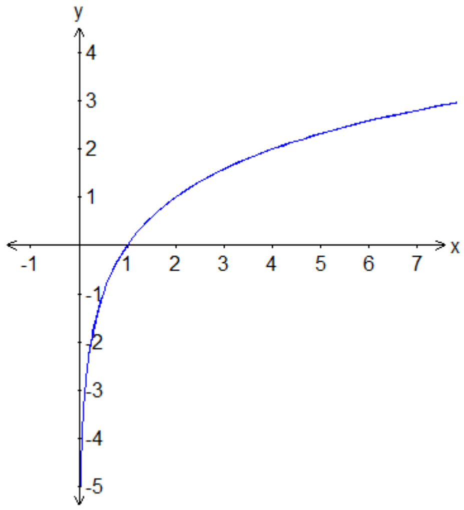


Obrázek 1.4: Příklad grafu exponenciální funkce $f(x) = 2^x$

1.3.3 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je inverzní k funkci exponenciální. Také logaritmické funkce se používají v přírodních zákonech, hlavně ve fyzikálních zákonech.

Definice 1.4. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Inverzní funkce k exponenciální funkci a^x se nazývá *logaritmická funkce o základu* a a značí se $f(x) = \log_a x$. [1, s. 91]



Obrázek 1.5: Příklad grafu logaritmické funkce $f(x) = \log_2 x$

1.3.4 Goniometrické funkce

Do goniometrických funkcí řadíme funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens. Goniometrické funkce se používají např. při výpočtu stran nebo úhlů pravoúhlého trojúhelníku.

- **Funkce sinus**

Definice 1.15. Funkce f, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna souřadnici n bodu A, se nazývá *sinus*. Hodnota funkce sinus v bodě x se značí $\sin x$. [1, s. 93]

- **Funkce kosinus**

Definice 1.16. Funkce f, jejíž hodnota je v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ rovna souřadnici m bodu A, se nazývá *kosinus*. Hodnota funkce kosinus v bodě x se značí $\cos x$. [1, s. 93]

- **Funkce tangens**

Definice 1.17. Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ se nazývá *tangens*. Hodnota funkce tangens v bodě x se značí $\tan x$, tj.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

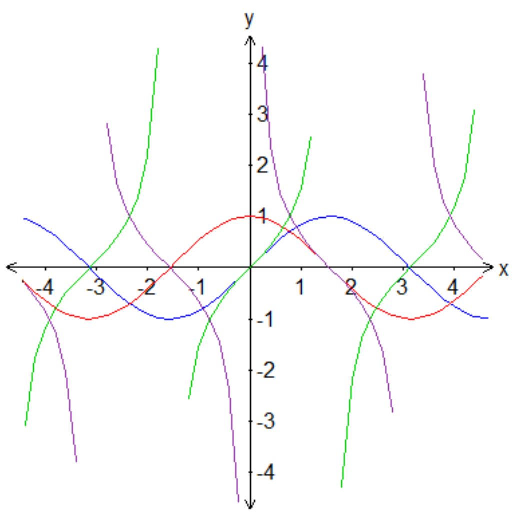
[1, s. 93]

- **Funkce kotangens**

Definice 1.18. Funkce $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ se nazývá *kotangens*. Hodnota funkce kotangens v bodě x se značí $\cot x$, tj.

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}.$$

[1, s. 94]



Obrázek 1.6: Příklad grafu goniometrických funkcí $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$

1.3.5 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou inverzními funkcemi k funkcím goniometrickým. Do cyklometrických funkcí řadíme funkce arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens.

- **Funkce arkussinus**

Definice 1.19. Funkcí *arkussinus* nazveme funkci, která je inverzní k funkci $\sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Hodnota funkce arkussinus v bodě x se značí $\operatorname{asin} x$. [1, s. 95]

- **Funkce arkuskosinus**

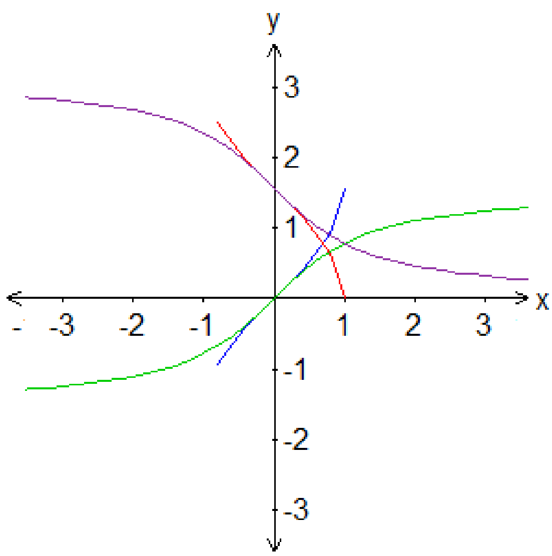
Definice 1.20. Funkcí *arkuskosinus* nazveme funkci, která je inverzní k funkci $\cos x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$. Hodnota funkce arkuskosinus v bodě x se značí $\operatorname{acos} x$. [1, s. 96]

- **Funkce arkustangens**

Definice 1.21. Funkcí *arkustangens* nazveme funkci, která je inverzní k funkci $\tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$. Hodnota funkce arkustangens v bodě x se značí $\operatorname{atan} x$. [1, s. 96]

- **Funkce arkuskotangens**

Definice 1.22. Funkcí *arkuskotangens* nazveme funkci, která je inverzní k funkci $\cot x$, $x \in (0, \pi)$. Hodnota funkce arkuskotangens v bodě x se značí $\operatorname{acot} x$. [1, s. 97]



Obrázek 1.7: Příklad grafu cyklometrických funkcí $f(x) = \operatorname{asin} x$, $f(x) = \operatorname{acos} x$, $f(x) = \operatorname{atan} x$, $f(x) = \operatorname{acot} x$

1.3.6 Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce se využívají hlavně v technické praxi, na středních školách se s nimi nesetkáte. Patří mezi ně hyperbolický sinus, hyperbolický kosinus, hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens.

- **Hyperbolický sinus**

Definice 1.23. Funkci $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme *hyperbolický sinus.* Hodnota funkce hyperbolický sinus v bodě x se značí $\sinh x$, tj.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

[1, s. 98]

- **Hyperbolický kosinus**

Definice 1.24. Funkci $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme *hyperbolický kosinus.* Hodnota funkce hyperbolický kosinus v bodě x se značí $\cosh x$, tj.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

[1, s. 98]

- **Hyperbolický tangens**

Definice 1.25. Funkci $f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme *hyperbolický tangens.* Hodnota funkce hyperbolický tangens v bodě x se značí $\tanh x$, tj.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

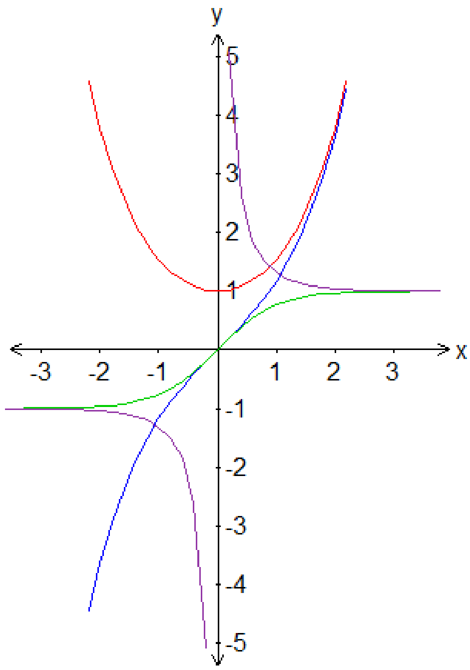
[1, s. 99]

- **Hyperbolický kotangens**

Definice 1.26. Funkci $f(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme *hyperbolický kotangens.* Hodnota funkce hyperbolický kotangens v bodě x se značí $\coth x$, tj.

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

[1, s. 99]



Obrázek 1.8: Příklad grafu hyperbolických funkcí $f(x) = \sinh x$, $f(x) = \cosh x$, $f(x) = \tanh x$, $f(x) = \coth x$

1.3.7 Hyperbolometrické funkce

Hyperbolometrické funkce jsou inverzní k funkcím hyperbolickým. Patří zde argument hyperbolického sinu, argument hyperbolického kosinu, argument hyperbolického tangens a argument hyperbolického kotangens.

- **Argument hyperbolického sinu**

Definice 1.27. Funkcí *argument hyperbolického sinu* nazveme funkci, která je inverzní k funkci hyperbolický sinus. Hodnota funkce argument hyperbolického sinu v bodě x se značí $\operatorname{argsinh} x$. [1, s. 100]

- **Argument hyperbolického kosinu**

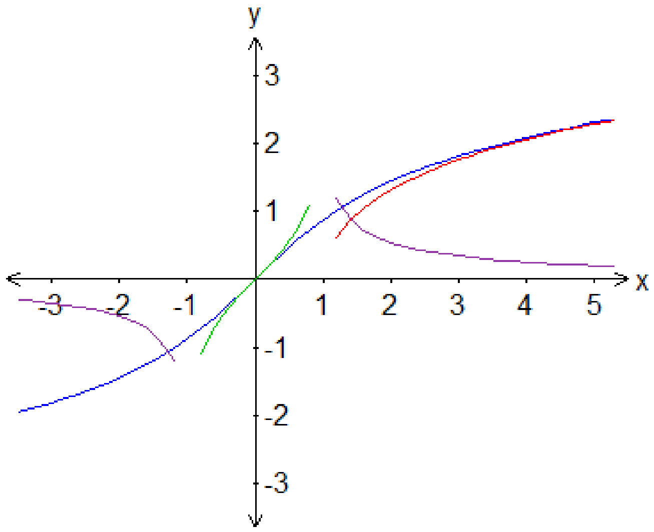
Definice 1.28. Funkcí *argument hyperbolického kosinu* nazveme funkci, která je inverzní k funkci hyperbolický kosinus pro $x \in \langle 0, \infty)$. Hodnota funkce argument hyperbolického kosinu v bodě x se značí $\operatorname{argcosh} x$. [1, s. 100]

- **Argument hyperbolického tangens**

Definice 1.29. Funkcí *argument hyperbolického tangens* nazveme funkci, která je inverzní k funkci hyperbolický tangens. Hodnota funkce argument hyperbolického tangens v bodě x se značí argtanh x. [1, s. 100]

- **Argument hyperbolického kotangens**

Definice 1.30. Funkcí *argument hyperbolického kotangens* nazveme funkci, která je inverzní k funkci hyperbolický kotangens pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hodnota funkce argument hyperbolického kotangens v bodě x se značí argcoth x. [1, s. 101]



Obrázek 1.9: Příklad grafu hyperbolometrických funkcí $f(x) = \operatorname{argsinh} x$, $f(x) = \operatorname{argcosh} x$, $f(x) = \operatorname{argtanh} x$, $f(x) = \operatorname{argcoth} x$

Kapitola 2

Mocninné funkce

Definice 2.1. *Mocninná funkce s exponentem* $a \in \mathbb{R}$ je každá funkce tvaru $f(x) = x^a$.
[1, s. 87]

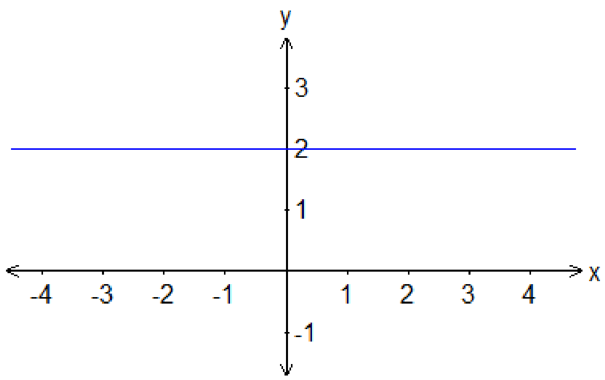
„Definiční obor, obor hodnot i vlastnosti této funkce závisí na tom, z jaké podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ je exponent a.“ [1, s. 87]

2.1 Konstantní funkce

Grafem konstantní funkce je přímka, která je rovnoběžná s x-ovou osou souřadnic.

Pokud $a = 0$, pak dostaneme konstantní funkci $f(x) = 1$. Vlastností této funkce je sudost. Její $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = \{1\}$. [1, s. 87]

Za x můžeme dosadit jakékoliv číslo. Pokaždé dostaneme konstantní funkci, tzv. konstantních funkcí je tolik, kolik je reálných čísel, protože každé reálné číslo určuje právě jednu konstantní funkci. [2, s. 95]

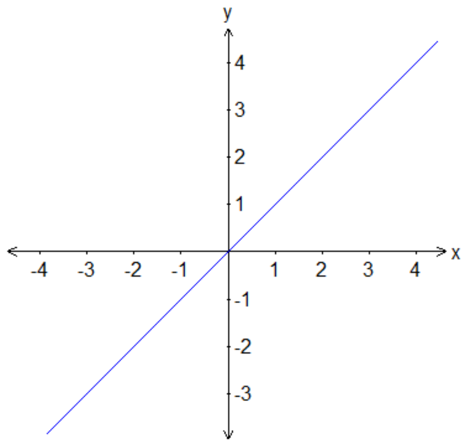


Obrázek 2.1: Graf konstantní funkce $f(x) = 2$

2.2 Lineární funkce

Pokud za a dosadíme 1, pak dostaneme funkci $f(x) = x$.

Rovnice lineární funkce vypadá takto: $f(x) = kx + q$, kde $k \neq 0$, q jsou konstanty. Grafem lineární funkce je přímka, která není rovnoběžná s osou x ani k ní kolmá. Pokud $q = 0$, pak přímka prochází počátkem osy souřadnic. [5, s. 43]



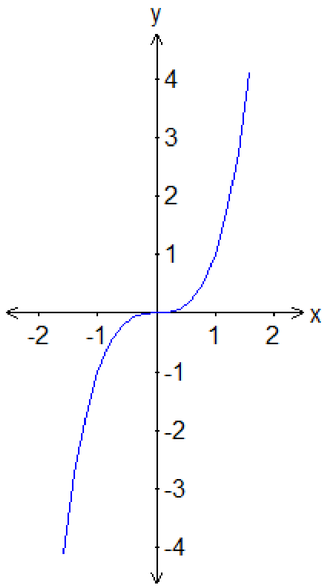
Obrázek 2.2: Graf lineární funkce $f(x) = x$

2.3 Mocninná funkce s přirozeným exponentem

Grafem mocninné funkce s přirozeným exponentem je parabola n-tého stupně.

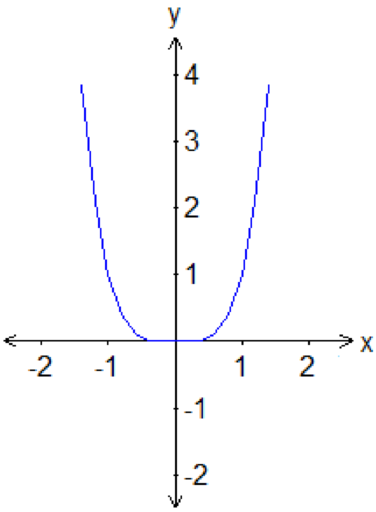
Je-li exponent a přirozené číslo ($a \in \mathbb{N}$), zpravidla ho označujeme n a získáváme mocninnou funkci ve tvaru $f(x) = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. [1, s. 87]

Pokud je n liché, pak vlastnosti funkce jsou lichost, neomezenost a je rostoucí na intervalu D_f. Jeho $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = \mathbb{R}$. [1, s. 88]



Obrázek 2.3: Graf mocninné funkce s lineárním exponentem $f(x) = x^3$

Pokud je n sudé, pak vlastnosti funkce jsou sudost, omezenost zdola, je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty)$. Jeho $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = \mathbb{R}_0^+$. [1, s. 88]



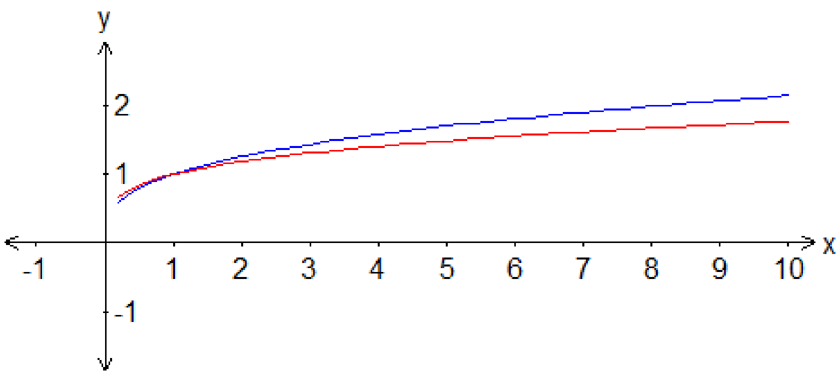
Obrázek 2.4: Graf mocninné funkce s lineárním exponentem $f(x) = x^4$

2.4 Funkce n-tá odmocnina

Pokud $a = \frac{1}{n}$, kde n patří do přirozených čísel ($n \in \mathbb{N}$) a $n \geq 2$, získáme mocninnou funkci ve tvaru $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$. [1, s. 88]

Pokud je n liché ($n \geq 3$), je tato funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ inverzní funkce k funkci x^n pro $x \in \mathbb{R}$. Vlastnosti funkce jsou lichost, neomezenost a je rostoucí na D_f. Její $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = \mathbb{R}$.

Pokud je n sudé ($n \geq 2$), je tato funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ inverzní funkce k funkci x^n pro $x \in \langle 0, \infty)$. Vlastnosti funkce jsou omezenost zdola a je rostoucí na D_f. Její $D_f = \langle 0, \infty)$ a $H_f = \langle 0, \infty)$. [1, s. 88]



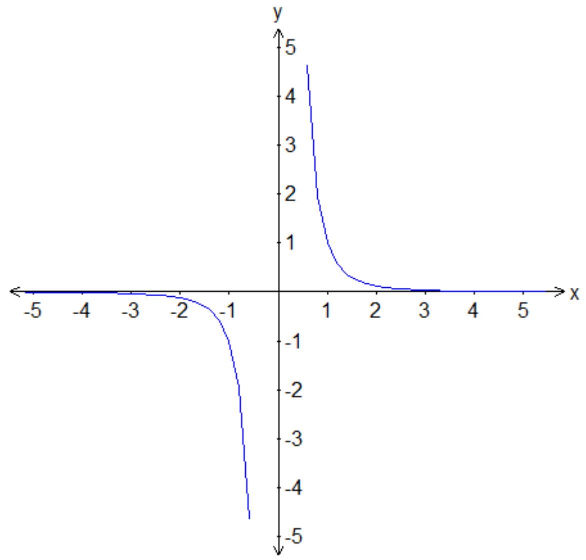
Obrázek 2.5: Graf mocninných funkcí $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a $f(x) = \sqrt[4]{x}$

2.5 Mocninná funkce se záporným celým exponentem

Grafem mocninné funkce se záporným exponentem je hyperbola stupně $\mathrm{n} + 1$. Pokud je $\mathrm{n} = 1$, je grafem funkce rovnoosá hyperbola. [2, s. 96]

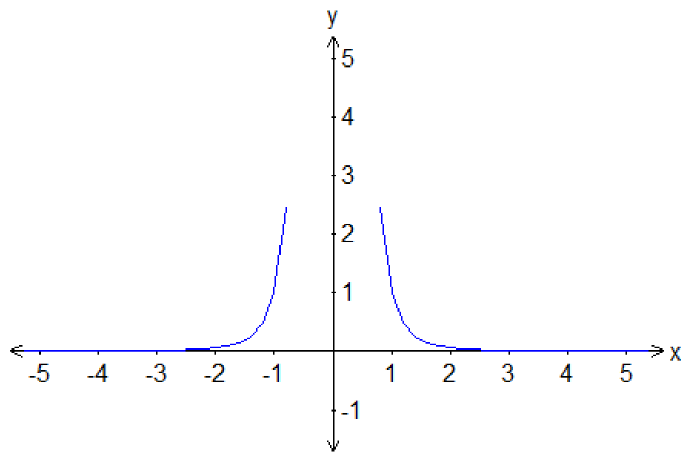
Jestliže je exponent celé záporné číslo, pak $\mathrm{a} = -\mathrm{n}$, kde n patří do přirozených čísel (n ∈ ℕ), získáme mocninnou funkci ve tvaru $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^{-\mathrm{n}} = \frac{1}{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}$ (n ∈ ℕ).

Pokud je n liché, pak vlastnosti této funkce jsou lichost, neomezenost a je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$. Její $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. [1, s. 88]



Obrázek 2.6: Graf mocninné funkce se záporným celým exponentem $f(x) = x^{-3}$

Pokud je n sudé, pak vlastnosti této funkce jsou sudost, omezenost zdola a je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$ je klesající. Její $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $H_f = \mathbb{R}^+$. [1, s. 88]



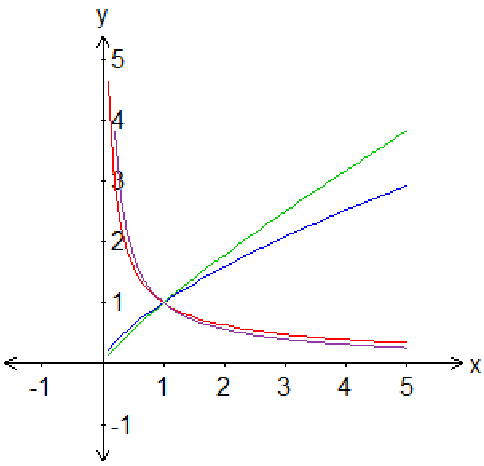
Obrázek 2.7: Graf mocninné funkce se záporným celým exponentem $f(x) = x^{-4}$

2.6 Mocninná funkce s racionálním exponentem

Je-li exponent a racionální číslo ($a \in \mathbb{R}$), které je ve tvaru $a = \frac{m}{n}$, m, n jsou nesoudělná čísla ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Tato mocninná funkce se zapisuje ve tvaru $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Definiční obor je závislý na číslech m a n:

- Pokud je $m > 0$ a n je liché číslo, pak jeho $D_f = \mathbb{R}$;
- Pokud je $m < 0$ a n je liché číslo, pak jeho $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- Pokud je $m > 0$ a n je sudé číslo, pak jeho $D_f = \langle 0, \infty)$;
- Pokud je $m < 0$ a n je sudé číslo, pak jeho $D_f = \langle 0, \infty)$. [1, s. 89]

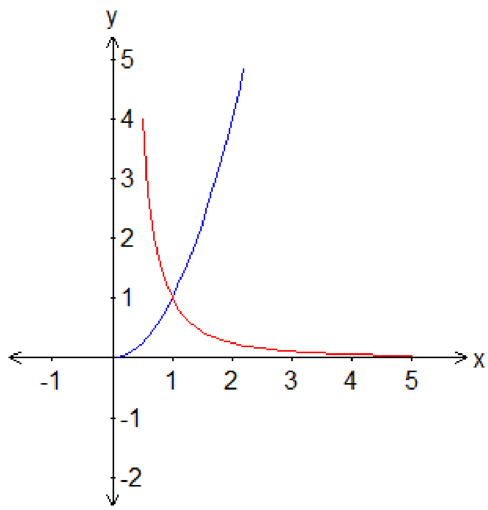


Obrázek 2.8: Graf mocninných funkcí s racionálním exponentem $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^{-2}}$, $f(x) = \sqrt[6]{x^5}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^{-5}}$

2.7 Mocninná funkce s iracionálním exponentem

Je-li exponent a iracionální číslo ($a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), pak mocninná funkce $f(x) = x^a$ je vymezena pomocí logaritmické a exponenciální funkce jako $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$. Vlastnosti této funkce jsou: pokud je $a > 0$ pak je funkce rostoucí a pokud je $a < 0$ pak je funkce klesající.

Její $D_f = \mathbb{R}^+$ a její $H_f = \mathbb{R}^+$. Na intervalu $(0, \infty)$ platí vztah: $x^a = e^{a \ln x}$, $x \in R^+$, $a \in \mathbb{R}$. [1, s. 89]



Obrázek 2.9: Graf mocninných funkcí s iracionálním exponentem $f(x) = e^{2\ln x}$ a $f(x) = e^{-2\ln x}$

Pravidla pro nerovnosti:

„**Věta 2.1.** Nechť $x, y \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí

- $x^a > 0;$
- Je-li $x < y$, $a > 0$, pak $x^a < y^a;$
- Je-li $x < y$, $a < 0$, pak $x^a > y^a;$
- Je-li $x > 1$, $a < b$, pak $x^a < x^b;$
- Je-li $x < 1$, $a < b$, pak $x^a > x^b$.“ [1, s. 90]

Základní pravidla pro počítání s mocninnými funkcemi:

„**Věta 2.2.** Nechť $x, y \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí

$x^a y^a = (xy)^a$ $\quad$ $\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

$x^a x^b = x^{a+b}$ $\quad$ $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ $\quad$ $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ $\quad$ $(x^a)^b = x^{ab}$.“ [1, s. 90]

„**Věta 2.3.** Nechť $x, y \in \mathbb{R}^+$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Potom platí

$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ $\quad$ $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $\quad$ $\sqrt[n]{x^k} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^k, k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.“ [1, s. 90]

2.8 Kvadratická funkce

Kvadratická funkce se často studuje spolu s mocninnými funkcemi. Kvadratická funkce je každá funkce, která je zadána ve tvaru $y = ax^2 + bx + $c, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$.

ax^2 je kvadratický člen

bx je lineární člen

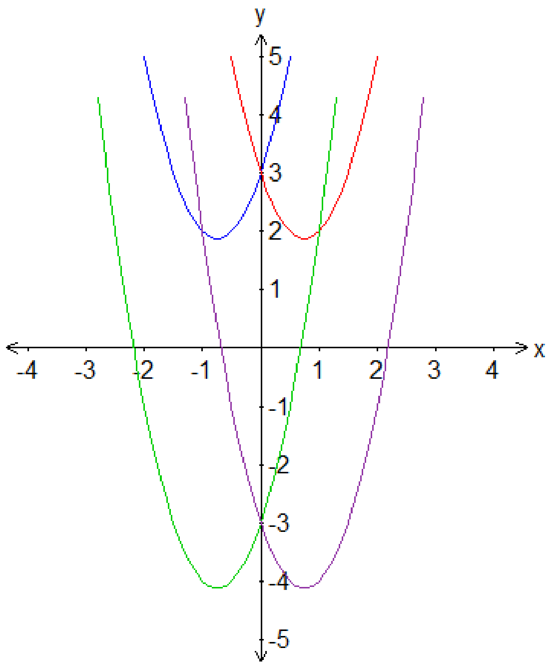
c je absolutní člen

Grafem kvadratické funkce je parabola.

1. Máme kvadratickou funkci ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$ kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$. Její $D_f = \mathbb{R}$.

- $a > 0$

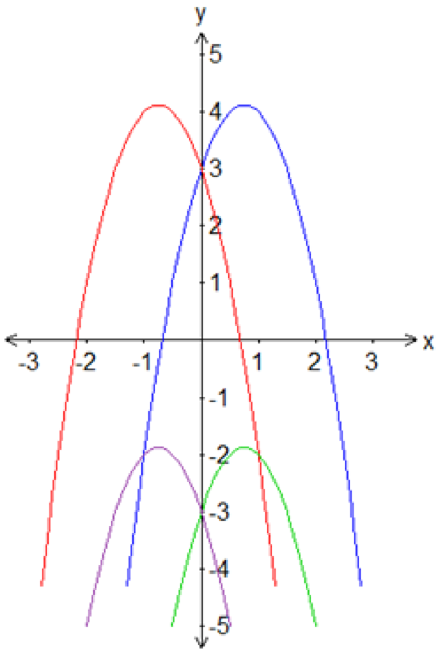
  Její $H_f = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, \infty \right)$. Tato funkce je rostoucí v intervalu $\left\langle -\frac{b}{2a}, \infty \right)$ a je klesající v intervalu $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$. Její další vlastnost je omezenost zdola, ale není omezená shora. V bodě $x = -\frac{b}{2a}$ má minimum.



Obrázek 2.10: Graf kvadratických funkcí $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$, $f(x) = 2x^2 + 3x - 3$, $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$

- $a < 0$

  Její $H_f = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right\rangle$. Tato funkce je rostoucí v intervalu $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle$ a je klesající v intervalu $\left\langle -\frac{b}{2a}, \infty\right)$. Její další vlastnost je omezenost shora, ale není omezená zdola. V bodě $x = -\frac{b}{2a}$ má maximum.

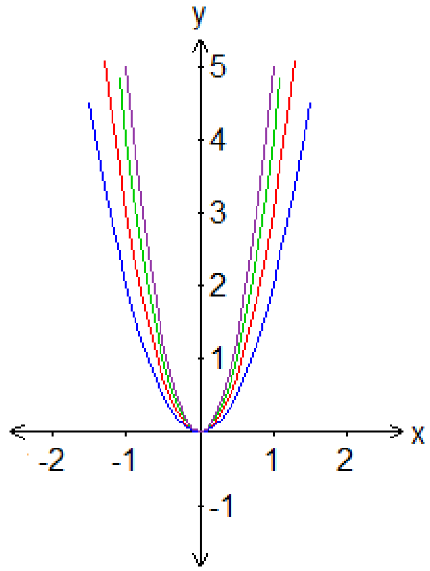


Obrázek 2.11: Graf kvadratických funkcí $f(x) = -2x^2 + 3x + 3$, $f(x) = -2x^2 - 3x + 3$, $f(x) = -2x^2 + 3x - 3$, $f(x) = -2x^2 - 3x - 3$

2. Pokud máme kvadratickou funkci ve tvaru $y = ax^2$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak její $D_f = \mathbb{R}$ a vlastností této funkce je sudost.

- $a > 0$

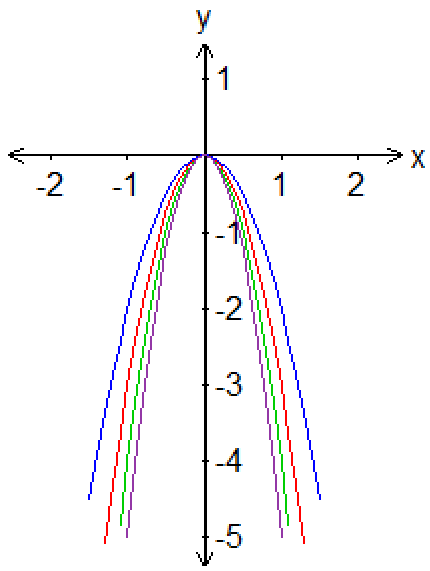
  Její $H_f = \langle 0, \infty)$. Tato funkce je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty)$. Další vlastností je, že je zdola omezená a není shora omezená. V bodě 0 má ostré minimum.



Obrázek 2.12: Graf kvadratických funkcí $f(x) = 2x^2$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = 4x^2$, $f(x) = 5x^2$

- $a < 0$

  Její $H_f = (-\infty, 0\rangle$. Tato funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a klesající na intervalu $\langle 0, \infty)$. Další vlastností je, že je shora omezená a není zdola omezená. V bodě 0 má ostré maximum.

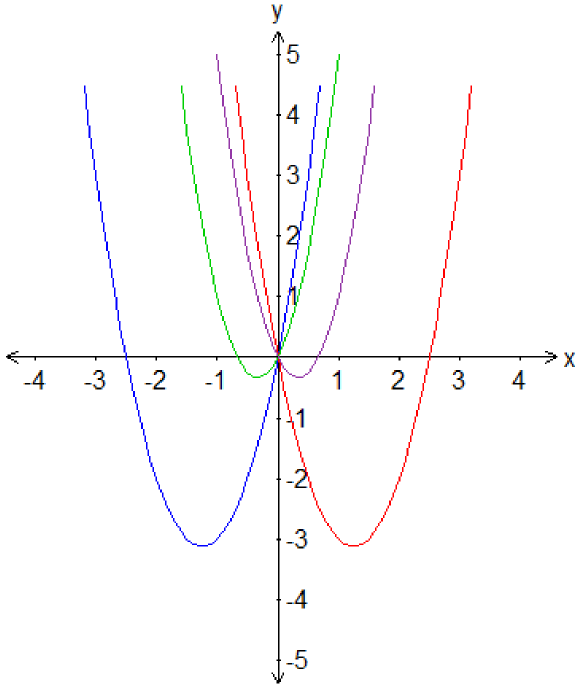


Obrázek 2.13: Graf kvadratických funkcí $f(x) = -2x^2$, $f(x) = -3x^2$, $f(x) - 4x^2$, $f(x) = -5x^2$

3. Pokud máme kvadratickou funkci ve tvaru $y = ax^2 + bx$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, pak její $D_f = \mathbb{R}$.

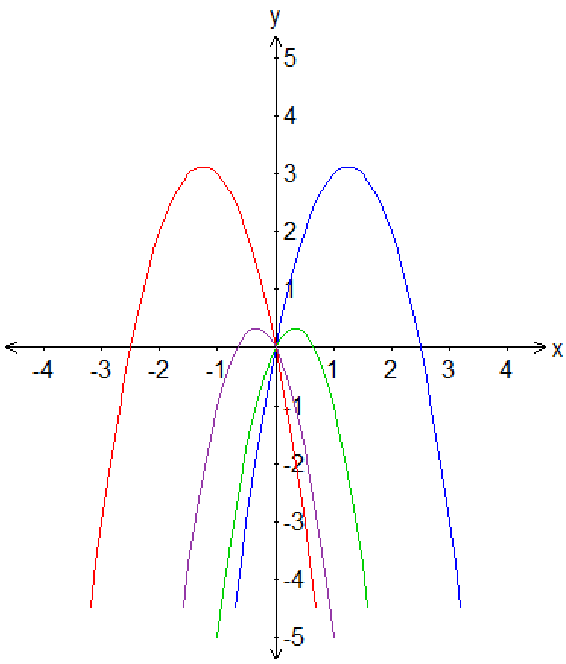
- $a > 0$

  Její $H_f = \left\langle \frac{-b^2}{4a}, \infty \right)$. Tato funkce je rostoucí na intervalu $\left(\frac{-b}{2a}, \infty\right)$ a klesající na intervalu$\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right)$. Další vlastností je, že je zdola omezená a není shora omezená.



Obrázek 2.14: Graf kvadratických funkcí $f(x) = 2x^2 + 5x$, $f(x) = 2x^2 - 5x$, $f(x) = 3x^2 + 2x$, $f(x) = 3x^2 - 2x$

- $a < 0$
- Její $H_f = \left(-\infty, \frac{-b^2}{4a}\right\rangle$. Tato funkce je rostoucí na intervalu $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right)$ a klesající na intervalu $\left(\frac{-b}{2a}, \infty\right)$. Další vlastností je, že je shora omezená a není zdola omezená.



Obrázek 2.15: Graf kvadratických funkcí $f(x) = -2x^2 + 5x$, $f(x) = -2x^2 - 5x$, $f(x) = -3x^2 + 2x$, $f(x) = -3x^2 - 2x$

Poznámka 2.1: V tomto speciálním případě můžeme lehce určit x-ové souřadnice průsečíků grafu s osou x.

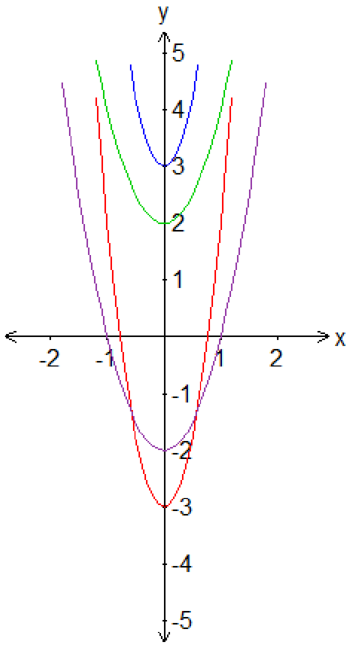
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{-b}{a}.$$

4. Pokud máme kvadratickou funkci ve tvaru $y = ax^2 + c$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ pak se tato funkce nazývá *ryze kvadratická funkce.* Její $D_f = \mathbb{R}$.

- $a > 0$

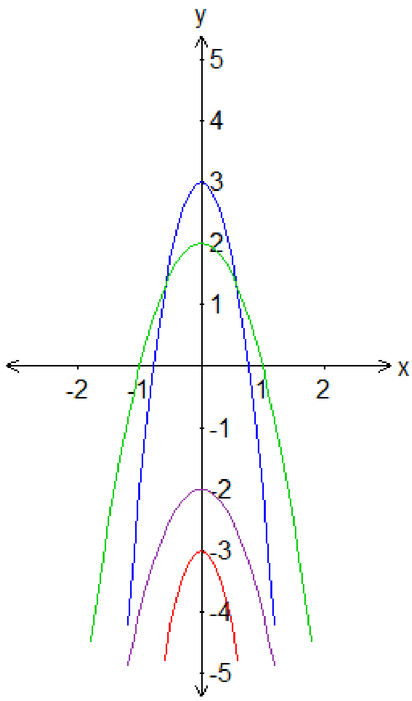
  Její $H_f = \langle c, \infty)$. Tato funkce je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, \infty)$. Další vlastností je, že je zdola omezená a není shora omezená.



Obrázek 2.16: Graf kvadratických funkcí $f(x) = 5x^2 + 3$, $f(x) = 5x^2 - 3$, $f(x) = 2x^2 + 2$, $f(x) = 2x^2 - 2$

- $a < 0$

  Její $H_f = (-\infty, c\rangle$. Tato funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a klesající na intervalu $\langle 0, \infty)$. Další vlastností je, že je shora omezená a není zdola omezená.

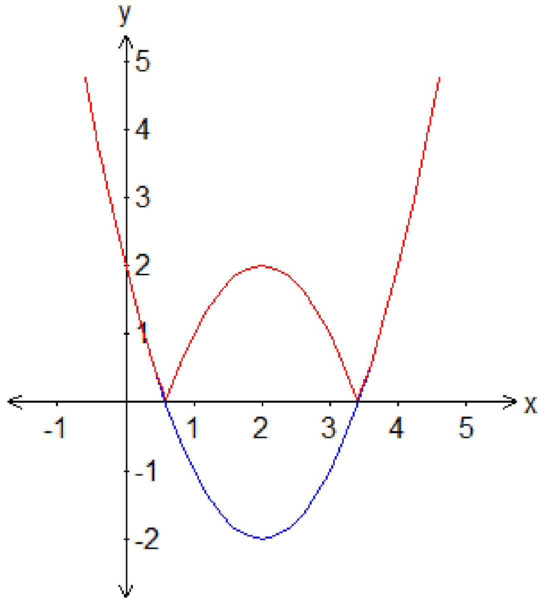


Obrázek 2.17: Graf kvadratických funkcí $f(x) = -5x^2 + 3$, $f(x) = -5x^2 - 3$, $f(x) = -2x^2 + 2$, $f(x) = -2x^2 - 2$

Poznámka 2.2: V tomto speciálním případě můžeme lehce určit x-ové souřadnice průsečíků grafu s osou x. Pokud je $\frac{-c}{a} \geq 0$, pak $x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

5. Kvadratická funkce s absolutní hodnotou

- Pokud máme např. funkci $f(x) = |x^2 - 4x + 2|$, pak tato funkce bude vypadat stejně jako kvadratická funkce bez absolutní hodnoty až na to, že tu část, která je pod osou x, překreslíme v osové souměrnosti s osou x nad osu x.



Obrázek 2.18: Graf kvadratické funkce bez absolutní hodnoty a funkce s absolutní hodnotou

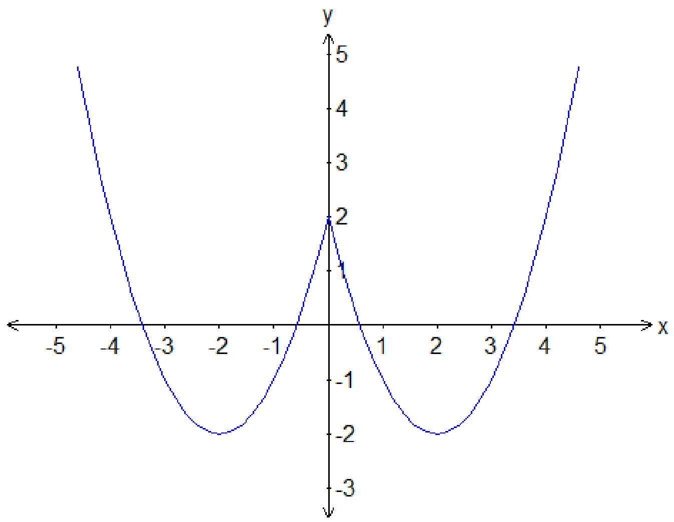
$f(x) = x^2 - 4x + 2$ a $f(x) = |x^2 - 4x + 2|$

- Pokud máme např. funkci $f(x) = x^2 - 4|x| + 2$, pak pro $|x|$ najdeme nulové body, tj. $x = 0$.

  a) $x \in \langle 0, \infty) \Rightarrow |x| = x$

  b) $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow |x| = -x$

  Nyní obě $|x|$ dosadíme do funkce $f(x) = x^2 - 4|x| + 2$ (budou dvě funkce) a nyní pokračujeme dál jako u normální kvadratické funkce. Nakonec uděláme sjednocení těchto dvou funkcí.



Obrázek 2.19: Graf kvadratické funkce s absolutní hodnotou $f(x) = x^2 - 4|x| + 2$

Uvedli jsme si všechny možné typy mocninných a kvadratických funkcí. Na závěr této kapitoly bych shrnula vlivy koeficientů.

Vliv koeficientu a:

- pokud máme kladný koeficient a, pak je graf kvadratické funkce „otevřen“ nahoru (z toho plyne, že je funkce zdola omezená neboli konvexní).
- pokud máme záporný koeficient a, pak je graf kvadratické funkce „otevřen“ dolů (z toho plyne, že je funkce shora omezená neboli konkávní).

Je-li $0 < a < 1$, pak je parabola více rozevřená. Je-li $a > 1$, pak je parabola více přimknutá ke své ose. Z toho plyne, že s rostoucí absolutní hodnotou koeficientu a se bude parabola více přimykat ke své ose.

Vliv koeficientu b:

- Parametr b ovlivňuje souřadnice vrcholu paraboly. Je-li koeficient b roven nule, pak vrchol paraboly bude ležet na ose y.

Vliv koeficientu c:

- Parametr c ovlivňuje y-ovou souřadnici. Graf funkce protíná osou y v bodě y-ové souřadnice rovné koeficientu c.

Společný vliv koeficientů a, b můžeme shrnout takto: Pokud mají koeficienty a, b stejné znaménka, pak vrchol paraboly leží vlevo od osy y a pokud mají znaménka různé, pak leží vpravo od osy y.

Výpočet souřadnic vrcholu:

Souřadnice vrcholu paraboly označujeme $\mathrm{V} = [\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0]$. Výpočet souřadnic vrcholu se provádí pomocí doplnění na čtverec. Funkci $y = ax^2 + bx + c$ vyjádříme ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Výpočet průsečíků s osou x:

Průsečíky vypočítáme pomocí vzorečku: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$ (kde D se nazývá diskriminant), pak z toho plyne $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Pokud $D = 0$, pak $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Hodnotu y_0 zjistíme dosazením hodnoty x_0 do funkce.

[6]

Kapitola 3

Mocninné řady

Mocninné řady jsou nejjednodušším speciálním případem funkčních řad. Jsou to funkční řady, jejichž členy jsou mocninné funkce.

Definice 3.1. *Buď* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, x_0 libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou* se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x + x_0) + a_2(x + x_0)^2 + \cdots + a_n(x + x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x + x_0)^n.$$

[7, s. 85]

„**Věta 3.1.** Nechť $\sum a_n x^n$ je mocninná řada a nechť $a = \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$.
Je-li $a = 0$, pak řada absolutně konverguje pro všechny $x \in \mathbb{R}$ - říkáme, že řada vždy konverguje.
Je-li $a = \infty$, pak řada diverguje pro všechna $x \neq 0$ - říkáme, že řada vždy diverguje.
Je-li $0 < a < \infty$, pak řada absolutně konverguje pro $|x| < \frac{1}{a}$ a diverguje pro $|x| > \frac{1}{a}$."
[7, s. 86]

Pokud $0 < a < \infty$, pak *poloměr konvergence* je číslo $r = \frac{1}{a}$ a *konvergenční interval* je interval $(-r, r)$. Musíme vyšetřit zvlášť chování řady v krajních bodech, jelikož závisí na tvaru mocninné řady. U mocninné řady, která vždy nediverguje, je oborem konvergence konvergenční interval s případnými jeho krajními body, v případě že v nich řada konverguje.

Pokud řada $\sum a_n x^n$ vždy konverguje ($a = 0$), pak její poloměr konvergence je $r = \infty$ a její konvergenční interval je $(-\infty, \infty)$.

Pokud řada $\sum a_n x^n$ vždy diverguje ($a = \infty$), pak její poloměr konvergence je $r = 0$.
[7, s. 86]

„*Poznámka* 3.1. Existuje-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = a$, pak má mocninná řada $\sum a_n x^n$ poloměr konvergence

$$r = \frac{1}{lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(přitom klademe r = ∞, je-li a = 0, a r = 0, je-li a = ∞).“ [7, s. 86]

Vlastnosti a součet mocninné řady

„**Věta 3.2.** Nechť $r > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_n x^n$. Pak tato řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném podintervalu $[-\rho, \rho]$ intervalu $(-r, r)$.“
[7, s. 93]

„**Důsledek 3.1.** Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak součet této řady je spojitá funkce na intervalu $(-r, r)$. “ [7, s. 93]

„**Důsledek 3.2.** Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak pro všechna $x \in (-r, r)$ platí

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má stejný poloměr konvergence r.“ [7, s. 93-94]

„**Důsledek 3.3.** Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak pro libovolný interval $[a, b] \subset (-r, r)$ platí

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} b^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} a^{n+1}."$$

[7, s. 94]

„**Důsledek 3.4.** Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak pro všechna $x \in (-r, r)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má opět poloměr konvergence r.“ [7, s. 95]

„**Věta 3.3. (Abelova).** Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence r, kde $0 < r < \infty$ a nechť je v bodě $x = r$ tato řada konvergentní. Pak součet $s(x)$ této řady je funkce zleva spojitá v bodě r, tj. platí $\lim_{x \to r-} s(x) = \sum a_n r^n$.“ [7, s. 96]

3.1 Taylorova a Maclaurinova řada

Definice 3.2. Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}x_0}{n!}(x - x_0)^n$ nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0.

Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*, která je tedy tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. [7, s. 98]

„**Věta 3.4.** Nechť funkce f má v nějakém bodě x_0 derivace všech řádů. Pak platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

na intervalu I obsahujícím bod x_0 právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ Taylorových zbytků platí $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pro všechna $x \in I$." [7, s. 99]

„**Věta 3.5.** Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I derivace všech řádů a nechť posloupnost $\{f^{(n)}\}$ je stejnoměrně ohraničená na I. Pak Taylorova řada funkce f v libovolném bodě $x_0 \in I$ konverguje na I k f, tj. platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}x_0}{n!}(x - x_0)^n.\text{“}$$

[7, s. 99]

Rozvoje Maclaurinových řad elementárních funkcí

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$(1 + x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a číslo

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n-1)}{n!}$$

je *binomický koeficient.* [7, s. 100]

3.2 Užití mocninných řad

Nyní si ukážeme některé využití mocninných řad. Patří sem např. přibližný výpočet funkčních hodnot, výpočet limit, přibližný výpočet integrálů, řešení diferenciálních rovnic a určování funkčních hodnot logaritmů.

3.2.1 Přibližný výpočet funkčních hodnot

Pro tento výpočet je často požadována velikost chyby, s jakou má být tato hodnota přibližně určena. Pro její odhad využijeme tyto dvě věty:

„**Věta 3.6.** Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim a_n = 0$.
Pak pro zbytek po n-tém členu R_n alternující řady $\sum(-1)^{n-1}a_n$ platí

$$|R_n| < a_{n+1.}"$$

[7, s. 64]

„**Věta 3.7.** Nechť $\sum a_n$ je číselná řada, pro kterou platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \text{ pro všchna } n \in \mathbb{N}."$$

Pak pro zbytek R_n této řady platí

$$|R_n| \leq |a_n|\frac{q}{1-q}."$$

[7, s. 64-65]

V příkladech, ve kterých budeme určovat přibližnou hodnotu funkce $f(x)$ pomocí prvních n členů příslušného rozvoje dané funkce, budeme mít na mysli prvních n nenulových členů tohoto rozvoje. [7, s. 113]

„Příklad 3.1. Pomocí prvních n členů určete přibližnou hodnotu výrazů:

a) $\sqrt{e}$ (n = 5)

b) $(1{,}1)^{1{,}2}$ $(n = 3)$

Řešení: a) Použijeme Maclaurinovu řadu funkce e^x, kam dosadíme za $x = \frac{1}{2}$ a $n = 5$,

a obdržíme

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \doteq 1{,}65.$$

b) Použijeme Maclaurinovu řadu mocninné funkce $(1 + x)^a$ kam dosadíme $x = 0{,}1$, $a = 1{,}2$, $n = 3$ a dostaneme

$$(1{,}1)^{1{,}2} \doteq 1 + 1{,}2 \cdot 0{,}1 + \frac{1{,}2 \cdot 0{,}2}{2} (0{,}1)^2 \doteq 1{,}12."$$

[7, s. 113]

3.2.2 Určování funkčních hodnot logaritmů

U výpočtu logaritmů je někdy dobré použít rozvoj funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right), \quad |x| < 1.$$

[7, s. 117]

„**Příklad 3.2.** Kolik členů rozvoje následujících funkcí je třeba vzít, abychom určili číslo ln 2 s chybou menší než 10^{-5}:

a) $\ln(1 + x)$

b) $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

Řešení: a) Chyba je $|R_n| < \frac{1}{n+1}$. Máme-li proto určit číslo ln 2 s chybou menší než 10^{-5}, musí být $|R_n| < \frac{1}{n+1} < 10^{-5}$, tj. je třeba sečíst 100 000 členů této řady.

b) Nejprve určíme hodnotu x, pro kterou je $\frac{1+x}{1-x} = 2$. Přímým výpočtem dostaneme $x = \frac{1}{3}$ a po dosazení do $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)$, $|x| < 1$. dostaneme

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots\right).$$

Pro odhad chyby R_n v řadě na pravé straně rovnosti použijeme větu 3.6, podle níž

$$|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q} < 10^{-5}, \text{kde} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1.$$

Určeme q_x v závislosti na hodnotě x:

$$q_x = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{2x^{2n+1}} = x^2 \frac{2n+1}{2n+3} \leq x^2 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Pro $x = \frac{1}{3}$ dostáváme $q = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Numerickým výpočtem ověříme, že pro $n = 4$ je splněno

$$|R_5| \leq \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{8} \doteq 1{,}41 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}.$$

Proto v tomto případě stačí vzít k výpočtu ln 2 prvních pět nenulových členů, tj.

$$\ln 2 \doteq 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9\right) \doteq 0{,}6931."$$

[7, s. 117-118]

3.2.3 Výpočet limit

Při výpočtu limit se nejčastěji využívají elementární způsoby výpočtu nebo l´Hospitalovo pravidlo. K výpočtu některých limit lze někdy použít mocninné řady. [7, s. 118]

„**Příklad 3.3.** Určete následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(tg\, x - \sin x) - x^3}{x^5}$

Řešení: a) K vyjádření odmocnin použijeme binomický rozvoj funkcí $\sqrt{1+x}$ a $\sqrt[3]{1-x}$. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots\right) - \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \cdots\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{72}x^2 + \cdots\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{72}x + \cdots\right) = \frac{5}{6}.$$

b) Použijeme Maclaurinovy rozvoje funkcí $\tan x$, $\sin x$ a dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left[\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + \cdots\right) - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right)\right] - x^3}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(\frac{1}{4}x^5 + \frac{542}{7!}x^7 + \cdots\right) = \frac{1}{4}."$$

[7, s. 118-120]

3.2.4 Přibližný výpočet integrálů

Integrovat lze, jestliže máme primitivní funkce (elementární neboli konečného tvaru). Ty jdou vyjádřit pomocí základních elementárních funkcí (racionální, exponenciální, goniometrické a cyklometrické), pomocí algebraických operací a skládání v konečném počtu.

Zde si ukážeme, že lze integrovat některé funkce (ty které nejdou vyjádřit pomocí elementárních funkcí), které se nazývají *vyšší transcendentní funkce* pomocí mocninných řad. [7, s. 120]

„**Příklad 3.4.** a) Pomocí prvních tří nenulových členů přibližně vypočtete $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ a odhadněte chybu.

b) S chybou menší než 10^{-4} přibližně vypočtěte $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$.

Řešení: a) Maclaurinův rozvoj funkce e^{-x^2} vypadá takto:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odtud integrací, přičemž řadu na pravé straně integrujeme člen po členu, dostaneme

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} + \cdots,$$

Kde $x \in \mathbb{R}$. Určitý integrál lze pak vyjádřit řadou

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1) \cdot n!} + \cdots,$$

což je alternující číselná řada s klesajícími členy. Pro ni platí, že velikost chyby při součtu prvních tří členů je menší než absolutní hodnota čtvrtého členu.

$$|R_3| < \frac{1}{7 \cdot 3!} = \frac{1}{42} < 0{,}024.$$

Přibližná hodnota integrálu $\int_0^1 e^{-x^2}dx \doteq 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \doteq 0{,}77$ je určena chybou menší než 0,03.

b) Integrovanou funkci $\frac{1}{1+x^4}$ vyjádříme mocninnou řadou

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 + \cdots + (-1)^n \cdot x^{4n} + \cdots, \quad |x| < 1,$$

odkud integrací plyne

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots)dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \cdots\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{1}{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \cdots.$$

Jedná se o alternující číselnou řadu a podle zadání má být chyba menší než 10^{-4}. Pro $n = 3$ platí $|R_3| < \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \doteq 9{,}39 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}$, proto stačí sečíst první tři členy. Hledaná hodnota je

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} \doteq \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \doteq 0{,}4940."$$

[7, s. 120-121]

3.2.5 Řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad

Jak již vyplývá z názvu, jedná se o řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad ve tvaru $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ definované v okolí bodu $x = x_0$. [7, s. 123]

„**Příklad 3.4.** Řešte diferenciální rovnice pomocí mocninné řady:

a) $y'' + y = 0$

b) $y'' + kxy = 0.$

Řešení: Obecné řešení obou rovnic hledáme ve tvaru $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$.
Pak pro derivace této funkce platí

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \ldots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 2a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots.$$

a) Dosazením za y, y'' do diferenciální rovnice dostáváme

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots + a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = 0,$$

tj. sečtením koeficientů u stejných členů

$$(2a_2 + a_0) + (3 \cdot 2a_3 + a_1)x + \cdots + (n(n-1)a_n + a_{n-2})x^{n-2} + \cdots = 0.$$

Odtud plyne $n(n-1)a_n + a_{n-2} = 0$, tj. $a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$, kde a_{n-2} je rekurentně určeno z předchozích kroků. Z uvedených vztahů je vidět, že přesné určení koeficientů a_n závisí na volbě a_0, a_1. Uvažujme dva případy:

1. Je-li $a_0 = 0$, pak $a_{2n} = 0$, tj. v řadě se vyskytují pouze liché členy. Pro $a_1 \in \mathbb{R}$ libovolné dostaneme

$$a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{2n(2n+1)} = \cdots = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}$$

a řešení rovnice je

$$y = a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right) = a_1 \sin x.$$

2. Je-li $a_1 = 0$, pak $a_{2n+1} = 0$, tj. v řadě se vyskytují pouze sudé členy. Pro $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné je

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n(2n-1)} = \cdots = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!},$$

tj.

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right) = a_0 \cos x.$$

Poznamenejme, že je-li $a_0 = a_1 = 0$, tj. $a_n = 0$ pro všechna n, pak řešení $y \equiv 0$, což je obsaženo v předchozích případech.

Dohromady je obecné řešení $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

b) Postupujeme podobně. Po dosazení do rovnice za y, y'' dostáváme

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + kx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

po úpravě

$$2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots + k(a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{n-3} x^{n-2} + \cdots) = 0.$$

Odtud $a_2 = 0$ a porovnáním koeficientů u mocniny x^{n-2} můžeme určit rekurentní vztah pro a_n:

$n(n-1)a_n + ka_{n-3} = 0 \Longrightarrow a_n = \frac{k}{n(n-1)} a_{n-3}$ pro $n = 3,4,\cdots$.

Pro $a_2 = a_5 = \cdots = 0$ a a_0, a_1 volíme libovolně. Dostaneme tyto případy:

Je-li $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, pak $a_3 = -\frac{k}{6} a_0$, $a_6 = -\frac{k}{5 \cdot 6} a_3 = \frac{k}{180} a_0$ atd.

Je-li $a_1 \in \mathbb{R}$ libovolné, pak $a_4 = -\frac{k}{12} a_0$, $a_7 = -\frac{k}{7 \cdot 6} a_4 = \frac{k}{12 \cdot 42} a_1$ atd.

Dohromady obecné řešení lze vyjádřit ve tvaru

$$a = a_0 \left(1 - \frac{k}{6} x^3 + \frac{k}{180} x^6 + \cdots \right) + a_1 \left(x - \frac{k}{12} x^4 + \frac{k}{12 \cdot 42} x^7 + \cdots \right)."$$

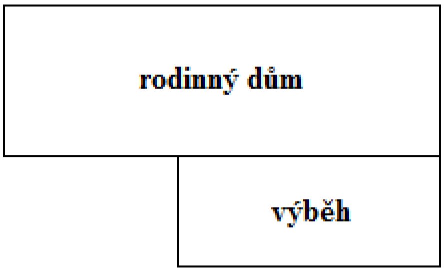
[7, s. 123-124]

Kapitola 4

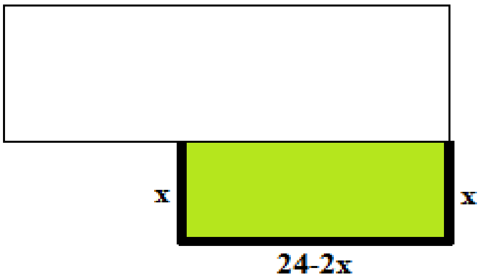
Příklady

Prvních osm příkladů je zaměřeno na mocninné (kvadratické) funkce. Tyto příklady se počítají na středních školách. První dva příklady jsou příklady na extrémy, ale na středních školách se počítají pomocí kvadratické funkce. Všechny příklady na funkce jsem vymyslela sama, ale u prvních dvou jsem se řídila řešením pomocí učebnice [8]. Ostatní příklady jsou zaměřeny na mocninné řady. Tyto příklady se počítají na vysokých školách. Příklad 4.9 je zaměřen na obor konvergence. Příklady 4.10 a 4.11 jsou zaměřené na přibližný výpočet funkčních hodnot. Příklad 4.12 je zaměřen na určování funkčních hodnot logaritmů. Příklad 4.13 je na limity. Příklady 4.14 a 4.15 jsou zaměřeny na přibližný výpočet integrálů a příklad 4.16 se týká řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad. U příkladu 4.9 jsem vzala zadání z učebnice [7], ale příklad jsem řešila sama.

Příklad 4.1 Pan Novák si vzpomněl, že má doma ještě 24 metrů pletiva. Přemýšlel, že by oplotil část svého pozemku a koupil si pár krocanů. Žije v rodinném domě a za ním má velkou zahradu. Chtěl by zjistit rozměr výběhu s jeho největším obsahem.



Obrázek 4.1: Rodinný dům s výběhem



Obrázek 4.2: Příklad oplocení výběhu

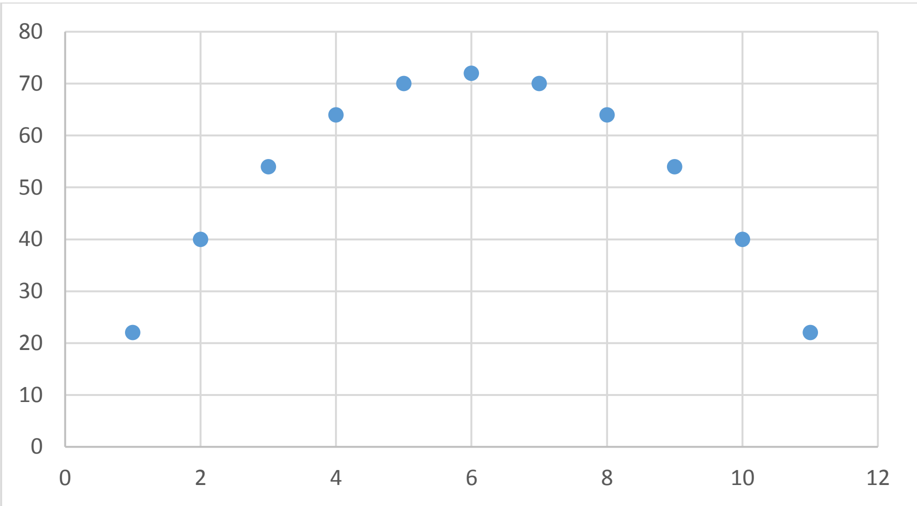
Řešení: Délky jednotlivých stran pravoúhelníku neznáme, ale víme, že délky bočních stran jsou stejné (x) metrů a poslední strana tedy bude $(24 - 2x)$ metrů. Obsah zapíšeme jako $S = (24 - 2x) \cdot x$. Dále z toho vyplývá, že $x \in (0,12)$.

Vypočítáme hodnotu obsahu, pokud dosadíme za x jednotlivé čísla z intervalu $(0,12)$. Pro 0 a 12 počítat nemusíme, protože do tohoto intervalu nepatří.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S	22	40	54	64	70	72	70	64	54	40	22

Tabulka 4.1

V tabulce vidíme, že hodnoty obsahu napřed stoupají a pak zase klesají. Abychom zjistili největší hodnotu výrazu S, zakreslíme si tabulku do osy souřadnic.



Obrázek 4.3: Bodový graf funkce $f(x) = (24 - 2x) \cdot x$

Podle obrázku 4.3 vyplývá, že nejvyšší hodnota bude pro $x = 6$.

Teď zkontrolujeme, jestli je tomu opravdu tak. Doplníme výraz $(24 - 2x) \cdot x$ na druhou mocninu dvojčlenu.

$$(24 - 2x) \cdot x = -2(x^2 - 12x) = -2(x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 - 6^2) =$$
$$= -2(x^2 - 12x + 6^2) + 2 \cdot 6^2 = -2(x - 6)^2 + 72.$$

Výraz $-2(x - 6)^2 + 72$ má největší hodnotu pro $x = 6$, to je 72.

Závěr: Pan Novák by si měl oplotit výběh s bočními stranami o délkách 6 metrů a třetí stranou o délce 12 metrů.

Příklad 4.2 Pokud je Kuba dole pod balkónem vysokým 43 metrů, na kterém stojí Alenka a chce hodit nějakou věc s hustotou $g = 10\, m.s^{-2}$, může tam Kuba dohodit? Bude házet počáteční rychlostí $v = 30\, m.s^{-1}$.

Řešení: Musíme zjistit, jak vysoko vůbec může dohodit. Použijeme vzoreček $s = vt - \frac{g}{2}t^2$.

Do tohoto vzorečku dosadíme známé hodnoty.

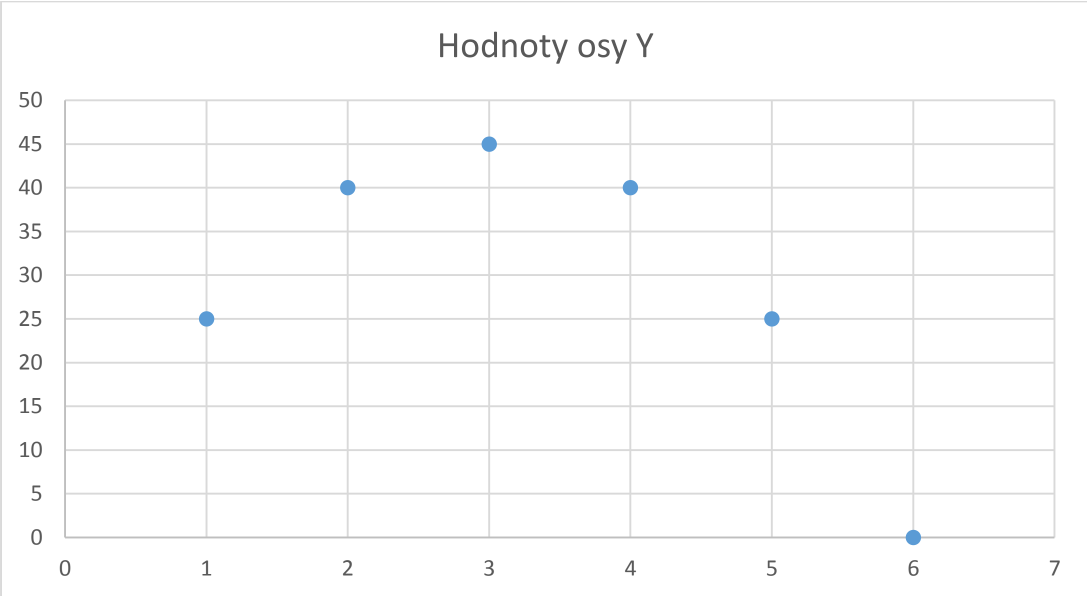
$$s = 30t - \frac{10}{2}t^2 = 5t(6-t)$$

Do tabulky zapíšeme hodnoty a zjistíme pro které číslo s je hodnota nejvyšší.

x	1	2	3	4	5	6
s	25	40	45	40	25	0

Tabulka 4.2

Z tabulky vidíme, že jako v předchozím příkladu i zde stoupají hodnoty a pak klesají. Zakreslíme si je ještě do grafu.



Obrázek 4.4: Bodový graf funkce $f(x) = 5t(6-t)$

Z grafu vyplývá, že nejvyšší hodnota je 45 pro x = 3. Ověříme si to doplněním výrazu $5t(6-t)$ na druhou mocninu dvojčlenu.

$$5t(6-t) = -5(t^2-6t) = -5(t^2-6t+3^2-3^2) = -5(t^2-6t+3^2)+5\cdot 3^2 =$$
$$= -5(t-3)^2+45.$$

Výraz $-5(x-3)^2+45$ má největší hodnotu pro $x = 3$, to je 45.

Závěr: Balkón je ve výšce 43 metrů a Kuba může maximálně dohodit 45 metrů do výšky. Kuba může dohodit na balkón.

Příklad 4.3 Je zadána funkce $f(x) = x^2 + 3x + \frac{5}{4}$. Zakreslete hodnoty pro $f(x)$ do tabulky. Zjistěte souřadnice průsečíků s osou x, vrcholu paraboly (pokud je to parabola), zakreslete graf, určete její definiční obor, obor hodnot a určete vlastnosti funkce.

Řešení:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1,25	-0,75	-0,75	1,25	5,25	11,25	19,25

Tabulka 4.3

Průsečíky s osou x:

$$x^2 + 3x + \frac{5}{4} = 0$$

Vypočítáme diskriminant podle vzorečku

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{4}$$

$$D = 4$$

Vypočítáme x_1, x_2: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}$$

Průsečíky s osou x jsou $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right]$.

Souřadnice vrcholu:

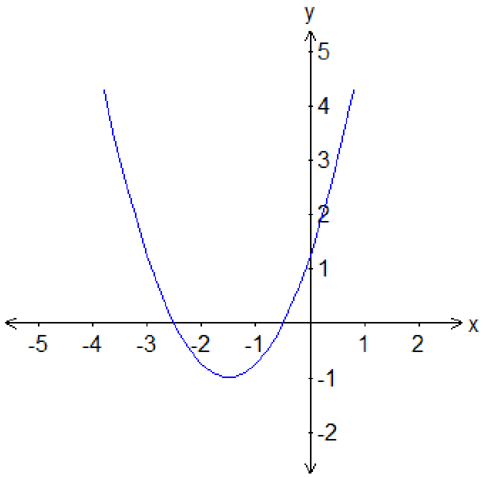
$$x^2 + 3x + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}(4x^2 + 12x + 5) = \frac{1}{4}(4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5) =$$

$$= \frac{1}{4}[(4x^2 + 4x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 + 5] = \frac{1}{4}(4x^2 + 12x + 9) - 1 =$$

$$= \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 1.$$

Souřadnice vrcholu jsou: $V = \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$

Graf:



Obrázek 4.5: Graf funkce $f(x) = x^2 + 3x + \frac{5}{4}$

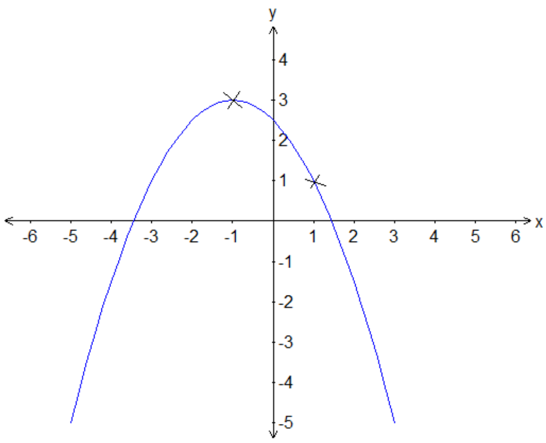
$D_f = (-\infty, \infty)$ a $H_f = \langle -1, \infty)$.

Vlastnosti: Funkce je klesající na intervalu $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle$ a rostoucí na intervalu $\left\langle -\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Je zdola omezená. V bodě $-\frac{3}{2}$ má minimum.

Příklad 4.4 Určete předpis kvadratické funkce, jestliže víme, že souřadnice vrcholu $V = [-1{,}3]$ a prochází bodem $[1{,}1]$.

Řešení: Nakreslíme si soustavu souřadnic, ve které si uděláme křížky s body, které známe, a podle nich si načrtneme graf.



Obrázek 4.6: Graf funkce $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 3$

Nyní si zapíšeme funkci: $f(x) = A(x + 1)^2 + 3$. Hodnoty této funkce jsme vzali z $V = [-1{,}3]$.

Hodnotu koeficientu A můžeme dopočítat, jelikož víme, že funkce prochází bodem [1,1].

Bod musí vyhovovat předpisu $1 = A(1+1)^2 + 3$.

$$-2 = A \cdot 2^2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

Konečný předpis funkce bude vypadat $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$.

Příklad 4.5 Určete předpis kvadratické funkce, pro kterou platí: $H_f = (-\infty, 2\rangle$, $f(2) = f(0) = -4$.

Řešení: Napíšeme si předpis funkce $f(x) = A(x - B) + C$.

Podle $H_f = (-\infty, 2\rangle$ bude mít hledaná funkce maximum v bodě 2 a bude mít konkávní tvar.

Ze zápisu $f(2) = f(0) = -4$ získáme dva body grafu, protože oba mají i stejnou y-ovou hodnotu. Můžeme určit i x-ovou souřadnici maxima. Jelikož je parabola osově souměrná podle svislé přímky, která prochází maximem, bude x-ová souřadnice maxima ležet ve středu mezi x-ovými souřadnicemi bodů se stejnou y-ovou souřadnicí.

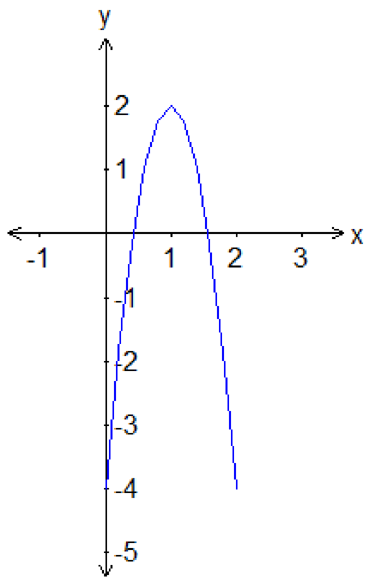
Ze souřadnic maxima můžeme vypočítat koeficienty B a C. $f(x) = A(x-1)^2 + 2$.

Koeficient A zjistíme dosazením jednoho ze zadaných bodů $[2, -4]$.

$-4 = A(2-1)^2 + 2 \qquad -6 = A(1)^2 \qquad A = -6$

$$y = -6(x-1)^2 + 2.$$

Sestrojíme graf



Obrázek 4.7: Graf funkce $f(x) = -6(x-1)^2 + 2$

Příklad 4.6 Vrchol paraboly, která je grafem funkce $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$, leží na kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic. Jaký má poloměr?

Řešení: Napřed si z funkce $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ zjistíme průsečíky s osou x.

$$2x^2 + 4x + 6 = 0$$

Napřed upravíme: $x^2 + 2x + 3 = 0$

Vypočítáme x_1, x_2: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} < 0$$

To znamená, že průsečíky s osou x nejsou.

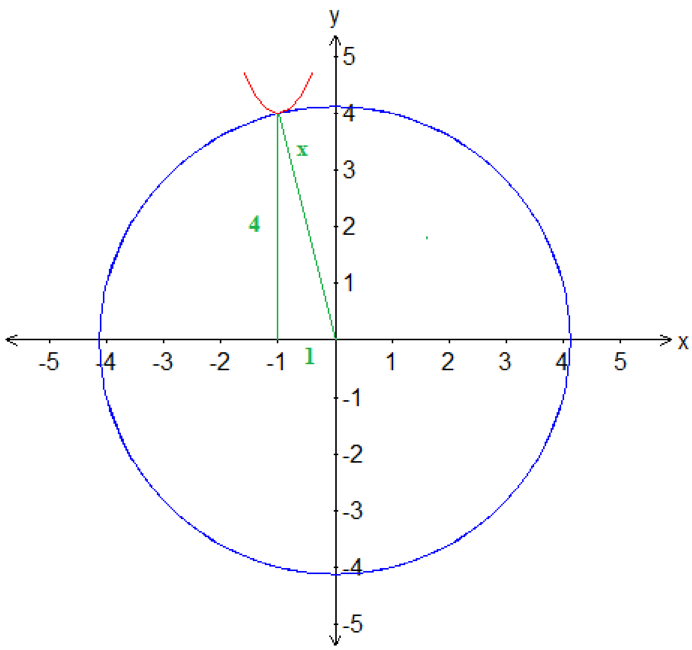
Nyní si vypočítáme souřadnice vrcholu:

$$2x^2 + 4x + 6 = 2(x^2 + 2x + 3) = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 3) =$$
$$= 2[(x^2 + 2x + 1^2) - 1^2 + 3] = 2((x^2 + 2x + 1^2) + 2) = 2(x + 1)^2 + 4.$$

Souřadnice vrcholu jsou: $V = [-1,4]$.

Dále víme, že $c = 6 \Rightarrow$ průsečík v bodě 6 na ose y.

Narýsujeme si kružnici se středem S, která je ve středu osy souřadnic a dotýká se vrcholu paraboly.



Obrázek 4.8: Zde je ukázána jen část paraboly, protože v tomto případě je důležitější kružnice

Jak zjistíme poloměr? Podle obrázku 4.8 sestrojíme trojúhelník, který má jeden vrchol ve vrcholu paraboly, druhý vrchol má v bodě -1 a třetí ve středu soustavy souřadnic. Dvě strany trojúhelníku se dají snadno spočítat. Třetí stranu trojúhelníku vypočítáme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = 4^2 + 1^2 = 17$$

$$c = \sqrt{17}$$

Poloměr kružnice je $\sqrt{17}$.

Příklad 4.7 Je dána kvadratická funkce $f(x) = -2x^2 - x + 3$. Vypočítejte obsah trojúhleníku, jehož vrcholy jsou průsečíky grafu funkce se souřadnými osami.

Řešení: Jako v předešlém příkladu zjistíme průsečíky s osou x a souřadnice vrcholu kvadratické funkce.

$$-2x^2 - x + 3 = 0$$

Vypočítáme x_1, x_2: $\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\mathrm{a}}$

$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)}$$

$$\mathrm{x}_1 = 1, \mathrm{x}_2 = -\frac{3}{2}$$

Průsečíky s osou x jsou $\left[1, -\frac{3}{2}\right]$.

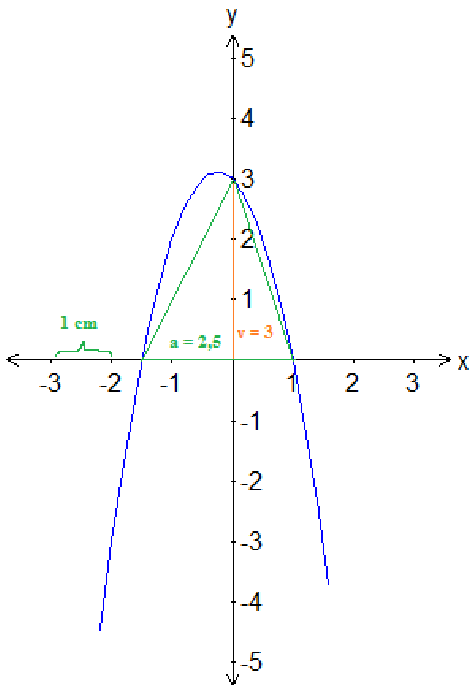
Souřadnice vrcholu:

$$-2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 3 = -2\left(\mathrm{x}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{3}{2}\right) = -2\left(\mathrm{x}^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\mathrm{x} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= -2\left[\left(\mathrm{x}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{16}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right] = -2\left(\left(\mathrm{x}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{16}\right) - \frac{25}{16}\right) = -2\left(\mathrm{x} + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}.$$

Souřadnice vrcholu jsou: $\mathrm{V} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{25}{8}\right]$.

Dále víme, že $c = 3 \Rightarrow$ průsečík na ose y.



Obrázek 4.9: Graf funkce $f(x) = -2x^2 - x + 3$ a trojúhelník

Podle obrázku 4.9 narýsujeme trojúhelník. Jeho vrcholy jsou průsečíky grafu paraboly s osami. V trojúhelníku známe stranu $a = 2{,}5$ cm a výšku $v = 3$ cm. Ze známého vzorečku $S = \frac{1}{2} a \cdot v_a$ vypočítáme obsah trojúhelníku.

$$S = \frac{1}{2} 2{,}5 \cdot 3 = 3{,}75 \text{ cm}^2.$$

Příklad 4.8 Narýsujte grafy těchto funkcí

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) $g(x) = x^2 - 4|x| + 1$.

Řešení: a) Jako první zjistíme u grafu $f(x) = x^2 - 4x + 1$ průsečíky s osami:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Vypočítáme x_1, x_2 podle vzorečku: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, kde dosadíme známé hodnoty

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 2 + \frac{\sqrt{12}}{2}, x_2 = 2 - \frac{\sqrt{12}}{2}.$$

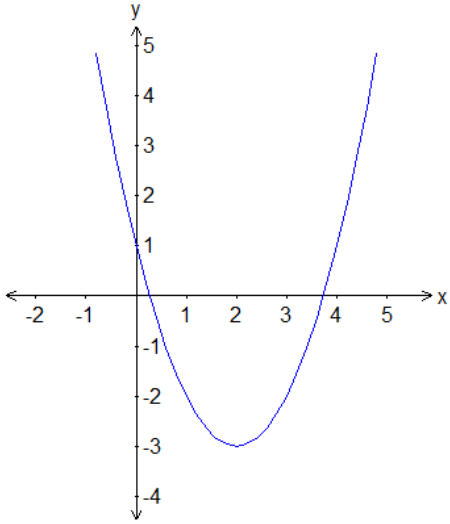
Průsečíky s osou x jsou $\left[2 + \frac{\sqrt{12}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{12}}{2}\right]$.

Dále vypočítáme souřadnice vrcholu:

$$x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3.$$

Souřadnice vrcholu jsou: V $= [2, -3]$.

Graf funkce:



Obrázek 4.10: Graf funkce $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b) U funkce $g(x) = x^2 - 4|x| + 1$ musíme napřed zjistit nulové body $x = 0$.

1. $x \in \langle 0, \infty) \Longrightarrow |x| = x$

$$g_1(x) = x^2 - 4x + 1$$

Vrchol paraboly již známe z předchozí části příkladu a). V $= [2, -3]$.

Najdeme průsečíky s osou x tak, že dosadíme za y nulu.

$$y = 0 \qquad 0 = x^2 - 4x + 1$$

$$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1}}{2}$$

$$x_1 = 2 + \frac{\sqrt{12}}{2}, x_2 = 2 - \frac{\sqrt{12}}{2} \Longrightarrow P_{x1} = \left[2 + \frac{\sqrt{12}}{2}, 0\right], P_{x2} = \left[2 - \frac{\sqrt{12}}{2}, 0\right]$$

Najdeme průsečíky s osu y tak, že dosadíme za x nulu.

$$x = 0 \qquad y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1$$

$$y = 1 \Longrightarrow P_y = [0,1]$$

2. $x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow |x| = -x$

$$g_2(x) = x^2 + 4x + 1$$

Upravíme předpis funkce na druhou mocninu dvojčlenu, abychom získali vrchol paraboly:

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 1 = (x+2)^2 - 4 + 1 = (x+2)^2 - 3$$

$$V = [-2, -3]$$

Najdeme průsečíky s osou x:

$$y = 0 \qquad 0 = x^2 + 4x + 1$$

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1}}{2}$$

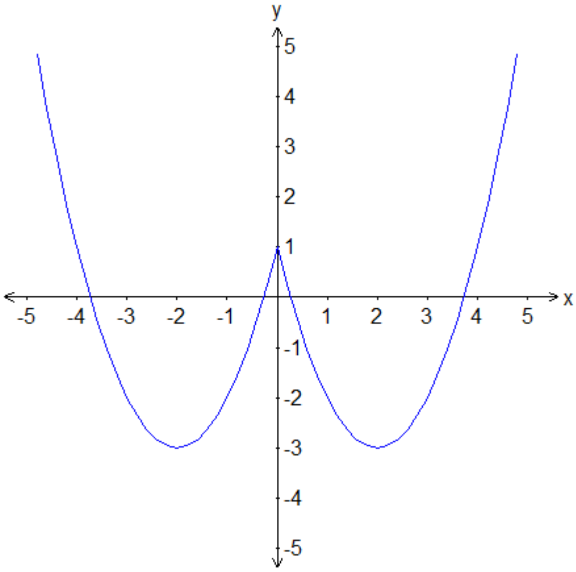
$$x_1 = \frac{\sqrt{12}}{2} - 2, x_2 = -\frac{\sqrt{12}}{2} - 2 \Longrightarrow P_{x1} = \left[\frac{\sqrt{12}}{2} - 2{,}0\right], P_{x2} = \left[-\frac{\sqrt{12}}{2} - 2{,}0\right]$$

Najdeme průsečíky s osu y:

$$x = 0 \qquad y = 0^2 + 4 \cdot 0 + 1$$

$$y = 1 \Longrightarrow P_y = [0{,}1]$$

Narýsujeme si grafy obou funkcí do jednoho obrázku a uděláme jejich sjednocení.



Obrázek 4.11: Zde je již pouze výsledná funkce $g(x) = x^2 - 4|x| + 1$

Příklad 4.9. Určete poloměr a obor konvergence následujících řad.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$

Řešení: a) $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n3^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n3^{n-1}} \cdot (n+1)3^n = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{n} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 3$$

Poloměr konvergence $r = 3$.

$$x = 3 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{jedná se o harmonickou řadu, která diverguje} - \text{D}$$

$$x = -3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{n3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3^{n-1}}{n3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

Jedná se o Leibnizovo kritérium $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad$ konveruje $-$ K

Obor konvergence je $\langle -3,3)$.

b) $x_0 = 0, a_n = \frac{2^n n!}{(2n)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^{n+1}(n+1)n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)(2n+1)}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 2n + 1 = \infty.$$

Příklad 4.10 Pomocí prvních n členů určete přibližnou hodnotu výrazů:

a) e^3 $(n = 5)$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ $(n = 7)$

c) $(1{,}3)^3$ $(n = 4)$

d) $\sqrt[9]{513}$ $(n = 2)$

e) $\sqrt[3]{220}$ $(n = 2)$

f) $\sin 5$ $(n = 5)$

Řešení: a) Použijeme Maclaurinovu řadu funkce e^x kam dosadíme za $x = 3$ a $n = 5$, a získáme

$$e^3 = 1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} \doteq 16{,}375.$$

Pokud hodnotu e^3 zadáme do kalkulačky, vyjde nám $e^3 \doteq 20{,}0855$. Je to hodně velký rozdíl, proto by bylo lepší za prvních n členů dosadit alespoň číslo 7.

b) Použijeme Maclaurinovu řadu funkce e^x kam dosadíme za $x = -\frac{1}{3}$ a $n = 7$, a získáme

$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{\frac{-1}{3}}$

$$e^{\frac{-1}{3}} = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \frac{1}{4!} + \left(-\frac{1}{3}\right)^5 \frac{1}{5!} + \left(-\frac{1}{3}\right)^6 \frac{1}{6!} \doteq 0{,}7165.$$

c) Použijeme Maclaurinovu řadu funkce $(1 + x)^a$ kam dosadíme za $x = 0{,}3$, $n = 4$ a $a = 3$, a získáme

$$(1{,}3)^3 = 1 + \binom{3}{1} 0{,}3 + \binom{3}{2} 0{,}3^2 + \binom{3}{3} 0{,}3^3 = 2{,}197.$$

d) Použijeme Maclaurinovu řadu funkce $(1+x)^a$, ale protože tato řada konverguje pouze na intervalu $(-1{,}1)$, musíme řadu nejprve upravit.

$$\sqrt[9]{513} = \sqrt[9]{512+1} = \sqrt[9]{2^9+1} = \sqrt[9]{2^9\left(1+\frac{1}{2^9}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{9}}$$

V této chvíli můžeme použít rozvoj mocninné funkce a po dosazení za $x = \frac{1}{512}$, $n = 2$ a $a = \frac{1}{9}$, a získáváme

$$\sqrt[9]{513} = 2\left(1+\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{9}} = 2\left(1+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{512}\right) = 2{,}0004.$$

e) Výpočet téhle řady je stejný jako u předchozího příkladu. Použijeme Maclaurinovu řadu funkce $(1+x)^a$, ale protože tato řada konverguje pouze na intervalu $(-1{,}1)$, musíme řadu nejprve upravit.

$$\sqrt[3]{220} = \sqrt[3]{216+4} = \sqrt[3]{6^3+4} = \sqrt[3]{6^3\left(1+\frac{4}{6^3}\right)} = 6\left(1+\frac{4}{216}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Nyní můžeme použít rozvoj mocninné funkce a po dosazení za $x = \frac{4}{216}$, $n = 2$ a $a = \frac{1}{3}$, a získáváme

$$\sqrt[3]{220} = 6\left(1+\frac{4}{216}\right)^{\frac{1}{3}} = 6\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{216}\right) = 6{,}037.$$

f) Použijeme Maclaurinovu řadu funkce $\sin x$ kam dosadíme za $x = 5$ a $n = 5$ a dostáváme

$$\sin 5 = 5 - \frac{5^3}{3!} + \frac{5^5}{5!} - \frac{5^7}{7!} + \frac{5^9}{9!} = 0{,}0896.$$

Příklad 4.11 Určete přibližnou funkční hodnotu:

a) $\sin 36°$ s chybou menší než 10^{-4}

b) $\operatorname{asin} 0{,}75$ s chybou menší než 10^{-3}

Řešení: a) Užijeme Maclaurinovu řadu funkce $\sin x$, kde dosazením za $x = \frac{\pi}{5}$ získáváme

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \left(\frac{\pi}{5}\right)^3\frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{5}\right)^5\frac{1}{5!} + \cdots.$$

Toto je alternující číselná řada. Podle věty:

„**Věta 4.1.** Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim a_n = 0$.

Pak pro zbytek po n-tém členu R_n alternující řady $\sum(-1)^{n-1}a_n$ platí

$$|R_n| < a_{n+1}."$$

[7, s. 64]

Vezmeme-li první dva nenulové členy, bude chyba menší než třetí (nenulový) člen rozvoje.

$$|R_2| < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{5}\right)^5 = \frac{\pi^5}{120 \cdot 5^5} < 10^{-4}.$$

Výsledná hodnota je tedy

$$\sin 36° \doteq \frac{\pi}{5} - \left(\frac{\pi}{5}\right)^3 \frac{1}{3!} \doteq 0{,}587.$$

b) Jelikož zatím neznáme Maclaurinovu řadu funkce $\operatorname{asin} x$, musíme si ji spočítat. Její derivace je funkce $(\operatorname{asin} x)' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ a její rozvoj vypadá takto

$$(\operatorname{asin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2 2!}x^4 + \cdots + \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \cdots,$$

pro $|x| < 1$. Pokud řadu z integrujeme, dostaneme

$$\operatorname{asin} x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{3}{2^2 2!\, 5}x^5 + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

Pro $|x| < 1$, kde $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$.

Pro odhad zbytku této řady použijeme větu 3.6, podle které platí

$$|R_n| \le |a_n| \frac{q}{1-q}, \text{kde } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1.$$

Určíme napřed obecně q_x v závislosti na hodnotě x. Platí

$$q_x = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2n+1}{x^{2n+1}} =$$

$$= x^2 \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \le x^2 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Proto pro $x = 0{,}75$ dostáváme $q = (0{,}75)^2 = 0{,}5625$ a odhad chyby je

$$|R_n| \le |a_n| \frac{0{,}5625}{1 - 0{,}5625} < 10^{-3}.$$

Teď se ověříme, že tato nerovnost je splněna pro $n = 2$, tj.

$$\operatorname{asin} 0{,}75 \doteq 0{,}75 + \frac{1}{6}(0{,}75)^3 + \frac{3}{40}(0{,}75)^5 \doteq 0{,}838.$$

Příklad 4.12 Kolik členů rozvoje následujících funkcí je třeba vzít, abychom určili číslo ln 4 s chybou menší než 10^{-3}:

a) $\ln(1+x)$

b) $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Řešení: a) Do známého rozvoje Maclaurinovy řady funkce $\ln(1+x)$ dosadíme za $x=3$.

$$\ln 4 = \ln(1+3) = 3 - \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} - \frac{3^4}{4} + \frac{3^5}{5} - \cdots.$$

Dále víme, že chyba je $|R_n| < \frac{1}{n+1}$. Jestliže máme určit číslo ln 4 s chybou menší než 10^{-3}, musí být $|R_n| < \frac{1}{n+1} < 10^{-3}$. Je potřeba sečíst 1000 členů této řady. Zde to dělat nebudu, protože by to trvalo příliš dlouho.

b) Jako první si určíme hodnotu x.

$$\frac{1+x}{1-x} = 4$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Do vzorečku $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right), |x| < 1$ dosadíme za $x = \frac{3}{5}$ a dostáváme

$$\ln 4 = 2\left(\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^3 \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{5}\right)^5 \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^7 \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

Odhad chyby počítáme stejně jak v **Příkladu 3.2**

Pro $x = \frac{3}{5}$ dostaneme $q = \left(\frac{3}{5}\right)^2$. Pro $n = 5$ dosadíme

$$|R_6| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{11} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{25}{16} \doteq 3{,}71 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}.$$

K výpočtu stačí vzít prvních 6 nenulových členů, tj.

$$\ln 4 = 2\left(\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^3 \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{5}\right)^5 \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^7 \frac{1}{7} + \left(\frac{3}{5}\right)^9 \frac{1}{9} + \left(\frac{3}{5}\right)^{11} \frac{1}{11}\right) \doteq 1{,}386.$$

Příklad 4.13 Určete následující limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{\sqrt[5]{1-x}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x - \cos x$

Řešení: a) K vyjádření odmocnin použijeme binomický rozvoj funkcí $\sqrt{1+x}$ a $\sqrt[5]{1-x}$.

Na funkci $\sqrt{1+x}$ použijeme Taylorovu větu:

„**Věta 4.2.** Má-li funkce $f(x)$ derivace $(n+1)$-ního řádu včetně v otevřeném intervalu I, přičemž bod $c \in I$, potom pro každý bod $x \in I$ existuje takový bod ξ mezi x a c, že platí

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c) + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}."$$

[9, s. 24]

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1$$

$$f(x)' = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x)'' = \frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$T(x) = 1 + \frac{x}{2\cdot 1!} - \frac{x^2}{4\cdot 2!} + \cdots.$$

Na funkci $\sqrt[5]{1-x}$ použijeme zase Taylorovu větu.

Jako první musíme za $-x = t$, dosadíme $\sqrt[5]{1+t}$

$$f(x) = \sqrt[5]{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{5}} \qquad f(0) = 1$$

$$f(x)' = \sqrt[5]{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\,(1+t)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{(1+t)^4}} \qquad f'(0) = \frac{1}{5}$$

$$f(x)'' = \frac{1}{5}\,(1+t)^{-\frac{4}{5}} = -\frac{4}{25}\,(1+t)^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{25\sqrt[5]{(1+t)^9}} \qquad f''(0) = -\frac{4}{25}$$

$$T(x) = 1 + \frac{1}{5}t - \frac{4}{25\cdot 2!}t^2 + \cdots,$$

Zpátky dosadíme za $t = -x$

$$T(x) = 1 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{25\cdot 2!}x^2 + \cdots.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{\sqrt[5]{1-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots\right) - \left(1 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{50}x^2 + \cdots\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{7}{10}x - \frac{9}{200}x^2 + \cdots\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{7}{10} - \frac{9}{200}x + \cdots\right) = \frac{7}{10}.$$

b) Použijeme Maclaurinovy rozvoje funkcí pro $\sin x$ a $\cos x$. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \sin x - \cos x =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) =$$

$$\lim_{x\to 0} = -\left(1 - x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) = -1.$$

Příklad 4.14 Pomocí prvních tří nenulových členů přibližně vypočtěte $\int_0^1 \frac{1}{e^{x^3}} dx$ a odhadněte chybu.

Řešení: $\frac{1}{e^{x^3}} = e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Nyní integrací, přičemž řadu na pravé straně integrujeme člen po členu, dostaneme

$$\int_0^x e^{-t^3}\, dt = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7\cdot 2!} - \frac{x^{10}}{10\cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)\cdot n!} + \cdots, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Určitý integrál jde pak vyjádřit řadou

$$\int_0^1 e^{-x^3}\, dx = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7\cdot 2!} - \frac{1}{10\cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(3n+1)\cdot n!} + \cdots,$$

Toto je alternující řada s klesajícími členy. Pro ni platí, že při součtu prvních tří členů je velikost chyby menší, než je absolutní hodnota čtvrtého členu.

$$|R_3| < \frac{1}{10\cdot 3!} = \frac{1}{60} < 0{,}017.$$

Přibližná hodnota integrálu $\int_0^1 e^{-x^3}\, dx \doteq 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14} \doteq 0{,}82$ je určena chybou menší než 0,02.

Příklad 4.15 Vyjádřete mocninnou řadu $\int_0^x \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x^3} - \frac{1}{x^3}$.

Řešení: Užijeme binomický rozvoj funkce $(1+t)^a$, kde $a = \frac{1}{5}$, $t = -x^5$ dostaneme pro všechna $x \neq 0,\; x \in (-1{,}1)$.

$$\frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x^3} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left[\left(1 + \frac{1}{5}t - \frac{4}{25\cdot 2!}t^2 + \frac{36}{125\cdot 3!}t^3 - \cdots\right) - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left[\left(1 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{25\cdot 2!}x^{10} - \frac{36}{125\cdot 3!}x^{15} + \cdots\right) - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{25\cdot 2!}x^{10} - \frac{36}{125\cdot 3!}x^{15} + \cdots\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{50}x^7 - \frac{36}{750}x^{12} + \cdots.$$

Odtud plyne $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x^3} - \frac{1}{x^3} = 0$, a proto lze integrovanou funkci spojitě dodefinovat na celé $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{1-x^5}}{x^3} - \frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

K této funkci existuje primitivní funkce, kterou lze pro $x \in (-1,1)$ vyjádřit Maclaurinovou řadou tvaru

$$\int_0^x \frac{\sqrt[5]{1-t^5}}{t^3} - \frac{1}{t^3} dt = (-1)\left(\frac{x^3}{5\cdot 3} - \frac{4x^8}{50\cdot 8} + \frac{36x^{13}}{750\cdot 13} - \cdots\right).$$

Příklad 4.16 Řešte diferenciální rovnici pomocí mocninné řady: $y'' + xy' + 3y = 0$

Řešení: Obecné řešení rovnice hledáme ve tvaru $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$.
Pokud funkci z derivujeme tak získáme:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots.$$

Dosadíme za y, y', y'' a získáme

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots +$$
$$+ x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots) +$$
$$+ 3(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) = 0.$$

Sečteme koeficienty u stejných členů a získáme

$$(2a_2 + 3a_0) + (3\cdot 2a_3 + 4a_1)x + (4\cdot 3a_4 + 5a_2)x^2 + \cdots$$
$$+ (n(n-1)a_n + (n+1)a_{n-2})x^{n-2} = 0.$$

Mocninná řada na levé straně musí mít součet rovný nule pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$x^0:\ 2a_2 + 3a_0 = 0, \quad a_2 = -\frac{3a_0}{2},$$

$$x^1:\ 3\cdot 2a_3 + 4a_1 = 0, \quad a_3 = -\frac{2a_1}{3},$$

$$x^2:\ 4\cdot 3a_4 + 5a_2 = 0, \quad a_4 = -\frac{5a_2}{4\cdot 3},$$

$$\vdots$$

$$x^{n-2}: n(n-1)a_n + (n+1)a_{n-2} = 0, \quad a_n = -\frac{(n+1)a_{n-2}}{n(n-1)},$$

$$\vdots$$

Zde je zřejmé, že určení koeficientů a_n závisí na volbě a_0 a a_1. Jelikož je zadaná diferenciální rovnice lineární, určíme koeficienty a_n jednak pro dvojici $(a_{0,}a_1) = (a_{0,}0)$, jedna pro dvojici $(a_{0,}a_1) = (0, a_1)$. Poté obecné řešení s dvojicí $(a_{0,}a_1)$ zapíšeme jako součet pro dvojice $(a_{0,}0)$ a $(0, a_1)$.

1. Je-li $a_1 = 0$, pak $a_{2n+1} = 0$ pro každé n. V řadě se budou vyskytovat pouze členy se sudými mocninami x. Pro $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné tedy dostáváme koeficienty

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2n} = \cdots = (-1)^n \frac{(n+1)a_0}{(2n)!!}.$$

Dosadíme-li všechny koeficienty do původní mocninné řady pro funkci y, dostáváme řešení rovnice

$$y_1 = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + \cdots =$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{4 \cdot 2} x^4 - \frac{7}{6 \cdot 4 \cdot 2} x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{(n+1)x^{2n}}{(2n)!!} + \cdots \right).$$

2. Je-li $a_0 = 0$, pak $a_{2n} = 0$ pro každé n. V řadě se budou vyskytovat pouze členy se lichými mocninami x. Pro $a_1 \in \mathbb{R}$ libovolné tedy dostáváme koeficienty

$$a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{2n+1} = \cdots = (-1)^n \frac{(n+1)a_1}{2(n)!!}.$$

Dosadíme-li všechny koeficienty do původní mocninné řady pro funkci y, dostáváme řešení rovnice

$$y_2 = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \cdots =$$

$$= a_1 \left(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{7 \cdot 5} x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{(n+1)x^{2n+1}}{2(n)!!} + \cdots \right).$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je ve tvaru

$$y = a_0 \left(1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{5}{4 \cdot 2} x^4 - \frac{7}{6 \cdot 4 \cdot 2} x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{(n+1)x^{2n}}{(2n)!!} + \cdots \right) +$$

$$+ a_1 \left(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{7 \cdot 5} x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{(n+1)x^{2n+1}}{2(n)!!} + \cdots \right).$$

Závěr

V této bakalářské práci jsou shrnuty elementární funkce. Zaměřili jsme se na mocninné a kvadratické funkce. Víme, jak jednotlivé funkce vypadají a jak jde zjistit u kvadratických funkcí jejich vrchol, průsečíky s osou x a funkci narýsovat. Dále jsme si uvedli základní poznatky o mocninných řadách a jejich využití. Již víme, že se pomocí mocninných řad dá vypočítat obor konvergence a součet mocninné řady a také víme, že se využívají v přibližném výpočtu funkčních hodnot, výpočtu integrálů, využívají se při výpočtu limit, při řešení diferenciálních rovnic a při určování funkčních hodnot logaritmů. V poslední kapitole jsme si uvedli různé příklady. Byli zde příklady jak na mocninné funkce, tak na mocninné řady. V příkladech jsme si procvičili parabolu (jak zakreslování grafu, tak její vlastnosti), určit poloměr a obor konvergence a příklady na využití mocninných řad. Funkce by měli být schopni spočítat žáci na středních školách. Mocninné řady spočítají studenti na vysokých školách.

Většina grafů, které se zde vyskytují, jsou zpracovány v programu A&G Grapher. Všechny obrázky (kromě tří) jsem vytvořila pomocí tohoto programu. Tento program je volně stažitelný. Má výhody i nevýhody. Jeho nevýhody jsou, že neobsahuje všechny funkce např. hyperbolické a hyperbolometrické. Musela jsem je dělat pomocí vzorečků. Další nevýhodou je, že nelze vyjmout jen část grafu a také u řady grafů funkce neprotíná osu. Výhodou je jednoduché psaní funkcí. Je zde malá klávesnice, která obsahuje potřebné funkce. Každý graf může obsahovat jinou barvu, dají se zde upravovat osy aj. Zbytek úprav se dělalo v malování. Zbylé obrázky jsem udělala ve Wordu.

Tato práce mi byla přínosem především tím, že jsem se naučila řešit příklady na užití mocninných řad.

Seznam literatury

[1] KOUŘILOVÁ, P, PAVLAČKOVÁ, M. *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii*. 1. vydání, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. 249 s. ISBN 978-80-244-3317-2.

[2] BRABEC, J, MARTAN, F, ROZENSKÝ, Z. *Matematická analýza I*. Praha: SNTL, 1985. 482 s. ISBN 80-03-00044-0.

[3] BUŠEK, I. *Středoškolská matematika ve vzorcích a větách.* 2. vydání. Praha: PROMETHEUS, 1993. 132 s. ISBN 80-858-49-79-8.

[4] KOJECKÁ, J, KOJECKÝ, T. *Matematická analýza pro I. semestr.* 2. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2001. 205 s. ISBN 80-244-0245-9.

[5] TRÁVNÍČEK, S, CALÁBEK, P, ŠVRČEK, J. *Matematická analýza 1 (pro učitelské obory).* 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. 166 s. ISBN 978-80-244-4117-7.

[6] RICHTER, J. *Webové stránky určené pro výuku funkcí na střední škole: diplomová práce.* [online] Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2007. [cit. $2014-25.-7$].
Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/.

[7] DOŠLÁ, Z, PLCH, R, SOJKA, P. *Nekonečné řady s programem Maple.* Brno: Masarykova univerzita, 2002. 169 s. ISBN 80-210-3005-4.

[8] ODVÁRKO, O. *Matematika pro gymnázia: funkce.* Praha: PROMETHEUS, 1993. 168 s. ISBN 978-80-7196-357-8.

[9] LAITOCHOVÁ, J. *Matematická analýza 1: diferenciální počet-2.část.* 1. vydání. Olomouc: UP, 2004. 53 s. ISBN 80-244-0832-5.

Seznam obrázků

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Zuzana Složilová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2015

Název práce:	Mocninné funkce
Název v angličtině:	Power functions
Anotace práce:	V této bakalářské práci se věnujeme studiu mocninných funkcí a mocninných řad. Práce je rozčleněna do čtyř kapitol. V první kapitole zavádíme definice funkce, její vlastnosti a základní elementární funkce. Druhá kapitola zahrnuje všechny mocninné funkce a kvadratické funkce. Další kapitola pojednává o mocninných řadách a jejich využití. Poslední kapitola obsahuje vyřešené příklady, které se týkají jak mocninných funkcí, tak mocninných řad.
Klíčová slova:	Elementární funkce, mocninné funkce, kvadratické funkce, mocninné řady
Anotace v angličtině:	This thesis is devoted to the study of power functions and power series. The work is divided into four chapters. In the first chapter we introduce the definitions of functions, its characteristics and basic elementary functions. The second chapter includes all power functions and quadratic functions. The next chapter discusses the power series and their use. The last chapter contains resolved examples that are related to the power functions and power series.
Klíčová slova v angličtině:	Elementary functions, power functions, quadratic functions, power series
Rozsah práce:	63
Jazyk práce:	Český