

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY  
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

## ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S VYUŽITÍM APOSTERIORNÍHO ODHADU CHYBY

DISERTAČNÍ PRÁCE

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. VÁCLAV VALENTA

BRNO 2014



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY  
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

# ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S VYUŽITÍM APOSTERIORNÍHO ODHADU CHYBY

A POSTERIORI ERROR ESTIMATION METHOD FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS  
SOLUTION

DISERTAČNÍ PRÁCE

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. VÁCLAV VALENTA

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Doc. Ing. JIŘÍ KUNOVSKÝ, CSc.

BRNO 2014

## **Abstrakt**

Práce se zabývá výpočtem gradientu ve vrcholech triangulace pomocí váženého průměru gradientů obklopujících elementů a použitím tohoto přesnějšího gradientu k aposteriori odhadu chyby, čímž dosáhne přesnějšího řešení parciálních diferenciálních rovnic. V práci je popsáno použití dvou běžných metod – metody Konečných prvků a metody Konečných diferencí.

## **Abstract**

This thesis deals with gradient calculation in triangulation nodes using weighted average of gradients of neighboring elements. This gradient is then used for a posteriori error estimation which produce better solution of partial differential equations. This work presents two common methods – Finite elements method and Finite difference method.

## **Klíčová slova**

Parciální diferenciální rovnice, Metoda Konečných prvků, Metoda Konečných diferencí, gradient, vážený průměr, triangulace, Aposteriori odhad chyby

## **Keywords**

Partial differential equations, Finite elements method, Finite difference method, gradient, weighted averaging, triangulation, A posteriori error estimation

## **Citace**

Václav Valenta: Řešení parciálních diferenciálních rovnic s využitím aposteriori odhadu chyby, disertační práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2014

# Řešení parciálních diferenciálních rovnic s využitím aposteriorního odhadu chyby

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně pod vedením pana doc. Kunovského

.....

Václav Valenta

10. září 2015

## Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému školiteli Jiřímu Kunovskému za podporu při studiu, a svojí ženě Veronice za trpělivost a podporu.

© Václav Valenta, 2014.

*Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.*

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Cíle práce</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Metoda váhování</b>	<b>4</b>
	3.0.1 Triangulace . . . . .	4
	3.0.2 Interpolant . . . . .	5
3.1	Příprava triangulace . . . . .	5
3.2	Podmínka konzistence . . . . .	6
3.3	Trojúhelníkové sítě . . . . .	7
	3.3.1 Okrajové vrcholy . . . . .	8
	3.3.2 Praktický výpočet . . . . .	9
3.4	Rovnoběžníkové sítě . . . . .	11
	3.4.1 Idea metody . . . . .	11
	3.4.2 Zobecnění metody . . . . .	15
	3.4.3 Okrajové vrcholy . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Dosažené výsledky</b>	<b>17</b>
4.1	Výpočet gradientu . . . . .	17
4.2	Aposteriorní odhad chyby . . . . .	17
	4.2.1 Iterativní výpočet . . . . .	19
	4.2.2 Aposteriorní odhad chyby na obdélníkové síti . . . . .	20
	4.2.3 Aposteriorní odhad chyby na trojúhelníkové síti . . . . .	21
4.3	Aposteriorní odhad chyby pro vlnovou rovnici . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>24</b>
	<b>Literatura</b>	<b>25</b>
	<b>Publikace</b>	<b>26</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Problematika *parciálních diferenciálních rovnic* je dnes velmi dobře prozkoumaná a všeobecně známá. Existuje spousta systémů, s jejichž pomocí je možné tyto rovnice řešit. Mezi nejznámější systémy patří např. *Ansys*, *R3D*, *T3D*, *tCAD* a celá řada dalších.

Specifické pro software tohoto typu je, že každý program je specializován na určitý fyzikální problém, ke kterému se váže jedna nebo několik parciálních diferenciálních rovnic. To je dáno tím, že v podstatě neexistuje žádný zaručený univerzální postup, jak vyřešit jakoukoli parciální diferenciální rovnici. Při řešení určitého fyzikálního problému se využívají vlastnosti rovnic které umožňují řešení.

Parciální diferenciální rovnice spadají do oblasti *infinitesimálního* počtu, který byl objeven *sirem Isaacem Newtonem* a *Gottfriedem Leibnizem*. Tento počet znamenal průlom v řešení nejrůznějších fyzikálních problémů a s jeho pomocí se podařilo poprvé v historii vysvětlit např. *Zenónovy paradoxy*. Francouzský matematik *Jean d'Alembert* publikoval článek o kmitání struny, což byla v podstatě první publikace týkající se parciálních diferenciálních rovnic. Mezi další nejvýznamnější matematiky zabývající se touto problematikou patří *Leonhard Euler*, *Pierre Simon Laplace* a *Joseph Louis Lagrange*. Matematici *Augustin Cauchy*, *Bernhard Riemann* a *Henri Poincaré* rozvinuli především teorii úloh s okrajovými podmínkami, které mají široké uplatnění ve fyzikálních úlohách. Poměrně zajímavé informace o historii je možné najít např. v [3] a [8].

Stále však existují otevřené problémy. Mezi nejznámější z nich patří Navier-Stokesova rovnice řešící dynamiku tekutin. Jestliže někdo bude schopen podat analytické řešení této rovnice, může získat milion dolarů. Informace o tomto problému je možné najít např. v [6].

Další zajímavou a obtížnou úlohou je např. EMC (*electromagnetic compatibility*) simulace integrovaných elektrických obvodů počítající elektromagnetické vyzařování a pohlcování simulovaného obvodu.

Nejprve se budeme zabývat známými konvenčními metodami v oblasti soustav obyčejných diferenciálních rovnic. V třetí kapitole představíme teorii parciálních diferenciálních rovnic a typy úloh. Následující dvě kapitoly popíší dvě nejznámější a nepoužívanější metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. Vlastní přínos – Superaproximace gradientu – je odvozen a prezentován v kapitole *Metoda váhování*. Aplikace Superaproximace a její použití je popsáno na několika příkladech v kapitole *Dosažené výsledky*.

## Kapitola 2

# Cíle práce

1. *Odvození metody víhování* pro rovnoběžníkové sítě.
2. Analyzovat *metodu konečných diferencí* využívající diferenční vzorce odvozené z *Taylorova rozvoje jedné a více proměnných*.
3. Použití metody aposteriorního odhadu chyby pro přesnější řešení vybraných parciálních diferenciálních rovnic.

## Kapitola 3

# Metoda váhování

Jádrem této práce je aproximace derivace získaná metodou váženého průměru. V této kapitole se zaměříme právě na tuto metodu na triangulaci obsahující buď trojúhelníky, anebo rovnoběžníky.

Představíme zde 2 metody. První metoda bude zaměřena na triangulaci obsahující trojúhelníkové a druhou metodu obsahující rovnoběžníkové elementy. Rozdíl v těchto dvou metodách je především ten, že pro výpočet gradientu (derivaci podle  $x$  i  $y$ ) na trojúhelníkových sítích jsou potřeba 2 váhové vektory a na rovnoběžníkových sítích je potřeba pouze 1 váhový vektor pro obě složky gradientu.

Metoda váhování funguje pouze pro netupoúhlé triangulace. Budeme předpokládat že všechny úhly ve všech trojúhelnících v triangulaci musí být v rozmezí  $0 \dots \frac{\pi}{2}$ . Budeme předpokládat že každý vrchol je obsažen alespoň 4 trojúhelníky. V případě 4 trojúhelníků se jedná o 4 pravé úhly.

Informace pro tuto kapitolu byly převzaty z [4], [5]

$$u(x, y) = \frac{1}{\sinh \pi} \sin \pi x \sinh \pi y \quad (3.1)$$

### 3.0.1 Triangulace

*Triangulací* budeme rozumět diskretizaci oblasti  $\Omega$ . Základní prvky triangulace budeme nazývat *elementy*. Přestože by se dalo podle názvu usuzovat, že triangulace znamená pokrytí prostoru trojúhelníky, v této práci budeme nazývat triangulací i pokrytí jinými než trojúhelníkovými útvary, např. čtverci, rovnoběžníky apod. *Triangulace* je typicky používána v metodě konečných prvků a v tomto případě záleží i na geometrii použitých elementů.

Rovnici řešíme na oblasti  $\Omega$  a budeme předpokládat že hranice  $\partial\Omega$  je polygon. Množinu  $\mathcal{T}_\Omega$  budeme nazývat *triangulací*, když platí následující podmínky

- $\bigcup t \in \mathcal{T}_\Omega = \overline{\Omega}$  – sjednocení všech elementů triangulace pokryje celou oblast včetně hranice.
- každé dva různé elementy z triangulace  $\mathcal{T}_\Omega$  mají prázdný průnik, nebo mají společný vrchol, nebo hranu.

V této práci se zaměříme na triangulace složenými z trojúhelníkových a čtyřúhelníkových elementů, případně jejich kombinacemi. V literatuře se pojem triangulace používá pro množiny obsahující i složitější elementy. Typicky se jedná o trojúhelníky typu  $\mathbb{P}_2$  případně  $\mathbb{P}_3$ .



Vrcholy elementů budeme značit  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ . Zaměříme se na lineární trojúhelníkové popř. bilineární rovnoběžníkové elementy prvního řádu, také nazývané  $\mathbb{P}_1$  elementy. Funkce je ve tvaru

$$f(x, y) = ax + by + c \quad (3.2)$$

popř.

$$f(x, y) = axy + bx + cy + d \quad (3.3)$$

a je jednoznačně určena koeficienty  $a, b$  a  $c$  popř.  $d$ . Její hodnoty ve vrcholech elementu budeme nazývat lokální stupně volnosti.

### 3.0.2 Interpolant

Důležitým pojmem je *interpolant* funkce. Jedná se o funkci která má podobný průběh jako funkce, kterou interpoluje. Formálně interpolantem  $\Pi_t[f]$  funkce  $f$  na elementu  $t$  budeme rozumět

- lineární funkci 2 proměnných ve tvaru  $ax + by + c$  v případě, že  $t$  je trojúhelníkový element
- bilineární funkci 2 proměnných ve tvaru  $axy + bx + cy + d$  v případě, že  $t$  je čtyřúhelníkový element

Vše vychází z geometrie elementu. Trojúhelník  $t$  je definován třemi body  $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$ , s funkčními hodnotami  $z_1 = f(x_1, y_1)$ ,  $z_2 = f(x_2, y_2)$  a  $z_3 = f(x_3, y_3)$ , které určí jednoznačně lineární funkci dvou proměnných, přičemž koeficienty budou ve tvaru

$$a = \frac{z_2y_1 - z_2y_3 - y_2z_1 + y_2z_3 - z_3y_1 + y_3z_1}{x_1y_2 - x_1y_3 - y_1x_2 + y_1x_3 - x_3y_2 + y_3x_2} \quad (3.4)$$

$$b = \frac{-z_1x_2 + z_1x_3 + x_1z_2 - x_1z_3 + z_3x_2 - x_3z_2}{x_1y_2 - x_1y_3 - y_1x_2 + y_1x_3 - x_3y_2 + y_3x_2} \quad (3.5)$$

$$c = \frac{x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 + x_2y_3z_1 - x_1y_3z_2}{x_1y_2 - x_1y_3 - y_1x_2 + y_1x_3 - x_3y_2 + y_3x_2} \quad (3.6)$$

V případě čtyřúhelníkového elementu definovaného čtyřmi body  $[x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2], [x_3, y_3, z_3]$  a  $[x_4, y_4, z_4]$ . pro každý vrchol nadefinujeme bázovou funkci  $N^i(x, y)$ , která bude nabývat hodnoty 1 ve vrcholu  $[x_i, y_i]$ , bude bilineární a v ostatních vrcholech bude nabývat hodnoty 0.

Jakmile známe bázové funkce  $N^1, N^2, N^3, N^4$ , víme, že výsledný interpolant na elementu  $t$  bude ve tvaru

$$\Pi_t[f](x, y) = z_1N^1(x, y) + z_2N^2(x, y) + z_3N^3(x, y) + z_4N^4(x, y) \quad (3.7)$$

## 3.1 Příprava triangulace

Metoda je založena na okruzích obklopujících elementů. Pod pojmem okruh okolo vrcholu  $\mathbf{a}$  budeme rozumět uspořádanou  $n$ -tici  $r_{\mathbf{a}} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ .

Uzly  $\mathbf{b}_i$  jsou seřazeny proti směru hodinových ručiček. Pro seřazení uzlů triangulace jsme použili úhel  $\alpha$  mezi vektory  $\mathbf{ab}$  a  $(0, 1)$  pomocí vzorce

$$\lambda = \sqrt{(\mathbf{b}_x - \mathbf{a}_x)^2 + (\mathbf{b}_y - \mathbf{a}_y)^2} \quad (3.8)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{b}_y - \mathbf{a}_y}{\lambda}\right) \wedge \mathbf{b}_x < \mathbf{a}_x \quad (3.9)$$

$$\alpha = 2\pi - \arccos\left(\frac{\mathbf{b}_y - \mathbf{a}_y}{\lambda}\right) \wedge \mathbf{b}_x \geq \mathbf{a}_x \quad (3.10)$$

Tento vzorec zaručí rozsah úhlu v rozsahu  $0 \dots 2\pi$ .

## 3.2 Podmínka konzistence

Základem celé metody váhování je podmínka konzistence, která se dá slovně popsat jako

Vážený průměr parciálních derivací interpolantů funkce  $p$  v bodě  $\mathbf{a}$  musí být roven parciální derivaci funkce  $p$  v bodě  $\mathbf{a}$  pro všechny obklopující elementy  $T_i$  a všechny kvadratické polynomy  $p$  dvou proměnných.

anebo matematicky zapsat takto

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\Pi[p]_{T_i}}{\partial z}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial z}(\mathbf{a}), \forall p \in \mathcal{P}^2 \quad (3.11)$$

přičemž

- $\mathbf{a}$  je střed okruhu  $\mathbf{r}_a$
- $(w_1 \dots w_n) = \mathbf{w}$  je váhový vektor
- $(T_1 \dots T_n) = \mathbf{r}_a$  je okruh elementů okolo  $\mathbf{a}$
- $p(x, y)$  je libovolný polynom dvou proměnných, druhého stupně ve tvaru  $p(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$
- $\Pi[p]_{T_i}$  je interpolant funkce  $p$  na elementu  $T_i$
- $z$  je směr výpočtu parciální derivace, jedná se pouze o možnost  $x$  a  $y$ , vektory  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$
- $\mathcal{P}^2$  je prostor všech polynomů dvou proměnných druhého stupně

Dokázat tuto podmínku pro všechny polynomy dvou proměnných druhého stupně je problematické. Jelikož obě strany podmínky jsou lineárně závislé na funkci  $p$ , stačí odvodit rovnice pro libovolnou sadu bazických funkcí druhého stupně, např.  $(1, x, y, xy, x^2, y^2)$ .

### 3.3 Trojúhelníková síť

Celá tato práce vychází právě z metody váhování na trojúhelníkové síti, kterou odvodil doc. Dalík. V této kapitole bude popsána metoda ze které vychází odvození pro rovnoběžníkové síť.

Víme, že trojúhelník je jednoznačně určen třemi vrcholy a tyto tři vrcholy jednoznačně určí lineární funkci dvou proměnných ve tvaru

$$f(x, y) = a + bx + cy \quad (3.12)$$

Pokud uvážíme triangulaci  $\mathcal{T}$  obsahující pouze trojúhelníkové elementy, můžeme pro každý vrchol  $\mathbf{a}$  vytvořit okruh trojúhelníků  $r_{\mathbf{a}} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  obklopující vrchol  $\mathbf{a}$ , přičemž  $T_1 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}^n, \mathbf{b}^1), \dots, T_n = (\mathbf{a}, \mathbf{b}^{n-1}, \mathbf{b}^n)$  jsou navzájem různé trojúhelníky v triangulaci  $\mathcal{T}$ , které neobsahují tupé úhly. V obecném případě budeme předpokládat, že počet trojúhelníků (velikost) v okruhu  $r_{\mathbf{a}}$  je vždy větší nebo roven čtyřem.

Cílem bude spočítat dva váhové vektory  $\mathbf{w}_x$  a  $\mathbf{w}_y$  na okruhu  $r_{\mathbf{a}}$ , které budou sloužit pro výpočet parciální derivace podle  $x$  a podle  $y$ , přičemž použijeme podmínku konzistence.

V odvození výpočtu budeme používat směrový vektor  $\mathbf{z}$  který bude určovat směr ve kterém derivaci budeme počítat. Pro derivaci podle  $x$  bude vektor  $\mathbf{z} = (1, 0)$  a pro derivaci podle  $y$  bude vektor  $\mathbf{z} = (0, 1)$ .

celý výpočet váhových vektorů provedeme v lokálních souřadnicích  $(\phi, \zeta)$ , které mají počátek v bodě  $\mathbf{a}$ . Víme, že transformace z globálních souřadnic  $(x, y)$  do lokálních  $(\phi, \zeta)$  je lineární ve tvaru

$$\phi = \mathbf{z}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (3.13)$$

$$\zeta = \mathbf{z}^\perp(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (3.14)$$

kde

- $\phi, \zeta$  jsou lokální souřadnice
- $\mathbf{z}$  je směrový vektor, ve kterém počítáme parciální derivace
- $\mathbf{a}$  je střed okruhu
- $\mathbf{x} = [x, y]$  je libovolný bod v globálních souřadnicích

Tento nový lokální souřadný systém nám definuje novou sadu bazických funkcí  $(1, \phi, \zeta, \phi\zeta, \phi^2, \zeta^2)$ .

Nyní v lokálních souřadnicích a pro všechny trojúhelníky  $T_i \in r_{\mathbf{a}}, i = 1 \dots n$  a funkci  $u$  můžeme zapsat

$$\frac{\partial \Pi_{T_i}[u]}{\partial \mathbf{z}} = \frac{u(\mathbf{b}^{i-1})\zeta_i - u(\mathbf{b}^i)\zeta_{i-1}}{\phi_{i-1}\zeta_i - \phi_i\zeta_{i-1}} \quad (3.15)$$

Odtud odvodíme soustavu čtyř lineárních algebraických rovnic o  $n$  neznámých ve tvaru  $\mathbf{M}(r)\mathbf{w} = \mathbf{d}$ , kde

- $\mathbf{M}(r)$  je matice koeficientů spočítaných z geometrie mřížky

$$\mathbf{M}(r) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{\phi_n^2 \zeta_1 - \phi_1^2 \zeta_n}{\phi_n \zeta_1 - \phi_1 \zeta_n} & \dots & \frac{\phi_{n-1}^2 \zeta_n - \phi_n^2 \zeta_{n-1}}{\phi_{n-1} \zeta_n - \phi_n \zeta_{n-1}} \\ \frac{\zeta_n \zeta_1 (\phi_n - \phi_1)}{\phi_n \zeta_1 - \phi_1 \zeta_n} & \dots & \frac{\zeta_{n-1} \zeta_n (\phi_{n-1} - \phi_n)}{\phi_{n-1} \zeta_n - \phi_n \zeta_{n-1}} \\ \frac{\zeta_n \zeta_1 (\zeta_n - \zeta_1)}{\phi_n \zeta_1 - \phi_1 \zeta_n} & \dots & \frac{\zeta_{n-1} \zeta_n (\zeta_{n-1} - \zeta_n)}{\phi_{n-1} \zeta_n - \phi_n \zeta_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

- $d$  vektor pravých stran, který je vždy konstantní

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

- $w$  váhový vektor

$$w = [ w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n ] \quad (3.18)$$

### 3.3.1 Okrajové vrcholy

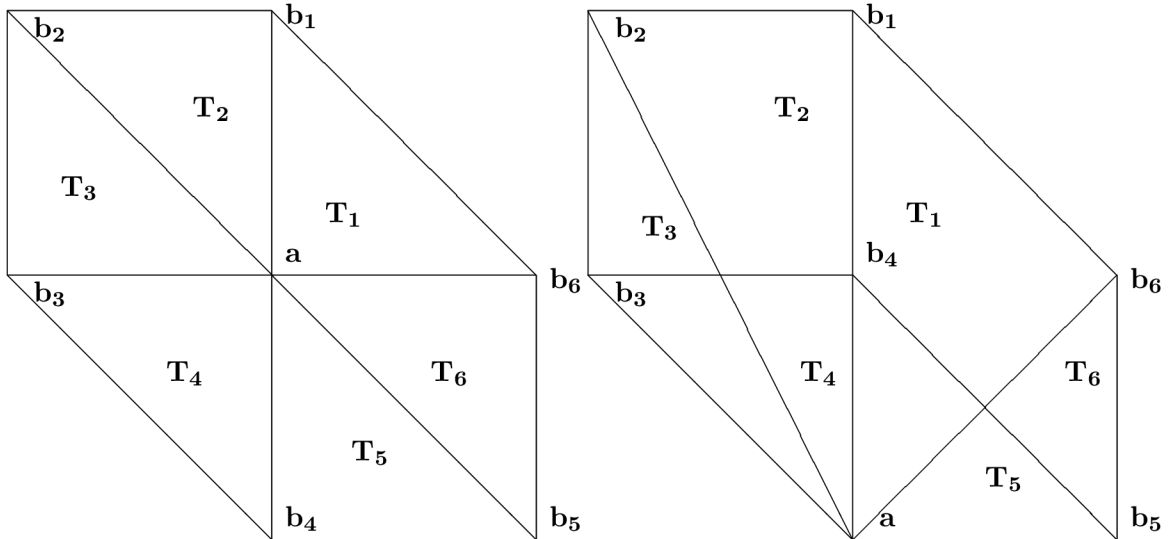
Pro výpočet váhových vektorů používáme okruh vrcholu. Pokud se jedná o vnitřní vrcholy, je celý okruh triviální, problém nastane pokud začneme uvažovat i vrcholy na hranici oblasti  $\Omega$ . Pro tyto vrcholy není možné jednoduše sestavit okruh  $r$ .

Naše řešení spočívá v jednoduché myšlence překlopení prostoru. Představme si, že naši triangulaci nakreslíme na list papíru a ten přehneme podle hran trojúhelníků, přičemž náš vrchol  $a$  bude ve středu přehnutí.

Vlastní algoritmus je velice jednoduchý z hlediska implementace. Pro hraniční vrchol  $a$  najdeme v jeho okolí vnitřní vrchol  $c$ , u kterého známe okruh  $r_c$ . Okruh  $r_a$  bude potom kopie okruhu  $r_c$ , ale prohodíme v okruhu vrchol  $a$  a  $c$ . Pokud žádný vnitřní vrchol není dostupný, potom není možné tuto metodu váhování použít.

Známe okruh  $r_c = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{b}_n)$ , přičemž  $c$  je vnitřní vrchol a okruh pro hraniční vrchol  $a$  bude potom  $r_a = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{b}_n)$ .

Je důležité si uvědomit, že v okruhu  $r_a$  budou vytvořeny a použity nové trojúhelníky, které se v původní triangulaci nevyskytují. Nový okruh znázorňují následující obrázky 3.1. Obrázek vlevo zobrazuje okruh  $r_a$  vnitřního vrcholu  $a$  a obrázek vpravo zobrazuje okruh okrajového vrcholu  $a$ .



Obrázek 3.1: Schéma okruhu okolo vrcholu. Vlevo je okruh vnitřního vrcholu  $a$ , vpravo je okruh okrajového vrcholu  $a$ .

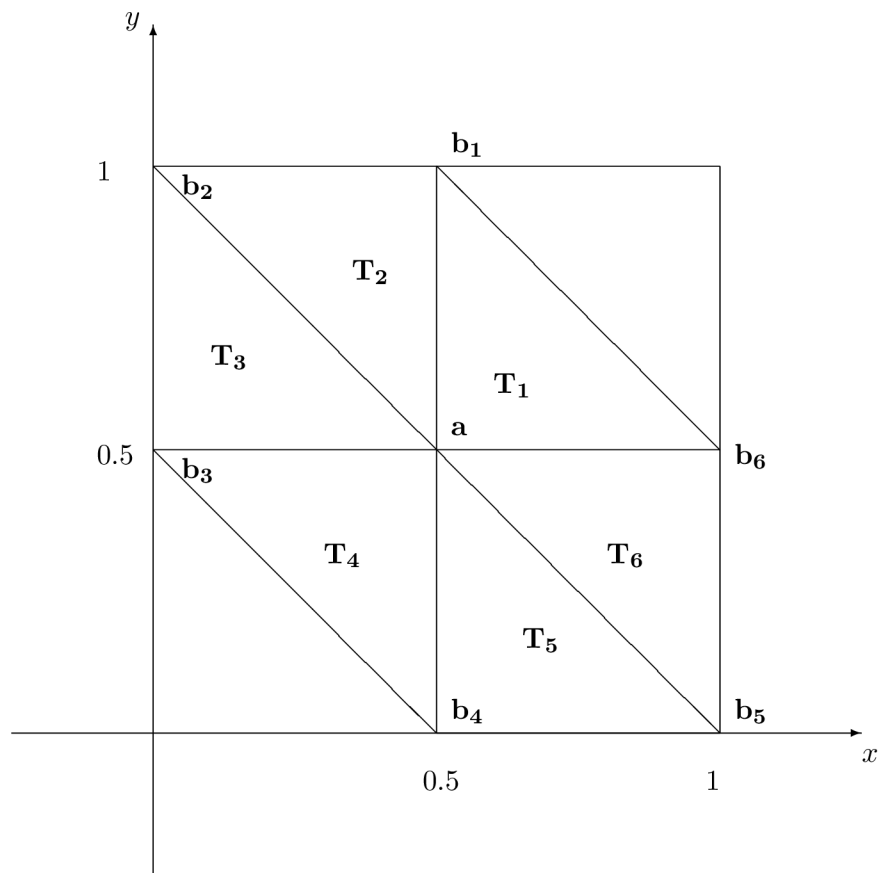
Z obou obrázků je patrné, že okruhy obsahují následující trojúhelníky. Pro jednoduchost jsou oba okruhy číslovány stejným způsobem.

$$r_{\mathbf{a}} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6) \Rightarrow \begin{aligned} T_1 &= \overline{\mathbf{ab}_1\mathbf{b}_6} \\ T_2 &= \overline{\mathbf{ab}_2\mathbf{b}_1} \\ T_3 &= \overline{\mathbf{ab}_3\mathbf{b}_2} \\ T_4 &= \overline{\mathbf{ab}_4\mathbf{b}_3} \\ T_5 &= \overline{\mathbf{ab}_5\mathbf{b}_4} \\ T_6 &= \overline{\mathbf{ab}_6\mathbf{b}_5} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Z obrázku je vidět, že nově vzniklé trojúhelníky mají delší hrany a přináší větší chybu do výpočtu.

### 3.3.2 Praktický výpočet

V této kapitole se pokusíme demonstrovat výpočet váhového vektoru na trojúhelníkové síti. Předpokládejme následující triangulaci tvořenou osmi trojúhelníky.



Obrázek 3.2: Schéma sítě použité pro demonstraci výpočtu.

Náš středový vrchol  $\mathbf{a}$  má souřadnice  $[0.5, 0.5]$ . Odtud jednoduše odvodíme okruh okolo  $\mathbf{a}$  ve tvaru  $r_{\mathbf{a}} = ([0.5, 1], [0, 1], [0, 0.5], [0.5, 0], [1, 0], [1, 0.5])$ . Nejprve provedeme převod glo-

bálních souřadnic všech vrcholů do lokálních souřadnic, se středem v bodě **a**. Transformace bude ve tvaru

$$\begin{aligned}\phi_x &= b_x - a_x & \phi_y &= b_y - a_y \\ \zeta_x &= b_y - a_y & \zeta_y &= -b_x + a_x\end{aligned}$$

přičemž  $(\phi_x, \zeta_x)$ , resp.  $(\phi_y, \zeta_y)$  jsou lokální souřadnice pro výpočet váhového vektoru pro derivaci podle  $x$ , resp.  $y$ .

Souřadnice shrnuje následující tabulka 3.1.

vrchol	$x$	$y$	$\phi_x$	$\zeta_x$	$\phi_y$	$\zeta_y$
<b>a</b>	0.5	0.5	0	0	0	0
<b>b<sub>1</sub></b>	0.5	1	0	0.5	0.5	0
<b>b<sub>2</sub></b>	0	1	-0.5	0.5	0.5	0.5
<b>b<sub>3</sub></b>	0	0.5	-0.5	0	0	0.5
<b>b<sub>4</sub></b>	0.5	0	0	-0.5	-0.5	0
<b>b<sub>5</sub></b>	1	0	0.5	-0.5	-0.5	-0.5
<b>b<sub>6</sub></b>	1	0.5	0.5	0	0	-0.5

Tabulka 3.1: Okruh  $r_a$  v globálních souřadnicích  $(x, y)$  a v obou lokálních  $(\phi_x, \zeta_x)$ ,  $(\phi_y, \zeta_y)$

Výpočet budeme tedy počítat na okruzích

- $r(\phi_x, \zeta_x) = ([0, 0.5], [-0.5, 0.5], [-0.5, 0], [0, -0.5], [0.5, -0.5], [0.5, 0])$
- $r(\phi_y, \zeta_y) = ([0.5, 0], [0.5, 0.5], [0, 0.5], [-0.5, 0], [-0.5, -0.5], [0, -0.5])$

Nyní můžeme začít sestavovat rovnice, ze kterých spočítáme váhové vektory pro oba okruhy. Celkem sestavíme dvě nezávislé soustavy lineárních algebraických rovnic (jedna soustava pro derivaci podle  $x$ , druhá pro derivaci podle  $y$ ) ve tvaru  $\mathbf{M}(r)\mathbf{w} = \mathbf{d}$ . Víme, že pravé strany  $\mathbf{d}_x$  i  $\mathbf{d}_y$  obou soustav budou vždy ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (3.20)$$

Váhové vektory  $\mathbf{w}_x$  a  $\mathbf{w}_y$  budou v tomto případě ve tvaru

$$\mathbf{w}_x = \begin{bmatrix} w_{x1} & w_{x2} & w_{x3} & w_{x4} & w_{x5} & w_{x6} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{w}_y = \begin{bmatrix} w_{y1} & w_{y2} & w_{y3} & w_{y4} & w_{y5} & w_{y6} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Poslední krok je sestavení matic  $\mathbf{M}_x$  a  $\mathbf{M}_y$  ve tvaru

$$m_{1,i} = 1 \quad (3.23)$$

$$m_{2,i} = \frac{\phi_{i-1}^2 \zeta_i - \phi_i^2 \zeta_{i-1}}{D_i} \quad (3.24)$$

$$m_{3,i} = \frac{\zeta_{i-1} \zeta_i (\phi_{i-1} - \phi_i)}{D_i} \quad (3.25)$$

$$m_{4,i} = \frac{\zeta_{i-1} \zeta_i (\zeta_{i-1} - \zeta_i)}{D_i} \quad (3.26)$$

Kde si dopředu můžeme vypočítat konstantu

$$D_i = \phi_{i-1}\zeta_i - \phi_i\zeta_{i-1} \quad (3.27)$$

Po dosazení do vzorců obdržíme dvě shodné soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Víme, že soustavy mají nekonečně mnoho řešení, ale my vybereme to s nejmenší normou pomocí metody Moore-Penrose pseudoinverze. V našem případě jsou oba váhové vektory shodné

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{w}_y = \left[ \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \right] \quad (3.29)$$

## 3.4 Rovnoběžníkové sítě

V této kapitole bude popsána hlavní část této práce zaměřená právě na rovnoběžníkové sítě.

### 3.4.1 Idea metody

Zaměříme se nyní na rovnoběžníkovou triangulaci. Pro jednoduchost nejprve předpokládejme zjednodušené schéma, kdy středový bod  $\mathbf{a}$  leží ve středu souřadné soustavy a hrany elementů jsou rovnoběžné s osami  $x$  a  $y$ . Celkem budeme uvažovat čtyři obdélníky  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , které jsou definovány body  $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_8$  umístěných proti směru hodinových ručiček. Schéma je zobrazeno na obrázku 3.3.

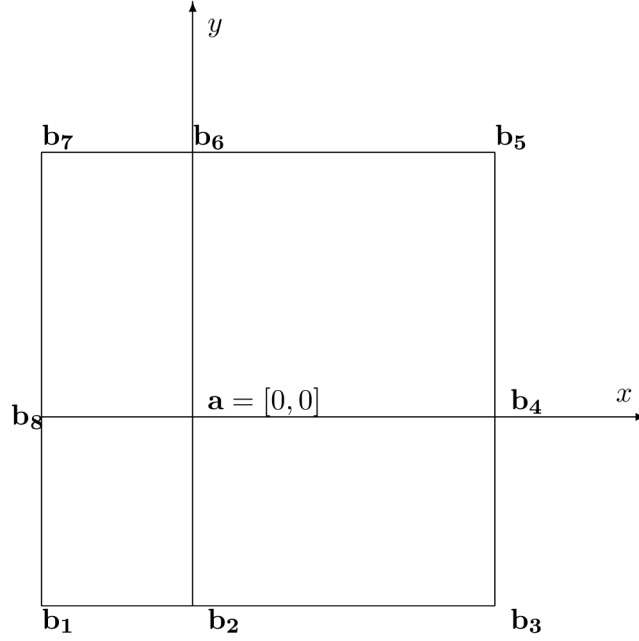
V tomto případě budeme uvažovat sadu bazických funkcí  $(1, x, y, xy)$  a nějakou funkci  $u = u(x, y) \in C^3(\Omega)$ . Potom pro každý uzel  $b^i$  definujeme jeho odpovídající hodnotu jako  $u_i = u(\mathbf{b}^i)$  pro  $i = 1..8$  a  $u_0 = u(\mathbf{a})$ .

Všimněme si, že pro nás bude klíčových ne 8 bodů, ale pouze čtyři vzdálenosti. Uvedu jejich výpočet včetně středového bodu  $\mathbf{a}$ , ikdyž víme, že se jedná vždy o nuly.

- $x_1 = a_x - b_x^8$
- $x_3 = b_x^3 - a_x$
- $y_2 = a_y - b_y^2$
- $y_6 = b_y^6 - a_y$

S pomocí hodnot  $x_1, x_3, y_2, y_6$  a sady bazických funkcí sestavíme funkce  $L_i^j$ , kde  $i$  bude číslo elementu  $1..4$  a  $j$  bude bod  $\mathbf{b}_i$  nebo  $\mathbf{a}$ . Připomeňme, že funkce  $L_i^j$  bude bilineární funkce ve tvaru  $a + bx + cy + dxy$ , která ve vrcholu  $j$  elementu  $T_i$  nabývá hodnoty 1 a ve zbývajících vrcholech nabývá hodnoty 0.

Funkce musí být definovány pro všechny vrcholy všech 4 elementů. Uvedeme pouze pro element  $T_1$



Obrázek 3.3: Jednoduché schéma čtyř obdélníků pro odvození idey metody

$$L_1^1(x, y) = \frac{1}{x_1 y_2} xy \quad (3.30)$$

$$L_1^2(x, y) = -\frac{1}{x_1 y_2} y(x + x_1) \quad (3.31)$$

$$L_1^a(x, y) = \frac{1}{x_1 y_2} (x + x_1)(y + y_2) \quad (3.32)$$

$$L_1^8(x, y) = -\frac{1}{x_1 y_2} x(y + y_2) \quad (3.33)$$

$$(3.34)$$

Dále definujeme interpolanty funkce  $u$   $\Pi[u]_i$  pro každý obdélník  $i = 1..4$ .

$$\Pi[u]_1(x, y) = u_1 L_1^1(x, y) + u_2 L_1^2(x, y) + u_0 L_1^a(x, y) + u_8 L_1^8(x, y) \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

Potom budeme hledat koeficienty  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  tak, aby platila podmínka konzistence. V tomto případě

$$f_1 \frac{\partial \Pi[p]_1}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[p]_2}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[p]_3}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[p]_4}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) \quad (3.37)$$

$$f_1 \frac{\partial \Pi[p]_1}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[p]_2}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[p]_3}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[p]_4}{\partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{a}) \quad (3.38)$$

Pro všechny kvadratické polynomy  $p(x, y)$ . Jelikož obě strany vztahu jsou lineární funkce, můžeme vztah zjednodušit na sadu bazických funkcí  $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$ .



V případě  $P^{(3/2)}$  polynomů, tedy funkce  $u$  je jedna z následujících čtyř  $(1, x, y, xy)$  platí, že interpolant  $\Pi[u](x, y) = u(x, y)$  je shodný s interpolovanou funkcí.

Pokud uvážíme první část podmínky konzistence obsahující parciální derivaci podle  $x$ , tak v případě bazických funkcí  $(1, y, y^2)$  platí

$$\frac{\partial 1}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y^2}{\partial x} = 0 \quad (3.39)$$

Stejně to dopadne pokud uvážíme druhou část podmínky konzistence s parciální derivací podle  $y$  a bazické funkce  $(1, x, x^2)$ .

$$\frac{\partial 1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial y} = 0 \quad (3.40)$$

Z těchto kombinací bazických funkcí odvodíme rovnici  $0 = 0$ , kterou můžeme ignorovat. Zajímavější je použití bazických funkcí  $x$  resp.  $y$  v případě parciální derivace podle  $x$ , resp.  $y$ . Po dosazení do podmínky konzistence můžeme vztah zjednodušit.

$$f_1 \frac{\partial \Pi[p]_1}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[p]_2}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[p]_3}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[p]_4}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) \quad (3.41)$$

$$f_1 \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) \quad (3.42)$$

$$(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) \quad (3.43)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \quad (3.44)$$

Poslední úpravu operací dělení můžeme provést, protože nikdy nebudeme dělit nulou.

Zbyla nám poslední bilineární bazická funkce  $xy$  pro obě parciální derivace. Víme, že počítáme derivace v bodě  $\mathbf{a} = [0, 0]$  a parciální derivace vypadají následujícím způsobem

$$\frac{\partial xy}{\partial x}(\mathbf{a}) = y(\mathbf{a}) = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial xy}{\partial y}(\mathbf{a}) = x(\mathbf{a}) = 0 \quad (3.46)$$

V tomto případě je opět výsledkem rovnice  $0 = 0$ .

Zbyly nám poslední dvě bazické funkce  $x^2$ , resp.  $y^2$  a jejich parciální derivace podle  $x$  resp.  $y$  v bodě  $\mathbf{a} = [0, 0]$ .

Nyní už bazická funkce není rovna interpolantu bazické funkce, tak musíme spočítat interpolanty pro všechny 4 obdélníky. Vycházíme z následující tabulky 3.2

$$\Pi[x^2]_{T_1} = \Pi[x^2]_{T_4} = -x_1x \quad (3.47)$$

$$\Pi[x^2]_{T_2} = \Pi[x^2]_{T_3} = x_3x \quad (3.48)$$

$$\Pi[y^2]_{T_1} = \Pi[y^2]_{T_2} = -y_2y \quad (3.49)$$

$$\Pi[y^2]_{T_3} = \Pi[y^2]_{T_4} = y_6y \quad (3.50)$$

Jejich odpovídající parciální derivace v bodě  $\mathbf{a}$ .

Bod $u_i$	Bazická funkce $x^2$	Bazická funkce $y^2$
$u_0$	0	0
$u_1$	$x_1^2$	$y_2^2$
$u_2$	0	$y_2^2$
$u_3$	$x_3^2$	$y_2^2$
$u_4$	$x_3^2$	0
$u_5$	$x_3^2$	$y_6^2$
$u_6$	0	$y_6^2$
$u_7$	$x_1^2$	$y_6^2$
$u_8$	$x_1^2$	0

Tabulka 3.2: Tabulka interpolantů pro bazické funkce druhého stupně

$$\frac{\partial \Pi[x^2]_{T_1}}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \Pi[x^2]_{T_4}}{\partial x}(\mathbf{a}) = -x_1 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \Pi[x^2]_{T_2}}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \Pi[x^2]_{T_3}}{\partial x}(\mathbf{a}) = x_3 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \Pi[y^2]_{T_1}}{\partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \Pi[y^2]_{T_2}}{\partial y}(\mathbf{a}) = -y_2 \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \Pi[y^2]_{T_3}}{\partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \Pi[y^2]_{T_4}}{\partial y}(\mathbf{a}) = y_6 \quad (3.54)$$

Pokud uvážíme tyto hodnoty a dosadíme do podmínky konzistence dostaneme následující rovnice

$$f_1 \frac{\partial \Pi[x^2]_1}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[x^2]_2}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[x^2]_3}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[x^2]_4}{\partial x}(\mathbf{a}) = 0 \quad (3.55)$$

$$f_1(-x_1) + f_2x_3 + f_3x_3 + f_4(-x_1) = 0 \quad (3.56)$$

$$f_1 \frac{\partial \Pi[y^2]_1}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[y^2]_2}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[y^2]_3}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[y^2]_4}{\partial y}(\mathbf{a}) = 0 \quad (3.57)$$

$$f_1(-x_2) + f_2(-x_2) + f_3y_6 + f_4y_6 = 0 \quad (3.58)$$

Výsledkem celé procedury je soustava 3 lineárních algebraických rovnic o 4 neznámých, přičemž neznámé jsou váhy pro jednotlivé elementy.

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \quad (3.59)$$

$$-f_1x_1 + f_2x_3 + f_3x_3 - f_4x_1 = 0 \quad (3.60)$$

$$-f_1y_2 - f_2y_2 + f_3y_6 + f_4y_6 = 0 \quad (3.61)$$

Řešení existuje nekonečně mnoho, ale v tomto případě budeme uvažovat jako řešení vektor s minimální normou. Tyto váhy je možné použít pro ortogonální triangulaci.

### 3.4.2 Zobecnění metody

Podívejme se nyní na zobecněnou situaci s rovnoběžníkem  $T$ . Budeme uvažovat referenční čtverec  $\hat{T}$  v jeho lokálních souřadnicích  $\hat{x}, \hat{y}$ , který má souřadnice vrcholů  $\hat{\mathbf{a}}^1 = [-1, -1]$ ,  $\hat{\mathbf{a}}^2 = [1, -1]$ ,  $\hat{\mathbf{a}}^3 = [1, 1]$  a  $\hat{\mathbf{a}}^4 = [-1, 1]$ .

Budeme uvažovat lineární mapovací funkci  $F_T : \hat{T} \rightarrow T$  definovanou jako

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_x^2 - a_x^1 & a_x^4 - a_x^1 \\ a_y^2 - a_y^1 & a_y^4 - a_y^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_x^2 + a_x^4 \\ a_y^2 + a_y^4 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Inverzní mapování  $F_T^{-1}$  je ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \frac{2}{D(a^1, a^2, a^4)} \begin{bmatrix} a_y^4 - a_y^1 & a_x^1 - a_x^4 \\ a_y^1 - a_y^2 & a_x^2 - a_x^1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_x^2 + a_x^4 \\ a_y^2 + a_y^4 \end{bmatrix} \right) \quad (3.63)$$

Pro každý lokální vrchol definujeme bázovou funkci  $\hat{L}(\hat{x}, \hat{y})$  ve tvaru

$$\hat{L}^1(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) \quad (3.64)$$

$$\hat{L}^2(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y}) \quad (3.65)$$

$$\hat{L}^3(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y}) \quad (3.66)$$

$$\hat{L}^4(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y}) \quad (3.67)$$

Víme, že bázové funkce i inverzní mapovací funkce jsou lineární. Potom můžeme složením těchto funkcí získat bázové funkce pro obecný element  $T$

$$L_T^j(x, y) = \left( \hat{L}^j \circ F_T^{-1} \right) (x, y) \quad (3.68)$$

S pomocí Lagrangeovy bázové funkce můžeme zapsat bázové funkce ve tvaru

$$L_T^j(\mathbf{x}) = \frac{[D(\mathbf{x}, a^{j-1}, a^j) - D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})] [D(\mathbf{x}, a^j, a^{j+1}) - D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})]}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})} \quad (3.69)$$

přičemž

- $\mathbf{x}$  je bod o složkách  $(x, y)$
- $a^j$  je  $j$ -tý vrchol elementu  $T$  pro  $j = 1..4$ , přičemž budeme uvažovat cykličnost a  $a^0 = a^4$  a  $a^5 = a^1$ .

Odtud můžeme zapsat derivaci bázové funkce ve tvaru

$$\frac{\partial L_T^j(\mathbf{x})}{\partial x} = - \frac{(a_y^j - a_y^{j-1})D(\mathbf{x}, a^j, a^{j+1}) + (a_y^{j+1} - a_y^j)D(a^{j-1}, a^j, \mathbf{x})}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})^2} - \frac{(a_y^{j-1} - a_y^{j+1})}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})} \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial L_T^j(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{(a_x^j - a_x^{j-1})D(\mathbf{x}, a^j, a^{j+1}) + (a_x^{j+1} - a_x^j)D(a^{j-1}, a^j, \mathbf{x})}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})^2} + \frac{(a_x^{j-1} - a_x^{j+1})}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})} \quad (3.71)$$

S pomocí těchto bazických funkcí definujeme interpolant

$$\Pi_T[u](\mathbf{x}) = u(a^1)L_T^1(\mathbf{x}) + u(a^2)L_T^2(\mathbf{x}) + u(a^3)L_T^3(\mathbf{x}) + u(a^4)L_T^4(\mathbf{x}) \quad (3.72)$$

Nyní přejdeme o kousek dál a budeme uvažovat okruh  $r = (\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3, \mathbf{b}^4)$  okolo bodu  $\mathbf{a}$ . Zavedeme operátor  $W$

$$W_x[u](\mathbf{a}) = f_1 \frac{\partial \Pi_1[u]}{\partial x}(\mathbf{a}) + \dots + f_n \frac{\partial \Pi_n[u]}{\partial x}(\mathbf{a}) \quad (3.73)$$

Dále zjednodušíme situaci, a řekneme, že  $b_x^1 = \lambda b_x^3$  a  $b_y^2 = \mu b_y^4$ . Víme, že bod  $\mathbf{a}$  je vnitřní když  $\lambda < 0$  a  $\mu < 0$ , jinak se jedná o hraniční bod. Bez újmy na obecnosti můžeme z rovnoběžníků vypustit čtvrtý bod a uvažovat pouze trojúhelníky, protože pokud známe v rovnoběžníku tři body, čtvrtý je jednoznačně určen.

Podmínka konzistence je splněna, když platí rovnice  $W_x[u](\mathbf{a}) = \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{a})$  a  $W_y[u](\mathbf{a}) = \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{a})$  pro všechny funkce  $u$  z  $\mathcal{P}^{(2)}$ , podobně jako v úvodní části. Celou soustavu můžeme zapsat v maticovém tvaru jako

$$Mf = d \quad (3.74)$$

kde  $f = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T$  a  $d = [1, 0, 0]^T$  a matice  $M$  je ve tvaru

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{(b_x^2)^2 b_y^8 - (b_x^8)^2 b_y^2}{D(b^8, b^2, a)} & \frac{(b_x^4)^2 b_y^2 - (b_x^2)^2 b_y^4}{D(b^2, b^4, a)} & \frac{(b_x^6)^2 b_y^4 - (b_x^4)^2 b_y^6}{D(b^4, b^6, a)} & \frac{(b_x^8)^2 b_y^6 - (b_x^6)^2 b_y^8}{D(b^6, b^8, a)} \\ \frac{(b_y^2)^2 b_x^8 - (b_y^8)^2 b_x^2}{D(b^8, b^2, a)} & \frac{(b_y^4)^2 b_x^2 - (b_y^2)^2 b_x^4}{D(b^2, b^4, a)} & \frac{(b_y^6)^2 b_x^4 - (b_y^4)^2 b_x^6}{D(b^4, b^6, a)} & \frac{(b_y^8)^2 b_x^6 - (b_y^6)^2 b_x^8}{D(b^6, b^8, a)} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Pokud uvážíme  $\alpha = (b_x^8)^2 b_y^6$  a  $\beta = (b_x^6)^2 b_y^8$ , potom můžeme celou rovnici zapsat s pomocí parametrů  $\lambda, \mu$  jako

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha - \lambda\beta & \mu\alpha - \lambda\beta & \mu\alpha - \beta & \alpha - \beta \\ b_y^8 - \lambda b_y^6 & \mu b_y^8 - \lambda b_y^6 & \mu b_y^8 - b_y^6 & b_y^8 - b_y^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Celou kalkulaci je možné zjednodušit na

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2(1-\lambda)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2(1-\mu)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

### 3.4.3 Okrajové vrcholy

Podobně jako u trojúhelníkových sítí, je potřeba speciálním způsobem řešit okrajové vrcholy i v rovnoběžníkových sítích. Použili jsme stejný přístup, díky kterému vzniknou nové rovnoběžníky, které mají větší rozměry a opět přináší větší chybu do výpočtu.

Při výpočtu mohou nastat tyto dvě možnosti:

- *hranový* uzel
- *vrcholový* uzel

## Kapitola 4

# Dosažené výsledky

V této kapitole budou popsány veškeré testy a experimenty, využívající metodu váženého výpočtu gradientů a metody Taylorovy řady. Mezi významné praktické aplikace patří aposteriorní odhad chyby, který je možné použít v iteračním výpočtu k získání jemnější mřížky.

Nejvíce jsem se zabýval metodami pro řešení Laplaceovy rovnice s okrajovými podmínkami. Víme, že se jedná o statickou (časově invariantní) úlohu.

### 4.1 Výpočet gradientu

Metoda váhování představuje numerickou metodu výpočtu gradientu. Víme, že metoda funguje analyticky přesně pro polynomy do druhého stupně včetně. Pro ostatní funkce je chyba v řádu  $O(h^2)$ .

Testování bylo provedeno na několika vybraných funkcích dvou proměnných na obdélníkové mřížce. Chyba vybrané funkce v závislosti na nejdelší hraně mřížky  $h$  je zobrazena na následujícím obrázku 4.1. Je zde zobrazena chyba gradientu na vnitřním (červená barva) a okrajovém vrcholu (zelená barva).

Poslední funkce pro demonstraci je funkce druhého stupně, ve které se promítnou pouze zaokrouhlovací chyby a chyby zobrazení čísel v plovoucí řádové čárce, proto je chyba téměř nulová (na hranici zobrazení) 4.2.

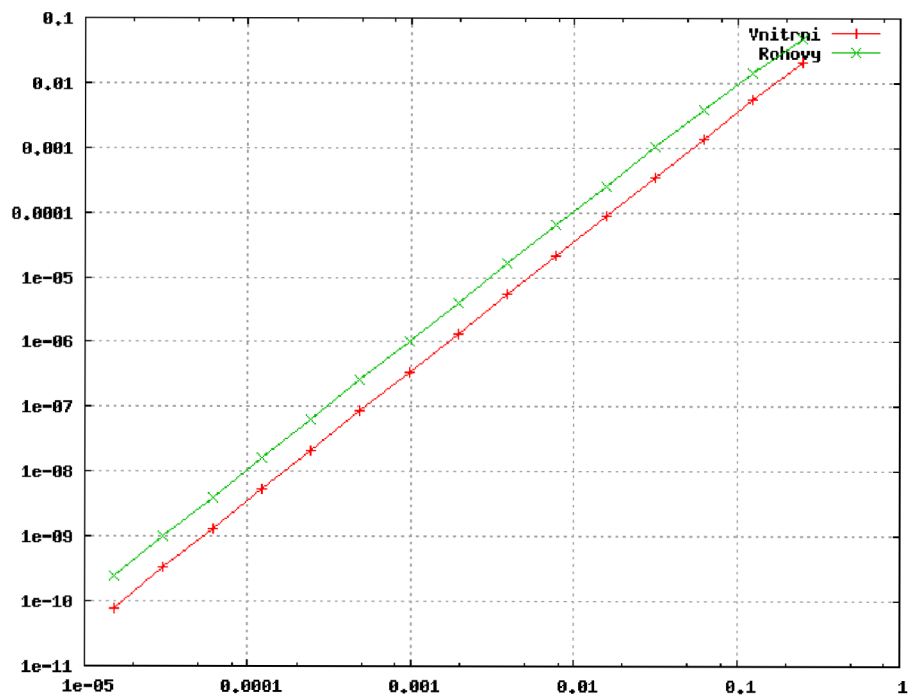
### 4.2 Aposteriorní odhad chyby

Při praktickém řešení úloh s parciálními diferenciálními rovnicemi je potřeba nalézt kompromis mezi rychlostí a přesností. Při použití rovnoměrné mřížky s velkými elementy sice získáme rychle řešení, ale s poměrně malou přesností. Naopak při použití husté mřížky získáme sice přesnější řešení, ale výpočet bude trvat dlouho. Optimální je použít dostatečně malé elementy v oblastech kde je to potřeba a jinde použít větší elementy. Pro identifikaci oblasti, kde se vyplatí použít více malých elementů použijeme aposteriorní odhad chyby.

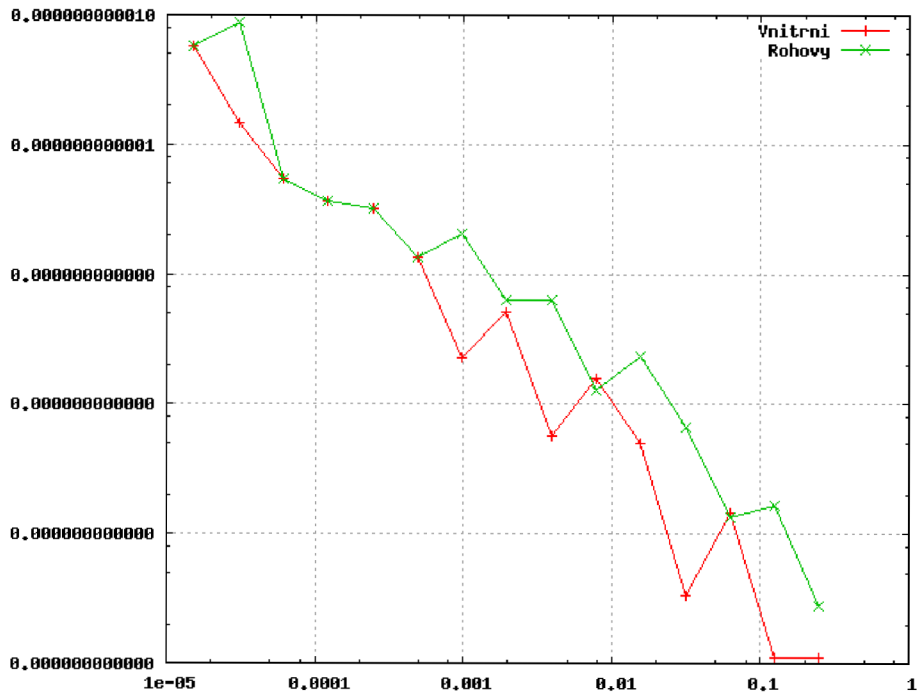
Idea aposteriorního odhadu chyby je použít numerické řešení a aktuální triangulaci. Výsledkem metody je přiřazení odhadu chyby ke každému elementu triangulace. Potom jsme schopni zjistit v jaké oblasti máme velkou chybu a mřížku zjemnit. Velkou výhodou je, že nepotřebujeme znát analytické řešení.

Informace pro tuto kapitolu jsem převzal z [1], [7] a [2].

Pojem *aposteriorní odhad chyby* nedefinuje nějaký konkrétní vzorec, jedná se spíše o obecný postup. Pro účely v této práci nedefinujeme výpočet aposteriorního odhadu chyby



Obrázek 4.1: Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce  $\frac{1}{\sinh \pi} \sin \pi x \sinh \pi y$



Obrázek 4.2: Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce  $x^2 + y^2$

pomocí Superaproximace gradientu. Půjde o to spočítat rozdíl mezi  $P^0$  a  $P^1$  gradientem pro trojúhelníkové a rozdíl mezi  $P^{0.5}$  a  $P^1$  gradientem v případě rovnoběžníkových elementů.

Nejprve nějakým způsobem vyřešíme zadanou parciální diferenciální rovnici a získáme její řešení  $u(x, y)$ . Potom pro každý element  $t$  z triangulace vytvoříme lineární nebo bilineární interpolant  $\Pi_t[u](x, y)$ . Potom v každém vrcholu triangulace spočítáme gradienty pomocí Superaproximace gradientu. Vzniknou nám nové dvě po částech spojitě funkce (na všech elementech)  $\Pi_t[u_x](x, y)$  a  $\Pi_t[u_y](x, y)$ .

Nyní spočítáme aposteriorní odhad chyby  $\tau$  na elementu  $t$ .

$$\tau = \frac{1}{|t|} \int_t \left( \frac{\partial \Pi_t[u]}{\partial x} - \Pi_t[u_x] \right)^2 + \left( \frac{\partial \Pi_t[u]}{\partial y} - \Pi_t[u_y] \right)^2 dx dy \quad (4.1)$$

- $|t|$  je plocha elementu. Ve vzorci provádíme normalizaci, protože větší elementy by měly větší chybu než malé elementy.
- $\Pi_t[u]$  je interpolant numerického řešení  $u$  na elementu  $t$ .
- $\Pi_t[u_x]$ ,  $\Pi_t[u_y]$  jsou interpolanty Superaproximace gradientu numerického řešení  $u$  na elementu  $t$ .
- Každý rozdíl umocňujeme, čímž získáme kladné číslo

Pokud se nad tímto vzorcem zamyslíme, vidíme, že se jedná o výpočet objemu vymezeného dvěma polynomiálními funkcemi, v nehorším případě bilineárními.

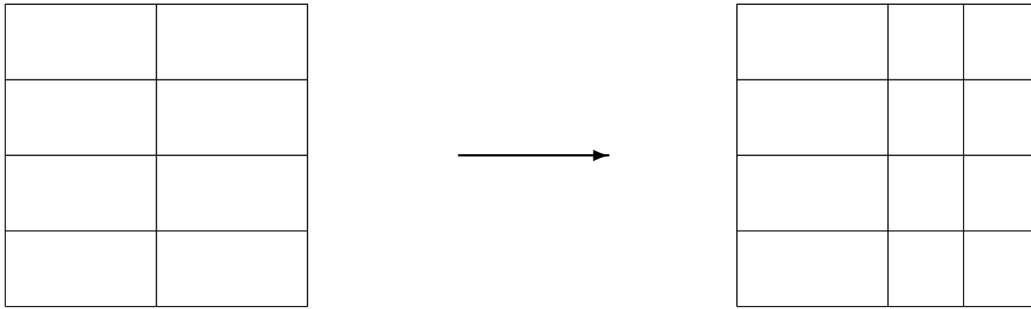
Tuto metodiku můžeme taktéž upravit a vzorec rozdělit na složku  $x$  a  $y$ , čímž nám vznikne pro každý element vektor, jehož složky jsou odhady chyby ve směru  $x$  a  $y$ .

#### 4.2.1 Iterativní výpočet

Definujme postup iterativního výpočtu s využitím aposteriorního odhadu chyby. Tento postup je využíván ve všech algoritmech pro zjemňování mřížky použitých v této práci.

1. Inicializace – jedná se o sestavení hrubé triangulace
2. Výpočet okrajové úlohy – získáme řešení zadané okrajové úlohy (metodou konečných prvků, metodou přímek, metodou konečných diferencí)
3. Superaproximace gradientu – v každém vrcholu triangulace spočítáme superaproximaci gradientu
4. Aposteriorní odhad – v každém elementu spočítáme aposteriorní odhad chyby
5. Zjemnění mřížky – najdeme elementy s největším aposteriorním odhadem chyby a nahradíme je skupinou jiných elementů. V této práci se nezabývám metodami pro zjemňování mřížky, proto jsem zvolil 2 nejjednodušší metody
6. Revize chyby – pokud chyba řešení je stále větší než zadaná limitní hodnota, pokračuj bodem 2.

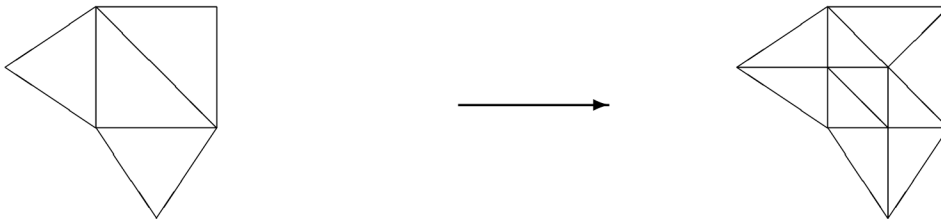
V celé práci jsem se zabýval dvěma typy mřížky. Prvním typem je obdélníková síť, která má hrany rovnoběžné s osou  $x$  nebo osou  $y$ . V těchto případech zjemňování probíhá rozpůlením příslušných obdélníků v řádku nebo sloupci aby byla zachována definice triangulace. Rozdělení je ilustrováno na následujícím obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Zjemňování obdélníkové mřížky pomocí vertikálního zjemnění

V případě trojúhelníkových sítí je situace složitější. Každý trojúhelník sousedí s maximálně třemi trojúhelníky. Vnitřní trojúhelník je rozdělen na čtyři menší trojúhelníky pomocí středních příček - každou hranu rozpůlíme. Tím nám vzniknou 3 nové vrcholy které je potřeba připojit v okolních trojúhelnících. Každý sousední trojúhelník rozdělíme na dva nové, ze středu hrany vnitřního trojúhelníku na protilehlý vrchol sousedního trojúhelníku.

Postup je opět zobrazen na obrázku 4.4.

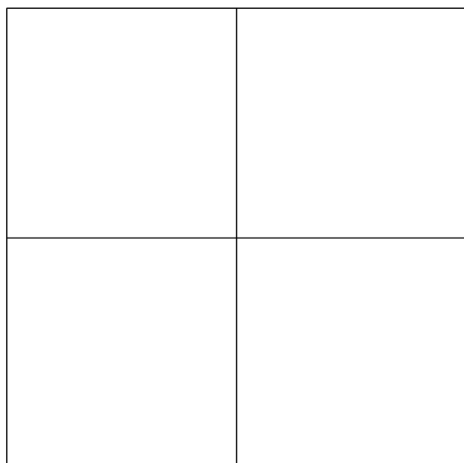


Obrázek 4.4: Zjemnění trojúhelníkové mřížky

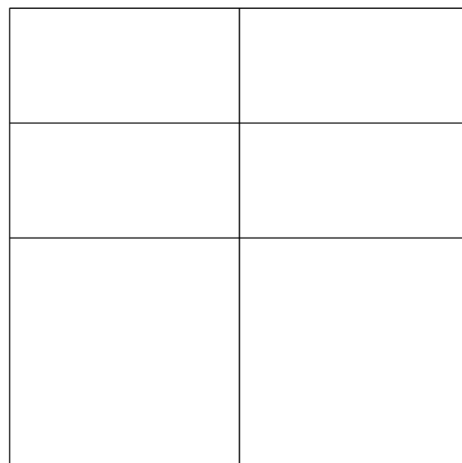
#### 4.2.2 A posteriori odhad chyby na obdélníkové síti

Tento příklad bude ilustrovat použití metody Superaproximace gradientu odvozeného v tomto textu. Řešit budeme okrajovou úlohu (3.1) a použijeme iterační výpočet a a posteriori odhad chyby. Nejprve začneme s hrubou sítí, kterou budeme postupně zjemňovat. Několik sítí je zobrazeno na následujících obrázcích 4.5, 4.6, 4.7, 4.8.

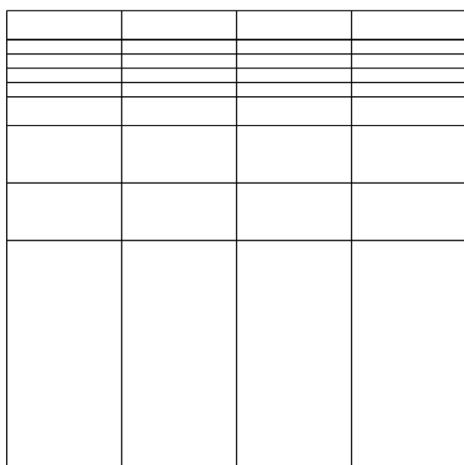




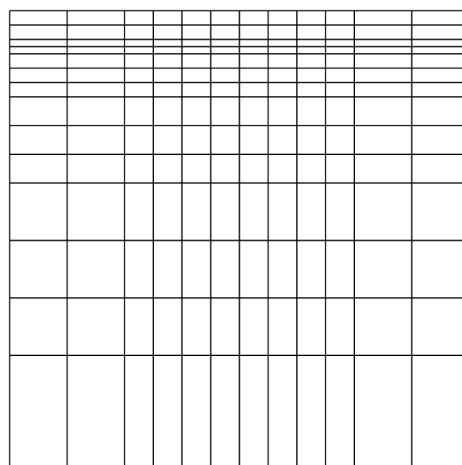
Obrázek 4.5: Počáteční mřížka



Obrázek 4.6: Mřížka po prvním zjemnění



Obrázek 4.7: Mřížka po desátém zjemnění



Obrázek 4.8: Finální mřížka

### 4.2.3 Aposteriorní odhad chyby na trojúhelníkové síti

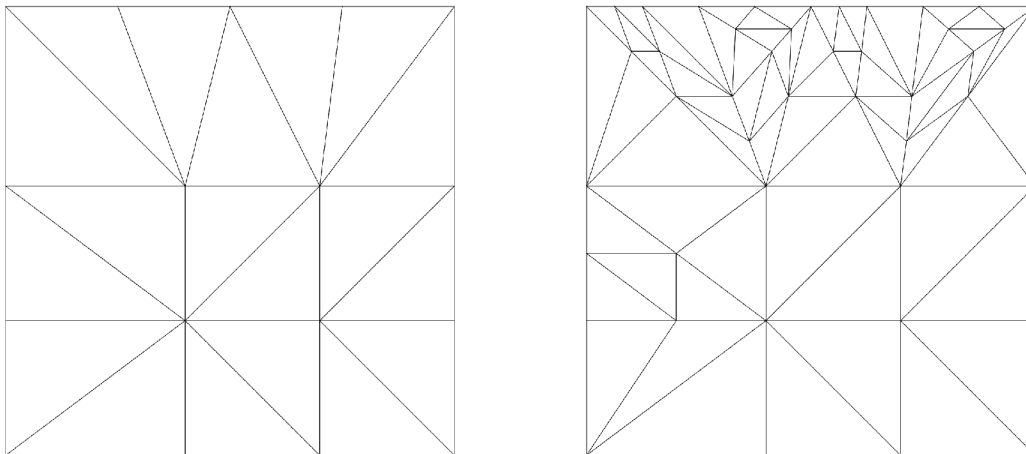
Stejnou metodou jako v předchozím příkladě jsme řešili stejnou rovnici, ale použita byla trojúhelníková síť. Opět řešíme okrajovou úlohu (3.1) s s využitím metody Konečných prvků.

Zobrazím pouze počáteční a koncovou triangulaci, které byly použity při iterativním výpočtu. Uspokojivě přesné řešení bylo vypočítáno při desáté iteraci 4.9

Následuje průběh řešení v vnitřním vrcholu  $[0.3, 0.3]$  (4.10), v závislosti na iteraci. Vidíme, že jemnější mřížka produkuje přesnější řešení.

## 4.3 Aposteriorní odhad chyby pro vlnovou rovnici

V této kapitole se budeme zabývat vlnovou rovnicí a využitím aposteriorního odhadu chyby pro zjemňování mřížky. Víme, že v této práci se zabýváme dvourozměrnými oblastmi, tudíž budeme řešit vlnovou rovnici funkce tří proměnných ve tvaru



Obrázek 4.9: Vlevo počáteční triangulace, vpravo koncová triangulace při desáté iteraci.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat oblast  $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, \infty \rangle$  s dirichletovou okrajovou podmínkou

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = \sin \pi x \quad (4.3)$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = \sin \pi y \quad (4.4)$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat následující počáteční podmínky

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.6)$$

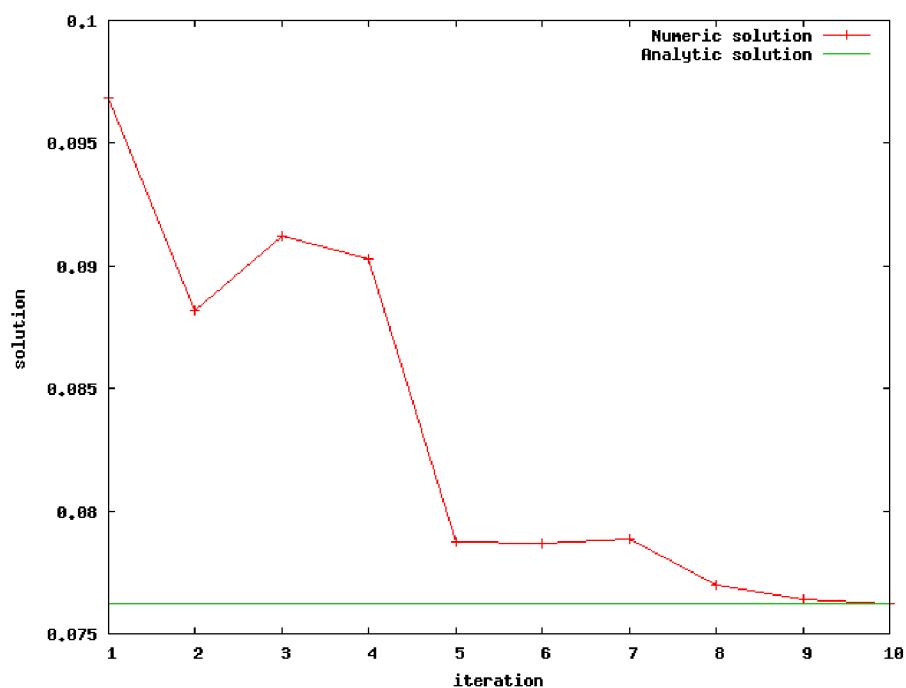
Prakticky tato rovnice popisuje vlnění pružné blány, kterou v čase  $t = 0$  vychýlíme a pustíme.

Použijeme metodu příemek a vytvoříme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, které budeme řešit Eulerovou metodou. Metoda aposteriorního odhadu je stále stejná a počítá se jako normalizovaný rozdíl dvou bilineárních funkcí.

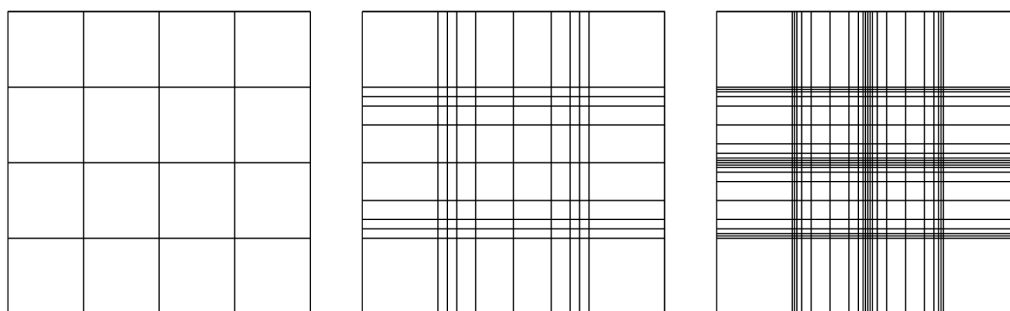
Jelikož zde máme navíc časový rozměr, metoda byla upravena, aby uložila maximální aposteriorní odhad chyby v rámci řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.

Protože očekáváme symetrickou funkci, provedeme zjemnění mřížky symetricky.

Tento výpočet je iterativní podobně jako v metodě použité pro výpočet Laplaceovy rovnice. Následuje několik triangulací použitých k výpočtu 4.11. Nejprve je zobrazena počáteční mřížka zobrazující  $5 \times 5$  uzlu, postupně dochází v kritických místech k zjemňování mřížky.



Obrázek 4.10: Absolutní chyba řešení v bodě  $[0.3, 0.3]$ . Červená křivka představuje numerické řešení, zelené analytické řešení.



Obrázek 4.11: Schéma mřížek použitých při řešení vlnové rovnice. Vlevo počáteční mřížka, vpravo koncová mřížka.

## Kapitola 5

# Závěr

Dnes existuje celá řada metod, kterými se dají řešit parciální diferenciální rovnice. Mezi základní metody patří *metoda Konečných diferencí* nebo *metoda Konečných prvků*, které jsou představeny v tomto textu. Společné těmto metodám je nahrazení spojitého prostoru diskretním a z toho vyplývající nahrazení zadaného problému soustavou algebraických či obyčejných diferenciálních rovnic a jejich řešení konvenčními metodami. Vlastní přínos prezentovaný v této práci však leží mimo tyto metody a jedná se o odvození metody výpočtu gradientu na rovnoběžníkových sítích pomocí váženého průměru.

Metoda váženého průměrování není nová a používá se i v praxi. Varianta této metody představená v této práci, nazývaná *Superaproximace gradientu*, se od ostatních liší počtem rovnic, které je nutné řešit. Ostatní metody používají soustavy, kde je počet rovnic roven počtu vrcholů v okolí centrálního vrcholu, zatímco tato metoda má vždy právě tři rovnice. (Případně čtyři v případě trojúhelníkových sítí).

Metoda Superaproximace gradientu nachází uplatnění především v metodě aposteriorního odhadu chyby. Numerické metody se vždy nějakým způsobem snaží spojitý prostor diskretizovat na konečnou množinu vrcholů, ve kterých vypočítají přibližnou hodnotu řešení. Metoda diskretizace je klíčová. Nevhodné mřížky mohou způsobit velkou chybu řešení. Další problém je stanovení velikosti jednotlivých elementů. Na příliš řídkých mřížkách mají metody velkou chybu řešení. Naopak na příliš jemných mřížkách roste zaokrouhlovací chyba a zároveň je potřeba mnoho času pro vyřešení a celá soustava špatně konverguje.

Kompromisem je metoda aposteriorního odhadu chyby a řízené zjemňování mřížky. Pod pojmem *řízené zjemňování mřížky* rozumíme nahrazení vybraných oblastí s hrubou mřížkou a velkou chybou řešení jemnější mřížkou. Aposteriorní odhad chyby je zde použit právě pro identifikování problematických oblastí, ve kterých by bylo vhodné mřížku zjemnit.

Ve výsledku se jedná o iterativní výpočet začínající s hrubou mřížkou, na které získáme přibližné řešení velmi rychle. Postupně dochází k zjemňování mřížky v místech s velkou lokální chybou, a opakovanému řešení s použitím jemnější mřížky. Výhodou je rychlost a vyšší přesnost výpočtu narozdíl od srovnatelného rovnoměrného zjemnění.

V současnosti existují odvozené rovnice pro trojúhelníkové a rovnoběžníkové sítě. Další možná rozšíření se týkají odvození metody pro další typy elementů používaných v metodě konečných prvků, např. obecných čtyřúhelníků, případně některých dalších speciálních elementů. Metoda váženého průměru by se také mohla rozšířit do více než dvou rozměrů, protože většina praktických problémů je řešena v trojrozměrném prostoru.

# Literatura

- [1] Ainsworth, M.: A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. 2000.
- [2] Babuška, I.: A posteriori error estimates for the finite element method. 1978.
- [3] Beckmann, P.: *Historie čísla  $\pi$* . Praha: Academia, 1998, ISBN 80-200-0655-9.
- [4] Dalík, J.: Averaging of directional derivatives in vertices of nonobtuse regular triangulations. 2010.
- [5] Dalík, J.: Approximations of the partial derivatives by averaging. 2012.
- [6] Devlin, K.: *Problémy pro třetí tisíciletí*. Mladá fronta, ISBN 80-7203-739-0.
- [7] Verfurth, R.: A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques. 1995.
- [8] Škrášek, J.: *Základy aplikované matematiky II*. SNTL, 1986, str. 601.

# Publikace

1. Valenta V., *Moderní metody řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic*, ISBN 978-80-214-3868-2
2. Kunovský J., Šátek V., Valenta V., *Progresivní řešení parciálních diferenciálních rovnic*, ISBN 0-7803-8226-9
3. Valenta V., *Generátory náhodných čísel*, DSM Data Security Management. 2011, vol. 2011, no. 1, pp. 34-37. ISSN 1211-8737
4. Kunovský J., Sehnalová P., Valenta V., *Convergence of partial differential equations*, International Conference on Computer Modelling and Simulation. Brno, 2011, pp. 1-8
5. Dalík J., Valenta V., *Averaging of gradient in the space of linear triangular and bilinear rectangular finite elements*, Central European Journal of Mathematics. 2012, vol. 2012, no. 1, pp. 1-16. ISSN 1895-1074
6. Valenta V., Šátek V., Kunovský J., Humená P., *Adaptive Solution of Laplace Equation*, Proceedings of the 11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. Rhodes: American Institute of Physics, 2013, pp. 2285-2288. ISBN 978-0-7354-1184-5. ISSN 0094243X
7. Kunovský J., Šátek V., Valdman J., Valenta V., *Construction of P1 Gradient from P0 Gradient by Averaging*, 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. Rhodes, 2014, pp. 1-4