UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Soňa Kořínková

Matematické konstanty

Olomouc 2020

vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma Matematické konstanty vypracovala samostatně, s využitím pouze citovaných literárních pramenů.

V Olomouci dne Soňa Kořínková

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala panu Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za odborné vedení, jeho cenné rady a připomínky, kterými přispěl k vypracování této bakalářské práce.

Obsah

1 Úvod

Pozoruji ve vesmíru určitý řád a matematika je jedním ze způsobů, jak jej zviditelnit.
MAY SARTONOVÁ (1912 – 1995)

S čísly se prakticky setkáváme na každém kroku, ačkoliv nikdo přesně neví, kdy lidé začali počítat, předpokládá se, že se tato potřeba vyvinula ke zvládání běžných každodenních potřeb. Dnešní dobu si však bez čísel nedovedeme ani představit, neboť provází náš život prakticky na každém kroku. Většina čísel se nevyznačuje něčím zvláštním, výjimečným či snad jedinečným, avšak vyskytují se čísla, která mají v matematice a nejen v ní zásadní význam. Tato čísla mají specifické označení a také název, který většinou získaly po svých objevitelích. Mezi tato specifická čísla patří bezesporu Ludolfovo číslo π, které můžeme nalézt ve vzorci pro výpočet obvodu kruhu. Dalším významným a známým číslem je Eulerovo číslo e, jenž tvoří základ přirozených logaritmů a v neposlední řadě je také nutné zmínit poměrně méně známé, avšak významné zlaté číslo φ, někdy též označované jako zlatý řez. Toto číslo označuje specifický poměr mezi celkem a jeho částmi.

Cílem mé bakalářské práce je proniknout do problematiky vybraných matematických konstant, shrnout jejich historii, vlastnosti a seznámit s touto problematikou také čtenáře, pro které může být daná problematika doposud neznámá. V průběhu našeho základního vzdělávání se s danými konstantami, vyjma konstanty π, prakticky nesetkáme. Právě díky této určité „záhadnosti“ a neznámosti jsem se pro toto téma rozhodla.

Tato práce je rozdělena do tří velkých celků. První z nich je věnován právě nejznámější konstantě π, neboť právě s touto konstantou se setkávají žáci již na základních školách. V úvodní části tohoto celku jsou shrnuty první zmínky o této konstantě a také nejstarší metody výpočtu. Následně je popsána historie π a v neposlední řadě také iracionalita tohoto čísla.

Druhý celek této práce je věnován Eulerově číslu e. Úvodní část celku se opět věnuje historii a následně se práce zabývá definováním dané konstanty. Velký prostor je zde také věnován vlastnostem Eulerova čísla a to včetně důkazu iracionality čísla e. Poslední podkapitola se věnuje Eulerově identitě, která je považována za nejkrásnější rovnici světa, ve které dochází ke spojení pěti nejdůležitějších a nejznámějších matematických konstant.

Třetí celek této práce se věnuje tzv. zlatému číslu φ, známému spíše jako zlatý řez. Jedná se o velmi významnou konstantu, se kterou se bohužel setkáváme při studiu až na vysoké škole, i když by nebyl problém implementovat některé poznatky o této konstantě již do učiva základní školy. První část je tedy věnována historii zlatého řezu, která sahá až do starověku. Následně jsou v kapitole zařazeny definice určující hodnotu čísla φ a také jeho vlastnosti. Poměrně rozsáhle se v této kapitole věnujeme také konstrukci zlatého řezu a rovinným útvarům, ve kterých je možné zlatý řez nalézt. Poslední podkapitola zlatého řezu je pak věnována Fibonacciho posloupnosti a jejímu vztahu k φ.

2 Ludolfovo číslo, π

Ludolfovo číslo je jedna z mála matematických konstant, s níž se žáci setkávají již na základních školách a znají její hodnotu, která je ve školách uváděna jen na dvě desetinná čísla jako 3,14. Číslo π nelze vyjádřit zlomkem a má nekonečný desetinný rozvoj, který je neperiodický. Číslo π není možné vyjádřit jako podíl celých čísel a je tedy řazeno do skupiny čísel iracionálních. A v neposlední řadě je toto číslo označováno jako číslo transcendentní, tedy takové iracionální číslo, které není kořenem žádné algebraické rovnice.

Konstanta π je pojmenovaná po holandském matematikovi Ludolphovi Van Ceulenovi, který velkou část svého života trávil vyčíslením přesné číselné hodnoty čísla π (Beckmann, 1998).

2.1 První zmínky o π

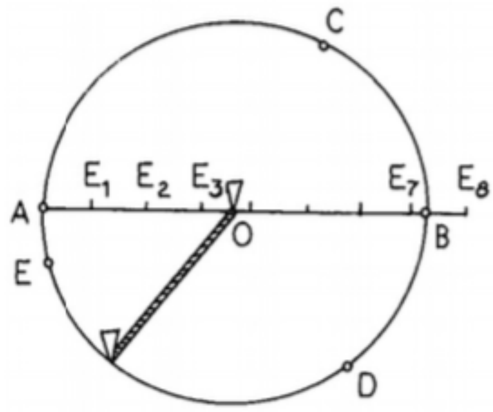
Uplynulo již milion let, kdy se člověk poprvé objevil na planetě Zemi. Během svého vývoje se postupně naučil poznávat tvary a směry, vyrábět a používat nástroje a naučil se také používat pojmy jako velikost či číslo. V neposlední řadě si začal uvědomovat, že existují vztahy mezi určitými veličinami. Důkazem, že člověk určité předměty porovnával či měřil, slouží například vroubkovaná hůl nalezená ve Věstonicích na Moravě, která pochází z doby kamenné (Beckmann, 1998).

Obrázek 1: Vroubkovaná hůl nalezená ve Věstonicích na Moravě

První písemné zmínky o matematické konstantě π pochází z období okolo 2000 let před n. l. Již v této době lidé začali chápat význam této konstanty a získali její přibližnou hodnotu. Aby ale byli schopni dojít k takovým závěrů, muselo tomu nutně předcházet řada objevů. Lidé se nejprve museli naučit počítat do dvou, museli si osvojit pojmy velikostí, kdy byli schopni rozlišovat malé stromy a velké stromy, těžké kameny, těžší kameny a velmi těžké kameny. Začali si uvědomovat, že existují určité vztahy například mezi velikostí předmětů a jejich hmotností čí vztahy mezi stářím stromu a jeho výškou. A co víc, právě mezi těmito vztahy nemohli přehlédnout ten nejdůležitější a to ten, že čím větší je kruh „napříč“ tím je pak delší „kolem“ (Beckmann, 1998). Lidé postupnými úvahami, zkušeností, uvažováním došli až k pojmu proporcionality (úměrnosti), kdy se naučili uvědomovat si vztahy mezi dvojicemi veličin, tedy je-li jedna z nich zvětšena či zmenšena např. dvakrát či třikrát, pak druhá veličina se též zvětší či zmenší např. dvakrát či třikrát. Toto uvažování však vedlo k závěru, že není důležité, jak se dvě úměrné veličiny mění, jejich poměr však zůstává stejný (Beckmann, 1998). Takové zjištění ale bylo velmi blízko k určení konstanty π, kdy „okolo“ (obvod) a „napříč“ (průměr) kruhu jsou úměrné veličiny, pak obvod : průměr = konstanta pro všechny kruhy. Tento poměr je označován řeckým písmenem π (pí) teprve od 18. století n. l. (Beckmann, 1998).

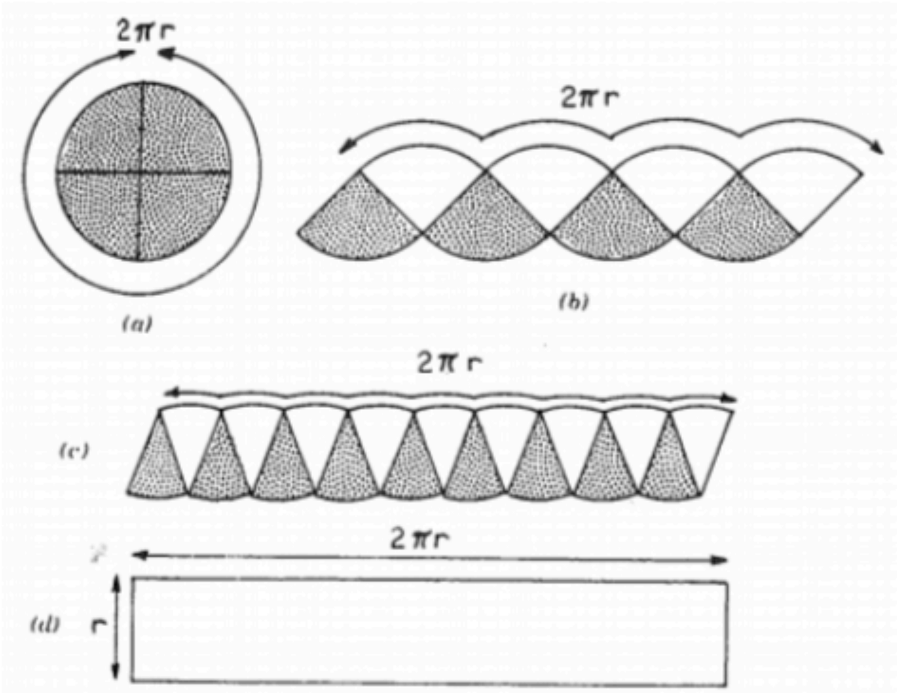
2.2 Nejstarší metody výpočtu π

Jak Egypťané, tak také Babyloňané se okolo roku 2000 před n. l. zajímaly nejen o význam konstanty π, ale již v této době jim byla i známa přibližná hodnota π. Egypťané tuto hodnotu určili jako $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Babyloňané dospěli k hodnotě $\pi = \frac{31}{8}$. Jak byly schopny oba tyto národy poměrně přesně určit hodnotu π, však není dodnes zcela známo. Domníváme se, že ke stanovení dané hodnoty využili kůly a provazy, a to tak, že jeden kůl zapíchli do písku a s pomocí druhého kůlu připevněného provazem k prvnímu nakreslili kruh. Následně použili delší provaz, který upevnili v libovolném bodě na kružnici (bod A), vedli jej přes střed (bod O) až protnul tento provaz kružnici v bodě (bod B). Na provaze označili délku AB, tedy průměr kruhu, který pokládali do kruhové rýhy v písku od bodu A do bodu C (pokládali průměr podél rýhy jednou), z bodu C do bodu D a z bodu D k bodu A, kdy ale zjistili, že délka provazu do bodu A nedosahuje (bod E). Zjistili tedy, že průměr kruhu se vejde podél obvodu třikrát a „kousek“ (Beckmann, 1998).



Obrázek 2: Měření čísla π *v písku Nilu*

Také starověké národy měly svá pravidla, jak vypočítat obsah plochy kruhu, kdy hodnota π hrála významnou roli, ale ani zde nevíme, jak je odvodily. Již od základní školy víme, že obsah plochy kruhu se vypočítá ze vztahu $S = \pi r^2$, kde r je jeho poloměr. Zajímavé však je, jak na výpočet tohoto vztahu přišli lidé ještě před znalostí integrálního počtu. Předpokládáme, že k tomu došlo tzv. metodou přeuspořádání. Rozdělíme si kruh na čtyři kvadranty jako na obrázku (3a) a uspořádáme je jako na obrázku (3b). Potom vyplníme prostor mezi segmenty čtyřmi stejně velkými kvadranty. Obrys vzniklého kouzelného obrazce připomíná rovnoběžník. Délka obrazce měřená podél kruhových úseků se rovná obvodu původního kruhu 2πr. S jistotou můžeme říci, že velikost plochy obrazce je přesně dvojnásobkem obsahu plochy původního kruhu. Jestliže nyní kruh rozdělíme ne na čtyři, ale na mnoho segmentů, náš kvazirovnoběžník (3c) se podobá rovnoběžníku mnohem více a obsah plochy kruhu je přesně roven polovině obsahu plochy tohoto kvazirovnoběžníku (3c). Budeme-li takto pokračovat a dělit původní kruh na stále více segmentů, strana tvořená malými obloučky se stane nerozlišitelnou od úsečky a kvazirovnoběžník se změní ve skutečný rovnoběžník – obdélník se stranami (2πr) a r. Obsah plochy kruhu je polovina obsahu plochy obdélníku, tj. πr^2 (Beckmann, 1998).



Obrázek 3: Metoda přeuspořádání

2.3 Historie čísla π

2.3.1 Mezopotámie

Mezopotámie, území nacházející se mezi řekami Eufrat a Tigris, je z hlediska matematiky a historie čísla π poměrně složitá, avšak babylonská matematika je považovaná za jednu z nejrozvinutějších. Jako důkaz matematické pokročilosti svědčí nález hliněné tabulky v roce 1936, která byla nalezena přibližně 200 mil od Babylonu.

Obrázek 4: Hliněná destička nalezená v roce 1936

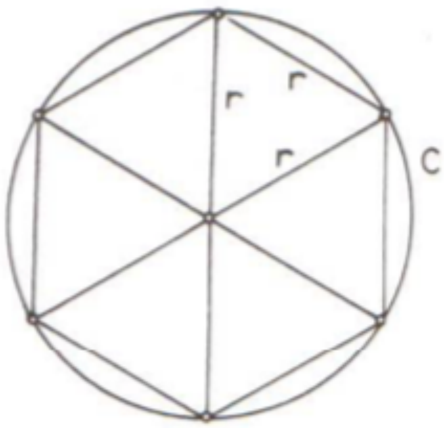
Na této destičce je věnována pozornost různým geometrickým útvarům a stanovuje, že poměr obvodu pravidelného šestiúhelníku k délce opsané kružnice je $\frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$. Dále pak uvádí vztah mezi pravidelným šestiúhelníkem a délkou opsané kružnice C, což Babyloňany přivedlo k myšlence, že kruh je možné rozdělit na 360 dílů. Dále věděli, že $6r = C$, tedy že $\frac{6r}{C} = 1$, kdy r značí poloměr kružnice opsané šestiúhelníku a C je její délka (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003). Pokud nyní definujeme π jako $\pi = \frac{C}{2r}$, pak dostaneme:

$$\frac{6r}{C} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$$

$$\frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2},$$

a tedy

$$\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125.$$



Obrázek 5: Babylonská hodnota π

2.3.2 Egypt

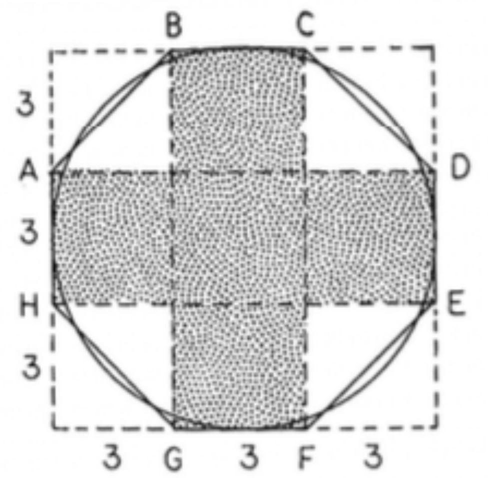
Velkou roli v oblasti matematiky hraje bezpochyby Egypt. Jeho matematika je známa více než matematika jiných národů a to zejména proto, že egyptské hieroglyfy byly rozluštěny dříve než ostatní. Jedním z takto významných dokumentů, a zároveň nejstarším matematickým dokumentem vůbec, je řazen papyrusový svitek označovaný jako Rhindův papyrus nebo také Ahmesův papyrus, který byl sepsán okolo roku 1650 před n. l. Na Ahmesově papyru je sepsáno celkem 84 úloh s návody a řešením (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003).

Obrázek 6: Rhindův papyrus

Vzhledem k tématu této bakalářské práce se zde zaměříme na úlohu č. 50. Ahmes zde předpokládá, že obsah plochy kruhu o průměru 9 jednotek je stejná jako obsah plochy čtverce se stranou dlouhou 8 jednotek. Pokud vyjdeme ze vzorce $S = \pi r^2$, pak dostáváme $\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2$ a tedy egyptská hodnota π je $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong 3{,}16049$. Postup, kterým Egypťané dospěli k dříve uvedené hodnotě čísla π, popisuje Ahmes v úloze č. 48 (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003).

Dle Beckmanna (1998) Ahmes vytváří (nepravidelný) osmiúhelník tak, že rozděluje strany čtverce o délce 9 jednotek na tři části a vytíná trojúhelníky v rozích. Plocha osmiúhelníku ABCDEFGH se příliš neliší od plochy kruhu vepsaného do čtverce a její obsah se rovná obsahu plochy pěti vyšrafovaných čtverců, z nichž každý má obsah 9 plošných jednotek, plus čtyř trojúhelníků každého s obsahem $\frac{41}{2}$ plošných jednotek. To je dohromady 63 plošných jednotek, což je blízké 64 neboli 8^2. Takže obsah plochy kruhu s průměrem 9 je přibližně rovna 64 plošným jednotkám, tj. obsahu plochy čtverce o straně 8, což jako dříve povede k hodnotě

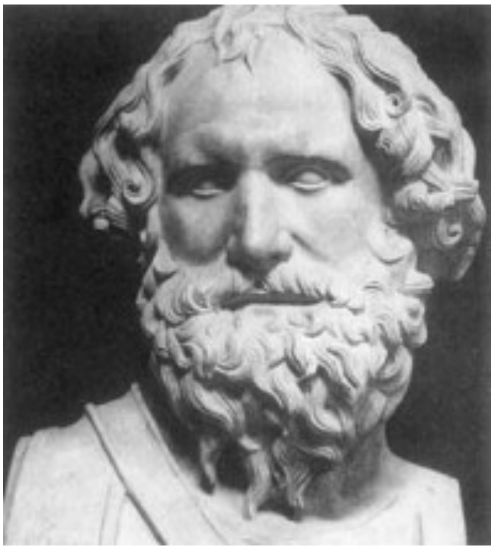
$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2.$$



Obrázek 7: Určení hodnoty čísla π v Egyptě

2.3.3 Starověk – Archimédes

Archimédes se narodil okolo roku 287 před n. l. v Syrakusách a je dodnes považován za významného matematika, fyzika a mechanika. Studoval na univerzitě v Alexandrii buď u přímých nástupců Euklida či u něj samotného. Archimédes se také řadí mezi prvního vědeckého inženýra, neboť hledal obecné principy a aplikoval je na speciální inženýrské problémy, například použití principu páky ve válečných strojích je velmi známé. Mimo to také použil tohoto principu i k určení objemu segmentu koule v metodě využívající rovnováhu (Bečvář, Štoll 2005). Také jeho objevy v oblasti matematiky nebyly zanedbatelné, definoval spirálu, která se dnes již označuje jako Archimédova spirála a v neposlední řadě určil vzorce pro výpočet objemů nejrůznějších těles (Kolman, 1968).

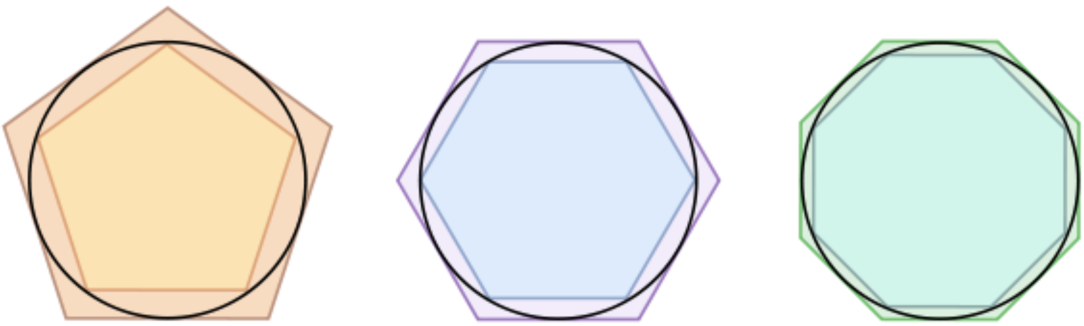


Obrázek 8: Archimedes

A v neposlední řadě to byl právě Archimédes, kdo jako první přišel na metodu výpočtu π s libovolnou přesností. Tato metoda je založena na faktu, že obvod pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kruhu je menší než obvod tohoto kruhu a zároveň je obvod tohoto kruhu menší než obvod mnohoúhelníku, do něhož je vepsán. Jak uvádí Beckmann (1998, s. 54): *„Zavedeme-li n dosti velké, budou se oba obvody mnohoúhelníků blížit obvodu kruhu s libovolnou přesností, jeden zdola, druhý shora. Archimedes začal od šestiúhelníku a pokračoval tak, že zdvojoval počet stran, až dospěl k mnohoúhelníku s 96 stranami, což dávalo*

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

nebo v desetinném záznamu $3{,}14084 < \pi < 3{,}142858$.*“*



Obrázek 9: Archimedova metoda výpočtu hodnoty π pomocí vepsaných a opsaných pravidelných n-úhelníků

Jak můžeme vidět, tento odhad nám připomíná hodnotu čísla π. Ačkoliv výpočet pomocí Archimédovy metody byl poměrně zdlouhavý, jednalo se o revoluční objev dané doby, který ovlivnil řadu matematiků (Beckmann, 1998).

2.3.4 François Viète (1540-1603)

François Viète byl významný francouzský matematik žijící v letech 1540-1603. Narodil se ve Fontenay-le-Comte v rodině právníků a na přání rodičů vystudoval právo na univerzitě v Poitiers. Viète zavedl do matematické terminologie řadu nových slov, jako například negativní či koeficient, dosáhl také důležitých výsledků v aritmetice, algebře, trigonometrii i geometrii (O'Connor, Robertson, 2019).

Obrázek 10: François Viète

Viète se řadil k posledním matematiků, kteří byli stále ovlivňováni Archimédovou metodou výpočtu π pomocí mnohoúhelníků. Jeho metoda spočívala v tom, že porovnával obsah plochy mnohoúhelníku s *n* stranami k obsahu plochy mnohoúhelníku s *2n* stranami. Na rozdíl od Archiméda svůj postup začal již od čtverce nikoliv od šestiúhelníku. Jak uvádí Beckmann (1998, s. 78): „*Plocha n-úhelníku je A(n) = n-krát plocha trojúhelníku OAB,*

$$= \frac{1}{2} n\, r^2 \sin 2\beta,$$

$$= nr^2 cos\beta sin\beta,$$

a podobně

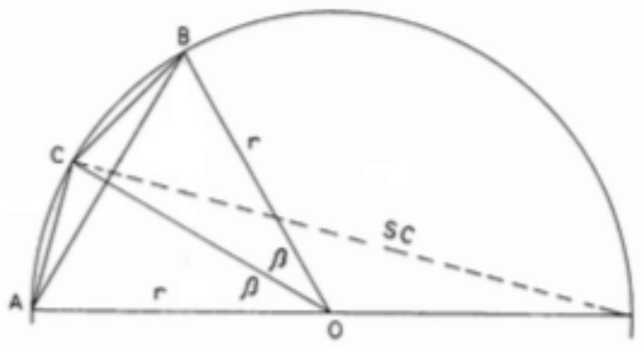
$$A(2n) = nr^2 sin\beta,$$

vyplývá tedy

$$A(n)/\,A(2n) \ = cos\beta,$$

a jestliže zdvojíme počet stran mnohoúhelníku, máme

$$\frac{A(n)}{A(4n)} = \ \frac{A(n)}{A(2n)} \times \frac{A(2n)}{A(2^2n)} = cos\beta \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)."$$



Obrázek 11: Učení hodnoty π Viètovou metodou

Jestliže budeme postupně zdvojovat počet stran mnohoúhelníku, dostaneme:

$$\frac{A(n)}{A(2^kn)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \times \frac{A(2n)}{A(4n)} \times \dots \times \frac{A(2^{k-1}n)}{A(2^kn)}.$$

Když se k blíží k nekonečnu, plocha mnohoúhelníku s 2^k stranami je nerozlišitelná od plochy kruhu, tedy

$$\lim_{k\to\infty} A(\,2^kn) \,=\, \pi r^2.$$

Po dosazení dostáváme

$$\pi = \frac{1/2nsin2\beta}{cos\beta \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2^3}\right) \dots}.$$

Viète zvolil za počátek čtverec, takže $n = 4, \beta = 45°, \cos\beta = \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a pomocí vzorce pro poloviční úhel nakonec dostaneme

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{1}/2 \times \sqrt{(1/2 + 1/2\sqrt{1/2})} \times \sqrt{[1/2 + 1/2\sqrt{(1/2 + 1/2\sqrt{1/2})}]} \times \dots}$$

Tento výraz byl následně roku 1593 publikován v díle *Variorum de rebus mathematicis responsorium liber VIII* (Různé matematické problémy, sv. 8). Pro vyčíslení hodnoty π ale

Viète nakonec svůj vzorec nepoužil. K výpočtu π na 9 desetinných míst využil opět Archimedovy metody tentokrát však pro mnohoúhelník s 393216-ti stranami a číslo π určil v rozmezí 3,1415926535 a 3,1415926537 (Beckmann, 1998).

2.3.5 Ludolph van Ceulen (1540-1610)

Ludolph van Ceulen byl holandský matematik, který se narodil 28. 1. 1540 v Hildesheimu v Německu, ale stejně jako mnoho dalších Němců emigroval před katolickým útlakem do Nizozemska. Van Cuelen byl velmi nadaným a talentovaným matematikem, i když se mu díky chudým poměrům v rodině dostalo pouze základního vzdělání (O'Connor, Robertson, 2019).

Obrázek 12: Ludolph Van Ceulen

Velkou část svého života trávil počítáním číselné hodnoty čísla π, přičemž využíval výhradně Archimédovu metodu mnohoúhelníků. V roce 1596 ve svém článku *Van den Circkel* (O kruhu) informoval, že pro výpočet čísla π použil mnohoúhelník se 60×2^{29} stranami, což poskytlo hodnotu π s přesností na 20 desetinných míst. V jeho dalším díle *De Aritmertische en Geometrische fondamenten*, které bylo publikováno až po jeho smrti v roce 1615 jeho ženou, udává hodnotu čísla π s přesností na 32 míst a dle Snelliovy zprávy z roku 1621 hodnotu π vyjádřil ještě o další tři desetinná místa. Jeho snaha o přesné vyčíslení hodnoty čísla π učinila na Němce takový dojem, že začali číslo π nazývat Ludolfovým číslem (Beckmann, 1998).

2.3.6 John Wallis (1616-1703)

John Wallis byl anglický matematik, který v roce 1655 ve svém díle *Arithmetica infinitorum* vyjádřil π jako nekonečný součin. Na rozdíl od Vièta byl ale prvním v historii, jehož nekonečná řada obsahovala pouze racionální čísla. Vzorec uvedený Wallisem ve tvaru

$$\pi = 2\frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}$$

je velkým mezníkem v historii čísla π (Fuchs, 2001).

Obrázek 13: John Wallis

2.3.7 James Gregory (1638-1675)

James Gregory byl skotský matematik a astronom, prvotní studium matematiky zahájil na univerzitě v Aberdeenu a později v Itálii. Gregory se zabýval problémy, které značně předbíhaly jeho dobu. Ve svém díle *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Správná kvadratura kruhu a hyperboly), které publikoval v roce 1667 v Padově, uvedl základní myšlenku o rozdílu mezi algebraickými a transcendentálními funkcemi a pokusil se zde také dokázat transcendenci π (O'Connor, Robertson, 2019).

Obrázek 14: James Gregory

Pro historii π je velmi důležitý objev řady pro $arctg\,x$, která je označovaná jako Gregoryho řada. Gregory zjistil, že obsah plochy pod křivkou$1/(1+x^2)$ v intervalu $(0,x)$ je $arctg\,x$. Gregory následně procesem dlouhého dělení v integrandu našel řadu

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Následně položil $x = 1$. Protože $arctg(1) = \pi/4$, pak

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

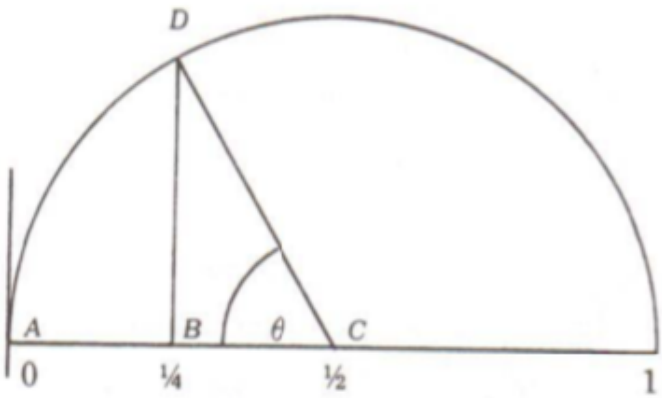
Gregoryho řada, objevená v roce 1671, je první nekonečnou řadou nalezenou pro vyjádření π. Tato řada, ačkoliv je velmi působivá, nebývá vzhledem k příliš pomalé konvergenci využívána v numerických výpočtech (Kvasz, 1994).

2.3.8 Isaac Newton (1643-1727)

Anglický matematik, fyzik, astronom, filozof a teolog Isaac Newton, se narodil v anglickém Woolsthorpe a patří právem mezi nejuznávanější vědce všech dob. Ve svém díle *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* publikovaném v roce 1687 položil základy klasické mechaniky. V matematice patří Newton mezi první objevitele diferenciálního a integrálního počtu (Ackroyd, 2010).

Obrázek 15: Isaac Newton

Co se týče výpočtu čísla π, Newton uvažoval kružnici, jejíž rovnice je $y = \sqrt{x - x^2}$, tedy kružnici s poloměrem $\frac{1}{2}$ a středem v bodě $y = 0, x = \frac{1}{2}$.



Obrázek 16: Newtonova metoda výpočtu π

„Kruhová úseč ADB tedy bude mít obsah:

$$a = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{(x - x^2)dx} = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x\sqrt{(1-x)}dx}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{5}\right)x^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{1}{28}\right)x^{\frac{7}{2}} - \left(\frac{1}{72}\right)x^{\frac{9}{2}} \dots \Big|_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{2}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9} - \dots$$

kde Newton užil binomickou větu.

Z druhé strany úseč ACD se rovná výseči ACD zmenšené o trojúhelník BCD, a protože $CD = \frac{1}{2}, BD = \frac{\sqrt{3}}{4}$, *Newton našel* $a = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$. “ (Beckmann, 1998, s. 118).

Postupně Newton dospěl k vyjádření $\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9} - \cdots\right)$. Tímto způsobem získal hodnotu π a pro určení 16 desetinných míst mu stačilo pouze 22 členů, což ve srovnání s Archimédovou metodou, kde pro určení 2 desetinných míst bylo zapotřebí počítat s 96 stranami mnohoúhelníku a čtyřnásobného výpočtu odmocnin byla Newtonova metoda daleko rychlejší a jednodušší (Beckmann, 1998).

2.3.9 John Machin (1680-1751)

John Machin londýnský profesor astronomie je nejvíce známý zrychlením konvergence Gregoryho řady a zjednodušením daného výpočtu.

Pro $tg\ \beta = \frac{1}{5}$ máme

$$tg\ 2\beta = \frac{2\ tg\ \beta}{1 - tg^2\beta} = \frac{5}{12}$$

a

$$tg\ 4\ \beta = \frac{2\ tg\ 2\ \beta}{1 - \ tg^2 2\ \beta} = \frac{120}{119}.$$

Hodnota $\frac{120}{119}$ se liší pouze o $\frac{1}{119}$ od 1, jejíž $arctg\ x = \frac{\pi}{4}$. Pokud daný rozdíl vyjádříme v úhlech, dostáváme:

$$tg\ \left(4\ \beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\ 4\beta - 1}{1 + tg\ 4\beta} = \frac{1}{239},$$

a tedy

$$arctg\ \left(\frac{1}{239}\right) = 4\beta - \frac{\pi}{4} = 4\ arctg\ \left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

Následným dosazením do Gregoryho řady pro 2 $arctg$ dostal Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^3} + \frac{1}{5 \times 239^5} - \cdots\right).$$

Díky tomuto malému triku, kdy druhá řada konverguje velice rychle a naopak první se hodí pro výpočty, Machin vypočítal v roce 1706 π na 100 míst (Beckmann, 1998).

2.3.10 Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler je právem řazen mezi největší matematiky všech dob. Euler se narodil v roce 1707 ve švýcarské Basileji, již od dětství vynikal v matematice a jeho talent rozpoznal Johann Bernoulli, který začal Eulera soukromě vyučovat (Fuchs, 2001).

Obrázek 17: Leonhard Euler

Také Euler uvedl několik možných výrazů vyjádřených pomocí nekonečných součinů a řetězových zlomků pro výpočet π. Euler využil Machinův trik a odvodil vzorce:

$$arctg\frac{1}{p} = arctg\frac{1}{p+q} + arctg\frac{q}{p^2+pq+1}$$

a

$$arctg\frac{x}{y} = arctg\frac{ax-y}{ay+x} + arctg\frac{b-a}{ab+1} + arctg\frac{c-b}{cb+1} + \cdots.$$

Všechny dané výrazy jsou odvozeny od řady pro $arctg$ a Eulerovi se podařilo najít takovou řadu, která konverguje rychleji než ostatní

$$arctg\, x = \left(\frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2\times 4}{3\times 5}y^2 + \frac{2\times 4\times 6}{3\times 5\times 7}y^3 + \cdots\right),$$

kde

$$y = \frac{x^2}{(1+x^2)}.$$

Díky tomu vypočetl π na 20 desetinných míst za pouhou hodinu. Euler se problematikou výpočtu π zabýval tak důkladně, že nikdo v historii již neobjevil lepší způsob výpočtu jeho hodnoty a ukončil jeho historii, co se týká numerického výpočtu (Beckmann, 1998).

2.3.11 Počítačová éra

S nástupem moderních technologií se honba za vyčíslením hodnoty čísla π dostává do jiných rozměrů, tam kde lovci čísel v 18. a 19. století pracovali se záznamy s desítkami a stovkami desetinných míst, počítače a jejich programátoři jsou schopni zpracovat záznamy s tisíci a stovkami tisíc číslic.

První výpočet hodnoty čísla π pomocí počítače byl proveden v září roku 1949 na ENIACu (Elektronic Numerical Integrator and Computer) v Laboratořích pro balistický výzkum americké armády. Počítač byl v té době schopen spočítat hodnotu π na 2 037 desetinných míst za 70 hodin, což bychom v dnešní době mohli považovat za poměrně dlouhou dobu, ale ve srovnání s ručním výpočtem neskutečně krátkou. Výpočet π byl programován na základě Machinova vzorce (viz kapitola 2.3.5.).

Výpočty hodnoty π se s postupem času a s nástupem lepších a rychlejších technologií zrychlovaly. V září 1954 a lednu 1955 byl počítač NORC (Naval Ordnance Research Calculator) v Dahlgrenu ve Virginii naprogramován pro výpočet π na 3 089 desetinných míst a tento výpočet zabral pouhých 13 minut. Tento rekord byl záhy překonán v roce 1957 ve Ferranti Computer Centre v Londýně, kdy počítač Pegasus spočítal 10 021 desetinných míst za 33 hodin. V červenci 1958 se poprvé odhad dostal na 10 000 desetinných míst a to během 1 hodiny a 40 minut. K naprogramování počítače IBM 704 byla použita kombinace vzorce Machinova a Gregoryho řady (viz kapitola 2.3.5.). Jen o tři roky později, v červenci 1961 byl použit Machinův vzorec k naprogramování počítače IBM 7090, což vedlo k získání 20 000 desetinných míst během 39 minut. O dalších šest let později, v únoru 1967 došlo k naprogramování počítače CDC 6600, což poskytlo 500 000 míst. Jak můžeme vidět díky neustálému vylepšování hardwaru i softwaru dochází k vyčíslení hodnoty π na dalších a dalších desetinných míst (Beckmann, 1998).

2.4 Iracionalita čísla π

Díky Eulerovu objevení dalších desetinných čísel hodnoty π nastal nový problém, nad kterým se matematikové z celého světa pozastavili, a to jaké číslo π vlastně je, zda racionální či iracionální, algebraické nebo transcendentní. Již staří Řekové znali existenci iracionálních čísel, které označovali jako nesouměřitelná. I sám Aristoteles si byl vědom důkazu, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo. Důkazem bylo *reductio ad absurdum*:

Předpokládejme tedy, že $\sqrt{2}$ můžeme vyjádřit jako poměr celých čísel p/q, pak tedy jen jedno z nich může být sudé, jinak by bylo možné krátit 2.

$$\sqrt{2} = p/q$$

$$2q^2 = p^2,$$

z toho plyne, že p^2, a tudíž i p musí být sudé ($p = 2r$) a tedy q musí být liché.

Ale podle:

$$2q^2 = 4r^2$$

je q^2 a tedy i q sudé, tedy předpoklad $\sqrt{2} = p/q$ není správný (Beckmann, 1998).

Jedna z důležitých vlastností čísla π je tedy ta, že je to číslo iracionální a není tedy možné jej vyjádřit jako podíl celých čísel. Tuto skutečnost dokázal v roce 1767 německý matematik Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Lambert ve svém pojednání *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectfication des Cierculs suchen* (Předběžné znalosti pro ty, kdo se snaží o kvadraturu a rektifikaci kruhu) zkoumal řetězové zlomky a dokázal tento teorém:

Jestliže x je racionální číslo od nuly různé, pak tg x nemůže být racionální.

Odsud plyne, že

Jestliže tg x je racionální, pal x musí být iracionální nebo nula.

Protože $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ je racionální, pak $\frac{\pi}{4}$ musí být iracionální, tedy iracionalita π je dokázána (Žáčková, 1966).

Také francouzský matematik Adrien-Marie Legendre (1752-1833) ve svém díle *Elements de Géometrie* v roce 1794 dokázal iracionalitu π a podal také důkaz že π^2 je iracionální. Zároveň ve svých úvahách zmiňuje, že π není ani mezi algebraickými iracionalitami, tedy nemůže být kořenem algebraické rovnice s konečným počtem členů, jejíž koeficienty jsou racionální. Dnes již víme, že Legendre měl ve svých úvahách pravdu, důkaz byl ale natolik obtížný, že byl nalezen až za dlouhých 88 let německým matematikem Ferdinandem von Lindemannem (1852-1939). Lindemann v roce 1882 publikoval důkaz transcendence čísla π, jeho postup byl podobný metodě, kterou využil v roce 1873 Charles Hermite (1822-1901), který dokázal, že číslo e je transcendentní (Beckmann, 1998).

3 Eulerovo číslo, *e*

Eulerovo číslo e, které má přibližnou hodnotu 2,71828 je ve srovnání s Ludolfovým číslem π relativním „nováčkem“ na matematické scéně a sahá přibližně do 17. století, kde se objevuje výraz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ve vztahu pro složené úrokování. Stejně jako číslo π je iracionální, tedy jeho desetinný rozvoj je nekonečný a neperiodický. A je také transcendentním číslem.

V dnešní době se jedná o velmi významnou konstantu, která je využívána nejen matematiky, ale i fyziky či astronomy.

3.1 Historie čísla *e*

Velmi významnou roli v historii čísla *e* hraje skotský matematik, fyzik a astronom John Napier (1550-1617), který v roce 1614 publikoval knihu *Mirifici logaritmorum canonis descriptio* (Popsání podivuhodného zákona logaritmů). V této práci Napier uvádí nejen pravidla pro počítání s logaritmy, ale také tabulku funkčních hodnot přirozených logaritmů funkce sinus, které umožňovaly převést násobení a dělení na sčítání a odečítání. V roce 1619, dva roky po smrti Napiera, dochází k vydání jeho druhé knihy *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, kde Napier vysvětluje, jak s logaritmy počítat. Díky těmto knihám je dnes Napier znám jako „vynálezce“ logaritmů (O’Connor, Robertson, 2020).

První písemná zmínka o konstantně *e* označované někdy také jako „Napierova konstanta“ se objevuje v pracích Johna Napiera a její historie je tedy úzce spojována s logaritmy. Avšak samotný objev konstanty jako takové je připisována Jacobu Bernoullimu (O’Connor, Robertson, 2020).

3.1.1 Jacob Bernoulli (1655-1705)

Jacob Bernoulli byl švýcarský matematik a fyzik, který na nátlak rodičů vystudoval filosofii a teologii na univerzitě v Basileji. Proti vůli svého otce se věnoval matematice a fyzice, od roku 1683 přednášel na univerzitě v Basileji experimentální fyziku a následně také matematiku (O’Connor, Robertson, 2020).

Obrázek 18: Jacob Bernoulli

V roce 1683 se Bernoulli pokusil vyřešit problém složeného úrokování a došel k limitě

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bernoulli si položil důležitou otázku, kolik člověk naspoří za jeden rok, pokud by byla roční sazba 100 % a úroky by se připisovaly k jistině v nekonečně krátkých intervalech. Bylo tedy nutné vypořádat se s výpočtem výrazu $S=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pro rostoucí hodnoty n. Výsledky takového výpočtu jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 1 Rostoucí hodnoty n při výpočtu složeného úrokování

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1 000	2,71692
10 000	2,71815
100 000	2,71827
1 000 000	2,71828

Jak můžeme vidět z tabulky je zřejmé, že jakýkoliv další vzrůst *n* ovlivňuje výsledek minimálně. Pomocí binomické věty Bernoulli dospěl k závěru, že hodnota limity se bude pohybovat v intervalu (2, 3), čímž učinil úplně první odhad hodnoty čísla *e* (Sikorová, 2000).

3.1.2 Leonhard Euler (1707-1783)

Významný matematik a fyzik Leonhard Euler se narodil 15. dubna 1707 ve švýcarské Basileji. Matematického vzdělání se mu dostalo již v útlém věku. Jeho otec si přál, aby se jeho syn stal duchovním, a proto v roce 1720 započal Euler svá studia na univerzitě v Basileji. Eulerův obrovský talent však rozpoznal Johann Bernoulli, který se rozhodl jej následně soukromě vyučovat a díky němuž Euler zanechal studia teologie a věnoval se dále jen studiu matematiky. V květnu 1727 odešel Euler do Petrohradu, kde prožil více než 30 let svého života (Thiele, 1982).

Euler působil nejen v rozmanitých oblastech matematiky, ale také v oblasti mechaniky, optiky či astronomie. V oblasti matematiky zavedl pojem funkce: *„Funkce proměnné veličiny je analytický výraz, který lze nějakým způsobem sestavit z proměnné veličiny, čísel a konstantních veličin.“* Roku 1727 použil poprvé písmeno *e* pro označení základu přirozeného logaritmu a v roce 1734 zavedl označení $f(x)$ jenž představuje funkci *f* aplikovanou na argument *x*. V roce 1777 jako první užil symbol *i* pro $\sqrt{-1}$ a v neposlední řadě to byl právě Euler, kdo podpořil používání řeckého písmena π k označení poměru obvodu kruhu k jeho průměru (Thiele, 1982).

Thiele (1982) uvádí, že roku 1748 publikoval Euler práci *Introductio in analysin infinitorum*, ve které uvedl pro reálné *x* vztah

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

který umožnil studovat funkce v komplexním oboru. V publikaci také vypočetl číslo *e* na 18 desetinných míst, i když bez postupu výpočtu. Euler se ve své publikaci také zabýval diferenciálním a integrálním počtem, zkoumal vyjádření funkcí pomocí součtu řad a v neposlední řadě dospěl k vyjádření *e*

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

a k vyjádření exponenciální funkce e^x

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N,$$

kde *N* značí nekonečně velké číslo. Toto vyjádření je možné přepsat do námi známého tvaru

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

3.2 Definice Eulerova čísla *e*

Definovat Eulerovo číslo je možné několika způsoby, v této práci se však budeme zabývat dvěma nejčastějšími definicemi této konstanty.

3.2.1 Limitní definice Eulerova čísla

K nejvýznamnějším definicím Eulerova čísla bezesporu patří limitní definice, přičemž zavedení Eulerova čísla pomocí limit je možné dvěma způsoby:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad\qquad e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

nicméně ve většině případů se setkáváme s limitou posloupnosti ve tvaru $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pokud chceme ukázat existenci této limity, budeme vycházet z poznatků o chování monotónní omezené posloupnosti (Sikorová, 2000, s.19):

Věta 3.1.: Nechť je dána neklesající posloupnost $\{\mathrm{a_n}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, kde je $\mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{a_n} \in \mathbb{R}$. Je-li tato posloupnost shora omezená, existuje $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{a_n} = \mathrm{a}.$$

Budeme potřebovat také nerovnost mezi aritmetickým průměrem n nezáporných čísel a jejich geometrickým průměrem, tzv. AG-nerovnost:

Lemna (AG-nerovnost): Nechť je $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ a nechť jsou x_k, kde $\mathrm{k} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$, nezáporná reálná čísla. Potom platí:

$$\mathrm{x_1 x_2 \dots . x_n} \le \left(\frac{\mathrm{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $\mathrm{x_1 = x_2 = \cdots = x_n}$.

Na základě předešlé věty a lemnatu můžeme vyslovit následující tvrzení (Sikorová, 2000, s. 20):

Věta 3.2.: Položme:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad n = 1,2, \ldots.$$

Pak je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

Důkaz (Sikorová, s. 20):

Podle definice je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí právě tehdy, když pro každé n je $a_n < a_{n+1}$. Důkaz provedeme pomocí AG-nerovnosti, kterou užijeme na součin n činitelů $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ a 1. Čímž získáme zápis ve tvaru

$$x_1 x_2 \ldots . x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a dále

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Na základě AG-nerovnosti platí $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, přičemž podmínka pro rovnost není splněna a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme ostrou nerovnost tvaru

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

Tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$je rostoucí.

Nyní položíme $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 + \frac{1}{n+1}, x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2$. Potom platí

$$x_1 x_2 \ldots . x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

a

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\frac{n+2}{n+1} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2}{n+1} := M_{n+1}.$$

Upravením dostáváme:

$$M_{n+1} = \frac{(n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n+1)^3} =$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}\right] \le$$

$$\le 1 + \underbrace{\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^k} + \cdots\right]}_{\text{geometrická řada s kvocientem } \frac{1}{n+1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n}.$$

Z těchto uvedených vztahů a AG-nerovnosti vyplývá, že $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, tato podmínka nerovnosti ovšem není splněna a pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy dostaneme:

$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n.$$

Posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy klesající.
Je tedy zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n,$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$a_n < b_n \le b_1 = 4.$$

Jak jsme dokázali, posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená a také rostoucí. Posloupnost s takovými vlastnostmi má tedy konečnou limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

3.2.2 Eulerovo číslo jako součet nekonečné řady

Druhou možnou definicí Eulerova čísla je pomocí nekonečné řady. Jak uvádí Sikorová (2000, s.23) budeme nyní vycházet z vyjádření Eulerova čísla ve tvaru $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$.
Pomocí binomické formule umocníme výraz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = 1 + n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{3} + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Následnými úpravami získáváme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Je zřejmé, že člen $\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ je menší než $\frac{1}{2!}$, stejně jako člen $\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$ je menší než $\frac{1}{3!}$.
Platí tedy:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Z uvedeného vztahu $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tedy vyplývá nerovnost $e \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.
Nyní ještě dokážeme obrácenou nerovnost, čímž získáme vyjádření konstanty *e* pomocí řady.

Nechť $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$ a platí:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$

a dále pak pro $m \to \infty$ dostáváme

$$e \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

a platí tedy

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ je řada s kladnými členy, tedy posloupnost částečných součtů je neklesající. Limita této řady je vlastní a řada je tedy konvergentní.

3.3 Vlastnosti Eulerova čísla *e*

Číslo *e* budilo velký zájem matematiků již od svého vzniku, a proto se také zkoumali jeho vlastnosti z různých hledisek. My jsme si v předešlých kapitolách ukázali, jak je možné určit hodnotu čísla a jak jej můžeme definovat, nyní se tedy zaměříme na důležité vlastnosti této konstanty.

3.3.1 Iracionalita Eulerova čísla *e*

Mnoho let se matematici zabývali otázkou, zda je číslo *e* racionální či iracionální. Dnes již dobře víme, že se číslo *e* řadí do skupiny čísel iracionálních. Důkazů iracionality existuje několik. Vyslovíme tedy toto tvrzení:

Věta 3.3.: Číslo *e* je iracionální.

Důkaz:

K ověření iracionality využijeme důkaz sporem a budeme tedy vycházet ze vztahu

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Budeme postupovat nepřímo. Předpokládejme tedy, že e je racionální číslo, takové číslo má tu vlastnost, že se dá napsat jako podíl dvou celých čísel. Nechť tedy

$e = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0$. Víme, že $2 < e < 3$, proto tedy e nemůže být celé číslo. Jmenovatel q tedy musí být roven alespoň 2.

Vynásobíme tedy obě strany rovnice číslem $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot q$. Dostáváme tak na levé straně vztah:

$$e \cdot q! = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot q = p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (q-1),$$

zatímco na straně pravé dostaneme vztah:

$$[q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot q + \cdots + (q-1) \cdot q + q + 1] +$$
$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots.$$

Je zřejmé, že levá strana je očividně celé číslo, protože je to součin celých čísel. Na pravé straně je výraz uvnitř závorek také celé číslo, ale zbývající členy již celá čísla nejsou, neboť jejich jmenovatel je roven alespoň 3.

Ukážeme si nyní, že ani jejich součet není celé číslo.

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots+\frac{1}{(q+1)\dots(q+k)}+\cdots<$$

$$<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(q+1)^k}+\cdots\dots=\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{q}.$$

Jak můžeme vidět, v posledním řádku jsme použili tvrzení o součtu nekonečné geometrické řady $a+ar+ar^2+\cdots=\frac{a}{1-r}$, pro $|r|<1$. Číslo $\frac{1}{q}$ leží v intervalu (0, 1), vzhledem k tomu, že číslo $q\geq 2$, pak můžeme říct, že $\frac{1}{q}\leq\frac{1}{2}$.

Dosadíme za $q=2$, čímž dostaneme:

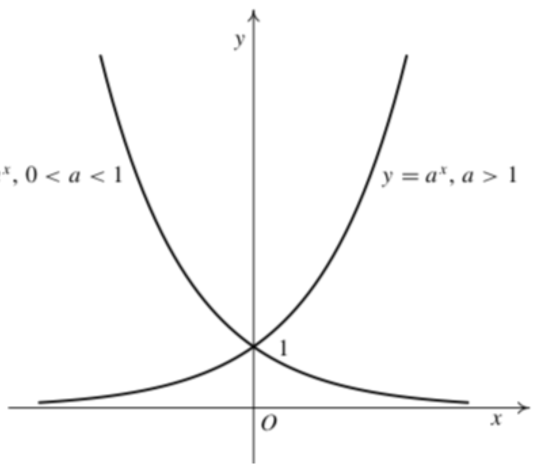
$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Z dané rovnice je zřejmé, že na levé straně máme celé číslo, zatímco na pravé číslo racionální, které není celé, což je samozřejmě spor. Proto číslo *e* nemůže být podílem dvou celých čísel a je to tedy číslo iracionální (Maor, 1994).

3.3.2 Eulerovo číslo *e* v diferenciálním počtu

Eulerovo číslo *e* má velmi významné postavení v diferenciálním počtu jako základ exponenciální funkce. Exponenciální funkce neboli exponenciála je matematická funkce o základu $a\in\mathbb{R}, a>0$, která má tvar $f(x)=a^x, x\in\mathbb{R}$.

Funkce a^x je rostoucí pro $a>1$ a klesající pro $a<1$ (Kuben, Šarmanová, 2006).



Obrázek 19: Exponenciální funkce

Význačnou exponenciální funkcí je funkce, jejímž základem je číslo e. Taková funkce se nazývá přirozenou exponenciální funkcí a pro tuto funkci platí, že přímka daná rovnicí $y = x + 1$ je tečnou grafu funkce e^x.

Je také známo, že tato funkce má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x) = f(x)$, tedy $(e^x)' = e^x$ (Finch 2003).

Eulerovo číslo je také základem přirozeného logaritmu, jedná se tedy o logaritmus $log_e(x)$, který má však svůj specifický zápis $ln\ x$ (Kuben, Šarmanová, 2006).

3.4 Eulerova identita

Eulerova identita či také Eulerova rovnost je považovaná za nejkrásnější rovnici světa. Euler dospěl k vyjádření e^x pomocí nekonečného součtu $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ a kolem roku 1750 jej napadla myšlenka nahradit v nekonečné řadě pro e^x proměnnou x imaginárním výrazem i, kde $i = \sqrt{-1}$.

Tedy:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots.$$

Vzhledem k tomu, že se celočíselné mocniny i periodicky opakují (tedy vždy 4 členy: $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$) zapsal Euler daný vztah následovně:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Po úpravě získal Euler následující vztah:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right).$$

Již v této době bylo známo, že výrazy nacházející se v závorkách představují mocninné řady trigonometrických funkcí pro $cos\ x$ a $sin\ x$ a tak Euler dospěl k proslulé nejkrásnější rovnici světa

$$e^{ix} = \cos x + isinx,$$

Díky níž dochází ke spojení exponenciální funkce s trigonometrií (Sikorová, 2001).

Eulerova rovnost je však pozoruhodná i z jiného pohledu, položíme-li $x = \pi$ $(cos\pi = -1, sin\pi = O)$, pak získáváme:

$$e^{\pi i} = -1.$$

Tento vztah však může zapsat také ve tvaru:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

čímž dochází ke spojení pěti nejdůležitějších a nejznámějších matematických konstant. Tedy 0 jako aditivní identity, 1 jako multiplikativní identity, π konstanty, která udává poměr obvodu kruhu k jeho průměru, i představující imaginární jednotku a v neposlední řadě Eulerovo číslo e (Dunham, 1999).

4 Zlatý řez, φ

Každé číslo je svým způsobem něčím výjimečné a zaslouží si určitou pozornost, přesto však existují tři konkrétní iracionální čísla, která je možné považovat za zajímavější než ostatní. Řadíme k nim již zmiňované konstanty π, *e* a v neposlední řadě také tzv. zlatý řez, který popisuje jistý geometrický poměr délek.

Zlatý řez, který označujeme řeckým písmenem φ, bývá označován také jako božský poměr, zlatý poměr, zlatý řez či zlaté číslo. Jako první označil tuto konstantu řeckým písmenem fí (φ) americký matematik Mark Barr na počátku 20. století, na počest starověkého mistra sochaře Feidia, který žil přibližně v letech 490-430 př. n. l. V odborných matematických publikacích se ale velmi často využívá jako symbol pro hodnotu zlatého řezu řecké písmeno tau (τ; z řeckého to-mí, což znamená „řez“ nebo „díl“, Livio, 2003).

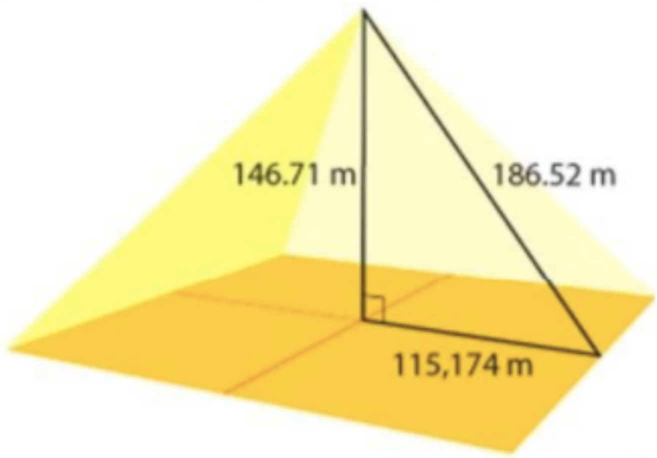
4.1 Historie zlatého řezu

Existence zlatého řezu je známá již velmi dlouhou dobu, není ovšem jasné, kdy byl použit poprvé. Je tedy poměrně složité sjednotit historii zlatého řezu, stejně tak jako pojmenování této fascinující konstanty. Oficiální název „zlatý řez“ poprvé použil německý matematik Martin Ohm ve své knize *Die reine Elementar-Matematik* (Čisté základy matematiky) v roce 1835. Avšak můžeme se setkat také s označením božský řez, zlatý poměr, božský poměr či zlaté číslo (Livio, 2003).

4.1.1 Starověký Egypt

Za úplně nejstarší vyjádření zlatého poměru je možné považovat stavby pyramid ve starověkém Egyptě. První písemný náznak se ukrývá již v Rhindově papyru, v dnešní době spíše nazývaném Ahmesovým papyrem, který byl sepsán přibližně okolo roku 1650 př. n. l. a obsahuje celkem 84 úloh. V tomto papyru se tvrdí, že v konstrukci pyramid je ukryt tajemný kvocient označovaný „seqt“, který historikové považují za zlaté číslo (Olsen, 2013).

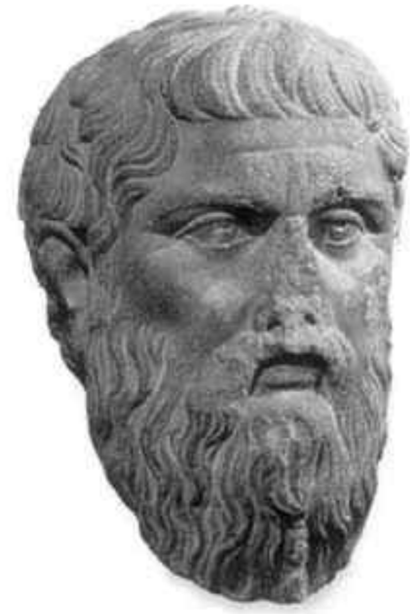
Obrázek 20: Cheopsova pyramida v Gíze



Obrázek 21: Zlatý řez v Cheopsově pyramidě

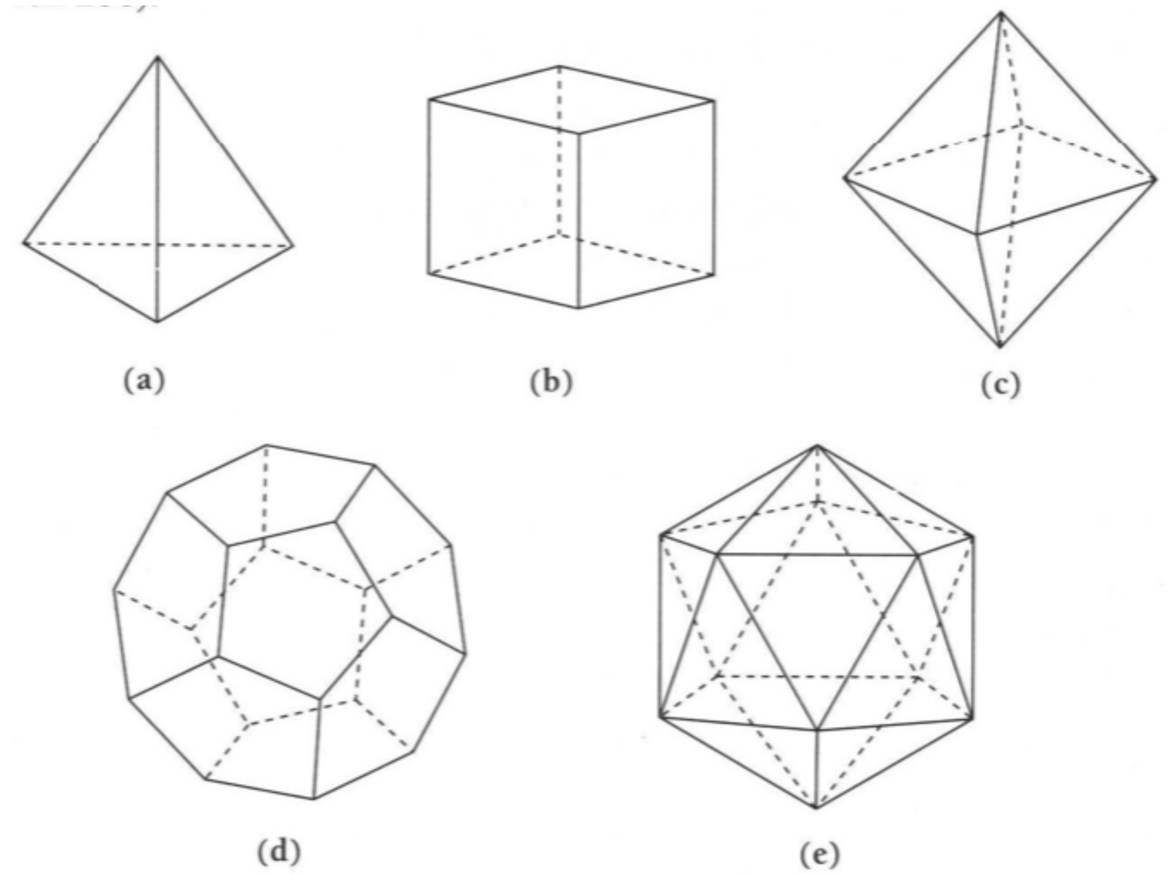
4.1.2 Antika – Platón, Feidiás, Euklidés

Řecký pedagog, matematik a filosof Platón (428/427 – 348/347 př. n. l.) je považován za prvního všestranně myslícího člověka v historii lidstva. Své výzkumy soustředil zejména na vesmír a hvězdnou oblohu. Během svého života přinesl světu mnoho objevů a veškeré nabyté vědomosti se snažil předávat nové generaci.



Obrázek 22: Platón

Se zlatým řezem je Platón spojován zejména prostřednictvím dvou fenoménů, a to nesouměřitelnost úseček a platónských těles. Platónská tělesa jsou jediná tělesa, jejichž stěny jsou totožné a rovnostranné a kolem každého z těles můžeme opsat kulovou plochu. Mezi platónská tělesa řadíme tetraedr se čtyřmi stěnami (a), hexaedr se šesti čtvercovými stěnami (b), oktaedr s osmi trojúhelníkovými stěnami (c), dodekaedr s dvanácti stěnami o tvaru pětiúhelníku (d) a ikosaedr s dvaceti stěnami ve tvaru trojúhelníku (Livio, 2003).



Obrázek 23: Platónská tělesa

První významnou stavbou, jejíž původní náčrty se dochovaly a dokazují tak záměrné použití zlatého řezu byl chrám Parthenón, který byl postaven architektem Iktinem a Kallikratem v Athénách na Akropoli. Dohledem nad sochařskou výzdobou a kontrolou stavby byl pověřen řecký sochař, malíř a architekt Feidiás (495-430 př. n. l.). Jeho nejvýznamnějším dílem byla socha Athény Parthenos a socha Dia v Olympii, která patřila k sedmi divům světa (Hemenway, 2009).

Obrázek 24: Parthenón

Nejstarší písemná zmínka o zlatém řezu pochází od řeckého matematika Eukleida (přibližně 325-260 př. n. l.), který působil v první Alexandrijské škole a je řazen k nejvzdělanějším učitelům všech dob. Jeho nejproslulejší třináctisvazkové dílo *Στοιχεία* [Stoicheia] (Základy) je považováno za nejvýznamnější matematickou učebnici, která byla využívána ještě po mnoho staletí. Ve svém díle Euklidés uvádí konstrukci zlatého řezu, vysvětluje, jak je možné jeho hodnotu vypočítat a v neposlední řadě popisuje, ve kterých geometrických útvarech je možné zlatý řez nalézt. Euklidés ve svém díle nakreslil úsečku, kterou následně rozdělil ve zlatém poměru, toto rozdělení nicméně označil jako rozdělení úsečky v krajním a středním poměru (Hemenway, 2009).

Obrázek 25: Euklidés

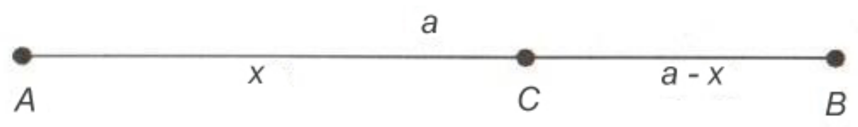
4.1.3 Renesance – Luca Pacioli

Po antickém období nastává poměrně dlouhá pomlka, kdy se zlatý řez vytratil z povědomí lidí a znovu se objevuje až v období renesance (15. století) a to zejména v Itálii. Na Euklidovu práci navázal italský františkánský mnich a matematik Luca Pacioli (1445-1517), který je znám především díky podvojnému účetnictví. Pacioli vydal roku 1509 pojednání *Divina Proportione* (O božském poměru), které je doprovázené ilustracemi Leonarda da Vinci, jenž považoval zlatý řez za ideál krásy a harmonie. Toto pojednání obsahuje zajímavý soubor příkladů výskytu zlatého řezu v rovinných obrazcích i tělesech (Livio, 2003).

4.2 Zlatý řez v matematice

Z matematického hlediska se zlatý řez vysvětluje jako poměr či úměra. Jako poměr označujeme vztah jednoho čísla k jinému. V případě, že se dva poměry rovnají, hovoříme o úměře. Úměra se obvykle sestává ze čtyř členů (např. $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$), kterou pythagorejci označovali jako čtyřčlennou nespojitou úměru. Mezi dvoučlenným poměrem a čtyřčlennou úměrou se nachází trojčlenný průměr, pro který platí, že dva poměry mají jeden člen společný (např. $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$). Číslo 3, které mají oba poměry společné, označujeme jako geometrický průměr nebo také střední geometrická úměrná, což pythagorejci označili jako trojčlennou spojitou geometrickou úměrou a je typická právě pro zlatý řez (Olsen, 2013).

Zlatý řez je možné popsat mnoha způsoby nicméně nejvíce využívané vyjádření je na úsečce, jak jej zmiňoval také Eukleides ve své knize.



Obrázek 26: Úsečka AB rozdělená zlatým řezem

Dle obrázku 24 vidíme, že úsečka rozdělená zlatým řezem, je rozdělená na dvě nestejně dlouhé části tak, že poměr délky celé úsečky *AB* ku délce větší části úsečky *AC* je stejný jako poměr délky větší části úsečky *AC* ku délce části menší úsečky *CB*. Matematicky tuto úměru zapíšeme takto: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ (Chmelíková, 2011).

4.2.1 Definice zlatého řezu

Uvažujme úsečku *AB*, na níž leží bod *C*. O bodu *C* řekneme, že dělí úsečku *AB* v poměru zlatého řezu, jestliže pro délky uvažovaných úseček platí vztah:

$|AB| : |AC| = |AC| : |CB|,$

tedy poměr délek celé úsečky a její delší části je roven poměru délek její delší části a kratší části. Pokud označíme velikost úsečky *AB* písmenem *a*, tzn. $|AB| = a$ a délky její delší části písmenem *x*, tzn. $|AC| = x$, získáme úměru ve tvaru:

a : x = x : (a-x).

Vyjádříme-li úměru pomocí zlomků ve tvaru $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ a provedeme-li několik úprav, získáme tak kvadratickou rovnici s parametrem *a*:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \qquad /.\,x(a-x)$$

$$a\,(a-x) = x^2$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Vyřešením této kvadratické rovnice postupně získáme řešení ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,a$$

Je zcela zřejmé, že kořen kvadratické rovnice $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,a$ je kladný, ale naopak kořen $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,a$ je záporný. Druhý kořen kvadratické rovnice nemůžeme použít, neboť nemůže existovat záporná velikosti úsečky. Převrácená hodnota kladného řešení této kvadratické rovnice pak představuje hodnotu φ, tedy $\varphi = \frac{1}{x_1}$. Číslo φ se označuje jako zlaté číslo (Reichl, Všetička, 2020).

Při uvažování jednotkové délky *a = 1* pak získáváme výsledek:

$$\varphi = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} . \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{2\,(-1-\sqrt{5})}{-4} =$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989 \ldots$$

4.2.2 Vlastnosti zlatého řezu

Je zřejmé, že při výpočtu hodnoty φ získáváme číslo nekončícího a neperiodického desetinného rozvoje, které nelze vyjádřit jako podíl dvou celých čísel, tudíž se jedná o číslo iracionální, které nelze vyjádřit zlomkem (Reichl, Všetička, 2020).

Jak je vidět v předešlé kapitole, v případě volby $a = 1$ získáváme hodnotu $\varphi = 1{,}6180339887\ldots$ a hodnota kladného kořene $x_1 = 0{,}6180339887\ldots$ Jak vidíme, všechny čísla za desetinou čárkou jsou stejná. Velmi zajímavá je také druhá mocnina zlatého čísla, která se liší pouze v jednom místě, a to před desetinnou čárkou, kde se místo jedničky nachází dvojka, tedy $\varphi^2 = 2{,}6180339887\ldots$ (Livio, 2003).

Číslo φ má uplatnění téměř ve všech oblastech, tedy kromě matematiky a architektury se s ním setkáváme také v botanice, zoologii, krystalografii či v chemii. I přesto se jedná o matematickou konstantu méně známou nejen mezi žáky a studenty, ale také mezi některými učiteli (Hejl, 1995).

4.3 Zlatý řez a rovinné útvary

Zlatý řez poměrně často nalézáme v mnoha rovinných i prostorových geometrických útvarech, proto se v následující podkapitole budeme věnovat této problematice a uvedeme si nejtypičtější příklady.

4.3.1 Konstrukce zlatého řezu

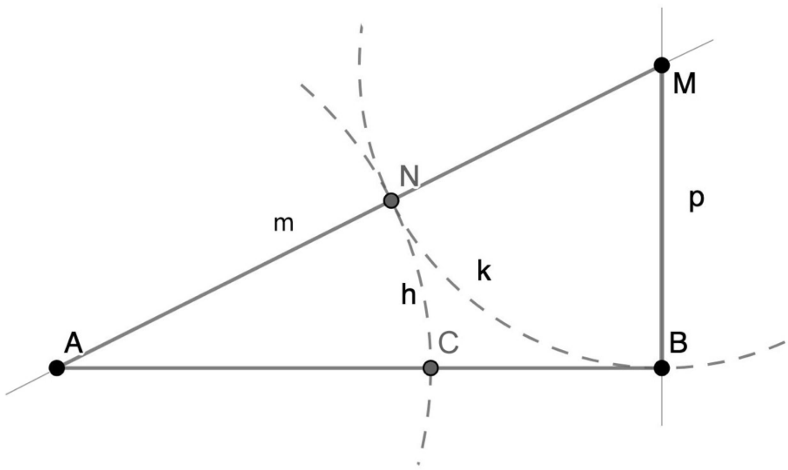
Způsobů, jak je možné konstrukčně rozdělit úsečku zlatým řezem je poměrně mnoho. My si v této práci ukážeme konstrukci zlatého řezu, kterou použil řecký matematik a vynálezce Hérón Alexandrijský (10-70 n. l.).

Mějme dánu úsečku AB libovolné délky, poměrně jednoduchým způsobem ji můžeme rozdělit na dvě nestejné části, které jsou ve zlatém poměru. K úsečce AB sestrojíme v bodě B kolmici p, na kterou naneseme poloviční velikost úsečky AB, čímž získáváme bod M. Nyní můžeme sestrojit pravoúhlý trojúhelník ABM. Narýsujeme kružnici k se středem v bodě M a poloměrem BM. Průsečík kružnice k s úsečkou AM označíme jako bod N. Nyní narýsujeme druhou kružnici h s se středem v bodě A a poloměrem AN. Průsečík kružnice h s úsečkou AB

označíme jako bod C. Tento bod rozděluje úsečku AB právě ve zlatém řezu (Chmelíková, 2011).

Popis konstrukce (obrázek 27):

1. $\leftrightarrow p; p \perp AB, B \in p$
2. $M; M \in p, |MB| = \frac{1}{2}|AB|$
3. $k; k(M, |MB|)$
4. $\leftrightarrow m; m = \overleftrightarrow{AM}$
5. $N; N \in (k \cap AM)$
6. $h; h(A, |AN|)$
7. $C; C \in (h \cap AB)$



Obrázek 27: Konstrukce zlatého řezu

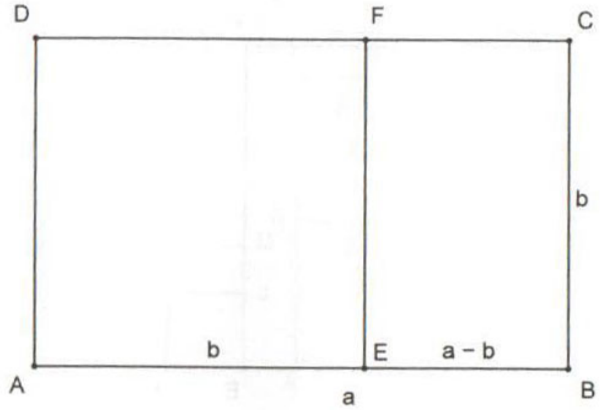
4.3.2 Zlatý obdélník

Zlatým obdélníkem označujeme takový obdélník s rozměry $a \times b, a > b$, pro který platí:

$$\frac{a}{b} = \varphi,$$

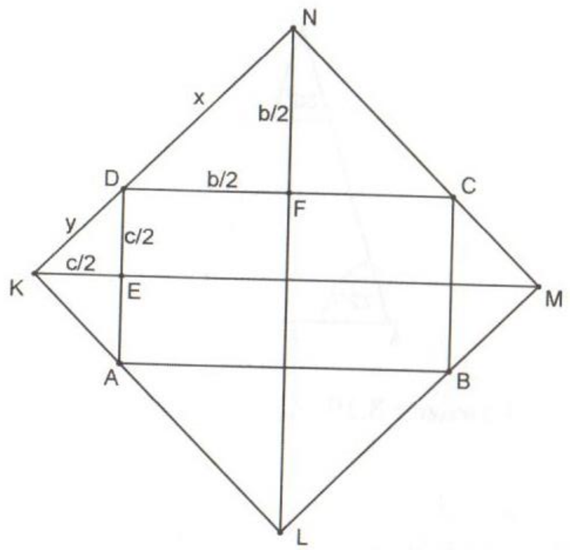
tedy délky stran tohoto obdélníku jsou v poměru zlatého řezu.

Zlatý obdélník má velmi zajímavou vlastnost, pokud od zlatého obdélníku $ABCD$ $(a \times b)$ oddělíme čtverec $AEFD$ $(b \times b)$, bude zbylý obdélník $BCFE$ $(b \times (a - b))$ opět zlatý (Chmelíková 2011).



Obrázek 28: Zlatý obdélník

Další poměrně zajímavou, ale také některými autory diskutovanou vlastností zlatého obdélníku, je ta vlastnost, že pokud vepíšeme zlatý obdélník do čtverce tak, že strany obdélníku jsou rovnoběžné s danými uhlopříčkami čtverce, pak budou vrcholy zlatého obdélníku dělit jednotlivé strany čtverce v poměru zlatého řezu.



Obrázek 29: Obdélník ve čtverci

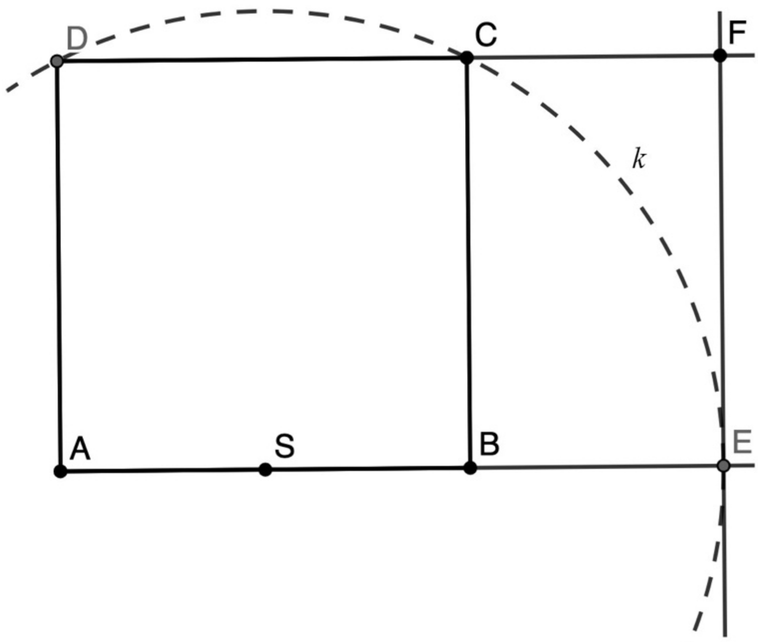
Problémem tohoto tvrzení je však fakt, že uvedená vlastnost funguje pro obdélník, jehož strany jsou v libovolném poměru, tedy pokud budeme vepisovat obdélník se stranami v poměru

3 : 4, budou jeho vrcholy dělit strany čtverce také v poměru 3 : 4. Výše zmíněné tvrzení tedy není zajímavou vlastností zlatého obdélníku, ale platí pro obdélník libovolných rozměrů (Chmelíková, 2011).

Ke konstrukci zlatého obdélníku můžeme opět využít mnoho způsobů, využijeme konstrukční úlohu, při které nejprve narýsujeme čtverec $ABCD$ o libovolné velikosti strany a. Určíme střed úsečky AB, $(S; S \in |AB|)$ a protáhneme polopřímku AB. Nyní narýsujeme kružnici k se středem v bodě S a poloměrem SC, která protne polopřímku AB. Vzniklý průsečík E nám již postačí k dorýsování zlatého obdélníku $AEFD$ (Livio, 2003).

Popis konstrukce (obrázek 30) je-li dána kratší strana *AD*:

1. $B, C; ABCD$ je čtverec
2. $S; S \in \frac{1}{2}|AB|$
3. $k; k(S, |SC|)$
4. $E; E \in (\mapsto AB \cap k)$
5. $\leftrightarrow p; p \perp AE, E \in p$
6. $F; F \in (\mapsto DC \cap p)$
7. obdélník $AEFD$



Obrázek 30: Konstrukce zlatého obdélníku

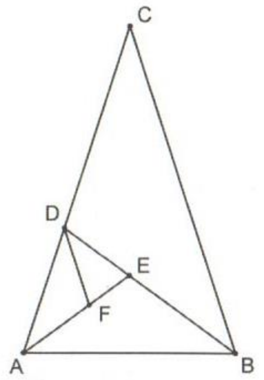
4.3.3 Zlatý trojúhelník

Jako zlatý trojúhelník označujeme rovnoramenný trojúhelník s ramenem délky r a základnou délky z, pro kterou platí:

$$\frac{r}{z} = \varphi.$$

Tedy poměr délek ramen a základny je zlaté číslo. Každý zlatý trojúhelník má při základnách úhly velikosti 72° a úhel při vrcholu trojúhelníku je roven 36° (Chmelíková 2011).

Zlatý trojúhelník má podobnou vlastnost jako zlatý obdélník, pokud tedy do zlatého trojúhelníku ABC se základnou AB vepíšeme rovnoramenný trojúhelník DAB s ramenem AB a základnou AD dostáváme opět zlatý trojúhelník. Tento postup je možné opakovat neustále a vepisovat tak stále menší a menší zlaté trojúhelníky (Kowal, 1975).



Obrázek 31: Vepsané trojúhelníky

4.3.4 Zlatá logaritmická spirála

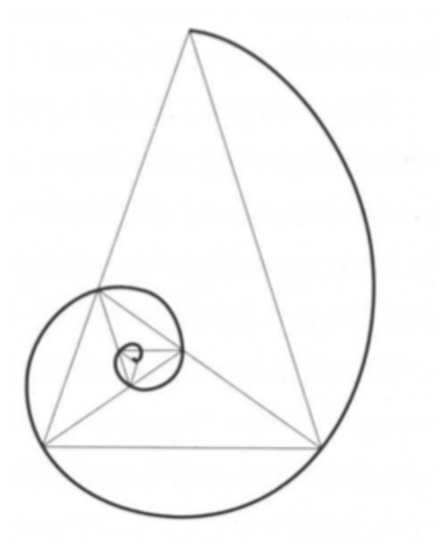
Spirály jsou rovinné křivky, které vznikají pohybem bodu po přímce, která se zároveň otáčí kolem svého počátku. Zlatá spirála je specifickým případem logaritmické neboli rovnoúhlé spirály, která se díky svému tvaru a pravidelnému zaplnění prostoru vyskytuje poměrně často v přírodě (Olsen, 2013).

Logaritmická spirála je taková křivka, jejíž poloměr r roste exponenciálně s velikostí úhlu. Její rovnice v polárních souřadnicích (r, Θ) má tvar:

$$r = a \cdot e^{b \cdot \Theta}$$

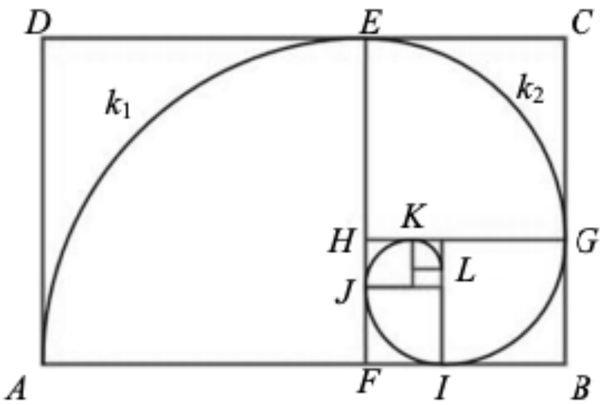
kde a, b jsou reálné konstanty a e je základ přirozeného logaritmu. Polární souřadnice nám udávají polohu bodu *A* pomocí jeho vzdálenosti *r* od počátku soustavy souřadnic *P* a polárním úhlu Θ (theta), který svírá polopřímka PA s kladným směrem osy *x* (Chmelíková, 2011).

Logaritmickou spirálu je možné vytvořit ze zlatého trojúhelníku, kdy postupně vepisujeme menší zlaté trojúhelníky. Vrcholy těchto trojúhelníků leží v logaritmické spirále. Spirálu můžeme zvětšovat či zmenšovat na jakýkoliv rozměr, ale její tvar se nemění, spirála roste stejnoměrně jak do délky, tak i do šířky (Kowal, 1975).



Obrázek 32: Zlatá spirála znázorněná pomocí zlatého trojúhelníku

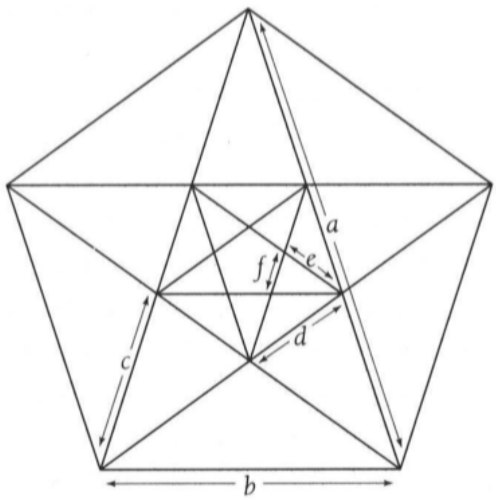
Zlatou spirálu je možné také nakreslit do zlatého obdélníku, který budeme postupně rozdělovat na čtverce a zlaté obdélníky. Přibližnou podobu zlaté spirály získáváme propojením bodů $AEGIJKL$ křivkou. Postupným oddělováním zlatých obdélníků pokračuje také zlatá spirála, která se zavíjí směrem k pólu, který dostal dokonce mystický název „boží oko“ (Vincent, 2007).



Obrázek 33: Zlatá spirála znázorněná pomocí zlatého obdélníku

4.3.5 Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný pětiúhelník je konvexní útvar, který má pět shodných stran a pět shodných vnitřních úhlů. Pokud všechny vrcholy pětiúhelníku spojíme uhlopříčkami, vznikne pěticípá hvězda označovaná jako pentagram. Každý cíp hvězdy je zlatým trojúhelníkem a v jejím středu dochází ke vzniku menšího pravidelného pětiúhelníku, ve kterém můžeme opět propojením vrcholů vytvořit menší pentagram. Platí tedy, že každá ze stran a, b, c, d, e, f je kratší než předešlá v poměru zlatého řezu, tedy φ (Vincent, 2007).



Obrázek 34: Pentagram

4.3.6 Fibonacciho posloupnost a vztah k φ

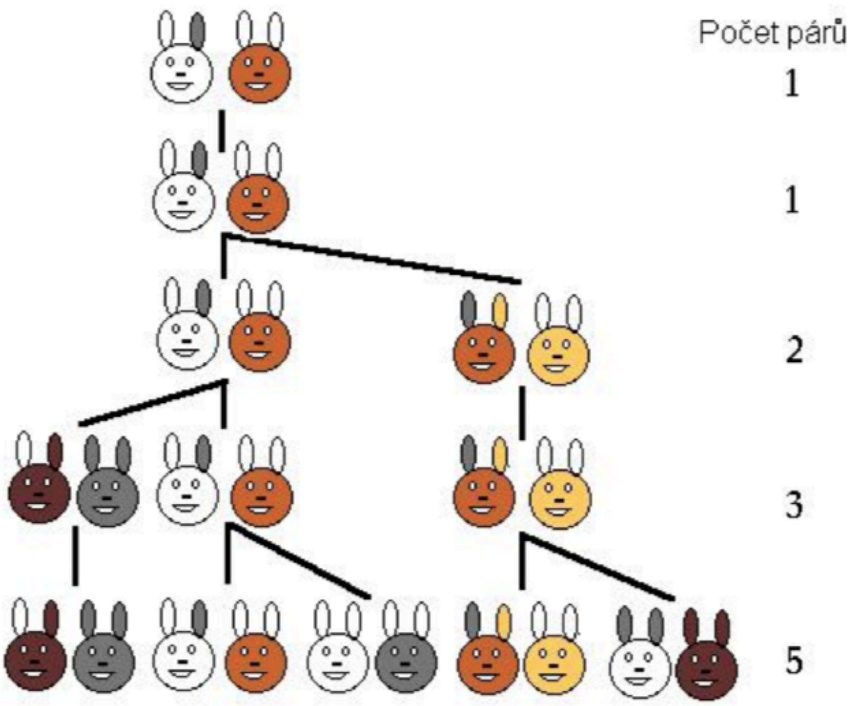
Se zlatým řezem velmi úzce souvisí nekonečná posloupnost přirozených čísel, pro niž platí přesně stanovená pravidla. S ideou této posloupnosti jako první přišel italský matematik **Leonardo Pisano** (cca 1170-1250), přezdívaný Fibonacci z latinského filius Bonacci, což v doslovném překladu znamená „syn dobrosrdečné povahy" (Livio, 2003).

Fibonacci se narodil pravděpodobně v roce 1170 v Itálii, avšak matematiku studoval v islámském městě Bugia, kde jeho otec Guilielmo zastával diplomatické posty. Své znalosti Fibonacci rozšířil také při svých cestách ve Středozemí a Orientu. Kolem roku 1200 se Fibonacci vrátil do Pisy, kde sepsal několik významných matematických spisů, avšak dochovaly se pouze kopie čtyř, a to *Flos* (Květ), *Practica geometriae* (Praxe geometrie), *Liber quaratorum* (Kniha čtverců) a *Liber abaci* (Kniha počtů), ve které Fibonacci zmiňuje známou úlohu o růstu populace králíků (O'Connor, Robertson, 2020).

Jak již jsme zmínili, celá Fibonacciho posloupnost proslula úlohou o množení králíků. Úkolem je zjistit, kolik párů králíků zplodí jeden pár králíků během jednoho roku, jestliže jeden pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. Úloha je velmi teoretická a pracuje pouze s ideálními králíky, předpokládá se tedy, že králíci jsou nesmrtelní. Danou situaci si uvedeme v následující tabulce, kde je znázorněn vývoj populace králíků během dvanácti měsíců. Danou situaci si nyní ukážeme v následující tabulce v prvních sedmi měsících (Dunlap, 1997).

Tabulka 2 Úloha o množení králíků

Počet párů v měsíci	**Leden**	**Únor**	**Březen**	**Duben**	**Květen**	**Červen**	**Červenec**
Dospělí	0	1	1	2	3	5	8
Mláďata	1	0	1	1	2	3	5
Celkový počet	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**



Obrázek 35: Schéma množení králíků

Této úlohy si v 19. století všimnul francouzský matematik Francois Édouard Anatole Lucas (1842-1891), když sepisoval svou knihu z oblasti rekreační a zábavné matematiky. Posloupnost čísel 1, 1, 2, 3,5, 8, 13, …, která se v úloze o králících objevila, nazval Lucas Fibonacciho posloupností a členy této posloupnosti označil jako Fibonacciho čísla (Nocar, 2018).

Fibonacciho posloupnost můžeme rekurentně zadat následujícím vztahem:

$$F_n = \begin{cases} 1 & pro\, n = 1 \\ 1 & pro\, n = 2 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & jinak \end{cases}$$

Jedná se tedy o nekonečnou posloupnost přirozených čísel definovaných jako součet dvou předchozích čísel, přičemž první dva členy jsou rovny jedné (Nocar, 2018).

Danou posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme zapsat vztahem:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; n \in \mathbb{N}, F_1 = 1, F_2 = 1.$$

Dunlap (1997) dále uvádí, že pokud budeme sledovat dostatečně dlouho vývoj členů Fibonacciho posloupnosti zjistíme, že poslední číslice se periodicky opakují. Také platí, že každé třetí číslo je sudé a každé čtvrté číslo je násobkem tří.

Výpočtem n-tého členu Fibonacciho posloupnosti se zabývali matematici Leonhard Euler a Abraham de Moivre v 18. století. Ovšem přesné matematické vyjádření uvedl francouzský matematik Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) v 19. století, podle něhož je tento vzorec pojmenován:

$$F_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}, kde\ a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Na tomto vztahu je poměrně zajímavé, že se zde objevuje hodnota zlatého řezu

$a_1 = \varphi, a_2 = \tilde{\varphi}$ (Dunlap, 1997).

Jak uvádí Chmelíková (2011, s. 14) dosadíme-li do Binetova vzorce postupně $n = 1$ a $n = 2$, musí nám vyjít $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$.

Tedy $n = 1$:

$$F_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1.$$

$n = 2$:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1.$$

A dále si ověříme, že pro Binetův vzorec platí rekurentní vztah $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{\varphi^{n-1} - \tilde{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-2} - \tilde{\varphi}^{n-2}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \tilde{\varphi}^{n-1}(\tilde{\varphi} + 1)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Velmi zajímavou souvislost Fibonacciho posloupnosti s hodnotou zlatého řezu φ objevil pravděpodobně německý matematik Johannes Kepler (1571-1630). Kepler zjistil, že podíl dvou sousedních čísel Fibonacciho posloupnost F_n, F_{n+1} konverguje k hodnotě zlatého řezu φ, tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

Podívejme se na přehled prvních deseti členů:

$$\lim_{n\to\infty} a_1 = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_2 = \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} a_3 = \frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\lim_{n\to\infty} a_4 = \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_5 = \frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\lim_{n\to\infty} a_6 = \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

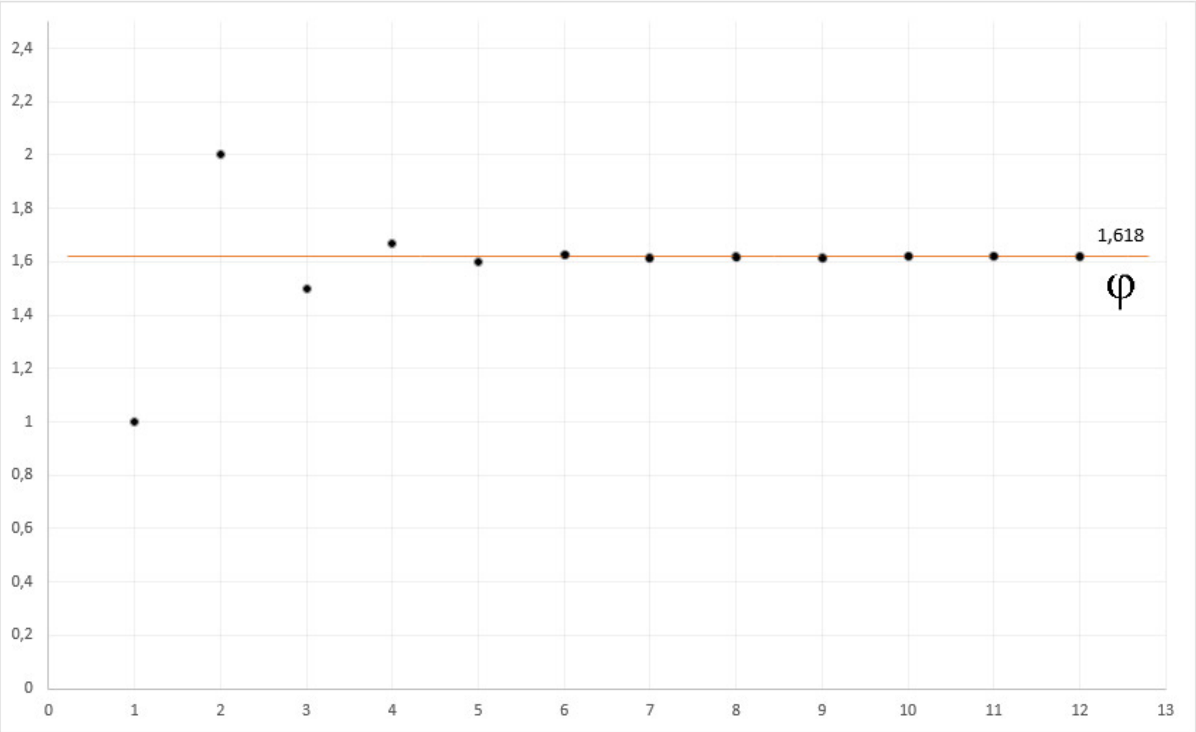
$$\lim_{n\to\infty} a_7 = \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} \doteq 1{,}615$$

$$\lim_{n\to\infty} a_8 = \frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} \doteq 1{,}619$$

$$\lim_{n\to\infty} a_9 = \frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} \doteq 1{,}6176$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{10} = \frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1{,}6\overline{18}.$$

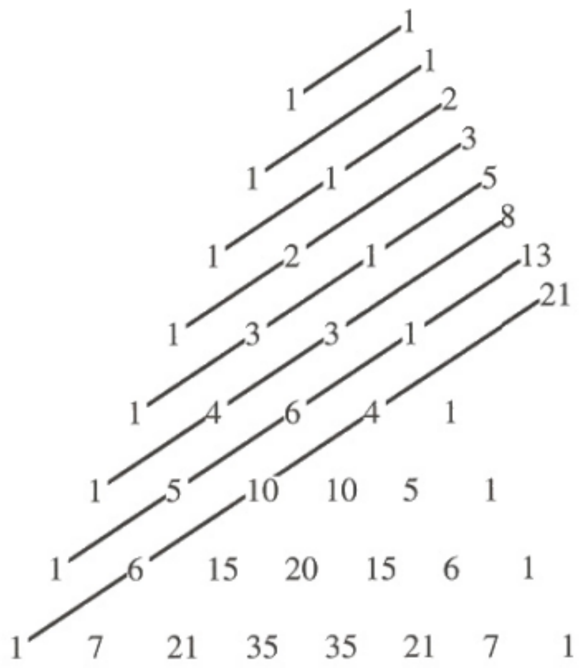
Jak vidíme, čím větší je n, tím více se hodnoty $a_n$blíží k hodnotě zlatého řezu φ. Tyto hodnoty podílu tedy oscilují kolem hodnoty zlatého řezu φ.



Graf 1: Konvergence hodnot podílu sousedních čísel Fibonacciho posloupnosti

Fibonacciho posloupnost je poměrně zajímavě ukryta také v Pascalově trojúhelníku. Jedná se o geometrické uspořádání binomických koeficientů do tvaru trojúhelníku, kde každé číslo je součtem dvou políček nad daným číslem, přičemž na prvním řádku píšeme číslo jedna.

Součet čísel na rovnoběžných přímkách uvedeného směru (viz. obrázek 36) dává koeficienty Fibonacciho posloupnosti (Walser, 2006).



Obrázek 36: Pascalův trojúhelník

5 Závěr

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo zejména proniknout do problematiky vybraných matematických konstant. V jednotlivých kapitolách jsme se postupně seznámili se třemi významnými matematickými konstantami, tedy s Ludolfovým číslem π, Eulerovým číslem e a zaltým číslem φ. Seznámili jsme se s poměrně bohatou historií daných konstant, s jejich možným vyjádřením, ale také s význačnými vlastnostmi. Je zcela zřejmé, že ne s každou konstantou přicházejí žáci běžně do styku. Na jedné straně zde máme jednu z nejznámějších konstant konstantu π, kterou využívají již žáci na základních školách, na straně druhé v práci zmiňuji konstantu, se kterou jsem se já sama setkala poprvé až v rámci studia vysoké školy, a to zlatým řezem označovaným symbolem φ.

Během studia literatury jsem zjistila, že ne každá konstanta má tak dlouhou a bohatou historii. Zatímco první písemná zmínka o Ludolfově čísle pochází z období okolo 2000 l. před n. l., s Eulerovým číslem se poprvé setkáváme až v letech 1614 v souvislosti s logaritmy a prací Johna Napiera. V historii jednotlivých konstant jsem se snažila uvést také významné osobnosti, jež se zasloužily nejen o objevení dané konstanty, ale také o její šíření. Kromě historie jsem v této práci nastínila také definování jednotlivých konstant, jejich důležité vlastnosti a v neposlední řadě také jejich provázanost.

Dnes je již známo poměrně velké množství matematických konstant, díky nimž často dochází ke zjednodušení některých matematických výpočtů a i v této práci by bylo možné pokračovat dále popisem a historií dalších konstant. Jednalo by se však o práci poměrně velkého rozsahu a troufám si říci, že není možné v rámci jedné publikace podat ucelený a detailní soupis všech doposud známých konstant. Myslím si však, že se mi podařilo dobře vystihnout důležitá fakta výše zmíněných matematických konstant a věřím, že tato práce může velmi dobře posloužit jiným studentům k pochopení dané problematiky.

Použitá literatura

ACKROYD, Peter. *Newton: stručný životopis.* Praha: Academia, 2010, 137 s. ISBN 978-80-200-1843-4.

BECKMANN, Petr. *Historie čísla π.* Praha: Academia, 1998, 169 s. ISBN 80-200-0655-9.

BEČVÁŘ, Jindřich, ŠTOLL, Ivan. *Archimedes: největší vědec starověku.* Praha: Prometheus, 2005, 72 s. ISBN 80-7196-273-2.

BEČVÁŘ, Jindřich, BEČVÁŘOVÁ, Martina, VYMAZALOVÁ, Hana. *Matematika ve starověku, Egypt a Mezopotámie.* Praha: Prometheus, 2003, 371 s. ISBN 80-7196-255-4.

DUNHAM, William. Euler: The Master of Us All.American Mathematical Society, 1999, 220 s. ISBN 978-0883853283.

DUNLAP, Richard A. *The golden ratio and Fibonacci numbers.* World Scientific Publishing, 1997, 172 s. ISBN 978-981-02-3264-1.

FINCH, Steven. *Mathematical Constants (Encyclopedia of Mathematics and its Applications Book 94).* New York:Cambridge University Press, 2003, 624 s. ISBN 978-0521818056.

FUCHS, Eduard. *Mathematics throughout the ages.* Praha: Prometheus, 2001, 307 s. ISBN 80-7196-219-8.

HEJL, Jiří. *Zlatý řez.* Učitel matematiky. 1995, roč. 1.

HEMENWAY, Priya. *Tajný kód: záhadný vzorec v umění, přírodě a vědě.* Praha: Slovart, 2009, 203 s. ISBN 978-80-7391-253-6.

CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice.* Praha: MATFYZPRESS, 2011, 180 s. ISBN 978-80-7378-191-0.

KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku.* Praha: Academia, 1968, 221 s. Bez ISBN.

KOWAL, Stanislav. *Matematika pro volné chvíle*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1975, 404 s. Bez ISBN.

KUBEN, Jaromír, ŠARMANOVÁ, Petra. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita, 2006, 345 s. ISBN 80-248-1192-8.

KVASZ, Ladislav. *Dějiny mocninných radov. Matematické obzory.* Bratislava: Nadácia Jura Hronca, 1994, 41, s.1-26.

LIVIO, Mario. *The Golden Ratio: The Story of PHI, the World`s Most Astonishing Number*. Broadway Book, 2003, 294 s. ISBN 978-0767908160.

MAOR, Eli. *e: The Story of a Number.* Princeton University Press, 1994, 223 s. ISBN 0-691-03390-0.

NOCAR, David. *Mezipředmětové vztahy s matematikou – matematika kolem nás: Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost. Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci.* MŠMT ČR – Fond vzdělávací politiky [online], 2018. [cit. 28.3.2020]. Dostupné z WWW: <https://www.pdf.upol.cz/fileadmin/userdata/PdF/VaV/2018/odborne_seminare/Nocar_Mezipredmetove_vztahy_s_matematikou_-_matematika_kolem_nas.pdf >.

O'CONNOR, John Joseph, ROBERTSON, Edmun Frederick. *MacTutor History of Mathematics archive* [online], 2019. [cit. 16.10.2019]. Dostupné z WWW: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>.

O'CONNOR, John Joseph, ROBERTSON, Edmun Frederick. *MacTutor History of Mathematics archive* [online], 2020. [cit. 27.01.2020]. Dostupné z WWW: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Indexes/N.html >.

O'CONNOR, John Joseph, ROBERTSON, Edmun Frederick. *MacTutor History of Mathematics archive* [online], 2020. [cit. 10.03.2020]. Dostupné z WWW: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci.html>.

OLSEN, Scott. *Záhadný zlatý řez: Největší tajemství přírody.* Praha: Dokořán, 2013, 68 s. ISBN 978-80-7363-566-4.

REICHL, Jaroslav, VŠETIČKA, Martin. *Encyklopedie fyziky: Dějiny matematiky a fyziky* [online], 2020 [cit. 20.02.2020]. Dostupné z WWW: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1400-dejiny-matematiky-a-fyziky>.

SIKOROVÁ, Renata. *Číslo e a jeho vlastnosti (3).* Učitel matematiky, 2000, roč. 9.

SIKOROVÁ, Renata. *Číslo e a jeho vlastnosti (4).* Učitel matematiky, 2001, roč. 9.

THIELE, Rüdiger. *Leonhard Euler*. Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1982, 192 s.

VINCENT, Robert. *Geometry of the Golden Section.* Marseille: Chalagam publ, 2007, 128 s. ISBN 978-2951960732.

WALSER, Hans. *The Golden Section.* Washington D.C.:Mathematical Association of America, 2006, 142 s. ISBN 0-88385-534-8.

ŽÁČKOVÁ, Jaroslava. *Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla pi*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 1966, roč. 11.

Seznam a zdroje obrázků

Příloha

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Soňa Kořínková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2020

Název práce:	Matematické konstanty
Název v angličtině:	Mathematical constants
Anotace práce:	Hlavním cílem bakalářské práce je seznámit se s problematikou vybraných matematických konstant, shrnout jejich historii a vlastnosti. Práce se věnuje třem významným konstantám a to Ludolfovu číslu π, Eulerovu číslu e a zlatému číslu φ. V kapitole zabývající se zlatým řezem je také nastíněna problematika a propojenost Fibonacciho posloupnosti se zlatým řezem φ.
Klíčová slova:	Ludolfovo číslo, Eulerovo číslo, zlatý řez, Fibonacciho posloupnost, matematické konstanty
Anotace v angličtině:	The main purpose of this thesis is to become familiar with chosen mathematical constants to summarize their history and characteristics. The thesis focused on three important constants and to Ludolf's number π, Euler's number e and Golden ratio φ. In the chapter which is devoted to the Golden ratio is also outlined the issue of connection between Fibonacci sequence and the Golden ratio φ.
Klíčová slova v angličtině:	Ludolf's number, Euler's number, Golden ratio, Fibonacci sequence, mathematical constants.
Přílohy vázané v práci:	Anotace
Rozsah práce:	63
Jazyk práce:	Český jazyk