UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Rovinné křivky v programu Maple

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Miloslav Závodný
Rok odevzdání: 2011

Vypracoval:
Miroslav Petřek
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vytvořil samostatně pod vedením RNDr. Miloslava Závodného a použité literatury uvedené v seznamu literatury.

V Olomouci dne 20. dubna 2011 Miroslav Petřek

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Miloslavu Závodnému za obětavou spolupráci i čas, který mi věnoval při konzultacích. Zároveň bych chtěl poděkovat svým rodičům, kteří mě při studiu podporovali.

Obsah

Úvod

V bakalářské práci se zabývám některými aspekty rovinných křivek s využitím programu Maple. S pojmem křivky se setkáváme ve spoustě vědních oborů jako je např. geometrie, astrologie, fyzika, architektura, ekonomie. Křivky nám pomáhají např. při řešení problémů, které můžeme znázornit v grafické podobě – znázornění funkční závislosti veličin. Pomáhají kupříkladu i při zkoumání pohybu tělesa (tvar a délka jeho trajektorie) nebo při navrhování architektonických prvků.

V první kapitole se budu věnovat pojmu rovinná křivka, její definicí a různým způsobům jejího zadání. Popíši některé vlastnosti křivek a uvedu potřebnou teorii pro výpočet délky křivky a konstrukci tečny ke křivce.

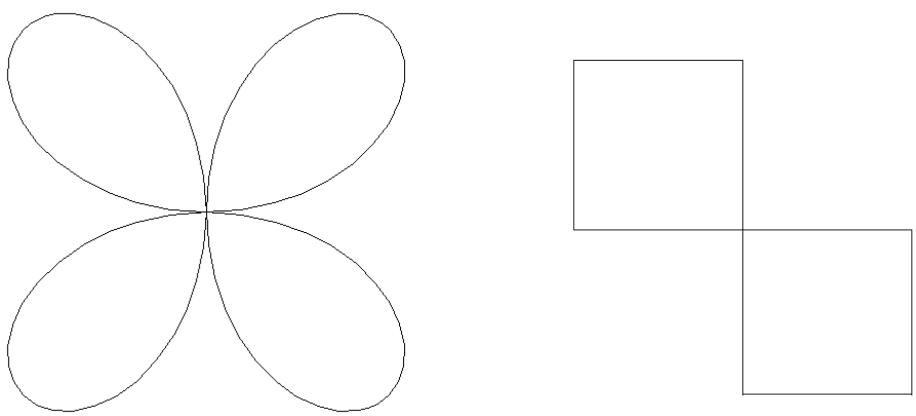
Ve druhé kapitole nastíním strukturu a fungování programu Maple, a způsob jeho využití v této práci.

Ve třetí kapitole se zaměřím na jednotlivé křivky, jejich definici, charakteristiku, historii a další informace. V praktické části uvedu pro každou zvolenou křivku potřebné procedury systému Maple pro výpočet délky křivky a pro výpočet a grafické znázornění tečny ke křivce v jejím daném bodě. První podrobně analyzovanou rovinnou křivkou bud kružnice – jedna z nejdůležitějších křivek. Další, v této části uvedené křivky, zahrnují jak běžně používané, tak méně známé křivky.

V práci jsem použil především literaturu [2] a [7].

1. Křivka

Křivky jsou z různých důvodů zkoumány již od starověku. S křivkou se v běžném životě setkáme velmi často. V architektuře se objevují např. různé spirály zkrášlující budovy či sloupy. Mezi nejstarší křivky patří jeskynní ornamenty a kresby, kterými zanechávali naši dávní předkové poselství a různé vzkazy svým druhům, či se chlubili svými výtvarnými dovednosti. Křivkami jsou vlastně i písmena abecedy i arabské číslice. Křivkou je např. trajektorie plynule se pohybující částice během určitého času – kupříkladu dráha koule vystřelené z děla či pohybu vesmírných těles. Nesmíme opomenout ani využití křivek v ekonomii, kde křivky slouží např. k vizualizaci vztahu mezi danými ukazateli, křivka nám tak pomáhá k lepšímu pochopení konkrétní situace. V neposlední řadě tvoří křivky reklamní či firemní loga.



Obrázek 1a, 1b

Zkoumáme-li křivky, setkáváme se s pojmy rovinná a prostorová křivka. Již z jejich názvů je zřejmý rozdíl mezi nimi. První z nich je situovaná v rovině, tedy například zmíněné jeskynní kresby či ekonomické křivky, druhá pak v prostoru. Ve fyzikálních či grafických aplikacích můžeme prostorovou křivku lépe využít. V této práci se budeme zabývat křivkami rovinnými.

Pojem křivky se historicky vyvíjel:

Křivka podle Euklida: Křivka je délka bez šířky.

Křivka, jako geometrické místo bodů (množina bodů dané vlastnosti):

Křivkou v rovině rozumíme množinu právě všech bodů X, majících vlastnost V.

(Vlastnost V může být dána syntakticky nebo analyticky.)

My budeme chápat křivku takto:

Definice 1.1. Uvažujme otevřenou množinu $U \subset R^2$ a reálnou funkci F definovanou na množině U ($F: U \rightarrow R$) třídy C^2 takovou, že K *je neprázdná množina, jejíž body* (x_0,y_0) *splňují rovnici* $F(x,y)= 0$. Nechť dále platí $dF(x_0,y_0) := \left(\frac{dF(x_0,y_0)}{dx},\frac{dF(x_0,y_0)}{dy}\right) \neq 0$, pro všechna $(x_0,y_0) \in K$. Pak K je křivka třídy C^2.

Poznámka 1.1. Má-li číselná funkce f: $I \in R$ spojité derivace na intervalu I až do řádu 2 včetně, nazýváme tuto funkci třídy C^2.

1. 1. Rovinná křivka daná parametricky

Definice 1.1.1. *Rovinnou křivkou danou parametricky* rozumíme množinu bodů $[x,y]$, které leží v rovině R^2 a jsou určeny parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad t \in \langle a,b \rangle, \qquad (2)$$

kde

1) $\varphi_1: <a,b> \in R$, $\varphi_2: <a,b> \in R$ jsou spojité funkce,

2) derivace $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$ jsou na <a,b> po částech spojité,

3) pro žádné $t \in <a,b>$ nejsou derivace $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$ současně rovny 0.

Fyzikální interpretace definice

Předpokládejme, že se v rovině pohybuje bod v konečném časovém intervalu <a,b> a že je jeho dráha popsána pomocí spojitého zobrazení $s = (\varphi_1, \varphi_2): <a,b> \in R^2$. Trajektorií tohoto pohybu je rovinná křivka. Aby byl pohyb hmotného bodu „smysluplný“, musí být v každém bodě trajektorie definovaná jeho rychlost. Velikost rychlosti je v čase t dána derivací s podle t. (Vektor rychlosti je v čase t dán derivací polohového vektoru hmotného bodu podle t.) V souladu s touto úvahou byla v minulosti křivka definována pouze prostřednictvím zobrazení se spojitou derivací. Tímto požadavkem bychom ovšem vyloučili křivky jako je např. trojúhelník. Proto z tohoto striktního požadavku ustoupíme a připustíme konečně mnoho výjimek.

Příklad 1.1.1.

Uvažujme trajektorii ze zbraně vystřelené kulky

První podmínka definice 1.1.1. říká, že se v průběhu letu kulka nikde neztratí a zase jinde neobjeví. Trajektorie kulky také náhle „lomeně“ nezmění svůj směr (trajektorií není lomená čára), jde o plynulý pohyb, což nám zaručí druhá podmínka. A třetí podmínka umožňuje rychlost kulky zjistit.

1. 2. Jiné zadaní rovinných křivek

Dosud jsme se v našich úvahách zabývali parametrickými rovnicemi křivky. V této podkapitole ukážeme další možnosti, jak zadat rovinnou křivku. Každé vyjádření je v jistých případech výhodnější než ostatní.

Vyloučíme-li parametr t z parametrických rovnic dostaneme implicitní, resp. explicitní rovnici křivky.

1) *Rovinnou křivkou danou implicitně* rozumíme množinu právě těch bodů $[x, y]$ ležících v rovině R^2 , které splňují rovnici $F(x,y) = 0$.

2) *Rovinnou křivkou danou explicitně* rozumíme množinu právě těch bodů [x, y] ležících v rovině, které splňují rovnici $y = f(x)$.

Vztah mezi explicitním a implicitním zadáním rovinné křivky lze charakterizovat takto:

$$F(x,y) = y - f(x) = 0 \tag{3}$$

Ne vždy je však možné převest implicitní vyjádření křivky na explicitní.

Příklad 1.2.1.: $F(x, y) = 6x^5 y^2 + x^4 y^3 - 5x y^7 + 3$

=> Nejsme schopni vyjádřit y, tedy najít explicitní tvar, $y = f(x)$.

3) Označme $\varrho \geq 0$ vzdálenost bodu K, ležícího na křivce, od počátku soustavy souřadnic O. Označme φ orientovaný úhel, který svírá kladný směr osy x s úsečkou

OK, platí $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Potom rovinnou křivkou definovanou polárními souřadnicemi rozumíme množinu bodů [x,y], které leží v rovině R^2 a jsou určeny rovnicí

$$r = f(\varphi). \tag{4}$$

Poznámka 1.2.1. Převodní vztah mezi kartézskými souřadnicemi a polárními souřadnicemi je dán vztahem (5)

$$x = \rho(\varphi)\cos(\varphi), \qquad y = \rho(\varphi)\sin(\varphi); \qquad \varphi \in \langle a,b \rangle. \tag{5}$$

Některé křivky, u kterých je neodmyslitelně spojen směr a vzdálenost od středu, je výhodnější či jednodušší uvádět v polárních souřadnicích. Je to např. Archimédova spirála, polární růže, ale i kružnice. Převod do polárních souřadnic je často vhodný při výpočtech délky křivky.

Příklad 1.2.2.: Rovnice paraboly

Parametrické rovnice: $x = t,$

$y = t^2\,; \qquad t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$

Explicitní rovnice: $y = x^2$

Implicitní rovnice: $y - x^2 = 0$

1. 3. Vlastnosti rovinných křivek

Mějme křivku zadanou parametricky. Předpokládejme, že její parametr t je z intervalu <a,b>. Pro další úvahy stanovíme uspořádanou dvojici $[\varphi_1(a),\varphi_2(a)]$ jako *počáteční bod* rovinné křivky a $[\varphi_1(b),\varphi_2(b)]$ jako *koncový bod*.

Křivku nazveme *uzavřenou*, jestliže počáteční bod a koncový bod splývají, tj. $[\varphi_1(a), \varphi_2(a)] = [\varphi_1(b),\varphi_2(b)]$. (Obrázek 2 a, b)

Obrázek 2 a, b

Křivku nazveme *otevřenou*, pokud $[\varphi_1(a), \varphi_2(a)] \neq [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$, tedy počáteční bod a koncový bod křivky jsou různé body. Říkáme, že křivka má krajní body. (Obrázek 3 a, b, c)

Obrázek 3 a, b, c

Jsou-li funkce $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$, kde $t\in$<a,b> spojité na intervalu <a,b>, říkáme, že rovinná křivka daná parametricky je *hladká*.

– pro otevřenou křivku platí, že je hladká, právě když v každém jejím bodu můžeme vést ke křivce tečnu. (Obrázek 4 a)

– u uzavřené křivky můžeme připustit výjimku: tečna neexistuje v počátečním bodě křivky. (Obrázek 4 b)

Obrázek 4 a, b

Po částech hladká křivka je taková křivka, která se skládá z hladkých úseků křivky, které na sebe navazují. (Obrázek 5)

Obrázek 5

Jednoduchou křivkou rozumíme křivku, která neprotíná sama sebe, tj. pro každé $t_1 \neq t_2$ platí $\varphi_1(t_1) \neq \varphi_1(t_2)$ a zároveň $\varphi_2(t_1) \neq \varphi_2(t_2)$.

U uzavřené křivky připouštíme jednu výjimku, kdy tato podmínka neplatí, a to počáteční a koncový bod. (Obrázek 6 a, b).

Obrázek 6 a, b

1. 4. Délka křivky

Jak jsme se už zmínili výše, křivkou je trajektorie hmotného bodu v určitém časovém intervalu t. Často potřebujeme znát délku této trajektorie. Můžeme ji např. změřit metrem, nás ale zajímá výpočet z její rovnice.

1) Předpokládáme, že křivka je daná parametrickými rovnicemi, tj.

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad t \in \langle a, b \rangle$$

kde derivace $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$ jsou na <a,b> spojité, potom *délka křivky* je daná určitým integrálem

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt\,. \tag{6}$$

2) Předpokládejme, že máme křivku zadanou explicitně, potom pokud pro *f(x)* na intervalu <a,b> platí, že *f´(x)* je na tomto intervalu spojitá, je délka křivky vyjádřena výrazem

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,. \tag{7}$$

3) Uvažujme křivku zadanou v polárních souřadnicích, tj.

$$r = f(\varphi), \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Potom délku křivky určíme vztahem

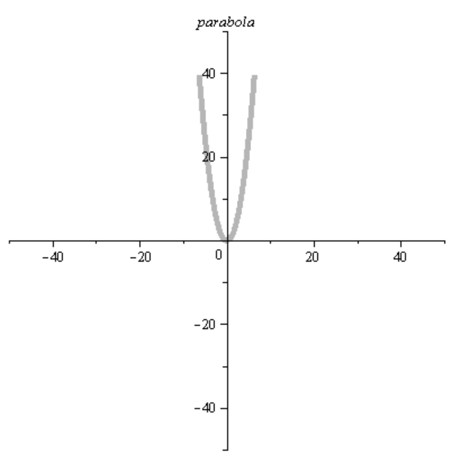
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{f(\varphi)^2 + \left(\frac{d(f(\varphi))}{d(\varphi)} \right)^2}\, d\varphi \ . \qquad (8)$$

Ne ve všech případech je možné určit délku křivky. Křivka, která má konečnou délku, se nazývá *rektifikovatelná.* Tato konečná délka se určuje podle výše uvedených vztahů.

Příklad 1.4.1. a): Určíme délku paraboly z předešlého příkladu.

Parametrická rovnice: $x = t,\ y = t^2$; $t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$

Explicitní rovnice: $y = x^2$; $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$



Obrázek 7

Poněvadž známe parametrické rovnice i explicitní zadání paraboly můžeme na výpočet délky této křivky užít vzorce (6), (7). Délku křivky jsme počítali pomocí programu Maple:

$$l := evalf\left(int\left(\sqrt{(diff(t,t))^2 + \left(diff\left(t^2,t\right)\right)^2}, t = -2\cdot \mathrm{Pi} .. 2*\mathrm{Pi}\right)\right);$$

$$l := 80.8193161\!:$$

$$h := evalf\left(int\left(\sqrt{1 + \left(diff\left(x^2,x\right)\right)^2}, x = -2\cdot \mathrm{Pi} .. 2\cdot \mathrm{Pi}\right)\right);$$

$$h := 80.8193161\!:$$

Tedy *l = 80, 81931615.*

Pro kontrolu je vhodné mít k dispozici i grafické řešení, viz obr. *7* .

Příklad 1.4.1. b):

Ukážeme důležitost zvolení „vhodných" mezí určitého integrálu, tj. intervalu <a,b>, pro zjištění délky křivky. Jako příklad použijeme elipsu a její parametrické vyjádření.

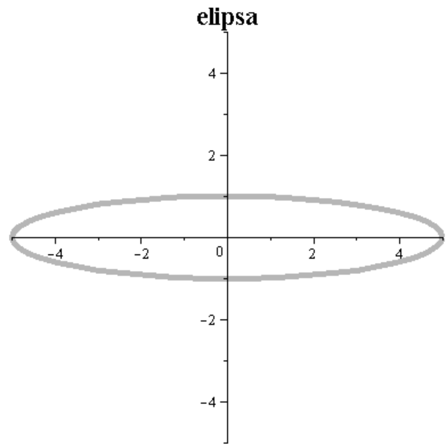
Parametrické rovnice elipsy se středem v počátku a osami na osách soustavy souřadnic jsou:

$$x(t) = a*cos(t),\ y(t) = b*sin(t)\ ; \qquad t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

kde *a, b* jsou libovolné reálné koeficienty (tzv. poloosy)

Zvolíme například $a = 5$, $b = 1$:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left([5*\cos(t)]'\right)^2 + \left([1*\sin(t)]'\right)^2}\, dt = 21,01004454$$



Obrázek 8

Při změně intervalu *t*, poznáme rozdíl jen na zjištěné délce křivky, nikoli však na grafu křivky. Zvolíme-li, při stejných koeficientech, interval $t \in \langle 0, 4\pi \rangle$, pohyb hmotného bodu bude po trajektorii tvaru dané elipsy proveden dvakrát, tvar elipsy se nezmění, ale délka křivky bude rovna l= 42.020 089 08, což je dvojnásobek původní délky.

1. 5. Tečna ke křivce

Přímka, která má s danou křivkou právě jeden společný bod, se nazývá tečna. Tomuto společnému bodu říkáme bod dotyku. O tečnu se jedná, pokud všechny okolní body křivky kolem bodu dotyku leží ve stejné polorovině. Tuto polorovinu určuje právě tečna. Jinak můžeme mluvit jen o průsečíku.

Určení tečny z parametrického vyjádření

Tečna k parametricky vyjádřené křivce je dána rovnicemi

$$x = \varphi_1(t_0) + s * \varphi_1'(t_0)\,, \qquad y = \varphi_2(t_0) + s * \varphi_2'(t_0) \tag{9}$$

kde t_0 je zvolený parametr pro volbu bodu dotyku v bodě $[\varphi_1(t_0)\,,\, \varphi_2(t_0)]$,
a *s* je libovolná proměnná.

Určení tečny z explicitního vyjádření

Máme-li křivku vyjádřenou explicitně, tj. $y = f(x)$, potom rovnice tečny v bodě $[x_0,y_0]$ je

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0). \tag{10}$$

Tento vztah můžeme upravit na tvar

$$y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0. \tag{11}$$

V programu Maple lze pomocí předdefinovaných příkazů určit tečnu ke křivce velmi jednoduše a efektivně. Jedním z parametrů této předvolby je zadání křivky v explicitním tvaru. Poněvadž nelze vyjádřit v tomto tvaru všechny křivky, není tento způsob získání a nakreslení tečny univerzální. Je pak nutné provést obvyklý výpočet.

2. Maple

2. 1. Charakteristika programu Maple

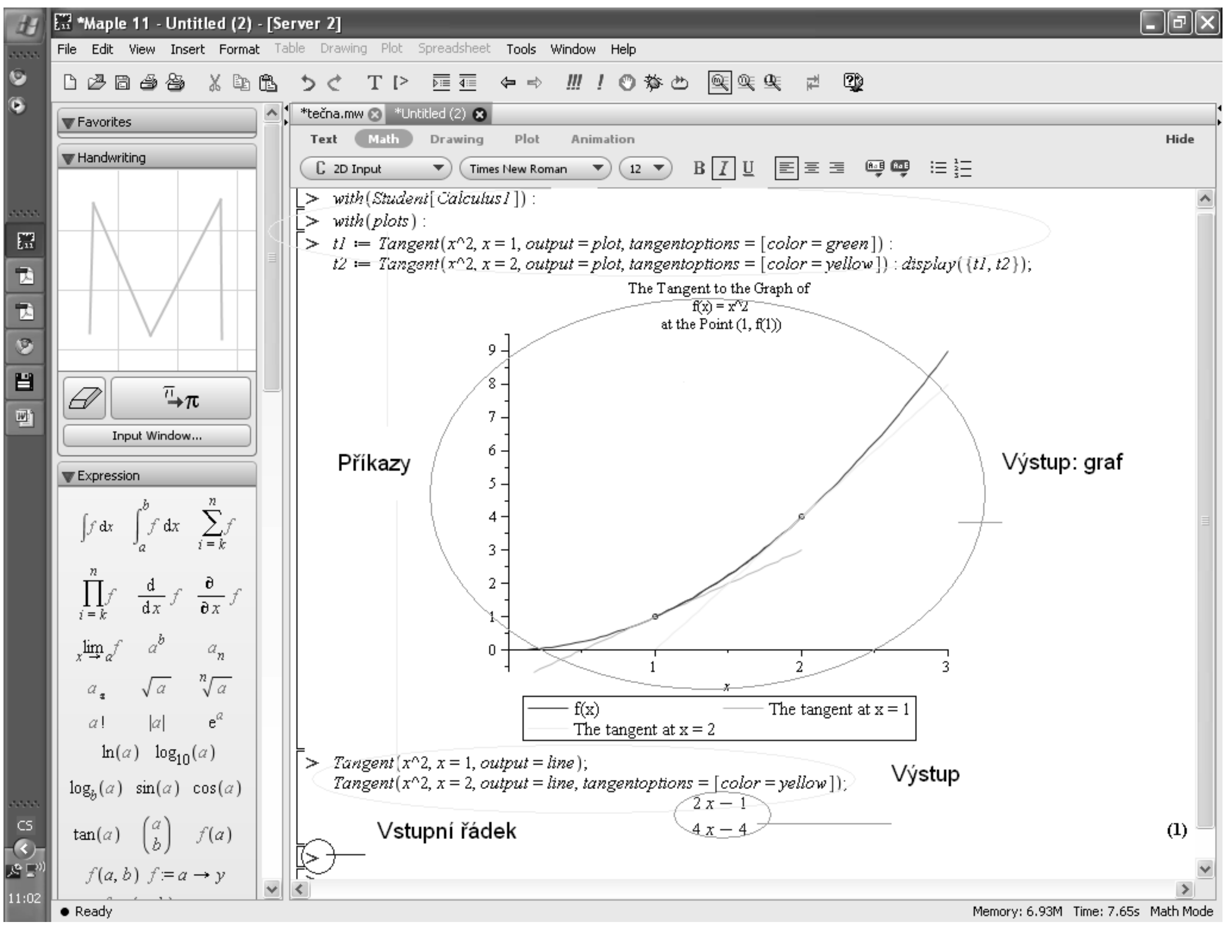
Maple je systém pro počítačovou algebru vytvořený během posledních 25 let na západních univerzitách. Maple je v dnešní době komerční program, který vlastní kanadská firma Maplesoft. Název programu vznikl ze začátků anglických slov **Ma**thematics **ple**asure, což v překladu znamená Matematika potěšením. Název dokonale vystihuje jeho účel, kterým je zpříjemnění a zjednodušení matematických výpočtů.

Pomocí systému Maple jsme schopni provádět symbolické a numerické výpočty, kreslit grafy a doplňovat je vlastními texty. Příkazy můžeme zadávat interaktivně nebo dávkově – můžeme vytvářet tzv. hypertextové zápisníky, v programu je najdeme pod anglickým názvem worksheet. Tyto zápisníky můžeme ukládat do souborů na počítači ve speciálním formátu Maple MW. Soubory v tomto formátu umožňuje Maple znovu načíst k přepracování. Nebo se mohou snadno exportovat do jiných formátů, např. do Latexu či HTML, čímž se usnadní psaní matematických textů.

V maplovském programovacím jazyku je mnoho předdefinovaných funkcí a příkazů. Tyto předdefinované funkce jsou schopny pokrýt mnoho oblastí matematických výpočtů – diferenciální a integrální počet, řešení rovnic i soustav rovnic, kombinatoriku, řešení diferenciálních a diferenčních rovnic, lineární algebru, geometrii a jiné.

2. 2. Pracovní prostředí Maple

Pracovní prostředí programu Maple odpovídá prostředí operačního systému Windows. Protože program obsahuje prvky typické pro operační systém Windows (jde o prostředí grafické), je pro uživatele snadnější se ho naučit používat a pracovat v něm. Mezi základní a hlavní části tohoto prostředí patří zápisník, hlavní nabídka menu a ovládací lišta, nově také na levé straně takzvané paletové okno, s rychlým přístupem k předdefinovaným funkcím a jiným výrazům.



Obrázek 9

2. 3. Procedury používané v této práci

Program Maple použijeme v práci pro tvorbu grafů jednotlivých křivek, výpočet jejich délky a nalezení a nakreslení tečny ke křivce v určitém bodě. Maple využijeme i k zjednodušení výrazů či řešení rovnic a v neposlední řadě ke generování vzorců uvedených v této práci.

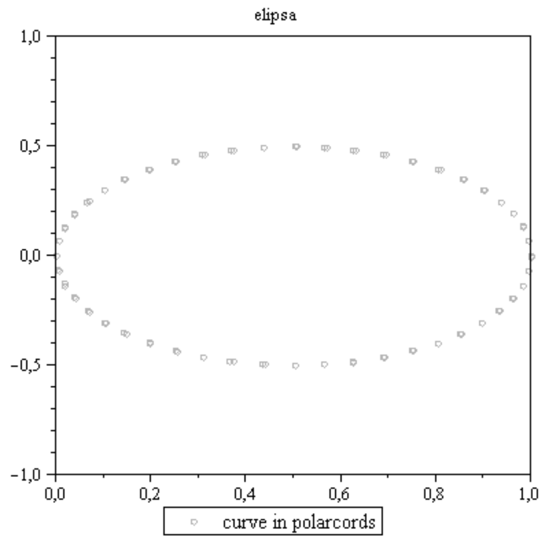
2. 3. 1. Graf křivky

K nakreslení jednotlivých křivek nám postačí balíček příkazů *plots*, který obsahuje (pro nás důležité) příkazy *plot*, *polarplot*, *implicitplot*, *display*. Podle druhu řešené rovnice použijeme příslušný příkaz. Každá funkce má mnoho parametrů, z nejdůležitějších jsou například view, color, title, axes, styl či symbol.

Příklad 2.3.1.1. a)

Funkce pro nakreslení elipsy v polárních souřadnicích s ukázkou parametrů příkazu polarplot. Kromě prvních dvou jsou zbývající parametry nepovinné.

```
with(plots) :
polarplot( cos(x), x, style = point, color = green, symbol = circle,
    axes = BOXED, title = "elipsa", legend = "curve in polarcords", view
    = [0 ..1, -1 ..1]);
```

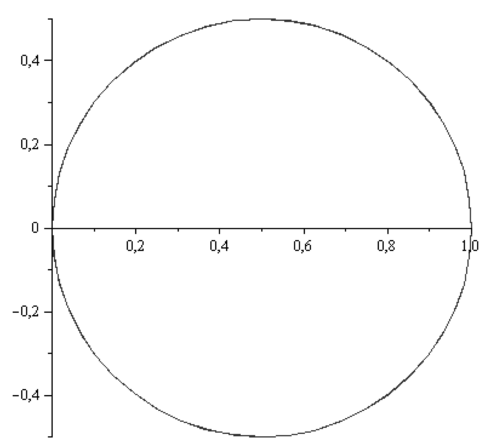


Obrázek 10 a

Příklad 2.3.1.1. b)

Vykreslení stejné elipsy, pouze s povinnými parametry.

$with(plots)$
$polarplot(\cos(x), x);$



Obrázek 10 b

2. 3. 2. Délka křivky

Délka křivky je počítána z dříve uvedených vztahů (5), (6), (7), v závislosti na rovnicích konkrétních rovinných křivek, tedy parametrických, polárních či explicitně zadaných.

Jak ze vztahů pro výpočet délky můžeme vidět, používáme zde derivaci a určitý integrál, popřípadě příkaz, který výraz zjednoduší– *evalf*. Tyto procedury jsou předdefinované v paletovém okně.

Příklad 2.3.2.1.

Výpočet délky pomocí předdefinovaných funkcí derivace a určitého integrálu. Druhou mocninu a odmocninu najdeme v paletovém okně také.

$$délka = evalf\left(\int_0^{2\cdot \mathrm{Pi}} \sqrt{(\cos(x))^2 + \left(\frac{d}{dx}\cos(x)\right)^2}\, dx\right)$$

$$délka = 6.28318530\!\!\!\!\!8$$

2. 3. 3. Tečna ke křivce

Využití programu Maple k pro nalezení tečny ke křivce v daném bodě je trochu obtížnější. Můžeme se pokusit využít příkaz *tangent* z balíčku *student*, ale ten má v jednom z parametrů požadavek na explicitní zadání křivky, čehož není vždy možné dosáhnout.

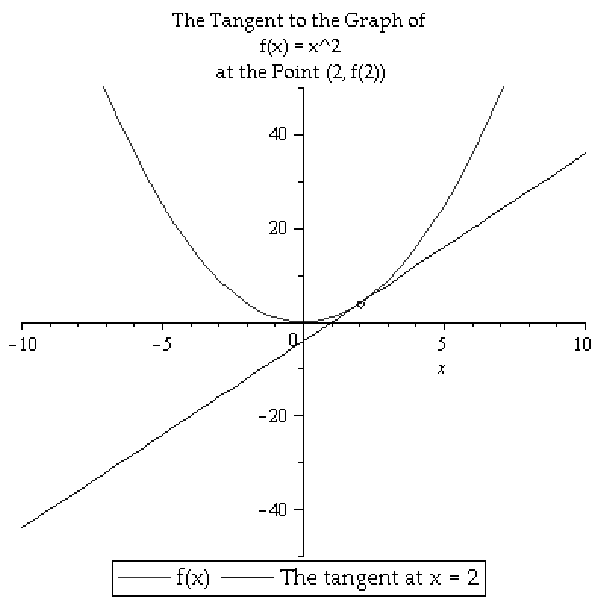
Příklad 2.3.3.1. a)

Tečna k parabole pomocí předdefinované funkce programu Maple.

```
with(Student[Calculus1]) :
Tangent(x^2, x = 2)
```

$$4\,x - 4$$

```
Tangent(x^2, x = 2, output = plot, view = [-10 ..10, -50 ..50])
```



Obrázek 11 a

První výstup je rovnice tečny v explicitním tvaru a druhý výstup (output = plot) je graf tečny k paraboly.

Jinou možností je v Maple vykreslit tečnu jako přímku se zjištěnými parametry. A společně s křivkou a tečným bodem zobrazit příkazem *display*. Tečný bod získáme funkcí pointplot, jehož parametry jsou souřadnice $[x_0, y_0]$. Tečnu nakreslíme pomocí funkce plot a danou křivku příkazem odpovídajícím typu rovnice.

Příklad 2.3.3.1. b)

Tečna k téže parabole ($y = x^2$) pomocí rovnice tečny v explicitním tvaru. Nejprve s využitím vztahu (11) zjistíme rovnici tečny. Dále určíme tečný bod a jelikož známe x= 2, není problémem si druhou souřadnici dopočítat.

$y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0.$

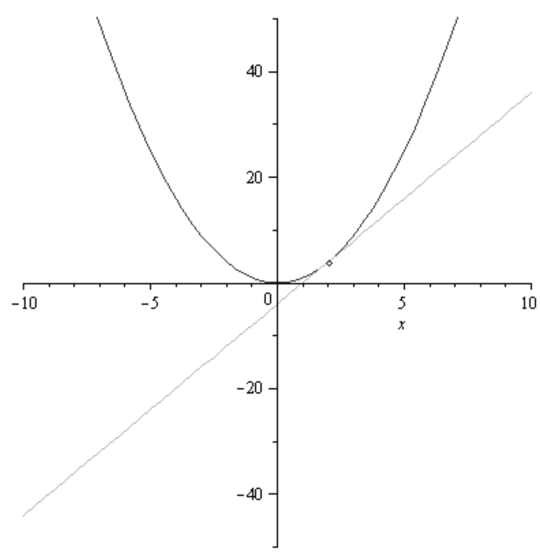
$y = 4\,(x - 2) + 4$

$\mathbf{y = 4\,x - 4}$

$T = [2, 2^2]$

$\mathbf{T = [2, 4]}$

```
with(plots) :
a := plot(x^2, x) :
b := plot(4·t − 4, t, color = green) :
c := pointplot([2, 4], color = black) : display({a, b, c}, view = [
    −10 ..10, −50 ..50]);
```



Obrázek 11 b

3. Vybrané druhy rovinných křivek

3. 1. Kružnice

Kružnice je množinou bodů v rovině, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost. Tuto vzdálenost nazýváme *poloměr kružnice*, obvykle je označován *r,* a bod S je *střed kružnice*.

Kružnice je často zaměňována s pojmem kruh. Kružnice je součástí kruhu společně s vnitřkem kružnice, tedy jde o množinu všech bodů které mají vzdálenost od daného bodu S rovnu nebo menší než je poloměr.

Kružnice je *kuželosečka*, tj. křivka získaná průnikem rotační kuželové plochy a roviny kolmé na osu rotace, která neprochází vrcholem kuželové plochy. Do skupiny kuželoseček patří dále elipsa, parabola, hyperbola.

Původ názvu kružnice, nebo-li circus pochází z řeckého slova označujícího ohnutí, otočení. Její existenci považuje lidstvo za samozřejmost a je známa po celou dobu zaznamenané historie, především z přírody, např. kruhy na vodě. Tvar kruhu mají nejznámější astronomické objekty – slunce, měsíc, planety. Své využití našla kružnice v technice v podobě kola, objev kola patří k nejvýznamnějším lidským objevům.

Základní vlastnosti kružnice, které jsme uvedli dříve, jsou *hladkost, uzavřenost, jednoduchost.*

Z těchto vlastností můžeme vydedukovat další poznatky. Například jde-li o křivku hladkou, jsme schopni v kterémkoliv jejím bodě sestrojit tečnu.

Důkaz o hladkosti křivky dostaneme derivací parametrických rovnic kružnice

$\varphi_1'(t) = (x_0 + r\cos(t))' = - r\sin(t)$, $\varphi_2'(t) = (y_0 + r\sin(t))' = r\cos(t)$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Předpokládáme $r > 0$, goniometrické funkce sinus a cosinus jsou spojité.

Uzavřenost kružnice plyne z rovnosti

$[x_0 + r\cos(0), y_0 + r\sin(0)] = [x_0 + r\cos(2\pi), y_0 + r\sin(2\pi)]$.

Jednoduchost nejlépe dokážeme nepřímo, když víme, že jednoduchá křivka se nesmí nikde protínat (mít dva body sobě rovny).

Nepřímý důkaz:

Předpokládejme, že kružnice není jednoduchá. Pak existují $t_1, t_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $t_1 \neq t_2$ a

$$x_0 + r\cos(t_1) = x_0 + r\cos(t_2),\ \ y_0 + r\sin(t_1) = y_0 + r\sin(t_2).$$

Je-li

$$x_0 + r\cos(t_1) = x_0 + r\cos(t_2),\ y_0 + r\sin(t_1) = y_0 + r\sin(t_2)$$

je $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ a $\sin(t_1) = \sin(t_2)$. To je na $\langle 0, 2\pi \rangle$ možné jen tak, že $t_1 = t_2$ a to je spor s předpokladem $t_1 \neq t_2$.. Není pravda, že kružnice není jednoduchá. Tedy kružnice je jednoduchá, protože třetí možnost neexistuje.

Parametrická rovnice kružnice

Parametrické vyjádření kružnice je dané soustavou

$$x = x_0 + r\ cos(t)$$
$$y = y_0 + r\ sin(t),$$

kde $r > 0$ je poloměr kružnice, uspořádaná dvojice $[x_0, y_0]$ udává souřadnice středu kružnice, tedy $S = [x_0, y_0]$, $t \in <0, 2\pi>$ je parametr.

Délka kružnice

Určení délky kružnice pomocí parametrických rovnic docílíme vztahem

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x_0 + r\cos(t))'^2 + (y_0 + r\sin(t))'^2}\, dt.$$

Při derivaci výrazů pro x a y parametrických rovnic kružnice při výpočtu její délky nám vypadnou hodnoty x_0 a y_0. Z toho vyplývá, že pro určení délky kružnice nejsou souřadnice středu kružnice podstatné. Do vzorce pro výpočet délky tak lze použít zjednodušené parametrické vyjádření

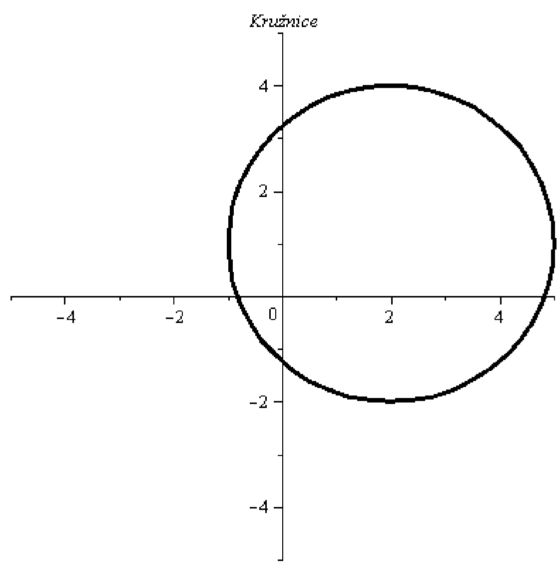
$$x = r\ cos(t)$$
$$y = r\ sin(t), \qquad \text{kde } t \in <0, 2\pi>.$$

Z předchozího tedy vyplývá, že délku kružnice pro $t \in <0,2\pi>$ určuje její poloměr r.

Kružnice a její délka v Maple

V systému Maple nakreslíme kružnici s využitím parametrických rovnic a určíme její délku. Zvolíme si souřadnice středu kružnice S = [2 , 1] a její poloměr r = 3.

$$plot\left(\left[x_0 + r\cdot cos(t),\, y_0 + r\cdot sin(t),\, t = 0\,..2\cdot \mathrm{Pi}\right], -5\,..5, -5\,..5, color = black\,,\, title = Kružnice\right);$$



Obrázek 12

$$delka\ \ kruznice = \int_0^{2\cdot\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(r\cdot cos(t)\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(r\cdot sin(t)\right)\right)^2}\, \mathrm{d}t;$$

$$delka\ \ kruznice\ = 6\,\pi$$

Tečna ke kružnici v Maple

Protože parametrické rovnice kružnice nelze použít v předdefinovaném příkazu systému Maple, musíme rovnici tečny spočítat. Mějme kružnici o středu [m,n] a poloměru *r*, konkrétní hodnoty převezmeme z předešlého příkladu. Sestrojíme tečnu ke kružnici postupně v bodě [m,n+r], [m+r,n] a [m+rcos(t_0), n+rsin(t_0)]. První dvě tečny, budou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Pro třetí tečnu zvolíme parametr t_2 = 0,5 a pomocí Maple dopočítáme přesné souřadnice.

$$m + r \cdot cos(0.5);$$

$$4.63274768($$

$$n + r \cdot \sin(0.5);$$

$$2.43827661($$

Tedy T_2 = [4, 633 ; 2, 438].

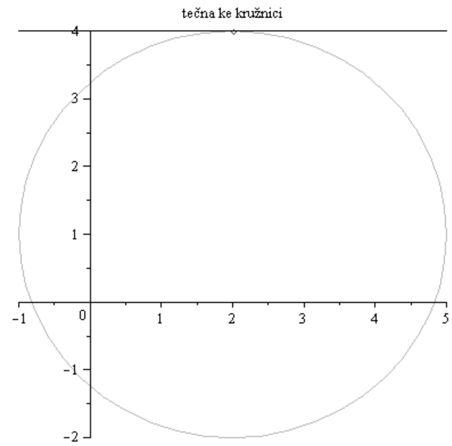
Abychom získali souřadnice prvních dvou tečných bodů (které jsme si zvolili výše) musí být parametr t_0 = 0, 5 Pi pro první tečnu a t_1 = 0 pro druhou.

Parametrické rovnice tečny ke kružnici jsou obecně dány vztahy

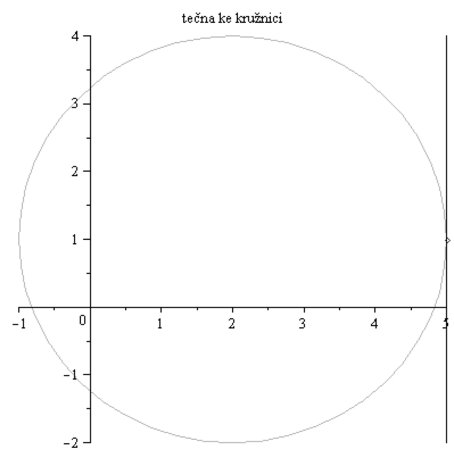
$$x_0 = m + r\cos(t_0) – s\, r \sin(t_0)$$

$$y_0 = n + r\sin(t_0) + s\, r \cos(t_0).$$

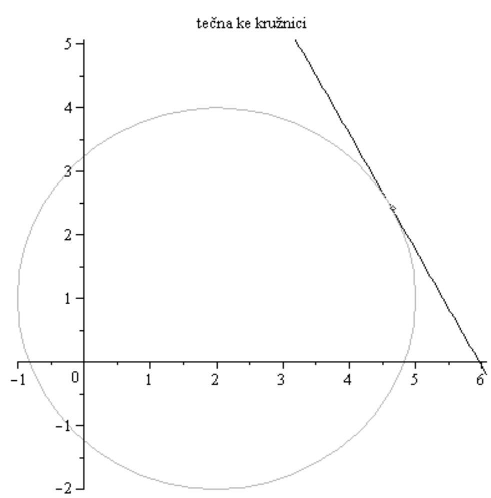
```
with(plots) :
a := plot([m + r· cos(x), n + r· sin(x), x = 0 ..2·Pi]) :
b := plot([m + r·cos(t0) − s· r·sin(t0), n + r·sin(t0) + s· r
     ·cos(t0), s =−1 ..1], color = yellow) :
c := pointplot([m + r· cos(t0), n + r· sin(t0)], color = green) :
     display({a, b, c}, title = "tečna ke kružnici");
```



Obrázek 13 a s $t_0 = 0.5\ \pi$



Obrázek 13 b s $t_1 = 0$

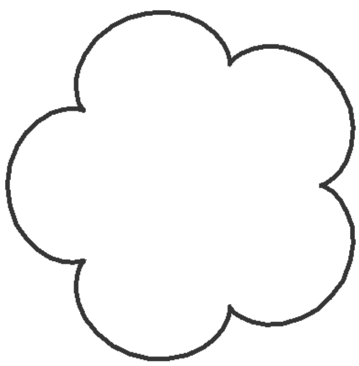


Obrázek 13 c s $t_2 = 0.5$

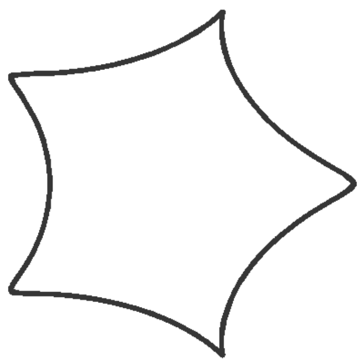
3. 2. Cykloidy

Cykloida je množina bodů, které jsou trajektorií bodu pevně spojeného s kružnicí, která se kutálí po přímce. Rozlišujeme tři druhy cykloid, a to prostou, prodlouženou a zkrácenou. Jde-li o prostou cykloidu, leží zvolený bod přímo na kružnici. Prodloužená říkáme cykloidě, jestliže daný bod se nachází vně kružnice a zkrácená, je-li tento bod uvnitř kružnice.

Cykloidy patří do skupiny křivek představujících cyklické pohyby. Do této skupiny patří i *epicykloida* a *hypocykloida*. Opisuje je bod zvolený na kružnici, která se pohybují po jiné kružnici ať už zvenku či zevnitř.



Obrázek 14 a) Epicykloida



Obrázek 14 b) Hypocykloida

Studium cykloid bylo v minulosti pro matematiky i fyziky velmi důležité. O tom svědčí zvučná jména, s tímto pojmem spjatá. Jde například o původce názvu cykloida Galileo Galilea či italského badatele Evangelistu Torriceliho. Její zkoumání dopomohlo ke zkonstruování prvních kyvadlových hodin, jejichž kyvadlo vykonává právě „cykloidní" pohyb.

Parametrické rovnice cykloidy

Budeme uvažovat cykloidu prostou (stejně jako v celé další práci), tedy bod určující trajektorii se nachází přímo na valící se kružnici. Cykloida je po částech hladká, otevřená i jednoduchá.

Nechť r je poloměr valící se kružnice a $t \in \mathrm{R}$ velikost úhlu odvalení, potom parametrické rovnice cykloidy jsou:

$$x = r\,(t - \sin(t))$$
$$y = r\,(1 - \cos(t))$$

Parametr t je definován na celém oboru reálných čísel, tudíž je jen na nás jak velký interval si zvolíme. Jen při volbě intervalu menšího než $\langle 0, 2\pi \rangle$, bychom nedosáhli otočení celé kružnice a neměli bychom ani jeden dílčí oblouk cykloidy. Další volba t je již v naší režii a pro graf cykloidy se nám s větším intervalem dostává delší křivky.

Délka cykloidy

Délku cykloidy danou parametricky určíme vztahem

$$l := \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(r\cdot(t - \sin(t)))\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(r\cdot(1 - \cos(t)))\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

kde r je poloměr valící se kružnice, a, b je interval parametru cykloidy.

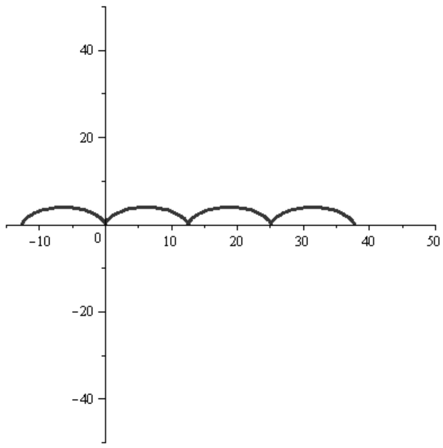
Délku cykloidy je závislá na poloměru a intervalu <*a, b*> , kde a, b jsou libovolná reálná čísla:

$$r := 2$$

$$x := 2\,t - 2\sin(t)$$

$$y := 2 - 2\cos(t)$$

$plot([x, y, t = -2 \cdot \mathrm{Pi} .. 6 \cdot \mathrm{Pi}], -15 .. 50, -50 .. 50)$



Obrázek 15

$$l := \int_{-2 \cdot \mathrm{Pi}}^{6 \cdot \mathrm{Pi}} \sqrt{\left(\frac{d}{d\,t}x\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,t}y\right)^2}\,dt$$

$$l := 64$$

Tečna k cykloidě v Maple

Zvolíme si parametr t_0 a pomocí programu Maple zjistíme tečný bod, parametrické zadání tečny a nakreslíme ji.

Tečný bod zadáme pomocí jedné jeho souřadnice a parametr t_0 vypočteme systémem Maple.

Tedy, chceme-li tečnu v bodě *y = 3:*

$volba\ y = solve(r - r \cdot \cos(t) = 3, t);$

$$volba\ y = \frac{2}{3}\pi$$

$$t0 := \frac{2}{3}\pi$$

$xk := 2\,t - 2\sin(t)$ $yk := 2 - 2\cos(t)$

$xt0 := 2.45673939$ $yt0 := 3.$

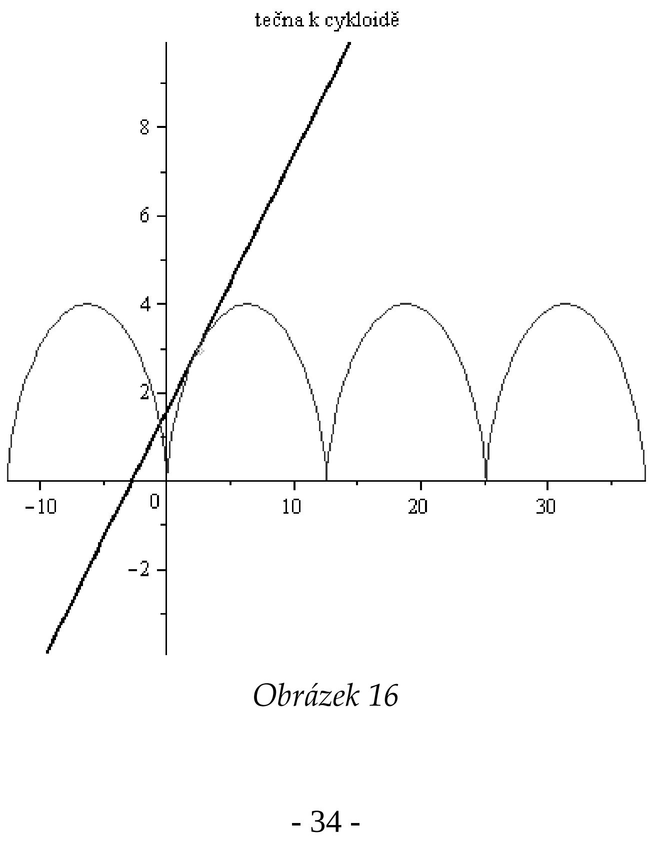
$dxk := 2 - 2\cos(t)$ $dyk := 2\sin(t)$

$dxt0 := 3.$ $dyt0 := 1.73205080$

$xt := 2.456739396 + 3.\,s$ $yt := 3. + 1.732050808\,s$

Uspořádaná dvojice [*xt0, yt0*] je souřadnice tečného bodu a *xt* a *yt* jsou parametrické rovnice tečny.

$with(plots):$
$g := plot([a, b, t = -2 \cdot \mathrm{Pi}..6 \cdot \mathrm{Pi}]):$
$h := plot([xt, yt, s = -4..4], color = yellow):$
$i := pointplot([xt0, yt0], color = green):$
$display(\{g, h, i\}, title = \text{"tečna k cykloidě"});$



Obrázek 16

3. 3. Archimédova spirála

Archimédova spirála je křivka určená trajektorií hmotného bodu vzdalujícího se stálou rychlostí po polopřímce od jejího počátku (pólu), který se nachází v počátku souřadnicových os, přičemž se polopřímka rovnoměrně otáčí kolem tohoto pólu. Jako jeden z prvních se touto křivkou zabýval a dal ji i své jméno před více než 2 000 lety Archimédes.

Při pohybu po Archimédově spirále vykonává bod dva nezávislé pohyby. Tato křivka tak zastupuje velkou škálu dalších spirál, lišících se např. poměrem rychlostí obou pohybů, druhem pohybů (rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený, zrychlený) aj. Důležitá je *logaritmická spirála*, jejíž poloměr roste exponenciálně, zajímavá je *hyperbolická spirála*, *Fermetova spirála* i jiné spirály.

V praktickém životě se, třeba nevědomky, se spirálami denně setkáváme. Tento pohyb vykonává i stonek rostliny plazící se okolo pevné tyče za sluncem. Nebo pes na výsuvném vodítku obíhající svého pána. Ve strojírenství je princip spirály použit u vrtáků, vrutů či šroubů. Znalost logaritmické spirály a jejích vlastností je důležitá v technice (různá ozubená kola apod.).

Polární rovnice Archimédovy spirály

Jak už je zmíněno dříve, v některých případech, nevyjímaje tento, je výhodné použít rovnici křivky v polárních souřadnicích.

Polární souřadnice Archimédovy spirály je

$$r = k\varphi,$$

kde *k je* kladné reálné číslo, φ úhel otáčení polopřímky, $\varphi \in$ R, *r* vzdálenost pohybujícího se bodu od počátku soustavy souřadnic.

Délka Archimédovy spirály

Délku Archimédovy spirály v polárních souřadnicích určíme vztahem

$$l := \int_a^b \sqrt{(k\cdot\varphi)^2 + \left(\frac{d}{dx}\,k\cdot\varphi\right)^2}\,d\varphi\,,$$

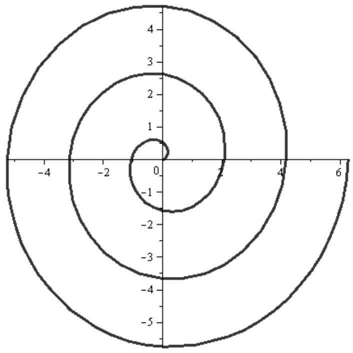
a, $b \in$ R, jsou hodnoty intervalu proměnné φ, $k \in R^+$.

Délka spirály je ovlivněna hodnotami těchto konstant a proměnné. Zvolíme-li si kupříkladu $k = 3$ a spirálu definujeme na intervalu <0, 2π> (*obrázek 17*), potom délka Archimédovy spirály pomocí výše zmíněné rovnice je

$$l := \int_0^{2\cdot \mathrm{Pi}} \sqrt{(3\cdot\varphi)^2 + \left(\frac{d}{dx}\,3\cdot\varphi\right)^2}\,d\varphi = evalf(\%)$$

$$l := 6\,\pi^2 = 59.2176264\text{:}$$

polarplot ([*x*, 3·*x*, *x* = 0 .. 2· Pi]);



Obrázek 17

Tečna k Archimédově spirále

Pro vyjádření rovnice tečny a jejího nakreslení použijeme předchozích hodnot, ale rovnici spirály vezmeme v parametrickém tvaru, tj. *x= t cos(3t)* a *y= t sin(3t)*.

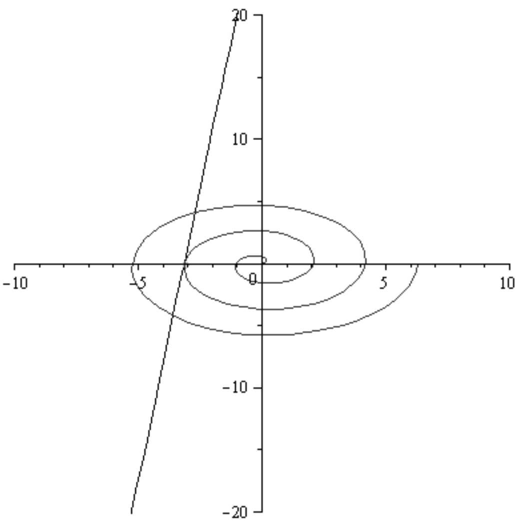
Stejným postupem jako u cykloidy si můžeme zvolit souřadnice tečného bodu a nakreslit tečnu ke křivce.

$t0 := \pi$
$x0 := -3.14159265$
$y0 := 0.$
$dx := \cos(3\,x) - 3\,x\,\sin(3\,x)$
$dy := \sin(3\,y) + 3\,y\,\cos(3\,y)$
$dx0 := -1.$
$dy0 := -9.42477796$
$xt := -3.141592654 - 1.\,s$
$yt := -9.424777962\,s$

kde

[x0, y0] jsou souřadnice tečného bodu, *xt* a *yt* jsou parametrické rovnice tečny s parametrem *s*.

$with(plots)$
$krivka1 := plot([x\cdot\cos(3\cdot x), x\cdot\sin(3\cdot x), x = 0..2\cdot \mathrm{Pi}]):$
$tecna1 := plot([xt, yt, s = -4..4], color = green):$
$bod1 := pointplot([x0, y0], color = blue, symbol = circle):$
$display(\{krivka1, tecna1, bod1\}, view = [-10..10, -20..20]);$

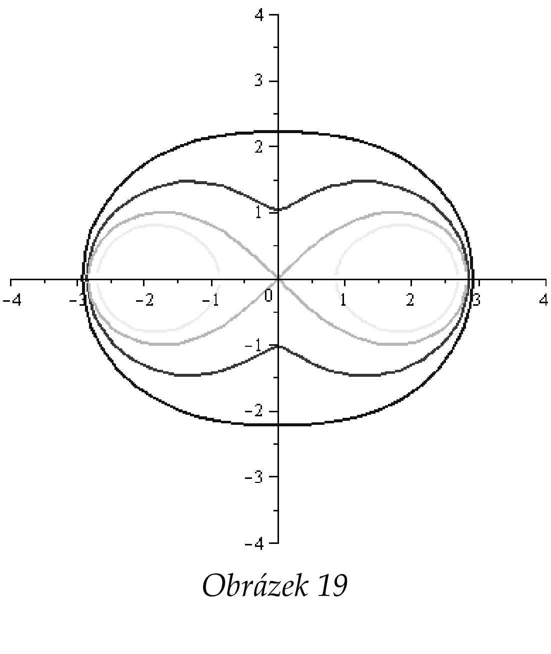


Obrázek 18

3. 4. Cassiniho ovály

Cassiniho ovál je množina bodů, které mají konstantní součin vzdáleností od dvou pevně daných bodů. Nese jméno francouzského astronoma a matematika Giovanniho Domenica Cassiniho, který se domníval, že po jedné z těchto křivek obíhá Země kolem Slunce.

Cassiniho ovály, mohou být křivky značně odlišné, na první pohled nemusí budit zdání jakékoliv souvislosti. Je-li např. součin vzdáleností od dvou pevně daných bodů menší než polovina jejich vzdáleností, dostaneme dvě nespojené křivky. Speciálním případem Cassiniho oválů je Bernoulliova lemniskáta, kde je součin vzdáleností bodu křivky od dvou pevně daných bodů roven polovině vzdálenosti pevných bodů. Obě křivky byly studovány nezávisle a jejich vztah byl prokázán až později.



Obrázek 19

Rovnice Cassiniho oválů v parametrickém tvaru

Rovnice Cassiniho oválu v parametrickém tvaru jsou:

$$x = \frac{\sqrt{M}}{2} \cdot \cos(t)$$
$$y = \frac{\sqrt{M}}{2} \cdot \sin(t)$$

kde $M := 2 \cdot a^2 \cdot \cos(2 \cdot t) + \sqrt{(-a^4 + c^4) + a^4 \cdot \cos(2 \cdot t)^2}$,

parametr $t \in (0, 2\pi>$,

a, c jsou libovolná reálná čísla, pro která platí $a < c$.

Délka a tečna Cassiniho křivky

Pro náš další postup, kde použijeme předešlé parametrické vyjádření Cassiniho křivky, zvolíme a = 1,9, c = 3,3 a parametr $t_0 = 2{,}5$. Pomocí Maple určíme tečný bod a parametrické rovnice tečny ke Cassiniho křivce.

$xt0 := -1.40903295$
$yt0 := 1.05257903$

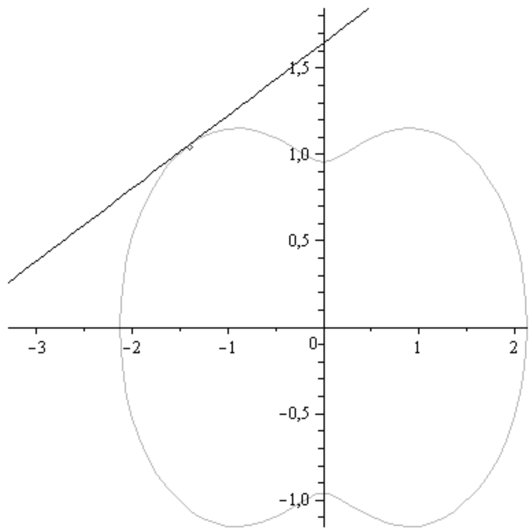
Tečný bod T = [xt0, yt0]

$dx0 := -1.88010238$
$xt := xt0 + dx0 \cdot s$
$xt := -1.409032952 - 1.880102382 s$

$dy0 := -.790854558$
$yt := yt0 + dy0 \cdot s$
$yt := 1.052579032 - 0.7908545580 s$

Parametrické rovnice tečny xt, yt s parametrem s.

$with(plots)$
$krivka := plot\left(\left[\frac{\sqrt{M}}{2} \cdot \cos(x), \frac{\sqrt{M}}{2} \cdot \sin(x), x = 0 .. 2 \cdot \mathrm{Pi}\right]\right) :$
$tecna := plot([xt, yt, s = -1 .. 1], color = black) :$
$bod := pointplot([xt0, yt0], color = green) :$
$display(\{krivka, tecna, bod\});$



Obrázek 20

Délku Cassiniho křivky vypočteme pro stejné hodnoty jako v případě její tečny. Prioritně pPro jednoduchost a přehlednost zápisu výrazů jsme použili substituci.

$$p1 := \frac{1}{2}\sqrt{7.22\cos(2\,t) + \sqrt{105.5600 + 13.0321\cos(2\,t)^2}}\,\cos(t)$$

$$p2 := \frac{1}{2}\sqrt{7.22\cos(2\,t) + \sqrt{105.5600 + 13.0321\cos(2\,t)^2}}\,\sin(t)$$

$$délka := evalf\left(\int_0^{2\cdot \mathrm{Pi}} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,p1\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,p2\right)^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$délka := 11.1980556$$

3. 5. Exponenciála

Exponenciála je grafem exponenciální funkce. Je to jedna z nejdůležitějších matematických funkcí s širokým využitím nejen v přírodních vědách. Společně s logaritmickou funkcí (funkcí inverzní k exponenciální), patří mezi základní elementární funkce.

Logaritmická funkce byla zkoumána již v 16. století, nejdříve se objevila v podobě logaritmických tabulek, které měly pomáhat zrychlovat a usnadňovat výpočty.

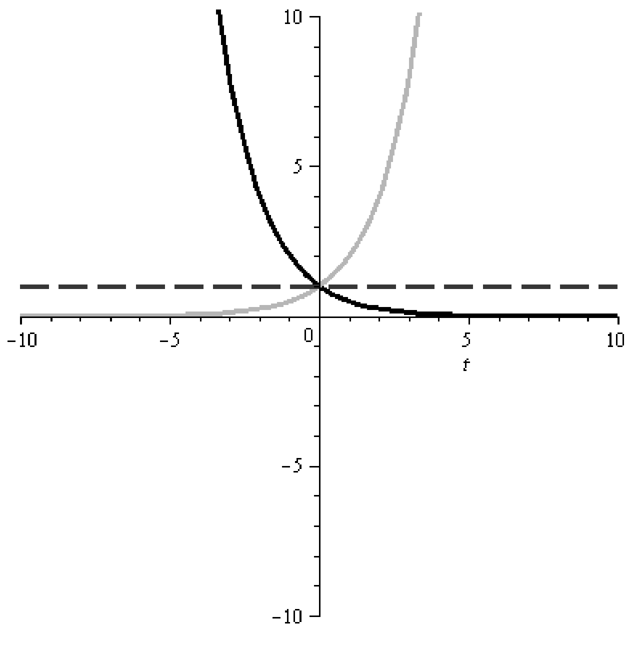
Rovnice exponenciály v explicitním tvaru

Vyjádření exponenciály v explicitním tvaru je velice známe. Tedy

$$y = a^x \ ,$$

kde a je kladné reálné číslo, pro které platí $a \neq 1$, $x \in R$, je libovolná proměnná.

Tvar exponenciály se s různou volbou čísla a mění. Jak už vyplývá z předchozí rovnice, je-li a rovno jedné (*obrázek 21, přerušovaná*), nejedná se o exponenciálu, nýbrž o přímku rovnoběžnou s osou x a procházející bodem $y = 1$. Pro a z intervalu (0, 1) je exponenciála klesající na celém svém definičním oboru (*obrázek 21, tmavá barva*). A je-li $a > 1$ je rostoucí (*obrázek 21, světlá barva*).



Obrázek 21

Délka a tečna exponenciály

Poněvadž je zadání exponenciály nejpřirozenější v explicitním tvaru, využijeme pro výpočet délky exponenciály explicitnější explicitní rovnici, což umožní využít předdefinované funkce programu Maple.

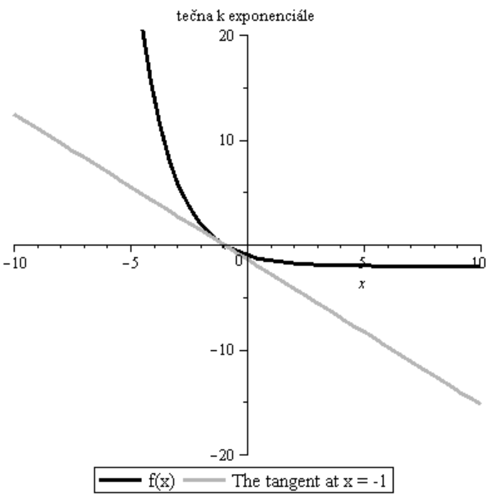
Mějme rovnici exponenciály $y = 0{,}5^X - 2$, potom rovnici tečny (yt) v bodě $x_0 = -1$ a její vykreslení společně s danou křivkou získáme pomocí Maple:

$with(Student[Calculus1]) :$

$Tangent(0.5^x - 2, x = -1);$

$-1.386294361x - 1.38629436$

$Tangent(0.5^x - 2, \mathrm{x} = -1, \mathrm{view} = [-10..10, -20..20], output = plot,$
$title = \text{"tečna k exponenciále"});$



Obrázek 22

Rovnici tečny můžeme zjistit i výpočtem ze vztahu $y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0$. Pro kontrolu tedy můžeme dosadit a určit rovnici tečny k exponenciále o rovnici

$y = 0{,}5^X - 2$ v bodě $x_0 = -1$.

$y_0 = 0{,}5^{-1} - 2 = 0$

$f'(x_0) = -0.6931471806\ 0.5^{-1} = -1.386294361$

$yt = -1.386294361 \cdot x - 1.386294361$

Pro výpočet délky exponenciály z předchozího obrázku s tečnou zvolíme meze <–5,10>.

$$l := \int_{-5}^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\left(0.5^{x} - 2\right)\right)^{2}}\, dx$$

$l := 42.0535555$

3. 6. Hippiova kvadratrix

Hippiova kvadratrix je křivka, daná množinou bodů P. Uvažujeme-li čtverec ABCD, rotaci úsečky AB kolem osy a až do AD a pohyb úsečky BC směrem k AD. Dále předpokládejme konstantní rychlost obou pohybů a jejich počátek ve stejnou dobu. Bod P je dán jako průsečík úseček AB a BC.

Jde o jednu z prvních zkoumaných křivek, po přímce a kružnici, se kterými se můžeme v matematice setkat. Jako první jí popsal v pátém století před naším letopočtem Hippias z Elis, podle kterého se také může nazývat.

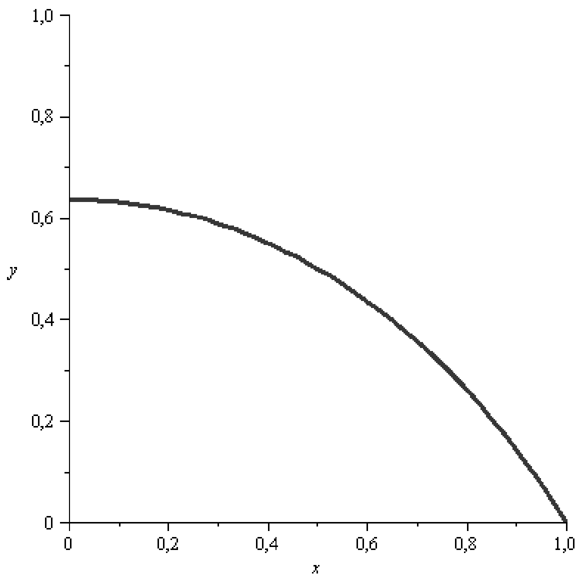
Pro dřívější matematiky byla tato křivka klíčová pro řešení proslulých problémů. Jedním z nich je bezesporu snaha rozdělit úhel na tři stejné části pomocí kruhů a přímek (kružítka a pravítek) – trisekce úhlu. Jiným problémem byla kvadratura kruhu, problém spočíval v hledání čtverce, který by měl stejný obsah jako daný kruh. Odtud označení křivky jako kvadratrix.

Rovnice Hippiovy křivky

Vyjádříme-li rovnici této křivky v explicitním tvaru, potom dostaneme výraz

$$y = x \cdot \cot\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot x}{2 \cdot a}\right),$$

kde a je kladné číslo, určující délku strany čtverce,
x je proměnná.



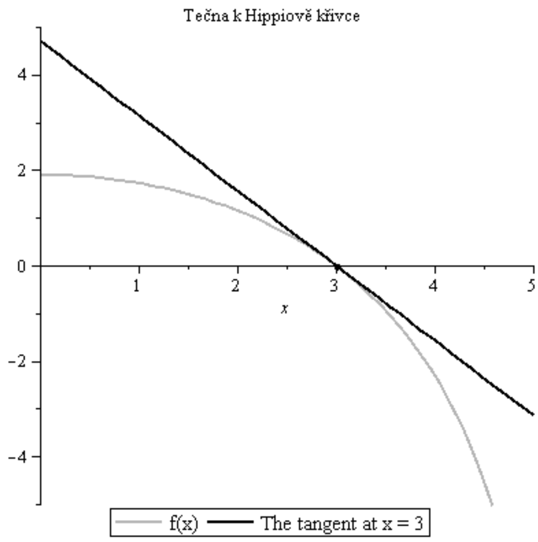
Obrázek 23

Délka a tečna k Hippiově křivce

Obdobně jako u exponenciály se pro jednoduchost zaměříme na explicitní vyjádření této křivky, jak v případě výpočtu délky, tak v případě výpočtu tečny, kterou sestrojíme pomocí Maple a jeho předdefinované funkce pro tečnu.

Tečnu k dané křivce určíme v bodě T= [3, 0]:

$$with(Student[Calculus1]):$$
$$Tangent\left(\left(x \cdot \cot\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot x}{2 \cdot a}\right)\right), x = 3\right);$$
$$-\frac{1}{2}\pi x + \frac{3}{2}\pi$$
$$Tangent\left(\left(x \cdot \cot\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot x}{2 \cdot a}\right)\right), x = 3, output = plot, title = \text{"Tečna k Hippiově křivce"}, view = [0..5, -5..5]\right);$$



Obrázek 24

Abychom mohli délku Hippiova kvadratrixu porovnat, vypočteme ji pro stejnou křivku jako předešle a definujeme ji na intervalu <0, 5>.

$$délka := \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\left(x \cdot \cot\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot x}{2 \cdot a}\right)\right)\right)^2}\, dx$$

$$délka := 12.67950928$$

Závěr

V práci jsem se zabýval studiem rovinných křivek, jejich grafů, tečen a délek s využitím systému Maple.

Seznámil jsem se s křivkami, které nejsou běžně známé, např. Cassiniho ovály a Hippiova kvadratrix, které však hrály důležitou roli v rozvoji lidského poznání. Důkladněji jsem poznal možnosti programu Maple, který byl základním nástrojem pro moji práci. Neméně důležitá je pro mě i zkušenost, kterou jsem nabyl při práci s matematickým textem. Setkal jsem se s různými problémy, které bylo potřeba řešit.

Určitým úskalím při psaní tohoto textu byla dostupnost potřebných informací. Nesnadná práce byla s vhodností a přesností nalezených vzorců pro zpracování v systému Maple, vztahy pro jednotlivé křivky nebyli vždy použitelné k tvorbě jejich grafů v tomto systému.

Patrně největší problém vznikl při konstrukci tečny ke křivce. Program Maple má ve svém portfoliu příkazů možnost vykreslení tečny ke křivce zadané pouze v explicitním tvaru, přičemž tato rovnice není vždy dosažitelná. Toto "omezení" jsem zjistil až při tvoření této práce.

Doufám, že nebudu jediný, komu bude tento text užitečný a prospěšný, ať už se jedná o studium či praktické využití.

Seznam použité literatury

[1] Bartsch H. J.: *Matematické vzorce*. 3. vydání, Mladá fronta, Praha, 2002.

[2] Buchar J.: *Úvod do programového souboru Maple V*. Vysoká škola zemědělská v Brně, 1994.

[3] Hřebíček J., Kohout J.: *Úvod do systému Maple*. Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[4] Jarešová M., Volf I.: *Matematika křivek*. Studijní text pro řešitele FO.

[5] Kolář I., Pospíšilová L.: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Masarykova univerzita, Brno, 2007 (elektronická skripta).

[6] Lomtatidze L.: *Historický vývoj pojmu křivka*. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2006

[7] Rektorys K. a spol.: *Přehled užité matematiky*. SNTL, Praha, 1988.

[8] Škrášek J., Tichý Z.: *Základy aplikované matematiky I*. Nakladatelství technické literatury – SNTL, Praha, 1983.

Internetové odkazy

[9] Délka oblouku křivky, http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_3_2.pdf [20.4. 2011]

[10] Křivky, http://dagles.klenot.cz/rihova/krivky.pdf [20.4.2011]

[11] Křivky v analytické geometrii (1), http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=507 [20. 4. 2011]